Grafos Planares
5189-32

Rodrigo Calvo
rcalvo@uem.br

Departamento de Informática – DIN
Universidade Estadual de Maringá – UEM

1° semestre de 2016

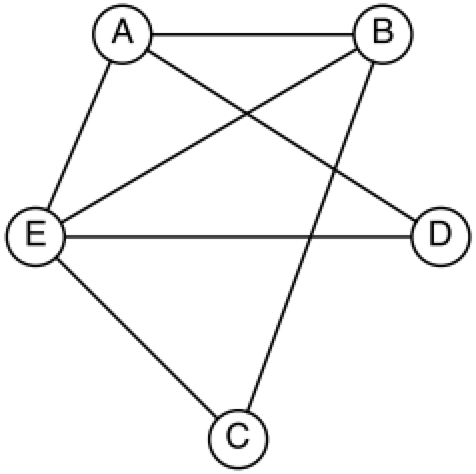
Introdução

- Uma **imersão** de um grafo *G* em uma superfície *S* é uma representação geométrica (desenho) de *G* em *S* tal que dois vértices distintos não ocupam o mesmo lugar em *S* e não existe cruzamento de arestas, a não ser nos extremos quando duas arestas são adjacentes
- Um grafo *G* é **planar** se ele tem imersão no plano ($\mathbf{R}^2$)
- As regiões limitadas por uma imersão planar são chamadas de **faces**
- Todo imersão planar têm uma face ilimitada denominada de **face externa**

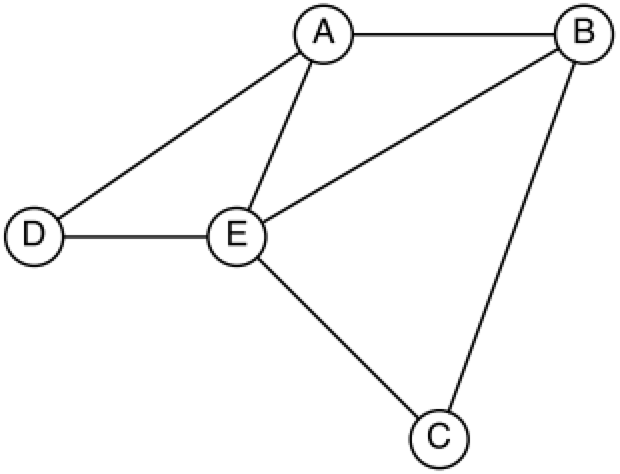
Introdução

- Exemplo:
  - Existem três companhias que devem abastecer com gás, eletricidade e água três prédios diferentes através de tubulações subterrâneas. **Estas tubulações podem estar à mesma profundidade** ?
  - Isto corresponde a perguntar: **é possível desenhar um grafo bipartido com 2 conjuntos de três elementos cada, onde nenhuma aresta cruze outra**.

