Álgebra Linear
Espaço Vetorial

Prof. André Tiba

akot@cin.ufpe.br

Baia 65, ramais: 4765 ou 4338

esta aula baseia-se nas notas de aula gentilmente cedidas pelo professor Carlos Mello

Espaço Vetorial

1. Definição
2. Subespaços Vetoriais
3. Combinação Linear
4. Dependência e Independência Linear
5. Base
6. Mudança de Base
7. Inversa da Matriz Mudança de Base
8. Exercícios

Espaço Vetorial: definição

- **Definição:** Um *espaço vetorial real,* é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma, V x $V \to V$, e multiplicação por escalar, R x $V \to V$, tais que, para quaisquer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$ e a, b $\in \mathbf{R}$, as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

Espaço Vetorial: definição

- **Propriedades:**
  - i. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
  - ii. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
  - iii. Existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
    - $\mathbf{0}$ é o vetor nulo
  - iv. Existe $-\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
  - v. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$, a escalar
  - vi. $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$, a, b escalares
  - vii. $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$
  - viii. $1.\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Espaço Vetorial: definição

- Designamos por *vetor* um elemento do espaço vetorial V.
- Espaço vetorial, é um termo genérico, que pode ser designado para representar diferentes tipos de conjuntos, tais como:
  - Conjuntos de pontos: no $\mathbf{R}^2$, no $\mathbf{R}^3$ ou no $\mathbf{R}^n$;
  - Conjuntos de matrizes: 2x2, mxn, diagonais, triangulares, etc...
  - Conjuntos de funções: polinômiais, trigonométricas, etc ...

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1: Seja V o espaço vetorial das matrizes reais 2x2, ou seja V = M(2,2).
  - Para que V seja, de fato, um espaço vetorial, devemos provar que as propriedades i)-viii) sejam satisfeitas.
  - Assuma que a operação de soma seja a adição de matrizes e a operação do produto como a multiplicação de matrizes por um escalar.
  - Dessa forma, sejam **u**, **v** e **w** $\in V$, tal que:

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \qquad w = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

  - e a e b valores reais, então,

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1(cont.):
  - axioma 1: (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) (prova)

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11}) & (u_{12}+v_{12}) \\ (u_{21}+v_{21}) & (u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (v_{11}+w_{11}) & (v_{12}+w_{12}) \\ (v_{21}+w_{21}) & (v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}\right)=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1(cont.):
  - axioma 2: **u** + **v** = **v** + **u** (prova)

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{21} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} \\ v_{21}+u_{21} & v_{21}+u_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

  - axioma 3: Existe um elemento **0** em *V*, chamado um **vetor nulo** para *V*, tal que **u** + **0** = **u** para todo **u** em *V*. (prova)

Seja $\mathbf{0}\equiv\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$\forall\,\mathbf{u}\in V,\quad \mathbf{u}+\mathbf{0}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{u}$$

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1(cont.):
  - axioma 4: Para todo **u** $\in V$, existe um objeto –**u** $\in V$, chamado **oposto, negativo ou simétrico** de **u**, tal que **u** + (-**u**) = **0.**

$$\text{Seja } -\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$\forall\, \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} + (-u_{11}) & u_{12} + (-u_{12}) \\ u_{21} + (-u_{21}) & u_{22} + (-u_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1(cont.):
  - axioma 5: $k\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$, onde $k \in \mathbf{R}$

$$k(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = k\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{21} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} kv_{11}+ku_{11} & kv_{12}+ku_{12} \\ kv_{21}+ku_{21} & kv_{21}+ku_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} = k\mathbf{v} + k\mathbf{u}$$

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1(cont.):
  - axioma 6: $(k+l)\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{u}$, onde $k, l \in \mathbf{R}$

$$(k+l)\mathbf{u} = (k+l)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+l)u_{11} & (k+l)u_{12} \\ (k+l)u_{21} & (k+l)u_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} ku_{11} + lu_{11} & ku_{12} + lu_{12} \\ ku_{21} + lu_{21} & ku_{22} + lu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$$

  - axioma 7: $k(l\mathbf{u}) = (kl)\mathbf{u}$, onde $k, l \in \mathbf{R}$

$$k(l\mathbf{u}) = k\begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} klu_{11} & klu_{12} \\ klu_{21} & klu_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (kl)u_{11} & (kl)u_{12} \\ (kl)u_{21} & (kl)u_{22} \end{bmatrix} = (kl)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = (kl)\mathbf{u}$$

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 1(cont.):
  - axioma 8: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

- Como V = M(2,2) satisfaz as propriedades i)-viii), V é um espaço vetorial.

