Circuitos Digitais I - 6878

Nardênio Almeida Martins

Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Informática

Bacharelado em Ciência da Computação

Aula de Hoje

Roteiro

- **Revisão**
  - Equivalência entre Portas Lógicas
  - Simplificação de Expressões Booleanas
- **Exercícios de Simplificação de Expressões Booleanas**
- **Formas de Onda**
- **Simplificação de Expressões Booleanas por Mapa de Karnaugh**

Revisão

- Equivalência entre Portas Lógicas
- Simplificação de Expressões Booleanas

Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

Motivação:

1. Otimização na utilização dos circuitos integrados
2. Redução do número de componentes
3. Minimização de custos

Fundamentos de Lógica

<u>**Considere a expressão a seguir:**</u>

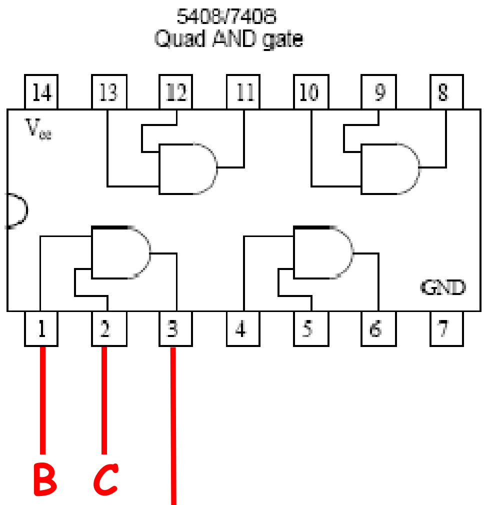
$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)] \;.\; \overline{A}}$$

Como é o circuito dessa expressão?

Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

$$S = \overline{[\overline{A} + \boxed{(B.C)}]} \cdot \overline{A}$$

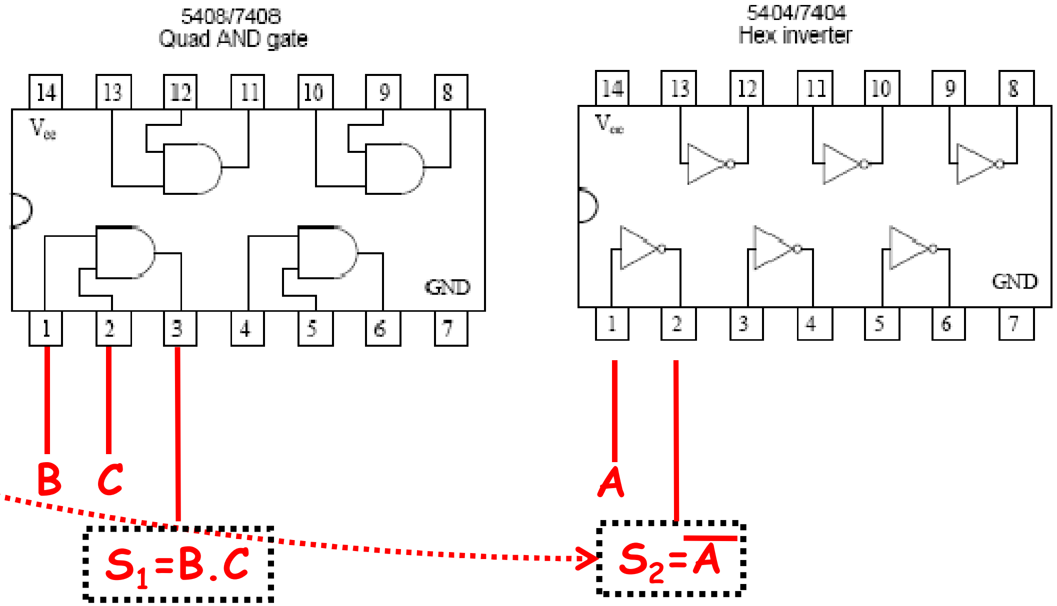


$$\boxed{S_1 = B.C}$$

Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

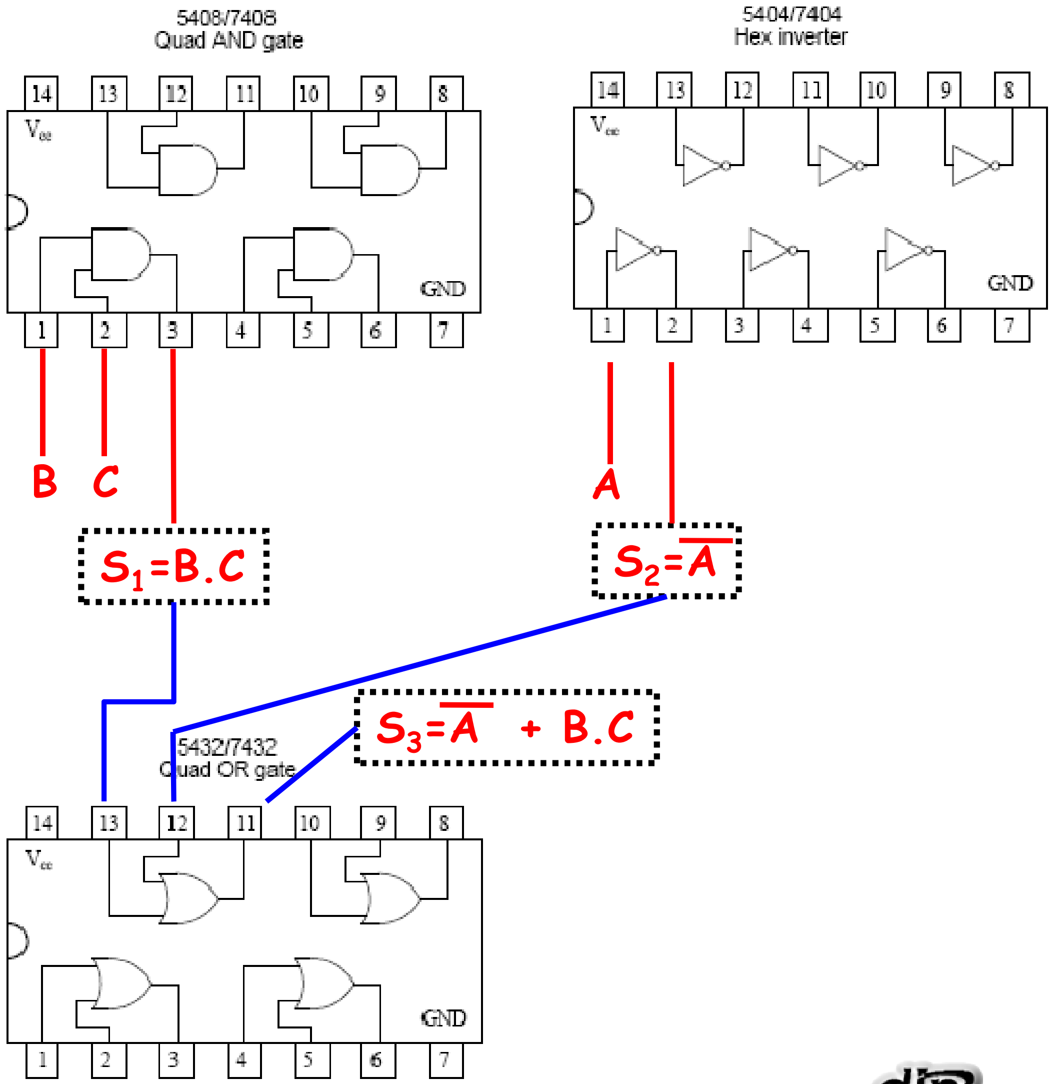
$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)] \, . \, \overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

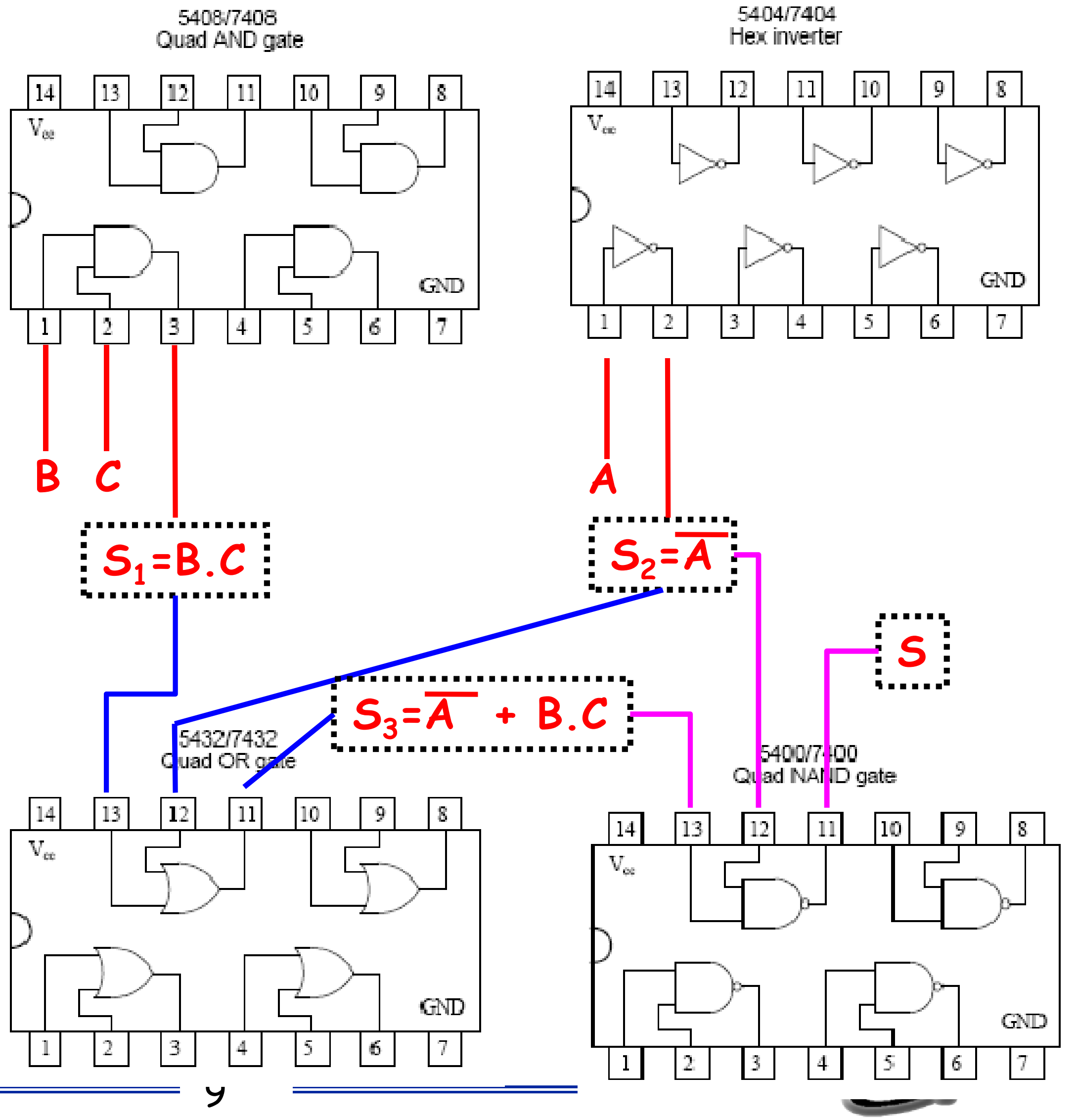
$$S = \overline{[\overline{A} \boxed{+} (B.C)] \; . \; \overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)] \boxed{.} \overline{A}}$$



Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

1. Inversor a partir de uma Porta NAND:

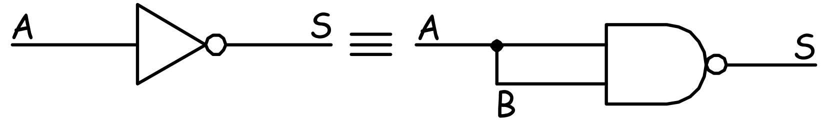
	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	1
Caso 3:	1	0	1
Caso 4:	1	1	0

TV da Porta NAND

Caso 1: A=0 E B=0 ⇒ S=1

Caso 4: A=1 E B=1 ⇒ S=0

Ligando as entradas A e B em curto-circuito ⇒ A=B sempre ⇒ corresponde a um INVERSOR



Fundamentos de Lógica

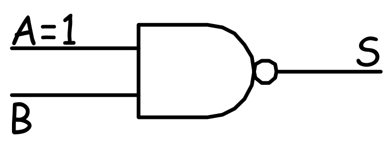
Equivalência entre Portas Lógicas

1. Inversor a partir de uma Porta NAND:

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	1
Caso 3:	1	0	1
Caso 4:	1	1	0

TV da Porta NAND

Fixar a entrada A em "1" e usar B como a entrada do INVERSOR

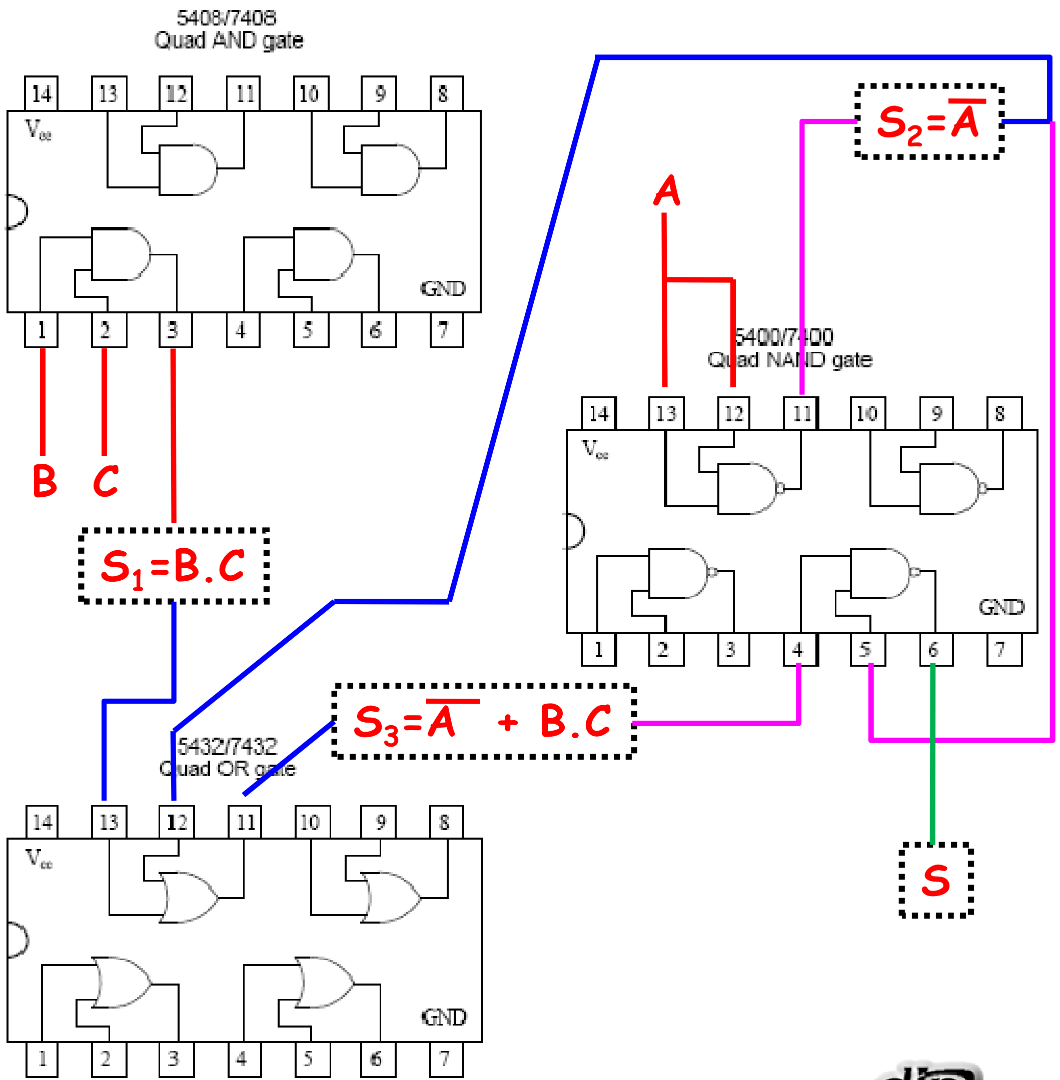


Fundamentos de Lógica

Circuito da Expressão

$$S = \overline{[\overline{A} + (B.C)] \cdot \overline{A}}$$

Usando a equivalência entre NOT e NAND pode-se eliminar o CI da porta NOT



Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

2. Inversor a partir de uma Porta NOR:

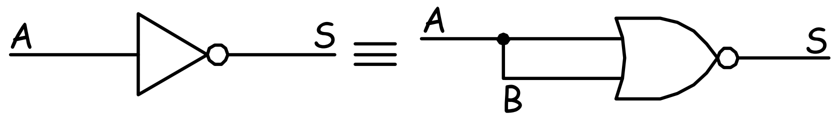
TV da Porta NOR

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	0
Caso 3:	1	0	0
Caso 4:	1	1	0

