Componentes Fortemente Conectados
5189-32

Rodrigo Calvo
rcalvo@uem.br

Departamento de Informática – DIN
Universidade Estadual de Maringá – UEM

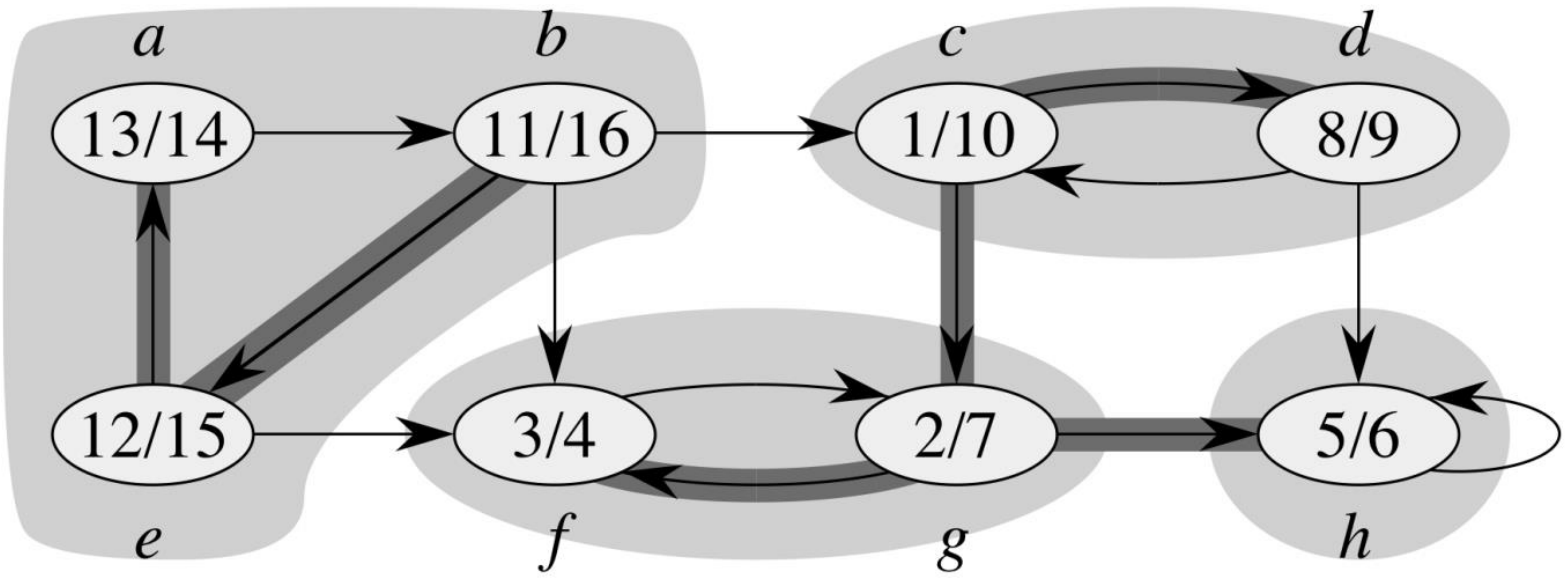
1° semestre de 2016

Introdução

- Um **Componente Fortemente Conectado** (*Strongly Connected Component* - SCC) de um grafo direcionado G = (*V*, *A*) é um conjunto máximo de vértices $C \subseteq V$, tal que, para todo par de vértice *u* e *v*, existe um caminho de *u* até *v* e um caminho de *v* até *u*.
- Em outras palavras:
  - *v* é alcançável a partir do vértice *u*; e
  - *u* é alcançável a partir do vértice *v*.

