

Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Informática

Disciplina Computação Gráfica

Coletânea de Exercícios

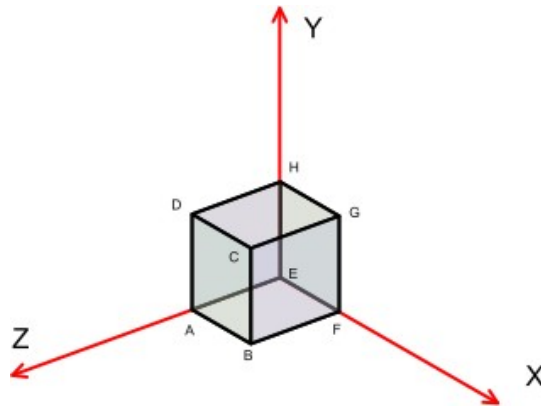
Transformações Geométricas Tridimensionais

2013

Exercício-01

Coletânea de exercícios de Computação Gráfica
Transformações Geométricas

Qual o efeito da transformação de distorção sobre um cubo unitário em que a matriz de distorção é a seguinte:



$$M_{Shear} = \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.85 & 1 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Shear} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.85 & 1 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Shear} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 0.75 & -0.25 & 0 & 1 & 0.25 & -0.75 \\ 1 & 0.15 & 1.15 & 2 & 0 & -0.85 & 0.15 & 1 \\ 1 & 0.75 & 1.45 & 1.7 & 0 & -0.25 & 0.45 & 0.7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

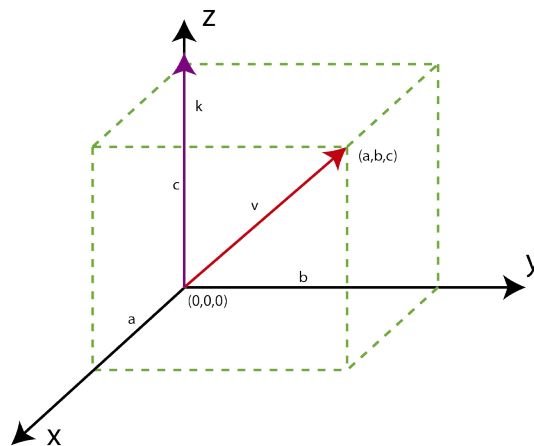
Observe que a origem não foi afetada pela transformação de distorção.

Exercício-02

(Plastock). Determine a transformação que alinha um dado vetor \vec{v} com um vetor \vec{k} ao longo do eixo 0z.

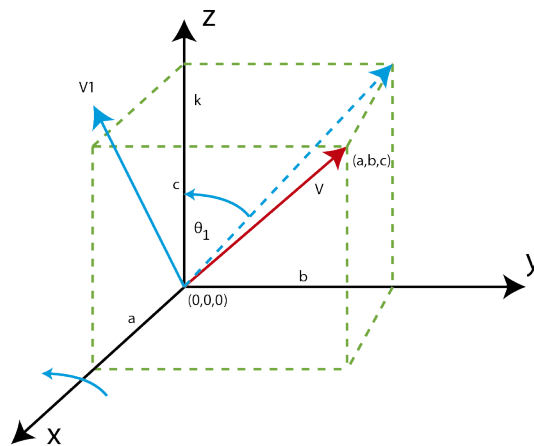
Resposta:

Temos que alinhar o vetor \vec{v} com o vetor \vec{k} conforme a figura a seguir:

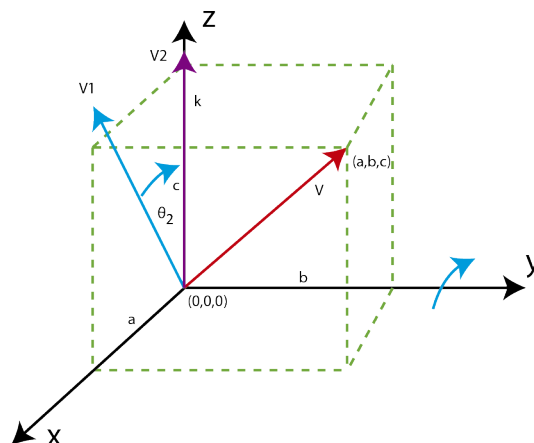


Fazemos o alinhamento através da seguinte sequência de transformações:

- a) Rotação de \vec{v} em torno do eixo 0x de um ângulo θ_1 , de forma que fique na metade superior do plano x0z (como o vetor \vec{v}_1).



