3ª Lista de Exercícios – 1ª Avaliação

Curso: Ciências da Computação
Disciplina: 6876 – Álgebra Linear / Turma 2
Professor: Marcelo Alberti

<u>Sistemas de Equações Lineares</u>

1 – Resolva o sistema de equações, escrevendo as matrizes ampliadas, associadas aos novos sistemas.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

2 – Descreva todas as possíveis matrizes 2x2, que estão na forma escada reduzida por linhas.

3 – Reduza as matrizes à forma escada reduzida por linhas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

4 – Calcule o posto e a nulidade das matrizes da questão 3.

5 – Dado o sistema $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$, escreva a matriz ampliada, associada ao sistema e reduza-a à forma escada reduzida por linhas, para resolver o sistema original.

6 – Determine k, para que o sistema admita solução. $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$

7 – Encontre todas as soluções do sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = -1 \end{cases}$

8 – Explique porque a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

9 – Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.

ii) O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.

iii) O alimento III tem 3 unidades de vitaminas A, 3 unidades de vitamina C e não contém vitamina B.

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C,

a) Encontre todas as possíveis quantidades dos alimentos I, II e III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.

b) Se o alimento I custa 60 centavos por grama e os outros dois custam 10, existe uma solução custando exatamente R$ 1,00?

Resolva os sistemas seguintes achando as matrizes ampliadas linha reduzidas à forma escada e dando também seus postos, os postos das matrizes dos coeficientes e, se o sistema for possível, o grau de liberdade.

10 – $\{x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$

11 – $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$

12 – $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$

13 – $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \end{cases}$

14 – $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

15 – $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

16 – $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

17 – Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes, b_i, são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?
b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}$, tenha uma solução distinta da solução trivial (*x* = *y* = *z* = *0*).

18 – Dado o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z - w = -3 \\ x + y + 4z - w = -6 \\ 2y + 2z + w = 5 \end{cases}$$

a) Discuta a solução do sistema.

b) Acrescente a equação $\mathbf{2z + kw = 9}$ a este sistema, encontre um valor de k que torne o sistema incompatível.

19 – Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E.

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) de cada alimento, determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

iii) O alimento III tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.

iv) O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

v) O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

20 – Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada 10 m^2 140 g de nitrato, 190 g de fosfato e 205 g de potássio. Dispõe-se de quatro quantidades de adubo com as seguintes características:

i) Cada quilograma do adubo I custa 5 u.c.p. e contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio.

ii) Cada quilograma do adubo II custa 6 u.c.p. e contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 30 g de potássio.

iii) Cada quilograma do adubo III custa 5 u.c.p. e contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio.

iv) Cada quilograma do adubo IV custa 15 u.c.p. e contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 35 g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir efeito desejado se estamos dispostos a gastar 54 u.c.p. a cada 10 m^2 com adubação?

Determinante e Matriz Inversa

21 – Calcule det$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

a) Pela definição.

b) em relação à segunda coluna, usando o desenvolvimento de Laplace.

22 – Dadas as matrizes A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B=$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) detA + det B

b) det (A+B)

23 – Sejam A e B matrizes do tipo n x n. Verifique se as colocações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) det(AB) = det(BA)

b) det(A^t) = det A

c) det (2A) = 2 det A

d) det(A^2) = $(detA)^2$

e) $detA_{ij} < det\,A$

f) Se A é uma matriz 3x3, então $a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23}$

24 – Dada A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule:

a) A_{23} b) $|A_{23}|$ c) Δ_{23} d) detA

25 – Calcule det A, onde

a) A=$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) A=$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

26 – Encontre A^{-1}, onde

a) A=$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$

27 – Dada a matriz A=$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule

a) adj A   b) det A   c) A^{-1}

28 – Verificar quais das seguintes matrizes são inversíveis e determinar as inversas respectivas:

A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,   B=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e   C = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

29 – Resolver os seguintes sistemas de Cramer:

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \\ -x + y + z - t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y - 5z = 4 \end{cases}$

30 – Dado o sistema $\begin{cases} x + y - w = 0 \\ x - z + w = 2 \\ y + z - w = -3 \\ x + y - 2w = 1 \end{cases}$

a) Calcule o posto da matriz dos coeficientes.

b) Calcule o posto da matriz ampliada.

c) Descreva a solução deste sistema.

Bons estudos!