

**Universidade Estadual de Maringá**

**Departamento de Informática**

## **Computação Gráfica**

**CG-06-TRANSFORMAÇÕES TRIDIMENSIONAIS**

**NOTAS DE AULA**

**Prof. Dr. Dante Alves Medeiros Filho**

**2015**

### 3. Transformações Geométricas no Espaço

As transformações geométricas tridimensionais valem-se das mesmas geometrias que as transformações bidimensionais. Assim, vamos apresentar estas transformações em coordenadas homogêneas.

#### 3.1 Transformação de Translação Tridimensional

A translação 3D é análoga a 2D acrescida de mais uma coordenada ( $z$ ) e seu respectivo deslocamento ( $dz$ ). Em coordenadas homogêneas a matriz desta transformação passa a ser ( $4 \times 4$ ). Aplicada a um ponto temos:

$$P'(x', y', z') = T(dx, dy, dz) \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Existem várias formas de descrever ou formalizar os objetos gráficos 3D (Modelagem). Aqui, para o estudo das transformações geométricas 3D, vamos formalizá-los pelos vértices. A Figura 1 mostra a translação de um objeto gráfico.

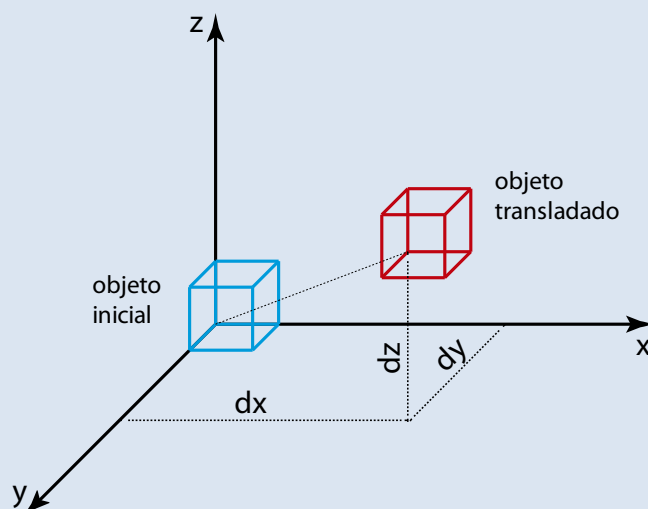
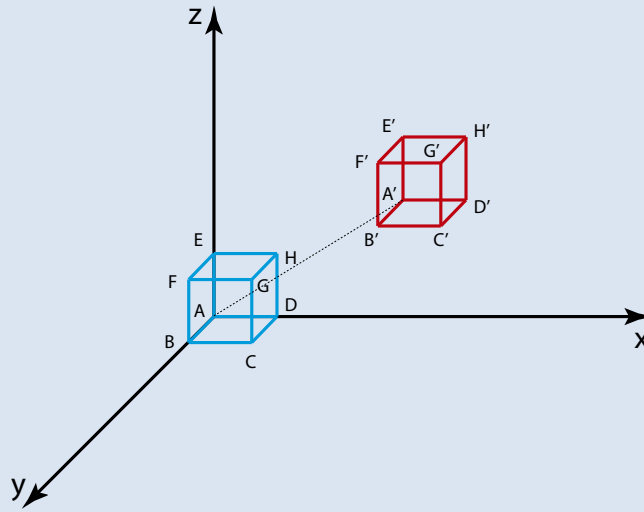


Figura 1: Translação 3D

Na matriz, que representa o objeto gráfico, os vértices são alocados por colunas. Por exemplo, o vértice A da Figura 2 está expresso na primeira coluna da matriz ( $M_{obj}$ ), o vértice B na segunda coluna e assim sucessivamente.

$$Matriz_{objeto} = M_{obj} = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x & E_x & F_x & G_x & H_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & E_y & F_y & G_y & H_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & E_z & F_z & G_z & H_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



**Figura 2:** Objeto gráfico transladado pelos vértices

Com a ajuda da representação em coordenadas homogêneas, a transformação de translação pode ser realizada pela multiplicação de matrizes;

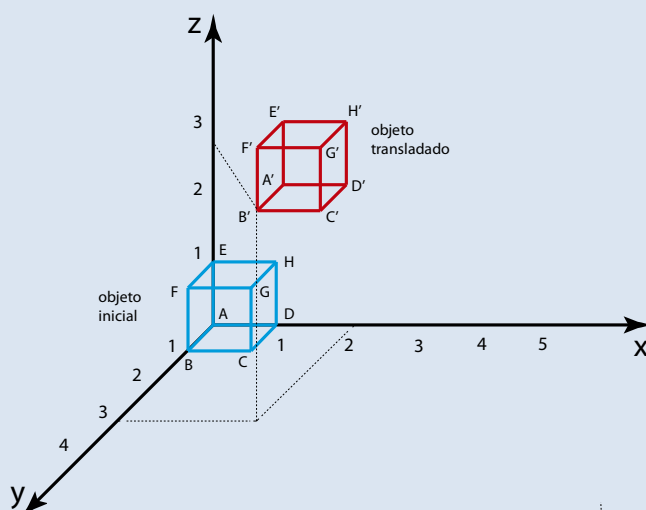
$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x & D_x & E_x & F_x & G_x & H_x \\ A_y & B_y & C_y & D_y & E_y & F_y & G_y & H_y \\ A_z & B_z & C_z & D_z & E_z & F_z & G_z & H_z \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar a transformação de translação 3D considere um cubo unitário com vértices  $A(0,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(1,1,0)$ ,  $D(1,0,0)$ ,  $E(0,0,1)$ ,  $F(0,1,1)$ ,  $G(1,1,1)$  e  $H(1,0,1)$  sendo deslocado na direção  $2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ .

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos, Figura 3:



**Figura 3:** Translação 3D na direção  $2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$

### 3.2 Transformação de Mudança de Escala Tridimensional

A transformação de mudança de escala tridimensional em relação à origem e em coordenadas homogêneas é representada matricialmente da seguinte forma:

$$P'(x', y', z') = S_0(s_x, s_y, s_z) \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

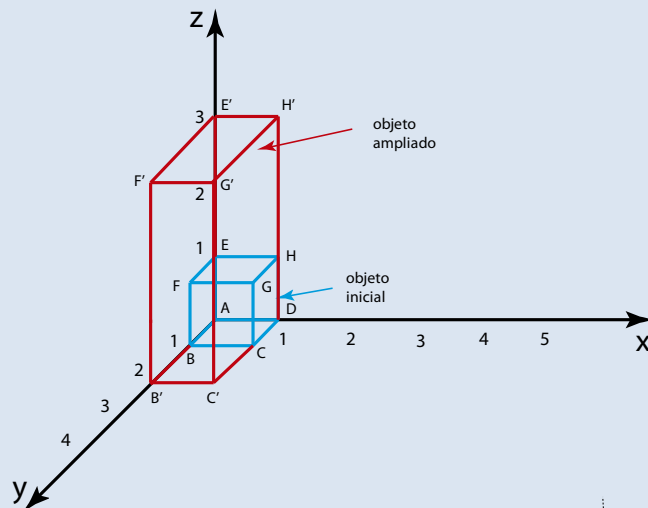
Para ilustrar a aplicação desta transformação, considere o cubo unitário do exemplo anterior, inicialmente alocado na origem que agora sofre ampliação com os seguintes fatores de escala  $s_x = 1$ ,  $s_y = 2$  e  $s_z = 3$ . Matricialmente:

$$M'_{obj} = S_0(1,2,3) \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos, Figura 4:

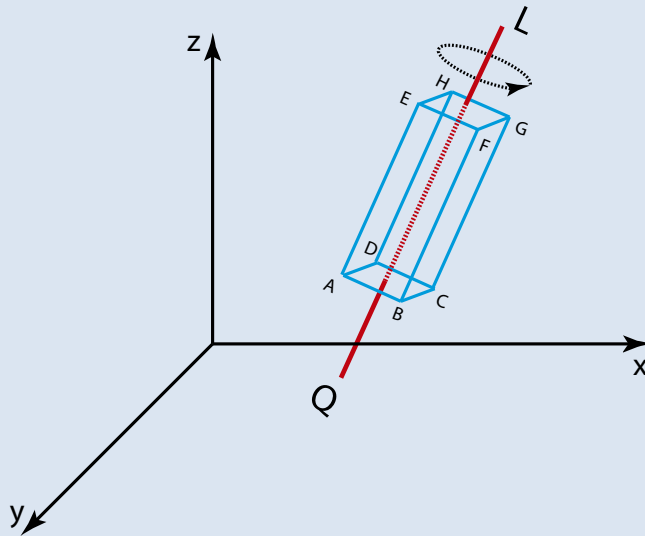


**Figura 4:** Aplicação de uma transformação de mudança de escala

Observe que quando o fator de escala é  $> 1$  temos ampliação do objeto gráfico na direção do fator de escala, quando se encontra entre  $0 < S < 1$  retração. Quando  $S = 1$ , temos a matriz identidade, ou seja, o objeto gráfico não se altera.

