AULA 20 – Fluxo em Redes (Parte III)

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

10 de agosto de 2015

Sumário

- Revisão
- Definição de corte
- Lema 1: $v(f) = f(S, T)$
- Lema 2: $v(f) \leq c(S, T)$
- Teorema: Fluxo Máximo – Corte Mínimo
- Exercícios
- Curiosidade

O que vimos?

- O problema de fluxo em redes
  - Vértices especiais s e t (fonte e sumidouro respectivamente).
  - Condições de capacidade e de conservação.
- Valor de um fluxo e o problema de se encontrar o fluxo máximo.
- Algoritmo de Ford-Fulkerson
  - Grafo residual.
  - Caminho aumentante.
  - Demonstração de correção (usando um *cheat*) e complexidade de tempo.

Definição

Corte

Um **corte** (S, T) é uma partição de V em dois conjuntos disjuntos S e $T = \{V \setminus S\}$, tal que $s \in S$ e $t \in T$.
A **capacidade de um corte** (S, T) é definida como:

$$c(S, T) = \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} c(u, v).$$

Um **fluxo que cruza o corte** (S, T) é definido como:

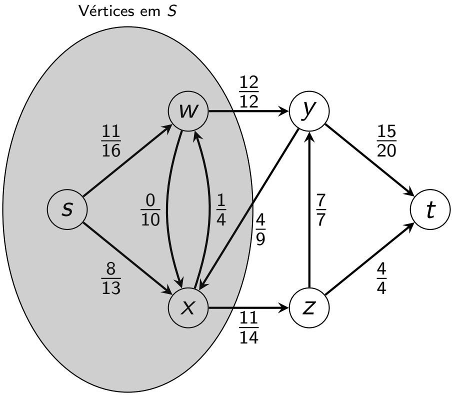
$$f(S, T) = \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} f(u, v) - \sum_{\substack{u \in T, \\ v \in S}} f(u, v).$$

O problema do corte mínimo

O problema do corte mínimo é determinar S e T tal que $c(S, T)$ é mínima.

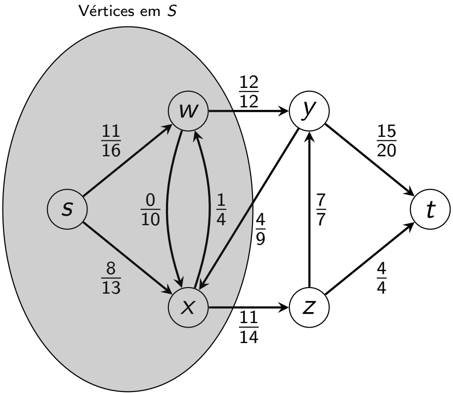
Exemplo

Qual a capacidade e o fluxo do corte na figura a seguir?



Exemplo

Qual a capacidade e o fluxo do corte na figura a seguir?



Solução

$c(S,T) = c(w,y) + c(x,z) = 12 + 14 = 26.$

$f(S,T) = f(w,y) + f(x,z) - f(y,x) = 12 + 11 - 4 = 19.$

Lema 1

Seja f algum fluxo em G e (S, T) algum corte. Então $v(f) = f(S, T)$.

Lema 1

Seja f algum fluxo em G e (S, T) algum corte. Então $v(f) = f(S, T)$.

Demonstração

- Por definição $v(f) = \sum_{v \in V} f(s, v)$.
- Assumimos que $\sum_{v \in V} f(v, s) = 0$.
- Então podemos escrever $v(f) = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$.
- Sabemos que os demais vértices do conjunto S são internos, portanto, para todo $v \in S$:

$$\sum_{u \in V} f(u, v) - \sum_{w \in V} f(v, w) = 0.$$

Demonstração do Lema 1 (continuação)

Portanto,

$$v(f) = \sum_{v \in S} \left(\sum_{u \in V} f(u, v) - \sum_{w \in V} f(v, w) \right),$$

pois o único termo desta soma que é diferente de zero ocorre quando $v = s$.

Demonstração do Lema 1 (continuação)

Portanto,

$$v(f) = \sum_{v \in S} \left(\sum_{u \in V} f(u,v) - \sum_{w \in V} f(v,w) \right),$$

pois o único termo desta soma que é diferente de zero ocorre quando $v = s$.

Reescrevendo o somatório

Considere as possibilidades para uma aresta:

- Se ambos os vértices da aresta (u, v) estão em S, então $f(u, v)$ aparecerá na soma com '$+$' e outra com '$-$', e então estes dois termos se cancelam.
- Se $u \in S$ e $v \in T$, então $f(u, v)$ aparecerá na soma uma única vez com '$+$'.
- Se $u \in T$ e $v \in S$, então $f(u, v)$ aparecerá na soma uma única vez com '$-$'.
- Se $u, v \in T$, então $f(u, v)$ não aparecerá no somatório.

Demonstração do Lema 1 (continuação)

Assim,

$$
\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{v \in S} \left(\sum_{u \in V} f(u,v) - \sum_{w \in V} f(v,w) \right) \\
&= \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} f(u,v) - \sum_{\substack{u \in T, \\ v \in S}} f(u,v) \\
&= f(S,T).
\end{aligned}
$$

Lema 2

Seja f algum fluxo em G e (S, T) algum corte. Então $v(f) \leq c(S, T)$.

Lema 2

Seja f algum fluxo em G e (S, T) algum corte. Então $v(f) \leq c(S, T)$.

