Ciclos Eulerianos e o Problema do Carteiro Chinês
5189-32

Rodrigo Calvo
rcalvo@uem.br

Departamento de Informática – DIN
Universidade Estadual de Maringá – UEM

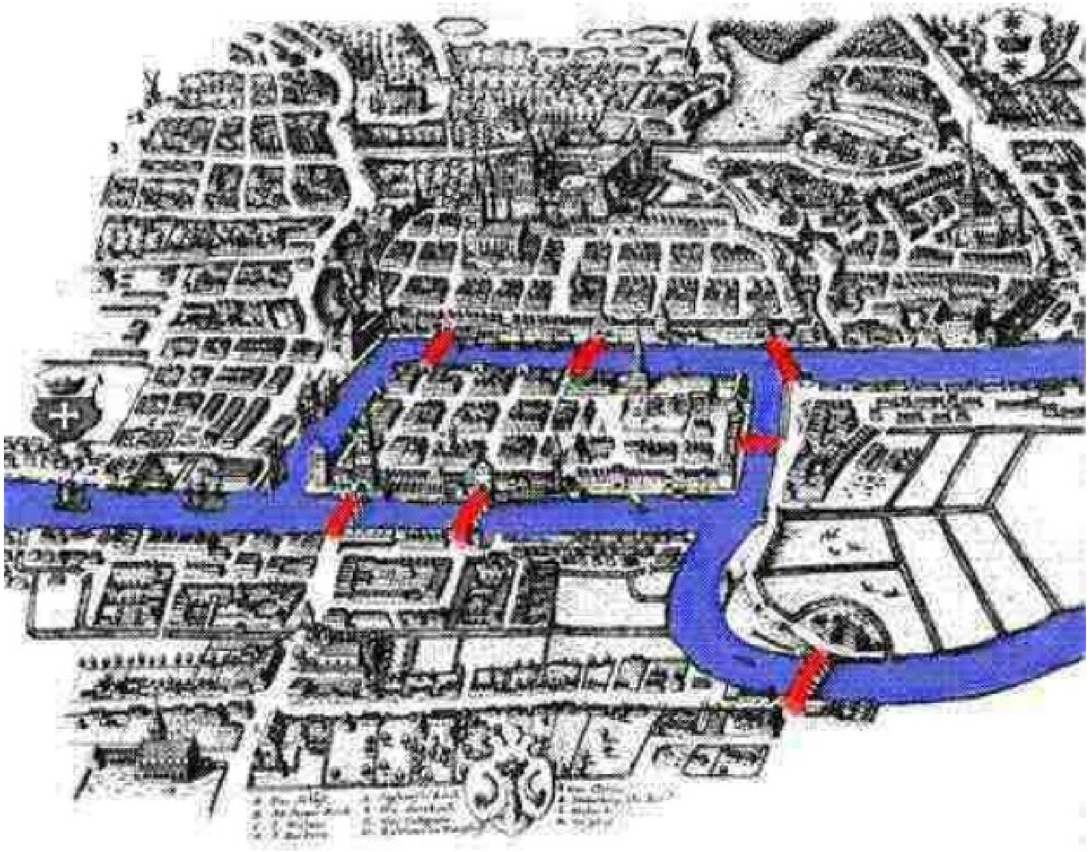
1° semestre de 2016

Introdução

- Século XVIII - cidade de Königsberg (Prússia, atual Kaliningrado Rússia)
- O rio Pregel com duas ilhas passava pela cidade. Havia uma pontee entre as duas ilhas
- A primeira ilha possuía 4 pontes (2 para cada margem do rio).
- A segunda ilha possuía 2 (1 para cada margem do rio)
- Durante um desfile, os habitantes não gostariam de passar mais de uma vez sobre cada ponte --> "As Sete Pontes de ¨Königsberg"
- O matemático Leonhard Euller foi chamado para resolver o problema.

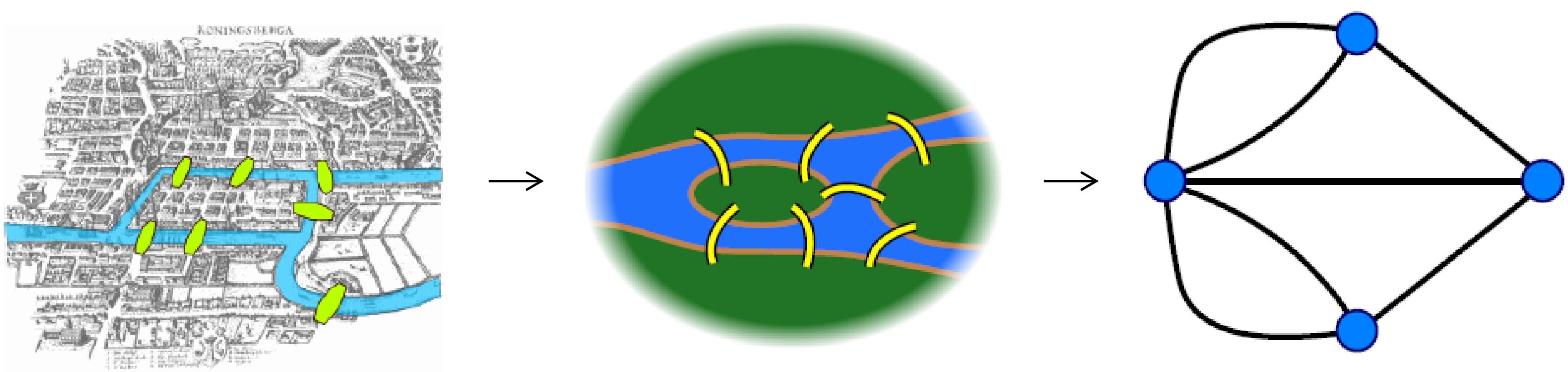
Problema das 7 pontes

- É possível encontrar um trajeto (caminho) que passa em cada uma das 7 pontes de Königsberg exatamente uma vez ?



