# Capítulo 2 – Integração

## 2.1 Integral Indefinida

Definição 2.1: Uma função $F(x)$ é chamada uma primitiva da função $f(x)$ num intervalo $I$ (ou simplesmente uma primitiva de $f(x)$) se, para todo $x \in I$, tem-se $F'(x) = f(x)$.

Exemplo 2.1: Verificar as funções e respectivas primitivas abaixo.

a) $F_1(x) = x^3/3$ ou $F_2(x) = x^3/3 + 2$ são primitivas de $f(x) = x^2$ ?

b) $F(x) = (sen\ 2x)/2 + c$ (onde $c$ é uma constante real) é primitiva da função $f(x) = cos(2x)$ ?

c) $F(x) = 3e^{2x} + c$ (onde $c$ é uma constante real) é primitiva da função $f(x) = e^{2x}$ ?

Proposição 2.1: Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se $c$ é uma constante real qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de $f(x)$.

Assim, se $F(x)$ é uma particular primitiva de $f(x)$, então toda primitiva de $f(x)$ é da forma $G(x) = F(x) + c$, onde $c$ é uma constante real. Desta forma, o problema de determinação das primitivas de $f(x)$ se resume em encontrar uma primitiva particular.

Definição 2.2: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada *integral indefinida* da função $f(x)$, sendo denotada por

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

onde:

$\int$ : sinal de integração    $f(x)$ : função integrando    $f(x)\,dx$ : integrando

Observações:

- O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado de *integração*.
- O símbolo $dx$ que aparece no integrando identifica a variável de integração.

Da definição de integral indefinida decorre então que:

$a)\ \int f(x)dx = F(x) + c \leftrightarrow F'(x) = f(x)$    $b)\ \int f(x)dx$ representa uma família de funções

Propriedades da integral indefinida:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções quaisquer e $k$ uma constante real qualquer. Então:

$a)\ \int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$    $b)\ \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Há três abordagens básicas para o cálculo de integrais indefinidas: ferramentas computacionais de cálculo simbólico, tabelas de integração e métodos de transformação.

- Ferramentas de cálculo simbólico: os programas de cálculo simbólico em computadores (como Maple, Derive, Mathematica) ou calculadoras programáveis são capazes de calcular integrais muito complicadas. Cada vez mais centros de pesquisa e universidades estão usando este tipo de ferramenta computacional para a resolução de integrais de resolução mais difícil.
- Tabelas de integração: as tabelas de integração, as quais são disponíveis em qualquer livro de cálculo, foram compiladas ao longo de vários anos, incorporando a habilidade e experiência de muitos pesquisadores.
- Métodos de transformação: são os métodos usados na resolução de integrais não conhecidas. Tais métodos incluem a substituição ou manipulação algébrica do integrando, além de outras técnicas que serão vistas nos itens abaixo.

Nenhum dos métodos citados acima é perfeito. Por exemplo, os programas de matemática simbólica freqüentemente encontram integrais que não são capazes de integrar e produzem soluções que são, às vezes, excessivamente complicadas. As tabelas de integração não são exaustivas e podem não incluir uma integral específica. Por fim, os métodos de transformação dependem da habilidade humana para a sua utilização, que pode não ser adequada a problemas de resolução mais sofisticados.

## 2.2 Técnicas de Cálculo de Integrais Indefinidas

### 2.2.1 Integrais Imediatas

Baseado em regras de integração como as ilustradas na Tabela 1, as integrais (ditas imediatas) são resolvidas com a escolha e o uso adequado das regras de integração.

Exemplo 2.2: Determinar as integrais indefinidas abaixo usando as propriedades da integral indefinida e a tabela de integração dada.

**a)** $\int (2x^4 - x^3 + 1)\, dx$ **b)** $\int x^3 (2 - x^2)\, dx$ **c)** $\int \frac{2x^5 + x^3 - 3}{x^4}\, dx$

**d)** $\int \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2}\, dx$ **e)** $\int (5x^4 - 3x^2 + \sqrt{x})\, dx$ **f)** $\int (\sqrt[3]{x^2} + \frac{x}{2})\, dx$

**g)** $\int \frac{x^4 - 3x^{-\frac{1}{2}} + 2}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ **h)** $\int 3e^{-2x} - 3x^{-2}\, dx$ **i)** $\int 4sen(3x) + \frac{2}{x}\, dx$

**j)** $\int \frac{\sec^2 x}{\cos s \sec x}\, dx$

| Regra | Função | Integral |
|---|---|---|
| 1 | $\int dx$ | $x + C$ |
| 2 | $\int x^k dx \quad (k \neq -1)$ | $\dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C$ |
| 3 | $\int \dfrac{dx}{x}$ | $\ln \mid x \mid + C$ |
| 4 | $\int e^{ax} dx$ | $\dfrac{e^{ax}}{a} + C$ |
| 5 | $\int a^x dx \ (a \in \Re)$ | $\dfrac{a^x}{\ln a} + C$ |
| 6 | $\int sen(ax)\, dx$ | $-\dfrac{\cos(ax)}{a} + C$ |
| 7 | $\int \cos(ax)\, dx$ | $\dfrac{sen(ax)}{a} + C$ |
| 8 | $\int tg\ x\, dx$ | $\ln \mid \sec x \mid + C$ |
| 9 | $\int \cot g\ x\, dx$ | $\ln \mid sen\ x \mid + C$ |
| 10 | $\int \sec^2 x\, dx$ | $\mathrm{tg}\ x + C$ |
| 11 | $\int \cos\sec^2 x\, dx$ | $-\ \mathrm{cotg}\ x + C$ |
| 12 | $\int \sec x \,.\, tg\ x\, dx$ | $\sec x + C$ |
| 13 | $\int \cos\sec x \,.\, \cot g\ x\, dx$ | $-\cos\sec x + C$ |
| 14 | $\int senh\ x\, dx$ | $\cosh x + C$ |
| 15 | $\int \cosh x\, dx$ | $senh\ x + C$ |
| 16 | $\int \sec h^2 x\, dx$ | $\mathrm{tgh}\ x + C$ |
| 17 | $\int \cos\sec h^2 x\, dx$ | $-\cot gh\ x + C$ |
| 18 | $\int \sec hx \,.\, tgh\ x\, dx$ | $-\sec h\ x + C$ |
| 19 | $\int \cos\sec hx \,.\, \cot gh\ x\, dx$ | $-\cos\sec h\ x + C$ |
| 20 | $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ | $-\,arc\ \mathrm{sen}\ x + C$ |
| 21 | $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx$ | $arc\ tg\ x + C$ |