Demonstração

$$\begin{aligned}
v(f) &= \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} f(u, v) - \sum_{\substack{u \in T, \\ v \in S}} f(u, v) \\
&\leq \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} f(u, v) \\
&\leq \sum_{\substack{u \in S, \\ v \in T}} c(u, v) = c(S, T).
\end{aligned}$$

O Lema 2 diz que o valor de cada fluxo é limitado superiormente pela capacidade de cada corte.

Teorema

Se f é um fluxo em G tal que não existe caminho de $s \rightsquigarrow t$ no grafo residual G_f, então existe um corte (S^*, T^*) em G para o qual $v(f) = c(S^*, T^*)$. Consequentemente, f tem o valor máximo para qualquer fluxo em G e, (S^*, T^*) tem a capacidade mínima para qualquer corte em G.

Teorema

Se f é um fluxo em G tal que não existe caminho de $s \rightsquigarrow t$ no grafo residual G_f, então existe um corte (S^*, T^*) em G para o qual $v(f) = c(S^*, T^*)$. Consequentemente, f tem o valor máximo para qualquer fluxo em G e, (S^*, T^*) tem a capacidade mínima para qualquer corte em G.

Demonstração

Seja S^* o conjunto de todos os vértices $v \in V$ em que existe um caminho de $s \rightsquigarrow v$ em G_f. Seja $T^* = V - S^*$.
Observe que:

1. (S^*, T^*) é de fato um corte com $s \in S^*$ e $t \notin S^*$, pois assumimos que não existe um caminho de $s \rightsquigarrow t$ no grafo residual, logo $t \in T^*$.
2. As arestas que cruzam o corte (S^*, T^*) ou estão saturadas ou não carregam fluxo.

Demonstração do Teorema (continuação)

Arestas saturadas

Suponha que (u, v) é uma aresta em G tal que $u \in S^*$ e $v \in T^*$. Afirmamos que $f(u, v) = c(u, v)$. Caso contrário, (u, v) seria uma aresta de avanço no grafo residual e, como $u \in S^*$, existe um caminho $s \rightsquigarrow u$. Juntando a aresta (u, v) neste caminho, teríamos um caminho de $s \rightsquigarrow v$, o que contradiz o fato de $v \in T^*$.

Arestas que não carregam fluxo

Suponha que (u', v') é uma aresta em G tal que $u' \in T^*$ e $v' \in S^*$. Afirmamos que $f(u', v') = 0$. Caso contrário, (v', u') seria uma aresta de retorno no grafo residual e, como $v' \in S^*$, existe um caminho $s \rightsquigarrow v'$. Juntando a aresta (v', u') neste caminho, teríamos um caminho de $s \rightsquigarrow u'$, o que contradiz o fato de $u' \in T^*$.

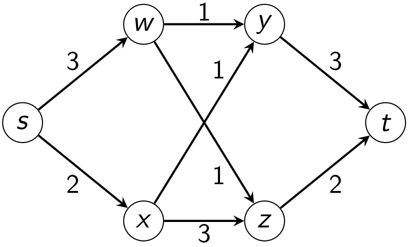
Demonstração do Teorema (continuação)

Todas as arestas que saem de S^* estão saturadas com fluxo, enquanto que as arestas que entram em S^* são completamente inutilizadas. Com o Lema 1, podemos concluir:

$$\begin{aligned} v(f) &= \sum_{\substack{u \in S^*, \\ v \in T^*}} f(u,v) - \sum_{\substack{u \in T^*, \\ v \in S^*}} f(u,v) \\ &= \sum_{\substack{u \in S^*, \\ v \in T^*}} c(u,v) - 0 \\ &= c(S^*, T^*). \end{aligned}$$

Exercícios importantes

1. Para a rede abaixo faça uma tabela contendo uma coluna para os cortes possíveis, outra coluna para as arestas diretas (que saem de S), outra coluna para as arestas inversas (que entram em S), e na última coluna a capacidade do corte. [Exemplo da Figura 22.16 do Sedgewick].



2. Escreva um algoritmo que recebe como entrada uma rede de fluxo G e devolve como saída um corte mínimo (conjunto de vértices S^*).

Curiosidade

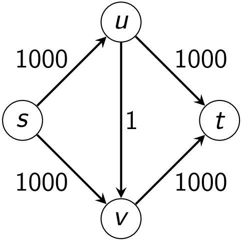
Formulação do problema do fluxo máximo como PL.

Dada uma rede de fluxo $G = (V, E)$, o problema de encontrar o fluxo máximo na rede pode ser formulado como um programa linear simplesmente escrevendo a definição de fluxo.
Teremos uma variável $f(u, v)$ para cada aresta $(u, v) \in E$ da rede, e o problema será:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{v \in V} f(s, v) \\
\text{subject to} \quad & \sum_{u \in V} f(u, v) = \sum_{w \in V} f(v, w), && \forall v \in V - \{s, t\} \\
& f(u, v) \leq c(u, v), && \forall (u, v) \in E \\
& f(u, v) \geq 0, && \forall (u, v) \in E.
\end{aligned}
$$

Curiosidade

Para a rede abaixo teríamos:



$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & X_{su} + X_{sv} \\
\text{subject to } & X_{su} = X_{ut} + X_{uv} \\
& X_{vt} = X_{sv} + X_{uv} \\
& X_{su} \leq 1000 \\
& X_{sv} \leq 1000 \\
& X_{ut} \leq 1000 \\
& X_{vt} \leq 1000 \\
& X_{uv} \leq 1 \\
& X_{su}, X_{sv}, X_{uv}, X_{ut}, X_{vt} \geq 0
\end{aligned}
$$