Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Informática

Disciplina Computação Gráfica

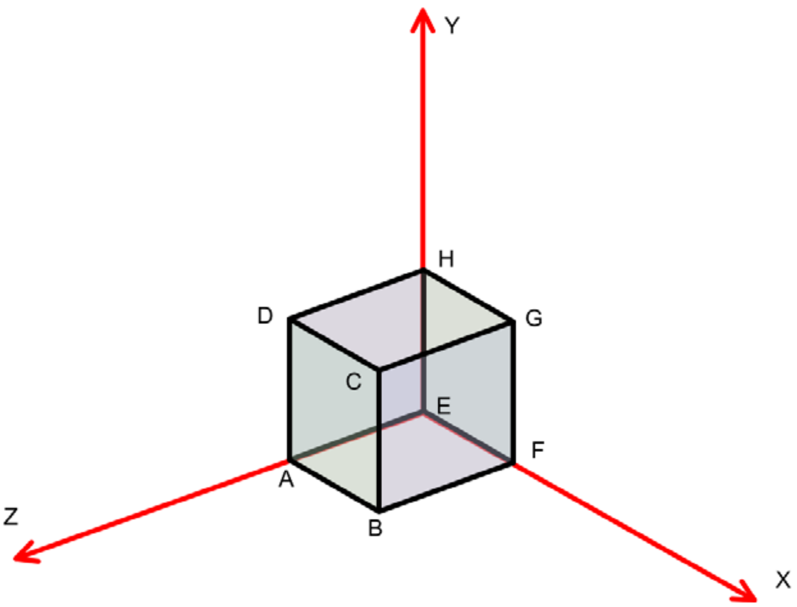
Coletânea de Exercícios

Transformações Geométricas Tridimensionais

2014

Exercício-01

Qual o efeito da transformação de distorção sobre um cubo unitário em que a matriz de distorção é a seguinte:



$$M_{Shear} = \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.85 & 1 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resposta:

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Shear} \,.\, M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & -0.75 & 0.5 & 0 \\ -0.85 & 1 & 1 & 0 \\ -0.25 & 0.7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{Shear} \,.\, M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 0.75 & -0.25 & 0 & 1 & 0.25 & -0.75 \\ 1 & 0.15 & 1.15 & 2 & 0 & -0.85 & 0.15 & 1 \\ 1 & 0.75 & 1.45 & 1.7 & 0 & -0.25 & 0.45 & 0.7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

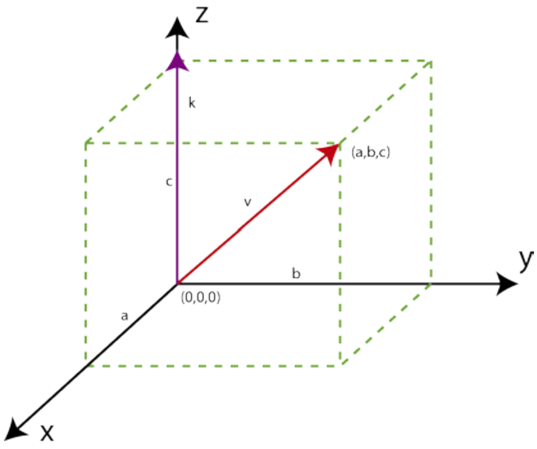
Observe que a origem não foi afetada pela transformação de distorção.

Exercício-02

(Plastock). Determine a transformação que alinha um dado vetor $\vec{v}$ com um vetor $\vec{k}$ao longo do eixo 0z.

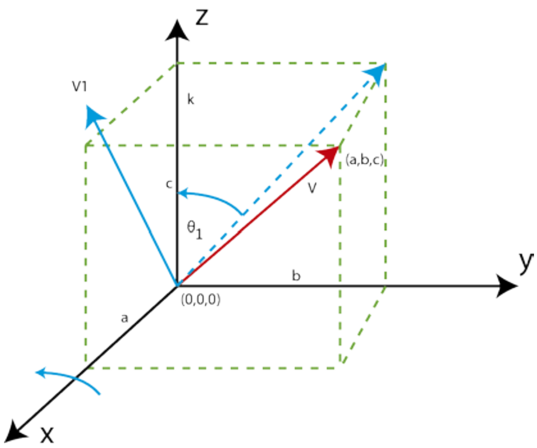
Resposta:

Temos que alinha o vetor $\vec{v}$ com o vetor $\vec{k}$ conforme a figura a seguir:

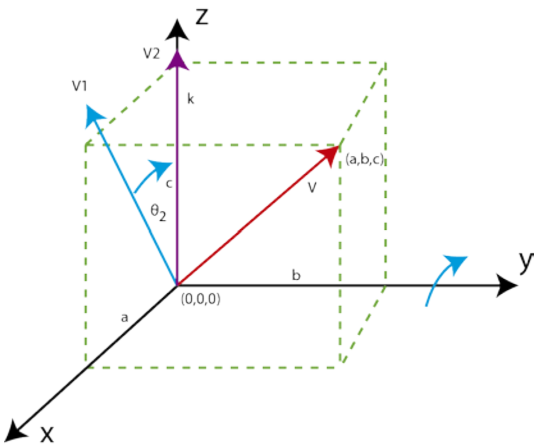


Fazemos o alinhamento através da seguinte sequência de transformações:

a) Rotação de $\vec{v}$ em torno do eixo 0x de um ângulo θ_1, de forma que fique na metade superior do plano x0z (como o vetor $\overrightarrow{v_1}$).



b) Rotação do vetor$\overrightarrow{v_1}$em torno do eixo 0y, de umângulo $-\theta_2$ de forma que coincida com o eixo 0z positivo (como o vetor$\overrightarrow{v_1}$)



$$\cos(\theta_1) = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$sen(\theta_1) = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a matriz de rotação ao vetor $\vec{v}$ resulta o vetor $\overrightarrow{v_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a.1 + 0.0 + 0.0 + 0.1 \\ 0.a + \frac{cb}{\sqrt{b^2+c^2}} - \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} + 0.1 \\ 0.a + \frac{b.b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c.c}{\sqrt{b^2+c^2}} + 0.1 \\ 1.0 + 0.b + 0.c + 1.1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2+c^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deduzindo o passo 2 a partir de 1 vemos a necessidade de uma rotação $-\theta_2$ graus e assim temos

$$sen(-\theta_2) = -sen(\theta_2) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos(-\theta_2) = \cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Então

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Simplificando a matriz temos:

$$|v| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

e

$$\lambda = \sqrt{b^2+c^2}$$

$$R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & 0 & -\frac{a}{|v|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|v|} & 0 & \frac{\lambda}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & -\frac{b}{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = R(\theta_2)R(\theta_1) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & -\frac{ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & -\frac{ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, se b e c são ambos nulos, então $\vec{v} = a.\vec{\iota}$ assim temos:

$$\lambda = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Neste caso só é necessária uma rotação de $\pm$ 90°em torno do eixo0_y,assim, se $\lambda = 0$, temos:

$$R(\theta_y) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & sen(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da mesma forma podemos calcular a transformação inversa que faz o alinhamento do vetor$\vec{k}$com o vetor $\vec{v}$

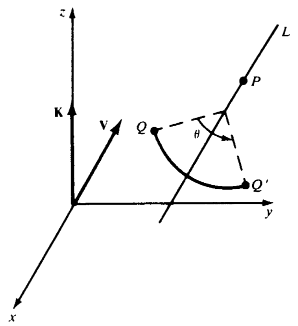
$$A_v^{-1} = \left(R_{-\theta 2,j}.R_{\theta 1,i}\right) = R_{\theta 1,i}^{-1}.R_{\theta 2,j}^{-1} = R_{-\theta 1,i}.R_{\theta 2.j}$$

$$A_v^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & 0 & \frac{a}{|v|} & 0 \\ \frac{-ab}{\lambda|v|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|v|} & 0 \\ \frac{-ac}{\lambda|v|} & \frac{-b}{\lambda} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz é a transposta de A_v

Exercício-03

(Plastock). Seja L um eixo de rotação especificado pelo vetor$\vec{V}$e pela localização do ponto P. Determine à transformação correspondente a rotação de $\theta°$ em torno de L. Observe a figura a seguir:



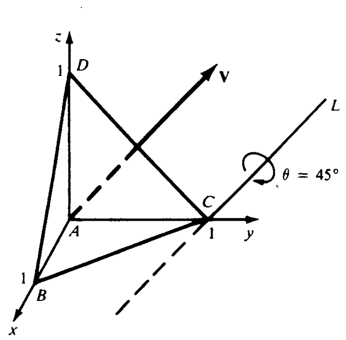
Resposta:

a) Translação de P para a origem
b) Alinhamento do vetor $\vec{V}$ com$\vec{K}$
c) Rotação de $\theta°$em torno de$\vec{K}$
d) Alinhamento do vetor $\vec{K}$ com$\vec{V}$
e) Translação de volta para P

Exercício-04

(Plastock). A pirâmide definida pelas coordenadas A(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0) e D(0,0,1) é rodada de $45°$em torno da linha L que tem direção $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$e que passa pelo ponto C(0,1,0). Determine as coordenadas do objeto rodado.

Resposta:



A partir do problema anterior a matriz de rotação $R_{\theta,L}$pode ser determinada pela concatenação de matrizes

$$R_{\theta,L} = T_{-P}^{-1}.A_v^{-1}.R_{\theta,k}.A_v.T_p$$

Com P = (0,1,0)

$$T_{-P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para o vetor $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$, temos a = 0; b =1 e c =1 achamos $\lambda = \sqrt{2}\ e\ \ |V| = \sqrt{2}$, assim temos as matrizes

$$A_v = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & -\frac{ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso

$$R_{45,k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{-P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

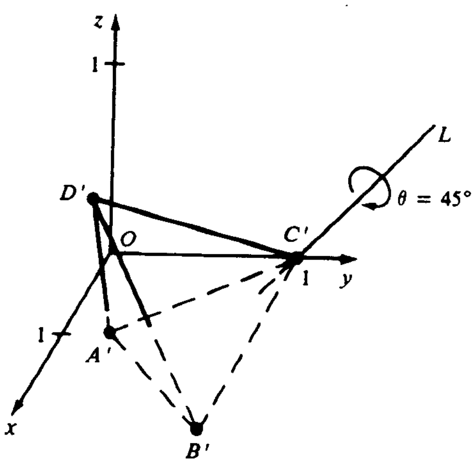
Para determinar as coordenadas do objeto rodado, aplicamos a matriz de rotação $R_{\theta,L}$a matriz das coordenadas homogêneas dos vértices A,B,C e D é a seguinte:

$$C = (A,B,C,D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{4-\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-4}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

As coordenadas após a rotação são:



$$A' = \left(\frac{1}{2}, \quad \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}-2}{4}\right) = (0.5, \quad 0.146, -0.146)$$

$$B' = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \quad \frac{\sqrt{2}-4}{4}\right) = (1.20, \quad 0.646, \quad 0.646\ 0$$

$$C' = (0, 1, 0)$$

$$D^{'} = (1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1) D^{'} = (1, \quad 0.292, \quad 0.707)$$

A' = (0.500, 0.146, -0.146)

B' = (1.200, 0.646, 0.646)

C' = (0.000, 1.000, 0.000)

D' = (1.000, 0.292, 0.707)

Exercício-05

(Plastock). Determine a transformação $A_{v,n}$ que alinha o vetor $\vec{V}$ com $\vec{N}$.

Resposta:

Construímos a transformação em dois passos em primeiro lugar, alinhamos o vetor $\vec{V}$com o Vetor $\vec{K}$; em segundo lugar, alinhamos o vetor $\vec{K}$ com o vetor $\vec{N}$, da seguinte forma;

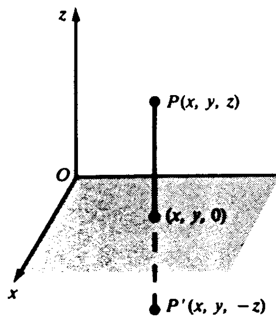
$$A_{v,n} = A_n . A_v$$

Exercício-06

(Plastock). Determine a transformação correspondente a reflexão em relação ao plano $x0y$.

Resposta:

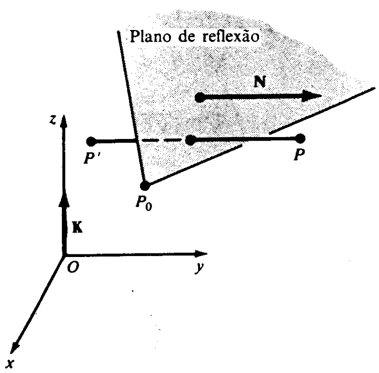
A partir de a figura a seguir é fácil de ver a reflexão de P(x,y,x) é P'(x,y,-z) a transformação que realiza esta operação é :



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercício-07

(Plastock). Determine a transformação correspondente à reflexão em relação a um dado plano.



