Circuitos Digitais I - 6878

Nardênio Almeida Martins

Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Informática

Bacharelado em Ciência da Computação

Aula de Hoje

Roteiro

- **Revisão**
    - Obter a tabela verdade a partir da expressão
    - Obter a expressão a partir da tabela verdade
- **Equivalência entre Portas Lógicas**
- **Simplificação de Expressões Booleanas**

Revisão

- **Expressões Booleanas:**
  - Obter a tabela verdade a partir da expressão
  - Obter a expressão a partir da tabela verdade

Fundamentos de Lógica

Obter a Tabela Verdade a partir da Expressão

Procedimentos:

1. Monta-se todas as combinações possíveis das entradas
2. Monta-se as colunas de cada parte da expressão com seus resultados
3. Monta-se a coluna de saída final (S)

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $\boxed{S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}}$

Segue os três passos de montagem da tabela

A expressão pode ser vista como três termos, chamados de S_1,S_2 e S_3

$$S=\underset{\substack{\uparrow \\ S_1}}{\boxed{\overline{A}}}+\underset{\substack{\uparrow \\ S_2}}{\boxed{B}}+\underset{\substack{\uparrow \\ S_3}}{A.\overline{B}.\overline{C}}$$

$$S=S_1+S_2+S_3=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$$

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $\boxed{S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1				
0	0	1	1				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	1	0				
1	1	0	0				
1	1	1	0				

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $\boxed{S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1				
0	0	1	1				
0	1	0	1				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	1	0				
1	1	0	0				
1	1	1	0				

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1			
0	0	1	1	1			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	0			
1	0	0	0	1			
1	0	1	0	1			
1	1	0	0	0			
1	1	1	0	0			

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $\boxed{S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1			
0	0	1	1	1			
0	1	0	1	0			
0	1	1	1	0			
1	0	0	0	1			
1	0	1	0	1			
1	1	0	0	0			
1	1	1	0	0			

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	1	0		
0	1	0	1	0	1		
0	1	1	1	0	0		
1	0	0	0	1	1		
1	0	1	0	1	0		
1	1	0	0	0	1		
1	1	1	0	0	0		

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	1	0		
0	1	0	1	0	1		
0	1	1	1	0	0		
1	0	0	0	1	1		
1	0	1	0	1	0		
1	1	0	0	0	1		
1	1	1	0	0	0		

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	
1	1	1	0	0	0	0	

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1	1	0	
0	0	1	1	1	0	0	
0	1	0	1	0	1	0	
0	1	1	1	0	0	0	
1	0	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	
1	1	1	0	0	0	0	

Saída da Expressão

Fundamentos de Lógica

Exemplo

Obter a TV a partir da expressão: $S=\overline{A}+B+A.\overline{B}.\overline{C}$

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$A.\overline{B}.\overline{C}$	S
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Saída da Expressão

Fundamentos de Lógica

- Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 1:	0	0	1	S_1
Caso 2:	0	1	0	S_2
Caso 3:	1	0	1	S_3
Caso 4:	1	1	1	S_4

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

Quando a expressão S é verdadeira?

Quando S = 1?

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 1:	0	0	1	S_1
Caso 2:	0	1	0	S_2
Caso 3:	1	0	1	S_3
Caso 4:	1	1	1	S_4

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$$

Resposta

S=1:

- Quando $S_1 = 1$, OU
- Quando $S_2 = 1$, OU
- Quando $S_3 = 1$, OU
- Quando $S_4 = 1$

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 1:	0	0	1	S_1
Caso 2:	0	1	0	S_2
Caso 3:	1	0	1	S_3
Caso 4:	1	1	1	S_4

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

Resposta

S=1 quando:

- Caso 1: A=0 E B=0 $\Rightarrow S_1=1 \Rightarrow \overline{A}.\overline{B}$

OU

- Caso 3: A=1 E B=0 $\Rightarrow S_3=1 \Rightarrow A.\overline{B}$

OU

- Caso 4: A=1 E B=1 $\Rightarrow S_4=1 \Rightarrow A.B$

Soma de Produtos $\rightarrow$ $S=\overline{A}.\overline{B}+A.\overline{B}+A.B$

Cada produto isolado é capaz de gerar S=1

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 1:	0	0	1	S_1
Caso 2:	0	1	0	S_2
Caso 3:	1	0	0	S_3
Caso 4:	1	1	1	S_4

Quando a expressão S é falsa?

Quando S = 0?

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 1:	0	0	1	S_1
Caso 2:	0	1	0	S_2
Caso 3:	1	0	0	S_3
Caso 4:	1	1	1	S_4

Resposta

S=0:

- Quando $S_2 = 0$
- Quando $S_3 = 0$

Fundamentos de Lógica

Obter a Expressão a partir da Tabela Verdade

Exemplo:

	A	B	S	
Caso 1:	0	0	1	S_1
Caso 2:	0	1	0	S_2
Caso 3:	1	0	0	S_3
Caso 4:	1	1	1	S_4

Resposta

S=0 quando:

- Caso 2: A=0 OU B=1 $\Rightarrow S_2=0 \Rightarrow A+\overline{B}$

E

- Caso 3: A=1 OU B=0 $\Rightarrow S_3=0 \Rightarrow \overline{A}+B$

Produto de Somas $\rightarrow$ $S=(A+\overline{B}).(\overline{A}+B)$

Cada soma isolada é capaz de gerar S=0

Aula de Hoje

- Equivalência entre portas lógicas
- Simplificação de expressões booleanas

Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

Motivação:

1. Otimização na utilização dos circuitos integrados
2. Redução do número de componentes
3. Minimização de custos

Fundamentos de Lógica

Considere a expressão a seguir:

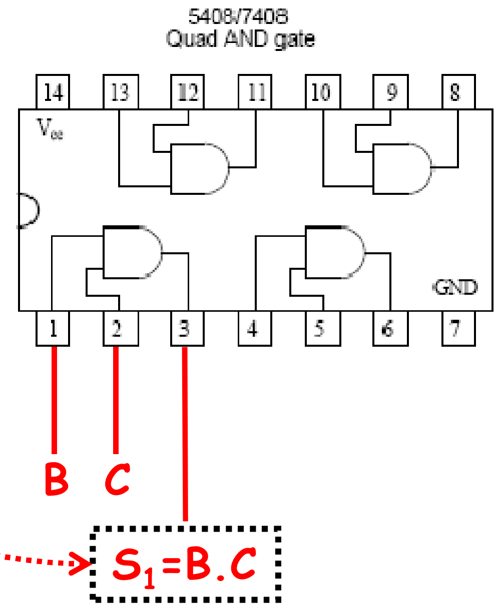
$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)]\ .\ \overline{A}}$$

Como é o circuito dessa expressão?

Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

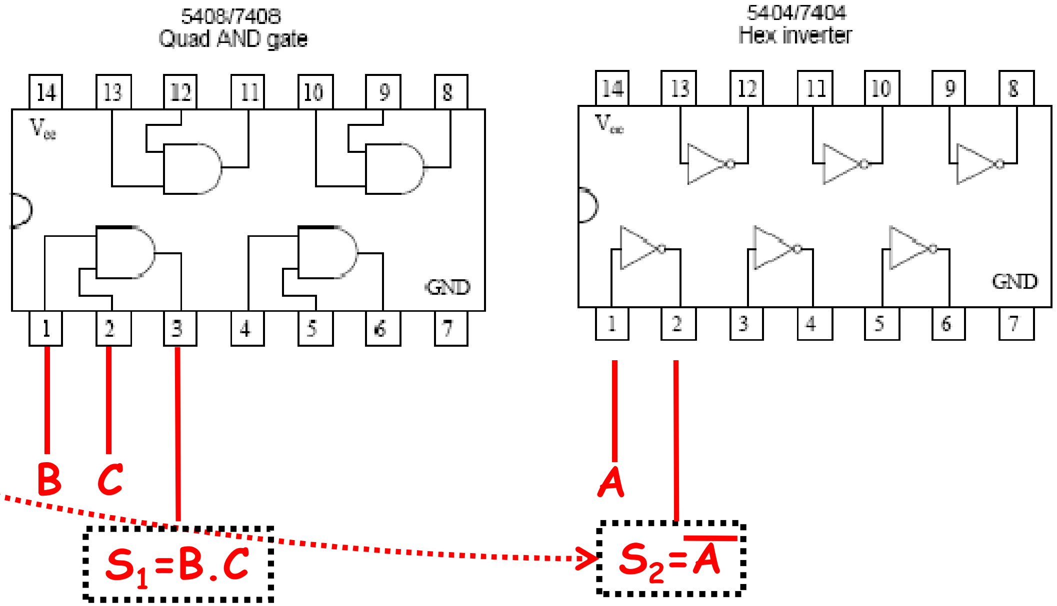
$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)] \;.\; \overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

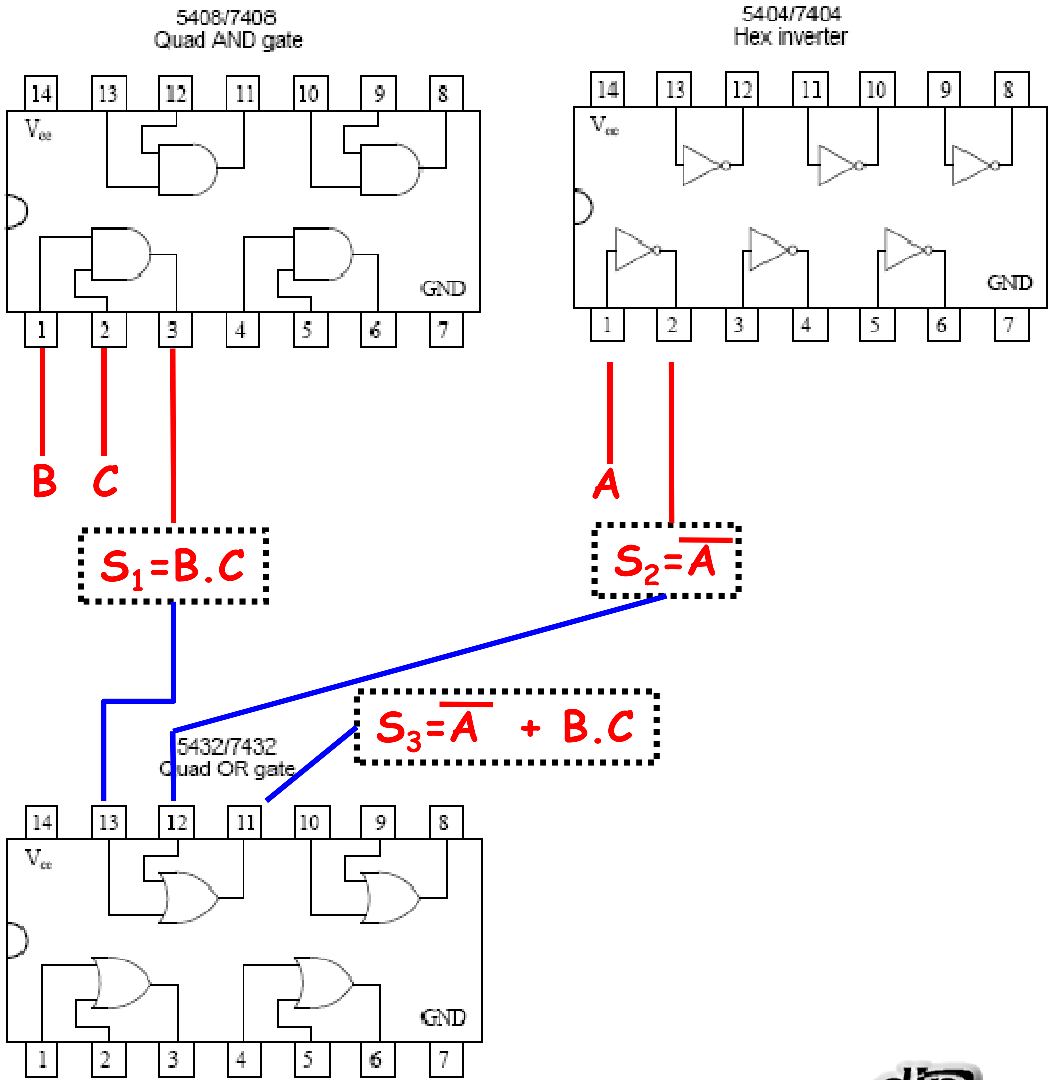
$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)]\ .\ \overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