### 3.3 Transformação de Rotação Tridimensional

A rotação bidimensional ocorre em torno de um ponto no plano. A tridimensional, ocorre em relação a um eixo no espaço 3D (Figura 5).

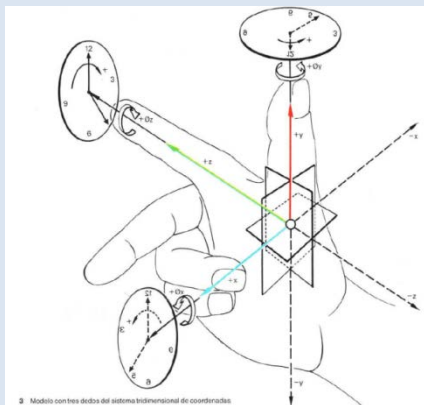


**Figura 5:** Eixo de rotação no espaço 3D

Inicialmente vamos apresentar a rotação sobre os eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para depois, a rotação sobre qualquer eixo no espaço 3D. Além disso, a rotação em torno de um determinado eixo depende do sentido do eixo. Assim, para determinar o sentido da rotação vamos utilizar a regra da mão direita que nada mais é do que uma convenção para estabelecer o sentido positivo e negativo desta operação.

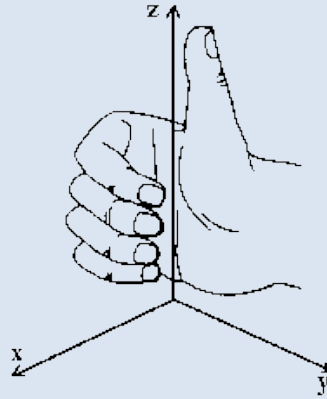
### 3.3.1 A Regra da Mão Direita

A regra da mão direita nos ajuda a orientar os eixos de um sistema de coordenadas e o giro de um objeto gráfico em relação a um dado eixo. Para orientar os eixos principais de um sistema de coordenadas, segundo a regra da mão direita, basta utilizar o polegar da mão direita para indicar o eixo  $x$ , o indicador para o eixo  $y$  e o dedo médio para o eixo  $z$  conforme a Figura 6.



**Figura 6:** Regra da mão direita para sistemas de coordenadas 3D

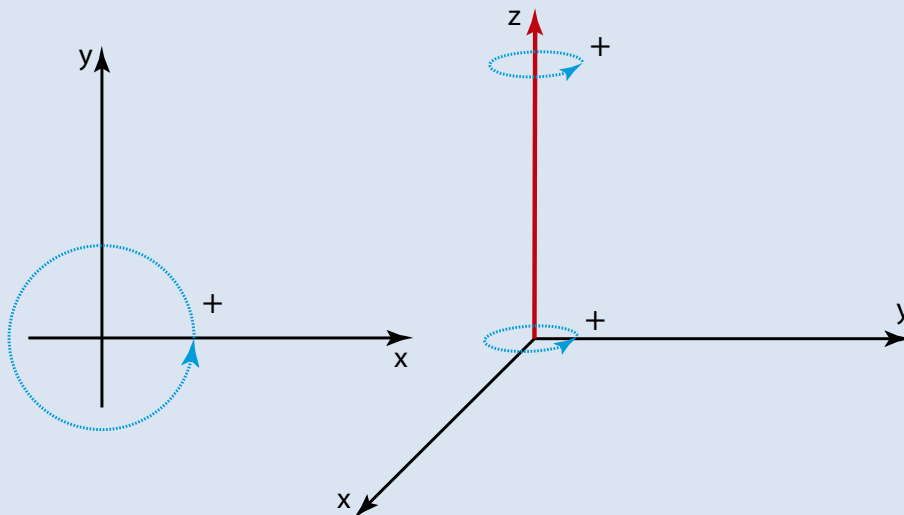
Para determinar o sentido da rotação de um objeto em relação a um eixo utilizamos o polegar para indicar o sentido positivo do eixo e os demais dedos, fechando a mão, indicam o sentido positivo do giro (Figura 7).



**Figura 7:** Regra da mão direita para indicação de rotação sobre eixos

### 3.3.2 Rotação em Torno do Eixo Z

Utilizando a regra da mão direita podemos verificar o sentido positivo da rotação em torno do eixo z. Observe que o sentido positivo projetado no plano xy indica um giro no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio (Figura 8).



**Figura 8:** Sentido positivo do giro em torno do eixo z - anti-horário

Escolhemos o eixo z para iniciar a apresentação da transformação de rotação 3D porque ela possui certa familiaridade com a rotação 2D, pois ela ocorre no plano xy. Vejamos a matriz desta rotação em coordenadas homogêneas.

$$P'(x', y', z') = R_{\theta}^z \cdot P(x, y, z)$$

$$R_{\theta}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a um ponto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3.3 Rotação em Torno do Eixo Y

A matriz de rotação em torno do eixo y, como as demais, deve ser calculada utilizando a regra da mão direita (Figura 9).

$$P'(x', y', z') = R_{\theta}^y \cdot P(x, y, z)$$

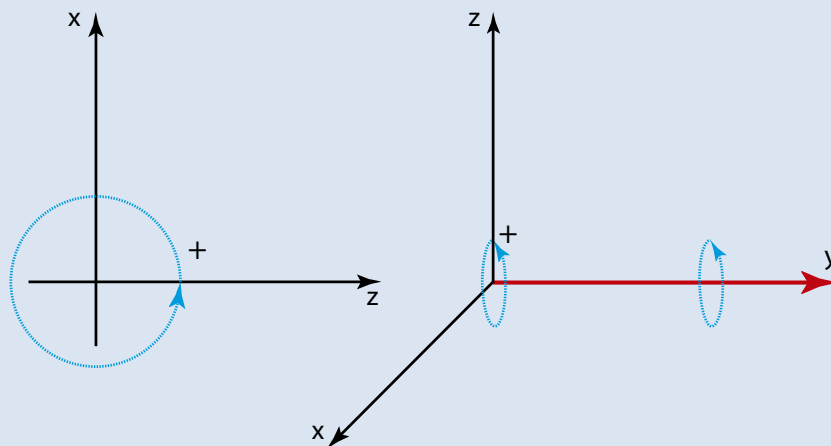


Figura 9: Rotação em torno do eixo y

Para deduzirmos a matriz de rotação é necessária uma análise do giro no plano  $xz$  e especial atenção nos sinais trabalhados nas equações. Observe a Figura 10.



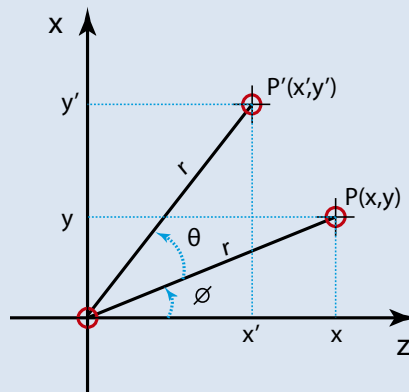


Figura 10: Rotação em torno do eixo  $y$  do ponto  $P$  para  $P'$

$$z = r \cdot \cos(\phi)$$

$$x = r \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$z' = r \cdot \cos(\theta + \phi)$$

$$x' = r \cdot \text{sen}(\theta + \phi)$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$\text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$z' = r(\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\phi))$$

$$z' = r \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - r \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\phi)$$

$$z' = z \cdot \cos(\theta) - x \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$x' = r \cdot (\text{sen}(\theta) \cdot \cos(\phi) + \cos(\theta) \cdot \text{sen}(\phi))$$

$$x' = r \cdot \text{sen}(\theta) \cos(\phi) + r \cdot \cos(\theta) \text{sen}(\phi)$$

$$x' = z \cdot \text{sen}(\theta) + x \cdot \cos(\theta)$$

Resumindo:

$$z' = z \cdot \cos(\theta) - x \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$x' = z \cdot \text{sen}(\theta) + x \cdot \cos(\theta)$$