Problema das 7 pontes

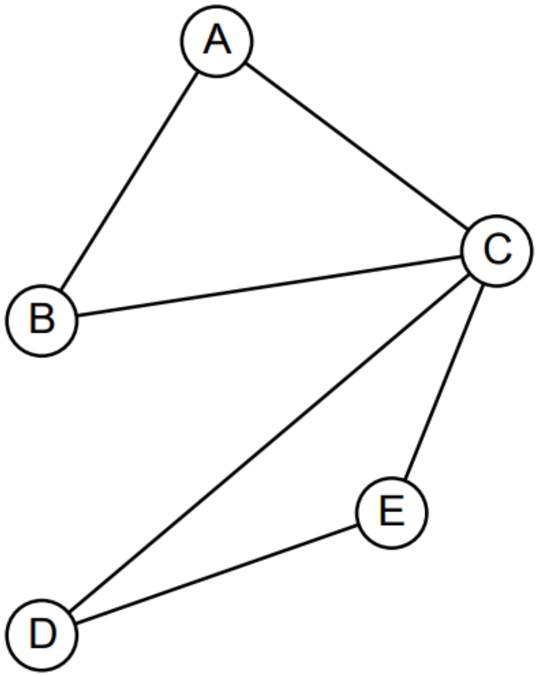
- Leonhard Euler abstraiu o problema e gerou uma topologia para representar os pontos de interesse da cidade
- Euler provou que era impossível encontrar uma solução, pois, ao transformar o mapa em um grafo, onde as ilhas e o continente são os vértices e as pontes arestas, notou que os vértices possuíam grau ímpar.

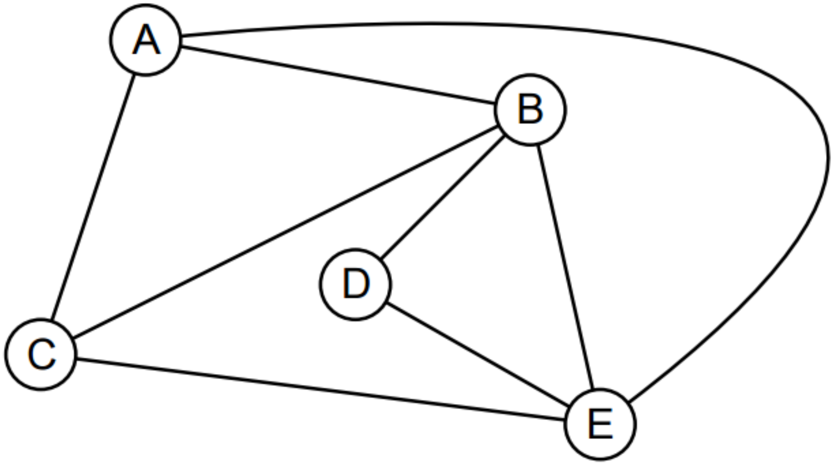


Ciclo e caminho eulerianos

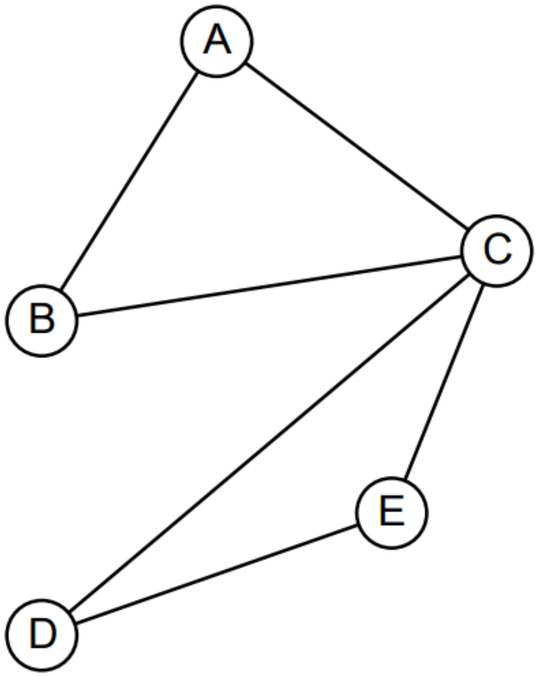
- Um **ciclo euleriano** (caminho euleriano) é um ciclo (caminho) que usa cada aresta do grafo exatamente uma vez
- Um grafo que contém um ciclo euleriano é chamado de **grafo euleriano**
- Um grafo que contém um caminho euleriano, mas não contém um ciclo euleriano é chamado de **grafo semi-euleriano**

