Continuidade

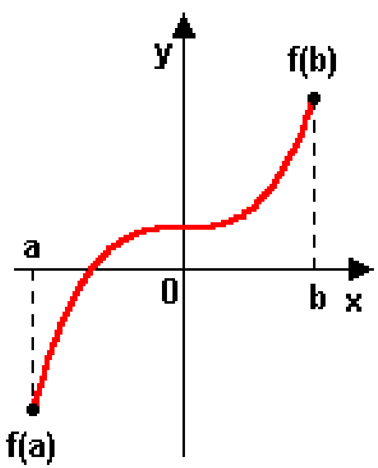
Definição: Dizemos que uma função f é **contínua** em x = a se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

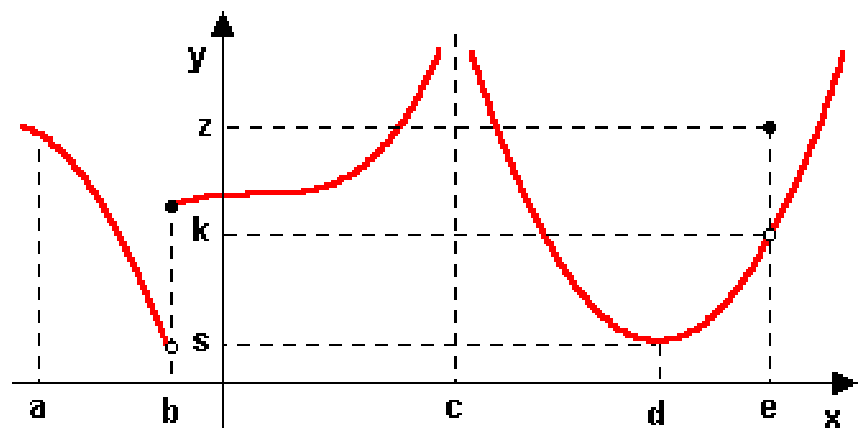
(i) f(a) está definida;

(ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;

(iii) f(a) = $\lim_{x \to a} f(x)$

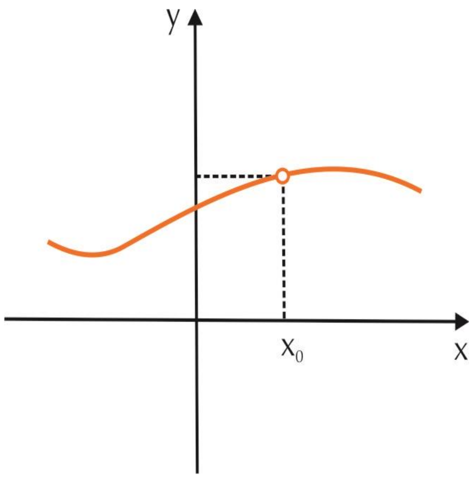
Se falhar uma ou mais dessas condições, dizemos que f tem uma **descontinuidade** em x = a.



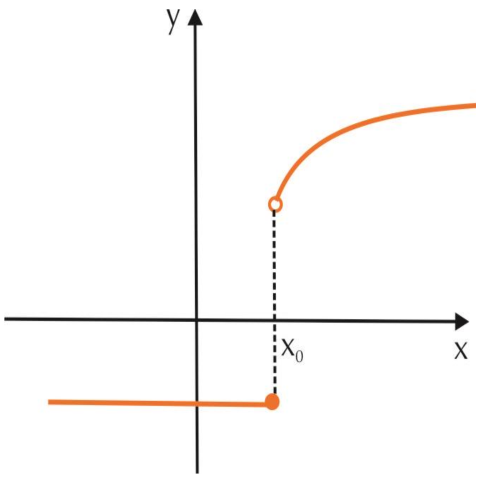


Continuidade

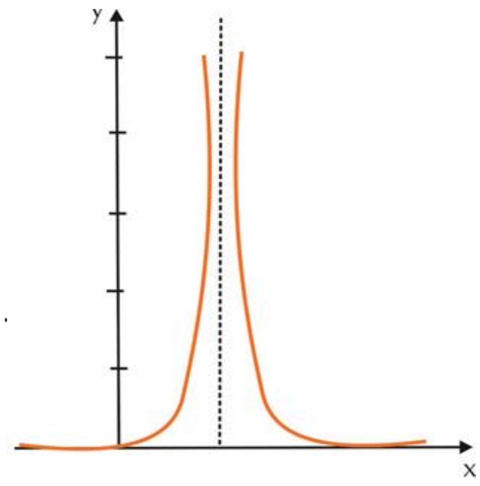
Tipos de descontinuidade



a)



b)



c)

(a): Descontinuidade removível;
(b): Descontinuidade tipo salto;
(d): Descontinuidade infinita;

Continuidade

Exemplo 1: Verifique se as seguintes funções são contínuas em x = 2.