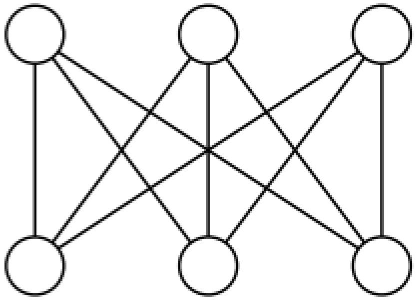
Exemplos



Desenho não planar



Desenho planar



Grafo não planar. Não é possível desenhar este grafo sem cruzamento de arestas

Propriedades

- O grau de uma face é o tamanho mínimo de um caminho na fronteira da face

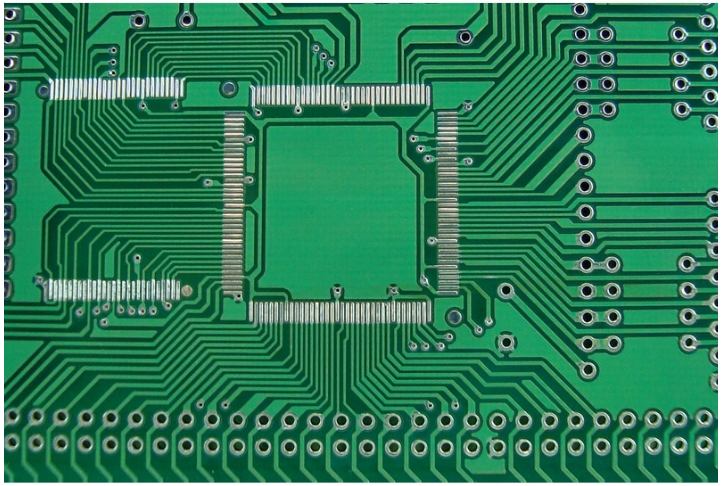
```
b ----- d ----- f ------- g
|       |       | 3       |
|   1   |   2   |    i    |   4
|       |       |    |    |
a ----- c ----- e -- h -- j
```

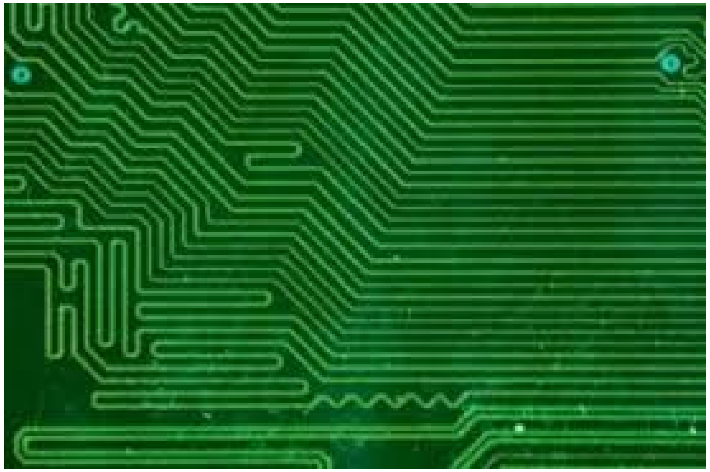
- A fronteira da face 2 tem as arestas *df* , *fe*, *ec*, *cd,* então a face 2 tem grau 4

- A fronteira da face 3 tem as arestas *fg*, *gj*, *jh*, *hi*, *he*, *ef* , mas qualquer percurso na fronteira da face 3 deverá passar pela aresta *ih* duas vezes, como por exemplo, *fg*, *gj*, *jh*, *hi*, *ih*, *he*, *ef* . Portanto, o grau da face 3 é 7.

Aplicação

- Construção de circuitos impressos





Propriedades

- Teorema 1 - Fórmula de Euler
  - Seja $G = (V, A)$ um grafo planar e conexo com f faces, então

    $|V| + f = |A| + 2$
  - Prova: veja as referências

Propriedades

- Corolário 1
  - Seja $G = (V, A)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$, então $|A| \leq 3|\mathrm{V}| - 6$
- Prova
  - Seja W a soma dos graus das faces do grafo, temos que $W = 2|A|$. Cada aresta separa duas faces, com exceção das arestas prego (como as arestas *ih* do exemplo anterior), mas neste caso a aresta é contada duas vezes no grau da face
  - Cada face tem grau pelo menos 3, portanto $3f \leq W$, como $W = 2|A|$, então $3f \leq 2|A|$

Propriedades

- **Prova (continuação)**
  - **Substituindo *f* por 2|*A*|/*3*, na fórmula de Euler, obtemos:**