Ciclo e caminho eulerianos

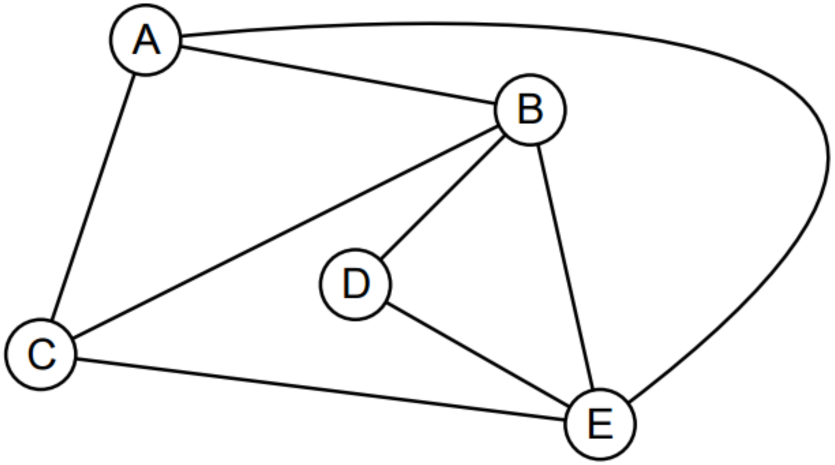




Ciclo e caminho eulerianos



Ciclo Euleriano: A, C, D, E, C, B, A



Caminho Euleriano: A, B, D, E, B, C, E, A, C

Propriedades

- Lema 1
  - Dado um grafo não orientado conexo $G = (V, E)$ com todos os vértices de grau par, então qualquer par de vértices $u, v \in G$ faz parte de um ciclo sem arestas repetidas.

Propriedades

- Prova (por contradição)
  - Suponha que exista um par de vértices $u, v \in G$ que não admita um ciclo em comum. Como o grafo é conexo, então existe um caminho p tal que $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$. Isto implica que deve existir uma aresta (x, y) no caminho p cuja a remoção torna o grafo desconexo, caso contrário existiria um outro caminho alternativo $u \overset{P'}{\rightsquigarrow} v$ disjunto de p. A remoção da aresta (x, y) gera duas componentes, sendo que x e y pertencem a componentes distintas. Desta forma, x e y são os únicos vértices de grau ímpar na sua componente, mas isto é uma contradição, pois o número de vértices de grau ímpar em um (sub)grafo deve ser par.

Propriedades

- Teorema 1
  - Um grafo não orientado conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par.

- Prova (ida)
  - Seja $G = (V, A)$ um grafo euleriano e seja p um ciclo euleriano de G. Cada ocorrência de um vértice $v \in V$ em p, implica uma aresta que chega em v e uma aresta que sai de v. Como todas as arestas de A fazem parte de p, o número de arestas incidentes em cada vértice é par.

Propriedades

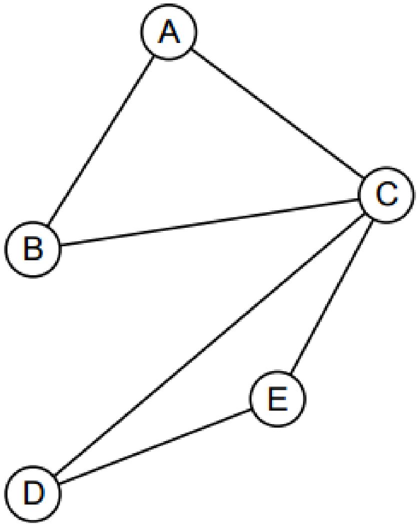
- Prova (volta)
  - Seja $G = (V, A)$ um grafo com todos os vértices de grau par. Na construção de um caminho em G sempre é possível chegar e sair de um vértice por arestas ainda não utilizadas. Ou seja, é possível construir um ciclo arbitrário C a partir de um vértice qualquer v (Lema 1). Se C contém todas as arestas de G, temos um ciclo euleriano. Senão, construímos um grafo G' , tal que $G'.A = G.A -$ arestas de C. Em G' todos os vértices tem grau par, e pelo menos um vértice de C está em $G'.V$ e tem grau maior que 0 (senão o grafo não seria conexo). Recomeçamos este processo para o grafo G' , começando com um vértice $v' \in$ C com grau maior que 0 e construímos um ciclo C' . Os ciclos C e C' podem ser unidos para formar um único ciclo. Continuando este processo até acabar as arestas do grafo, obteremos necessariamente um ciclo único que contém todas as arestas de G.