Espaço Vetorial: definição

- Exemplo 2(contra-exemplo): um conjunto que **não** é um espaço vetorial:
  - Seja $\mathbf{u} = (u_1, v_1)$ e $\mathbf{v} = (v_2, v_2)$
  - Seja $V = \mathbf{R}^2$ tal que a adição e multiplicação são definidas como:
    - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$
    - $k.\mathbf{u} = (ku_1, 0)$
  - Nesse caso, o axioma 8 não vale, pois:
    - $1\mathbf{u} = 1(u_1, u_2) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$
  - Logo V não é um espaço vetorial.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

Definição: Seja V um espaço vetorial e W um subconjunto de V não vazio. W será um *subespaço vetorial* de V se:

- i) Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
- ii) Para quaisquer $a \in \mathrm{R}$, $\mathbf{u} \in W$, tivermos $a\mathbf{u} \in W$.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

Observações decorrentes da definição do subespaço W:

1) Garante que ao realizar uma operação de soma ou multiplicação por um escalar, o vetor resultante sempre estará dentro de W.

   - Isso é suficiente para afirmar que W é ele mesmo um espaço vetorial, pois assim as operações ficam bem definidas.

   - Assim, não é preciso verificar novamente as propriedades (i) a (viii) de espaço vetorial porque como elas são válidas em V, também são válidas para W (que está contido em V).

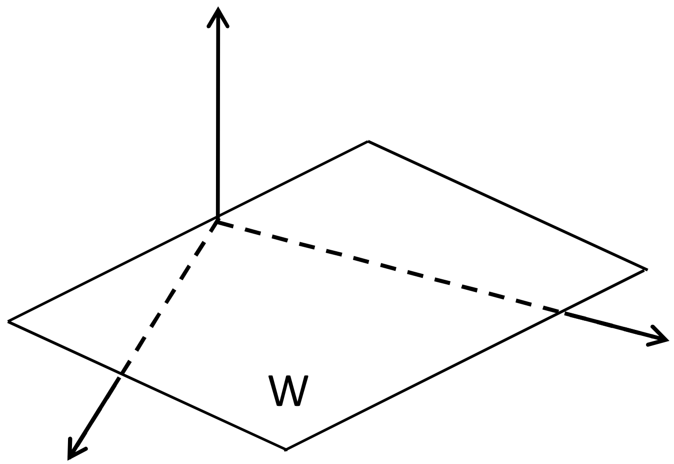
Espaço Vetorial: subespaço vetorial

Observações decorrentes da definição do subespaço W:

2) Qualquer subespaço W de V, precisa necessariamente conter o vetor nulo (por causa da condição (ii) da definição quando a = 0).
3) Todo espaço vetorial admite, pelo menos, dois subespaços (chamados de subespaços triviais):
   - O conjunto formado apenas pelo vetor nulo;
   - O próprio espaço vetorial.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

Exemplo 1**:** $V = R^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem



A origem (0,0,0) necessariamente está contida em *W*. Se ela não tivesse, *W* não seria subespaço de *V*.

Seja o espaço vetorial do R^3, seus possíveis subespaços *W* são:

a) a origem (0,0,0);

b) qualquer reta que passe pela origem;

c) qualquer planos que contenha a origem.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

- Exemplo 2**:** $V = \mathrm{R}^5$ e $W = \{(0,x_2,x_3,x_4,x_5);\ x_i \in \mathbf{R}\}$
  - W é o conjunto de vetores de $\mathbf{R}^5$ com a primeira coordenada nula;
  - Vamos verificar as condições (i) e (ii):
    - (i) Sejam $\mathbf{u} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ e $\mathbf{v} = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$

      Então $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(0, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5) \in W$.
    - (ii) Seja $k \in \mathrm{R}$, então $k\mathbf{u} = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W$.
  - Portanto, W é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^5$.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