Tabela 1 – Tabela de integrais imediatas

## Exercícios de Fixação 2.1

**[1]** Determinar as integrais abaixo usando a tabela de integrais imediatas.

**1.** $\int \frac{1}{2x^3}\,dx$ **R:** $-\frac{1}{4x^2}+C$

**2.** $\int (x^3-2x+7)\,dx$ **R:** $\frac{x^4}{4}-x^2+7x+C$

**3.** $\int x.(x^3+1)\,dx$ **R:** $\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}+C$

**4.** $\int \frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}+5\,dx$ **R:** $-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+5x+C$

**5.** $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$ **R:** $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$

**6.** $\int \frac{1}{x^3}+\sqrt{x}\text{ - }3\sqrt[4]{x}+x^2\,dx$ **R:** $-\frac{1}{2x^2}+\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{12\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{x^3}{3}+C$

**7.** $\int x+\sqrt{x}\,dx$ **R:** $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C$

**8.** $\int (1\text{ - }\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ **R:** $x-3\sqrt[3]{x}+C$

**9.** $\int \frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\,dx$ **R:** $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C$

**10.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ **R:** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

**11.** $\int \frac{1}{x^4}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ **R:** $-\frac{1}{3x^3}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$

**12.** $\int \sqrt{x}-\frac{x}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$ **R:** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x^2}{4}+4\sqrt{x}+C$

**13.** $\int \frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{x\sqrt{x}}{4}\,dx$ **R:** $6\sqrt{x}-\frac{x^2\sqrt{x}}{10}+C$

**14.** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ **R:** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+2\sqrt{x}+C$

**15.** $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$ **R:** $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{2\sqrt{x^5}}{5}+C$

**16.** $\int (x^2-1)\sqrt{x}\,dx$ **R:** $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$

**17.** $\int \frac{2}{\theta} - 2e^{\theta} - \text{cossec}^2\theta \, d\theta$ **R:** $2\ln\theta - 2e^{\theta} + \cot g\theta + C$

**18.** $\int \frac{3}{x} + 4e^x dx$ **R:** $3\ln x + 4e^x + C$

**19.** $\int \frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}\, dx$ **R:** $\frac{e^x}{2} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

**20.** $\int \sec x.(\sec x + tgx)\, dx$ **R:** $tgx + \sec x + C$

**21.** $\int \frac{senx}{\cos^2 x} dx$ **R:** $\sec x + C$

**22.** $\int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2\, dx$ **R:** $\frac{x^5}{5} + \frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{4} + 3\sqrt[3]{x} + C$

**23.** $\int \sqrt[3]{x}(2-x)^2 dx$ **R:** $3\sqrt[3]{x^4} - \frac{12\sqrt[3]{x^7}}{7} + \frac{3\sqrt[3]{x^{10}}}{10} + C$

### 2.2.2 Método da Integração por Substituição

Algumas vezes, é possível determinar-se a integral de uma dada função aplicando uma das fórmulas básicas da Tabela 1 depois de ser feita uma substituição de variável adequada. Esse processo é análogo à regra da cadeia para a derivação.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Supondo-se que $g(x)$ seja outra função derivável tal que a imagem de $g(x)$ esteja contida no domínio de $F(x)$ ($Fog$). Pela aplicação da regra da cadeia, tem-se:

$[F(g(x))]' = F'(g(x).g'(x)) = f(g(x)).g'(x) \rightarrow$ ou seja, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)).g'(x)$

Desta forma:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo-se $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$ e substituindo-se na equação anterior, vem:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Assim, no método da substituição introduzimos uma variável auxiliar $u$ como uma nova representação de uma parte do integrando esperando que sua diferencial $du$ vá reduzir a integral completa a uma forma facilmente reconhecível. O sucesso do uso desse método depende da escolha de uma substituição adequada e esta, por sua vez, depende da capacidade em identificar-se rapidamente qual parte do integrando é a derivada de alguma outra parte.

**Técnica de Integração por Substituição:**

Passo 1: Faça uma escolha para *u*, digamos *u = g(x)*.

Passo 2: Calcule *du/dx = g'(x)*.

Passo 3: Faça a substituição *u = g(x)*, *du = g'(x)dx*. Neste ponto, toda integral deve estar em termos de *u*; nenhum *x* deve continuar. Se isto não acontecer, deve-se tentar uma nova escolha para *u*.

Passo 4: Calcule a integral resultante, se possível.

Passo 5: Substituir *u* por *g(x);* assim, a resposta final estará em termos de *x*.

Observação: O uso da técnica de integração por substituição é muito comum em integrais de funções com denominadores, exponentes, raízes de ordem *n* e expressões transcendentes.