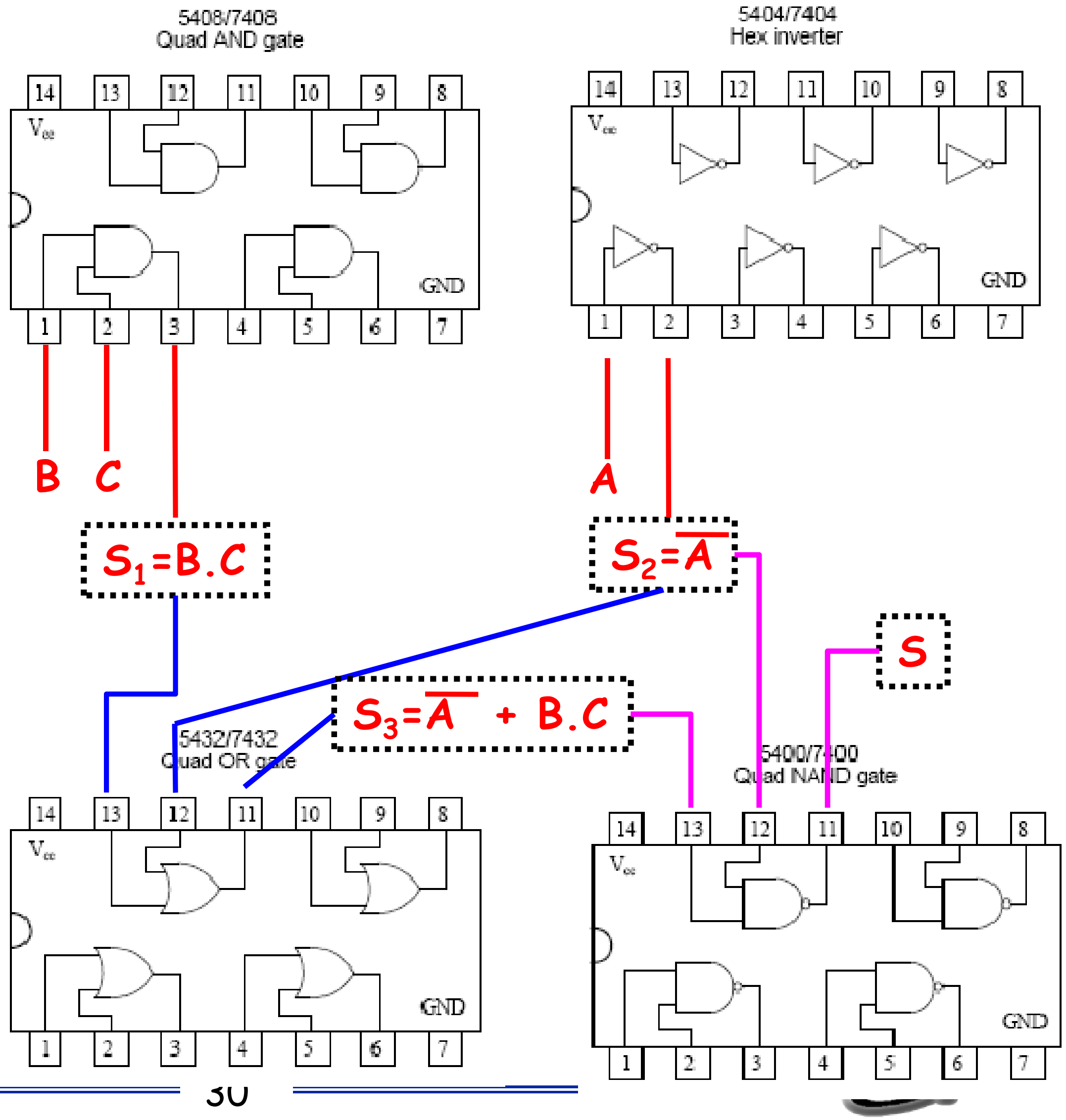
$$S = \overline{[\overline{A} \boxed{+} (B.C)] \ . \ \overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)]\boxed{.}\overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

1. Inversor a partir de uma Porta NAND:

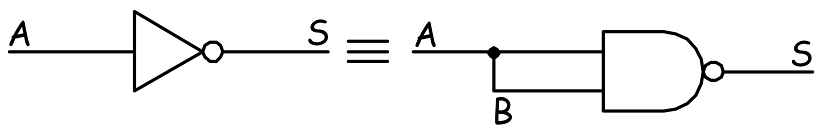
TV da Porta NAND

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	1
Caso 3:	1	0	1
Caso 4:	1	1	0

Caso 1: A=0 E B=0 $\Rightarrow$ S=1

Caso 4: A=1 E B=1 $\Rightarrow$ S=0

Ligando as entradas A e B em curto-circuito $\Rightarrow$ A=B sempre $\Rightarrow$ corresponde a um INVERSOR



Fundamentos de Lógica

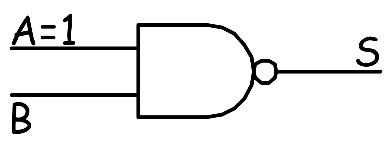
Equivalência entre Portas Lógicas

1. Inversor a partir de uma Porta NAND:

TV da Porta NAND

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	1
Caso 3:	1	0	1
Caso 4:	1	1	0

Fixar a entrada A em "1" e usar B como a entrada do INVERSOR

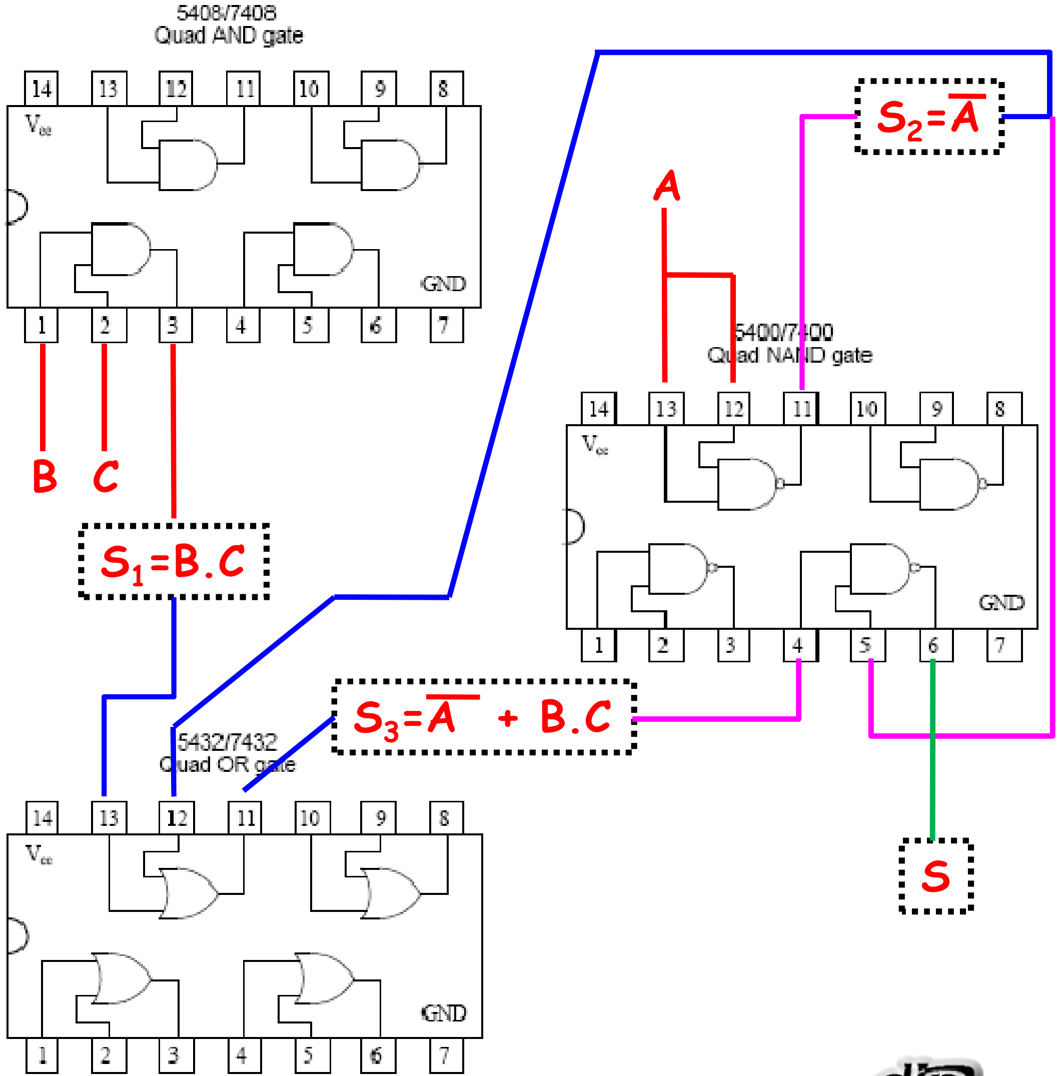


Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)] \, . \, \overline{A}}$$

Usando a equivalência entre NOT e NAND pode-se eliminar o CI da porta NOT



Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

2. Inversor a partir de uma Porta NOR:

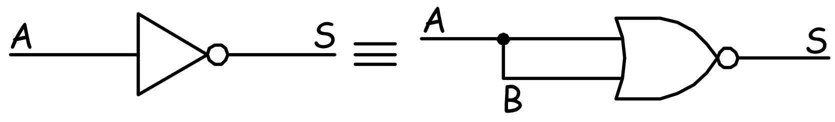
	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	0
Caso 3:	1	0	0
Caso 4:	1	1	0