Organizando as equações:

$$x' = x \cdot \cos(\theta) + z \cdot \text{sen}(\theta)$$

$$z' = -x \cdot \text{sen}(\theta) + z \cdot \cos(\theta)$$

Observe os sinais. Em coordenadas homogêneas temos:

$$R_{\theta}^y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando em um ponto temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3.4 Rotação em Torno do Eixo X

Aplicando o mesmo raciocínio para a rotação em torno do eixo x podemos obter a seguinte matriz em coordenadas homogêneas:

$$P'(x', y', z') = R_{\theta}^x \cdot P(x, y, z)$$

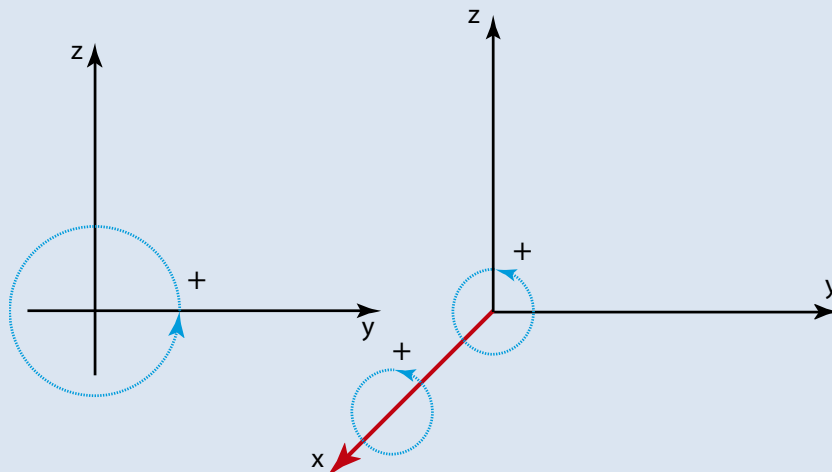


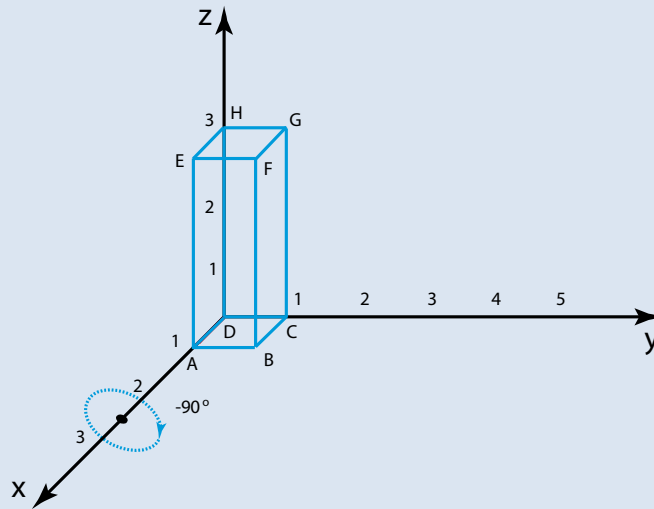
Figura 11: Rotação em torno do eixo x

$$R_{\theta}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a um ponto temos:

$$R_{\theta}^x = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vamos ilustrar a transformação de rotação com o giro  $90^\circ$  de um objeto gráfico em torno do eixo  $x$  no sentido horário. Observe a Figura 12.



**Figura 12:** Exemplo de rotação em torno do eixo  $x$

Para girar este objeto, basta multiplicar as coordenadas de seu vértice pela matriz de rotação em torno do eixo  $x$ , da seguinte forma:

$$M'_{obj} = R_{-90}^x \cdot M_{obj}$$

Da Figura 12 montamos a matriz que representa o objeto:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação em torno do eixo  $x$ :

$$R_{\theta}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90) & -\sin(-90) & 0 \\ 0 & \sin(-90) & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação de rotação sobre os vértices do objeto:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Objeto girado:

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente temos, Figura 13:

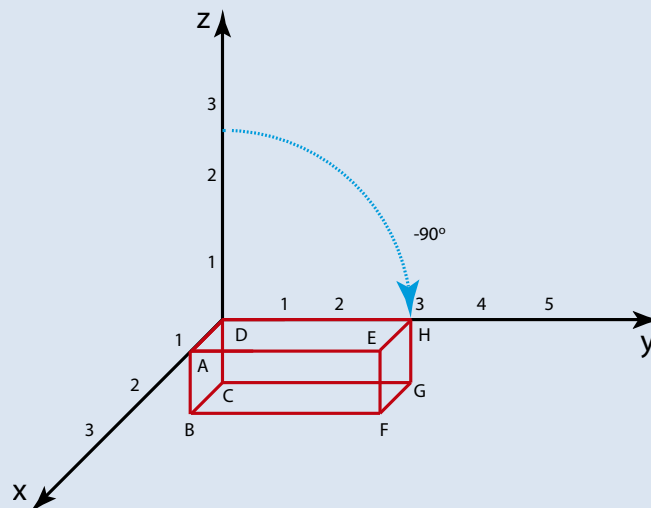
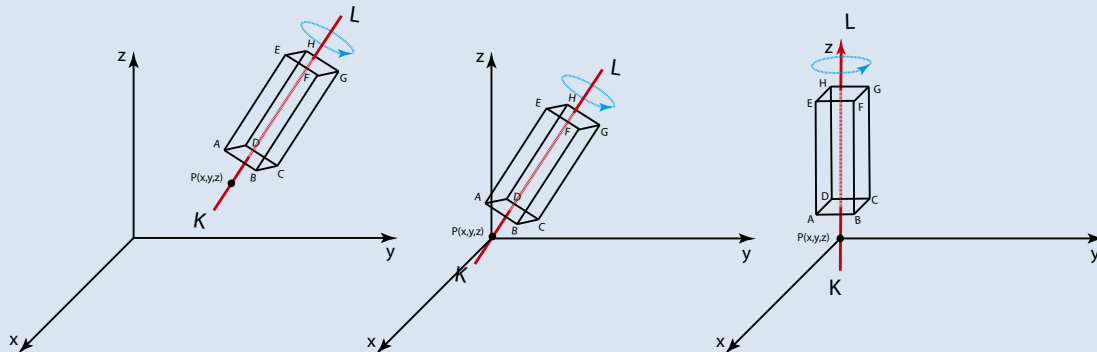


Figura 13: Objeto rotacionado em torno do eixo x

### 3.3.5 Rotação em Torno de um Eixo qualquer no Espaço 3D

Vimos como realizar a rotação em torno dos eixos principais de um sistema de coordenadas. No entanto, é comum girar objetos em torno de eixos distintos aos principais. A solução algébrica para realizar esta operação consiste em alinhar o eixo de rotação sob o

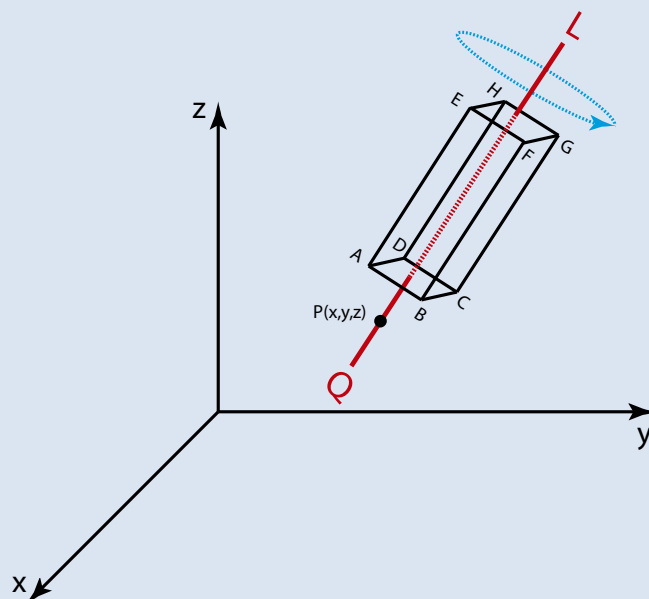
qual se deseja realizar o giro, de modo que coincida com um dos eixos principais e então aplicar uma das matrizes que acabamos de apresentar.



