AULA 19 – Fluxo em Redes (Parte II)

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

5 de agosto de 2015

Sumário

- Revisão
- Definições
- O teorema de hoje
- O algoritmo de Ford-Fukerson
- Exemplo

Revisão

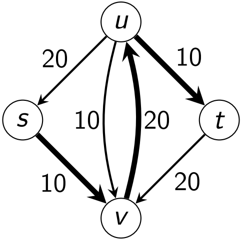
- Grafos modelando redes de transporte.
- Dois vértices especiais: fonte e sumidouro.
- Condições de capacidade e de conservação.
- Valor de um fluxo.
- Grafo residual.

Definições

Gargalo

Seja P um caminho simples $s \rightsquigarrow t$ no grafo residual G_f, definimos `gargalo(P,f)` como sendo a capacidade residual mínima entre todas as arestas em P, com respeito ao fluxo f.

Exemplo – Qual é o gargalo?



Definições

Caminho aumentante

Qualquer caminho de s a t no grafo residual é chamado de **caminho aumentante**.

A operação `aumenta(f, P)` define um novo fluxo f' em G.

```
aumenta(f, P)
Seja b o gargalo(P,f);
para cada aresta (u,v) ∈ P faça
    se (u,v) é uma aresta de avanço então
        incremente f(u,v) em G em b unidades;
    senão          //aresta de retorno
        decremente f(v,u) em G em b unidades;
devolva f;
```

O teorema

O resultado de `aumenta(f,P)` é um novo fluxo f' em G, obtido pelo incremento ou decremento dos valores de fluxo nas arestas pertencentes a P.

Teorema

f' é um fluxo em G.

O teorema

O resultado de `aumenta(f,P)` é um novo fluxo f' em G, obtido pelo incremento ou decremento dos valores de fluxo nas arestas pertencentes a P.

Teorema

f' é um fluxo em G.

Demonstração

Devemos considerar as condições de **capacidade** e **conservação**.

Demonstração do teorema (continuação)

Capacidade

Como f e f' diferem apenas nas arestas pertencentes a P, precisamos verificar as condições de capacidade apenas nestas arestas.

- Se (u, v) é uma aresta de avanço, então $f(u, v) \leq c(u, v)$:

$$
\begin{aligned}
0 \leq f(u, v) \leq f'(u, v) &= f(u, v) + \mathit{gargalo}(P, f) \\
&\leq f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) \\
&= c(u, v)
\end{aligned}
$$

- Se (u, v) é uma aresta de retorno, então $(u, v) \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
c(u, v) \geq f(u, v) \geq f'(u, v) &= f(u, v) - \mathit{gargalo}(P, f) \\
&\geq f(u, v) - f(u, v) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Demonstração do teorema (continuação)

Conservação

Precisamos verificar as condições de conservação para cada vértice interno pertencente ao caminho P. Seja v tal vértice. Podemos verificar que a mudança na quantidade de fluxo entrando em v é a mesma quantidade de fluxo que sai de v. Como f satisfazia a condição de conservação em v, f' também deve satisfazer.
Existem 4 casos a serem considerados dependendo do tipo de aresta que entra em v (avanço ou retorno) e do tipo de aresta que sai de v (avanço ou retorno).

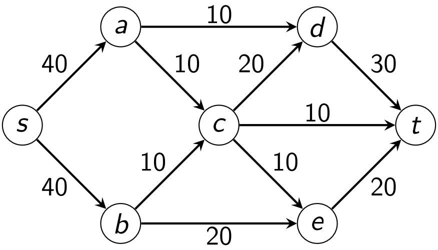
Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G)

Inicie $f(u, v) = 0$ para toda aresta $(u, v) \in G.E$
Enquanto existir um caminho aumentante em G_f faça
  Seja P um caminho simples de s a t em G_f;
  f' = aumenta(f,P);
  Atualize f ao longo de P para f';
  Atualize G_f para $G_{f'}$;
devolva f;

Exemplo

Aplique o algoritmo de Ford-Fulkerson na rede a seguir:



Término e complexidade de tempo

Invariantes do laço

1. Em cada estágio intermediário do algoritmo, os valores dos fluxos {f(u,v)} e as capacidades residuais de G_f são inteiras.
2. Seja f um fluxo em G, e seja P um caminho simples em G_f. Então $v(f') = v(f) + gargalo(P, f)$; como $gargalo(P, f) > 0$, temos que $v(f') > v(f)$.

Término

Seja $C = \sum_{v \in V} c(s, v)$, então temos que $v(f) \leq C$.
Suponha que todas as capacidades na rede G são inteiras, então o algoritmo Ford-Fulkerson termina em no máximo C iterações do laço enquanto.
Demonstração: Por 2, o fluxo aumenta a cada iteração. Por 1, pelo menos uma unidade a cada iteração. Sabemos que C limita superiormente o fluxo. Portanto o algoritmo termina.

Complexidade

Ford-Fulkerson pode ser implementado com complexidade $O((V + E)C)$.