Algoritmos em Grafos*

Última alteração: 26 de Abril de 2004

*Transparências elaboradas por Charles Ornelas Almeida e Nivio Ziviani

Motivação

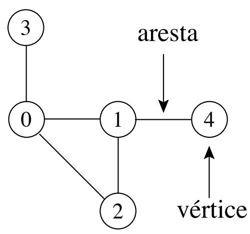
- Muitas aplicações em computação necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos:
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?
- Existe um tipo abstrato chamado grafo que é usado para modelar tais situações.

Aplicações

- Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:
  - Ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante na Web.
  - Descobrir os melhores casamentos entre posições disponíveis em empresas e pessoas que aplicaram para as posições de interesse.
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.

Conceitos Básicos

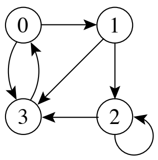
- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.



- Notação: $G = (V, A)$
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas

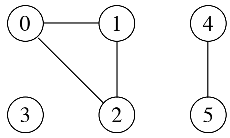
Grafos Direcionados

- Um grafo direcionado G é um par (V, A), onde V é um conjunto finito de vértices e A é uma relação binária em V.
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é **adjacente** ao vértice u.
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops*.



Grafos Não Direcionados

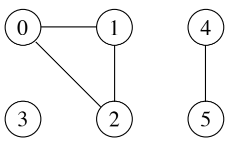
- Um grafo não direcionado G é um par (V, A), onde o conjunto de arestas A é constituído de pares de vértices não ordenados.
  - As arestas (u, v) e (v, u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  - *Self-loops* não são permitidos.



Grau de um Vértice

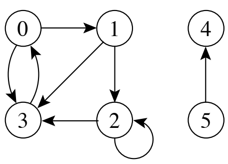
- Em grafos não direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vérice de grau zero é dito **isolado** ou **não conectado**.

Ex.: O vértice 1 tem grau 2 e o vértice 3 é isolado.



- Em grafos direcionados
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).

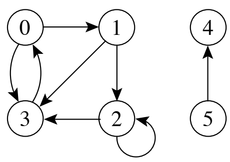
Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.



Caminho entre Vértices

- Um caminho de **comprimento** k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma seqüência de vértices $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_{i-1}, v_i) \in A$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ e as arestas $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é **alcançável** a partir de x via c.
- Um caminho é **simples** se todos os vértices do caminho são distintos.

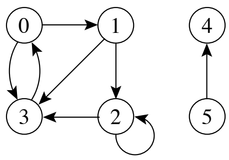
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3)$ é simples e tem comprimento 3. O caminho $(1, 3, 0, 3)$ não é simples.



Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.
  - O *self-loop* é um ciclo de tamanho 1.
  - Dois caminhos $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ e $(v'_0, v'_1, \ldots, v'_k)$ formam o mesmo ciclo se existir um inteiro j tal que $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

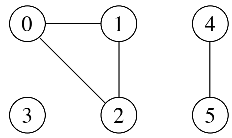
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3, 0)$ forma um ciclo. O caminho$(0, 1, 3, 0)$ forma o mesmo ciclo que os caminhos $(1, 3, 0, 1)$ e $(3, 0, 1, 3)$.



Ciclos

- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.

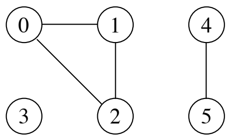
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 0)$ é um ciclo.



Componentes Conectados

- Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.
- Os componentes conectados são as porções conectadas de um grafo.
- Um grafo não direcionado é conectado se ele tem exatamente um componente conectado.

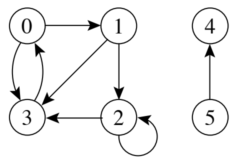
Ex.: Os componentes são: $\{0, 1, 2\}$, $\{4, 5\}$ e $\{3\}$.



Componentes Fortemente Conectados

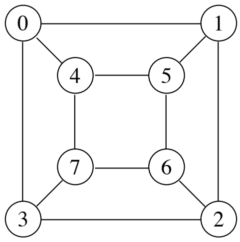
- Um grafo direcionado $G = (V, A)$ é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação "são mutuamente alcançáveis".
- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

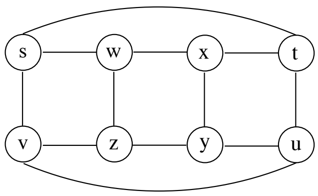
Ex.: $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{4\}$ e $\{5\}$ são os componentes fortemente conectados, $\{4, 5\}$ não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.



Grafos Isomorfos

- $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são isomorfos se existir uma bijeção $f : V \to V'$ tal que $(u, v) \in A$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in A'$.

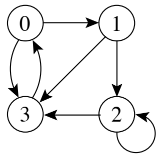


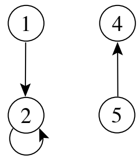


Subgrafos

- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.
- Dado um conjunto $V' \subseteq V$, o subgrafo induzido por V' é o grafo $G' = (V', A')$, onde $A' = \{(u, v) \in A | u, v \in V'\}$.

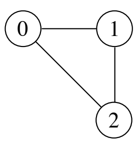
Ex.: Subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$.

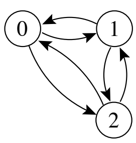




Versão Direcionada de um Grafo Não Direcionado

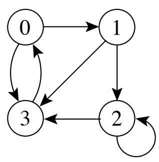
- A versão direcionada de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um grafo direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $(u, v) \in A$.
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u)
- Em um grafo direcionado, um **vizinho** de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.

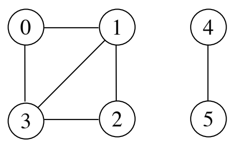




Versão Não Direcionada de um Grafo Direcionado

- A versão não direcionada de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo não direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in A$.
- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os *self-loops*.
- Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.





Outras Classificações de Grafos

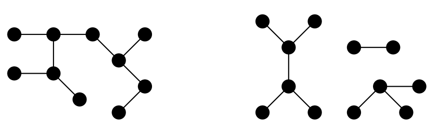
- **Grafo ponderado**: possui pesos associados às arestas.
- **Grafo bipartido**: grafo não direcionado $G = (V, A)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $(u, v) \in A$ implica que $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou $u \in V_2$ e $v \in V_1$ (todas as arestas ligam os dois conjuntos V_1 e V_2).
- **Hipergrafo**: grafo não direcionado em que cada aresta conecta um número arbitrário de vértices.

Grafos Completos

- Um grafo completo é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.
- Possui $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V| - 1)/2$ arestas, pois do total de $|V|^2$ pares possíveis de vértices devemos subtrair $|V|$ *self-loops* e dividir por 2 (cada aresta ligando dois vértices é contada duas vezes).
- O número total de **grafos diferentes** com $|V|$ vértices é $2^{|V|(|V|-1)/2}$ (número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de $|V|(|V| - 1)/2$ possíveis arestas).

Árvores

- **Árvore livre**: grafo não direcionado acíclico e conectado. É comum dizer apenas que o grafo é uma árvore omitindo o “livre”.
- **Floresta**: grafo não direcionado acíclico, podendo ou não ser conectado.
- **Árvore geradora** de um grafo conectado $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma árvore.
- **Floresta geradora** de um grafo $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma floresta.



(a) (b)

O Tipo Abstratos de Dados Grafo

- Importante considerar os algoritmos em grafos como **tipos abstratos de dados**.
- Conjunto de operações associado a uma estrutura de dados.
- Independência de implementação para as operações.

Operadores do TAD Grafo

1. *FGVazio(Grafo)*: Cria um grafo vazio.
2. *InsereAresta(V1,V2,Peso, Grafo)*: Insere uma aresta no grafo.
3. *ExisteAresta(V1,V2,Grafo)*: Verifica se existe uma determinada aresta.
4. Obtem a lista de vértices adjacentes a um determinado vértice (tratada a seguir).
5. *RetiraAresta(V1,V2,Peso, Grafo)*: Retira uma aresta do grafo.
6. *LiberaGrafo(Grafo)*: Liberar o espaço ocupado por um grafo.
7. *ImprimeGrafo(Grafo)*: Imprime um grafo.
8. *GrafoTransposto(Grafo,GrafoT)*: Obtém o transposto de um grafo direcionado.
9. *RetiraMin(A)*: Obtém a aresta de menor peso de um grafo com peso nas arestas.

Operação “Obter Lista de Adjacentes”

1. *ListaAdjVazia(v, Grafo)*: retorna *true* se a lista de adjacentes de v está vazia.
2. *PrimeiroListaAdj(v, Grafo)*: retorna o endereço do primeiro vértice na lista de adjacentes de v.
3. *ProxAdj(v, Grafo, u, Peso, Aux, FimListaAdj)*: retorna o vértice u (apontado por *Aux*) da lista de adjacentes de v, bem como o peso da aresta (v, u). Ao retornar, *Aux* aponta para o próximo vértice da lista de adjacentes de v, e *FimListaAdj* retorna *true* se o final da lista de adjacentes foi encontrado.