**Figura 14:** Alinhamento do eixo QL com o eixo Z

A combinação de transformações pode nos ajudar na tarefa de alinhar um eixo qualquer no espaço com um dos eixos coordenados. Por convenção e familiaridade com as matrizes bidimensionais vamos mostrar como alinhar um eixo qualquer no espaço 3D com o eixo z.

Considere a Figura 14. Como o eixo QL, sobre o qual desejamos executar o giro de um objeto gráfico, possui direção e sentido, podemos representá-lo por um vetor, no caso o vetor  $\vec{v}$ . O eixo z, por seu turno, também pode ser representado por um vetor, pois também possui direção e sentido. É convencional na literatura representar no eixo z o vetor  $\vec{k}$ .



**Figura 15:** Rotação em torno do eixo QL

A rotação de um objeto gráfico em torno de um eixo qualquer no espaço 3D pode ser realizada por meio dos seguintes passos:

**Passo 1:** Translação de  $Q(x_q, y_q, z_q)$  para a origem do sistema  $(0,0,0)$ ;

**Passo 2:** Alinhamento do eixo QL (vetor  $\vec{v}$ ) com o eixo Z (vetor  $\vec{k}$ );

**Passo 3:** Rotação de  $\theta^\circ$  sobre o eixo Z (vetor  $\vec{k}$ );

**Passo 4:** Alinhamento de retorno - vetor  $\vec{k}$  com o vetor  $\vec{v}$ ;

**Passo 5:** Translação de volta para  $Q(x_q, y_q, z_q)$ .

Estes passos podem ser expressos matricialmente da seguinte forma:

$$T(x_q, y_q, z_q) \cdot R_{-\theta_1}^x \cdot R_{\theta_2}^y \cdot R_{\theta_3}^z \cdot R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q)$$

Observe que o que chamamos de alinhamento do eixo QL (vetor  $\vec{v}$ ) com o eixo Z (vetor  $\vec{k}$ ) é feito pela multiplicação das matrizes que constituem o giro em relação ao eixo  $x$  seguido de um giro em relação ao eixo  $y$ .

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x$$

No processo de retorno a posição inicial temos a matriz inversa que chamamos de  $A_{k-v}$ . É preciso prestar atenção na notação

$$A_{k-v} = R_{-\theta_1}^x \cdot R_{\theta_2}^y$$

$$A_{k-v} = A_{v-k}^{-1}$$

Como a matriz  $A_{k-v}$  é composta de versores ortonormais, temos:

$$A_{k-v} = A_{v-k}^{-1} = A_{v-k}^T$$

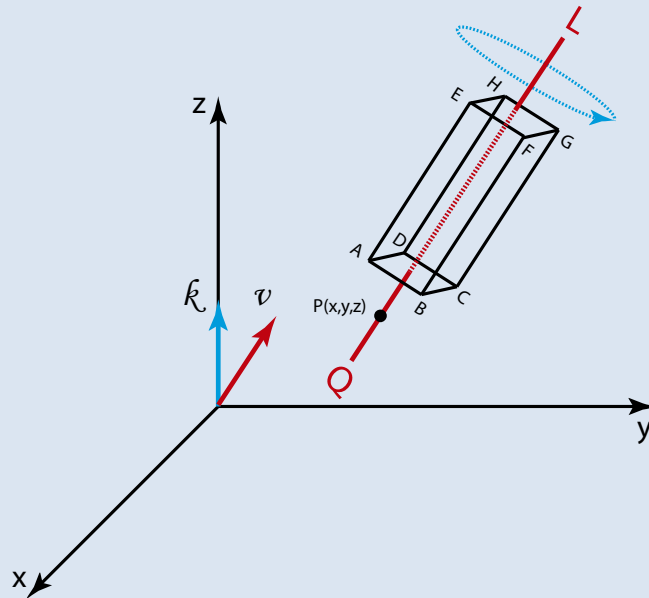
Assim, os passos para o giro sobre o eixo podem ser expressos:

$$T(x_q, y_q, z_q) \cdot A_{v-k}^{-1} \cdot R_{\theta_3}^z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q)$$

Ou

$$T(x_q, y_q, z_q) \cdot A_{v-k}^T \cdot R_{\theta_3}^Z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q)$$

Visando eficiência na implementação podemos calcular a matriz de alinhamento  $A_{v-k}$ . Quando realizamos o giro de um objeto em 3D temos que selecionar o objeto e fornecer o eixo de rotação (Q-L). Assim, com os dados de dois pontos distintos no espaço é que vamos calcular a matriz de alinhamento deste eixo com o eixo z (Figura 15).



**Figura 16:** Rotação em torno do eixo QL

O vetor  $\vec{v}$  pode ser obtido pela subtração dos pontos Q e L, da seguinte forma:

$$\vec{v} = L(x_L, y_L, z_L) - Q(x_q, y_q, z_q)$$

$$\vec{v} = (x_L - x_q)\vec{i} + (y_L - y_q)\vec{j} + (z_L - z_q)\vec{k}$$

Este vetor  $\vec{v}$  tem sentido positivo do ponto Q para o ponto L. Note que construímos o vetor  $\vec{v}$  fazendo a subtração: ponto final – ponto inicial. Se invertermos a subtração, fazendo Q-L, teremos a inversão do sentido de  $\vec{v}$ . É importante lembrar que o sentido de  $\vec{v}$ , com a regra da mão direita, determina o sentido do giro pretendido.

### 3.3.5.1 O Alinhamento do vetor $\vec{v}$ com o vetor $\vec{k}$ .

O **primeiro passo** consiste em levar o ponto  $Q(x_q, y_q, z_q)$  para a origem (Figura 16). A matriz que representa esta transformação é a seguinte:

$$T(-x_q, -y_q, -z_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_q \\ 0 & 1 & 0 & -y_q \\ 0 & 0 & 1 & -z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

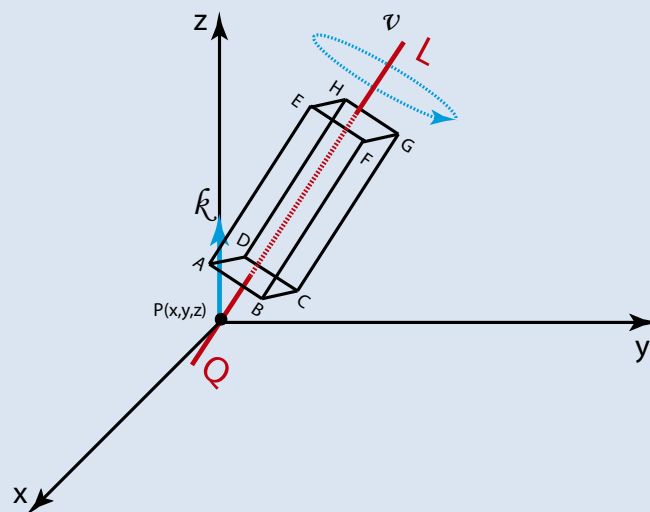


Figura 17: Translação para a origem

No **segundo passo** iniciamos o alinhamento do vetor  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{k}$ . Isto pode ser feito com dois giros sucessivos. Inicia-se o procedimento com um giro em torno do eixo  $x$  e depois com um giro em torno do eixo  $y$ .

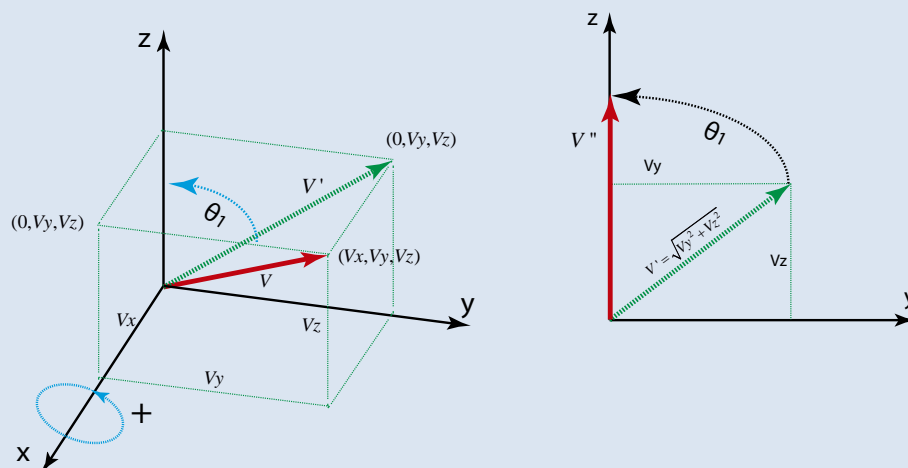


Figura 18: Resultado do giro do vetor  $\vec{v}$  em torno do eixo  $x$



Para fazer o giro de  $\theta_1$  em torno do eixo  $x$  precisamos calcular o seno e o cosseno deste ângulo. Da Figura 17 temos:

$$|v'| = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{v_z}{|v'|} = \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\sin\theta_1 = \frac{v_y}{|v'|} = \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}$$