Resposta:

Seja o plano de reflexão especificado por um vetor normal $\vec{N}$ e um ponto de referência $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Para reduzir esta reflexão a uma reflexão em relação ao plano $x0y$, procede-se do seguinte modo:

a) Translada-se P_0 para origem
b) Alinha-se o vetor normal $\vec{N}$ com o vetor $\vec{K}$ que é normal ao plano $x0y$
c) Faz-se a reflexão em relação ao plano $x0y$
d) Invertem-se os passos 1 e 2

Assim, com o vetor translação:

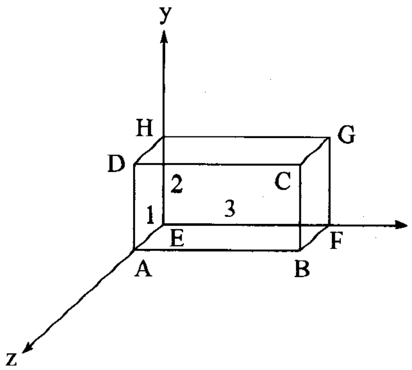
$$\vec{V} = -x_0\vec{\boldsymbol{i}} - y_0\vec{\boldsymbol{j}} - z_0\vec{\boldsymbol{k}}$$

Tem-se:

$$M_{N,P0} = T_v^{-1}.A_N^{-1}.M.A_n.T_v$$

Exercício-08

(ISRD-Group) Considere um paralelepípedo situado com um dos vértices na origem tendo sobre o eixo x comprimento de 3, sobre o eixo y de 2 e sobre o eixo z de 1.



Realize inicialmente uma rotação de 90° sobre o eixo x e uma rotação de 90° sobre o eixo y.

Resposta:

Inicialmente vamos montar a matriz de representação do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora vamos apresentar a matriz de rotação em torno do eixo x de 90

$$R_{x\,90°} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90) & -\sin(-90) & 0 \\ 0 & \sin(-90) & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando

$$R_{x\ 90^\circ}.M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{x\ 90^\circ}.M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora vamos rodar o objeto em relação ao eixo y em 90°. A matriz de rotação pode ser assim expressa:

$$R_{y\emptyset} = \begin{pmatrix} \cos(90) & 0 & \sin(90) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(90) & 0 & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

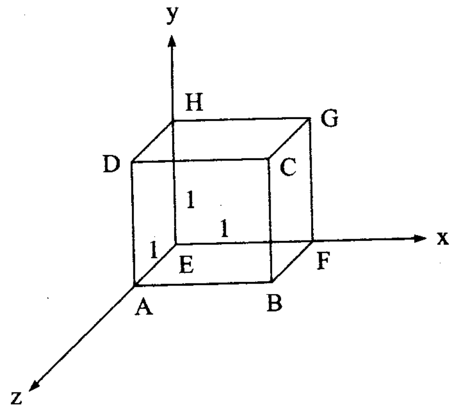
$$R_{y90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y\ 90^\circ}.cubo = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{y\ 90^\circ}.cubo = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-09

(ISRD-Group) Faça a reflexão de um cubo unitário sobre o plano xy.



Resposta:

Vamos montar inicialmente a Matriz do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de reflexão é a seguinte:

$$M_{ref} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

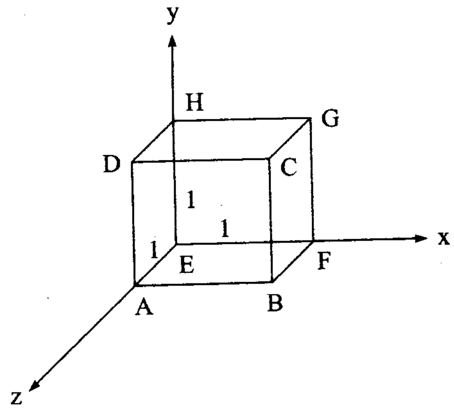
$$M_{ref} \,.\, M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{ref} \,.\, M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{ref} \,.\, M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-10