Implementação da Operação “Obter Lista de Adjacentes”

- É comum encontrar um pseudo comando do tipo:

  for u ∈ ListaAdjacentes (v) **do** { faz algo com u }

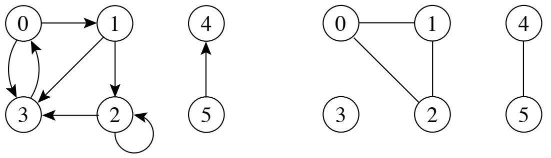
- O trecho de programa abaixo apresenta um possível refinamento do pseudo comando acima.

```
if not ListaAdjVazia(v, Grafo)
then begin
     Aux := PrimeiroListaAdj(v, Grafo);
     FimListaAdj := false;
     while not FimListaAdj
     do ProxAdj(v, Grafo, u, Peso, Aux, FimListaAdj);
     end;
```


Matriz de Adjacência

- A matriz de adjacência de um grafo $G = (V, A)$ contendo n vértices é uma matriz $n \times n$ de *bits*, onde $A[i, j]$ é 1 (ou verdadeiro) se e somente se existe um arco do vértice i para o vértice j.
- Para grafos ponderados $A[i, j]$ contém o rótulo ou peso associado com a aresta e, neste caso, a matriz não é de *bits*.
- Se não existir uma aresta de i para j então é necessário utilizar um valor que não possa ser usado como rótulo ou peso.

Matriz de Adjacência - Exemplo



	0	1	2	3	4	5
0		1		1		
1			1	1		
2			1	1		
3	1					
4						
5						

(a)

	0	1	2	3	4	5
0		1	1			
1	1		1			
2	1	1				
3						
4						
5						

(b)

Matriz de Adjacência - Análise

- Deve ser utilizada para grafos **densos**, onde $|A|$ é próximo de $|V|^2$.
- O tempo necessário para acessar um elemento é independente de $|V|$ ou $|A|$.
- É muito útil para algoritmos em que necessitamos saber com rapidez se existe uma aresta ligando dois vértices.
- A maior desvantagem é que a matriz necessita $\Omega(|V|^2)$ de espaço. Ler ou examinar a matriz tem complexidade de tempo $O(|V|^2)$.

Matriz de Adjacência - Implementação

- A inserção de um novo vértice ou retirada de um vértice já existente pode ser realizada com custo constante.

```
const MaxNumVertices = 100;
      MaxNumArestas  = 4500;
type
  TipoValorVertice = 0..MaxNumVertices;
  TipoPeso         = integer;
  TipoGrafo = record
                Mat: array[TipoValorVertice, TipoValorVertice]
                       of TipoPeso;
                NumVertices: 0..MaxNumVertices;
                NumArestas : 0..MaxNumArestas;
              end;
  Apontador = TipoValorVertice;

procedure FGVazio(var Grafo: TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  for i := 0 to Grafo.NumVertices do
    for j := 0 to Grafo.NumVertices do Grafo.mat[i, j] := 0;
end;
```


Matriz de Adjacência - Implementação

```
procedure InsereAresta (var V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso  : TipoPeso;
                        var Grafo : TipoGrafo);
begin
  Grafo.Mat[V1, V2] := peso;
end;

function ExisteAresta (Vertice1, Vertice2: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin
  ExisteAresta := Grafo.Mat[Vertice1, Vertice2] > 0;
end; { ExisteAresta }

{-- Operador para obter a lista de adjacentes--}
function ListaAdjVazia (var Vertice: TipoValorVertice;
                        var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var Aux: Apontador; ListaVazia: boolean;
begin
  ListaVazia := true; Aux := 0;
  while (Aux < Grafo.NumVertices) and ListaVazia do
    if Grafo.Mat[Vertice, Aux] > 0
    then ListaVazia := false
    else Aux := Aux + 1;
  ListaAdjVazia := ListaVazia = true;
end; { ListaAdjVazia }
```

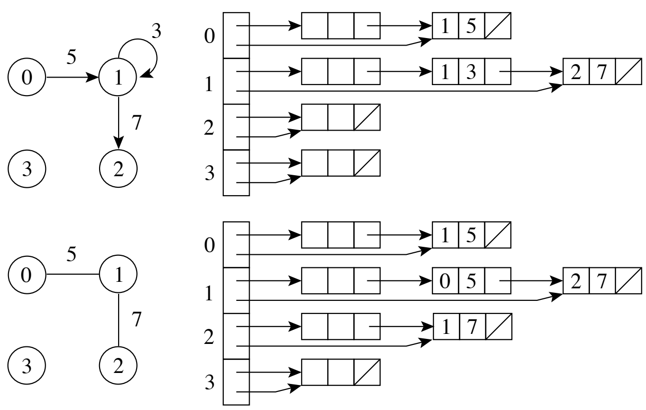
Matriz de Adjacência - Implementação

```
{–– Operador para obter a lista de adjacentes––}
function PrimeiroListaAdj (var Vertice: TipoValorVertice;
                           var Grafo: TipoGrafo): Apontador;
var Aux: Apontador; Listavazia: boolean;
begin
  ListaVazia := true;  Aux := 0;
  while (Aux < Grafo.NumVertices) and ListaVazia do
    if Grafo.Mat[Vertice, Aux] > 0
    then begin PrimeiroListaAdj := Aux; ListaVazia := false;
         end
    else Aux := Aux + 1;
  if Aux = Grafo.NumVertices
  then writeln('Erro: Lista adjacencia vazia (PrimeiroListaAdj)');
end; { PrimeiroListaAdj }

{–– Operador para obter a lista de adjacentes––}
procedure ProxAdj (var Vertice: TipoValorVertice; var Grafo: TipoGrafo;
                   var Adj: TipoValorVertice; var Peso: TipoPeso;
                   var Prox: Apontador; var FimListaAdj : boolean);
{ ––Retorna Adj apontado por Prox—}
begin
  Adj  := Prox; Peso := Grafo.Mat[Vertice, Prox]; Prox := Prox + 1;
  while (Prox < Grafo.NumVertices) and
        (Grafo.Mat[Vertice, Prox] = 0) do Prox := Prox + 1;
  if Prox = Grafo.NumVertices then FimListaAdj := true;
end; { ProxAdj– }
```


Matriz de Adjacência - Implementação

```
procedure RetiraAresta (var V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso  : TipoPeso;
                        var Grafo : TipoGrafo);
begin
  if Grafo.Mat[V1, V2] = 0
  then writeln('Aresta nao existe')
  else begin Peso := Grafo.Mat[V1, V2]; Grafo.Mat[V1, V2] := 0;
       end;
end; { RetiraAresta }

procedure LiberaGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
begin { Nao faz nada no caso de matrizes de adjacencia }
end; { LiberaGrafo }

procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i, j: integer;
begin
  write('    ');
  for i := 0 to Grafo.NumVertices–1 do write(i:3); writeln;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices–1 do
    begin
    write(i:3);
    for j := 0 to Grafo.NumVertices–1 do write(Grafo.mat[i,j]:3);
    writeln;
    end;
end; { ImprimeGrafo }
```


Listas de Adjacência usando Apontadores



- Um arranjo Adj de $|V|$ listas, uma para cada vértice em V.
- Para cada $u \in V$, $Adj[u]$ contém todos os vértices adjacentes a u em G.

Listas de adjacência - Análise

- Os vértices de uma lista de adjacência são em geral armazenados em uma ordem arbitrária.
- Possui uma complexidade de espaço $O(|V| + |A|)$
- Indicada para grafos **esparsos**, onde $|A|$ é muito menor do que $|V|^2$.
- É compacta e usualmente utilizada na maioria das aplicações.
- A principal desvantagem é que ela pode ter tempo $O(|V|)$ para determinar se existe uma aresta entre o vértice i e o vértice j, pois podem existir $O(|V|)$ vértices na lista de adjacentes do vértice i.

Listas de Adjacência usando Apontadores - Implementação

- No uso de apontadores a lista é constituída de células, onde cada célula contém um item da lista e um apontador para a célula seguinte.

```
const MaxNumVertices = 100;
      MaxNumArestas  = 4500;
type
  TipoValorVertice = 0..MaxNumVertices;
  TipoPeso         = integer;
  TipoItem         = record
                       Vertice: TipoValorVertice;
                       Peso   : TipoPeso;
                     end;
  Apontador        = ^Celula;
  Celula           = record
                       Item: TipoItem;
                       Prox: Apontador;
                     end;
  TipoLista        = record
                       Primeiro: Apontador;
                       Ultimo: Apontador;
                     end;
  TipoGrafo = record
                Adj: array[TipoValorVertice] of TipoLista;
                NumVertices: TipoValorVertice;
                NumArestas: 0..MaxNumArestas;
              end;
```


Listas de Adjacência usando Apontadores - Implementação

```
{–– Entram aqui os operadores FLVazia, Vazia, Insere, Retira e Imprime do
TAD Lista de Apontadores––}
procedure FGVazio(var Grafo: TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  for i := 0 to Grafo.NumVertices–1 do FLVazia(Grafo.Adj[i]);
end; { FGVazio }

procedure InsereAresta(var V1, V2: TipoValorVertice; var Peso: TipoPeso;
                       var Grafo: TipoGrafo);
var x: TipoItem;
begin
  x.Vertice := V2; x.Peso := Peso;
  Insere(x, Grafo.Adj[V1]);
end; { InsereAresta }

function ExisteAresta (Vertice1, Vertice2: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var Aux: Apontador;
    EncontrouAresta: boolean;
begin
  Aux := Grafo.Adj[Vertice1].Primeiro^.Prox;
  EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> nil) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
    if Vertice2 = Aux^.Item.Vertice then EncontrouAresta := true;
    Aux := Aux^.Prox;
    end;
  ExisteAresta := EncontrouAresta;
end; { ExisteAresta }
```