Exemplo 2.3: Determinar as integrais indefinidas abaixo pelo método da integração por substituição.

**a)** $\int (x+2)^5\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{2x+3}\,dx$ **c)** $\int \frac{2}{(2x+1)^4}\,dx$ **d)** $\int sen(4x-1)\,dx$

**e)** $\int \frac{2x}{x^2-2}\,dx$ **f)** $\int sen(x^2).2x\,dx$ **g)** $\int x.e^{x^2}\,dx$ **h)** $\int sen^2(x).\cos x\,dx$

**i)** $\int 2x+\sec^2(3x)\,dx$ **j)** $\int tg\,x\,dx$ **l)** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx$ **m)** $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{x^2}\,dx$

**n)** $\int \frac{2}{x\ln x}\,dx$ **o)** $\int (\cos x)^3\,senx\,dx$ **p)** $\int \frac{2}{x^2+6x+13}\,dx$ **q)** $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

**r)** $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

**Exercícios de Fixação 2.2**

**[1]** Determinar as integrais abaixo usando o método da integração por substituição com as substituições indicadas.

**1.** $\int e^{-5x}\,dx \quad u=-5x$ **R:** $\frac{-e^{-5x}}{5}+C$

**2.** $\int 2x.(x^2+1)^{23}\,dx \quad u=x^2+1$ **R:** $\frac{(x^2+1)^{24}}{24}+C$

**3.** $\int \frac{x^2}{x^3-4}\,dx \quad u=x^3-4$ **R:** $\frac{1}{3}\ln(x^3-4)+C$

**4.** $\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+3}}\,dx \quad u=4x^2+3$ **R:** $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+3}+C$

**5.** $\int \frac{1}{x.\ln x}\,dx \quad u=\ln x$ **R:** $\ln[\ln(x)]+C$

**6.** $\int \cot g(x) \, . \cos\sec^2(x) \, dx \quad u = \cot g(x)$ **R:** $-\dfrac{\cot g^2(x)}{2} + C$

**7.** $\int \dfrac{sen(3x)}{1+\cos(3x)} \, dx \quad u = 1+\cos(3x)$ **R:** $-\dfrac{1}{3}\ln(1+\cos 3x) + C$

**8.** $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}} sen(\sqrt{x}) \, dx \quad u = \sqrt{x}$ **R:** $-2\cos\sqrt{x} + C$

**9.** $\int x.\sqrt{x-3} \, dx \quad u = x-3$ **R:** $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C$

**[2]** Determinar as integrais abaixo usando o método da integração por substituição.

**1.** $\int \cos(8x) \, dx$ **R:** $\dfrac{sen(8x)}{8} + C$

**2.** $\int e^{1-x} \, dx$ **R:** $-e^{1-x} + C$

**3.** $\int x^3.e^{x^4+2} \, dx$ **R:** $\dfrac{1}{4}e^{x^4+2} + C$

**4.** $\int x.(5+3x^2)^8 \, dx$ **R:** $\dfrac{1}{54}(5+3x^2)^9 + C$

**5.** $\int 9.(2x+3).(x^2+3x+5)^8 \, dx$ **R:** $(x^2+3x+5)^9 + C$

**6.** $\int (x^3+2)^2.3x^2 \, dx$ **R:** $\dfrac{(x^3+2)^3}{3} + C$

**7.** $\int x.e^{-x^2} \, dx$ **R:** $\dfrac{-e^{-x^2}}{2} + C$

**8.** $\int x^2.e^{-2x^3} \, dx$ **R:** $\dfrac{-e^{-2x^3}}{6} + C$

**9.** $\int \cos x.\sqrt{senx} \, dx$ **R:** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(senx)^3} + C$

**10.** $\int \dfrac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \, dx$ **R:** $\dfrac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C$

**11.** $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x} \, dx$ **R:** $\dfrac{(\ln x)^3}{3} + C$

**12.** $\int \dfrac{\ln(5x)}{x} \, dx$ **R:** $\dfrac{1}{2}[\ln(5x)]^2 + C$

**13.** $\int \dfrac{1}{x.(\ln x)^2} \, dx$ **R:** $\dfrac{-1}{\ln x} + C$

**14.** $\int \frac{sen\,(\frac{5}{x})}{x^2}\,dx$ **R:** $\frac{\cos(\frac{5}{x})}{5}+C$

**15.** $\int \sqrt{x^3+2}\,.\,x^2\,dx$ **R:** $\frac{2\sqrt{(x^3+2)^3}}{9}+C$

**16.** $\int x^2(x^3+1)^{\frac{3}{4}}\,dx$ **R:** $\frac{4}{21}(x^3+1)^{\frac{7}{4}}+C$

**17.** $\int \frac{3x-3}{(x^2-2x+6)^2}\,dx$ **R:** $-\frac{3}{2}(\frac{1}{x^2-2x+6})+C$

**18.** $\int \frac{2x.\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]^2+C$

**19.** $\int \sec(4x).tg(4x)\,dx$ **R:** $\frac{\sec(4x)}{4}+C$

**20.** $\int e^{senx}.\cos x\,dx$ **R:** $e^{senx}+C$

**21.** $\int \cot g(x).\cos\sec^2(x)\,dx$ **R:** $\frac{-\cot g^2 x}{2}+C$

**22.** $\int \frac{x}{x+1}\,dx$ **R:** $x+1-\ln(x+1)+C$

**23.** $\int \frac{3x}{x^2-1}\,dx$ **R:** $\frac{3\ln(x^2-1)}{2}+C$

**24.** $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$ **R:** $\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

**25.** $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$ **R:** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C$