Algoritmo de Hierholzer

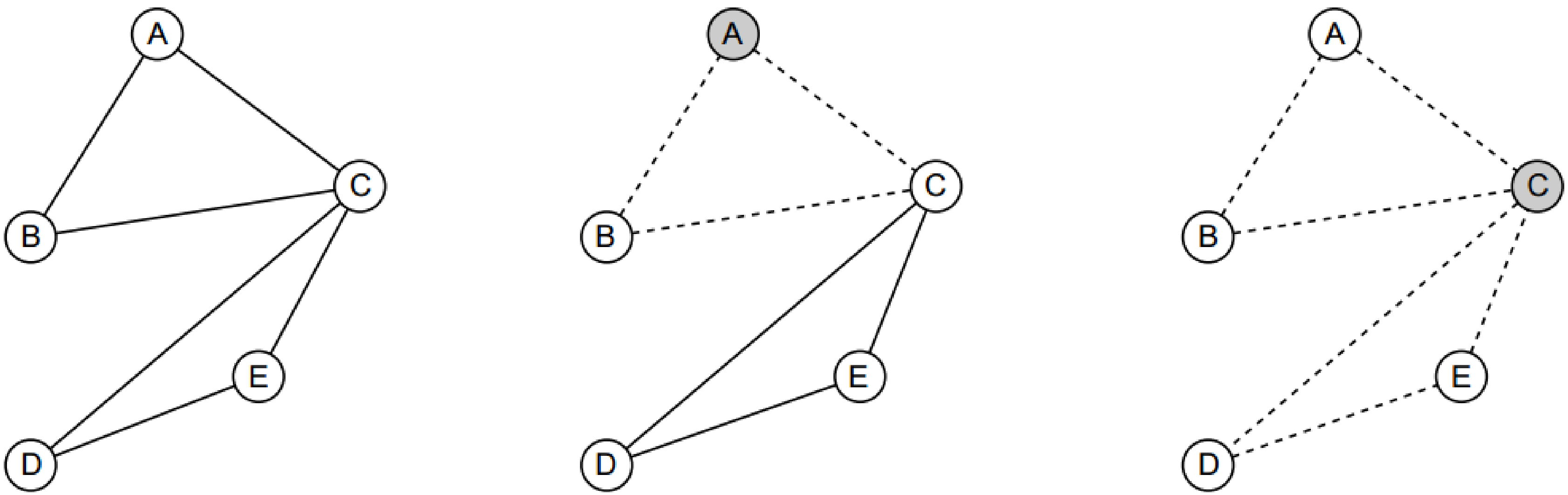
```
hierholzer-1(G)
G′ = (G.V, G.A)
v0 = um vértice de G
C = caminho contendo apenas v0
while G′.A ≠ Ø
  u = vértice em C tal que degree(u) > 0 em G
  U = ciclo em G′ que contém u
  C = C substituindo u por U
  G′.A = G.A - arestas de U
return C
```

•O procedimento **hierholzer-1** foi derivado diretamente da prova do Teorema 1, e por isto, podemos verificar facilmente que ele é correto. No entanto, a sua implementação é um pouco trabalhosa.

Execução do Algoritmo de Hierholzer



Execução do Algoritmo de Hierholzer



Vértice selecionado: A
Ciclo atual: A
Ciclo criado: A, B, C, A
Junção dos ciclos: A, B, C, A

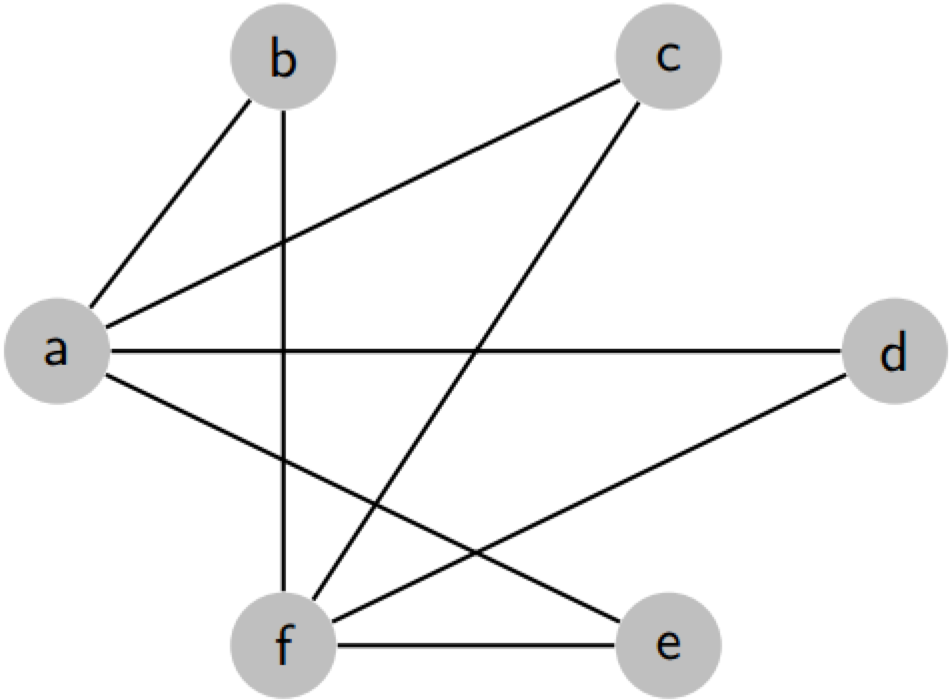
Vértice selecionado: C
Ciclo atual: A, B, C, A
Ciclo criado: C, E, D, C
Junção dos ciclos:
A, B, C, E, D, C, A

Algoritmo de Hierholzer

```
hierholzer-2(G)
C = ∅
E = G.A
v = vértice qualquer de G.V
C = C ∪ {v}
while E ≠ ∅
  if não existe nenhuma aresta (v, w) em E
    escolha um vértice v ∈ C tal que exista (v, w) ∈ E
  escolha uma aresta (v, w) ∈ E
  C = C ∪ {w}
  v = w
  E = E − (v, w)
return C
```

