AULA 16 – Hamilton e o Problema do Caixeiro Viajante

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

27 de julho de 2015

Sumário

- Definições
- Um jogo no dodecaedro
- Propriedades
- Problema do Caixeiro Viajante
- Abordagens para resolver o problema
- Algoritmo aproximado

Definições

Caminho hamiltoniano

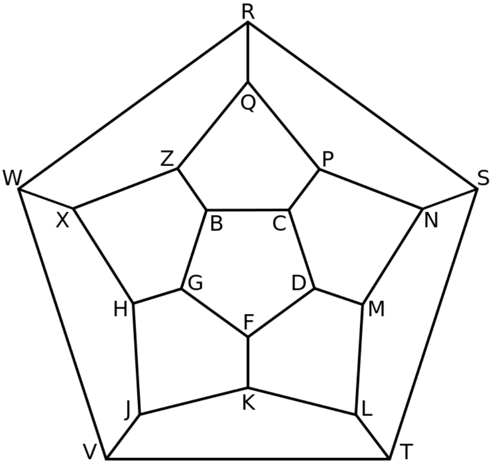
Um **caminho hamiltoniano** é um caminho que usa cada vértice do grafo exatamente uma vez.

Ciclo hamiltoniano

Um **ciclo hamiltoniano** é um ciclo que contém todos os vértices do grafo. Um grafo que contém um ciclo hamiltoniano é chamado de **grafo hamiltoniano**.

Jogo no dodecaedro (proposto por Hamilton em 1856)

Um jogador marca 5 vértices consecutivos e a outra é solicitada a completar o caminho formando um ciclo gerador.



Propriedades

- Um grafo completo com mais de dois vértices é hamiltoniano;
- Todo sólido platônico (tetraedro, cubo, octaedro, ...), considerado como um grafo, é hamiltoniano;
- Qualquer ciclo hamiltoniano pode ser convertido em um caminho hamiltoniano pela remoção de uma de suas arestas, mas um caminho hamiltoniano pode ser estendido para um ciclo hamiltoniano se suas extremidades são adjacentes.
- Número de diferentes ciclos hamiltonianos para um grafo completo é igual à $(n-1)!/2$.
- O *grafo linha* $L(G)$ (grafo em que cada aresta de G é um vértice em $L(G)$ e, existe uma aresta entre dois vértices em $L(G)$ se as correspondentes arestas em G compartilham um mesmo vértice terminal) de um grafo Hamiltoniano G é Hamiltoniano. O grafo linha de um grafo Euleriano é Hamiltoniano.

Teorema de Bondy-Chvátal

Definição de *closure* $cl(G)$

Dado um grafo G com n vértices, o “fecho” $cl(G)$ é construído unicamente a partir de G pela repetida adição de novas arestas (u, v) conectando pares de vértices não adjacentes u e v com $grau(v) + grau(u) \geq n$ até que não haja mais pares com esta propriedade.

Teorema de Bondy-Chvátal

Definição de *closure* $cl(G)$

Dado um grafo G com n vértices, o "fecho" $cl(G)$ é construído unicamente a partir de G pela repetida adição de novas arestas (u, v) conectando pares de vértices não adjacentes u e v com $grau(v) + grau(u) \geq n$ até que não haja mais pares com esta propriedade.

Teorema de Bondy-Chvátal

Um grafo é Hamiltoniano se e somente se seu fecho é Hamiltoniano.

Teorema de Bondy-Chvátal

Definição de *closure* $cl(G)$

Dado um grafo G com n vértices, o "fecho" $cl(G)$ é construído unicamente a partir de G pela repetida adição de novas arestas (u, v) conectando pares de vértices não adjacentes u e v com $grau(v) + grau(u) \geq n$ até que não haja mais pares com esta propriedade.

Teorema de Bondy-Chvátal

Um grafo é Hamiltoniano se e somente se seu fecho é Hamiltoniano.

Teorema de Dirac (1952) – condição suficente

Um grafo simples com n vértices ($n \geq 3$) é Hamiltoniano se cada vértice v possui $grau(v) \geq n/2$.

Teorema de Bondy-Chvátal

Definição de *closure* $cl(G)$

Dado um grafo G com n vértices, o "fecho" $cl(G)$ é construído unicamente a partir de G pela repetida adição de novas arestas (u, v) conectando pares de vértices não adjacentes u e v com $grau(v) + grau(u) \geq n$ até que não haja mais pares com esta propriedade.

Teorema de Bondy-Chvátal

Um grafo é Hamiltoniano se e somente se seu fecho é Hamiltoniano.

Teorema de Dirac (1952) – condição suficente

Um grafo simples com n vértices $(n \geq 3)$ é Hamiltoniano se cada vértice v possui $grau(v) \geq n/2$.

Teorema de Ore (1960) – condição suficente

Um grafo com n vértices $(n \geq 3)$ é Hamiltoniano se, para cada par de vértice não adjacentes, a soma de seus graus é maior ou igual a n.

Problema difícil

Circuito hamiltoniano é NP-Difícil

Em contraste com grafos eulerianos, não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para um grafo ser hamiltoniano. Determinar se um grafo é hamiltoniano é um problema difícil.