- Exemplo 3 (contra-exemplo)**:** $V = \mathrm{R}^2$ e $W = \{(x,x^2) \mid x \in \mathbf{R}\}$
  - *Se W* um subespaço vetorial de *V*, as operações de adição e multiplicação por escalar devem ser válidas. Vamos testar:
    - (i) Sejam $\mathbf{u} = (1, 1) \in W$, e $\mathbf{v} = (2, 4) \in W$

      Então $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1+2,1+4) = (3,5)$ mas $(3,5) \notin W$.
  - Como (i) não é satisfeito, *W* não é subespaço vetorial de *V*.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

- Exemplo 4 (contra-exemplo)**:** V = M(2,2) e W são as matrizes de V tal que $a_{11} \leq 0$.
  - Sejam $u = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$ $\quad v = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \in W$ $\quad k = -3$

$$(i) \quad u + v = \begin{bmatrix} -2-1 & 1+2 \\ 3+0 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in W$$

$$(ii) \quad ku = (-3)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \notin W$$

- Como (ii) não é satisfeito, W não é subespaço vetorial de V.

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

Teorema (Interseção de subespaços): Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a interseção $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V.

Observe que $W_1 \cap W_2$ <u>nunca</u> é vazio já que eles sempre contêm, pelo menos, o vetor nulo.

Prova (i): sejam $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_2$

como $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_1$, então $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1$

como $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W_2$, então $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_2$

assim, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W_1 \cap W_2$

Prova (ii): sejam $k \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{x} \in W_1$, $\mathbf{x} \in W_2$

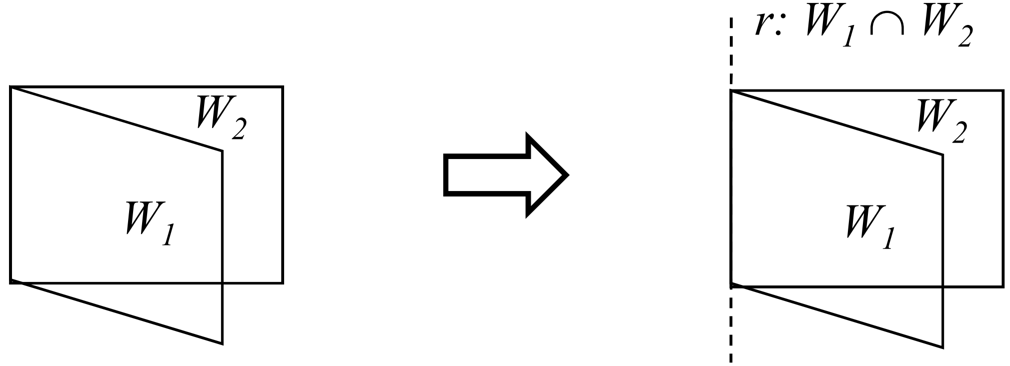
como $\mathbf{x} \in W_1$, então $k\mathbf{x} \in W_1$

como $\mathbf{x} \in W_2$, então $k\mathbf{x} \in W_2$

assim, $k\mathbf{x} \in W_1 \cap W_2$

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

- Exemplo 5 **:** V = $\mathbf{R}^3$, $W_1 \cap W_2$ é a reta r de interseção dos planos W_1 e W_2 .



- Exemplo 6 **:** V = M(n,n)
  - W_1 = {matrizes triangulares superiores}
  - W_2 = {matrizes triangulares inferiores}
  - $W_1 \cap W_2$ = {matrizes diagonais}

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

Embora a interseção de subespaços vetoriais gere um subespaço vetorial, isso necessariamente não acontece com a união de subespaços vetoriais.

Teorema (Soma de subespaços vetoriais): Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então o conjunto

$$W_1 + W_2 = \{\mathbf{v} \in V;\ \mathbf{v} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2},\ \mathbf{w_1} \in W_1,\ \mathbf{w_2} \in W_2\}$$

é subespaço de V

Espaço Vetorial: subespaço vetorial

- Exemplo 7: se W_1 e W_2 são duas retas, $W = W_1 + W_2$ é o plano que contém estas retas.

- Exemplo 8: $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$ onde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

  Então, $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = M(2,2)$

Observação: Quando $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado ***soma direta*** de W_1 com W_2, denotado por $W_1 \oplus W_2$.