A matriz de rotação em torno do eixo  $x$ :

$$R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & -\frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando esta matriz ao vetor  $\vec{v}$ :

$$v'' = \begin{bmatrix} v''_x \\ v''_y \\ v''_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & -\frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v'' = \begin{bmatrix} v''_x \\ v''_y \\ v''_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ \sqrt{v_y^2 + v_z^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

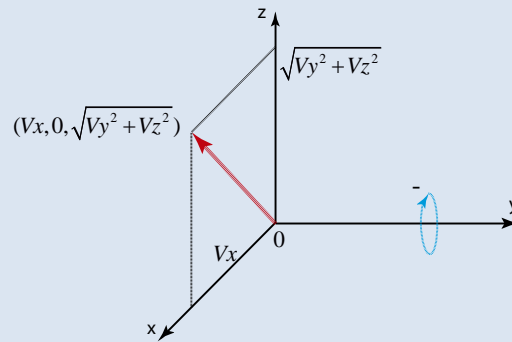


Figura 19: Giro do vetor  $\vec{v}$  em torno do eixo  $x$

Agora vamos fazer a rotação em torno de  $y$ , no sentido negativo (utilizando a regra da mão direita). Com esta rotação o vetor  $\vec{v}$  deve ficar alinhado com o vetor  $\vec{k}$  (Figura 19).

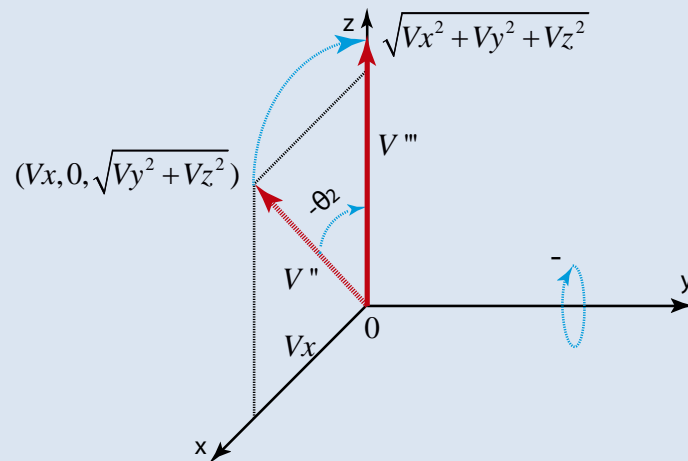


Figura 20: Rotação de  $\vec{v}''$  em torno de  $y$

Temos agora que calcular o seno e o cosseno de  $\theta_2$ . Observe que o giro ocorre no sentido negativo.

Calculo do comprimento de  $\vec{v}''$ :

$$|\vec{v}''| = \sqrt{v_x^2 + (\sqrt{v_y^2 + v_z^2})^2}$$

$$|\vec{v}''| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$R_{-\theta_2}^y = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v''' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ w''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ \sqrt{v_y^2 + v_z^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v''' = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \\ z''' \\ w''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que  $v'''$  é exatamente a norma do vetor  $\vec{v}$ . Assim, o alinhamento do vetor  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{k}$  pode ser expresso:

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{-v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & -\frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_x v_y}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{-v_x v_z}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez alinhados os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{k}$  podemos realizar o **terceiro passo** que consiste na rotação do objeto gráfico em torno do eixo z (vetor  $\vec{k}$ ) com a seguinte matriz:

$$R_{\theta}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O **quarto passo** faz parte do processo de retorno ao ponto de referência do objeto. É o alinhamento do vetor  $\vec{k}$  com o vetor  $\vec{v}$  cuja matriz é a transposta do alinhamento do vetor  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{k}$ .

$$A_{k-v} = A_{v-k}^T$$

$$A_{k-v} = A_{v-k}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 & \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{-v_x v_y}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{-v_x v_z}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{-v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E o **quinto passo** a translação de retorno ao ponto inicial  $Q(x_q, y_q, z_q)$

$$T(x_q, y_q, z_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_q \\ 0 & 1 & 0 & y_q \\ 0 & 0 & 1 & z_q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Juntando tudo temos:

$$M'_{obj} = T(x_q, y_q, z_q) \cdot A_{v-k}^T \cdot R_{\theta_3}^Z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x_q, -y_q, -z_q) \cdot M_{obj}$$

Vamos ilustrar o giro de um objeto gráfico sobre um determinado eixo no espaço 3D. Considere a Figura 20. O objeto é definido pelos seguintes pontos A(1,2,1), B(2,2,1), C(2,3,1), D(1,3,1), E(1,2,4), F(2,2,4), G(2,3,4) e H(1,3,4). O eixo de rotação é definido pelos ponto Q(2,1,0) e L(2,0,3).

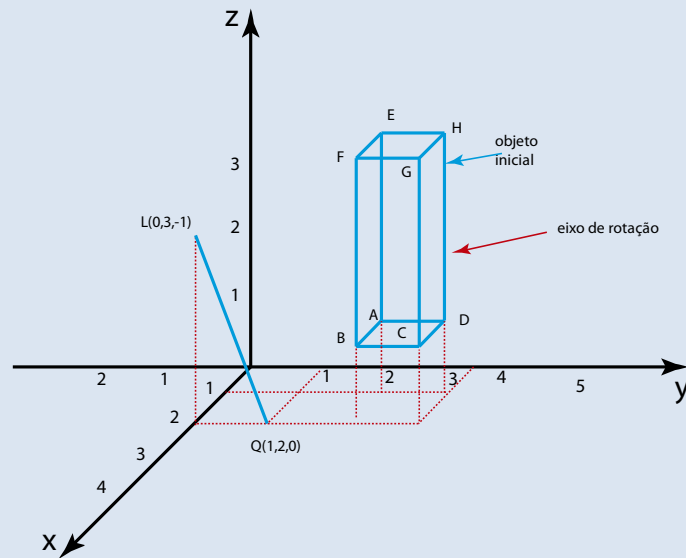


Figura 21: Rotação de  $v''$  em torno de  $y$

A representação do objeto em coordenadas homogêneas fica:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para fazer o giro temos que alinhar o conjunto, objeto gráfico e eixo de rotação com o eixo z. Para isto vamos levar o ponto Q para a origem com a seguinte transformação de translação:

$$T(-x_q, -y_q, -z_q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos construir a matriz de alinhamento. Esta matriz está em função dos escalares  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$  que compõem o vetor  $\vec{v}$

$$\vec{v} = L(x_L, y_L, z_L) - Q(x_q, y_q, z_q) = L(2, 0, 3) - Q(2, 1, 0)$$

$$\vec{v} = (x_L - x_q)\vec{i} + (y_L - y_q)\vec{j} + (z_L - z_q)\vec{k}$$

$$\vec{v} = (2 - 2)\vec{i} + (0 - 1)\vec{j} + (3 - 0)\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \sqrt{100} = 10$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \frac{0}{10} & \frac{0}{10} & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\theta_3}^z = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(180) & -\sin(180) & 0 & 0 \\ \sin(180) & \cos(180) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k}^{-1} = A_{v-k}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = T(x, y, z) \cdot A_{v-k}^T \cdot R_{\theta_3}^z \cdot A_{v-k} \cdot T(-x, -y, -z) \cdot M_{obj}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(180) & -\sin(180) & 0 & 0 \\ \sin(180) & \cos(180) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 3.0 & 2 & 2 & 3.0 & 3.0 & 2.0 & 2.0 & 3.0 \\ -0.4 & -0.4 & -1.2 & -1.2 & -2.2 & -2.2 & -3.0 & -3.0 \\ 0.2 & 0.2 & -0.4 & -0.4 & 2.6 & 2.6 & 2.0 & 2.0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente Figura 21:

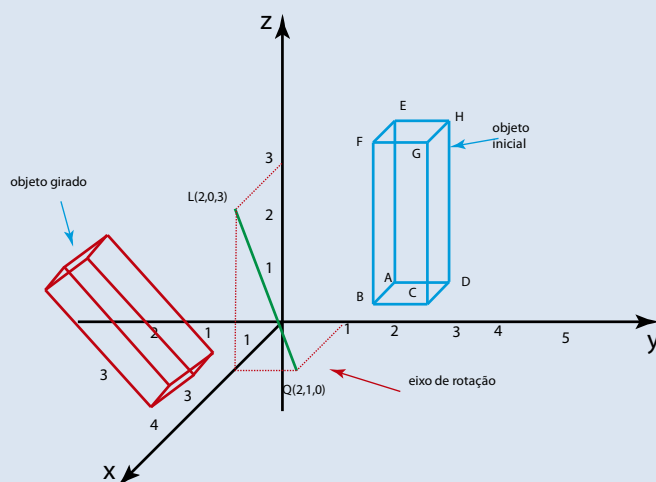


Figura 22: Objeto rotacionado em torno do eixo Q(2,1,0) – L(2,03)

### 3.4 Reflexão no Espaço 3D

A reflexão em 3D funciona analogamente a bidimensional. A diferença é que esta última ela é feita em relação a um eixo e a 3D em relação a um plano. Inicialmente vamos apresentar a reflexão relativa aos planos formados pelos eixos principais .