Listas de Adjacência usando Apontadores - Implementação

```
{–– Operador para obter a lista de adjacentes––}
function ListaAdjVazia (var Vertice: TipoValorVertice;
                        var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin
  ListaAdjVazia := Grafo.Adj[Vertice].Primeiro =
                   Grafo.Adj[Vertice].Ultimo;
end; { ListaAdjVazia }

{–– Operador para obter a lista de adjacentes––}
function PrimeiroListaAdj (var Vertice: TipoValorVertice;
                           var Grafo: TipoGrafo): Apontador;
begin
  PrimeiroListaAdj := Grafo.Adj[Vertice].Primeiro^.Prox;
end; { PrimeiroListaAdj }

{–– Operador para obter a lista de adjacentes––}
procedure ProxAdj (var Vertice     : TipoValorVertice;
                   var Grafo       : TipoGrafo;
                   var Adj         : TipoValorVertice;
                   var Peso        : TipoPeso;
                   var Prox        : Apontador;
                   var FimListaAdj : boolean);
{––Retorna Adj e Peso do Item apontado por Prox––}
begin
  Adj  := Prox^.Item.Vertice;
  Peso := Prox^.Item.Peso;
  Prox := Prox^.Prox;
  if Prox = nil then FimListaAdj := true;
end; { ProxAdj– }
```

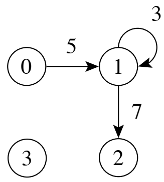

Listas de Adjacência usando Apontadores - Implementação

```
procedure RetiraAresta (var V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso  : TipoPeso;
                        var Grafo : TipoGrafo);
var AuxAnterior, Aux: Apontador;
    EncontrouAresta: boolean;
    x: TipoItem;
begin
  AuxAnterior := Grafo.Adj[V1].Primeiro;
  Aux := Grafo.Adj[V1].Primeiro^.Prox;
  EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> nil) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
    if V2 = Aux^.Item.Vertice
    then begin
         Retira(AuxAnterior, Grafo.Adj[V1], x);
         Grafo.NumArestas := Grafo.NumArestas – 1;
         EncontrouAresta := true;
         end;
    AuxAnterior := Aux; Aux := Aux^.Prox;
    end;
end; { RetiraAresta }
```

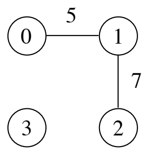
Listas de Adjacência usando Apontadores - Implementação

```
procedure LiberaGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
var AuxAnterior, Aux: Apontador;
begin
for i := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
  begin
  Aux := Grafo.Adj[i].Primeiro^.Prox;
  dispose(Grafo.Adj[i].Primeiro); {Libera celula cabeca}
  while Aux <> nil do
    begin AuxAnterior := Aux; Aux := Aux^.Prox; dispose(AuxAnterior);
    end;
  end;
end; { LiberaGrafo }

procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i: integer; Aux: Apontador;
begin
  for i := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
    begin
    write('Vertice', i:2, ':');
    if not Vazia(Grafo.Adj[i])
    then begin
         Aux := Grafo.Adj[i].Primeiro^.Prox;
         while Aux <> nil do
           begin
           write(Aux^.Item.Vertice:3, ' (',Aux^.Item.Peso, ')');
           Aux := Aux^.Prox;
           end;
         end;
    writeln;
    end;
end; { ImprimeGrafo }
```


Listas de Adjacência usando Arranjos



		Cab	Prox	Peso
	0	4	4	
V	1	6	5	
	2	2	0	
	3	3	0	
	4	1	0	5
A	5	1	6	3
	6	2	0	7



		Cab	Prox	Peso
	0	4	4	
V	1	6	5	
	2	7	7	
	3	3	0	
	4	1	0	5
A	5	0	6	5
	6	2	0	7
	7	1	0	7

- *Cab*: endereços do último item da lista de adjacentes de cada vértice (nas $|V|$ primeiras posições) e os vértices propriamente ditos (nas $|A|$ últimas posições)
- *Prox*: endereço do próximo item da lista de adjacentes.
- *Peso*: valor do peso de cada aresta do grafo (nas últimas $|A|$ posições).

Listas de Adjacência usando Arranjos - Implementação

```
const MaxNumVertices = 100;
      MaxNumArestas  = 4500;
      MaxTam         = MaxNumVertices+2*MaxNumArestas;
type
  TipoValorVertice = 0..MaxNumVertices;
  TipoPeso         = integer;
  TipoTam          = 0..MaxTam;
  TipoGrafo = record
              Cab            : array[TipoTam] of TipoTam;
              Prox           : array[TipoTam] of TipoTam;
              Peso           : array[TipoTam] of TipoTam;
              ProxDisponivel : TipoTam;
              NumVertices    : 0..MaxNumVertices;
              NumArestas     : 0..MaxNumArestas;
            end;
  Apontador = TipoTam;

procedure FGVazio(var Grafo: TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  for i := 0 to Grafo.NumVertices do
    begin
    Grafo.Prox[i] := 0; Grafo.Cab[i] := i;
    Grafo.ProxDisponivel := Grafo.NumVertices;
    end;
end;
```


Listas de Adjacência usando Arranjos - Implementação

```
procedure InsereAresta (var V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso  : TipoPeso;
                        var Grafo : TipoGrafo);
var Pos: integer;
begin
  Pos:= Grafo.ProxDisponivel;
  if Grafo.ProxDisponivel = MaxTam
  then writeln('nao ha espaco disponivel para a aresta')
  else begin
       Grafo.ProxDisponivel := Grafo.ProxDisponivel + 1;
       Grafo.Prox[Grafo.Cab[V1]] := Pos;
       Grafo.Cab[Pos]:= V2; Grafo.Cab[V1] := Pos;
       Grafo.Prox[Pos] := 0; Grafo.Peso[Pos] := Peso;
       end;
end; { InsereAresta}

function ExisteAresta (Vertice1, Vertice2: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
var Aux: Apontador; EncontrouAresta: boolean;
begin
  Aux := Grafo.Prox[Vertice1]; EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> 0) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
    if Vertice2 = Grafo.Cab[Aux] then EncontrouAresta := true;
    Aux := Grafo.Prox[Aux];
    end;
  ExisteAresta := EncontrouAresta;
end; { ExisteAresta }
```

Listas de Adjacência usando Arranjos - Implementação

```
{-- Operador para obter a lista de adjacentes--}
function ListaAdjVazia(var Vertice: TipoValorVertice;
                       var Grafo: TipoGrafo): boolean;
begin
  ListaAdjVazia := Grafo.Prox[Vertice] = 0;
end; { ListaAdjVazia }

{-- Operador para obter a lista de adjacentes--}
function PrimeiroListaAdj(var Vertice: TipoValorVertice;
                          var Grafo: TipoGrafo): Apontador;
begin
  PrimeiroListaAdj := Grafo.Prox[Vertice];
end; { PrimeiroListaAdj }

{-- Operador para obter a lista de adjacentes--}
procedure ProxAdj (var Vertice     : TipoValorVertice;
                   var Grafo       : TipoGrafo;
                   var Adj         : TipoValorVertice;
                   var Peso        : TipoPeso;
                   var Prox        : Apontador;
                   var FimListaAdj : boolean);
{ --Retorna Adj apontado por Prox--}
begin
  Adj  := Grafo.Cab[Prox]; Peso := Grafo.Peso[Prox];
  Prox := Grafo.Prox[Prox];
  if Prox = 0 then FimListaAdj := true;
end; { ProxAdj- }
```


Listas de Adjacência usando Arranjos - Implementação

```
procedure RetiraAresta (var V1, V2: TipoValorVertice;
                        var Peso: TipoPeso; var Grafo: TipoGrafo);
var Aux, AuxAnterior: Apontador; EncontrouAresta: boolean;
begin
  AuxAnterior := V1; Aux := Grafo.Prox[V1];
  EncontrouAresta := false;
  while (Aux <> 0) and (EncontrouAresta = false) do
    begin
    if V2 = Grafo.Cab[Aux]
    then EncontrouAresta := true
    else begin AuxAnterior := Aux; Aux := Grafo.Prox[Aux]; end;
    end;
  if EncontrouAresta
  then Grafo.Cab[Aux] := MaxNumVertices+2*MaxNumArestas
       {-- Apenas marca como retirado --}
  else writeln('Aresta nao existe');
end; { RetiraAresta }

procedure LiberaGrafo (var Grafo: TipoGrafo);
begin {Nada no caso de posicoes contiguas} end; { LiberaGrafo }

procedure ImprimeGrafo (var Grafo : TipoGrafo);
var i: integer;
begin
  writeln('    Cab Prox Peso');
  for i := 0 to Grafo.NumVertices+2*Grafo.NumArestas-1 do
    writeln(i:2,Grafo.Cab[i]:4,Grafo.Prox[i]:4, Grafo.Peso[i]:4);
end; { ImprimeGrafo }
```


Busca em Profundidade

- A busca em profundidade, do inglês *depth-first search*), é um algoritmo para caminhar no grafo.
- A estratégia é buscar o mais profundo no grafo sempre que possível.
- As arestas são exploradas a partir do vértice v mais recentemente descoberto que ainda possui arestas não exploradas saindo dele.
- Quando todas as arestas adjacentes a v tiverem sido exploradas a busca anda para trás para explorar vértices que saem do vértice do qual v foi descoberto.
- O algoritmo é a base para muitos outros algoritmos importantes, tais como verificação de grafos acíclicos, ordenação topológica e componentes fortemente conectados.

Busca em Profundidade

- Para acompanhar o progresso do algoritmo cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto.
- Todos os vértices são inicializados branco.
- Quando um vértice é *descoberto* pela primeira vez ele torna-se cinza, e é tornado preto quando sua lista de adjacentes tenha sido completamente examinada.
- $d[v]$: tempo de descoberta
- $t[v]$: tempo de término do exame da lista de adjacentes de v.
- Estes registros são inteiros entre 1 e $2|V|$ pois existe um evento de descoberta e um evento de término para cada um dos $|V|$ vértices.