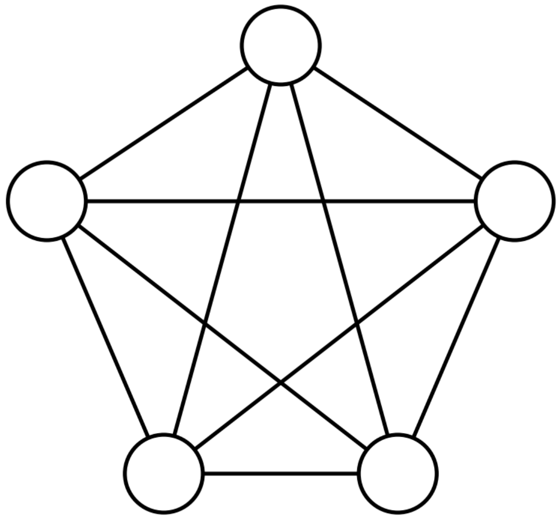
$$|V| + \frac{2|A|}{3} \leq |A| + 2$$

$$3|V| + 2|A| \leq 3|A| + 6$$

$$|A| \leq 3|V| - 6$$

Propriedades

- Podemos usar o Corolário 1 para mostrar que o K_5 (grafo completo de 5 vértices) é não planar. O K_5 tem 5 vértices e 10 arestas, desta forma $3|V| - 6 = 9$, o que implica que $|A| \leq 3|V| - 6$ é falso. Portanto, o K_5 é não planar.



Propriedades

- Corolário 2
  - Seja $G = (V, A)$ um grafo planar e conexo com $|V| \geq 3$ e sem ciclos de tamanho 3, então , então $|A| \leq 2|V| - 4$
- Prova
  - Semelhante a do Corolário 1
  - $W = 2|A|$
  - Cada face tem grau pelo menos 4 (não tem ciclos de tamanho 3), portanto , $4f \leq W$, como $W = 2|A|$, então $4f \leq 2|A|$ e $2f \leq |A|$

Propriedades

- Prova (continuação)
  - Substituindo *f* por $|A|/2$, obtemos:

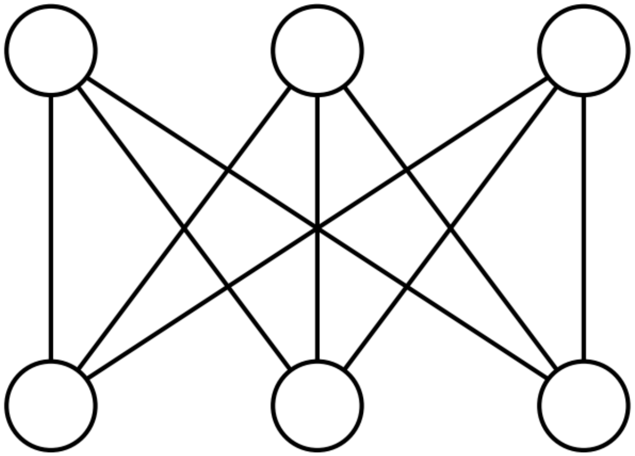
$$|V| + \frac{|A|}{2} \leq |A| + 2$$

$$2|V| + |A| \leq 2|A| + 4$$

$$|A| \leq 2|V| - 4$$

Propriedades

- O $K_{3,3}$ (grafo bipartido em que cada conjunto possui 3 vértices) não tem faces (ciclos) de tamanho 3. Podemos usar o Corolário 2 para mostrar que o $K_{3,3}$ é não planar. O $K_{3,3}$ tem 6 vértices e 9 arestas, desta forma $9 \leq 2 \times 6 - 4 = 8$, o que não é verdade. Portanto, o $K_{3,3}$ é não planar.



Propriedades

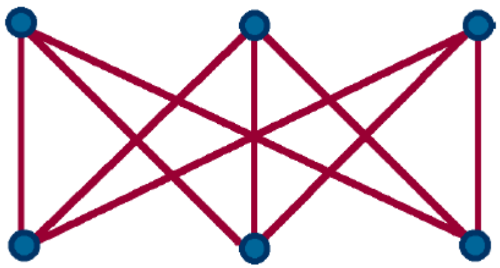
- Propriedades comuns de K_5 e $K_{3,3}$
  - Ambos são regulares;
  - Ambos não são planares;
  - A remoção de uma aresta ou um vértice torna o grafo planar;
  - K_5 é o grafo planar com o menor número de vértices e $K_{3,3}$ é o grafo planar com o menor número de arestas.