TV da Porta NOR

Caso 1: A=0 E B=0 ⇒ S=1

Caso 4: A=1 E B=1 ⇒ S=0

Ligando as entradas A e B em curto-circuito ⇒ A=B sempre ⇒ corresponde a um INVERSOR



Fundamentos de Lógica

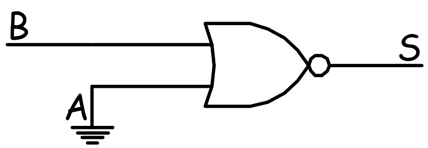
Equivalência entre Portas Lógicas

2. Inversor a partir de uma Porta NOR:

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	0
Caso 3:	1	0	0
Caso 4:	1	1	0

TV da Porta NOR

Fixar a entrada A em "0" e usar B como a entrada do INVERSOR

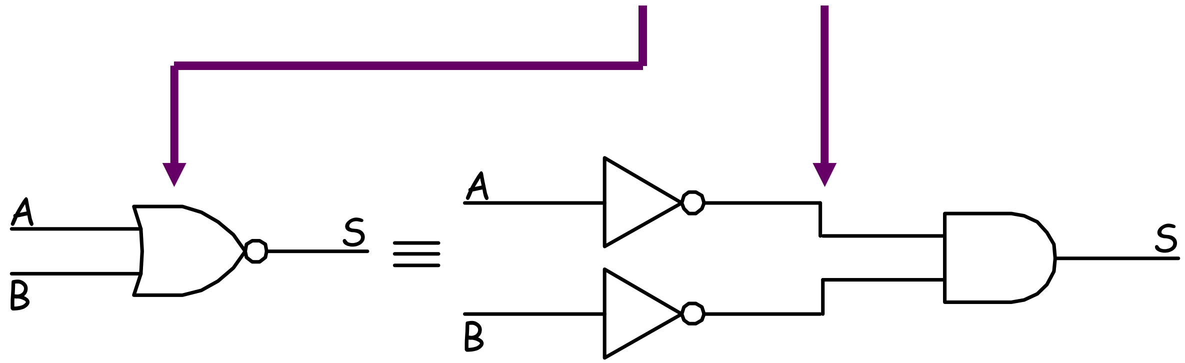


Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

3. Porta NOR a partir de AND e INVERSORES:

2º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow$ $\underbrace{\overline{A+B}} = \underbrace{\overline{A}.\overline{B}}$



Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

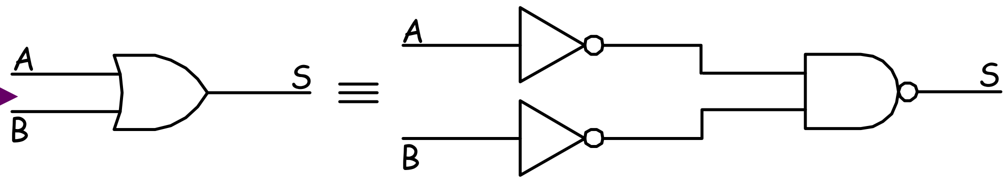
4. Porta OR a partir de NAND e INVERSORES:

Modificando 2º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow$ $\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$

$$\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$$

$$\overline{\overline{A+B}} = \overline{\bar{A}.\bar{B}}$$

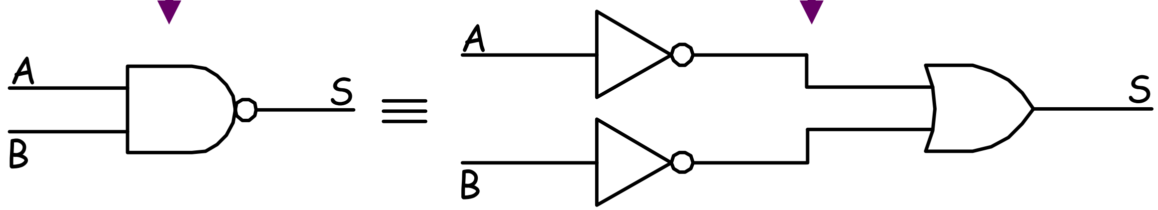
$$A+B = \overline{\bar{A}.\bar{B}}$$



Equivalência entre Portas Lógicas

5. Porta NAND a partir de OR e INVERSORES:

1º Teorema de DeMorgan ⇒ $\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$



Equivalência entre Portas Lógicas

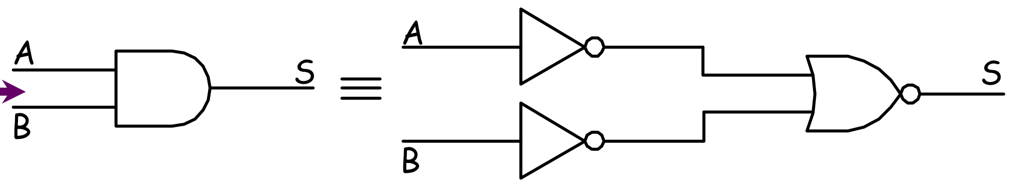
6. Porta AND a partir de NOR e INVERSORES:

Modificando 1º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow \overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$

$$\overline{A.B} = \bar{A}+\bar{B}$$

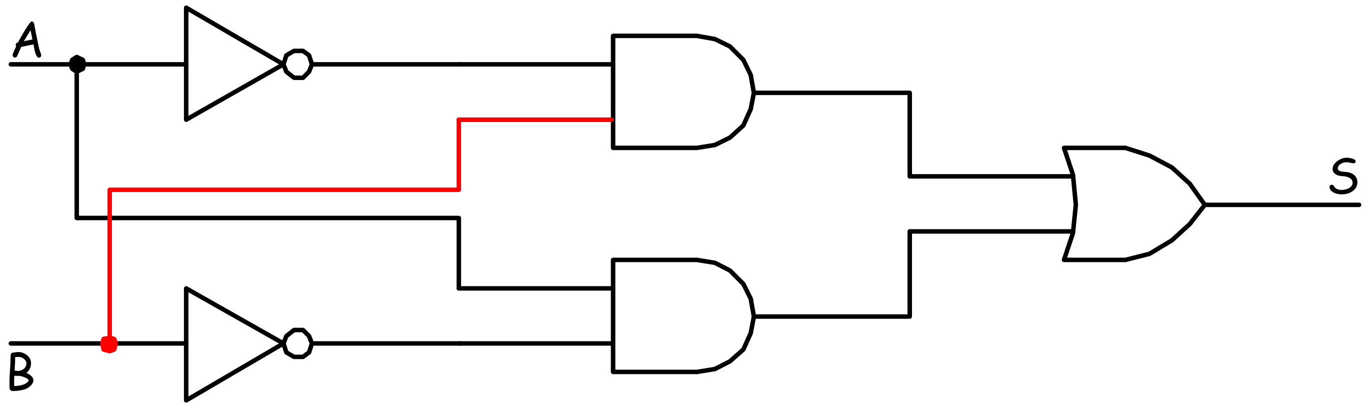
$$\overline{\overline{A.B}} = \overline{\bar{A}+\bar{B}}$$