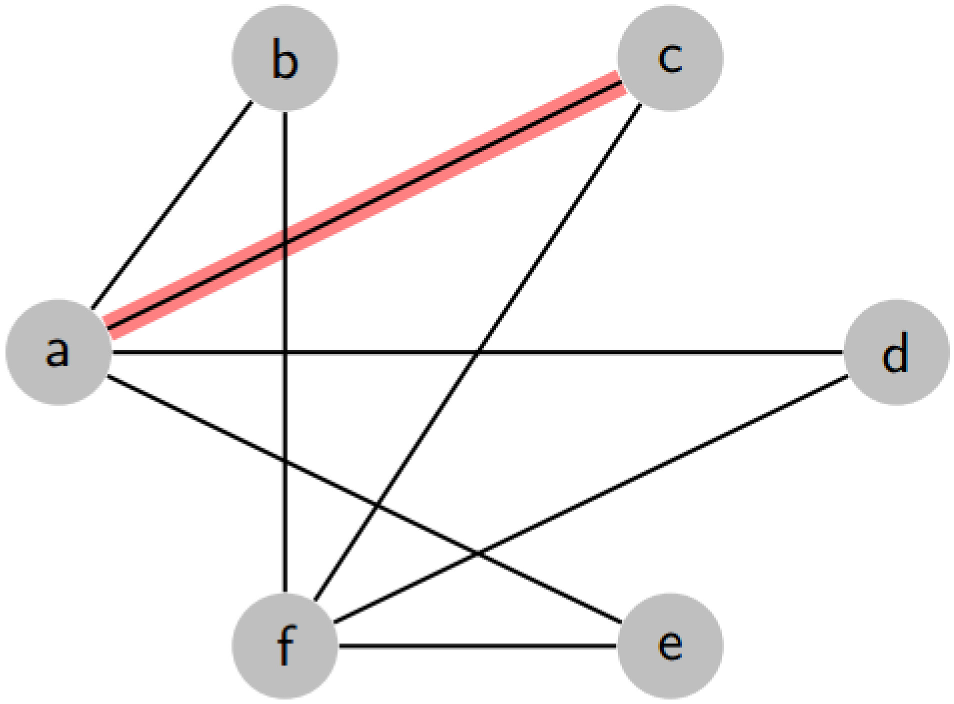
•Claramente, o consumo de tempo do algoritmo **hierholzer-2** é proporcional ao número de arestas do grafo *G*.

Execução do Algoritmo de Hierholzer



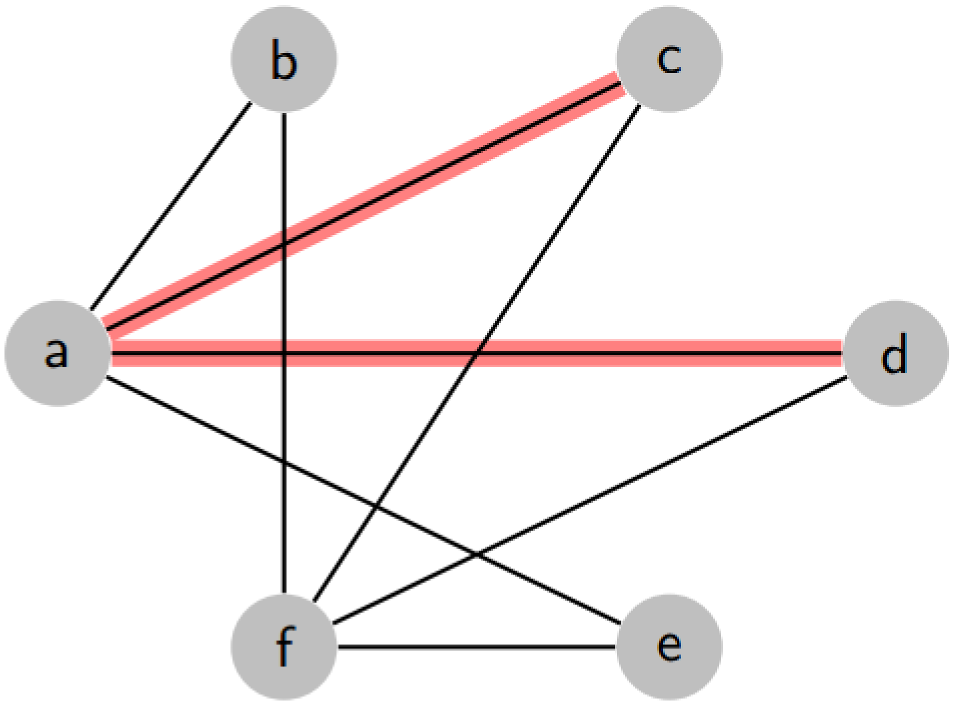
$C = (c$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



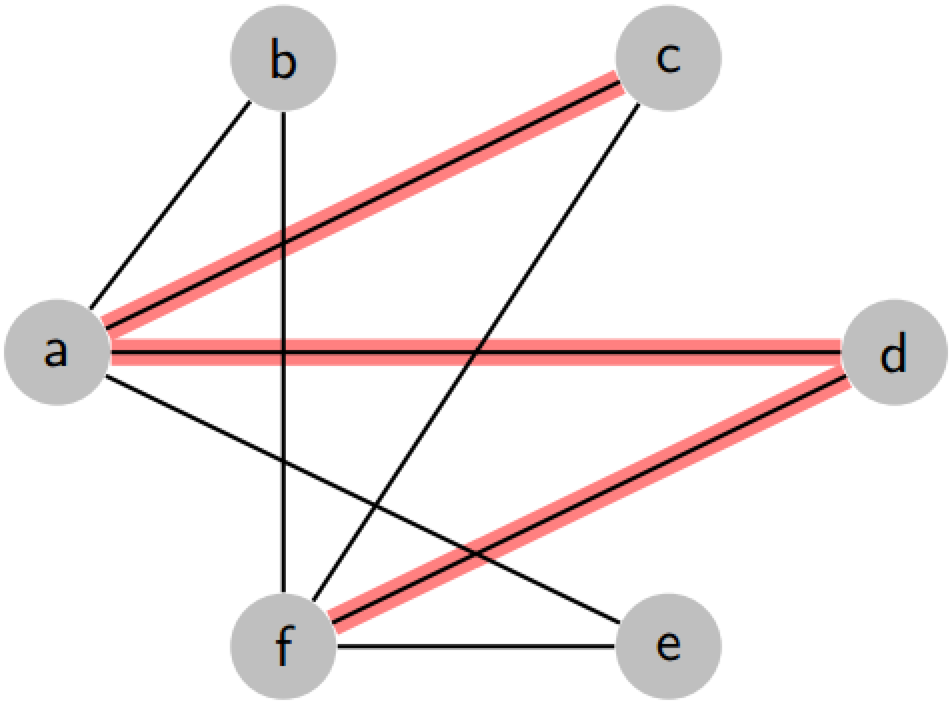
$C = (c, a$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