**26.** $\int x\sqrt{x-1}\,dx$ **R:** $\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C$

**27.** $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ **R:** $2\sqrt{x+1}+C$

**28.** $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}\ln(x-1)+C$

**29.** $\int \frac{x-1}{x^2-2x}\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x)+C$

**30.** $\int \frac{x}{(4x^2+1)^3}\,dx$ **R:** $\frac{-(4x^2+1)^{-2}}{16}+C$

**31.** $\int \sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx$ **R:** $\frac{2}{3}\sqrt{2x^3}-\sqrt{2x}+C$

**32.** $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$ **R:** $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1}+C$

**33.** $\int 3x.\sqrt{1-2x^2}\,dx$ **R:** $\frac{-\sqrt{(1-2x^2)^3}}{2}+C$

**34.** $\int x.\sqrt{7x^2+12}\,dx$ **R:** $\frac{\sqrt{(7x^2+12)^3}}{21}+C$

**35.** $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$ **R:** $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

**36.** $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$ **R:** $\frac{4\sqrt[4]{(x^3+2)^3}}{9}+C$

**37.** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ **R:** $\frac{2\sqrt{x^3+1}}{3}+C$

**38.** $\int \frac{(x+3)}{\sqrt[3]{x^2+6x}}\,dx$ **R:** $\frac{3\sqrt[3]{(x^2+6x)^2}}{4}+C$

**39.** $\int x^2\sqrt[5]{-4x^3+7}\,dx$ **R:** $-\frac{5}{72}\sqrt[5]{(-4x^3+7)^6}+C$

**40.** $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ **R:** $\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7}-\frac{4}{5}\sqrt{(x+1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$

**41.** $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}\,dx$ **R:** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x^2+1}+C$

**42.** $\int \frac{(x^{\frac{1}{3}}+2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ **R:** $\frac{3}{5}(x^{\frac{1}{3}}+2)^5+C$

**43.** $\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}\,dx$ **R:** $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+8x+3}+C$

**44.** $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx$ **R:** $-\frac{1}{2}arcsen(\frac{2x}{3})+C$

**45.** $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$ **R:** $\frac{1}{a}arctg(\frac{x}{a})+C$

**46.** $\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx$ **R:** $\frac{3}{28}\sqrt[3]{(x+1)^4}.(4x-3)+C$

**47.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}arctg(x^2)+C$

### 2.2.3 – Método da Integração por Partes

É uma técnica para a integração de produtos de funções *f(x).g(x)*, nos quais um dos fatores pode ser facilmente integrado e o outro se torna mais simples quando derivado.

Sejam *f(x)* e *g(x)* funções deriváveis dentro de um intervalo *I*. Assim, tem-se que:

$$[f(x).g(x)]' = f(x)\,.\,g'(x) + f'(x).g(x)$$

Ou, arranjando os termos:

$$f(x)\,.\,g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)$$

Integrando ambos os lados da equação acima, obtém-se:

$$\int f(x).g'(x)dx = \int [f(x).g(x)]'dx - \int f'(x).g(x)dx$$

ou ainda de outra forma:

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Na prática, faz-se:

$$u = f(x) \rightarrow du = f'(x)dx$$
$$v = g(x) \rightarrow dv = g'(x)dx$$

Resultando na expressão:

$$\int udv = u.v - \int vdu \;\rightarrow\; \text{Fórmula de integração por partes}$$

**<u>Técnica de Integração por Partes</u>:**

Para calcular a integral $\int F(x)dx$ , os seguintes passos devem ser seguidos:

<u>Passo 1</u>: Divida apropriadamente o fator integrando em duas partes, como $F(x) = F_1(x).F_2(x)$.

<u>Passo 2</u>: Escolha um dos dois fatores e chame-o de *u*. Faça então *dv* igual ao fator restante vezes *dx*. Suponha que tenhamos escolhido $u = F_1(x)$ e $dv = F_2(x)dx$.

Observação: Tente selecionar *u* e *dv* de tal modo que o produto de *du* por *v* (o qual será integrado no Passo 4) seja o mais simples possível.

<u>Passo 3</u>: Calcule $du = F_1'(x)dx$ e calcule $v = \int F_2(x)dx$.

<u>Passo 4</u>: Calcule $\int v\,du$.

<u>Passo 5</u>: Escrever a solução $\int F(x)dx = uv - \int vdu + C$.

Exemplo 2.4: Determinar as integrais indefinidas abaixo através do método de integração por partes.

**a)** $\int (x+1).\cos x\,dx$ **b)** $\int x\,.\,sen(2x)\,dx$ **c)** $\int \ln x\,dx$ **d)** $\int x.\ln x\,dx$

**e)** $\int x^2 .\ln x\, dx$ **f)** $\int \sqrt{x}.\ln x\, dx$ **g)** $\int x\,.\,e^{-2x}\, dx$ **h)** $\int x^2\,.\,e^{-2x}\, dx$

**i)** $\int x^2\,.\,sen(2x)\, dx$ **j)** $\int (sen\, x)^2\, dx$ **l)** $\int e^x.\cos(x)\, dx$ **m)** $\int e^{2x}.\,sen(3x)\, dx$