- O caminho entre um vértice *u* até outro *v* é denotado como : $u \rightsquigarrow v$

Componentes Fortemente Conectados



- Componentes fortemente conectados : {*a, b, e*}, {*c, d*}, {*f, g*} e {*h*}

Grafo transposto

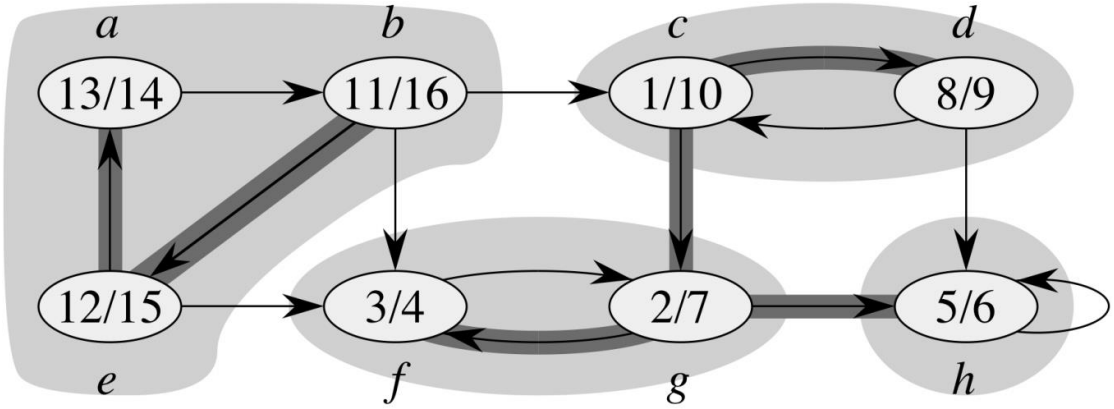
- O algoritmo para identificar componentes fortemente conectados utiliza o grafo transposto de G
  - $G^T = (V, A^T)$, $A^T = \{(u, v) \mid (v, u) \in A\}$
  - G^T é G com todas as arestas invertidas
  - G^T pode ser calculado em tempo $\Theta(V + A)$ para a representação de lista de adjacências
  - G e G^T tem os mesmos SCC's
  - Veja o exercício 22.1-3

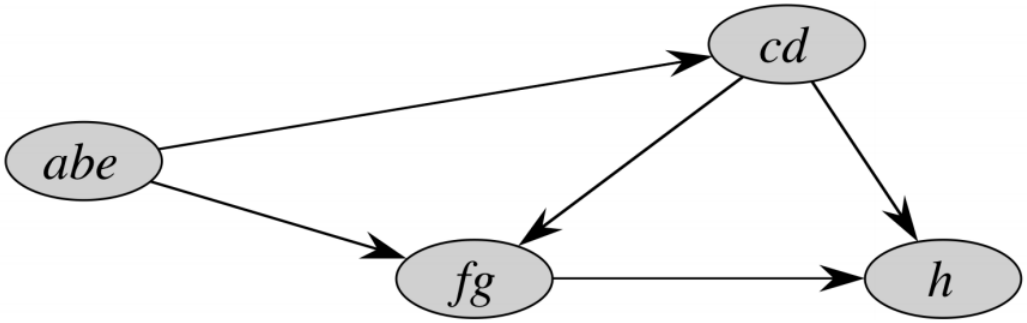
Grafo de componentes

- Grafo de componentes
  - $G^{SCC} = (V^{SCC}, A^{SCC})$
  - V^{SCC} tem um vértice para cada SCC em G
  - SCC contém uma aresta se existe uma aresta correspondente entre os SCC's de G

- O grafo de componentes é acíclico, o que implica o lema 22.13

Grafos de componentes





Grafos de componentes

- Lema 22.13
  - G^{SCC} é um grafo direcionado acíclico (gda)
  - Sejam C e C' SCC distintos em G, seja $u, v \in C$ e seja $u', v' \in C'$. Suponha que exista um caminho $u \rightsquigarrow u'$ em G. Então não pode existir um caminho $v' \rightsquigarrow v$ em G.