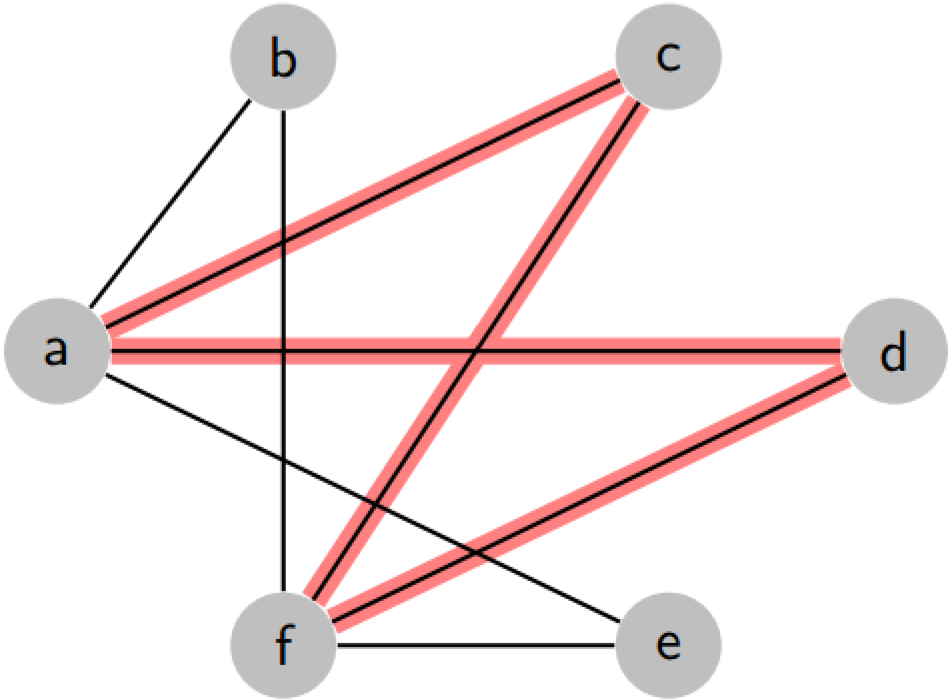
$C = (c, a, d$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



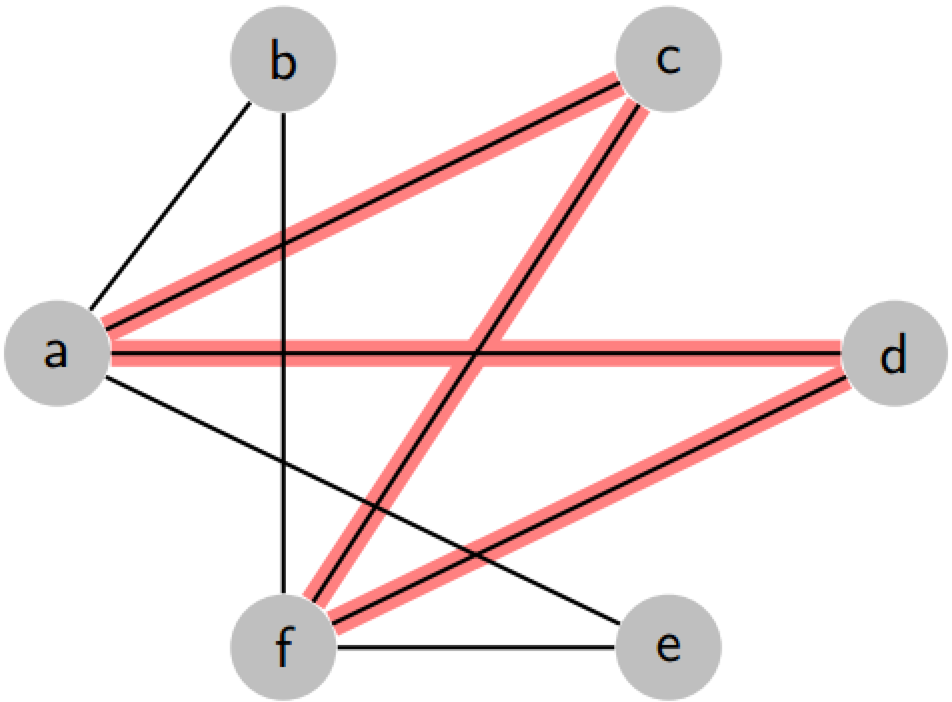
$$C = (c, a, d, f$$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