## Exercícios de Fixação 2.3

**[1]** Determinar as integrais abaixo usando o método da integração por partes.

**1.** $\int xe^x\, dx$ **R:** $e^x(x-1)+C$

**2.** $\int x.e^{4x}\, dx$ **R:** $\frac{e^{4x}}{4}(x-\frac{1}{4})+C$

**3.** $\int (1-x).e^x\, dx$ **R:** $(2-x)e^x+C$

**4.** $\int x^2\,.\,e^x\, dx$ **R:** $e^x(x^2-2x+2)+C$

**5.** $\int 2x^2\,.\,e^{-x}\, dx$ **R:** $-2e^{-x}(x^2+2x+2)+C$

**6.** $\int x^3.\,e^{2x}\, dx$ **R:** $\frac{e^{2x}}{2}(x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4})+C$

**7.** $\int (\ln x)^2\, dx$ **R:** $x.(\ln x)^2-2x.\ln x+2x+C$

**8.** $\int x.\ln(2x)\, dx$ **R:** $\frac{1}{2}x^2.[\ln(2x)-\frac{1}{2}]+C$

**9.** $\int x.\ln(2x+3)\, dx$ **R:** $x.\ln(2x+3)-x+\frac{3}{2}\ln(2x+3)+C$

**10.** $\int x\,.\,senx\, dx$ **R:** $-x.\cos x+senx+C$

**11.** $\int x\,.\,sen(5x)\, dx$ **R:** $\frac{-x}{5}\cos(5x)+\frac{sen(5x)}{25}+C$

**12.** $\int x^3\,.\,sen(4x)\, dx$ **R:** $-\frac{x^3}{4}\cos(4x)+\frac{3x^2}{16}sen(4x)+\frac{3x}{32}\cos(4x)-\frac{3}{128}sen(4x)+C$

**13.** $\int x^2\,.\cos(ax)\, dx$ **R:** $\frac{x^2}{a}sen(ax)+\frac{2x}{a^2}\cos(ax)-\frac{2}{a^3}sen(ax)+C$

**14.** $\int (x+1)\,.\cos(2x)\, dx$ **R:** $\frac{(x+1)}{2}sen\,(2x)-\frac{\cos(2x)}{4}+C$

**15.** $\int e^x.senx\, dx$ **R:** $\frac{e^x}{2}(senx-\cos x)+C$

**16.** $\int (x-1)\,.\sec^2(x)\, dx$ **R:** $(x-1)\,.\,tg\,(x)+\ln(\cos x)+C$

**17.** $\int e^{ax}.sen(bx)\, dx$ **R:** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a.sen(bx)-b.\cos(bx)]+C$

**18.** $\int x.\sec^2 x\,dx$ **R:** $x\,.\,tgx + \ln(\cos x) + C$

**19.** $\int \sec^3 x\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}[\sec x\,.\,tgx + \ln(\sec x + tgx)] + C$

**20.** $\int arcsen\,(x)\,dx$ **R:** $x\,.\,arcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

**21.** $\int x.arcsen\,(x^2)\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}x^2\,.\,arcsen(x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

**22.** $\int \arccos\,(2x)\,dx$ **R:** $x\,.\,\arccos(2x) - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

**23.** $\int arctg\,(x)\,dx$ **R:** $x\,.\,arctg\,(x) - \ln\sqrt{x^2+1} + C$

**24.** $\int x.arctg\,(x)\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}(x^2+1)\,.\,arctg\,(x) - \frac{x}{2} + C$

**25.** $\int sen(\ln x)\,dx$ **R:** $\frac{x}{2}[sen(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

**26.** $\int sen(x).sen(3x)\,dx$ **R:** $\frac{1}{8}sen(3x).\cos(x) - \frac{3}{8}sen(x).\cos(x) + C$

**27.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ **R:** $\frac{e^x}{x+1} + C$

**28.** $\int x\sqrt{x+5}\,dx$ **R:** $\frac{2}{3}x\sqrt{(x+5)^3} - \frac{4}{5}\sqrt{(x+5)^5} + C$

**29.** $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$ **R:** $-\frac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)^3} + \frac{2}{15}\sqrt{(1-x^2)^5} + C$

**30.** $\int (x^2+7x-5)\,.\cos(2x)\,dx$ **R:** $(x^2+7x-5).\frac{sen(2x)}{2} + (2x+7).\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{sen(2x)}{4} + C$

**31.** $\int x^n\,.\ln x\,dx$ **R:** $\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}[-1+(n+1)\ln x] + C \quad (n \neq -1)$

**32.** $\int x^5\,.\,e^{x^2}\,dx$ **R:** $\frac{x^4e^{x^2}}{2} - x^2e^{x^2} + e^{x^2} + C$

### 2.2.4 – <u>Método da Integração de Funções Racionais por Frações Parciais</u>

Em álgebra, aprende-se a efetuar a combinação de duas ou mais frações em uma única fração, achando-se o denominador comum. Por exemplo,

$$\frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)+3(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{5x-10}{x^2-3x-4}$$

Para os propósitos de integração, o lado esquerdo da equação acima (cujos termos são chamados de frações parciais) é preferível ao lado direito, uma vez que cada um dos seus termos é de fácil integração:

$$\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4}dx = \int \frac{2}{x-4}dx + \int \frac{3}{x+1}dx = 2\ln(x-4) + 3\ln(x+1) + C$$

Assim, é desejável ter algum método que nos possibilite obter o lado esquerdo da equação acima a partir do lado direito.

Com a finalidade de estender esta idéia a funções racionais em geral, vamos supor que *P(x)/Q(x)* seja uma função racional própria, o que significa que o grau do numerador é menor do que o grau do denominador. Da álgebra, sabe-se que toda função racional própria pode ser expressa como uma soma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F_1(x) + F_2(x) + ... + F_n(x)$$

onde $F_1(x), F_2(x),..., F_n(x)$ são funções racionais da forma

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$$

nas quais os denominadores são fatores de *Q(x)*. A soma é chamada de decomposição em frações parciais de *P(x)/Q(x)* e os termos são chamados de frações parciais. Assim, há duas etapas para se encontrar uma decomposição em frações parciais: determinar a forma exata da decomposição e encontrar as constantes desconhecidas.