Grafos de componentes

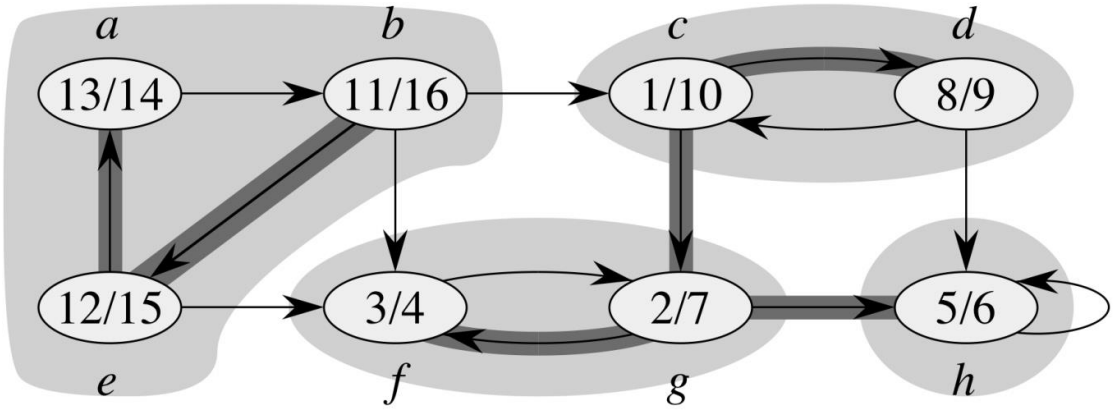
- Lema 22.13
  - G^{SCC} é um grafo direcionado acíclico (gda)
  - Sejam C e C' SCC distintos em G, seja $u, v \in C$ e seja $u', v' \in C'$. Suponha que exista um caminho $u \rightsquigarrow u'$ em G. Então não pode existir um caminho v' $\rightsquigarrow$ v em G.
  - Prova: Suponha que exista um caminho v' $\rightsquigarrow$ v em G. Então existem caminhos $u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$ e $v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$ em G. Portanto, u e v' são acessíveis um a partir do outro, e não podem estar em SCC separados.