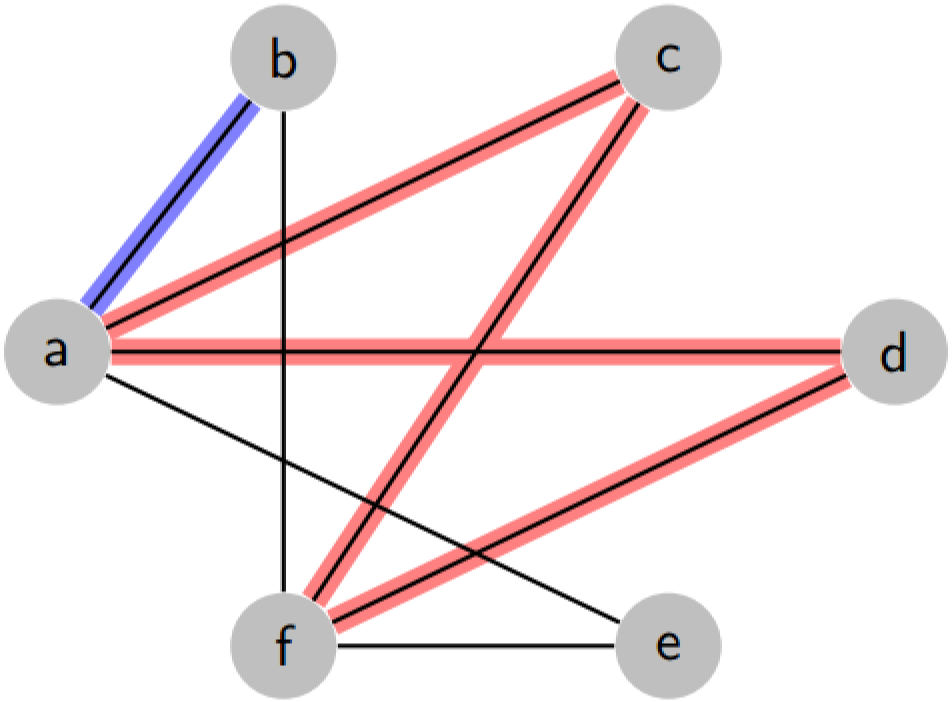
$$C = (c, a, d, f, c)$$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



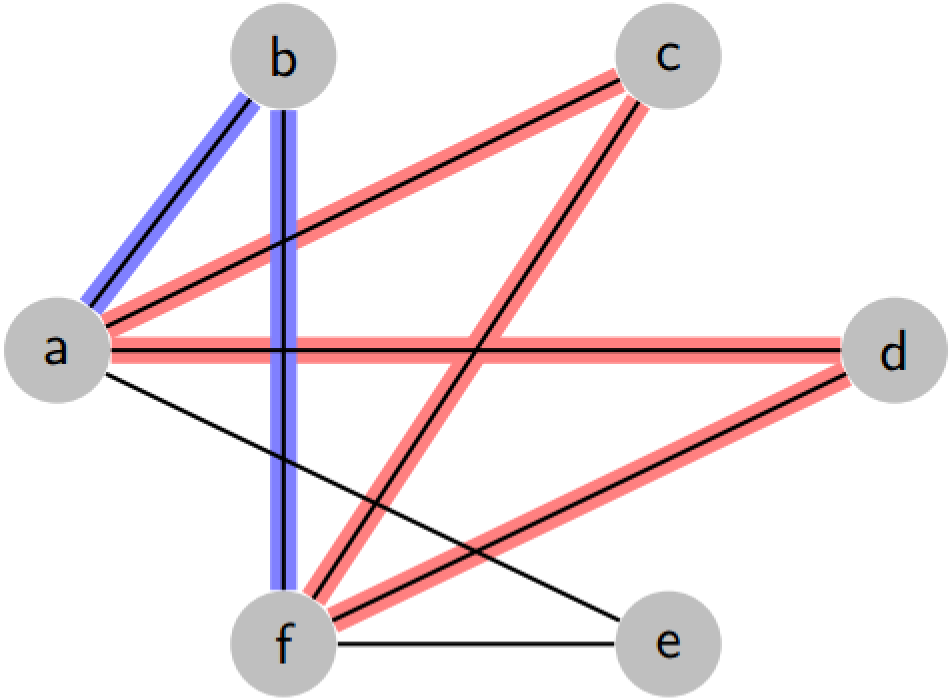
$$C = (c, a, d, f, c)$$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