(ISRD-Group) Realize a transformação de escala uniforme de fator 2 (Sx=Sy) sobre um cubo unitário, conforme a figura a seguir:



Resposta:

Vamos montar inicialmente a Matriz do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de escala é a seguinte:

$$S_{2,2.2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{2,2,2}.M_{cubo} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{2,2,2}.M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Outra forma de resolver este exercício seria valer-se do uso de coordenadas homogêneas e fazer w =1/2, da seguinte forma:

$$S_{w=1/2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$S_{w=1/2}.M_{cubo} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$S_{w=1/2}.M_{cubo} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Note que agora precisamos passar as coordenadas para o sistema cartesiano convencional da seguinte forma:

$$(\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w}, \frac{z'}{w}, \frac{w}{w})$$

$$(\frac{x'}{w}, \frac{y'}{w}, \frac{z'}{w}, 1)$$

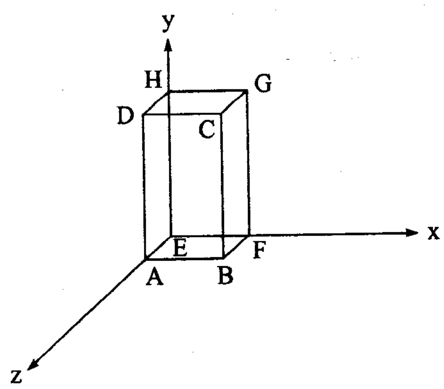
$$x = \frac{x'}{w}, \quad y = \frac{y'}{w}, \quad z = \frac{z'}{w}, \quad 1 = \frac{w}{w}$$

Assim temos a matriz do Cubo para w =1:

$$M_{cubo\,,w=1} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Exercício-11

(ISRD-Group) Dado um paralelepípedo com dimensões de 2 sobre o eixo x em relação a origem, de 3 no eixo y e 1 no eixo z, efetue Realize a transformação de escala com os seguintes fatores: Sx=1/2, Sy=1/3 e Sz=1.



Resposta:

Vamos montar inicialmente a Matriz do objeto

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz de escala é a seguinte:

$$S_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)} \cdot M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-12

(A.P.Godse) Encontre a matriz de reflexão com relação ao plano que passa pela origem e tem o seguinte vetor normal$\vec{N} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Resposta:

Para executar uma reflexão inicialmente trazemos o plano para a origem por meio de uma translação de um ponto conhecido do plano para (0,0,0). Assim, seja o plano de reflexão especificado por um vetor normal $\vec{N}$ e um ponto de referência $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Para reduzir esta reflexão a uma reflexão em relação ao plano $x0y$, procede-se do seguinte modo:

a) Translada-se P_0 para origem
b) Alinha-se o vetor normal $\vec{N}$ com o vetor $\vec{K}$ que é normal ao plano $x0y$
c) Faz-se a reflexão em relação ao plano $x0y$
d) Invertem-se os passos 1 e 2

Assim, com o vetor translação:

$$\vec{V} = -x_0\vec{\boldsymbol{\imath}} - y_0\vec{\boldsymbol{\jmath}} - z_0\vec{\boldsymbol{k}}$$

No entanto este plano já passa pela origem e não é necessário fazer esta translação.

Deste modo as operações

$$M_{x0y,P0} = T_v^{-1}.A_{k,n}^{-1}.M.A_{n,k}.T_v$$

Podem ser reduzidas da seguinte forma:

$$M_{x0y,P0} = A_{k,n}^{-1}.M.A_{n,k}$$

A matriz de alinhamento do vetor V com o vetor K é a seguinte:

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & -\frac{ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com

$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

e

$$\lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$|v| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\lambda = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lembrando quen

$$A_{n,k}^{-1} = A_{k,n}$$

$$A_{n,k}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{x0y,P0} = A_{k,n}^{-1}.M.A_{n,k}$$

Temos

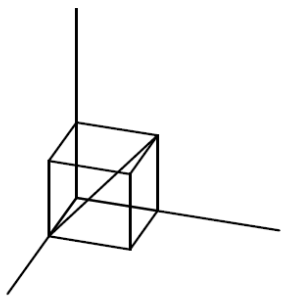
$$M_{x0y,P0} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{x0y,P0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício-12

(A.P.Godse) Um cubo é definido pelos seguintes vértices: A(0,0,0), B(2,0,0), C(2,2,0), D(0,2,0), E(0,0,2), F(2,0,2), G(2,2,2) e H(0,2,2) é rotacionado de 45 graus sobre o eixo L formado pelos pontos P(2,0,0) e Q(0,2,2). Mostre as novas coordenadas do cubo.

