Provando que o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence à classe NP-Completo

Cristiano C. Matte, Jonas C. Meinerz

Resumo

O problema do ciclo hamiltoniano é estudado há mais de uma centena de anos e, por ser um problema da classe NP-Completo, tem uma importância teórica muito grande para a ciência da computação: uma nova descoberta quanto a este problema significa uma nova descoberta para toda a classe de problemas na qual está inserido. Esta dissertação aprensetará a prova de que o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados (futuramente, por conveniência, o problema pode ser referido apenas como "problema do ciclo hamiltoniano") é, de fato, um problema da classe NP-Completo.

1 Introdução

Dizer que um problema pertence à classe NP-Completo significa dizer que este problema é tão difícil quanto qualquer problema em NP ($Cormen$), sendo NP a classe dos problemas verificáveis em tempo polinomial ($Cormen$).

O problema abordado neste artigo orienta-se da seguinte maneira: Seja G um grafo orientado tal que $G = (V, E)$, dizemos que G é um grafo hamiltoniano se e somente se G possui um ciclo hamiltoniano. Por sua vez, um ciclo hamiltoniano consiste em um ciclo simples (i. e., um ciclo que visita no máximo uma vez cada vértice em V) de um grafo orientado onde tal ciclo contém todos os vértices em V (i.e., a diferença entre V e V_2, sendo V_2 o conjunto de vértices presentes no ciclo, resultaria em um conjunto vazio).

Para mostrar que o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados é um problema pertencente à classe NP-Completo, devemos apresenter a prova de que existe um algoritmo de verificação em tempo polinomial para este problema, mostrando que o mesmo pertence à classe NP, e então, que existe um algoritmo que execute em tempo polimonial e faça a redução de um problema NP-Completo ao problema do ciclo hamiltoniano, o que mostraria que o problema do ciclo hamiltoniano está inserido na classe de problemas NP-Difícil. Se de fato demonstrarmos que o problema em questão pertence à NP e NP-Difícil, então estaríamos demonstrando que o mesmo pertence à classe NP-Completo.

2 Verificação em tempo polinomial

Precisamos de uma maneira de verificar se há ou não um ciclo hamiltoniano em um grafo, ou seja, um algoritmo que diga "sim"caso haja tal ciclo ou "não"caso contrário. É fácil perceber esse problema como um problema de aceitação ou rejeição de uma linguagem formal, portanto esta é a maneira como o trataremos. Seja CIC-HAM uma linguagem formal tal que:

$$\text{CIC-HAM} = \{< G >, G \text{ é um ciclo hamiltoniano}\}$$

Para verificarmos a existência de um ciclo hamiltoniano no grafo basta que verifiquemos se existe alguma permutação de todos os elementos pertencentes a V e se cada uma das arestas do ciclo realmente existe em E e de fato compõe um ciclo. O que acabamos de descrever é chamado de "certificado".

3 Algoritmo de Verificação

Os argumentos de entrada do algoritmo que usaremos para fazer a verificação são duas cadeias. Seja x uma cadeia binária obtida a partir da codificação de G e y o certificado descrito na sessão anterior, um algoritmo A verifica a existência de um certificado y na cadeia x, tal que $A(x, y) = 1$. A linguagem certificada é definida a seguir:

$$\text{CERT} = \{x \in \{0,1\}^* : \exists y \in \{0,1\}^* | A(x,y) = 1\}$$

Informalmente, a linguagem $CERT$ é aceita se para x existe um certificado (y) válido.

Definido o modo de verificação da linguagem, podemos restringir a aceitação somente àquelas instâncias verificáveis em tempo polinomial. Sendo k uma constante tão grande quanto se queira, podemos definir a linguagem aceita com base na linguagem certificada, utilizando o mesmo padrão:

$$\text{ACEITA} = \{x \in \{0,1\}^* : \exists y \mid |y| = O(|x|^k)\}$$

Com a definição formal do problema em mãos, podemos verificar que o algoritmo abaixo aceita a linguagem formal $ACEITA$, descrita acima.