Propriedades

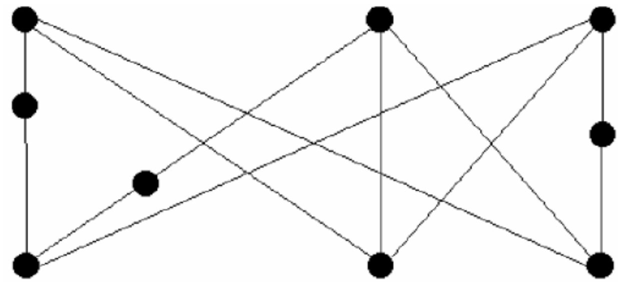
- Uma **operação de subdivisão** de uma aresta $e = (u, v)$ é uma substituição de e por um novo vértice w e duas novas arestas (u,w) e (w, v)
- Uma **subdivisão** de um grafo G é um grafo H que pode ser obtido a partir de G por uma sequência finita de operações de subdivisão de arestas

Propriedades

- Homeomorfismo
  - Dizemos que um grafo *H* é homeomorfo a *G* se *H* puder ser obtido de *G* pela inserção de vértices de grau 2 em pontos intermediários de suas arestas.



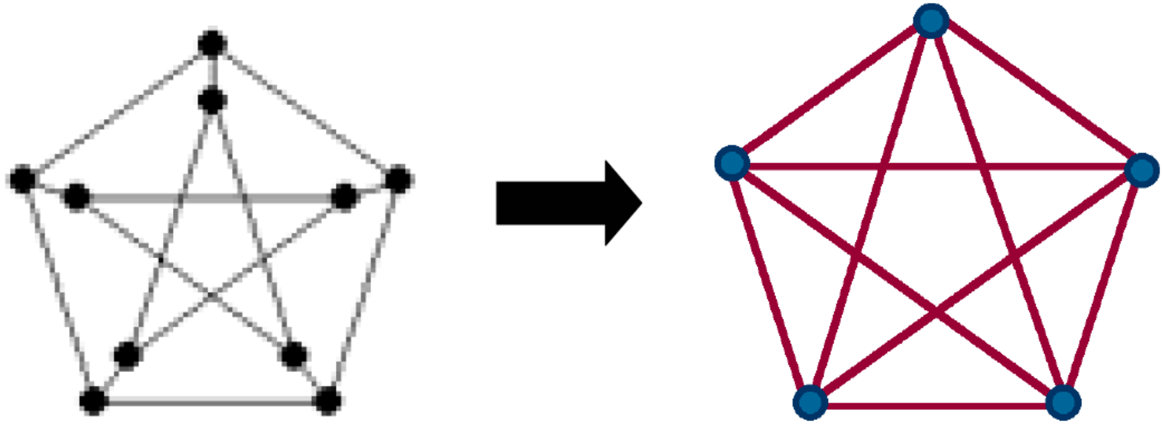