Caso 1: A=0 E B=0 ⇒ S=1

Caso 4: A=1 E B=1 ⇒ S=0

Ligando as entradas A e B em curto-circuito ⇒ A=B sempre ⇒ corresponde a um INVERSOR



Fundamentos de Lógica

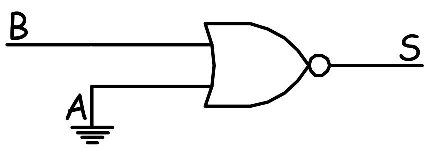
Equivalência entre Portas Lógicas

2. Inversor a partir de uma Porta NOR:

TV da Porta NOR

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	0
Caso 3:	1	0	0
Caso 4:	1	1	0

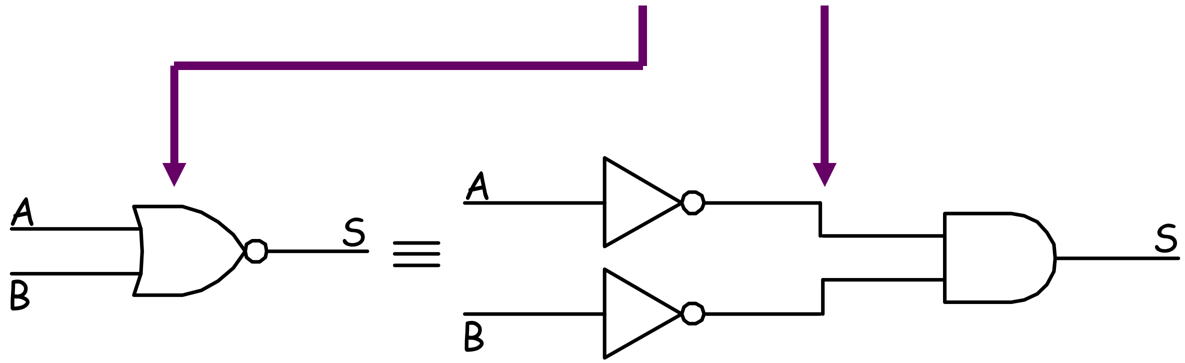
Fixar a entrada A em "0" e usar B como a entrada do INVERSOR



Equivalência entre Portas Lógicas

3. Porta NOR a partir de AND e INVERSORES:

2º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow$ $\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$



Equivalência entre Portas Lógicas

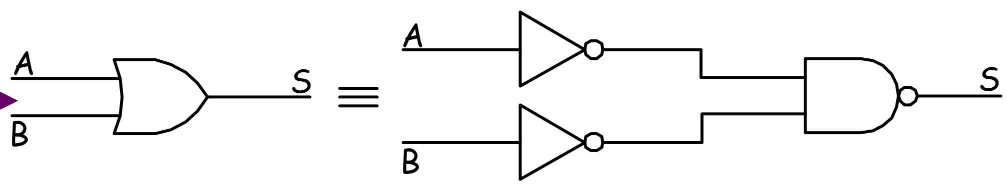
4. Porta OR a partir de NAND e INVERSORES:

Modificando 2º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow$ $\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$

$$\overline{A+B} = \bar{A}.\bar{B}$$

$$\overline{\overline{A+B}} = \overline{\bar{A}.\bar{B}}$$

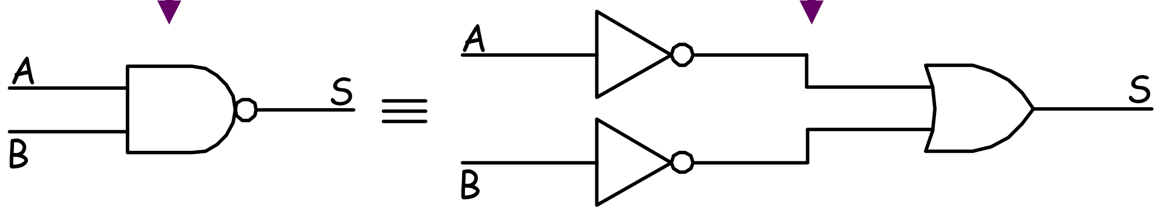
$$A+B = \overline{\bar{A}.\bar{B}}$$



Equivalência entre Portas Lógicas

5. Porta NAND a partir de OR e INVERSORES:

1º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow$ $\underbrace{\overline{A.B}} = \underbrace{\overline{A}+\overline{B}}$



Fundamentos de Lógica

Equivalência entre Portas Lógicas

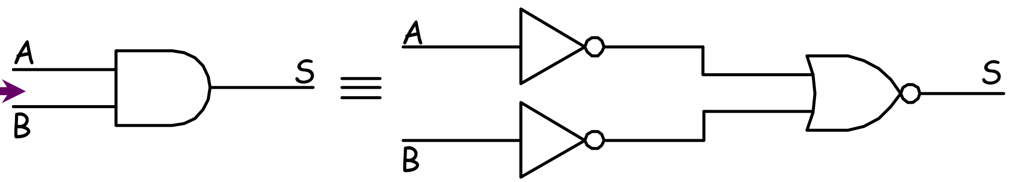
6. Porta AND a partir de NOR e INVERSORES:

Modificando 1º Teorema de DeMorgan $\Rightarrow \overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$

$$\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$$

$$\overline{\overline{A.B}} = \overline{\overline{A}+\overline{B}}$$

$$A.B = \overline{\overline{A}+\overline{B}}$$

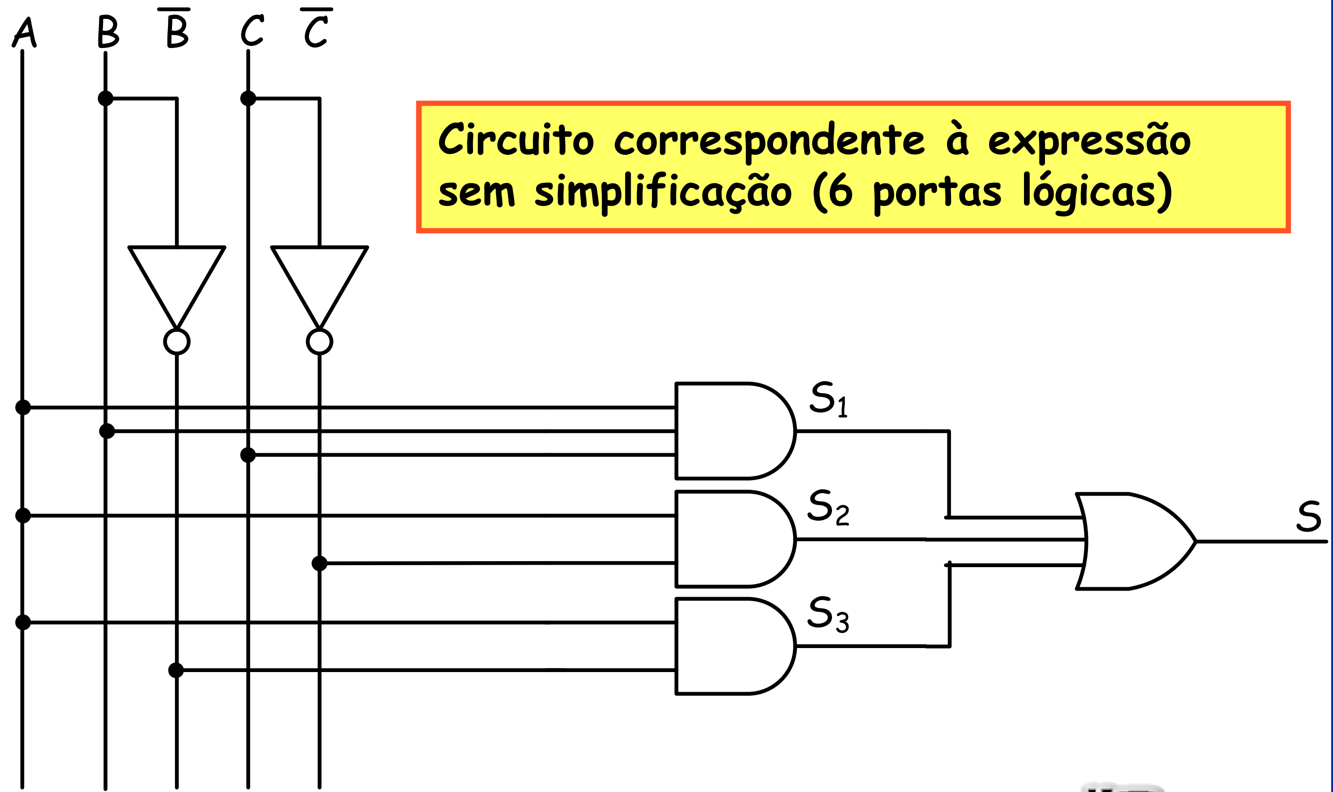


Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$



Circuito correspondente à expressão sem simplificação (6 portas lógicas)

Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

Solução:

$S=A.B.C+A.\overline{C}+A.\overline{B}$

$S=A.(B.C+\overline{C}+\overline{B})$ ← A em evidência

$S=A.[B.C+(\overline{B}+\overline{C})]$

$S=A.[B.C+(\overline{\overline{\overline{B}+\overline{C}}})]$ ← Usando $\overline{\overline{X}}=X$

$S=A.[B.C+(\overline{\overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}}})]$ ← Aplicando DeMorgan

$S=A.[B.C+(\overline{B.C})]$

Chamando B.C de Y $\Rightarrow$ $\overline{B.C}=\overline{Y}$

$S=A.[\underbrace{Y+\overline{Y}}_{1}]$

$S=A.1$

$S=A$

Fundamentos de Lógica

Simplificação de Expressões Booleanas

Exemplo:

Simplificar a expressão: $S = A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B}$

Circuito correspondente à expressão simplificada (1 fio)

$S = A$

Aula de Hoje

- Resolução de Exercícios de Simplificação
- Formas de Onda
- Mapa de Karnaugh
- Simplificação de Expressões Booleanas por Mapa de Karnaugh

Exercícios

Simplifique as expressões:

1. $S=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.C$

2. $S=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.C+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.\overline{C}+A.B.\overline{C}$

3. $S=(A+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$

4. $S=\overline{[\overline{(A.C)}+B+D]}+C.\overline{(A.C.D)}$

Soluções

Simplifique as expressões:

1. $S=\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}+\overline{A}.B.\overline{C}+A.\overline{B}.C$

$$S=\overline{A}.\overline{C}.\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}+A.\overline{B}.C$$

$$S=\overline{A}.\overline{C}+A.\overline{B}.C$$

Circuito Original:

- 6 Inversores
- 3 ANDs
- 1 OR de 3 entradas

Circuito Simplificado:

- 3 Inversores
- 2 ANDs
- 1 OR de 2 entradas

Soluções

Simplifique as expressões:

2. $S=\underbrace{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}}+\overline{A}.B.C+\underbrace{\overline{A}.B.\overline{C}}+\underbrace{A.\overline{B}.\overline{C}}+\underbrace{A.B.\overline{C}}$

$\overline{C}$ em evidência

$$S=\overline{C}.(\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}.B+A.\overline{B}+A.B)+\overline{A}.B.C$$

$$S=\overline{C}.[\overline{A}.\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}+A.\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}]+\overline{A}.B.C$$

$$S=\overline{C}.[\underbrace{\overline{A}+A}_{1}]+\overline{A}.B.C$$

$$S=\overline{C}+\overline{A}.B.C$$

Circuito Original:

- 9 Inversores
- 5 ANDs
- 1 OR de 5 entradas

Circuito Simplificado:

- 2 Inversores
- 1 AND
- 1 OR de 2 entradas

Soluções

Simplifique as expressões:

3. $S=(A+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$

$$S=(A+B+C).(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

Aplica propriedade distributiva

$$S=\underbrace{A.\overline{A}}_{0}+A.\overline{B}+A.C+\overline{A}.B+\underbrace{B.\overline{B}}_{0}+B.C+\overline{A}.C+\overline{B}.C+\underbrace{C.C}_{C}$$

$$S=A.\overline{B}+\underbrace{A.C}+\overline{A}.B+\underbrace{B.C}+\underbrace{\overline{A}.C}+\underbrace{\overline{B}.C}+\underbrace{C}$$

C em evidência

$$S=C.(\underbrace{A+B+\overline{A}+\overline{B}+1}_{1})+A.\overline{B}+\overline{A}.B$$

Soluções

Simplifique as expressões:

3. $S=C.(\underbrace{A+B+\overline{A}+\overline{B}+1}_{1})+A.\overline{B}+\overline{A}.B$

$$S=C+\underbrace{A.\overline{B}+\overline{A}.B}_{A\oplus B}$$

$$S=C+A\oplus B$$

Soluções

Simplifique as expressões:

4. $S=[\overline{(\overline{A.C})+B+D}]+C.\overline{(A.C.D)}$

Aplica DeMorgan

$$S=[\overline{(\bar{A}+\bar{C})+B+D}]+C.(\bar{A}+\bar{C}+\bar{D})$$

Distributiva

$$S=[\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{C}}.\bar{B}.\bar{D}]+C.\bar{A}+\underbrace{C.\bar{C}}_{0}+C.\bar{D}$$

$$S=A.C.\bar{B}.\bar{D}+C.\bar{A}+C.\bar{D}$$

$C.\bar{D}$ em evidência

$$S=C.\bar{D}\underbrace{[A.\bar{B}+1]}_{1}+\bar{A}.C$$

$$S=C.\bar{D}+\bar{A}.C$$

Fundamentos de Lógica

Formas de Onda

Mostram o comportamento de uma função lógica durante um intervalo de tempo

Exemplo:

Porta OR

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tabela Verdade: Representa uma situação estática

Mostra todos os valores que as entradas podem assumir, mas não mostra a variação desses valores durante um intervalo de tempo

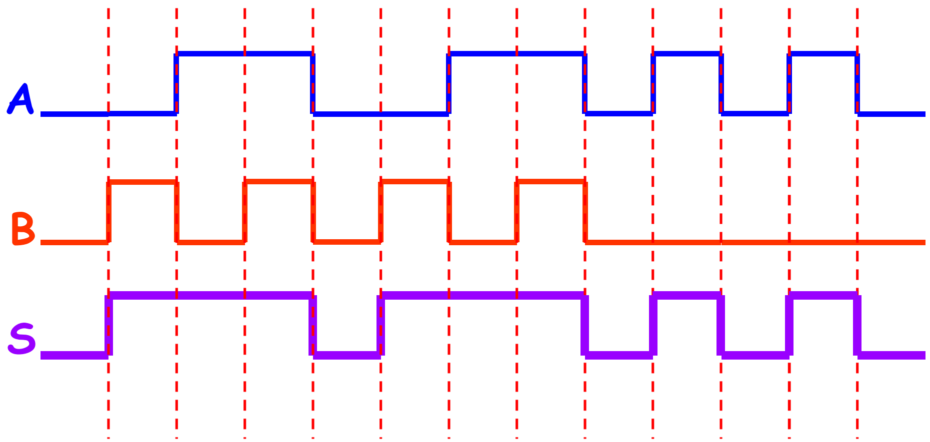
Fundamentos de Lógica

Formas de Onda

Representação dinâmica da função lógica

Exemplo: Porta OR

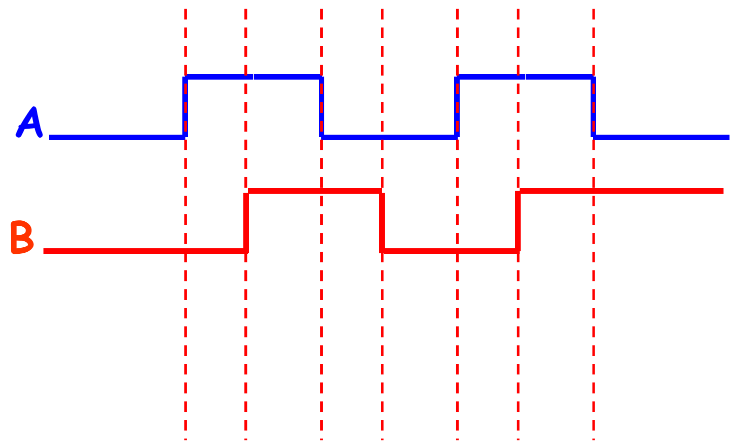
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Exercícios