Data: G = (V,E) um grafo não orientado, Y = certificado
Result: 1 se a linguagem for "$ACEITA$", 0 caso contrário

```
for i = 0 até n - 1 do
    if ∃ Y[i] ∈ V ∧ ∃ (Y[i], Y[i+1]) ∈ E then
        V := V - {Y[i]};
        E := E - { (Y[i], Y[i+1]) } ;
    else
        return 0
    end
end
if ∃ Y[n] ∈ V ∧ ∃ (Y[n], Y[1]) ∈ E then
    return 1
else
    return 0
end
```

TEOREMA: O problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence à classe NP.

Demonstração. Analisando a complexidade do algoritmo acima, chega-se à conclusão de que ele é da ordem de $O(n^2)$, sendo n o número de vértices do grafo. Todos os comandos circundados por cláusulas if e $else$ têm custo costante ou linear, dependendo da implementação. A verificação de cada cláusula if custa $2n$ e o algoritmo executa $O(n)$ cláusulas if e $else$. Por meio desta análise, é trivial perceber que a complexidade do algoritmo de verificação é da ordem de $O(n^2)$, fato que o insere na classe de problemas P, que por sua vez, está completamente inserida na classe NP. Sendo assim, podemos dizer que este algoritmo de verificação para o problema do ciclo hamiltoniano em tempo polinomial é a prova de que o problema em questão é um problema pertencente à classe NP. □

4 Redução a um problema NP-Completo

Por definição, um problema NP-Completo é um problema que pertence às classes NP e NP-Difícil (classe dos problemas de complexidade mais elevada ou tão elevada quanto os problemas em NP). Podemos definí-lo formalmente como:

$$\{\ Q \in \text{NP-Completo} \longleftrightarrow Q \in (\text{NP} \cap \text{NP-Difícil})\ \}$$

Já foi apresentada a prova de que o problema do ciclo hamiltoniano pertence à classe NP, porém para mostrar que ele também pertence à classe NP-Completo precisamos mostrar que ele é tão difícil quanto qualquer problema em NP. Para realizar esta prova, utilizaremos um problema que é sabidamente mais difícil (ou tão difícil quanto) qualquer problema em NP e empregaremos um mecanismo chamado de "redução"de um problema difícil (NP-Completo) para o problema do ciclo hamiltoniano. Se de fato um problema NP-Completo pode ser reduzido ao problema do ciclo, isso significa que o problema do ciclo hamiltoniano seria um problema NP-Difícil ($R.Garey, S.Johnson$), o que também significa que ele seria um problema NP-Completo, pois já mostramos que este problema têm um algoritmo de verificação em tempo polinomial.

Para reduzir um problema NP-Completo ao problema do ciclo hamiltoniano, precisamos de alguma métrica que nos mostre que o problema do ciclo é maior ou igual que o problema que tentamos reduzir e isso, por sua vez, implica que precisamos comparar os dois problemas. Um bom método de realizar uma comparação com uma métrica formal é traduzir ambos os problemas a duas linguagens formais, digamos CIC-HAM a linguagem que representa o problema do ciclo hamiltoniano e L a linguagem que representa o problema NP-Completo que será reduzido à CIC-HAM.

Pode-se reduzir uma linguagem L a CIC-HAM desde que as instâncias de L sejam reformuláveis como instâncias de CIC-HAM e cada uma dessas instâncias de CIC-HAM forneçam soluções para as respectivas instâncias de L. Além disso, recíproca também deve valer.

Reforçando o conceito de reduções, vale lembrar que se podemos reduzir L a CIC-HAM, então L não é mais difícil (ou mais complexo) do que CIC-HAM. Definindo o problema formalmente:

$$L \leq \text{CIC-HAM} \longleftrightarrow (f : \{0,1\}^{*} \longrightarrow \{0,1\}^{*} \mid \forall x \in L \rightarrow f(x) \in \text{CIC-HAM})$$

Para prosseguir com esta prova, é mandatório que escolhamos uma linguagem L que saibamos reduzir em tempo polinomial, apresentando o seu algoritmo de redução. A linguagem que utilizaremos para realizar a prova é a linguagem que verifica o problema de cobertura dos vértices de um grafo. Neste texto, chamaremos tal linguagem de "COB-VER". Assumiremos que COB-VER é NP-Completo e isso não será demonstrado (esta prova já foi demonstrada e COB-VER é de fato pertencente à classe NP-Completo).

O problema de cobertura dos vértices consiste em encontrar um inteiro positivo k tal que k corresponda ao número mínimo de vértices sobre os quais todas as arestas do grafo sejam incidentes. O seu problema de decisão equivale a responder à pergunta "existe no grafo uma cobertura de vértices formada por k vértices?".