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2 \\ 3, se\ x = 2 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2 \\ 2, se\ x = 2 \end{cases}$

Propriedade das funções contínuas

Teorema: Se as funções f e g são funções contínuas em c, então:

(a) $f + g$ é contínua em c.

(b) $f - g$ é contínua em c.

(c) $f.g$ é contínua em c.

(d) f/g é contínua em c se $g(c) \neq 0$ e tem uma descontinuidade em $x = c$ se $g(c)=0$.

Continuidade dos polinômios e funções racionais

Teorema

(a) Um polinômio é contínuo em todo número.

(b) Uma função racional é contínua em todo número em que o denominador não se anula e tem descontinuidades nos pontos em que o denominador é zero.

(c) Se n for um inteiro positivo e $f(x) = \sqrt[n]{x}$, então

(i) se n for ímpar, f será contínua em qualquer número;

(ii) se n for par, f será contínua em todo número positivo.

Exemplo: Determine os pontos de descontinuidades da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 9}.$$

Propriedade das funções contínuas

Teorema

Se $\lim_{x\to a} g(x) = b$ e se a função f for contínua em b, $\lim_{x\to a}(f\ o\ g)\ (x) = f(b)$ ou equivalentemente,

$$\lim_{x\to a}(f\ o\ g)\ (x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Teorema

Se a função g for contínua no ponto **a** e a função f for contínua em g(a), então a função composta $f\ o\ g$ será contínua no ponto **a**.

Exemplo: Determine os valores em que a função $\mathrm{h}(x) = \sqrt{4 - x^2}$ seja contínua.

Continuidade em intervalos

Definição: Uma função f é dita **contínua em um intervalo aberto *(a, b)*** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto.

Definição: Uma função f será **contínua à direita em um número *a*** se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) f(a) existe;

(ii) $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Definição: Uma função f será **contínua à esquerda em um número *a*** se e somente se forem satisfeitas as três condições a seguir:

(i) f(a) existe;

(ii) $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe;

(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Continuidade em intervalos

Definição: Uma função f é dita **contínua em um intervalo fechado [*a*, *b*]** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto (a, b), contínua à direita em ***a*** e contínua à esquerda em ***b***.

Definição: (i) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semiaberto [a, b) será **contínua em [*a*, *b*)** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto (a, b), contínua à direita em ***a***.

(ii) Uma função cujo domínio inclui o intervalo semiaberto (a, b] será **contínua em (*a*, *b*]** se e somente se ela for contínua em todos os números do intervalo aberto (a, b), contínua à esquerda em ***b***.

Exemplo: Prove que a função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ é contínua em [-2, 2].

Exemplo: Considere a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, se\ x \neq 1 \\ K,\ se\ x = 1 \end{cases}$.

Para qual valor de K essa função será contínua em toda parte.

Exemplo: Encontre os valores de a e b, de modo que a função $f(x) = \begin{cases} -2, se\ x \leq -1 \\ ax + b, se\ -1 < x < 3 \\ 2, se\ x \geq 3 \end{cases}$ seja contínua em toda parte.

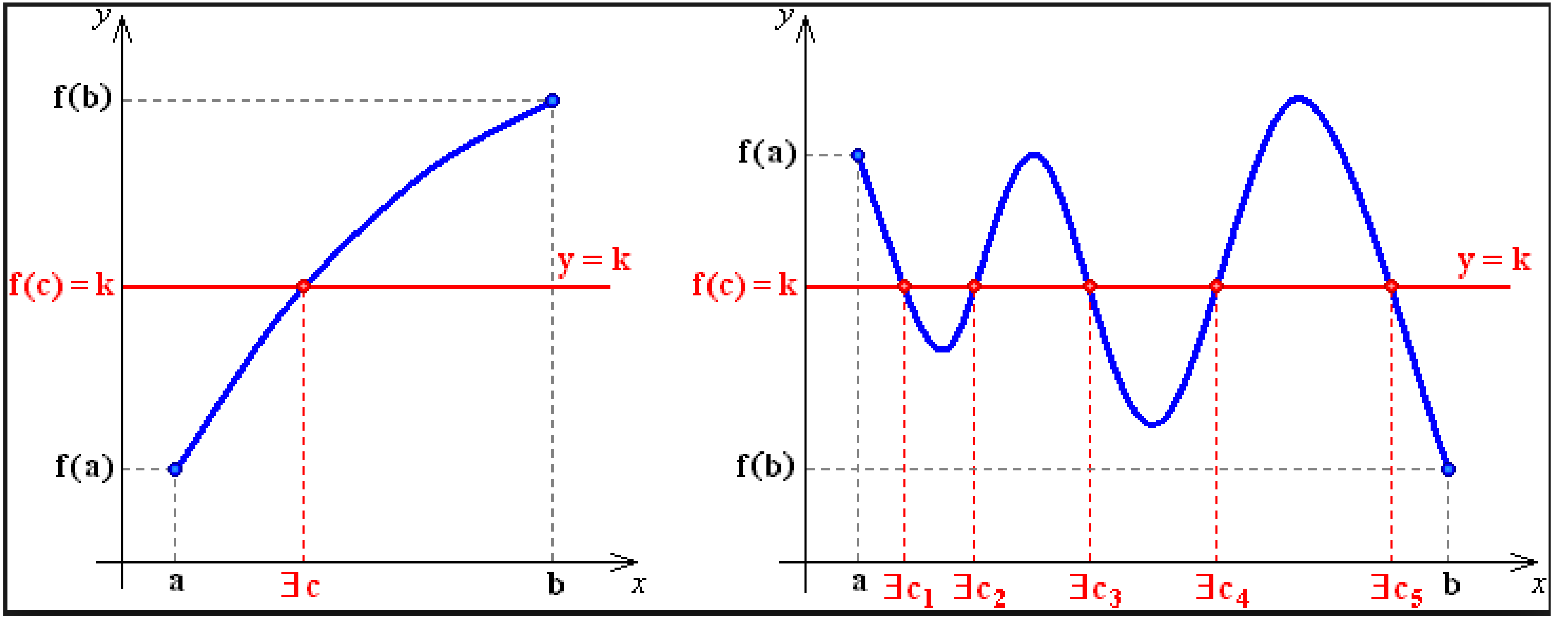
Exemplo: Discuta a continuidade da função h(x)=f(g(x)):