- b) Rotação do vetor \vec{v}_1 em torno do eixo $0y$, de um ângulo $-\theta_2$
 de forma que coincida com o eixo $0z$ positivo (como o vetor \vec{v}_1)



$$\cos(\theta_1) = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a matriz de rotação ao vetor \vec{v} resulta o vetor \vec{v}_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{-b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a.1+0.0+0.0+0.1 \\ 0.a+\frac{cb}{\sqrt{b^2+c^2}}-\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}+0.1 \\ 0.a+\frac{b.b}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{c.c}{\sqrt{b^2+c^2}}+0.1 \\ 1.0+0.b+0.c+1.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2+c^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deduzindo o passo 2 a partir de 1 vemos a necessidade de uma rotação

$-\theta_2$ graus e assim temos

$$\text{sen}(-\theta_2) = -\text{sen}(\theta_2) = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos(-\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Então

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simplificando a matriz temos:

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e

$$\lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & 0 & \frac{-a}{|v|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|v|} & 0 & \frac{\lambda}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = R(\theta_2)R(\theta_1) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{-ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{-ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, se b e c são ambos nulos, então $\vec{v} = a \cdot \vec{i}$ assim temos:

$$\lambda = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Neste caso só é necessária uma rotação de $\pm 90^\circ$ em torno do eixo

0_y , assim, se $\lambda = 0$, temos:

$$R(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma podemos calcular a transformação inversa que faz o alinhamento do vetor \vec{k} com o vetor \vec{v}

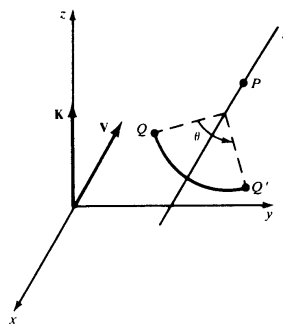
$$A_v^{-1} = (R_{-\theta_2, j} \cdot R_{\theta_1, i}) = R_{\theta_1, i}^{-1} \cdot R_{\theta_2, j}^{-1} = R_{-\theta_1, i} \cdot R_{-\theta_2, j}$$

$$A_v^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{v}|} & 0 & \frac{a}{|\vec{v}|} & 0 \\ \frac{-ab}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|\vec{v}|} & 0 \\ \frac{-ac}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{-b}{\lambda} & \frac{c}{|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz é a transposta de A_v

Exercício-03

(Plastock). Seja L um eixo de rotação especificado pelo vetor \vec{V} e pela localização do ponto P. Determine a transformação correspondente a rotação de θ° em torno de L. Observe a figura a seguir:



Resposta:

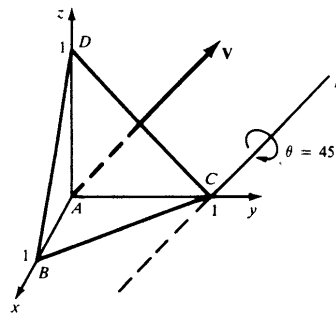
- Translação de P para a origem

- b) Alinhamento do vetor \vec{V} com \vec{K}
- c) Rotação de θ° em torno de \vec{K}
- d) Alinhamento do vetor \vec{K} com \vec{V}
- e) Translação de volta para P

Exercício-04

(Plastock). A pirâmide definida pelas coordenadas A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0) e D(0,0,1) é rodada de 45° em torno da linha L que tem direção $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ e que passa pelo ponto C(0,1,0). Determine as coordenadas do objeto rodado.