$K_{3,3}$



Grafo homeomorfo a $K_{3,3}$

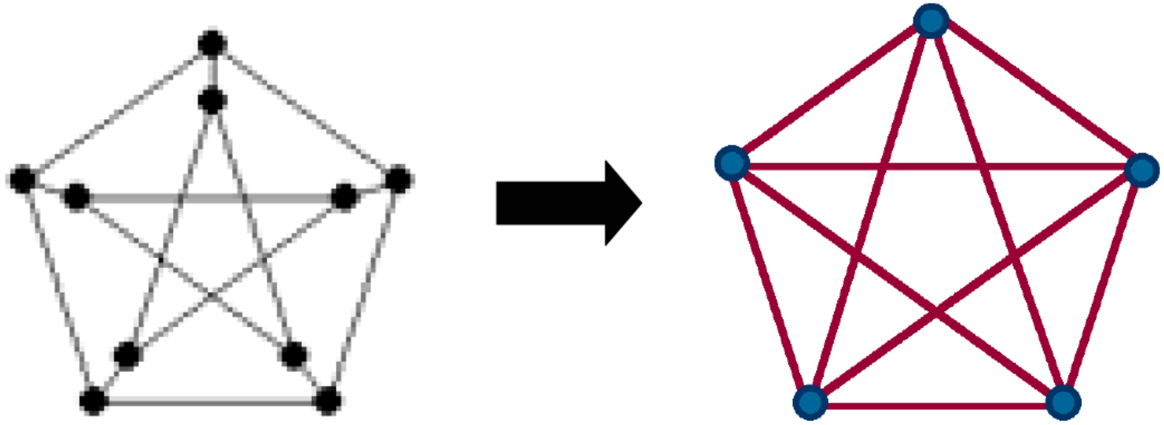
Propriedades

- Teorema
  - Um grafo é planar se e somente se nenhum de seus sub-grafos puder ser contraído em K_5 ou em $K_{3,3}$.



Propriedades

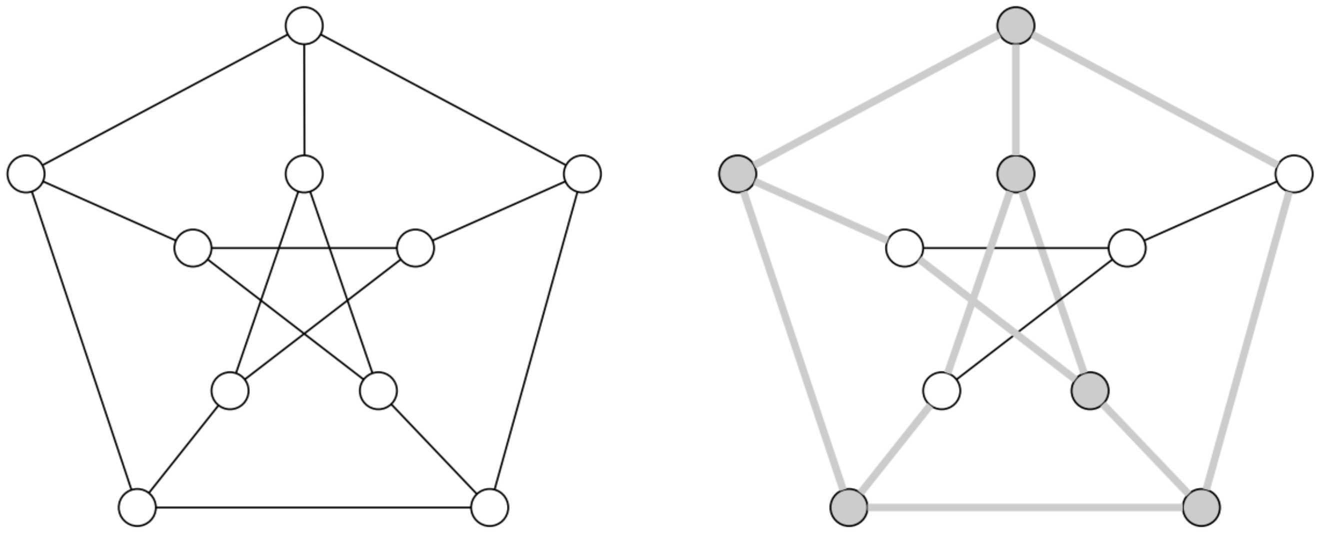
- Teorema de Kuratowski
  - Um grafo é planar se e somente se nenhum de seus sub-grafos for homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.



Propriedades

- Teorema de Kuratowski
  - Um grafo *G* é planar se, e somente se, ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ e do K_5.