Problema difícil

Circuito hamiltoniano é NP-Difícil

Em contraste com grafos eulerianos, não se conhece nenhuma condição necessária e suficiente para um grafo ser hamiltoniano. Determinar se um grafo é hamiltoniano é um problema difícil.

Algoritmo força bruta

- Seja $\{1, 2, \ldots, n\}$ o conjunto dos vértices do grafo.
- Gere todas as permutações dos vértices acrescentando no final o vértice inicial.
- Verifique se cada uma destas permutações forma um ciclo.

Travelling Salesman Problem (TSP)

Problema do Caixeiro Viajante

Dado um grafo conexo com peso nas arestas, encontre um ciclo hamiltoniano de peso mínimo.

Travelling Salesman Problem (TSP)

Problema do Caixeiro Viajante

Dado um grafo conexo com peso nas arestas, encontre um ciclo hamiltoniano de peso mínimo.

Abordagens

- **Exatos:**
  - Força bruta
  - Programação dinâmica
  - Branch and bound
- **Heurísticas:**
  - Vizinho mais próximo
  - K-OPT
  - Simulated annealing
  - Busca tabu
  - ACO
- **Algoritmos aproximados**
  - MST-2-APROX.

Fator de desempenho $\rho(n)$ para algoritmos de aproximação

- Considere **problemas de otimização** (maximização ou minimização) em que queremos encontrar uma **solução próxima da ótima**.
- Dizemos que um algoritmo para um problema tem fator de aproximação $\rho(n)$ se, para cada entrada de tamanho n, o custo da solução produzida pelo algoritmo está dentro de um fator $\rho(n)$ do custo C^* de uma solução ótima:
$$\max\left(\frac{C}{C^*}, \frac{C^*}{C}\right) \leq \rho(n).$$
- Um algoritmo com fator $\rho(n)$ é chamado de $\rho(n)$-**aproximado**.
- Em problemas de maximização, $0 \leq C \leq C^*$, e a razão C^*/C dá o fator em que o custo da solução ótima é maior que o custo da solução aproximada. [Similarmente para problemas de minimização.]
- Um algoritmo 1-aproximado devolve a solução ótima.

MST-2-APROX – Ver capítulo 35 do Cormen

Consideramos como entrada:

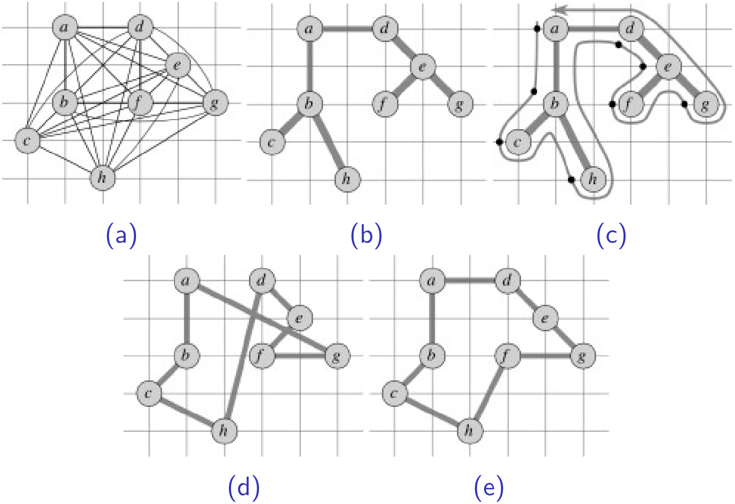
- Grafos completos;
- Não orientados;
- Custo das arestas é positivo;
- Respeita a desigualdade triangular, isto é, $w(u, w) \leq w(u, v) + w(v, w)$.

Saída:
Um ciclo hamiltoniano com custo próximo ao custo mínimo.

Algoritmo Aprox-tsp

```
aprox-tsp(G,w)
1 Selecione um vértice r ∈ G.V para ser a ``raiz'';
2 Compute a MST T para G usando mst-prim(G, w, r);
3 Seja H a lista de vétices ordenada de acordo
  com uma visita em pré-ordem da árvore T;
4 Devolva o ciclo hamiltoniano H
```

Exemplo



Teorema

O Teorema

O algoritmo aprox-tsp(G,w) é um algoritmo 2-aproximado para o problema do caixeiro viajante.

Teorema

O Teorema

O algoritmo aprox-tsp(G,w) é um algoritmo 2-aproximado para o problema do caixeiro viajante.

Ideia da demonstração (ver Cormen 35.2)

1. A MST T provê um limite inferior para o custo da solução ótima: $c(T) \leq c(H^*)$.
2. Um *percurso completo* em T visita cada aresta duas vezes. Se W é este percurso, então: $c(W) = 2c(T)$.
3. Dos itens 1 e 2 acima, temos que $c(W) \leq 2c(H^*)$.
4. O percurso W nem sempre forma um ciclo simples (pois pode repetir vértices). No entanto, podemos usar a desigualdade triangular para remover vértices sem aumentar o custo.
5. Seja H o ciclo obtido de W pela remoção de vértices, então $c(H) \leq c(W) \implies c(H) \leq 2C(H^*)$.