Espaço Vetorial: combinação linear

- **Definição:** Sejam V um espaço vetorial real, e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n \in V$. Sejam ainda $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais. Então o vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

onde $\mathbf{v}$ é uma *combinação linear* dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$.

- Uma vez escolhidos os vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ de V, o conjunto W formado por todos os vetores de V que são combinações lineares dos n vetores, é um subespaço vetorial de V.
  - W é chamado de *subespaço gerado* por $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$
  - $W = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}] = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + ... + a_n\mathbf{v}_n, a_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq n\}$.

Espaço Vetorial: combinação linear

- Exemplo 1: $V = \mathrm{R}^2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$
  - Então, $V = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, pois dados $\mathbf{v} = (x, y) \in V$, tem-se que:

    $\mathbf{v} = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$

- Exemplo 2: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$

Então, $[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \Re \right\}$

Espaço Vetorial: dependência e independência linear

• **Definição:** Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n} \in V$. Diz-se que o conjunto $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},...,\mathbf{v_n}\}$ é ***linearmente independente*** (LI), ou que o vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ são LI, se a equação:

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_\mathrm{n}\mathbf{v}_\mathrm{n} = \mathbf{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

• Caso exista algum $a_n \neq 0$, então diz-se que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ é ***linearmente dependente*** (LD), ou que os vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$ são LD.

Espaço Vetorial: dependência e independência linear

- Exemplo 1: $V = \mathrm{R}^2$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$
  - $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são LI pois, sejam duas constantes a_1 e a_2, se:

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (0,0) \quad \Rightarrow$$

$$(a_1, 0) + (0, a_2) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad (a_1, a_2) = (0,0)$$

ou seja, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$

- Exemplo 2: $V = \mathrm{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$
  - $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são LI pelos mesmos argumentos do exemplo anterior

Espaço Vetorial: dependência e independência linear

- Exemplo 3: $V = \mathrm{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1, 1)$
  - $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ são LD pois, sejam três constantes a_1, a_2 e a_3, se:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$a_1(1, -1) + a_2(0, 1) + a_3(1, 1) = (0,0) \quad \Rightarrow$$

$$(a_1, -a_1) + (0, a_2) + (a_3, -a_3) = (0,0) \quad \Rightarrow$$

$$(a_1 + a_3 , -a_1 + a_2 - a_3) = (0,0)$$

ou seja, $a_1 = -a_3$ e $a_2 = a_1 + a_3$

Como a_1, a_2 e a_3 podem assumir valores não nulos, o conjunto é LD.

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

Definição: Seja um conjunto $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, ...,\mathbf{v_n}\}$ de vetores de *V*.

Este conjunto será uma ***base*** de *V* se:

- i) $\{\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, ...,\mathbf{v_n}\}$ for LI
- ii) $[\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, ...,\mathbf{v_n}] = V$

Todos os vetores de *V*, podem ser gerados a partir da combinação linear deste conjunto de vetores .

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 1: $V = \mathrm{R}^2$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$
  - $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ é base de V, conhecida como ***base canônica*** de R^2.

- Exemplo 2: $V = \mathrm{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$
  - $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ também é uma base de $V = \mathbf{R^2}$.
  - Se $(0,0) = a(1,1) + b(0,1) = (a, a + b)$, então $a = b = 0$
    - Portanto, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ é LI.

  - Mais ainda, $[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}] = V$ pois dado um vetor qualquer $\mathbf{u} = (x,y) \in V$, $\mathbf{u}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$:

$$\mathbf{u} = (x,y) = x\mathbf{v_1} + (x-y)\mathbf{v_2} = x(1,1) + (x-y)(0,1) = (x,y)$$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 3: $V = \mathrm{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = (0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1)$
  - $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ não é uma base de $V = \mathbf{R^2}$.
  - Se $(0,0) = a(0,1) + b(0,-1) = (0, a - b)$ então $a = b$, que pode ou não ser igual a 0 (zero).
    - Portanto, $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ é LD.

- Exemplo 4: $V = \mathrm{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$
  - $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ é ***base canônica*** do $\mathbf{R^3}$.

    i. $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ é LI;

    ii. $\mathbf{u} \in \mathbf{R^3}$, $\mathbf{u} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = x.\mathbf{e_1} + y.\mathbf{e_2} + z.\mathbf{e_3}$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 5: {(1,0,0), (0,1,0)} não é base de R^3
  - é LI
  - mas não gera todo $\mathbf{R^3}$, ou seja $[(1,0,0), (0,1,0)] \neq \mathbf{R^3}$.