$$A.B = \overline{\bar{A}+\bar{B}}$$



Exercícios

1. Desenhe o circuito usando apenas Portas NAND:

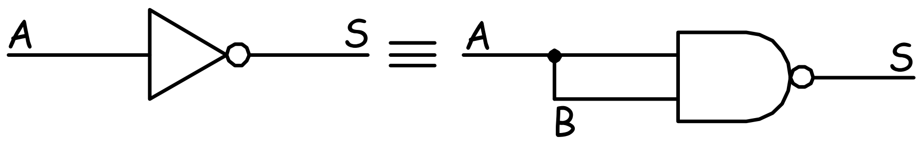


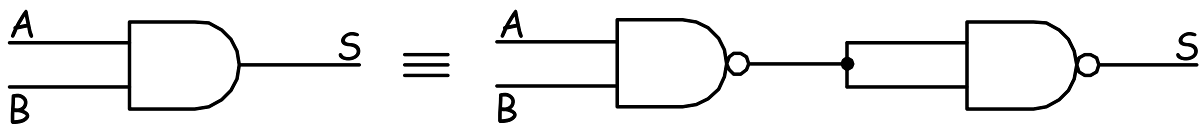
Soluções

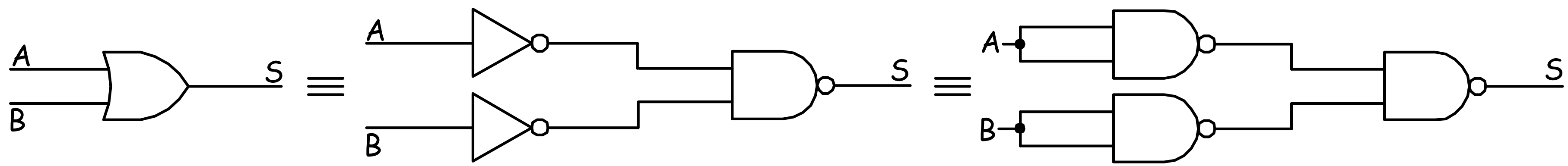
1. **Desenhe o circuito usando apenas Portas NAND:**

<u>**Solução:**</u>

Equivalências entre Portas Lógicas





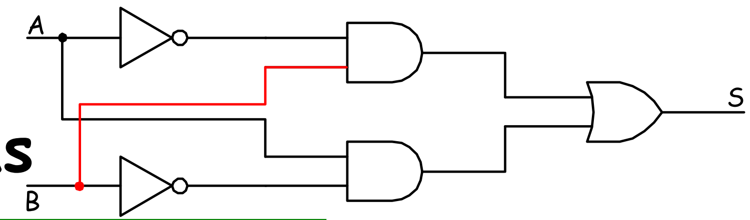


Soluções

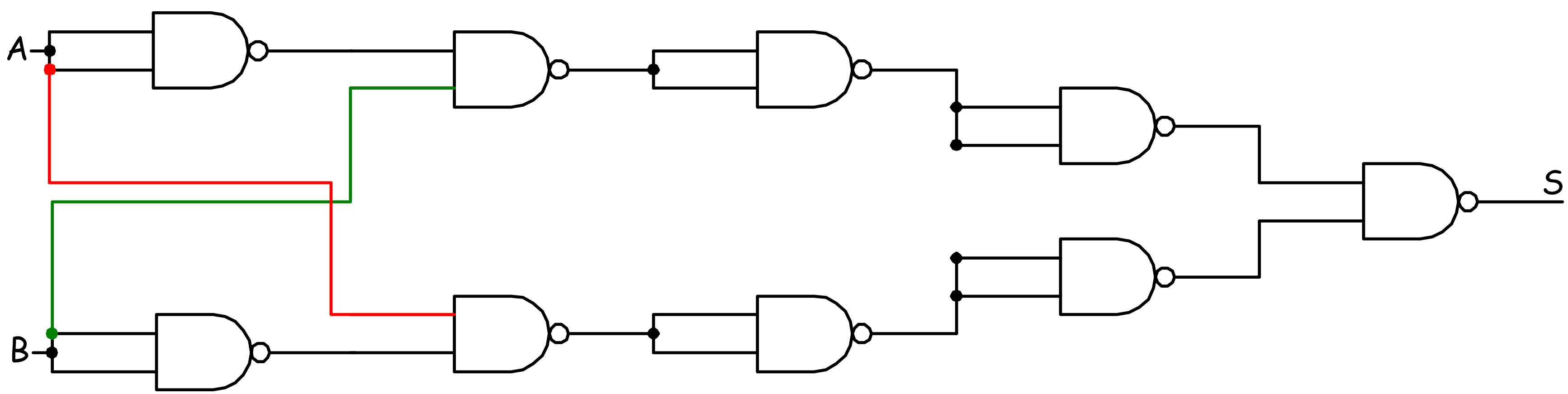
1. Desenhe o circuito usando apenas Portas NAND:

Solução:

Equivalências entre Portas Lógicas



Circuito com Equivalência de Portas Lógicas



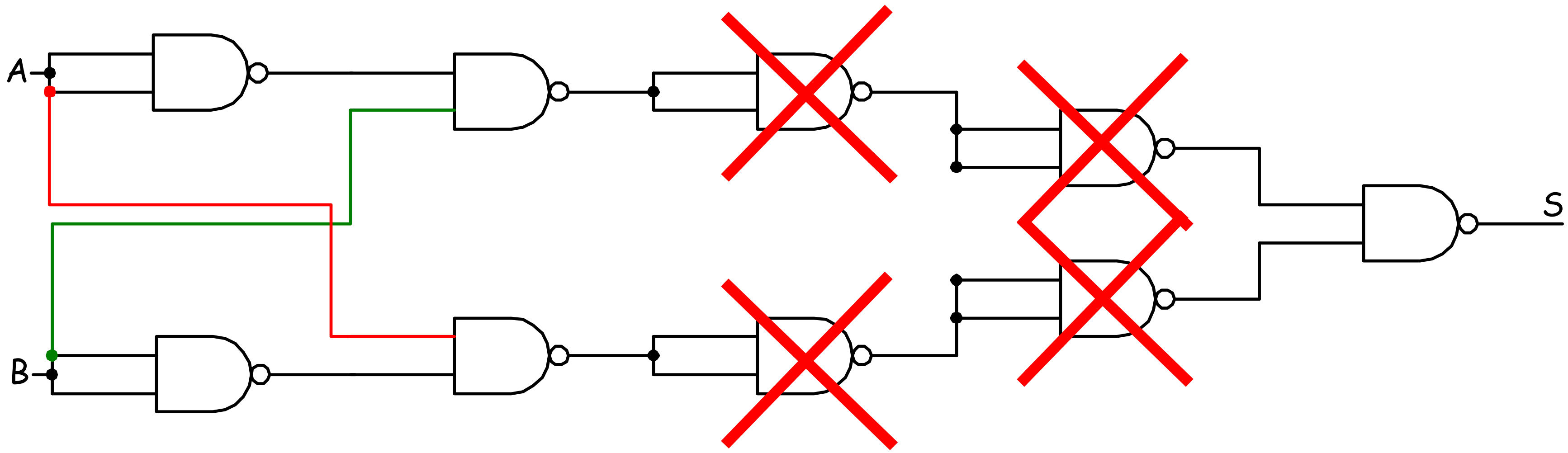
Soluções

1. Desenhe o circuito usando apenas Portas NAND:

<u>Solução:</u>

Equivalências entre Portas Lógicas

Simplificação de Portas Lógicas



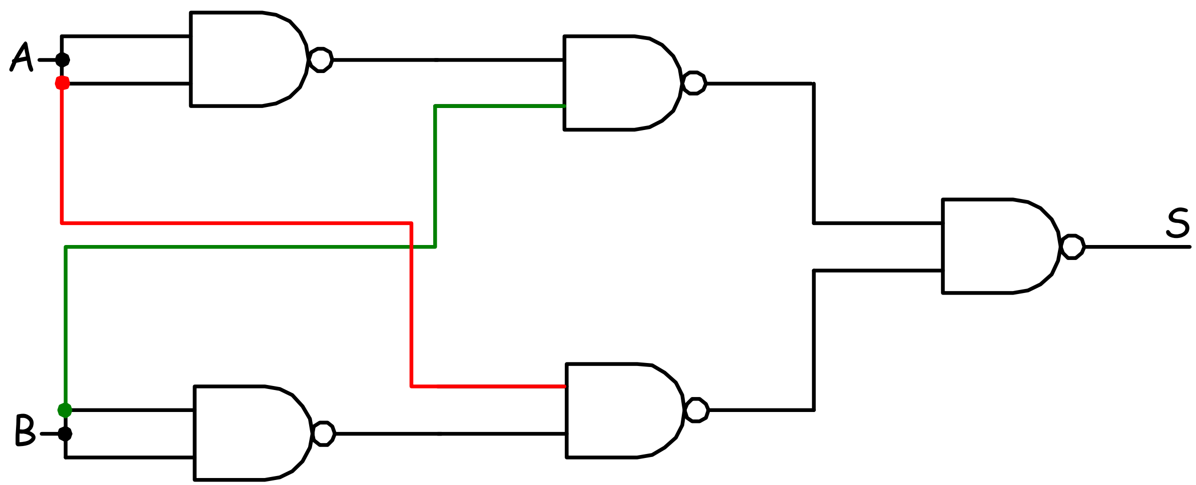
Soluções

1. Desenhe o circuito usando apenas Portas NAND:

Solução:

Equivalências entre Portas Lógicas

Circuito Final com Equivalência de Portas Lógicas



Exercícios

2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Soluções

2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$S=\overline{A}.B+A.\overline{B}$$

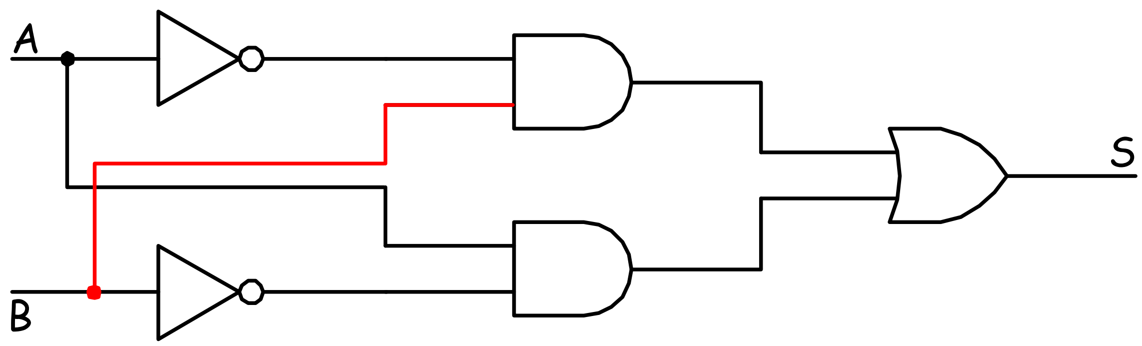
Soluções

2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

Circuito que executa a expressão $S=\overline{A}.B+A.\overline{B}$



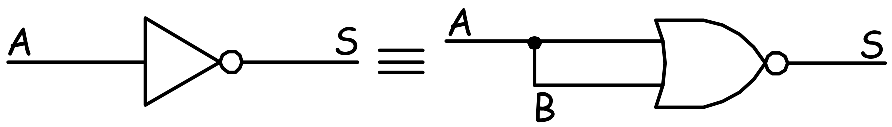
Soluções

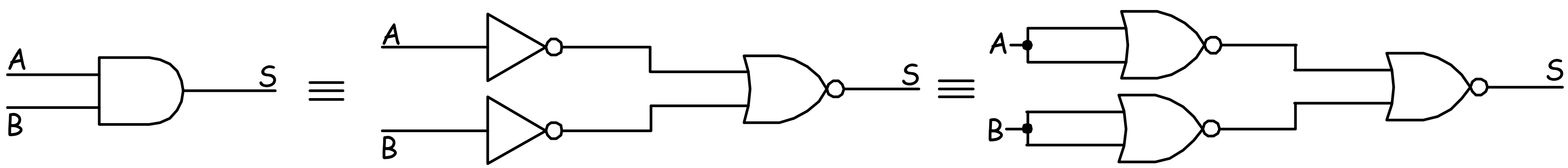
2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

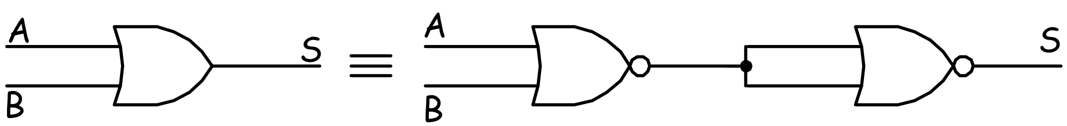
2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