Resposta:



A partir do problema anterior a matriz de rotação $R_{\theta,L}$ pode ser determinada pela concatenação de matrizes

$$R_{\theta,L} = T_{-P}^{-1} \cdot A_v^{-1} \cdot R_{\theta,k} \cdot A_v \cdot T_P$$

Com $P = (0,1,0)$

$$T_{-p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para o vetor $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$, temos $a = 0$; $b = 1$ e $c = 1$ achamos

$\lambda = \sqrt{2}e|V| = \sqrt{2}$, assim temos as matrizes

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso

$$R_{45,k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{-p}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

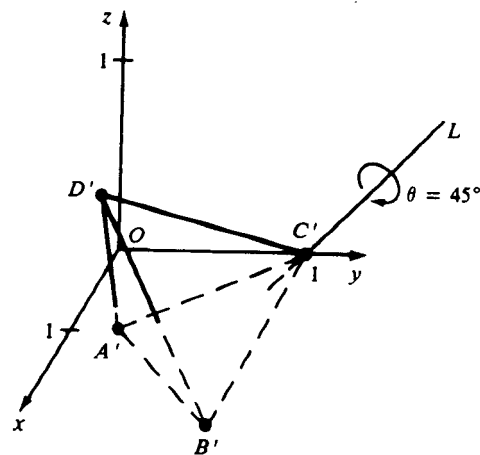
Para determinar as coordenadas do objeto rodado, aplicamos a matriz de rotação $R_{\theta,L}$ a matriz das coordenadas homogêneas dos vértices A,B,C e D é a seguinte:

$$C = (A, B, C, D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{4-\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-4}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

As coordenadas após a rotação são:



$$A' = \left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-2}{4} \right) = (0.5, 0.146, -0.146)$$

$$B' = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-4}{4} \right) = (1.20, 0.646, -0.646)$$

$$C' = (0, 1, 0)$$

$$D' = \left(1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (1, 0.292, 0.707)$$

$$A' = (0.500, 0.146, -0.146)$$

$$B' = (1.200, 0.646, -0.646)$$

$$C' = (0.000, 1.000, 0.000)$$

$$D' = (1.000, 0.292, 0.707)$$

Exercício-05

(Plastock). Determine a transformação $A_{v,n}$ que alinha o vetor \vec{V} com \vec{N} .

Resposta:

Construímos a transformação em dois passos em primeiro lugar, alinhamos o vetor \vec{V} com o Vetor \vec{K} ; em segundo lugar, alinhamos o vetor \vec{K} com o vetor \vec{N} , da seguinte forma;

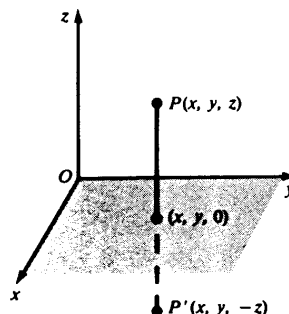
$$A_{v,n} = A_n \cdot A_v$$

Exercício-06

(Plastock). Determine a transformação correspondente a reflexão em relação ao plano xOy .

Resposta:

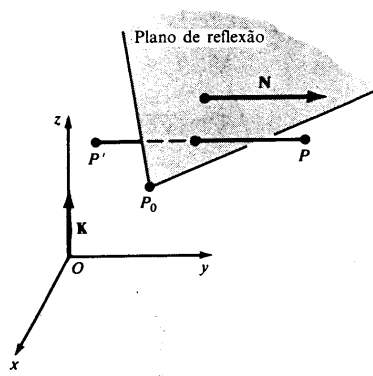
A partir de a figura a seguir é fácil de ver a reflexão de $P(x,y,z)$ é $P'(x,y,-z)$ a transformação que realiza esta operação é :



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercício-07

(Plastock). Determine a transformação correspondente à reflexão em relação a um dado plano.



Resposta:

Seja o plano de reflexão especificado por um vetor normal \vec{N} e um ponto de referência $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Para reduzir esta reflexão a uma reflexão em relação ao plano xOy , procede-se do seguinte modo:

- Translada-se P_0 para origem
- Alinha-se o vetor normal \vec{N} com o vetor \vec{K} que é normal ao plano xOy
- Faz-se a reflexão em relação ao plano xOy
- Invertem-se os passos 1 e 2

Assim, com o vetor translação:

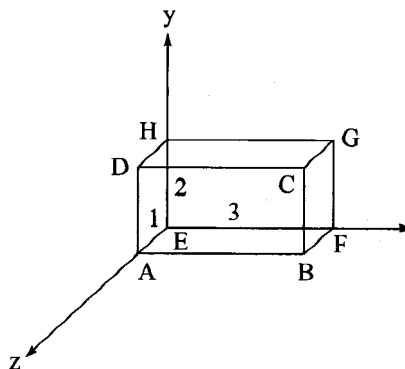
$$\vec{V} = -x_0\vec{i} - y_0\vec{j} - z_0\vec{k}$$

Tem-se:

$$M_{N,P0} = T_v^{-1} \cdot A_N^{-1} \cdot M \cdot A_n \cdot T_v$$

Exercício-08

(ISRD-Group) Considere um paralelepípedo situado com um dos vértices na origem tendo sobre o eixo x comprimento de 3, sobre o eixo y de 2 e sobre o eixo z de 1.



Realize inicialmente uma rotação de 90° sobre o eixo x e uma rotação de 90° sobre o eixo y.

Resposta:

Inicialmente vamos montar a matriz de representação do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora vamos apresentar a matriz de rotação em torno do eixo x de 90

$$R_{x90^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90) & -\sin(-90) & 0 \\ 0 & \sin(-90) & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando

$$R_{x90^\circ} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{x90^\circ} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora vamos rodar o objeto em relação ao eixo y em 90° . A matriz de rotação pode ser assim expressa:

$$R_{y\varnothing} = \begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

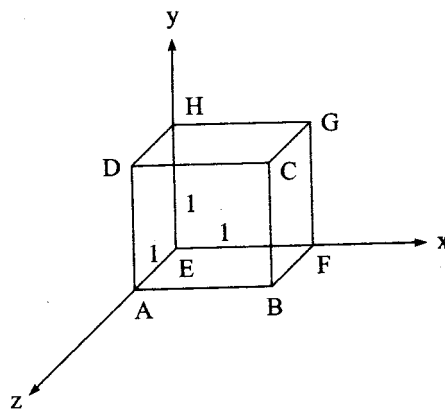
$$R_{y90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y90^\circ}.cubo = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y90^\circ}.cubo = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-09

(ISRD-Group) Faça a reflexão de um cubo unitário sobre o plano xy.



Resposta:

Vamos montar inicialmente a Matriz do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de reflexão é a seguinte:

$$M_{ref} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

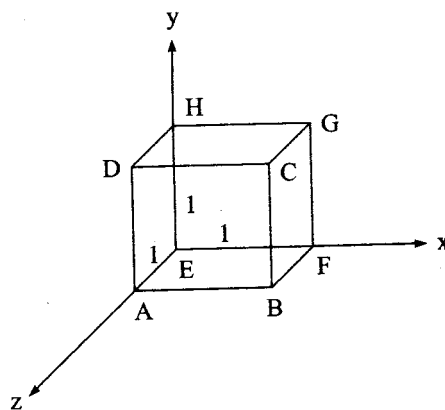
$$M_{ref} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{ref} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{ref} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-10

(ISRD-Group) Realize a transformação de escala uniforme de fator 2 ($S_x=S_y$) sobre um cubo unitário, conforme a figura a seguir:



Resposta:

Vamos montar inicialmente a Matriz do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de escala é a seguinte:

$$S_{2,2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{2,2,2} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{2,2,2} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolver este exercício seria valer-se do uso de coordenadas homogêneas e fazer $w = 1/2$, da seguinte forma:

$$S_{w=1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$S_{w=1/2} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{w=1/2} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Note que agora precisamos passar as coordenadas para o sistema cartesiano convencional da seguinte forma:

$$\left(\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w}, \frac{z'}{w}, \frac{w}{w} \right)$$

$$\left(\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w}, \frac{z'}{w}, 1\right)$$

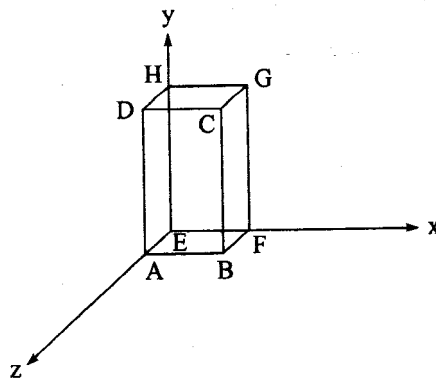
$$x = \frac{x'}{w}, y = \frac{y'}{w}, z = \frac{z'}{w}, 1 = \frac{w}{w}$$

Assim temos a matriz do Cubo para $w = 1$:

$$M_{cubo, w=1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-11

(ISRD-Group) Dado um paralelepípedo com dimensões de 2 sobre o eixo x em relação a origem, de 3 no eixo y e 1 no eixo z, efetue Realize a transformação de escala com os seguintes fatores: $S_x=1/2$, $S_y=1/3$ e $S_z=1$.