- Exemplo 6: V = M(2,2)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ é base canônica de V.

    i. $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ é LI;

    ii. $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = x.\mathbf{e_1} + y.\mathbf{e_2} + z.\mathbf{e_3} + \mathrm{w}.\mathbf{e_4}$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

Teorema: Sejam $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, ...,\mathbf{v_n}$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial *V*. Então dentre esses vetores, podemos extrair uma base de *V*.

- Isso independe de $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2}, ...,\mathbf{v_n}$ serem LD ou LI.

Teorema: Seja um espaço vetorial *V* gerado por um conjunto finito de vetores $\mathbf{v_1},\mathbf{v_2},...,\mathbf{v_n}$. Então, qualquer conjunto com mais de *n* vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo *n* vetores).

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

Corolário: Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão de V*, e denotado por *dim V*.

- Exemplo 7: $V = R^2$, $dim\ V = 2$
  - {(1,0), (0,1)} assim como {(1,1), (0,1)} , são bases de $V = \mathbf{R}^2$.

- Exemplo 8: $V = R^3$, $dim\ V = 3$

- Exemplo 9: $V = M(2,2)$, $dim\ V = 4$
  - Exemplo 6 mostra a base canônica para M(2,2).

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

Teorema: Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita, pode ser completado de modo a formar uma base de V.

Corolário: Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.

Teorema: Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim\ U \leq dim\ V$ e $dim\ W \leq dim\ V$. Além disso:

- $dim(U + W) = dim\ U + dim\ W - dim(U \cap W)$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

Teorema: Dada uma base $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira *única* como combinação linear de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$.

Definição: Sejam $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ base de V, e $\mathbf{v} \in V$ onde $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + ... + a_n\mathbf{v_n}$. Chamamos esses números a_i de coordenadas de **v** em relação à base β e denotamos por:

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 10: $V = \mathbf{R^2}$.

Seja a base canônica $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$

Seja o vetor $\mathbf{u} = (5,-2)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R^2}$.

Então, $\mathbf{u} = (5, -2) = a_1(1,0) + a_2(0,1) \Rightarrow a_1 = 5$ e $a_2 = -2$

Logo, $[\mathbf{u}]_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Para outra base $\beta' = \{(1,1), (0,1)\}$

$\mathbf{u} = (5, -2) = a_1(1,1) + a_2(0,1) \Rightarrow a_1 = 5$ e $a_2 = -7$

Logo, $[\mathbf{u}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 11:

Observe que a ordem dos elementos de uma base *influi* na matriz das coordenadas de um vetor em relação à esta base.

Seja $\mathbf{u} = (5,-2)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$.

$\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{(0,1), (1,0)\}$

Então,

$$[\mathbf{u}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{u}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Por esse motivo, fica subentendido que uma base $\beta' = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$, possui seus vetores ordenados, na ordem em que aparecem.

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 12: Considere $V = \{(x, y, z);\ x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z);\ x = y\}$. Determine $V+W$.

  - V: $x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$

    $(x, y, x + y) = x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$

    $[(1, 0 , 1), (0, 1, 1)] = V$ → não é uma base do $\mathbf{R}^3$.

  - W: $x = y$

    $(y, y, z) = y.(1, 1, 0) + z.(0, 0, 1)$

    $[(1, 1, 0), (0, 0, 1)] = W$ → não é uma base do $\mathbf{R}^3$.

  - $V + W = [(1, 0 , 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 12 (continuação):

$V + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

▪ Porém como $V + W$ possui 4 vetores, mas os vetores são do R^3, um dos vetores de $V + W$ deve ser combinação linear dos outros três.