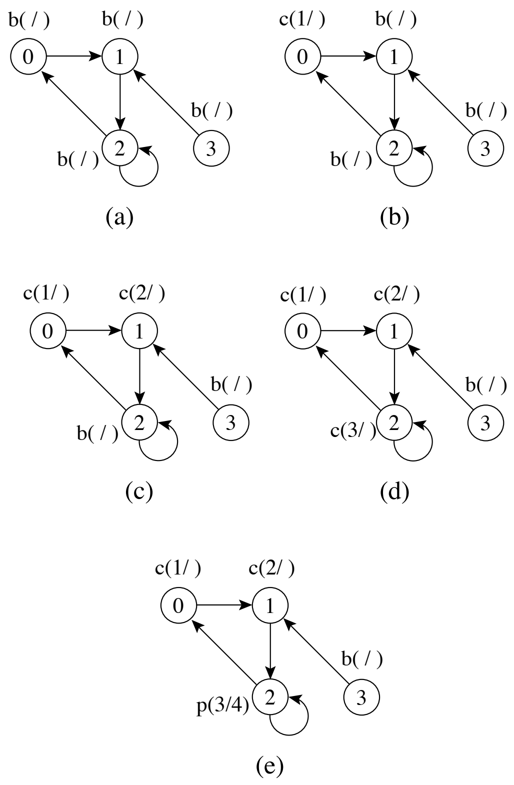
Busca em Profundidade - Implementação

```
procedure BuscaEmProfundidade (var Grafo: TipoGrafo);
var Tempo       : TipoValorTempo;
    x           : TipoValorVertice;
    d, t        : array[TipoValorVertice] of TipoValorTempo;
    Cor         : array[TipoValorVertice] of TipoCor;
    Antecessor  : array[TipoValorVertice] of integer;

{—— Entra aqui o procedimento VisitaDFS (a seguir)——}

begin
  Tempo := 0;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
    begin Cor[x] := branco; Antecessor[x] := −1; end;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
    if Cor[x] = branco then VisitaDfs(x);
end; { BuscaEmProfundidade }
```

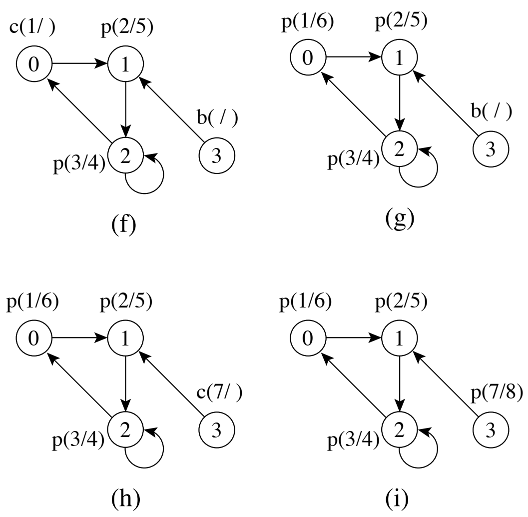

Busca em Profundidade - Implementação

```
procedure VisitaDfs (u:TipoValorVertice);
var FimListaAdj: boolean;
    Peso       : TipoPeso;
    Aux        : Apontador;
    v          : TipoValorVertice;
begin
  Cor[u] := cinza; Tempo := Tempo + 1; d[u] := Tempo;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo descoberta:',d[u]:2,' cinza'); readln;
  if not ListaAdjVazia(u, Grafo)
  then begin
       Aux := PrimeiroListaAdj(u, Grafo); FimListaAdj := false;
       while not FimListaAdj do
         begin
         ProxAdj(u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
         if Cor[v] = branco
         then begin Antecessor[v] := u; VisitaDfs(v); end;
         end;
       end;
  Cor[u] := preto; Tempo := Tempo + 1; t[u] := Tempo;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo termino:',t[u]:2,' preto'); readln;
end; { VisitaDfs }
```


Busca em Profundidade - Exemplo



Busca em Profundidade - Exemplo



Busca em Profundidade - Análise

- Os dois anéis da *BuscaEmProfundidade* têm custo $O(|V|)$ cada um, a menos da chamada do procedimento *VisitaDfs*(u) no segundo anel.
- O procedimento *VisitaDfs* é chamado exatamente uma vez para cada vértice $u \in V$, desde que *VisitaDfs* é chamado apenas para vértices brancos e a primeira ação é pintar o vértice de cinza.
- Durante a execução de *VisitaDfs*(u) o anel principal é executado $|Adj[u]|$ vezes.
- Desde que $\sum_{u \in V} |Adj[u]| = O(|A|)$, o tempo total de execução de *VisitaDfs* é $O(|A|)$.
- Logo, a complexidade total da *BuscaEmProfundidade* é $O(|V| + |A|)$.

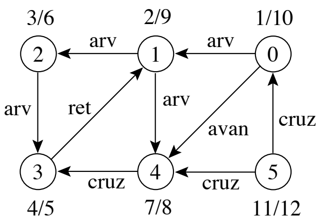
Classificação de Arestas

- Existem:

1. **Arestas de árvore**: são arestas de uma árvore de busca em profundidade. A aresta (u, v) é uma aresta de árvore se v foi descoberto pela primeira vez ao percorrer a aresta (u, v).
2. **Arestas de retorno**: conectam um vértice u com um antecessor v em uma árvore de busca em profundidade (inclui *self-loops*).
3. **Arestas de avanço**: não pertencem à árvore de busca em profundidade mas conectam um vértice a um descendente que pertence à árvore de busca em profundidade.
4. **Arestas de cruzamento**: podem conectar vértices na mesma árvore de busca em profundidade, ou em duas árvores diferentes.

Classificação de Arestas

- Classificação de arestas pode ser útil para derivar outros algoritmos.
- Na busca em profundidade cada aresta pode ser classificada pela cor do vértice que é alcançado pela primeira vez:
  - Branco indica uma aresta de árvore.
  - Cinza indica uma aresta de retorno.
  - Preto indica uma aresta de avanço quando u é descoberto antes de v ou uma aresta de cruzamento caso contrário.



Teste para Verificar se Grafo é Acíclico

- A busca em profundidade pode ser usada para verificar se um grafo é acíclico ou contém um ou mais ciclos.
- Se uma aresta de retorno é encontrada durante a busca em profundidade em G, então o grafo tem ciclo.
- Um grafo direcionado G é acíclico se e somente se a busca em profundidade em G não apresentar arestas de retorno.

Busca em Largura

- Expande a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos uniformemente através da largura da fronteira.
- O algoritmo descobre todos os vértices a uma distância k do vértice origem antes de descobrir qualquer vértice a uma distância $k + 1$.
- O grafo $G(V, A)$ pode ser direcionado ou não direcionado.

Busca em Largura

- Cada vértice é colorido de branco, cinza ou preto.
- Todos os vértices são inicializados branco.
- Quando um vértice é descoberto pela primeira vez ele torna-se cinza.
- Vértices cinza e preto já foram descobertos, mas são distinguidos para assegurar que a busca ocorra em largura.
- Se $(u, v) \in A$ e o vértice u é preto, então o vértice v tem que ser cinza ou preto.
- Vértices cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos, e eles representam a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos.

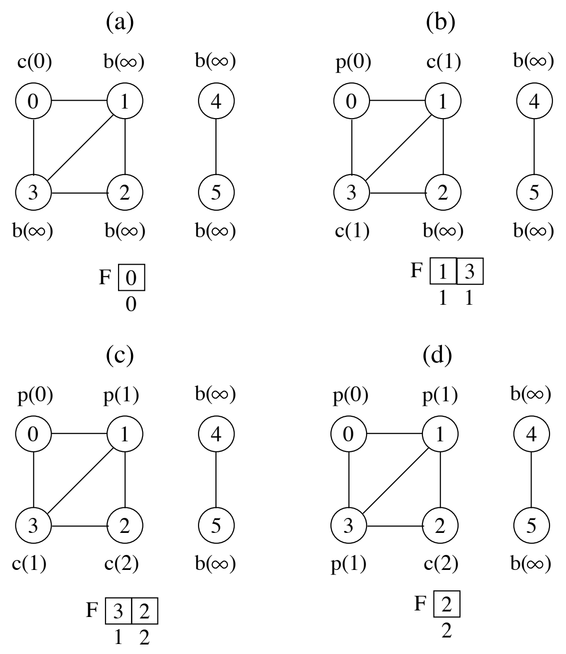
Busca em Largura - Implementação

```
{–– Entram aqui os operadores FFVazia, Vazia, Enfileira e Desenfileira do––}
{–– TAD Filas com arranjos ou apontadores, dependendo da implementação––}
{–– da busca em largura usar arranjos ou apontadores, respectivamente––}
procedure BuscaEmLargura (var Grafo: TipoGrafo);
var x          : TipoValorVertice;
    Dist       : array[TipoValorVertice] of integer;
    Cor        : array[TipoValorVertice] of TipoCor;
    Antecessor : array[TipoValorVertice] of integer;

{––– Entra aqui o procedimento VisitaBfs (a seguir)–––}

begin
  for x := 0 to Grafo.NumVertices–1 do
    begin
    Cor[x] := branco; Dist[x] := infinito; Antecessor[x] := –1;
    end;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices–1 do
    if Cor[x] = branco then VisitaBfs(x);
end; { BuscaEmLargura }
```