5 Algoritmo de redução

TEOREMA: O problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence à classe NP-Difícil.

Demonstração. Para realizar a redução, descrita na sessão anterior, em uma instância do problema do ciclo hamiltoniano que recebe um grafo $G = (V, E)$, sendo este não orientado, e um inteiro k, construímos outro grafo não orientado $G' = (V', E')$ que tem um ciclo hamiltoniano se e somente se G tem uma cobertura de vértices de tamanho k.

A construção de G' é baseada em um dispositivo, que consiste em um fragmento de um grafo que impõe certas propriedades. A figura a seguir representa o dispositivo utilizado para a redução do problema de cobertura dos vértices ao problema do ciclo hamiltoniano. Uma aresta (u, v) do grafo G corresponde ao dispositivo W_{uv} do grafo G'. Os caminhos sombreados são os únicos possíveis pelo dispositivo que incluem todos os vértices, supondo que as únicas conexões do dispositivo ao restante de G' são realizadas pelos vértices $[u, v, 1], [u, v, 6], [v, u, 1], [v, u, 6]$.

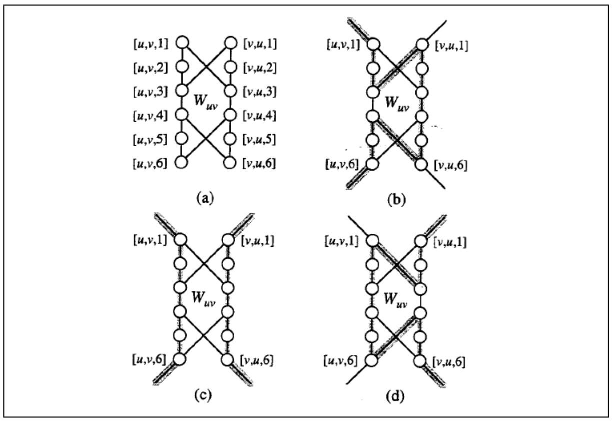

Figura 1: (*Introduction to Algorithms, CORMEN*)

Sumarizando, impomos ao dispositivo as características que necesitamos para que o mesmo possua um ciclo hamiltoniano, sendo suas únicas entradas por $[u, v, 1], [u, v, 6], [v, u, 1], [v, u, 6]$, e qualquer ciclo hamiltoniano de G deve obrigatóriamente passar pelas arestas de W_{uv} em alguma das 3 maneiras indicadas pelos caminhos sombreados na figura acima, já que os nodos do dispositivo são também nodos de G e pela definição de ciclo hamiltoniano, todos os nodos no grafo devem ser visitados exatamente uma vez. Além dos vértices no dispositivo, G' contém k "vértices seletores"(onde para cada um dos vértices seletores, haverão k dispositivos, sendo eles a representação da cobertura dos vértices, já que, como dito anteriormente, uma aresta $(u, v) \in E$ corresponde ao dispositivo W_{uv}). São usadas arestas incidentes em vértices seletores para selecionar os k vértices da cobertura em G.

Por sua vez, o conjunto E' de arestas é composto pelas arestas nos dispositivos e por dois outros tipos de arestas. Para cada vértice $u \in V$ adicionamos arestas que unem pares de dispositivos (este é o primeiro tipo de arestas que serão adicionadas a E'), formando um caminho entre todos eles. Ordena-se os vértices arbitrariamente de acordo com os seus respectivos graus (número de vértices adjacentes). Cria-se um caminho em G' que passa por todos os dispositivos que correspondem a arestas incidentes em u adicionando a E' as arestas $\{([u, u^{(i)}, 6], [u, u^{(i+1)}, 6]) : 1 \leq i \leq grau(u) - 1\}$ (arestas que unem cada vértice selecionado ao vértice seguinte na ordenação, ou seja, o vértice de grau imediatamente maior que o seu). Isso faz com que para cada aresta $u \in V$, as arestas em G' completem um caminho que contém todos os dispositivos correspondentes às arestas incidentes sobre u em G.