Resposta:

Vamos montar inicialmente a Matriz do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de escala é a seguinte:

$$S_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-12

(A.P.Godse) Encontre a matriz de reflexão com relação ao plano que passa pela origem e tem o seguinte vetor normal $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Resposta:

Para executar uma reflexão inicialmente trazemos o plano para a origem por meio de uma translação de um ponto conhecido do plano para (0,0,0). Assim, seja o plano de reflexão especificado por um vetor normal

\vec{N} e um ponto de referência $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Para reduzir esta reflexão

a uma reflexão em relação ao plano xOy , procede-se do seguinte modo:

- Translada-se P_0 para origem
- Alinha-se o vetor normal \vec{N} com o vetor \vec{K} que é normal ao plano xOy
- Faz-se a reflexão em relação ao plano xOy
- Invertem-se os passos 1 e 2

Assim, com o vetor translação:

$$\vec{V} = -x_0\vec{i} - y_0\vec{j} - z_0\vec{k}$$

No entanto este plano já passa pela origem e não é necessário fazer esta translação.

Deste modo as operações

$$M_{xOy, P0} = T_v^{-1} \cdot A_{k,n}^{-1} \cdot M \cdot A_{n,k} \cdot T_v$$

Podem ser reduzidas da seguinte forma:

Coletânea de exercícios de Computação Gráfica
Transformações Geométricas

$$M_{xOy, P0} = A_{k,n}^{-1} \cdot M \cdot A_{n,k}$$

A matriz de alinhamento do vetor V com o vetor K é a seguinte:

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{-ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e

$$\lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\lambda = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lembrando quen

$$A_{n,k}^{-1} = A_{k,n}$$

$$A_{n,k}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{xOy, P0} = A_{k,n}^{-1} \cdot M \cdot A_{n,k}$$

Temos

$$M_{xOy, P0} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

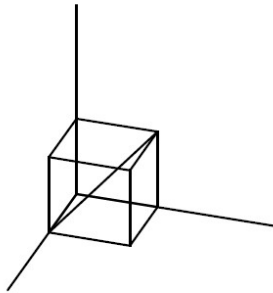
$$M_{xOy, P0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-12

Coletânea de exercícios de Computação Gráfica
Transformações Geométricas

(A.P.Godse) Um cubo é definido pelos seguintes vértices: A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), E(0,0,2), F(2,0,2), G(2,2,2) e H(0,2,2) é rotacionado de 45 graus sobre o eixo L formado pelos pontos P(2,0,0) e Q(0,2,2). Mostre as novas coordenadas do cubo.

Resposta:



$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = T_{-P}^{-1} \cdot A_v^{-1} \cdot R_{\theta,k} \cdot A_v \cdot T_P$$

Translação de P(2,0,0) para origem

$$T_{-P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PQ = (0-2), (2-0), (2-0) \quad \overline{PQ} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Para o vetor $\overline{PQ} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, temos a = -2; b = 2 e c = 2 achamos

$$\lambda = \sqrt{8}e|V| = \sqrt{12}, \text{ assim temos as matrizes}$$

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{-ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso

$$R_{45,k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{-P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = T_{-p}^{-1} \cdot A_v^{-1} \cdot R_{\theta,k} \cdot A_v \cdot T_p$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} 0.8047378541244 & -0.5058793634017 & 0.310617217526 & 0.3905242917513 \\ 0.310617217526 & 0.8047378541244 & 0.5058793634017 & -0.6212344350521 \\ -0.5058793634017 & -0.310617217526 & 0.8047378541244 & 1.0117587268034 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar as coordenadas do objeto rodado, aplicamos a matriz de rotação $R_{\theta,L}$ a matriz das coordenadas homogêneas dos vértices A,B,C e D é a seguinte:

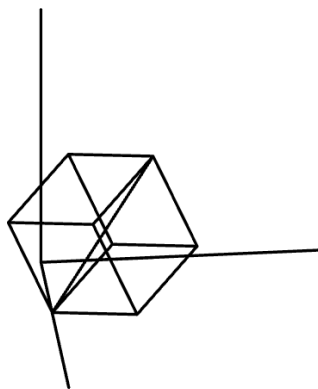
$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Coletânea de exercícios de Computação Gráfica
Transformações Geométricas

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}-1}{6} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-1}{6} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}+1}{6} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} \frac{4-2\sqrt{2}}{3} & 2 & \frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3} & \frac{2\sqrt{2}+2}{3} & 0 \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}+2}{3} & \frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3} & 2 \\ \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3} & \frac{2\sqrt{2}+2}{3} & \frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{3} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} 0.3905242917513 & 2 & 0.9882412731966 & -0.6212344350521 & 1.0117587268034 & 2 \\ -0.6212344350521 & 0 & 1.6094757082487 & 0.9882412731966 & 0.3905242917513 & 1 \\ 1.0117587268034 & 0 & -0.6212344350521 & 0.3905242917513 & 2.6212344350521 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$A' = (0.39, -0.62, 1.01)$$

$$B' = (2, 0, 0)$$

$$C' = (0.98, 1.60, -0.62)$$

$$D' = (-0.62, 0.98, 0.39)$$

$$E' = (1.01, 0.39, 2.62)$$

$$F' = (2.62, 1.01, 1.60)$$

$$G' = (1.60, 2.62, 0.98)$$

$$H' = (0, 2, 2)$$

Referencias

AGUILERA, V. **Computação gráfica**: animação. Cotia, SP: Editora Íbis Ltda, 1993.

ANGEL, Edward. **Interactive computer graphics**: a top-down approach with OpenGL. Massachusetts: Addison-Wesley, 1997.

AZEVEDO, Eduardo; CONCI, Aura. **Computação gráfica**: teoria e prática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2003.

CONCI, Aura; AZEVEDO, Eduardo; LETA, Fabiana R. **Computação gráfica**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

COPELAND, Arthur H. **Geometry, algebra and trigonometry by vector methods**. New York: The Macmillan Company, 1962.

CUNHA, Gilberto J. da et al. **Computação gráfica**: o padrão GKS. São Paulo: Editora Atlas, 1987.

FOLEY, D. James et al. **Computer graphics**: principles and practice. Delhi: Pearson Education, 2004.

GODSE, A. P. **Computer graphics**. PUNI: Technical Publications Pune, 2009.

GOMES, J. M.; VELHO, Luís C. **Conceitos básicos de computação gráfica**. São Paulo: IME-USP, 1990.

HEARN, Donald; BAKER, Pauline M. **Computer graphics**: C version. New Jersey: Printice Hall, 1986.

HETEM JUNIOR, Annibal. **Coleção fundamentos de informática**: computação gráfica. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

MAGALHÃES, Léo P. **Computação gráfica**: interfaces em sistemas de computação gráfica. Campinas: Editora da Unicamp, 1986.

PERSIANO, R. C. Marinho; OLIVEIRA, A. A. Fernandes de. **Introdução a computação gráfica**. Rio de Janeiro: LTC, 1988.

PLASTOCK, R. A.; KALLEY, G. **Computação gráfica**. São Paulo: McGraw Hill, 1986.

ROGERS, D. F.; ADAMS, J. A. **Mathematical elements for computer graphics**. New York: McGRAW-HILL, 1990

SCHNEIDER, Philip J.; EBERLY, David H. **Geometric tools for computer graphics**. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2003.

VELHO, Luiz; GOMES Jonas. **Sistemas gráficos 3D**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

VINCE, J. **Geometry for computer graphics**: formulae, examples & proofs. London: Spring, 2005.

VINCE, J. **Essential computer animation fast**. London: Spring, 1999.

XIANG, Zhigang; PLASTOCK Roy. **Computer graphics**. New York: McGRAW-HILL, 1992.