Resposta:



$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = T_{-P}^{-1}.A_v^{-1}.R_{\theta,k}.A_v.T_p$$

Translação de P(2,0,0) para origem

$$T_{-P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PQ=(0-2), (2-0),(2-0) $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Para o vetor $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$,temos a = -2; b =2 e c =2 achamos $\lambda = \sqrt{8}\ e\ |V| = \sqrt{12}$, assim temos as matrizes

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{|v|} & \frac{-ab}{\lambda|v|} & -\frac{ac}{\lambda|v|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & \frac{-b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|v|} & \frac{b}{|v|} & \frac{c}{|v|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso

$$R_{45,k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{-P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = T_{-P}^{-1}.A_v^{-1}.R_{\theta,k}.A_v.T_p$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L} = \begin{pmatrix} 0.8047378541244 & -0.5058793634017 & 0.310617217526 & 0.3905242917513 \\ 0.310617217526 & 0.8047378541244 & 0.5058793634017 & -0.6212344350521 \\ -0.5058793634017 & -0.310617217526 & 0.8047378541244 & 1.0117587268034 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

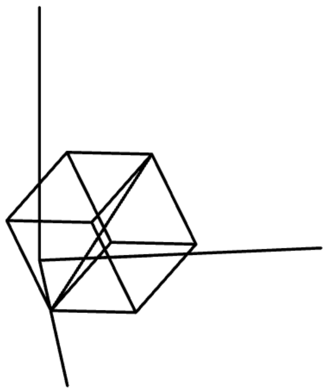
Para determinar as coordenadas do objeto rodado, aplicamos a matriz de rotação $R_{\theta,L}$a matriz das coordenadas homogêneas dos vértices A,B,C e D é a seguinte:

$$M_{cubo} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{1}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}+1}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} \frac{4-2\sqrt{2}}{3} & 2 & \frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3} & \frac{2\sqrt{2}+2}{3} & 0 \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}+2}{3} & \frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3} & 2 \\ \frac{\sqrt{6}+2-\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3} & \frac{4-2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+4}{3} & \frac{2\sqrt{2}+2}{3} & \frac{\sqrt{2}+4-\sqrt{6}}{3} & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,L}.C = \begin{pmatrix} 0.3905242917513 & 2 & 0.9882412731966 & -0.6212344350521 & 1.0117587268034 & 2.6212344350521 & 1.6094757082487 & 0 \\ -0.6212344350521 & 0 & 1.6094757082487 & 0.9882412731966 & 0.3905242917513 & 1.0117587268034 & 2.6212344350521 & 2 \\ 1.0117587268034 & 0 & -0.6212344350521 & 0.3905242917513 & 2.6212344350521 & 1.6094757082487 & 0.9882412731966 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



A’ = (0.39, -0.62, 1.01)

B’ = (2, 0, 0)

C’ = (0.98, 1.60, -0.62)

D’ = (-0.62, 0.98, 0.39)

E’ = (1.01, 0.39, 2.62)

F’ = (2.62, 1.01, 1.60)

G’ = (1.60, 2.62, 0.98)

H’ = (0, 2, 2)

Referencias

GODSE, A. P. **Computer graphics**. PUNI: Technical Publications Pune, 2009.

HEARN, Donald; BAKER, Pauline M. **Computer graphics**: C version. New Jersey: PrinticeHall, 1986.

PLASTOCK, R. A.; KALLEY, G. **Computação gráfica**. São Paulo: McGraw Hill, 1986.

ROGERS, D. F.; ADAMS, J. A. **Mathematical elements for computer graphics**.New York: McGRAW-HILL, 1990

SCHNEIDER, Philip J.; EBERLY, David H. **Geometric tools for computer graphics**. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 2003.

VINCE, J. **Geometry for computer graphics**: formulae, examples & proofs. London: Spring, 2005.

VINCE, J. **Essential computer animation fast**. London: Spring, 1999.

XIANG, Z.; PLASTOCK R. **Computer graphics**. New York: McGRAW-HILL, 1992.