Devido à configuração utilizada na construção do dispositivo, se escolheremos um vértice $u \in V$ na cobertura de vértices de G, pode-se traçar um caminho de $[u, u^{(1)}, 1]$ até$[u, u^{(grau(u))}, 6]$ em G' que cobre todos os dispositivos correspondentes às arestas incidentes em u, ou seja, para cada dispositivo $W_{uu^{(i)}}$ o caminho inclui 12 vértices (todos os vértices de um dispositivo) caso u esteja na cobertura de vértices e $u^{(i)}$ não esteja ou então inclui 6 vértices $([u, u^{(i)}, 1]...[u, u^{(i)}, 6])$ caso ambos estejam na cobertura.

O último tipo de arestas em E' une o primeiro vértice, ou seja, o vértice de grau um $[u, u^{(1)}, 1]$ e o último vértice (cujo grau é o maior encontrado no grafo) $[u, u^{(grau(u))}, 6]$ de cada um dos caminhos a cada um dos k vértices seletores. Formalmente, isso significa incluir as arestas (u, v) tal que:

$$\{(s_j, [u, u^{(1)}, 1]) : u \in V \wedge 1 \leq j \leq k\} \cup$$
$$\{(s_j, [u, u^{(grau(u))}, 6]) : u \in V \wedge 1 \leq j \leq k\}$$

Ou seja, para cada vértice seletor, criamos uma ligação entre ele e o primeiro vértice do primeiro dispositivo e outra ligação (subentende-se por uma aresta), entre ele e o último vértice do último dispositivo.

V' é composto pelos dispositivos e pelos vértices seletores. Cada dispositivo contém 12 vértices e existem $k \leq |V|$ vértices seletores, portanto $|V'| = 12|E| + k$, ou seja, $|V'| \leq 12|E| + |V|$. Já as arestas de G' são as arestas dos dispositivos e aquelas que ligam os vértices seletores aos dispositivos. Cada dispositivo possui 14 arestas, ou seja, $14|E|$ arestas em todos dispositivos. Para cada $u \in V$ existem $grau(u) - 1$ arestas entre dispositivos. Iterando sobre todos os vértices de V e somando seus graus (número de ligações com outros vértices, i.e., arestas), verificamos o número de arestas entre dispositivos. A fórmula a seguir traduz este raciocínio:

$$\sum_{i=u\in V}^{\forall u\in V} (grau(u) - 1) = 2|E| - |V|$$

Chegamos ao número total de arestas em G' se adicionarmos ao resultado acima as arestas dos pares formados por um vértice seletor e um vértice de V. Temos k vértices seletores, logo temos $2k|V|$ arestas deste tipo. A equação abaixo ilustra o número total de arestas em G':

$$
\begin{aligned}
|E'| &= (14|E|) + (2|E| - |V|) + (2k|V|) \\
&= 16|E| + (2k-1)|V| \\
&\leq 16|E| + (2|V|-1)|V|.
\end{aligned}
$$

Visto que $|V'| \leq 12|E| + |V|$ e $|E'| \leq 16|E| + (2|V|-1)|V|$, o tamanho de G' é polinomial no tamanho de G, portanto podemos construir G' em tempo polinomial.

Visto que tal operação é factível em tempo polinomial, se ela realmente representar uma redução de G em G', ou seja, se pudermos afirmar que G tem uma cobertura de vértices de tamanho k se e somente se G' tem um ciclo hamiltoniano, então o problema do ciclo hamiltoniano é um problema NP-Difícil.

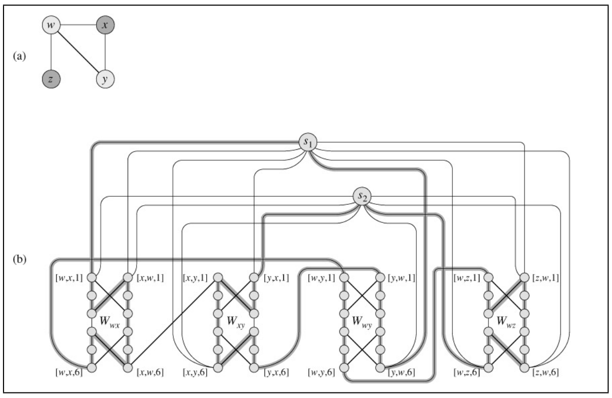

Figura 2: (*Introduction to Algorithms*, *CORMEN*) A figura b) represanta a redução da instância a) do problema de cobertura dos vértices ao problema do ciclo hamiltoniano.