Propriedades



Grafo de Pertersen não é planar porque
contém uma subdivisão do K3,3

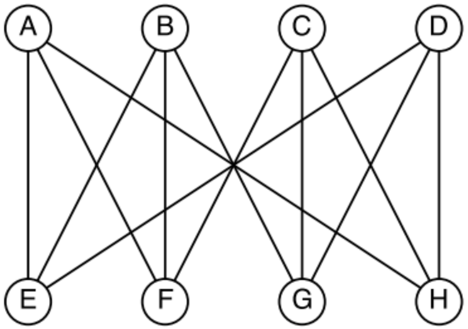
Métodos de teste de planaridade

- Dado um grafo $G = (V, A)$, o problema do teste de planaridade consiste em determinar se G´e planar
- Existem diversos algoritmos com tempo de execução $O(V + A)$
  - Algoritmo clássico baseado em adição de caminhos (Hopcroft e Tarjan, 1974)
  - Baseado em adição de vértices (Lempel, Even e Cederbaum, 1967, melhorado por Eve e Tarjan, 1976, e Booth e Lueker)
  - Baseado em adição de arestas (Boyer e Myrvold, 2004), considerado como estado da arte
- Estes algoritmos são bastante elaborados, difíceis de entender e implementar
- Para grafos pequenos, podemos testar manualmente se um grafo é planar usando o método heurístico círculo-corda

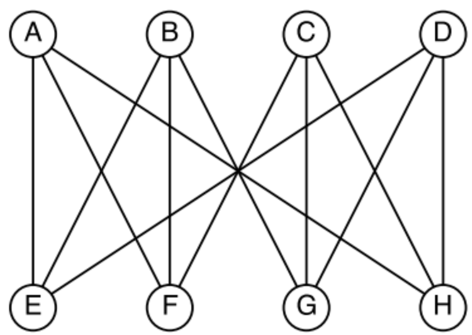
Métodos de teste de planaridade

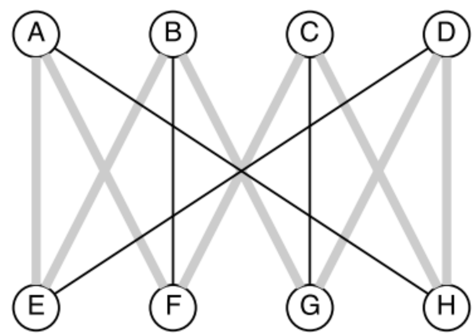
- O método círculo-corda consiste em
  - Passo 1: Encontrar um ciclo que contém todos os vértices do grafo e desenhá-lo como um círculo
  - Passo 2: O restante das arestas que não estão no círculo, chamadas de cordas, deve ser desenhas ou do lado de dentro ou do lado de fora do círculo, de maneira que o desenho seja planar
- Observe-se que este é um método heurístico, nem todos os grafos planares podem ser desenhados com este método