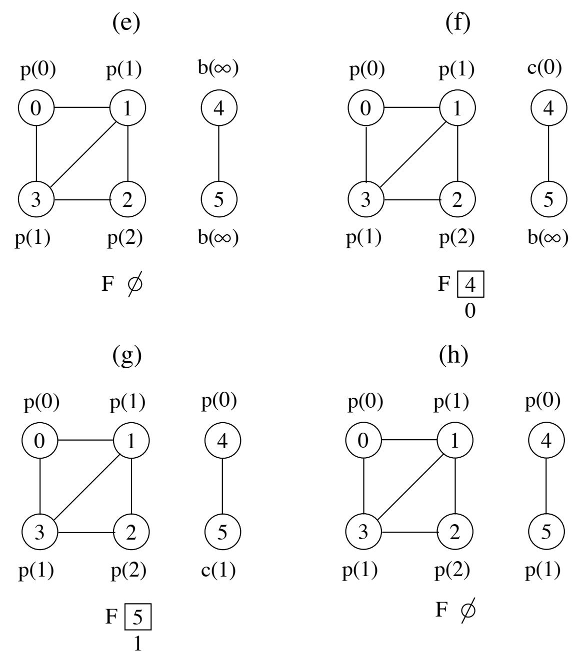

Busca em Largura - Implementação

```
procedure VisitaBfs (u:TipoValorVertice);
var v: TipoValorVertice; Aux: Apontador; FimListaAdj: boolean;
    Peso: TipoPeso; Item: TipoItem; Fila: TipoFila;
begin
  Cor[u] := cinza; Dist[u] := 0;
  FFVazia (Fila); Item.Vertice := u;
  Enfileira (Item, Fila);
  write('Visita origem',u:2,' cor: cinza F:');
  ImprimeFila (Fila); readln;
  while not FilaVazia (Fila) do
    begin
    Desenfileira (Fila, Item); u := Item.vertice;
    if not ListaAdjVazia(u, Grafo)
    then begin
         Aux := PrimeiroListaAdj(u,Grafo); FimListaAdj := false;
         while FimListaAdj = false do
           begin
           ProxAdj(u, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
           if Cor[v] = branco
           then begin
                Cor[v] := cinza; Dist[v] := Dist[u] + 1;
                Antecessor[v] := u;
                Item.Vertice := v; Item.Peso := Peso;
                Enfileira (Item, Fila);
                end;
           end;
         end;
    Cor[u] := preto;
    write('Visita ', u:2,' Dist',Dist[u]:2,' cor: preto F:');
    ImprimeFila (Fila); readln;
    end;
end; { VisitaBfs }
```

Busca em Largura - Exemplo



Busca em Largura - Exemplo



Busca em Largura - Análise (para listas de adjacência)

- O custo de inicialização do primeiro anel em *BuscaEmLargura* é $O(|V|)$ cada um.
- O custo do segundo anel é também $O(|V|)$.
- *VisitaBfs*: enfileirar e desenfileirar têm custo $O(1)$, logo, o custo total com a fila é $O(|V|)$.
- Cada lista de adjacentes é percorrida no máximo uma vez, quando o vértice é desenfileirado.
- Desde que a soma de todas as listas de adjacentes é $O(|A|)$, o tempo total gasto com as listas de adjacentes é $O(|A|)$.
- Complexidade total: é $O(|V| + |A|)$.

Caminhos Mais Curtos

- A busca em largura obtém o **caminho mais curto** de u até v.
- O procedimento *VisitaBfs* contrói uma árvore de busca em largura que é armazenada na variável *Antecessor*.
- O programa abaixo imprime os vértices do caminho mais curto entre o vértice origem e outro vértice qualquer do grafo, a partir do vetor *Antecessor* obtido na busca em largura.

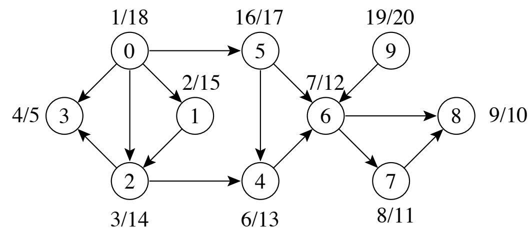
```
procedure ImprimeCaminho (Origem, v: TipovalorVertice);
begin
  if Origem = v
  then write(Origem:3)
  else if Antecessor[v] = −1
       then write('Nao existe caminho de ',Origem:3, ' ate ',v:3)
       else begin
            Imprimecaminho(Origem, Antecessor[v]);
            write(v:3);
            end;
end; { ImprimeCaminho }
```

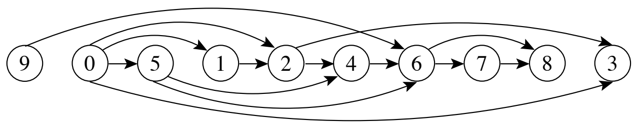
Ordenação Topológica

- Ordenação linear de todos os vértices, tal que se G contém uma aresta (u, v) então u aparece antes de v.
- Pode ser vista como uma ordenação de seus vértices ao longo de uma linha horizontal de tal forma que todas as arestas estão direcionadas da esquerda para a direita.
- Pode ser feita usando a busca em profundidade.

Ordenação Topológica

- Os grafos direcionados acíclicos são usados para indicar precedências entre eventos.
- Uma aresta direcionada (u, v) indica que a atividade u tem que ser realizada antes da atividade v.





Ordenação Topológica

- Algoritmo para ordenar topologicamente um grafo direcionado acíclico $G = (V, A)$:
  1. Chama *BuscaEmProfundidade(G)* para obter os tempos de término $t[u]$ para cada vértice u.
  2. Ao término de cada vértice insira-o na frente de uma lista linear encadeada.
  3. Retorna a lista encadeada de vértices.
- A Custo $O(|V| + |A|)$, uma vez que a busca em profundidade tem complexidade de tempo $O(|V| + |A|)$ e o custo para inserir cada um dos $|V|$ vértices na frente da lista linear encadeada custa $O(1)$.

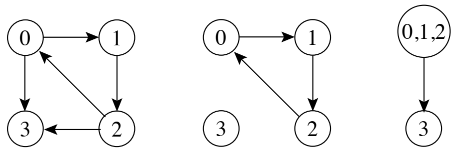
Ordenação Topológica - Implementação

- Basta inserir uma chamada para o procedimento *InsLista* no procedimento *BuscaDfs*, logo após o momento em que o tempo de término $t[u]$ é obtido e o vértice é pintado de preto.
- Ao final, basta retornar a lista obtida (ou imprimí-la.

```
procedure InsLista (var Item: TipoItem; var Lista: TipoLista);
{-- Insere antes do primeiro item da lista --}
var Aux: Apontador;
begin
  Aux := Lista.Primeiro^.Prox;
  new(Lista.Primeiro^.Prox);
  Lista.Primeiro^.Prox^.Item := Item;
  Lista.Primeiro^.Prox^.Prox := Aux;
end; { Insere }
```

Componentes Fortemente Conectados

- Um componente fortemente conectado de $G = (V, A)$ é um conjunto maximal de vértices $C \subseteq V$ tal que para todo par de vértices u e v em C, u e v são mutuamente alcançáveis
- Podemos particionar V em conjuntos V_i, $1 \leq i \leq r$, tal que vértices u e v são equivalentes se e somente se existe um caminho de u a v e um caminho de v a u.



(a) (b) (c)

Componentes Fortemente Conectados - Algoritmo

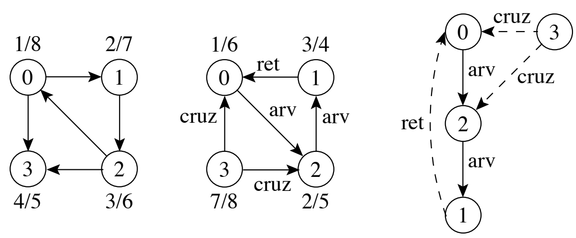
- Usa o **transposto** de G, definido $G^T = (V, A^T)$, onde $A^T = \{(u, v) : (v, u) \in A\}$, isto é, A^T consiste das arestas de G com suas direções invertidas.
- G e G^T possuem os mesmos componentes fortemente conectados, isto é, u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em G se e somente se u e v são mutuamente alcançáveis a partir de cada um em G^T.

Componentes Fortemente Conectados - Algoritmo

1. Chama *BuscaEmProfundidade*(G) para obter os tempos de término $t[u]$ para cada vértice u.
2. Obtem G^T.
3. Chama *BuscaEmProfundidade*(G^T), realizando a busca a partir do vértice de maior $t[u]$ obtido na linha 1. Inicie uma nova busca em profundidade a partir do vértice de maior $t[u]$ dentre os vértices restantes se houver.
4. Retorne os vértices de cada árvore da floresta obtida como um componente fortemente conectado separado.

Componentes Fortemente Conectados - Exemplo

- A parte (b) apresenta o resultado da busca em profundidade sobre o grafo transposto obtido, mostrando os tempos de término e a classificação das arestas.
- A busca em profundidade em G^T resulta na floresta de árvores mostrada na parte (c).