**<u>Técnica de Decomposição em Frações Parciais</u>:**

O primeiro passo para se achar a forma de uma decomposição em frações parciais de uma função racional própria *P(x)/Q(x)* é fatorar completamente *Q(x)* em fatores lineares, quadráticos e irredutíveis e, então, juntar todos os fatores repetidos, de tal modo que *Q(x)* seja expresso como um produto de fatores distintos da forma $(ax + b)^m$ e $(ax^2 + bx + c)^m$. A partir destes fatores, podemos determinar a forma da decomposição das frações parciais usando duas regras.

**Regra dos Fatores Lineares:** Para cada fator da forma $(ax + b)^m$, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de *m* frações parciais:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_m}{(ax+b)^m}$$

onde $A_1$, $A_2$, ... , $A_m$ são constantes a serem determinadas. No caso onde $m$ = 1, somente o primeiro termo da soma é considerado.

**Regra dos Fatores Quadráticos:** Para cada fator da forma *(ax² + bx + c)ᵐ*, a decomposição em frações parciais contém a seguinte soma de *m* frações parciais:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

onde $A_1$, $A_2$, ... , $A_m$, $B_1$, $B_2$, ... , $B_m$ são constantes a serem determinadas. No caso onde $m = 1$, somente o primeiro termo da soma é considerado.

Exemplo 2.5: Determinar as integrais indefinidas abaixo através do método de integração por expansão em frações parciais.

**a)** $\int \frac{1}{x^2+x-2}\,dx$ **b)** $\int \frac{2x+3}{x^2+x-6}\,dx$ **c)** $\int \frac{x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$ **d)** $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}\,dx$

**e)** $\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2}\,dx$ **f)** $\int \frac{x^2+x-2}{x^3+4x^2+x-6}\,dx$

Observação: Embora o método das frações parciais se aplique somente a funções racionais próprias, uma unção racional imprópria pode ser integrada efetuando-se uma divisão e expressando-se a função como o quociente mais o resto sobre o divisor. O resto sobre o divisor será uma função racional própria, a qual pode, então, ser decomposta em frações parciais.

Exemplo 2.6: Determinar a integral indefinida abaixo através do método de integração por expansão em frações parciais.

**a)** $\int \frac{x^3-8x+2}{x-1}\,dx$ **b)** $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}\,dx$

## Exercícios de Fixação 2.4

**[1]** Determinar as integrais das funções racionais abaixo usando o método da expansão em frações parciais.

1. $\int \frac{5x-4}{(x-2).(x+1)}\,dx$ **R:** $2\ln(x-2)+3\ln(x+1)+C$

2. $\int \frac{1}{3x^2-x}\,dx$ **R:** $-\ln x+\ln(x-\frac{1}{3})+C$

3. $\int \frac{3}{x^2+x-2}\,dx$ **R:** $\ln(x-1)-\ln(x+2)+C$

4. $\int \frac{5-x}{2x^2+x-1}\,dx$ **R:** $\frac{3}{2}\ln(2x-1)-2\ln(x+1)+C$

5. $\int \frac{x+2}{x^2-4x}\,dx$ **R:** $\frac{1}{2}[3\ln(x-4)-\ln x]+C$

**6.** $\int \frac{3x-5}{x^2-x-2}\,dx$ **R:** $\frac{1}{3}\ln(x-2)+\frac{8}{3}\ln(x+1)+C$

**7.** $\int \frac{4-3x}{(x-1)^2}\,dx$ **R:** $-3\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$

**8.** $\int \frac{3x^2+4x+2}{x.(x+1)^2}\,dx$ **R:** $2\ln x+\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

**9.** $\int \frac{3x-2}{x^3-x^2}\,dx$ **R:** $-\ln x-\frac{2}{x}+\ln(x-1)+C$

**10.** $\int \frac{x^2+12x+12}{x^3-4x}\,dx$ **R:** $5\ln(x-2)-\ln(x+2)-3\ln x+C$

**11.** $\int \frac{x^5+x-1}{x^4-x^3}\,dx$ **R:** $\ln(x-1)+\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2x^2}+C$

**12.** $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}\,dx$ **R:** $\ln(x^6)-\ln(x+1)-\frac{9}{x+1}+C$

**13.** $\int \frac{5x^3-6x^2-68x-16}{x^3-2x^2-8x}\,dx$ **R:** $2\ln x-\frac{8}{3}\ln(x-4)+\frac{14}{3}\ln(x+2)+C$

**14.** $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx$ **R:** $\frac{1}{6}\ln x+\frac{3}{10}\ln(x-2)-\frac{2}{15}\ln(x+3)+C$

**15.** $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$ **R:** $-2\ln x-\frac{3}{x-2}+2\ln(x-2)+C$

**16.** $\int \frac{3x-2}{x^3-x^2}\,dx$ **R:** $-\ln x-\frac{2}{x}+\ln(x-1)+C$

**17.** $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx$ **R:** $-\frac{2}{3}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{6}\ln(x-2)+C$

**18.** $\int \frac{6x^2+14x-20}{x^3-4x}\,dx$ **R:** $5\ln x-3\ln(x+2)+4\ln(x-2)+C$

**19.** $\int \frac{5x^3-6x^2-68x-16}{x^3-2x^2-8x}\,dx$ **R:** $5x+2\ln x-\frac{8}{3}\ln(x\text{ - }4)+\frac{14}{3}\ln(x+2)+C$