▪ Vamos escalonar o sistema $V + W$

$$\begin{array}{l} \mathbf{(V+W)_1} \rightarrow \\ \mathbf{(V+W)_2} \rightarrow \\ \mathbf{(V+W)_3} \rightarrow \\ \mathbf{(V+W)_4} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - L_2$$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 12 (continuação):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_3 = L_3/(-2) \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 = L_4 - L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \mathbf{(V+W)_1} \\ \leftarrow \mathbf{(V+W)_2} \\ \leftarrow \mathbf{(V+W)_4} \\ \leftarrow \mathbf{(V+W)_3} \text{ é LD} \end{array}$$

- Logo $V + W = [(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)]$
- Assim, $V + W = \mathrm{R}^3$
- $\dim \mathrm{R}^3 = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$
  - $\dim(V \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$

- Mas quem é o conjunto $V \cap W$?

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 12 (continuação):
  - Mas quem é o conjunto $V \cap W$?
    - $V \cap W = \{(x, y, z);\ x + y - z = 0 \text{ e } x = y\} \rightarrow (x, x, 2x)$
    - $V \cap W = [(1, 1, 2)] \Rightarrow \dim (V \cap W) = 1$
    - $\dim \mathbf{R}^3 = \dim V + \dim W - \dim V \cap W = 2 + 2 - 1 = 3$

      como esperado !

Espaço Vetorial: mudança de base

Sejam $\beta=\{\mathbf{u_1},...,\mathbf{u_n}\}$ e $\beta'= \{\mathbf{w_1},...,\mathbf{w_n}\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial *V*. Dado o vetor $\mathbf{v} \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + ... + x_n\mathbf{u_n}$$

Eq (01)

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + ... + y_n\mathbf{w_n}$$

Espaço Vetorial: mudança de base

Deve haver uma maneira de relacionar as coordenadas de **v** em relação à base β

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor **v** em relação à base β'

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Espaço Vetorial: mudança de base

Como $\{\mathbf{u_1},...,\mathbf{u_n}\}$ é base de *V*, qualquer vetor de *V* pode ser escrito como uma combinação dos vetores $\mathbf{u}_i$, i = 1, ... n, inclusive os vetores $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ..., e $\mathbf{w}_n$. Assim:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + ... + a_{n1}\mathbf{u_n} \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} + ... + a_{n2}\mathbf{u_n} \\ ...... \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u_1} + a_{2n}\mathbf{u_2} + ... + a_{nn}\mathbf{u_n} \end{cases} \qquad \text{Eq.(02)}$$

Espaço Vetorial: mudança de base

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + ... + a_{n1}\mathbf{u_n} \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} + ... + a_{n2}\mathbf{u_n} \\ ...... \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u_1} + a_{2n}\mathbf{u_2} + ... + a_{nn}\mathbf{u_n} \end{cases} \qquad \text{Eq.(02)}$$

Substituindo Eq.(02) em Eq.(01):

$$\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + y_2\mathbf{w_2} + ... + y_n\mathbf{w_n}$$

$$= y_1(a_{11}\mathbf{u_1} + ... + a_{n1}\mathbf{u_n}) + y_2(a_{12}\mathbf{u_1} + ... + a_{n2}\mathbf{u_n}) + ... + y_n(a_{1n}\mathbf{u_1} + ... + a_{nn}\mathbf{u_n})$$

$$= \mathbf{u_1}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{n1}y_n) + ... + \mathbf{u_n}(a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{nn}y_n)$$

Espaço Vetorial: mudança de base

$\mathbf{v} = \mathbf{u_1}(a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{n1}y_n)+\ldots+\mathbf{u_n}(a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{nn}y_n)$

Mas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + \ldots + x_n\mathbf{u_n}$, e como as coordenadas em relação a uma base são *únicas* tem-se que:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{n1}y_n \\
x_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{n2}y_n \\
&\ldots \\
x_n &= a_{1n}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n
\end{aligned}
$$

Observe que as linhas viraram colunas!

Ou na forma matricial:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

Espaço Vetorial: mudança de base

Onde,

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada de *matriz de mudança da base* β' para a base β.

Um vetor **v** descrito na base β' será descrito na base β como:

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = [\ \mathbf{I}\ ]_{\beta}^{\beta'} [\mathbf{v}]_{\beta'}$$

Espaço Vetorial: mudança de base

Observa-se que, ao se encontrar $[\,I\,]_{\beta}^{\beta'}$, pode-se encontrar as coordenadas de qualquer vetor **v** em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de **v** na base β'.