(a) (b) (c)

Componentes Fortemente Conectados - Implementação

```
procedure GrafoTransposto (var Grafo : TipoGrafo; var GrafoT: TipoGrafo);
var v, u: TipoValorVertice;
    Peso: TipoPeso;
    Aux : Apontador;
begin
  FGVazio(GrafoT);
  GrafoT.NumVertices := Grafo.NumVertices;
  GrafoT.NumArestas  := Grafo.NumArestas;
  for v := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
  if not ListaAdjVazia(v, Grafo)
  then begin
       Aux := PrimeiroListaAdj(v, Grafo);
       FimListaAdj := false;
       while not FimListaAdj do
         begin
         ProxAdj(v, Grafo, u, Peso, Aux, FimListaAdj);
         InsereAresta(u, v, Peso, GrafoT);
         end;
       end;
end; { GrafoTransposto }
```


Componentes Fortemente Conectados - Implementação

- O Programa BuscaEmProfundidadeCfc utiliza a função *MaxTT* para obter o vértice de maior $t[u]$ dentre os vértices restantes u ainda não visitados por VisitaDFS.

```
type
  TipoTempoTermino = record
                       t: array[TipoValorVertice] of TipoValorTempo;
                       Restantes: array[TipoValorVertice] of boolean;
                       NumRestantes: TipoValorVertice;
                     end;
Function MaxTT (var TT: TipoTempoTermino): TipoValorVertice;
var i, Temp: integer;
begin
  i:=0;
  while not TT.Restantes[i] do i := i + 1;
  Temp := TT.t[i]; MaxTT := i;
  for i := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
    if TT.Restantes[i]
    then if Temp < TT.t[i]
         then begin Temp := TT.t[i]; MaxTT := i; end;
  end; { MaxTT }
```


Componentes Fortemente Conectados - Implementação

```
procedure BuscaEmProfundidadeCfc (var Grafo: TipoGrafo;
                                  var TT: TipoTempoTermino);
var
  Tempo      : TipoValorTempo;
  x, VRaiz   : TipoValorVertice;
  d, t       : array[TipoValorVertice] of TipoValorTempo;
  Cor        : array[TipoValorVertice] of TipoCor;
  Antecessor : array[TipoValorVertice] of integer;
{—— Entra aqui o procedimento VisitaDFS (a seguir)———}
begin
  Tempo := 0;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
    begin Cor[x] := branco; Antecessor[x] := −1; end;
  TT.NumRestantes := Grafo.NumVertices;
  for x := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
    TT.Restantes[x] := true;
  while TT.NumRestantes > 0 do
    begin
    VRaiz := MaxTT (TT);
    writeln('Raiz da proxima arvore:',VRaiz:2);
    VisitaDfs (VRaiz);
    end;
end; { BuscaEmProfundidadeCfc }
```


Componentes Fortemente Conectados - Implementação

```
procedure VisitaDfs (u:TipoValorVertice);
var FimListaAdj: boolean;
    Peso        : TipoPeso;
    Aux         : Apontador;
    v           : TipoValorVertice;
begin
  Cor[u] := cinza; Tempo := Tempo + 1; d[u] := Tempo;
  TT.Restantes[u] := false; TT.NumRestantes := TT.NumRestantes−1;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo descoberta:',d[u]:2,' cinza'); readln;
  if not ListaAdjVazia(u, Grafo)
  then begin
       Aux := PrimeiroListaAdj(u, Grafo);
       FimListaAdj := false;
       while not FimListaAdj do
         begin
         ProxAdj(u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
         if Cor[v] = branco
         then begin
              Antecessor[v] := u;
              VisitaDfs(v);
              end;
         end;
       end;
  Cor[u] := preto; Tempo := Tempo + 1; t[u] := Tempo;
  writeln('Visita',u:2,' Tempo termino:',t[u]:2,' preto'); readln;
end; { VisitaDfs }
```

Componentes Fortemente Conectados - Análise

- Utiliza o algoritmo para busca em profundidade duas vezes, uma em G e outra em G^T. Logo, a complexidade total é $O(|V| + |A|)$.

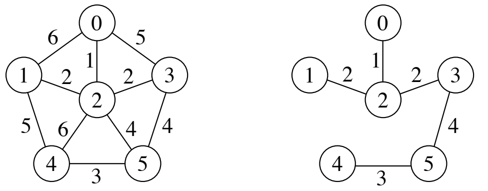
Árvore Geradora Mínima - Aplicação

- Projeto de redes de comunicações conectando n localidades.
- Arranjo de $n - 1$ conexões, conectando duas localidades cada.
- Objetivo: dentre as possibilidades de conexões, achar a que usa menor quantidade de cabos.
- Modelagem:
  - $G = (V, A)$: grafo conectado, não direcionado.
  - V: conjunto de cidades.
  - A: conjunto de possíveis conexões
  - $p(u, v)$: peso da aresta $(u, v) \in A$, custo total de cabo para conectar u a v.
- Solução: encontrar um subconjunto $T \subseteq A$, acíclico, que conecta todos os vértices de G e cujo peso total $p(T) = \sum_{(u,v)\in T} p(u, v)$ é minimizado.

Árvore Geradora Mínima (AGM)

- Como $G' = (V, T)$ é acíclico e conecta todos os vértices, T forma uma árvore chamada **árvore geradora** de G.
- O problema de obter a árvore T é conhecido como **árvore geradora mínima** (AGM).

Ex.: Árvore geradora mínima T cujo peso total é 12. T não é única, pode-se substituir a aresta $(3, 5)$ pela aresta $(2, 5)$ obtendo outra árvore geradora de custo 12.



(a) (b)

AGM - Algoritmo Genérico

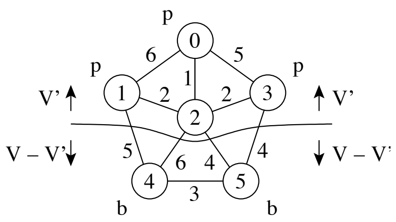
- Uma estratégia **gulosa** permite obter a AGM adicionando uma aresta de cada vez.
- Invariante: Antes de cada iteração, S é um subconjunto de uma árvore geradora mínima.
- A cada passo adicionamos a S uma aresta (u, v) que não viola o invariante. (u, v) é chamada de uma **aresta segura**.

```
procedure GenericoAGM;
S := ∅;
while S não constitui uma árvore geradora mínima do
   Encontre uma aresta (u, v) que é segura para S;
   S := S + {(u, v)}
return S;
```

- Dentro do **while**, S tem que ser um subconjunto próprio da AGM T, e assim tem que existir uma aresta $(u, v) \in T$ tal que $(u, v) \notin S$ e (u, v) é seguro para S.

AGM - Definição de Corte

- Um **corte** $(V', V - V')$ de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é uma partição de V.
- Uma aresta $(u, v) \in A$ *cruza* o corte $(V', V - V')$ se um de seus vértices pertence a V' e o outro vértice pertence a $V - V'$.
- Um corte *respeita* um conjunto S de arestas se não existirem arestas em S que o cruzem.
- Uma aresta cruzando o corte que tenha custo mínimo sobre todas as arestas cruzando o corte é uma *aresta leve*.



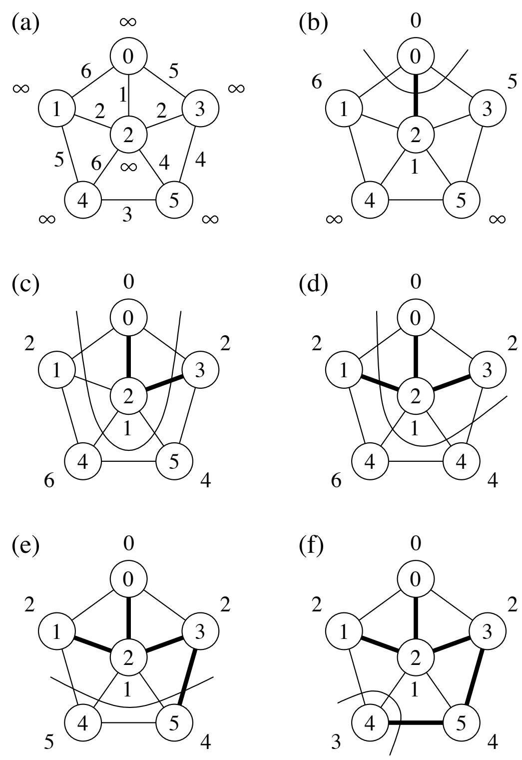
AGM - Teorema para reconhecer arestas seguras

- Seja $G = (V, A)$ um grafo conectado, não direcionado, com pesos p sobre as arestas V.
- seja S um subconjunto de V que está incluído em alguma AGM para G.
- Seja $(V', V - V')$ um corte qualquer que respeita S.
- Seja (u, v) uma aresta leve cruzando $(V', V - V')$.
- Satisfeitas essas condições, a aresta (u, v) é uma aresta segura para S.

AGM - Algoritmo de Prim

- O algoritmo de Prim para obter uma AGM pode ser derivado do algoritmo genérico.
- O subconjunto S forma uma única árvore, e a aresta segura adicionada a S é sempre uma aresta de peso mínimo conectando a árvore a um vértice que não esteja na árvore.
- A árvore começa por um vértice qualquer (no caso 0) e cresce até que "gere" todos os vértices em V.
- A cada passo, uma aresta leve é adicionada à árvore S, conectando S a um vértice de $G_S = (V, S)$.
- De acordo com o teorema anterior, quando o algoritmo termina, as arestas em S formam uma árvore geradora mínima.