#### 3.4.1 Reflexão em relação ao plano $xy$

Considere a Figura 22. Observe que um ponto  $P(x, y, z)$  pode ser espelhado em relação ao plano  $xy$  apenas trocando o sinal da sua cota, ou melhor da coordenada  $z$ .

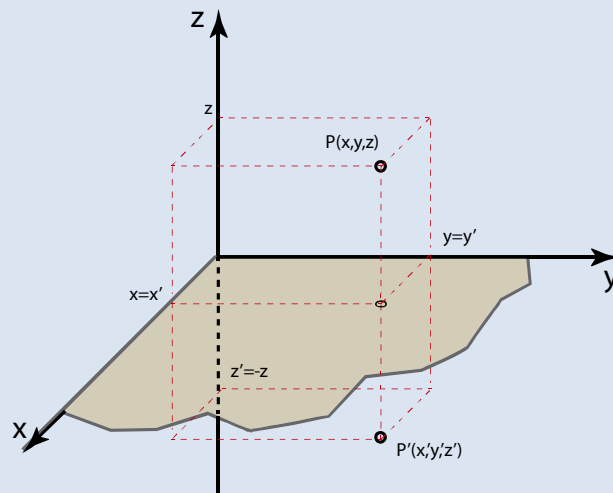


Figura 23: Objeto espelhado em relação ao plano  $xy$

Algebricamente podemos expressar a matriz dessa transformação, em coordenadas homogêneas quando aplicada a um ponto da seguinte forma:

$$P'(x', y', z') = M_{xy} \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



### 3.4.2 Reflexão em relação ao plano $xz$ .

Considere a Figura 23. Observe que o ponto  $P(x, y, z)$  agora é espelhado em relação ao plano  $xz$ . Esta operação pode ser realizada trocando-se apenas o sinal da sua ordenada, ou seja, da coordenada  $y$ .

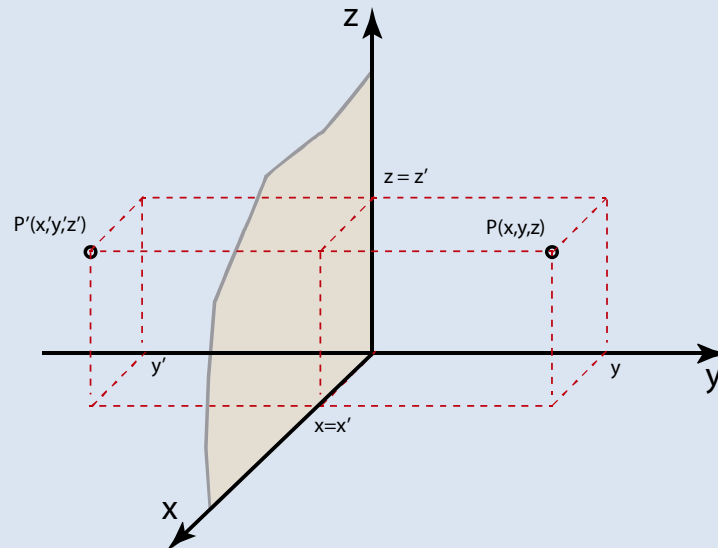


Figura 24: Objeto espelhado em relação ao plano  $xz$

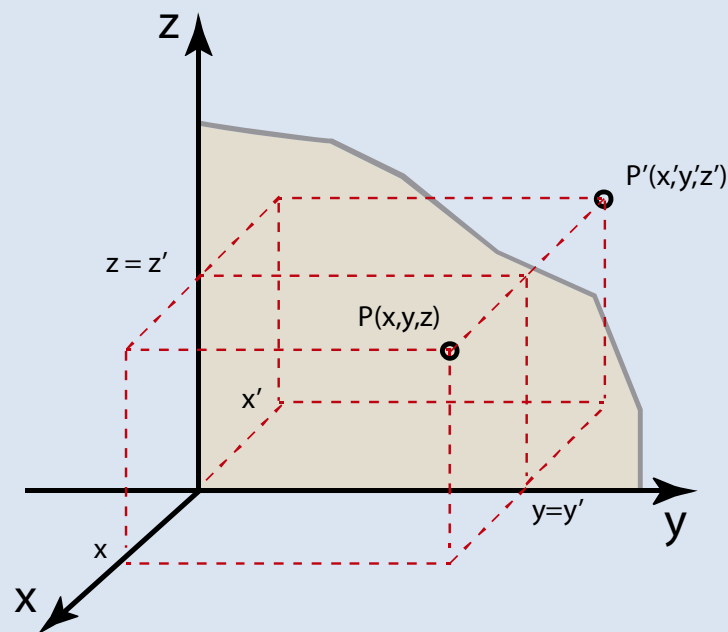
Algebricamente aplicando a um ponto e em coordenadas homogêneas temos:

$$P'(x', y', z') = M_{xz} \cdot P(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4.3 Reflexão em relação ao plano $yz$ .

Considere agora a Figura 24. Observe que nela o ponto  $P(x, y, z)$  é espelhado em relação ao plano  $yz$ . Isto pode ser feito trocando-se o sinal da sua abscissa, ou seja da coordenada  $x$ .



**Figura 25:** Espelhamento de um ponto em relação ao plano  $yz$

Algebricamente e em coordenadas homogêneas temos:

$$P'(x', y', z') = M_{yz} \cdot P(x, y, z)$$

$$M_{yz} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.4.4 Reflexão em relação a um Plano qualquer no espaço 3D

A reflexão tridimensional não ocorre apenas em relação aos planos gerados pelas direções principais. É comum o espelhamento de objetos em relação a um plano qualquer no espaço.

Um plano é univocamente determinado quando conhecemos um ponto sobre ele e um vetor perpendicular a ele. Isto quer dizer que quando conhecemos um plano também

conhecemos um vetor que lhe seja perpendicular. Observe a Figura 25. Nela mostramos um ponto  $P(x, y, z)$  e um plano sobre o qual queremos espelhar este ponto.

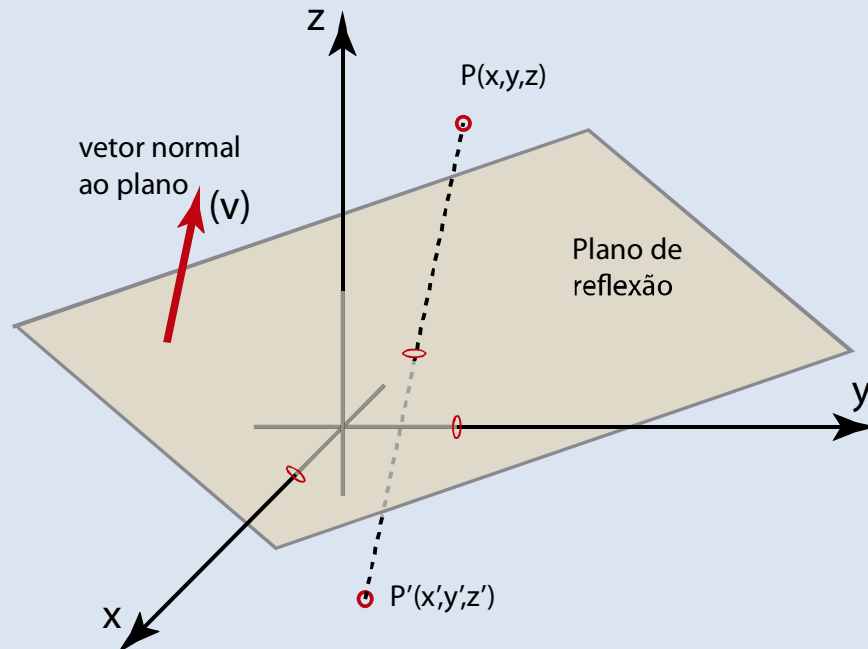


Figura 25: Reflexão ou espelhamento em relação ao um plano qualquer no espaço 3D

Sabemos fazer os espelhamentos em relação aos planos formados pelos eixos principais e com este conhecimento podemos transladar o problema de espelhar um objeto em relação a um plano qualquer no espaço para um plano ao qual sabemos realizar esta operação. Assim, por convenção, escolhemos o plano  $xy$  para esta operação que pode ser realizada com os seguintes passos:

**Passo 1:** transladar o plano para a origem utilizando um ponto de referência;

**Passo 2:** alinhar o vetor normal  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{k}$  (mesmo procedimento da rotação 3D);

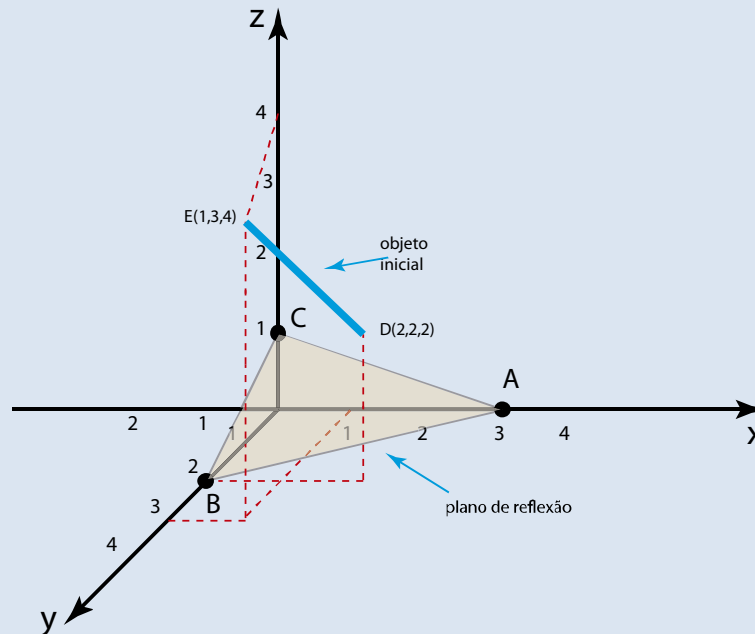
**Passo 3:** realizar a reflexão em relação ao plano  $xy$ ;

**Passo 4:** alinhar o vetor  $\vec{k}$  com o vetor  $\vec{v}$  (mesmo procedimento usado na rotação 3D);

**Passo 5:** transladar ao ponto de início.

$$M'_{obj} = T(x, y, z) \cdot A_{v-k}^T \cdot M_{xy} \cdot A_{v-k} \cdot T(-x, -y, -z) \cdot M_{obj}$$

Para ilustrar o espelhamento de um objeto considera a Figura 26. Vamos espelhar a reta definida pelos pontos D(2,2,2) e E(1,3,4) em relação ao plano definido pelos pontos A(3,0,0), B(0,2,0) e C(0,0,1).



**Figura 26:** Reflexão da reta DE em relação ao plano ABC

Matriz do objeto:

$$M_{obj} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos do vetor normal ao plano definido pelos pontos CDE. Temos que mover este plano de forma que coincida com o plano  $xy$ . Isto é possível escolhendo um dos pontos que integram o plano como referencial e transladar o conjunto plano-ponto para a origem do sistema. Vamos escolher o ponto C(3,0,0).

A matriz de translação pode ser escrita da seguinte forma:

$$T(-x, -y, -z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora vamos alinhar o plano de reflexão com o plano xy. Isto é possível por meio do alinhamento do vetor normal ao plano de reflexão  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{k}$  (eixo z). O vetor normal pode ser gerado por meio do produto vetorial dos vetores  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ . Os pontos que definem o plano são:

$$A(3,0,0), B(0,2,0) \text{ e } C(0,0,1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$$

Cálculo de  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .

$$\overrightarrow{BA} = A - B = 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = -2\vec{j} + \vec{k}$$

Cálculo de  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$$

Temos então

$$v_x = -2; \quad v_y = -3; \quad v_z = -6$$

Vamos montar a matriz de alinhamento do vetor  $\vec{v}$  com o vetor  $\vec{k}$ .

$$\sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{45}$$

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{49}$$

$$\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \sqrt{2205}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_x v_y}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & \frac{-v_x v_z}{\sqrt{(v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}} & 0 \\ 0 & \frac{v_z}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & \frac{-v_y}{\sqrt{v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{v-k} = R_{-\theta_2}^y \cdot R_{\theta_1}^x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{-6}{\sqrt{2205}} & \frac{-12}{\sqrt{2205}} & 0 \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{45}} & \frac{3}{\sqrt{45}} & 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{49}} & \frac{-3}{\sqrt{49}} & \frac{-6}{\sqrt{49}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de espelhamento em relação ao plano  $M_{xy}$ :

$$M_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa ou de retorno. Alinhamento do vetor  $\vec{k}$  com o vetor  $\vec{v}$ .

$$A_{v-k}^{-1} = A_{v-k}^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{2205}} & \frac{-6}{\sqrt{45}} & \frac{-3}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{12}{\sqrt{2205}} & \frac{3}{\sqrt{45}} & \frac{-6}{\sqrt{49}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2205}}{0} & \frac{\sqrt{45}}{0} & \frac{\sqrt{49}}{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Translação de volta ao ponto inicial:

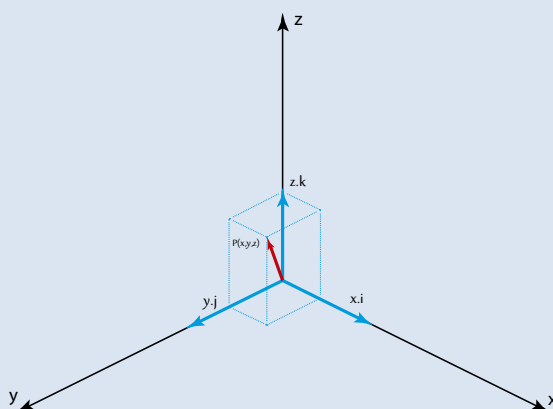
$$T(3,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{49}} & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \\ \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{45}} & 0 \\ -12 & 3 & -6 & 0 \\ \frac{\sqrt{2205}}{0} & \frac{\sqrt{45}}{0} & \frac{\sqrt{49}}{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & -6 & \frac{-12}{\sqrt{2205}} & 0 \\ \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{2205}}{\sqrt{45}} & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -6 & 0 \\ \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{49}} & \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{45}} & \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{45}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_{obj} = \begin{bmatrix} -0.693 & -1.367 \\ 0.408 & -0.551 \\ -1.918 & -3.102 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.5 Transformação de Coordenadas em 3D

Vamos considerar um sistema de coordenadas tridimensional com eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Note que um ponto neste sistema pode ser referenciado vetorialmente (Figura 67).



**Figura 27:** Ponto e vetor

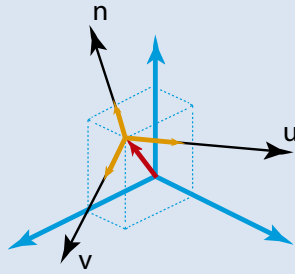
Neste sistema de coordenadas o seguimento  $OP$  pode ser expresso na base ortonormal  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  da seguinte forma:

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = x(1,0,0) + y(0,1,0) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OP} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$$

Observe que as coordenadas do ponto  $P(x, y, z)$  são iguais aos coeficientes de  $\overrightarrow{OP}$ . Vamos agora representar este mesmo ponto em outro sistema de coordenadas. Neste novo sistema  $P(x, y, z)$  passa a ser  $P'(x', y', z')$ . No primeiro sistema a base canônica é representada pela origem e os vetores unitários  $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e na nova base os versores são representados por  $\{0', \vec{u}, \vec{v}, \vec{n}\}$ . Analogamente ao sistema anterior podemos representar  $\overrightarrow{O'P'}$  por meio de sua base (Figura 68).