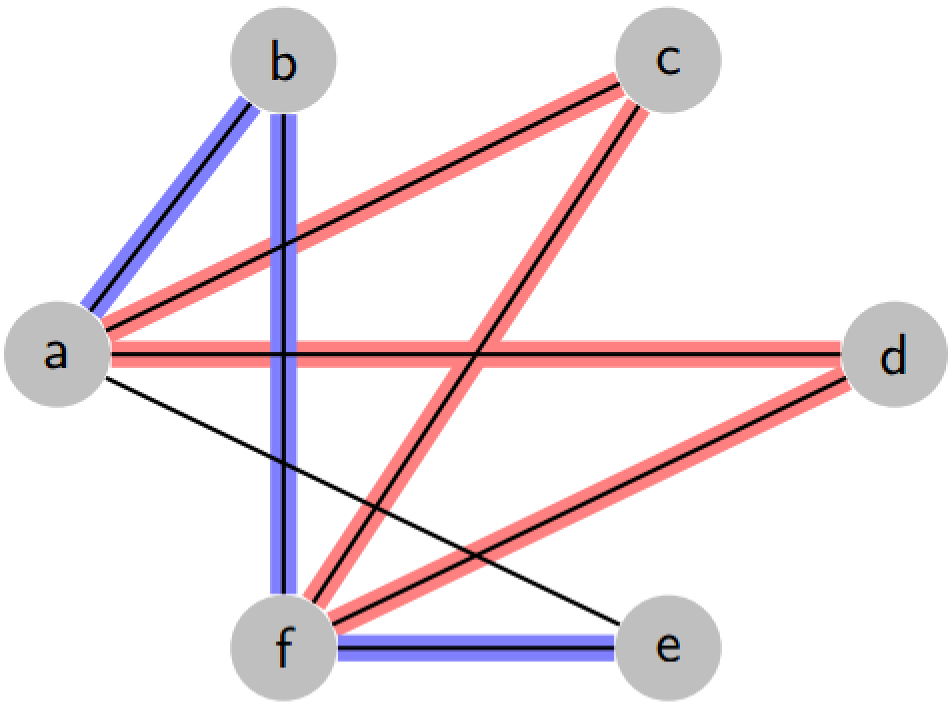
$$C = (c, a, b, d, f, c)$$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



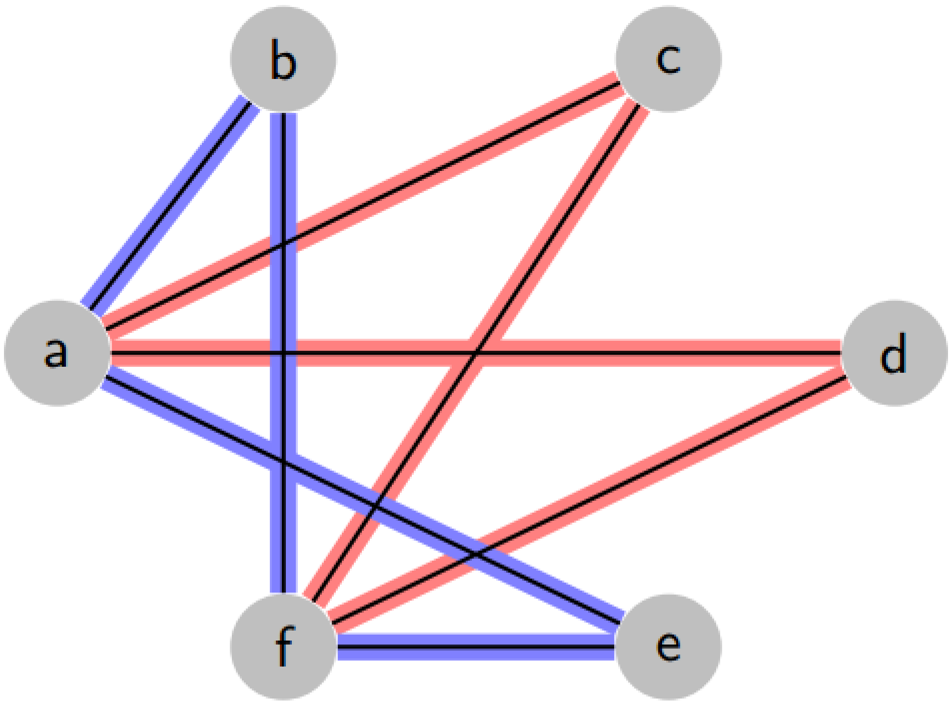
$$C = (c, a, b, f, d, f, c)$$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



$$C = (c, a, b, f, e, d, f, c)$$

Execução do Algoritmo de Hierholzer



$$C = (c, a, b, f, e, a, d, f, c)$$

Problema do Carteiro Chinês

- Forte relação com o problema das 7 pontes
- Dado um grafo conexo com peso nas arestas, **o problema do carteiro chinês** consiste em encontrar um ciclo de peso mínimo que passe por cada aresta pelo menos uma vez
- Aplicações
  - Entrega de correspondência
  - Coleta de lixo
  - Nebulização no combate a dengue

Problema do Carteiro Chinês

- Grafo euleriano
  - Aplicar o algoritmo de Hierholzer

Problema do Carteiro Chinês

- Grafo não euleriano
  - Transformar o grafo em euleriano adicionando arestas artificiais e aplicar o algoritmo de Hierholzer
  - Se o grafo for semi-euleriano, adicionar uma aresta artificial que representa o caminho mínimo entre os dois vértices de grau ímpar (o caminho mínimo pode ser encontrado usando o algoritmo de Dijkstra)
  - Se o grafo tiver 4 ou mais vértices de grau ímpar
    - Montar um grafo completo com os vértices de grau ímpar, onde cada aresta representa o menor caminho entre o par de vértices (algoritmo de Floyd-Warshall)
    - Encontrar a melhor combinação de pares de vértices (emparelhamento perfeito, algoritmo de Edmonds de complexidade polinomial)

Bibliografia

- Caminho euleriano. Wikipédia. https://en.wikipedia.org/wiki/Eulerian_path

- Problema do carteiro chinês. Wikipédia. https: //en.wikipedia.org/wiki/Route_inspection_problem