Algoritmo de Prim - Exemplo



Algoritmo de Prim - Implementação

```
{–– Entram aqui os operadores de uma das implementações para grafos––}
{–– bem como o operador Constroi do TAD HEAP ––}
procedure AgmPrim (var Grafo: TipoGrafo; var Raiz: TipoValorVertice);
var Antecessor: array[TipoValorVertice] of integer;
    p         : array[TipoValorVertice] of TipoPeso;
    Itensheap : array[TipoValorVertice] of boolean;
    Pos       : array[TipoValorVertice] of TipoValorVertice;
    A         : Vetor;
    u, v      : TipovalorVertice;

procedure Refaz (Esq, Dir : Indice; var A : Vetor);
label 999;
var i: Indice;  j: integer;  x: Item;
begin
  i := Esq;  j := 2 * i;  x := A[i];
  while j <= Dir do
    begin
    if j < Dir
    then if p[A[j].Chave] > p[A[j + 1].Chave] then j := j + 1;
    if p[x.Chave] <= p[A[j].Chave] then goto 999;
    A[i] := A[j];  Pos[A[j].Chave] := i;
    i := j;  j := 2 * i;
    end;
  999 : A[i] := x;  Pos[x.Chave] := i;
end; { Refaz }
```


Algoritmo de Prim - Implementação

```
function RetiraMin (var A: Vetor): Item;
begin
  if n < 1
  then writeln('Erro: heap vazio')
  else begin
       RetiraMin := A[1];
       A[1] := A[n];  Pos[A[n].chave] := 1;
       n := n – 1;
       Refaz (1, n, A);
       end;
end; { Retira }

procedure DiminuiChave (i: Indice; ChaveNova: TipoPeso; var A: Vetor);
var x: Item;
begin
  if ChaveNova > p[A[i].Chave]
  then writeln('Erro: ChaveNova maior que a chave atual')
  else begin
       p[A[i].Chave] := ChaveNova;
       while (i>1) and (p[A[i div 2].Chave] > p[A[i].Chave])
         do begin
            x := A[i div 2];
            A[i div 2] := A[i];  Pos[A[i].Chave] := i div 2;
            A[i] := x;  Pos[x.Chave] := i;
            i := i div 2;
            end;
       end;
end; { DiminuiChave }
```


Algoritmo de Prim - Implementação

```
begin { AgmPrim }
  for u := 0 to Grafo.NumVertices do
    begin {Constroi o heap com todos os valores igual a Infinito}
    Antecessor[u] := –1;  p[u] := Infinito;
    A[u+1].Chave := u;  {Heap a ser construido}
    ItensHeap[u] := true;  Pos[u] := u+1;
    end;
  n := Grafo.NumVertices;
  p[Raiz] := 0;
  Constroi(A);
  while n >= 1 do {enquanto heap nao vazio}
    begin
    u := RetiraMin(A).Chave;
    if (u <> Raiz)
    then write('Aresta de arvore: v[',u,'] v[',Antecessor[u],']');readln;
    ItensHeap[u] := false;
    if not ListaAdjVazia(u,Grafo)
       then begin
            Aux := PrimeiroListaAdj(u,Grafo);  FimListaAdj := false;
            while not FimListaAdj do
              begin
              ProxAdj(u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
              if ItensHeap[v] and (Peso < p[v])
              then begin
                   Antecessor[v] := u; DiminuiChave(Pos[v],Peso,A);
                   end
              end;
            end;
    end;
end; { AgmPrim }
```


Algoritmo de Prim - Implementação

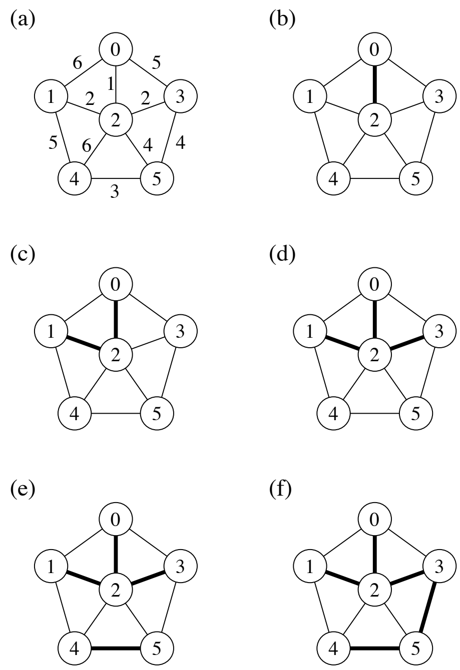
- Para realizar de forma eficiente a seleção de uma nova aresta, todos os vértices que não estão na AGM residem no *heap* A.
- O *heap* contém os vértices, mas a condição do *heap* é mantida pelo peso da aresta através do arranjo $p[v]$ (*heap* indireto).
- $Pos[v]$ fornece a posição do vértice v dentro do *heap* A, para que o vértice v possa ser acessado a um custo $O(1)$, necessário para a operação DiminuiChave.
- *Antecessor*$[v]$ armazena o antecessor de v na árvore.
- Quando o algoritmo termina, A está vazia e a AGM está de forma implícita como $S = \{(v, Antecessor[v]) : v \in V - \{Raiz\}\}$

Algoritmo de Prim - Análise

- O corpo do anel **while** é executado $|V|$ vezes.
- O procedimento *Refaz* tem custo $O(\log |V|)$.
- Logo, o tempo total para executar a operação retira o item com menor peso é $O(|V| \log |V|)$.
- O **while** mais interno para percorrer a lista de adjacentes é $O(|A|)$ (soma dos comprimentos de todas as listas de adjacência é $2|A|$).
- O teste para verificar se o vértice v pertence ao *heap* A tem custo $O(1)$.
- Após testar se v pertence ao *heap* A e o peso da aresta (u, v) é menor do que $p[v]$, o antecessor de v é armazenado em *Antecessor* e uma operação *DiminuiChave* é realizada sobre o *heap* A na posição $Pos[v]$, a qual tem custo $O(\log |V|)$.
- Logo, o tempo total para executar o algoritmo de Prim é $O(|V \log |V| + |A| \log |V|) = O(|A| \log |V|)$.

AGM - Algoritmo de Kruskal

- Pode ser derivado do algoritmo genérico.
- S é uma floresta e a aresta segura adicionada a S é sempre uma aresta de menor peso que conecta dois componentes distintos.
- Considera as arestas ordenadas pelo peso.



AGM - Algoritmo de Kruskal

- Sejam C_1 e C_2 duas árvores conectadas por (u, v):
  - Como (u, v) tem de ser uma aresta leve conectando C_1 com alguma outra árvore, (u, v) é uma aresta segura para C_1.
- É guloso porque, a cada passo, ele adiciona à floresta uma aresta de menor peso.
- Obtém uma AGM adicionando uma aresta de cada vez à floresta e, a cada passo, usa a aresta de menor peso que não forma ciclo.
- Inicia com uma floresta de $|V|$ árvores de um vértice: em $|V|$ passos, une duas árvores até que exista apenas uma árvore na floresta.

Algoritmo de Kruskal - Implementação

- Usa fila de prioridades para obter arestas em ordem crescente de pesos.
- Testa se uma dada aresta adicionada ao conjunto solução S forma um ciclo.
- Tratar **conjuntos disjuntos**: maneira eficiente de verificar se uma dada aresta forma um ciclo. Utiliza estruturas dinâmicas.
- Os elementos de um conjunto são representados por um objeto. Operações:
  - CriaConjunto(x): cria novo conjunto cujo único membro, x, é seu representante. Para que os conjuntos sejam disjuntos, x não pode pertencer a outro conjunto.
  - União(x, y): une conjuntos dinâmicos contendo x (C_x) e y (C_y) em novo conjunto, cujo representante pode ser x ou y. Como os conjuntos na coleção devem ser disjuntos, C_x e C_y são destruídos.
  - EncontreConjunto(x): retorna apontador para o representante do conjunto (único) contendo x.

Algoritmo de Kruskal - Implementação

- Primeiro refinamento:

```
   procedure Kruskal;
1.   S := ∅;
2.   for v := 0 to Grafo.NumVertices−1 do CriaConjunto (v);
3.   Ordena as arestas de A pelo peso;
4.   for cada (u, v) de A tomadas em ordem ascendente de peso do
5.     if EncontreConjunto (u) <> EncontreConjunto (v)
       then begin
6.            S := S + {(u, v)};
7.            Uniao (u, v);
            end;
   end;
```

- A implementação das operações União e EncontraConjunto deve ser realizada de forma eficiente.
- Esse problema é conhecido na literatura como **União-EncontraConjunto**.

AGM - Análise do Algoritmo de Kruskal

- A inicialização do conjunto S tem custo $O(1)$.
- Ordenar arestas (linha 3) custa $O(|A| \log |A|)$.
- A linha 2 realiza $|V|$ operações CriaConjunto.
- O anel (linhas 4-7) realiza $O(|A|)$ operações EncontreConjunto e Uniao, a um custo $O((|V| + |A|)\alpha(|V|))$ onde $\alpha(|V|)$ é uma função que cresce lentamente ($\alpha(|V|) < 4$).
- O limite inferior para construir uma estrutura dinâmica envolvendo m operações EncontreConjunto e Uniao e n operações CriaConjunto é $m\alpha(n)$.
- Como G é conectado temos que $|A| \geq |V| - 1$, e assim as operações sobre conjuntos disjuntos custam $O(|A|\alpha(|V|)$.
- Como $\alpha(|V|) = O(\log |A|) = O(\log |V|)$, o tempo total do algoritmo de Kruskal é $O(|A| \log |A|)$.
- Como $|A| < |V|^2$, então $\log |A| = O(\log |V|)$, e o custo do algoritmo de Kruskal é também $O(|A| \log |V|)$.

Caminhos Mais Curtos - Aplicação

- Um motorista procura o caminho mais curto entre Diamantina e Ouro Preto. Possui mapa com as distâncias entre cada par de interseções adjacentes.
- Modelagem:
  - $G = (V, A)$: grafo direcionado ponderado, mapa rodoviário.
  - V: interseções.
  - A: segmentos de estrada entre interseções
  - $p(u, v)$: peso de cada aresta, distância entre interseções.
- Peso de um caminho: $p(c) = \sum_{i=1}^{k} p(v_{i-1}, v_i)$
- Caminho mais curto:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} min\left\{p(c) : u \overset{c}{\leadsto} v\right\} & \text{se existir caminho de } u \text{ a } v \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- **Caminho mais curto** do vértice u ao vértice v: qualquer caminho c com peso $p(c) = \delta(u, v)$.