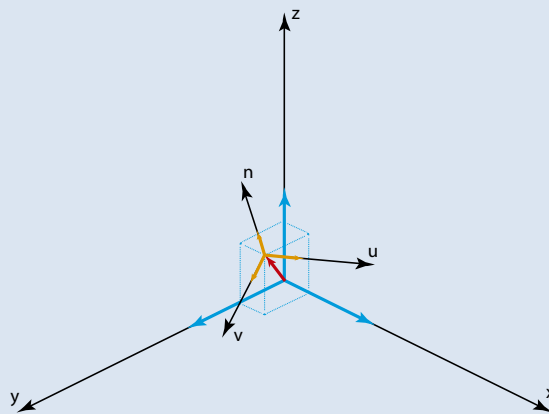
**Figura 28:**  $P'(x, y, z)$  no sistema  $\{0', x', y', z'\}$

$$\overrightarrow{O'P'} = (x', y', z') = (x', 0, 0) + (0, y', 0) = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = x'(1, 0, 0) + y'(0, 1, 0) = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n}$$

$$\overrightarrow{O'P'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n}$$

Vamos representar o ponto  $P(x, y, z) = P'(x', y', z')$  simultaneamente nos dois sistemas de coordenadas, pois são o mesmo ponto (Figura 69).



**Figura 29:**  $P(x, y)$  nos sistemas  $\{0, x, y\}$  e  $\{0', x', y'\}$



As coordenadas de  $P(x,y,z)$  no sistema  $\{0',x',y',z'\}$  é  $P'(x',y',z')$  e podem ser expressas da seguinte forma:

$$\overrightarrow{O'P'} = x' \cdot \vec{u} + y' \cdot \vec{v} + z' \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{n}] \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Lembrando que os versores do novo sistema são formalizados na base do sistema inicial  $\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ :

$$\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$$

$$\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$$

$$\vec{n} = x_n \vec{i} + y_n \vec{j} + z_n \vec{k}$$

Temos

$$[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{n}] = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Para  $0 = 0'$  temos  $OP = O'P'$  e  $P(x,y) = P'(x',y')$ :

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para determinar  $P'$  temos que multiplicar os dois lados da equação pela matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}^{-1}$$

Porém como esta matriz é ortogonal, a sua inversa é igual a sua transposta:

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ z_u & z_v & z_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

$P'(x', y', z')$  pode ser assim determinado:

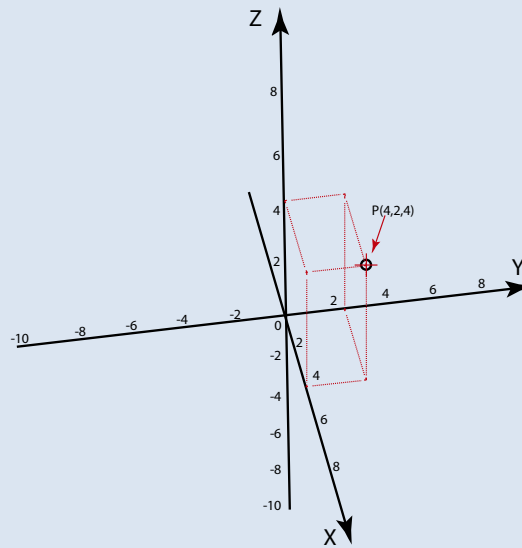
$$\begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_n \\ y_u & y_v & y_n \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Podemos calcular as coordenadas de P no novo sistema da seguinte maneira:

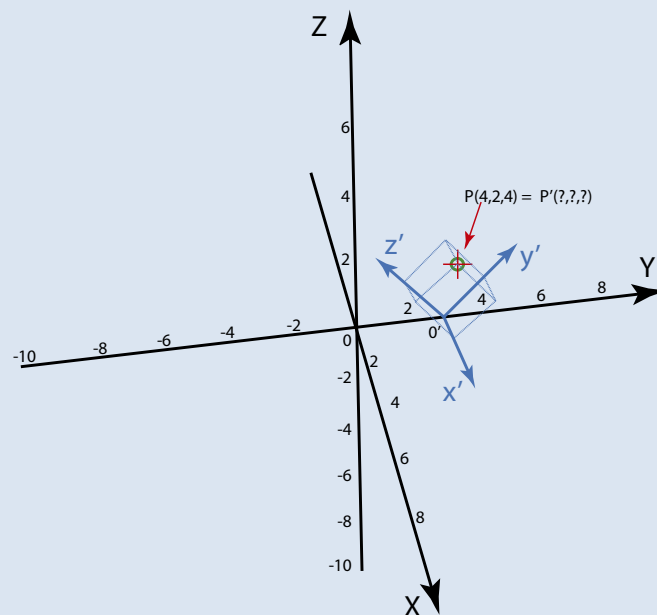
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Vamos ilustrar a mudança de sistemas de coordenadas 3D calculando a nova posição do ponto (4,2,5) definido no sistema  $\{0, x, y, z\}$  expresso pelos versores  $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ , (Figura 30) e no sistema  $\{0', x', y', z'\}$  definido pelos pontos: Origem: (3,2,2); A(6,2,2); B(3,4,4) e C(3,0,4).



**Figura 31:**  $P(x, y, z)$  nos sistema  $\{0, x, y, z\}$

O ponto P no sistema  $\{0', x', y', z'\}$  é  $P'$  (Figura 31):



**Figura 32:**  $P'(x, y, z)$  nos sistema  $\{0, x, y, z\}$  e  $\{0', x', y', z'\}$

Vamos calcular os versores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{n}$ :

$$\vec{U} = A - O' = (6, 2, 2) - (3, 2, 2) = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{V} = B - O' = (3, 4, 4) - (3, 2, 2) = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{N} = C - O' = (3, 0, 4) - (3, 2, 2) = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Temos a base  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{n}$ .

$$\vec{U} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{V} = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{N} = 0\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Calculo do versor na direção  $\vec{u}$  :

$$|\vec{U}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{U}}{|\vec{U}|} = \frac{3}{3}\vec{i} = 1\vec{i}$$

Calculo do versor na direção  $\vec{v}$ :

$$|\vec{V}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{k}$$

Calculo do versor na direção  $\vec{n}$ :

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{-2}{\sqrt{8}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{8}}\vec{k}$$

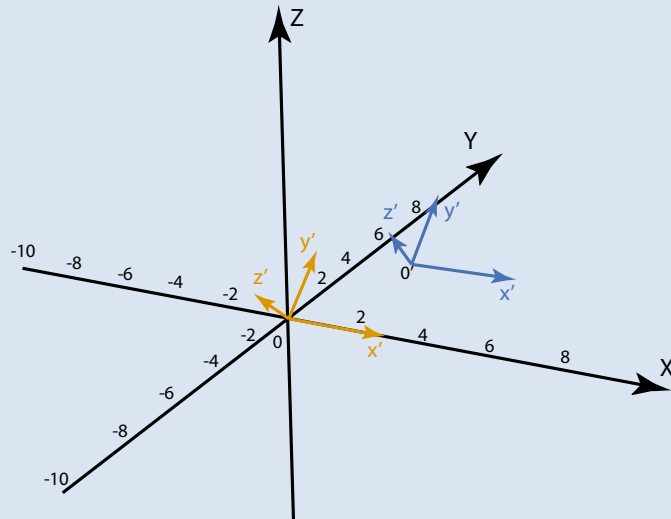
Determinação das coordenadas no novo sistema. :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Lembrando que a matriz acima foi deduzida quando  $O = O'$ , ou seja, com os sistemas na origem. Assim, para o calculo desta rotação precisamos primeiro realizar uma translação para a origem:

$$P' = P - 0'$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$



**Figura 33:** Nos sistemas  $\{0,x,y\}$  e  $\{0',x',y'\}$

Aplicando a rotação temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{8}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{8}} & \frac{2}{\sqrt{8}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.4142 \\ 1.4142 \end{bmatrix}$$

## Referências

HOWARD, T. I. J. et al. **A practical introduction to PHIGS and PHIGS PLUS**. New York: Addison-Wesley Publisher Ltd., 1991.

MAGALHÃES, L. P. **Computação Gráfica**: interfaces em sistemas de computação gráfica. Campinas: Unicamp, 1986.

PERSIANO, R. C. Marinho; OLIVEIRA, A. A. Fernandes de. **Introdução a computação gráfica**. Rio de Janeiro: LTC, 1988.