a) $f(x) = x^2$ e $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} - 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x-6}\ e\ g(x) = x^2 + 5$

Teorema do valor intermediário

Se f é uma função contínua num intervalo fechado [a, b] e N é um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um número $x_0 \in (a, b)$ para o qual $f(x_o) = N$.



Exemplo: Verifique se o Teorema do Valor Intermediário se aplica ao intervalo indicado e encontre o valor de c assegurado pelo teorema.

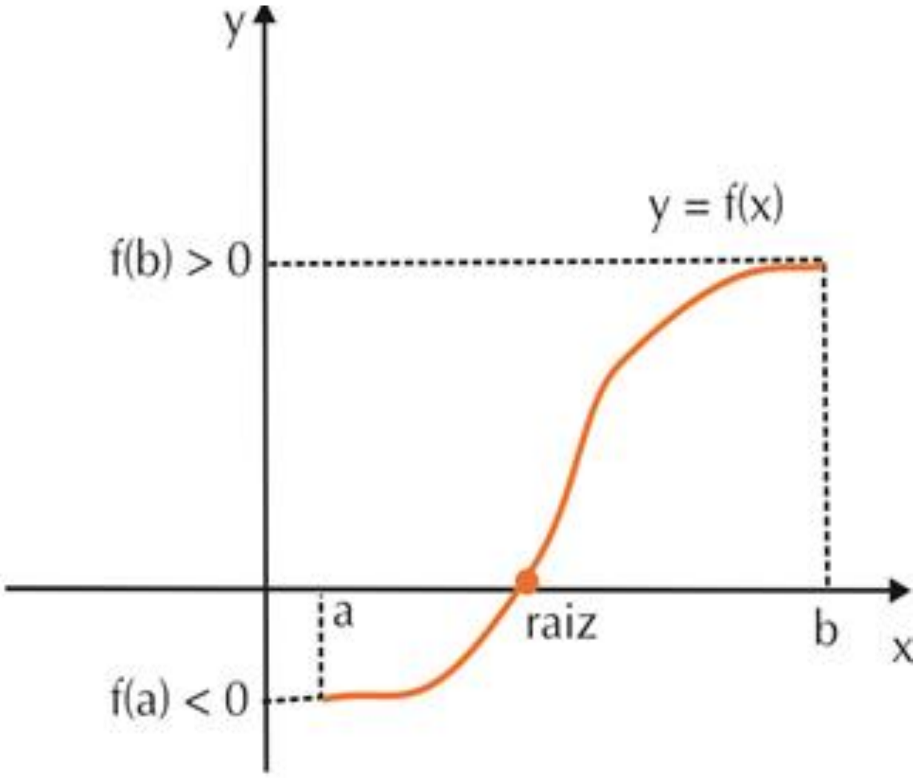
a) $f(x) = x^2 + x + 1,$ $[0; 5]$ $f(c) = 11$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x-1}$ [5/2; 4] f(c)=6

Exemplo: Use o teorema do valor intermediário para mostrar que para todas as esferas com raio no intervalo [1 ; 5], há apenas uma cuja volume é 275 centímetros cúbicos.

Aproximando raízes usando o teorema do valor intermediário

Teorema: Se f for uma função contínua em [a, b], e se f(a) e f(b) forem diferentes de zero com sinais opostos, então existe, no mínimo, uma solução para a equação f(x)=0 no intervalo (a, b).



Exemplo: Use o teorema do valor intermediário e determine o intervalo que contém a raiz da equação $\ln x^x = 1$.