Pode-se observar na figura acima que o método apresentado neste artigo inclui ciclos hamiltonianos em G' se e somente se existe uma cobertura com k vértices. No caso da imagem, temos $k = 2$. Como foi dito anteriormente, os dispositivos representam as conexões dos vértices seletores com outros vértices. Nessa figura, vemos que W_{wx} refere-se à ligação entre o vértice w e o vértice x no grafo a). Os outros dispositivos são análogos.

Suponha que $G = (V, E)$ possui uma cobertura de vértices $V^* \subseteq V$ de tamanho k. Seja $V^* = \{u_1, ..., u_k\}$. Para cada $u_i \in V^*$ foram incluídas arestas que conectam todos os dispositivos que correspondem aos seus vértices incidentes e também aquelas arestas contidas no interior dos dispositivos, dependendo da cobertura ser de um vértice (como acontece na maioria dos dispositivos da figura de exemplo) ou dois vértices (dispositivo W_{wy} no exemplo). A figura 2 mostra como os caminhos sombreados formam um ciclo hamiltoniano devido à configuração de vértices e arestas que impostas no momento da construção de G'. Com isso, mostramos que G' tem um ciclo hamiltoniano se G possui uma cobertura de vértices de tamanho k. O último passo para mostrar que a redução é valida e portanto o problema do ciclo hamiltoniano é de fato um problema NP-Difícil será mostrar que se G' tem um ciclo hamiltoniano, então G tem uma cobertura de k vértices, o que implicaria que G tem uma cobertura de k vértices se e somente se G' tem um ciclo hamiltoniano.

Suponha que $G' = (V', E')$ tenha um ciclo hamiltoniano $C \subseteq E'$. Pode-se afirmar que:

$$V^* = \{u \in V : (s_j, [u, u^{(1)}, 1] \in C \text{ para algum } j \mid 1 \leq j \leq k\}$$

é uma cobertura de vértices para G. Particionando C em caminhos máximos começados em algum vértice seletor, que percorram uma aresta entre este e um dispositivo relacionado a um seletor de grau 1 e terminem em um outro vértice seletor (note que os caminhos devem passar apenas por dois vértices seletores: o de origem e o de destino). Chamemos cada um dos caminhos obtidos pelo método recém descrito de "caminho de cobertura". Devido à construção de G', cada caminho de cobertura visitará todos os dispositivos que representam arestas de E incidentes no vértice de origem do caminho e então terminar em outro vértice seletor. Sendo assim, este vértice de origem (digamos u) cabe na equação que descreve $V*$ e portanto $u \in V*$. Cada dispositivo relacionado a u (qualquer W_{ux}, W_{xu}, sendo x outro nodo de G incidente à u) será visitado por um ou dois caminhos de cobertura. Se um caminho de cobertura o visitar, então a aresta $(u, x) \in E$ é coberta em G pelo vértice u. Se dois caminhos o visitarem, então esse outro caminho implica que x satisfaz a equação acima e também pertence à $V*$, e assim, a aresta $(u, x) \in E$ é coberta não só por u mas também por x. Pelo fato de que todos os vértices em dispositivos sejam visitados por algum caminho de cobertura, cada aresta em E é coberta por algum vértice em $V*$. Logo, se G' tem um ciclo hamiltoniano, G tem uma cobertura de vértices de tamanho k. Com isso concluímos que o problema da cobertura de vértices pode ser reduzido com sucesso ao problema do ciclo hamiltoniano e o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados é pertencente à classe de problemas NP-Difícil. □

6 O problema do ciclo hamiltoniano é NP-Completo

TEOREMA: O problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence à classe dos problemas NP–Completos.

Demonstração. Foi demonstrado na sessão 3 deste artigo que o problema do ciclo hamiltoniano pertence à classe NP. Na sessão 5 do mesmo foi feita a demonstração de que o problema do ciclo pertence à classe NP-Completo. Sendo assim, por definição, o problema do ciclo hamiltoniano em grafos não orientados pertence à classe dos problemas NP-Completos. □

Referências

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, *Introduction to Algorithms.* The MIT Press, 3rd Edition, 2009

[2] Laira Vieira Toscani, Paulo A. S. Veloso, *Complexidade de Algoritmos.* Bookman, 3ª edição, 2012

[3] Michael R. Garey, David S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman & Co., 1979