1. Espaço vetorial

01 Defina duas operações em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$x \oplus y = xy$$
$$\alpha \odot x = x^{\alpha}$$

Mostre que $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ provando as oito propriedades.

02 Defina duas operações em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$x \oplus y = x + y$$
$$\alpha \odot x = x^{\alpha+1}$$

Mostre que $(\mathbb{R},\oplus,\odot)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2. Subespaço vetorial e conjunto gerador

03 i) Verifique se os conjuntos são subespaços vetoriais e, em caso afirmativo, ache um conjunto de geradores para cada subespaço.

a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z + t = 0\}$.

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$

c) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,\mathbb{R}) : a = dec = -b\right\}$.

d) $W = \{ax^2 + bx + c \in P_2(\mathbb{R}) :\ p(1) = 0\}$.

e) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \text{ é irracional}\}$.

ii) Mostre que os subconjuntos são subespaços vetoriais.

a) $W = \{p(x) \in P(\mathbb{R}) : p(x) + p'(x) = 0\}$.

b) $W = \left\{f \in C([a,b]) :\ \int_a^b f(x)dx = 0\right\}$.

04 Consideremos no$\mathbb{R}^3$ os seguintes subespaços vetoriais $W = [(1,0,0),(1,1,1)]$ e $U = [(0,1,0),(0,0,1)]$. Determinar os geradores de $W \cap U$.

05 a) É verdade que se W e U são subespaços vetoriais de V, então $W \cup U$ é subespaço vetorial de V? Caso negativo, apresente um contra-exemplo.

b) Sejam W e U subespaços vetoriais de V. Prove que $W \cup U$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $W \subset U$ ou $U \subset W$.

06 Determinar os geradores de V, U, $V \cap U$ e $V + U$, sabendo que

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\},$$
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}.$$

07 Sejam $v,u \in \mathbb{R}^2$, com $v,u \neq (0,0)$. Se não existe nenhum $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tal que $v = \alpha u$, então mostre que $\mathbb{R}^2 = [v] \oplus [u]$.

08 Sejam W, U e Z subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial V para os quais valem o seguinte: $W \cap (U + Z) = U \cap Z = \{0_V\}$. Provar que se $w + u + z = 0_V$, com $w \in W$, $u \in U$, $z \in W$, então $u = v = w = 0_V$.

09 Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Prove que $V = W_1 \oplus W_2$ se, e somente se, para cada vetor $v \in V$ existem únicos vetores $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ tais que $v = w_1 + w_2$.

3. LD, LI e Base

10 Verifique se os subconjuntos do espaço vetorial V é linearmente dependente ou independente.

a) $\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

b) $\{(0,0,0),(1,2,3),(4,1,-2)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

c) $\{x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$, $V = P(\mathbb{R})$.

d) $\{1, e^x, e^{2x}\}$, $V = C([0,1])$.

e) $\{1, e^x, xe^x\}$, $V = C([0,1])$.

f) Determine m e n para que os vetores $\{(6,2,n),(3,m+n,m-1)\}$ sejam LI.

g) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$, $V = M(2,\mathbb{R})$.

h) $\{(7,-3)(1,2),(-21,9)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

11 Se u, v e w são vetores de um espaço vetorial V tais que $u \in [w]$ e $v \in [w]$, mostrar que $\{u,v\}$ é linearmente dependente.

12 Mostrar que o conjunto $\{u,v,w\}$ de vetores de um espaço vetorial V for LI, o mesmo acontecerá com o conjunto $\{u+v, u+w, v+w\}$.

13 Mostre que o conjunto $\{1, \cos x, \cos(2x)\}$ de vetores de $C([-\pi,\pi])$ é LI.

14 Se $\{v_1,\dots,v_m,u_1,\dots,u_n\}$ é um subconjunto LI de um espaço vetorial V, então mostre que $[v_1,\dots,v_m] \cap [u_1,\dots,u_n] = \{0_V\}$.

15 Provar que o conjunto de funções $\{e^{at}\cos(bt), e^{at}\operatorname{sen}(bt)\}$, onde $a,b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é LI.

16 Encontre uma base e a dimensão de cada subespaço vetorial:

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$.

b) $W = \{A \in M(2,\mathbb{R}) : A = A^t\}$.

17 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ considere os seguintes subespaços vetoriais

$V = \{(x,y,z) : y - 2z = 0\}$, $U = \{(x,y,z) : x = 0\}$ e $W = [(1,1,0),(0,0,2)]$.

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços vetoriais: $V, U, W, V \cap U, U + W$.

18 Determinar uma base e a dimensão do espaço solução do seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 2x + y + t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

19 Mostrar que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

formam uma base de $M(2,\mathbb{R})$.

20 Consideremos o subespaço vetorial de $M(3,\mathbb{R})$ constituído das matrizes simétricas. Determinar uma base desse subespaço vetorial.

21 Seja $V = M(2,\mathbb{R})$. Considere

$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : b = -a\right\}$ e $W_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : c = -a\right\}$.

a) Prove que W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V.

b) Determine as dimensões de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

22 Suponha que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V. Motre que $\{v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + v_2 + \cdots v_n\}$ também é uma base de V.