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

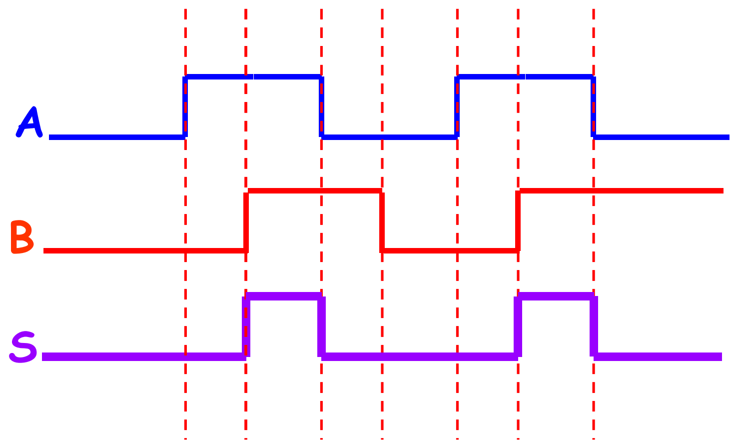
1. Porta AND



Soluções

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

1. Porta AND

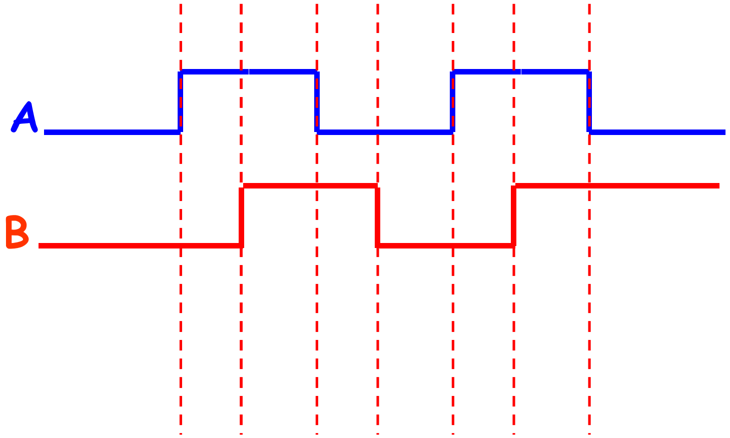


A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exercícios

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

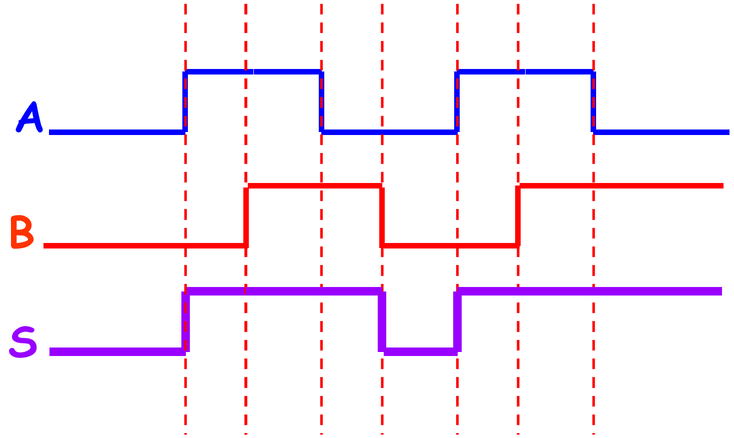
2. Porta OR



Soluções

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

2. Porta OR

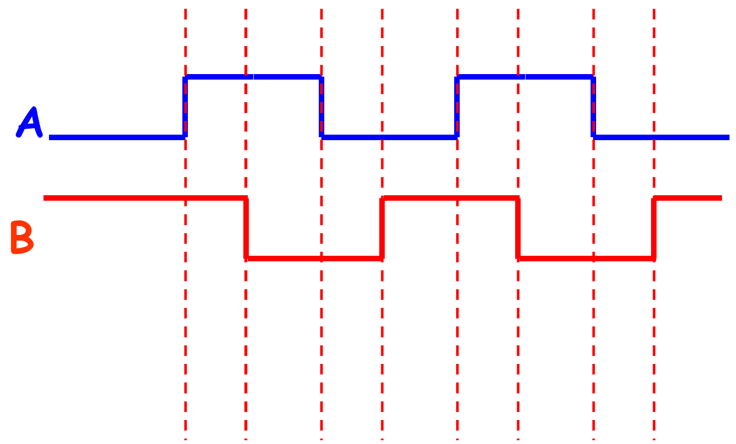


A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Exercícios

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

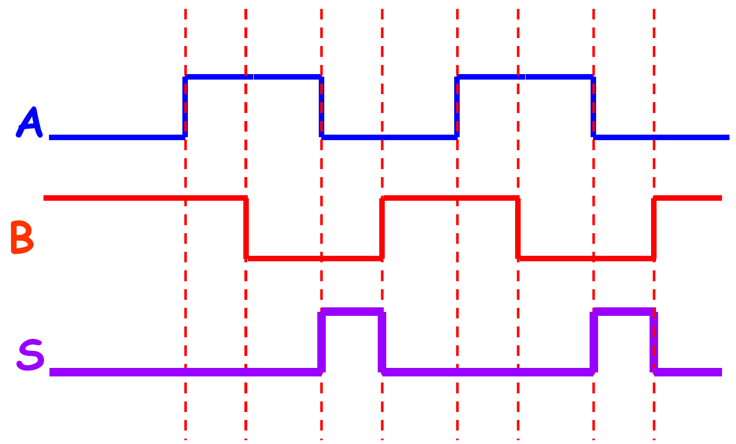
3. Porta NOR



Soluções

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

3. Porta NOR

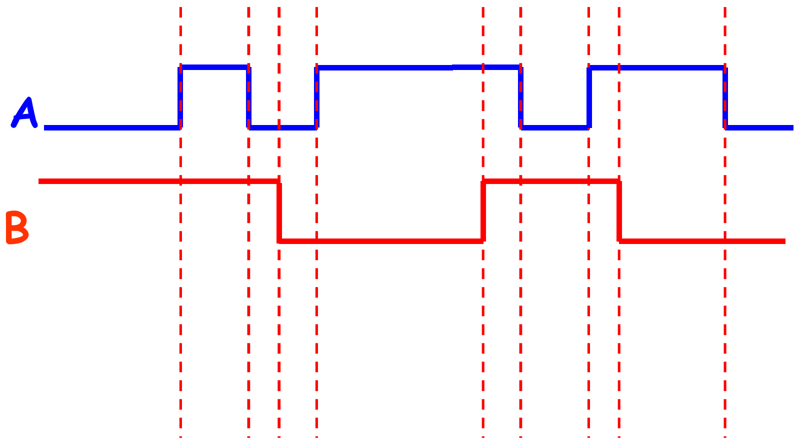


A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Exercícios