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 1: sejam $\beta = \{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\} = \{(2,-1), (3,4)\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de R^2, calcule $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$$\mathbf{w_1} = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$$

$$\begin{cases} 1 = 2a_{11} + 3a_{21} \\ 0 = -a_{11} + 4a_{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 = 8a_{21} + 3a_{21} \\ a_{11} = 4a_{21} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{21} = 1/11 \\ a_{11} = 4/11 \end{array}$$

$$\mathbf{w_2} = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4) = (2a_{12} + 3a_{22}, -a_{12} + 4a_{22})$$

$$\begin{cases} 0 = 2a_{12} + 3a_{22} \\ 1 = -a_{12} + 4a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{12} = -3/2a_{22} \\ 1 = 3/2a_{22} + 4a_{22} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} a_{21} = -3/11 \\ a_{22} = 2/11 \end{array}$$

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 1 (continuação):

$$\mathbf{w_1} = a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} = (4/11)\,\mathbf{u_1} + (1/11)\,\mathbf{u_2}$$

$$\mathbf{w_2} = a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} = (-3/11)\,\mathbf{u_1} + (2/11)\,\mathbf{u_2}$$

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix}$$

Linhas tornam-se colunas!!!

Espaço Vetorial: Base de um espaço vetorial

- Exemplo 1 (continuação): Seja o vetor **v** = (2,5). Sabemos que ele é escrito na base β' = {$\mathbf{w_1}$,$\mathbf{w_2}$} = {(1,0),(0,1)} como **v** = 2$\mathbf{w_1}$ + 5$\mathbf{w_2}$ = 2(1,0) + 5(0,1) = (2,5). Mas como ele é escrito na base β = {$\mathbf{u_1}$,$\mathbf{u_2}$} = {(2,–1), (3,4)} ?

$$[\mathbf{v}]_\beta = [(2,5)]_\beta = [I]_\beta^{\beta'}[\mathbf{v}]_{\beta'}$$

$$[\mathbf{v}]_\beta = [(2,5)]_\beta = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/11 \\ 12/11 \end{bmatrix}$$

v = –7/11$\mathbf{u_1}$ + 12/11$\mathbf{u_2}$ = (– 7/11) (2, –1) + (12/11) (3, 4)

= (– 14/11 + 36/11, 7/11 + 48/11) = (22/11, 55/11) = (2,5)

Espaço Vetorial: inversa da matriz mudança de base

Observe que a matriz de mudança de bases $[\ I\ ]_{\beta}^{\beta'}$ foi obtida ao se escrever os vetores $\mathbf{w}_i$ (i = 1, ... n) da base β', como combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_j$, (j = 1, ..., n) da base β.

De forma análoga, poderíamos obter a matriz de mudança de bases $[\ I\ ]_{\beta'}^{\beta}$, ao escrever os vetores $\mathbf{u}_j$, (j = 1, ..., n) como combinações lineares dos vetores $\mathbf{w}_i$ (i = 1, ... n).

Espaço Vetorial: inversa da matriz mudança de base

As matrizes $[\,\mathrm{I}\,]_{\beta}^{\beta'}$ e $[\,\mathrm{I}\,]_{\beta'}^{\beta}$ são inversíveis e:

$$\left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

Espaço Vetorial: inversa da matriz mudança de base

- Exemplo 2: sejam $\beta = \{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\} = \{(2,-1),\ (3,4)\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}\} = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de R^2, calcule $[I]_{\beta'}^{\beta}$ e verifique que $\left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$

$$\mathbf{u_1} = (2,-1) = a_{11}(0,\ 1) + a_{21}(0,1) = (a_{11},a_{21}) \Rightarrow \begin{array}{l} a_{11} = 2 \\ a_{21} = -1 \end{array}$$

$$\mathbf{u_2} = (3,4) = a_{12}(1,\ 0) + a_{22}(0,1) = (a_{12},\ a_{22}) \Rightarrow \begin{array}{l} a_{12} = 3 \\ a_{22} = 4 \end{array}$$

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

Espaço Vetorial: exercícios

- Problema 18: considere o subespaço de R^4, gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,0,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2,2,1,1)$, e $\mathbf{v}_4 = (1,0,0,0)$.
  a) O vetor $\mathbf{u} = (2, -3, 2, 2) \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$?
  b) Exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$? Qual sua dimensão?
  c) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = R^4$?