Método círculo-corda

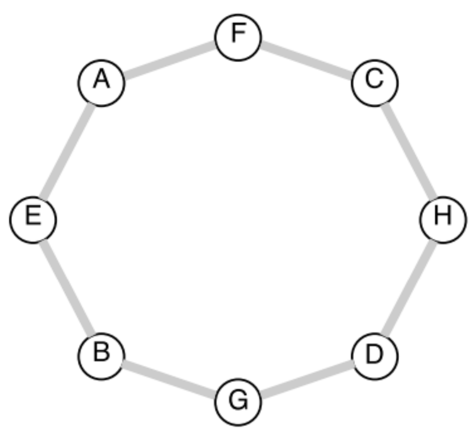


Método círculo-corda

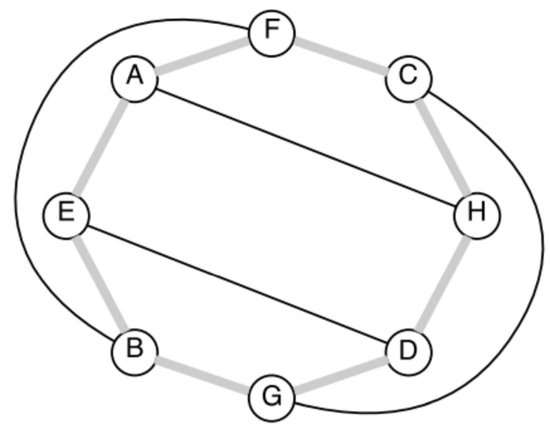




Identificação de um ciclo com todos os vértices



Desenho do ciclo em forma de círculo



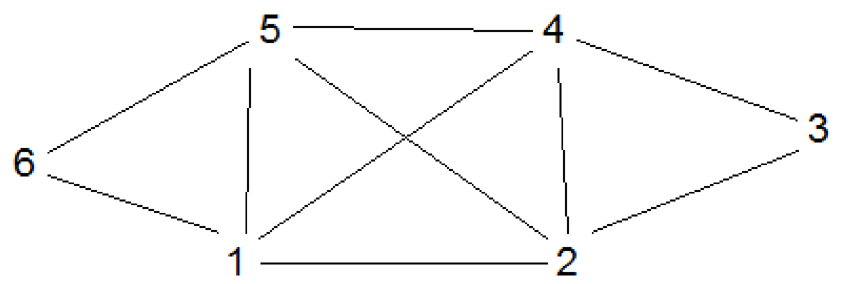
Desenho das arestas restantes

Medidas de não planaridade

- Quando um grafo não é planar, uma questão interessante é: o quão longe de ser planar o grafo está? I Algumas medidas de não planaridade
  - Número mínimo de cruzamento de arestas para um desenho no plano ($cr(G)$ - o *crossing number* de G)
  - Número mínimo de arestas cuja remoção do grafo resulta em um grafo planar ($sk(G)$ - a *skewness* de G)
  - Número mínimo de operações de divisões de vértices que obtêm um grafo planar ($sp(G)$ - o *splitting number* de G)
- Pela definição destas medidas, podemos observar que $sp(G) \leq sk(G) \leq cr(G)$
- Os problemas de otimização relacionados com o número mínimo de cruzamento, número mínimo de remoção de arestas e número mínimo de divisão de vértices são NP-difícies

Exercícios

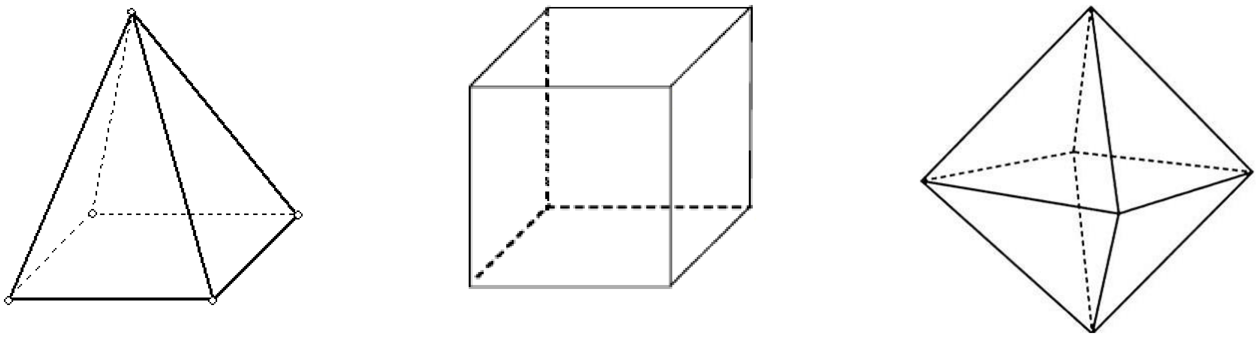
- O grafo abaixo é planar? Por quê? Use a fórmula de Euler para calcular número de faces de G. Se o grafo for planar, redesenhe-o de forma que nenhuma aresta se cruze com outra.



- Refaça o exercício removendo o vértice grafo juntamente com as arestas correspondentes.

Exercícios

- Mostre desenhando que os grafos do tetraedo, do cubo e do octaedro são planares.



Bibliografia

- Grafos planares. Livro Building Blocks for Theoretical Computer Science. Margaret M. Fleck. Capítulo 21.
- Grafos planares. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph
- Teste de planaridade. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Planarity_testing