Substituindo as Portas do circuito por Portas NOR







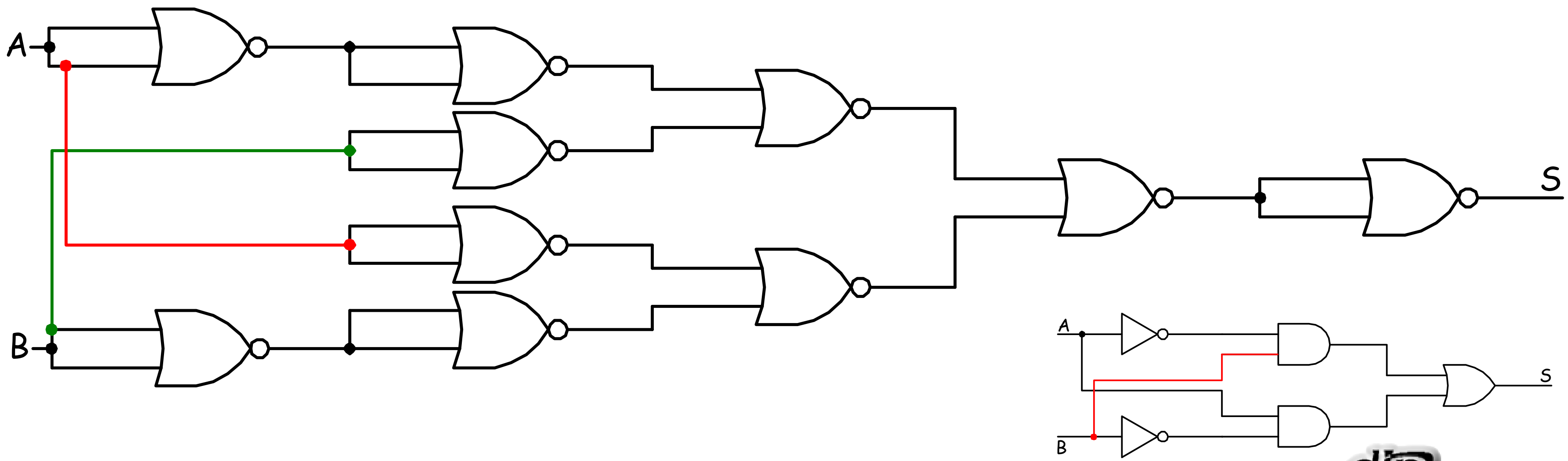
Soluções

2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

Substituindo as Portas do circuito por Portas NOR



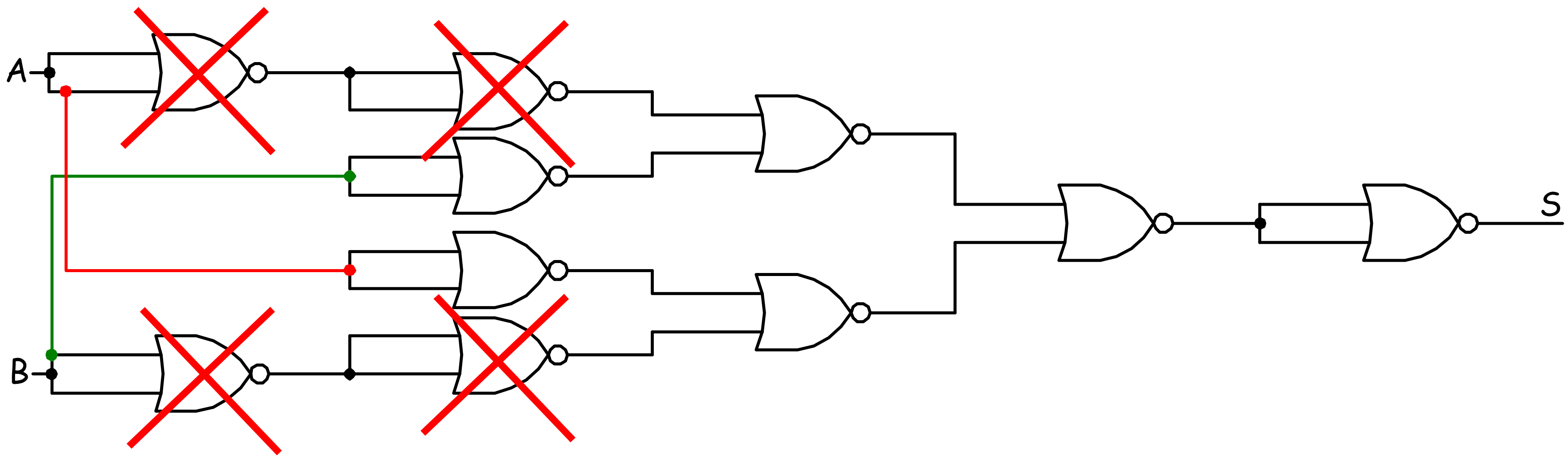
Soluções

2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

Substituindo as Portas do circuito por Portas NOR



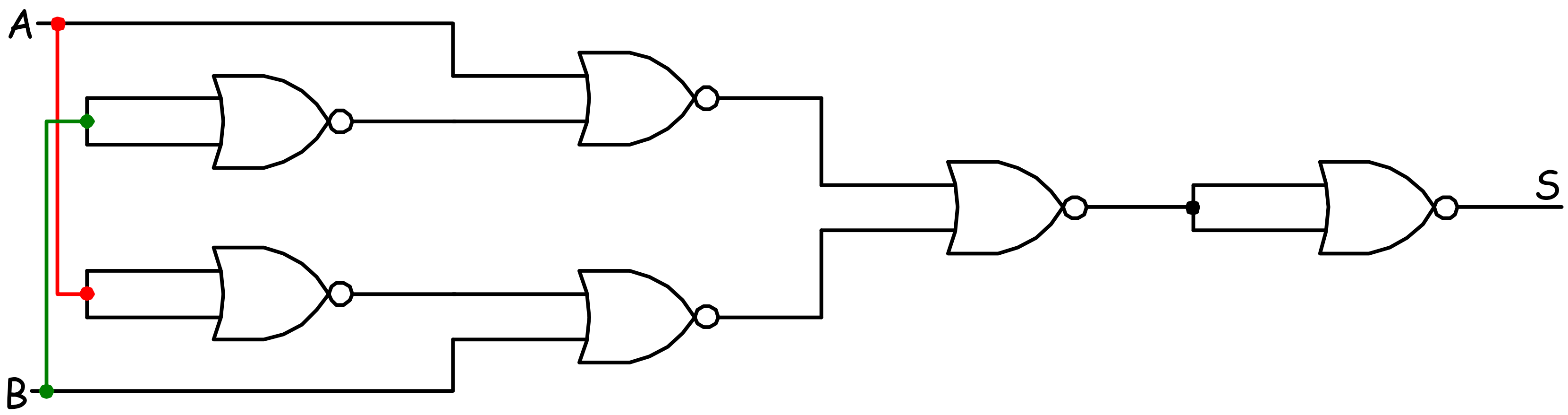
Soluções

2.1. Obtenha a expressão a partir da TV por soma de produtos.

2.2. Use a expressão para fazer o diagrama do circuito.

2.3. Substitua as portas lógicas do circuito usando apenas portas NOR.

Circuito Final com Portas NOR

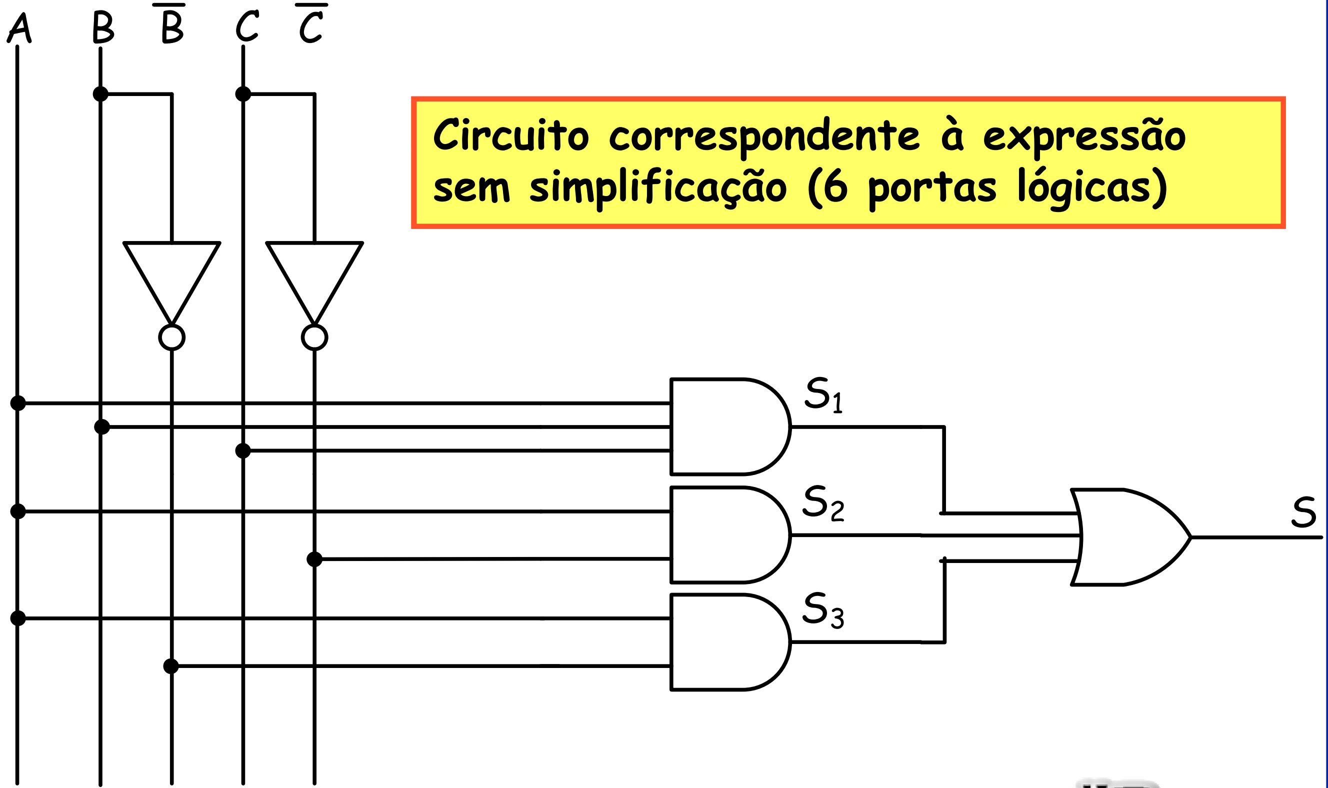


Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$



Circuito correspondente à expressão sem simplificação (6 portas lógicas)

Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

Solução:

$S=A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

$S=A.(B.C+\overline{C}+\overline{B})$ ← A em evidência

$S=A.[B.C+(\overline{B}+\overline{C})]$

$S=A.[B.C+(\overline{\overline{\overline{B}+\overline{C}}})]$ ← Usando $\overline{\overline{X}}=X$

$S=A.[B.C+(\overline{\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}})]$ ← Aplicando DeMorgan

$S=A.[B.C+(\overline{B.C})]$

Chamando B.C de Y $\Rightarrow$ $\overline{B.C}=\overline{Y}$

$S=A.[\underbrace{Y+\overline{Y}}_{1}]$

$S=A.1$

$S=A$

Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

Ou outra solução:

$S=A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

$S=A.(B.C+\overline{C}+\overline{B})$ ← A em evidência

$S=A.[B.C+(\overline{B}+\overline{C})]$

$S=A.[B.C+(\overline{\overline{\overline{B}+\overline{C}}})]$ ← Usando $\overline{\overline{X}}=X$

$S=A.[B.C+(\overline{\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}})]$ ← Aplicando DeMorgan

$S=A.[B.C+(\overline{B.C})]$

Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

Ou outra solução:

$$S=A.[B.C+\overline{(B.C)}]$$

$$S=A.[\overline{\overline{B.C+\overline{(B.C)}}}]$$

$$S=A.[\overline{\overline{B.C+(\overline{B}+\overline{C})}}]$$