a) Existem constantes a, b, c, d tal que $\mathbf{u} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 + d\mathbf{v}_4$?

$$(2, -3, 2, 2) = a\,(1,-1,0,0) + b\,(0,0,1,1) + c\,(-2,2,1,1) + d\,(1,0,0,0)$$

$$2 = a - 2c + d \qquad\qquad 2 = b + c$$

$$-3 = -a + 2c \qquad\qquad 2 = b + c$$

Espaço Vetorial: exercícios

- Problema 18 (continuação):

$$\begin{cases} a + 0b - 2c + d = 2 \\ -a + 0b + 2c + 0d = -3 \\ 0a + b + c + 0d = 2 \\ 0a + b + c + 0d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_2 = L_2 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_1 = L_1 - L_3$$

Espaço Vetorial: exercícios

- Problema 18 (continuação):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

a – 2c = 3 → a = 3 + 2c

b + c = 2 → b = 2 – c

d = – 1

assuma c = 1 → a = 5 e b = 1

Como,

$\mathbf{u} = (2, -3, 2, 2) = \mathit{5}(1,-1,0,0) + \mathit{1}(0,0,1,1) + \mathit{1}(-2,2,1,1) - \mathit{1}(1,0,0,0)$

Então $\mathbf{u} \in [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$.

Espaço Vetorial: exercícios

- Problema 18 (continuação):

  b) Exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$? Qual sua dimensão?

Se $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$ formam uma base, em eles devem ser LI, ou seja:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, + a_4\mathbf{v}_4 = 0 \text{ se e somente se } a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

$$a_1(1,-1,0,0) + a_2(0,0,1,1) + a_3(-2,2,1,1) + a_4(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_3 + a_4 &= 0 \\ -a_1 + 2a_3 &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_4 &= 0 \\ a_1 &= -2a_3 \\ a_2 &= -a_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] \text{ é LD}$$

Espaço Vetorial: exercícios

- Problema 18 (continuação):

Forma direta de se observar o vetor que é combinação linear dos demais: escalonar a matriz formada pelo vetores [$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$].

$$\begin{array}{c} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$\mathbf{v}_2$ é combinação linear de [$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_3$ $\mathbf{v}_4$]

ou

$\mathbf{v}_3$ é combinação linear de [$\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_4$]

Espaço Vetorial: exercícios

- Problema 18 (continuação):

Existem duas bases possíveis para representar $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$:

$\beta_1 = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_4]$ ou $\beta_2 = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4]$.

$\dim \beta = \dim \beta' = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4] = 3 \neq \dim R^4 = 4$

Observe que tanto $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_4]$ quanto $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_4]$(verifique) são LI:

$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ se e somente se $a_1 = a_2 = a_4 = 0$

$a_1(1,-1,0,0) + a_2(0,0,1,1) + a_4(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$

$a_1 + a_4 = 0 \qquad a_2 = 0$

$- a_1 = 0$

Espaço Vetorial: exercícios

Problema 19: Considere o subespaço de R^3 gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1$=(1,1,0), $\mathbf{v}_2$= (0,-1,1) e $\mathbf{v}_3$=(1,1,1). Então $[v_1,v_2,v_3]=R^3$?

Solução 1: dado um vetor qualquer do R^3, $\mathbf{u} = (x,y,z)$, existem constantes a, b e c tal que $\mathbf{u} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3$?

$$(x, y, z) = a(1,1,0) + b(0,-1,1) + c(1,1,1)$$

$$\begin{cases} x = a + c \\ y = a - b + c \\ z = b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x - y - z \\ b = x - y \\ c = -x + y + z \end{cases}$$

Portanto, $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$ podem representar qualquer vetor do R^3, ou seja $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] = R^3$

Espaço Vetorial: exercícios

Problema 19 (continuação):

Solução 2: vamos tentar escalonar a matriz formada pelos vetores $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_3 = L_3 - L_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_1 + L_2 \\ L_2 = -L_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_1 - L_3 \\ L_2 = L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O que isso significa?

Como o escalonamento resultou na base canônica do R^3, o conjunto $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3]$ pode representar qualquer vetor do R^3, ou seja $[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3] = R^3$.

Espaço Vetorial

- Problemas Sugeridos: 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 15, 25 e 29