23 Sejam V e U espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões m e n, respectivamente. Considere o epaço vetorial $V \times U = \{(v,u): v \in V \text{ e } u \in U\}$ cujas operações adição e multiplicação por número real são definidas por

$$(v_1,u_1) \oplus (v_2,u_2) = (v_1 + v_2, u_1 + u_2)$$
$$\alpha \odot (v,u) = (\alpha v, \alpha u)$$

Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{u_1, \dots, u_n\}$ são bases de V e U, nessa ordem, prove que

$$\{(v_1, 0_U), \dots, (v_m, 0_U), (0_V, u_1), \dots, (0_V, u_n)\}$$

é uma base para $V \times U$.

24 Sejam W e U subespaços vetoriais de um espaço vetorial de dimensão n. Supondo que $\dim W > \frac{n}{2}$ e $\dim U > \frac{n}{2}$, prove que $W \cap U \neq \{0_V\}$.

25 Em cada item, encontrar uma base para os subespaços vetoriais U, W, $U \cap W$ e $U + W$ e verifique se $V = U \oplus W$.

a) $U = [(1,0,0),(1,1,1)]$, $W = [(0,1,0),(0,0,1)]$ e $V = \mathbb{R}^3$.

b) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$,
$W = [(1,3,0),(0,4,6)]$e$V = \mathbb{R}^3$.

c) $U = \{A \in M(2,\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$, $W = \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$,
$V = M(2,\mathbb{R})$.

d) $U = [x^3 + 4x^2 - x + 3, x^3 + 5x^2 + 5, 3x^3]$,
$W = [x^3 + 4x^2, x - 1, 1]$ e $V = P_3(\mathbb{R})$.

26 Sejam W, U, Z subespaços vetoriais de V. Determine uma fórmula para a dimensão do subespaço vetorial $W + U + Z$.

4. Base ordenada, coordenadas e Matriz mudança de base

27 O vetor$z \in \mathbb{C}$ possui coordenadas $(1,-2)_B$ na base canônica $B = \{1, i\}$. Determinar as coordenadas desse mesmo vetor em relação à seguinte base $C = \{1 - i, 1 + i\}$.

28 Determinar as coordenadas do polinômio x^3 em relação à seguinte base de $P_3(\mathbb{R})$:

$$B = \{1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3\}.$$

29 A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ possui coordenadas $(1,-1,2,3)_B$ em relação a base canônica $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Determine as coordenadas dessa mesma matriz em relação à base $C = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

30 Determinar as coordenadas do polinômio $p(x) = 1 + 2x - x^3 \in P_3(\mathbb{R})$ em relação à base:

a) canônica $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ desse espaço.

b) $C = \{1, 1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$.

32 Achar a matriz de mudança da base $C = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,3)\}$ para a base canônica B do $\mathbb{R}^3$.

33 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ relacionadas da seguinte forma:

$$g_1 = e_1 + e_3$$
$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$
$$g_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$$

a) Determinar a matriz de mudança de B para C e de C para B.

b) Se as coordenadas de um vetor v em relação à base B são $(1,1,2)_B$, quais as coordenadas desse vetor em relação à base C?

34 A matriz de mudança de uma base B do $\mathbb{R}^2$ para a base $C = \{(1,1),(0,2)\}$ desse mesmo espaço é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determinar a base B.

Gabarito:

03. a)$[(1,1,0,0),(1,0,1,0),(-1,0,0,1)]$, b) $[(1,0,1),(0,1,1)]$. c) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.d)$\langle -x^2+x, -x^2+1 \rangle$. e) Não.

04. $W \cap U = \langle (0,1,1) \rangle$.

05. Não. Tome $W = \langle (0,1) \rangle$ e $U = \langle (0,1) \rangle$. Então, $(1,0),(0,1) \in W \cup U$, mas $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin W \cup U$.

06. $V = \langle (2,1,-2) \rangle$, $U = \langle (-2,1,0),(3,0,1) \rangle$.

10. a) LI. b) LD. c) LI. d) LI. e) LI. f) $m \neq 1$ e $n \neq 0$. g) LD. h) LD.

16. a) $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$ e $\dim W = 2$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\dim W = 3$.

17. $V = \langle (1,0,0),(0,2,1) \rangle \mathrm{e} \dim V = 2$. $U = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle \mathrm{e} \dim U = 2$. $\dim W = 2$. $V \cap U = \langle (0,2,1) \rangle \mathrm{e} \dim V \cap U = 1$.
$U + W = \langle (0,1,0),(1,1,0),(0,0,2) \rangle \mathrm{e} U + W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim U + W = 3$.

18. $\{(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 1, 1)\} \mathrm{e} \dim S = 1$.

20. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

21. b) $\dim W_1 = \dim W_2 = 3$, $\dim W_1 \cap W_2 = 2$ e $\dim W_1 + W_2 = 4$.

25. ???

26. $\dim(W+U+Z) = \dim W + \dim U + \dim Z - \dim W \cap U - \dim W \cap Z - \dim U \cap Z + \dim W \cap U \cap Z$.

27. $z = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})_C$.

29. $A = (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3)_C$.

30. a) $p(x) = (-1,0,2,1)_B$. b) $p(x) = (2,-2,0,1)_C$

32. ?

33.a) $M_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e lembre que $M_B^C = M_C^{B^{-1}}$. b) $(5,5,4)_C$.

34. $B = \{(1, \frac{1}{3}), (0, \frac{2}{3})\}$.