$$S=A.[\overline{\overline{B.C}.\overline{(\overline{B}+\overline{C})}}]$$

$$S=A.[\overline{\overline{B.C}.(\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}})}]$$

$$S=A.[\overline{\overline{B.C}.(B.C)}]$$

$$S=A.[\overline{(\overline{B}+\overline{C}).(B.C)}]$$

$$S=A.[\overline{\underbrace{\overline{B}.B}_{0}.C+B.\underbrace{C.\overline{C}}_{0}}]$$

$$S=A.[\overline{0 + 0}]$$

$$S=A.[\overline{0}]$$

$$S=A.1$$

$$S=A$$

Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$

Circuito correspondente à expressão simplificada (1 fio)

$S=A$

Exercícios

Simplifique as expressões:

1. $S=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.C$

2. $S=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C}+A.B.\overline{C}$

3. $S=(A+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$

4. $S=\overline{[\overline{(A.C)}+B+D]}+C.\overline{(A.C.D)}$

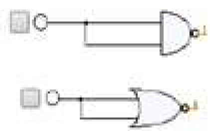
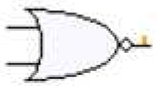
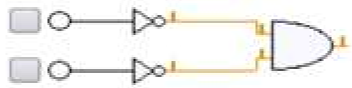
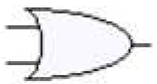
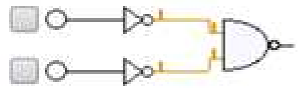
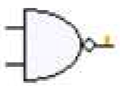
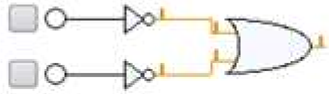
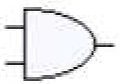
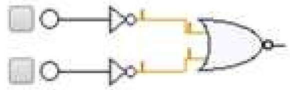
Soluções na próxima aula

Resumo da Aula de Hoje

Tópicos mais importantes:

- Equivalência entre Portas Lógicas
- Simplificação de Expressões Booleanas

Equivalências entre Portas Lógicas

Bloco Lógico	Propriedades	Blocos Lógicos Equivalentes
	Análise da tabela verdade das portas lógicas NAND e NOR	
	2º Teorema de DeMorgan $\overline{A+B}=\overline{A}.\overline{B}$	
	2º Teorema de DeMorgan Modificado $\overline{\overline{A+B}}=\overline{\overline{A}.\overline{B}}$	
	1º Teorema de DeMorgan $\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}$	
	1º Teorema de DeMorgan Modificado $\overline{\overline{A.B}}=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$	

Próxima Aula

- Resolução de Exercícios de Simplificação
- Formas de Onda
- Mapa de Karnaugh
- Simplificação de Expressões Booleanas por Mapa de Karnaugh