Caminhos Mais Curtos

- **Caminhos mais curtos a partir de uma origem**: dado um grafo ponderado $G = (V, A)$, desejamos obter o caminho mais curto a partir de um dado vértice origem $s \in V$ até cada $v \in V$.
- Muitos problemas podem ser resolvidos pelo algoritmo para o problema origem única:
  - **Caminhos mais curtos com destino único**: reduzido ao problema origem única invertendo a direção de cada aresta do grafo.
  - **Caminhos mais curtos entre um par de vértices**: o algoritmo para origem única é a melhor opção conhecida.
  - **Caminhos mais curtos entre todos os pares de vértices**: resolvido aplicando o algoritmo origem única $|V|$ vezes, uma vez para cada vértice origem.

Caminhos Mais Curtos

- A representação de caminhos mais curtos pode ser realizada pela variável *Antecessor*.
- Para cada vértice $v \in V$ o $Antecessor[v]$ é um outro vértice $u \in V$ ou *nil* (-1).
- O algoritmo atribui a *Antecessor* os rótulos de vértices de uma cadeia de antecessores com origem em v e que anda para trás ao longo de um caminho mais curto até o vértice origem s.
- Dado um vértice v no qual $Antecessor[v] \neq nil$, o procedimento *ImprimeCaminho* pode imprimir o caminho mais curto de s até v.
- Os valores em $Antecessor[v]$, em um passo intermediário, não indicam necessariamente caminhos mais curtos.
- Entretanto, ao final do processamento, *Antecessor* contém uma árvore de caminhos mais curtos definidos em termos dos pesos de cada aresta de G, ao invés do número de arestas.
- Caminhos mais curtos não são necessariamente únicos.

Árvore de caminhos mais curtos

- Uma árvore de caminhos mais curtos com raiz em $u \in V$ é um subgrafo direcionado $G' = (V', A')$, onde $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$, tal que:
  1. V' é o conjunto de vértices alcançáveis a partir de $s \in G$,
  2. G' forma uma árvore de raiz s,
  3. para todos os vértices $v \in V'$, o caminho simples de s até v é um caminho mais curto de s até v em G.

Algoritmo de Dijkstra

- Mantém um conjunto S de vértices cujos caminhos mais curtos até um vértice origem já são conhecidos.
- Produz uma árvore de caminhos mais curtos de um vértice origem s para todos os vértices que são alcançáveis a partir de s.
- Utiliza a técnica de **relaxamento**:
  - Para cada vértice $v \in V$ o atributo $p[v]$ é um limite superior do peso de um caminho mais curto do vértice origem s até v.
  - O vetor $p[v]$ contém uma estimativa de um caminho mais curto.
- O primeiro passo do algoritmo é inicializar os antecessores e as estimativas de caminhos mais curtos:
  - $Antecessor[v] = nil$ para todo vértice $v \in V$,
  - $p[u] = 0$, para o vértice origem s, e
  - $p[v] = \infty$ para $v \in V - \{s\}$.

Relaxamento

- O **relaxamento** de uma aresta (u, v) consiste em verificar se é possível melhorar o melhor caminho até v obtido até o momento se passarmos por u.
- Se isto acontecer, $p[v]$ e $Antecessor[v]$ devem ser atualizados.

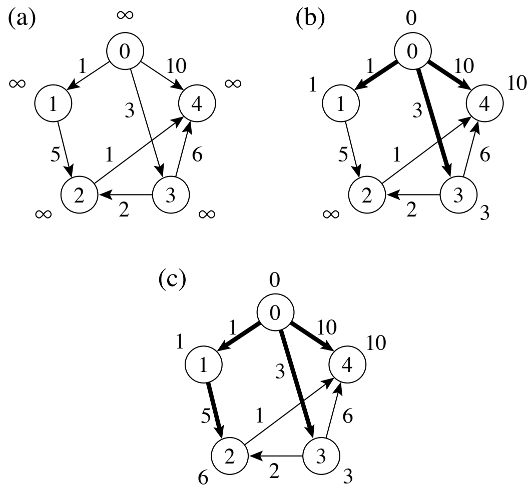
```
if p[v] > p[u] + peso da aresta (u,v)
then p[v] = p[u] + peso da aresta (u,v)
     Antecessor[v] := u
```

Algoritmo de Dijkstra - 1º Refinamento

```
     procedure Dijkstra (Grafo, Raiz);
1.   for v := 0 to Grafo.NumVertices−1 do
2.     p[v] := Infinito;
3.     Antecessor[v] := −1;
4.   p[Raiz] := 0;
5.   Constroi heap no vetor A;
6    S := ∅;
7.   While heap > 1 do
8.     u := RetiraMin(A);
9      S := S + u
10.    for v ∈ ListaAdjacentes[u] do
11.      if p[v] > p[u] + peso da aresta (u,v)
12.      then p[v] = p[u] + peso da aresta (u,v)
13.           Antecessor[v] := u
```

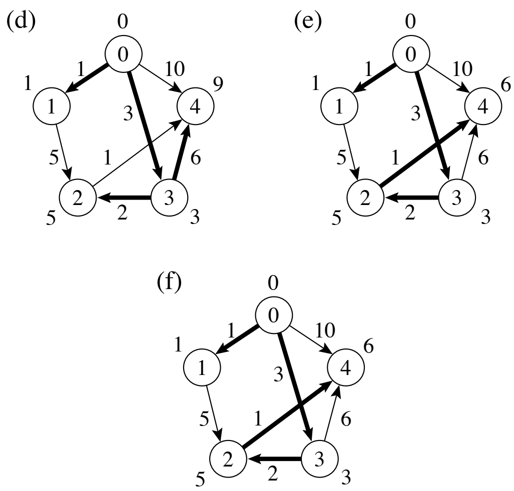
- Invariante: o número de elementos do *heap* é igual a $V - S$ no início do anel **while**.
- A cada iteração do **while**, um vértice u é extraído do *heap* e adicionado ao conjunto S, mantendo assim o invariante.
- *RetiraMin* obtém o vértice u com o caminho mais curto estimado até o momento e adiciona ao conjunto S.
- No anel da linha 10, a operação de relaxamento é realizada sobre cada aresta (u, v) adjacente ao vértice u.

Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



Iteração	S	d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
(a)	$\emptyset$	∞	∞	∞	∞	∞
(b)	$\{0\}$	0	1	∞	3	10
(c)	$\{0, 1\}$	0	1	6	3	10

Algoritmo de Dijkstra - Exemplo



Iteração	S	d[0]	d[1]	d[2]	d[3]	d[4]
(d)	$\{0, 1, 3\}$	0	1	5	3	9
(e)	$\{0, 1, 3, 2\}$	0	1	5	3	6
(f)	$\{0, 1, 3, 2, 4\}$	0	1	5	3	6

Algoritmo de Dijkstra

- Para realizar de forma eficiente a seleção de uma nova aresta, todos os vértices que não estão na árvore de caminhos mais curtos residem no *heap* A baseada no campo *p*.
- Para cada vértice v, $p[v]$ é o caminho mais curto obtido até o momento, de v até o vértice raiz.
- O *heap* mantém os vértices, mas a condição do *heap* é mantida pelo caminho mais curto estimado até o momento através do arranjo $p[v]$, o *heap* é indireto.
- O arranjo $Pos[v]$ fornece a posição do vértice v dentro do *heap* A, permitindo assim que o vértice v possa ser acessado a um custo $O(1)$ para a operação *DiminuiChaveInd*.

Algoritmo de Dijkstra - Implementação

```
procedure Dijkstra (var Grafo: TipoGrafo; var Raiz: TipoValorVertice);
var Antecessor: array[TipoValorVertice] of integer;
    P         : array[TipoValorVertice] of TipoPeso;
    Itensheap : array[TipoValorVertice] of boolean;
    Pos       : array[TipoValorVertice] of TipoValorVertice;
    A         : Vetor;
    u, v      : TipovalorVertice;

{-- Entram aqui os operadores de uma das implementações de grafos, bem
como o operador Constroi da implementação de filas de prioridades, assim
como os operadores RefazInd, RetiraMinInd e DiminuiChaveInd do Progra-
ma Constroi--}

begin { Dijkstra }
  for u := 0 to Grafo.NumVertices do
    begin {Constroi o heap com todos os valores igual a Infinito}
    Antecessor[u] := -1; p[u] := Infinito;
    A[u+1].Chave := u; {Heap a ser construido}
    ItensHeap[u] := true; Pos[u] := u+1;
    end;
  n := Grafo.NumVertices; {Tamanho do heap}
  p[Raiz] := 0;
  Constroi(A);

⋮
```


Algoritmo de Dijkstra - Implementação

```
⋮

  while n >= 1 do {enquanto heap nao vazio}
    begin
    u := RetiraMinInd(A).Chave;
    ItensHeap[u] := false;
    if not ListaAdjVazia(u,Grafo)
      then begin
           Aux := PrimeiroListaAdj(u,Grafo); FimListaAdj := false;
           while not FimListaAdj do
             begin
             ProxAdj(u, Grafo, v, Peso, Aux, FimListaAdj);
             if p[v] > p[u] + Peso
             then begin
                  p[v] := p[u] + Peso; Antecessor[v] := u;
                  DiminuiChaveInd(Pos[v],p[v],A);
                  write('Caminho: v[',v,'] v[',Antecessor[v],']',
                        ' d[',p[v],']');readln;
                  end;
             end;
           end;
    end;
end; { Dijkstra }
```


Porque o Algoritmo de Dijkstra Funciona

- O algoritmo usa uma estratégia gulosa: sempre escolher o vértice mais leve (ou o mais perto) em $V - S$ para adicionar ao conjunto solução S,
- O algorimo de Dijkstra sempre obtém os caminhos mais curtos, pois cada vez que um vértice é adicionado ao conjunto S temos que $p[u] = \delta(Raiz, u)$.