**20.** $\int \frac{-4x^3}{2x^3+x^2-2x-1}\,dx$ **R:** $-2x-\frac{2}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(2x+1)+2\ln(x+1)+C$

**21.** $\int \frac{8x^2+3x+20}{(x+1).(x^2+4)}\,dx$ **R:** $\frac{3}{2}\ln(x^2+4)+5\ln(x+1)+C$

**22.** $\int \frac{3x^2+4x+2}{x(x+1)^2}\,dx$ **R:** $2\ln x+\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$

**23.** $\int \frac{x^3+x+2}{x.(x^2+1)^2}\,dx$ **R:** $2\ln x-\ln(x^2+1)+arctg(x)+\frac{1}{x^2+1}+C$

**24.** $\int \frac{8x^2 + 3x + 20}{(x+1).(x^2+4)} dx$ **R:** $\frac{3}{2}\ln(x^2+4) + 5\ln(x+1) + C$

**25.** $\int \frac{3x^3 + 2x - 2}{x^2.(x^2+2)} dx$ **R:** $\ln x + \frac{1}{x} + \ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2} arctg(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + C$

**26.** $\int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx$ **R:** $\frac{1}{2}x^2 + 2\ln x - \frac{1}{x} - 2\ln(x-1) + C$

**27.** $\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 3x + 2}{x^4 - x^2} dx$ **R:** $3\ln x + \ln(x+1) + \frac{2}{x} - \ln(x-1) + C$

**28.** $\int \frac{2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx$ **R:** $\ln(x+1) + \ln(x-1) + \text{arctg}\, x + C$

**29.** $\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx$ **R:** $-\frac{1}{8x} + \frac{3}{16}\ln x - \frac{7}{8(x-2)^2} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{3}{16}\ln(x-2) + C$

**30.** $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{x^2 + 4} dx$ **R:** $x^2 - 3x - 3\ln(x^2+4) + 4\,\text{arctg}\,(x/2) + C$

**31.** $\int \frac{3x^3 + 11x - 16}{(x^2+1).(x^2+4x+13)} dx$ **R:** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \text{arctg}\, x + \ln(x^2+4x+13) - \frac{7}{3}\text{arctg}\,(\frac{x+2}{3}) + C$

### 2.3 – Integral Definida

Definição 2.3: Seja *f(x)* uma função definida no intervalo [*a,b*] e seja *P* uma partição qualquer de [*a,b*]. A integral definida de *f(x)* de *a* até *b*, denotada por

$$\int_a^b f(x)dx$$

é dada pela expressão

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x_i$$

desde que o limite do segundo membro exista, ou seja, que *f(x)* seja integrável em [*a,b*]. Nessa notação, os números *a* e *b* são chamados *limites de integração* (*a*= limite inferior e *b*= limite superior).

Quando a função *f(x)* é contínua e não negativa em [*a,b*], a definição da integral definida coincide com a definição da área sob a curva *f(x)*. Portanto, nesse caso, a integral definida é a área da região sob o gráfico de *f(x)* de *a* até *b*.

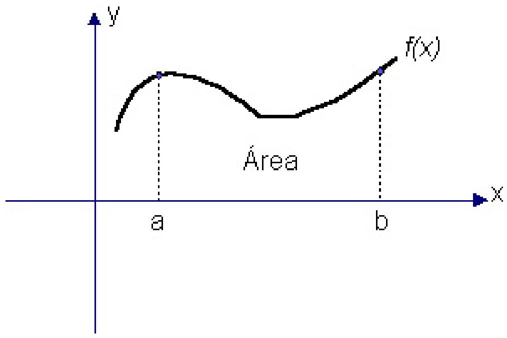


*Figura 2.1 – Representação gráfica da integral definida*

O teorema fundamental do Cálculo permite relacionar as operações de derivação e integração. Ele diz que, conhecendo uma primitiva de uma função *f(x)* contínua em [*a,b*], pode-se calcular a sua integral definida.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental do Cálculo): Se *f(x)* é contínua sobre o intervalo [*a,b*] e se *F(x)* é uma primitiva de *f(x)* neste intervalo, então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo 2.7: Determinar as integrais definidas abaixo.

$a)\ \int_1^3 2x^2 dx \qquad b)\ \int_{-1}^2 x^3 + x^2 - 3x + 2\, dx \qquad c)\ \int_{-1}^2 \frac{2x}{x^2+1} dx \qquad d)\ \int_0^{\pi/2} \text{sen}\, t\, dt \qquad e)\ \int_0^{2\pi} 2.\cos t\, dt$

**2.4 – Aplicação de Integral Definida: Cálculo de Áreas de Regiões Planas**

O cálculo de áreas de figuras planas pode ser efetuado por meio de integração. Abaixo são mostradas algumas situações que podem ocorrer neste tipo de cálculo.

**Caso I :** Cálculo da área de figura plana limitada pelo gráfico de *f(x)*, pelas retas *x=a*, *x=b* e o eixo das abscissas, onde *f(x)* é contínua e *f(x)*≥ 0, $\forall x \in [a,b]$.

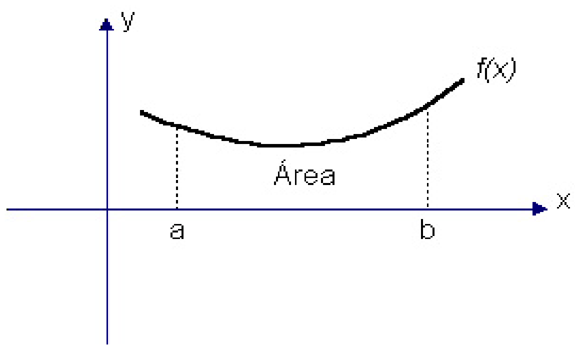


*Figura 2.2 – Cálculo de áreas de figuras planas (Caso I)*

<u>Exemplo 2.8</u>: Calcular a área limitada pela curva $f(x) = x^2 + 1$ e o eixo das abscissas de $-1$ a $2$.