Algoritmo

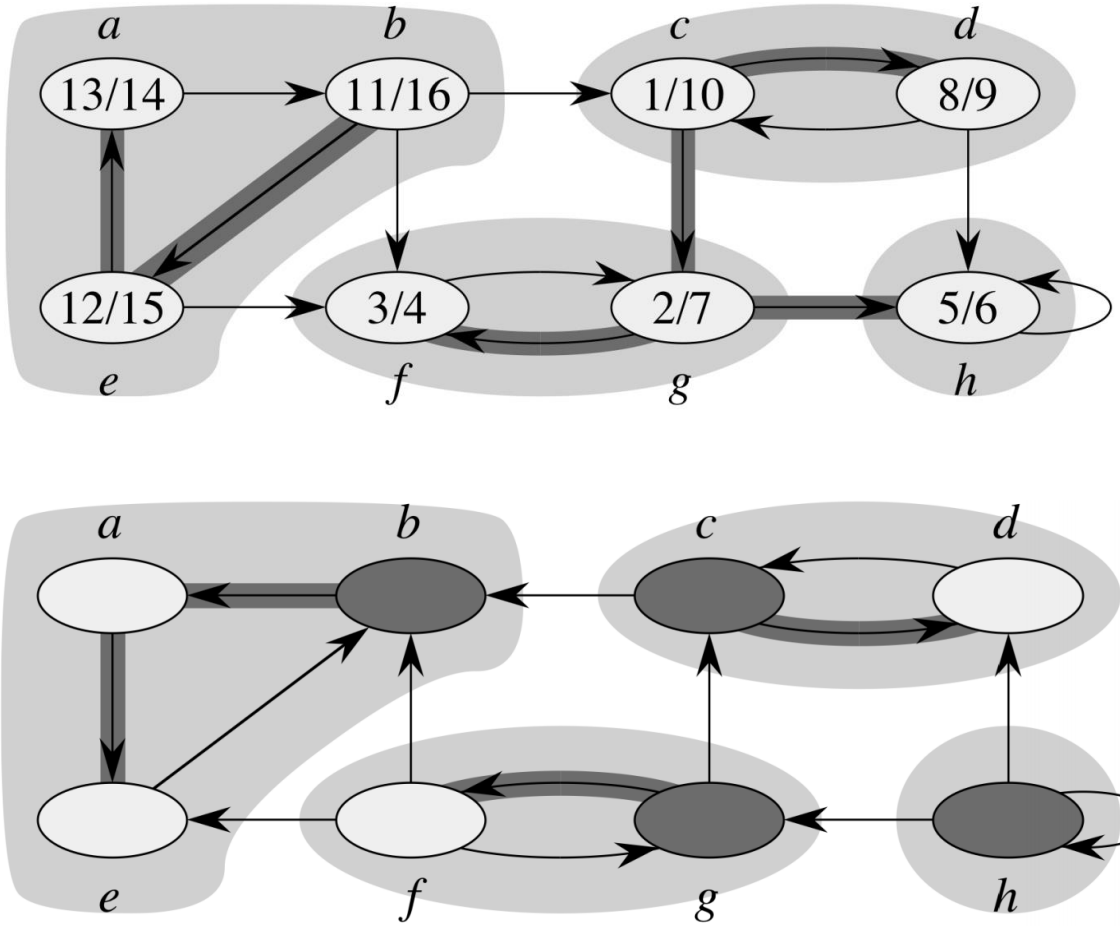
`strongly-connected-components(G)`

1 chamar **`dfs(G)`** para calcular o tempo de término *v.f* para cada vértice *v*
2 calcular G^T
3 chamar **`dfs`**(G^T), mas no laço principal de **`dfs`**, considerar os vértices em ordem decrescente de *v.f.*
4 retornar os vértices de cada árvore na floresta primeiro na profundidade formada na linha 3 como uma componente fortemente conectada separada

Exemplo de aplicação



Exemplo de aplicação



Análise do tempo de execução

- O tempo de execução do **`dfs`** das linhas 1 e 3 é $\Theta(V + A)$
- Conforme os vértices são terminados na chamada do **`dfs`** da linha 1, os vértices são inseridos na frente de uma lista ligada (O(1)), como cada vértice é inserido apenas uma vez, o tempo total de operações de inserções é $\Theta(V)$
- O tempo para calcular o grafo transposto na linha 2 é $\Theta(V + A)$
- Portanto o tempo de execução do algoritmo é $\Theta(V + A)$

Corretude do `strongly-connected-components`

- Ideia
  - Considerando os vértices no segundo **`dfs`** na ordem decrescente dos tempos de términos obtidos no primeiro **`dfs`**, estamos visitando os vértices do grafo de componentes na ordem topológica

Corretude do `strongly-connected-components`

- Duas questões de notação são definidas:
- As referências a $u.d$ e $u.f$ referem-se aos valores do primeiro **`dfs`**
- Para um conjunto $U \subseteq V$, definimos
  - $d(U) = \min_{u \in U} \{u.d\}$ (tempo de descoberta mais antigo)
  - $f(U) = \max_{u \in U} \{u.f\}$ (tempo de término mais recente)

Corretude do `strongly-connected-components`

- Lema 22.14
  - *Sejam C e C'* SCC distintos em $G = (V, A)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in A$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) > f(C')$

Corretude do `strongly-connected-components`

- Lema 22.14
  - *Sejam C e C'* SCC distintos em $G = (V, A)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in A$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) > f(C')$
- Corolário 22.15
  - Sejam C e C' SCC distintos em $G = (V, A)$. Suponha que exista uma aresta $(u, v) \in A^T$, tal que $u \in C$ e $v \in C'$. Então $f(C) < f(C')$

Corretude do `strongly-connected-components`

- Teorema 22.16: **`strongly-connected-components(G)`** calcula corretamente os SCC's de um grafo orientado *G*
  - O segundo **`dfs`** começa com um SCC *C* tal que *f(C)* é máximo
  - Seja $x \in C$ o vértice inicial, o segundo **`dfs`** visita todos os vértices de *C*. Pelo corolário, como $f(C) > f(C')$ para todo $C \neq C'$, não existe aresta de *C* para *C'* . Logo, o **`dfs`** visita apenas os vértices de *C* (descobrindo este SCC)
  - A próxima raiz escolhida no segundo **`dfs`** está em um SCC *C'* tal que *f(C')* é máximo em relação a todos os outros SCC (sem considerar *C*). O **`dfs`** visita todos os vértices de *C'* , e as únicas arestas fora de *C'* vão para *C*, cujo os vértices já foram visitados
  - O processo continua até que todos os vértices sejam visitados

Corretude do `strongly-connected-components`

- Teorema 22.16: **`strongly-connected-components(G)`** calcula corretamente os SCC's de um grafo orientado *G*
  - Cada vez que uma raiz é escolhida pelo segundo **`dfs`**, ele só pode alcançar
    - Os vértices no SCC dele (através de arestas da árvore)
    - Os vértices que já foram visitados no segundo **`dfs`**

Bibliografia

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo 22.4.
- Nivio Ziviani. Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C. 3a Edição Revista e Ampliada, Cengage Learning, 2010. Capítulo 7. Seção 7.6