



Lista de Exercícios

1. Novos blocos estão surgindo em nossa universidade. A universidade contratou pedreiros, eletricitas, encanadores, e um programador de computador. Um programador de computador? Sim, você foi contratado para garantir que cada edifício esteja ligado a qualquer outro edifício (direta ou indiretamente) por meio de cabos de comunicação. Foi lhe dado um mapa do campus (ver Figura 1), que mostra a localização de todos os edifícios e os respectivos custos para se passar os cabos de comunicação. Sua tarefa é determinar onde instalar os novos cabos tal que todos os edifícios fiquem conectados. Claro, a universidade quer que você minimize o custo, ou não sobrar recursos para a construção do RU. Dada sua situação, que algoritmo será usado para resolver o problema e qual a ordem em que as arestas serão escolhidas conforme o algoritmo adotado? Em casos de empate nos pesos, considerar ordem lexicográfica das arestas (por exemplo, a aresta (a, d) seria escolhida antes da aresta (b, c)).

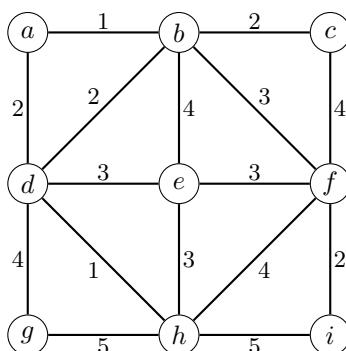


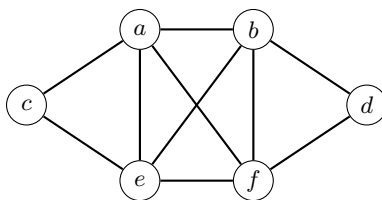
Figura 1: Mapa do campus.

2. Dado o grafo completo representado por matriz de adjacência a seguir:

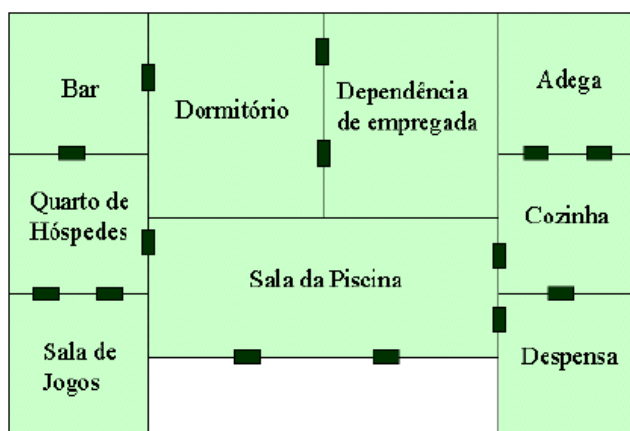
	A	B	C	D	E	F
A	0	6	9	11	5	9
B	6	0	3	6	5	2
C	9	3	0	0	4	4
D	11	6	0	0	5	6
E	5	5	4	5	0	8
F	9	2	4	6	8	0

- (a) Determine uma árvore geradora mínima usando o algoritmo de Kruskal.
- (b) Determine uma árvore geradora mínima usando o algoritmo de Prim, começando em F.
3. No algoritmo de Kruskal usamos uma estrutura de dados para manipular conjuntos disjuntos. Esta estrutura de dados possui as operações **make-set**(v), **find-set**(v) e **union**(u, v). Informe como podemos usar esta estrutura de dados para:
- (a) Computar os componentes conexos de um grafo.
- (b) Dados dois vértices quaisquer, efetuar uma consulta de maneira eficiente para saber se os vértices pertencem ao mesmo componente conexo.
4. Professor Borden propôs um novo algoritmo de divisão e conquista para computar árvores geradoras mínimas, que funciona como segue. Dado um grafo $G = (V, E)$, particione o conjunto de vértices V em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $|V_1|$ e $|V_2|$ diferem em no máximo 1. Seja E_1 o conjunto de arestas que são incidentes somente nos vértices em V_1 e E_2 é o conjunto de arestas que são incidentes somente nos vértices em V_2 . Recursivamente resolva o problema de árvore geradora mínima em cada um dos sub-grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$. Finalmente selecione a aresta com peso mínimo em E que cruza o corte (V_1, V_2) , e use esta aresta para unir as duas árvores geradoras resultantes em uma única árvore geradora mínima. Argumente que o algoritmo computa corretamente a árvore geradora mínima de G ou forneça um exemplo em que o algoritmo falha. [CLRS 23.2-8]
5. O professor Sabatier supõe a recíproca do teorema 23.1 dada a seguir. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado com uma função peso de valor real w definida em E . Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima para G , seja $(S, V - S)$ qualquer corte de G que respeita A , e seja (u, v) uma aresta segura para A que cruza $(S, V - S)$. Então (u, v) é uma aresta leve para o corte. Mostre que a hipótese do professor é incorreta, fornecendo um contra-exemplo. [CLRS 23.1-2]

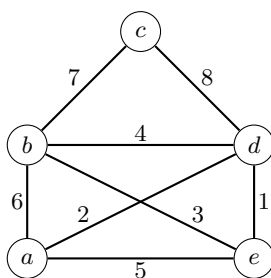
6. Forneça um exemplo simples de um grafo conexo tal que o conjunto de arestas $\{(u, v) : \text{existe um corte } (S, V - S) \text{ tal que } (u, v) \text{ é uma aresta leve cruzando } (S, V - S)\}$ não forma uma árvore geradora mínima. [CLRS 23.1-4]
7. Explique o funcionamento do algoritmo de Hierholzer para o grafo a seguir. Informe o circuito euleriano se houver.



8. O cenário abaixo é a residência do bilionário Count Van Diamond, que acaba de ser assassinado. Sherlock Gomes (um conhecido detetive que nas horas vagas é um estudioso da teoria dos grafos) foi chamado para investigar o caso. O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida deixar aquela sala pela mesma porta que havia entrado. O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa. Sherlock Gomes avaliou a planta da residência (conforme figura abaixo) e em poucos minutos declarou solucionado o caso. Quem poderia ser o suspeito indicado por Sherlock Gomes? Qual o raciocínio utilizado pelo detetive para apontar o suspeito?



9. Resolva o Problema do Carteiro Chinês para o grafo a seguir. Qual o custo total e o caminho a ser percorrido? Agora considere a remoção da aresta (b, d) . Explique como resolver o problema e qual o custo total.



10. Considerando o algoritmo para resolver o problema do Carteiro Chinês, se temos apenas dois vértices com grau ímpar, então existe apenas uma maneira de combiná-los (adicionamos uma aresta artificial conectando os dois vértices). Para um grafo com mais de dois vértices de grau ímpar, precisamos descobrir qual a melhor maneira de combinar os pares de vértices. Suponha um grafo com quatro vértices em que cada vértice tem grau três. Desenhe todas as possibilidades de efetuar as combinações. E para os casos com mais de quatro vértices com graus ímpares? Você consegue estabelecer uma fórmula que indique quantas combinações possíveis existem?
11. Construa um grafo onde os vértices são pontos num plano e suponha que existe uma aresta entre dois pontos quaisquer com peso igual a distância euclidiana.
- Mostre que no seu grafo o a heurística do vizinho mais próximo não funciona.
 - Execute o algoritmo 2-aproximado visto em aula.
 - Quão longe do ótimo ficou a solução do algoritmo aproximado?