<u>Exemplo 2.9</u>: Calcular a área limitada pela curva $f(x) = 2/x$ e o eixo das abscissas de $1$ a $2$.

<u>Exemplo 2.10</u>: Calcular a área limitada pela curva $f(x) = 2\ senx$ e o eixo das abscissas de $0$ a $\pi$.

<u>Exemplo 2.11</u>: Calcular a área limitada pela curva $f(x) = 3\ cosx$ e o eixo das abscissas de $0$ a $\pi/2$.

**<u>Caso II</u> :** Cálculo da área de figura plana limitada pelo gráfico de $f(x)$, pelas retas $x=a$, $x=b$ e o eixo das abscissas, onde $f(x)$ é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

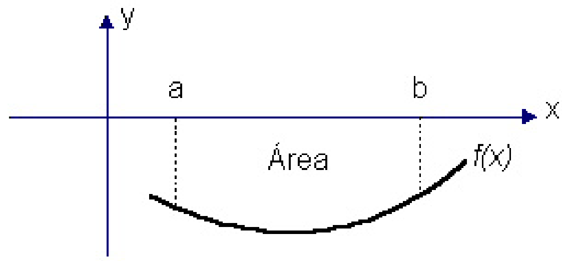


*Figura 2.3 – Cálculo de áreas de figuras planas (Caso II)*

<u>Exemplo 2.12</u>: Calcular a área limitada pela curva $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e o eixo das abscissas de $1$ a $4$.

<u>Exemplo 2.13</u>: Determinar a área limitada pela curva $f(x) = -2senx$ e o eixo das abscissas de $0$ a $\pi$.

<u>Exemplo 2.14</u>: Calcular a área limitada pela curva $f(x) = 3cosx$ e o eixo das abscissas de $\pi/2$ a $3\pi/2$.

**<u>Caso III</u> :** Cálculo da área de figura plana limitada pelos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, pelas retas $x=a$ e $x=b$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

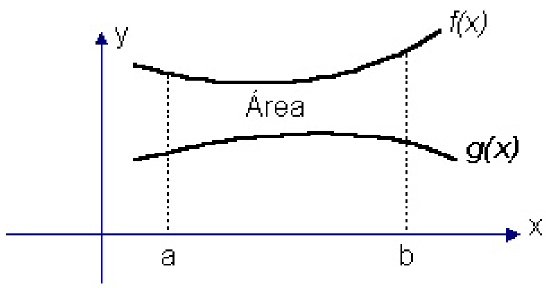


*Figura 2.4 – Cálculo de áreas de figuras planas (Caso III)*

<u>Exemplo 2.15</u>: Calcular a área limitada pelas curvas $y = x^2 + 2$ , $y = x$ , $x = 0$ e $x = 2$.

Exemplo 2.16: Calcular a área limitada pelas curvas $y = 4 - x$ e $y = x^2 - 4x + 4$.

Exemplo 2.17: Calcular a área limitada pelas curvas $y = x^2 – 4x + 3$ e $y = –x^2 + 2x + 3$.

Exemplo 2.18: Calcular a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x^2$.

Exemplo 2.19: Calcular a área limitada pelas curvas $y = –x + 6$ , $y = x$ e $y = 2x$.

Exemplo 2.20: Calcular a área limitada pelas curvas $y = x^2$ , $y = x$ e $y = 2x$.

Exemplo 2.21: Calcular a área limitada pelas curvas $y = x^3 – 4x$ e $y = 0$.

Exemplo 2.22: Calcular a área limitada pelas curvas $y = x^2$ , $y = x + 2$ e $y = -3x + 18$.

## Exercícios de Fixação 2.5

**[1]** Determinar as áreas delimitadas pelas curvas abaixo.

**1.** $y = x^2$ e $y = x + 6$ **R:** $\frac{125}{6}$ *ua*

**2.** $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$ **R:** $\frac{9}{2}$ *ua*

**3.** $y = \ln x$ , $x = 0$ e $x = 4$ **R:** $(8\ln 2 - 3)$ *ua*

**4.** $y = e^x$ , $y = 0$ , $x = 0$ e $x = 1$ **R:** $(e - 1)$ *ua*

**5.** $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ , eixo das abscissas , $x = -1$ e $x = 2$ **R:** $\frac{157}{12}$ *ua*

**6.** $y = x^2 + 1$ , $y = 2x - 2$ , $x = -1$ e $x = 2$ **R:** 9 *ua*

**7.** $y = 1 - x^2$ e $y = -3$ **R:** $\frac{32}{3}$ *ua*

**8.** $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$ **R:** $\frac{9}{2}$ *ua*

**9.** $y = \frac{x^3}{3}$ , $x = -1$ , $x = 2$ , eixo das abscissas **R:** $\frac{17}{12}$ *ua*

**10.** $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$ **R:** $\frac{8}{3}$ *ua*

**11.** $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$ **R:** $\frac{64}{3}$ *ua*

**12.** $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$ **R:** $\frac{8}{3}$ *ua*

**13.** $y = x^3$ e $y = x^2$ **R:** $\frac{1}{12}$ *ua*

**14.** $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e $y = x^2 - 4x$ **R:** $\frac{71}{6}$ *ua*

**15.** $y - x = 6$ , $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$ **R:** $22$ *ua*