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

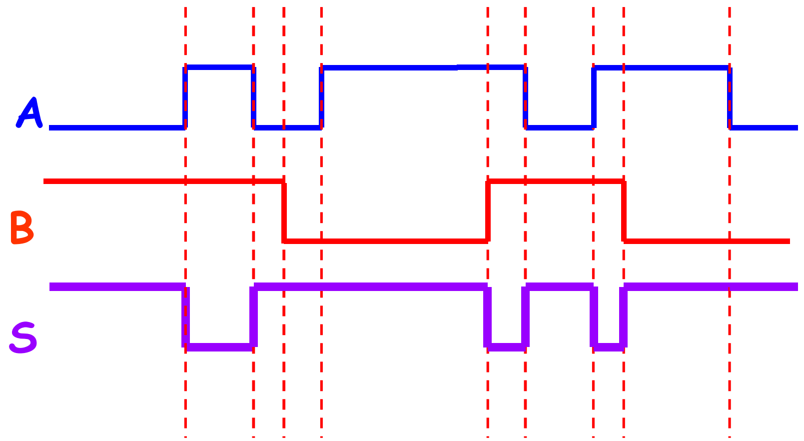
4. Porta NAND



Soluções

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

4. Porta NAND

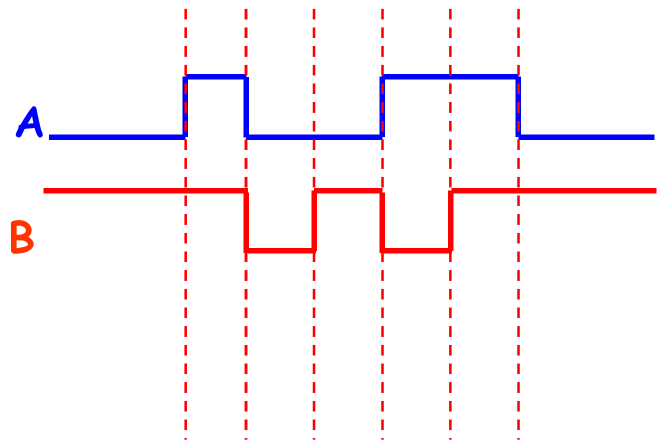


A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exercícios

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

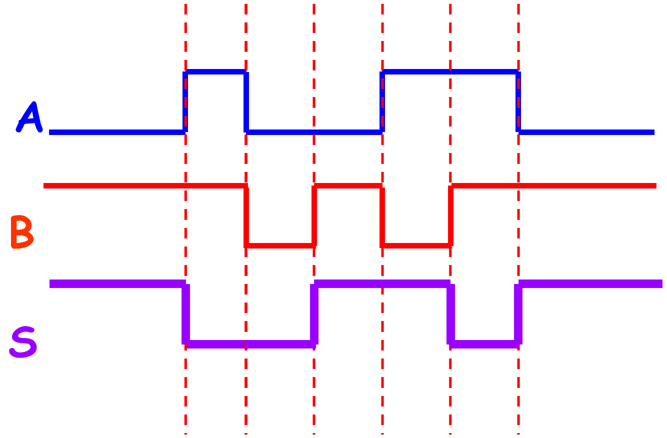
5. Porta XOR



Soluções

Faça os diagramas de formas de onda da saída para os seguintes circuitos:

5. Porta XOR



A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Mapas de Karnaugh

Mapa de Karnaugh

- É uma representação gráfica (visual) da tabela verdade
- É usado para simplificar expressões ou circuitos lógicos

Fundamentos de Lógica

Nomenclatura do Mapa de Karnaugh

	A	B	S
A=0,B=0 $\Rightarrow \bar{A}\ \bar{B}$	0	0	1
A=0,B=1 $\Rightarrow \bar{A}\ B$	0	1	0
A=1,B=0 $\Rightarrow A\ \bar{B}$	1	0	1
A=1,B=1 $\Rightarrow A\ B$	1	1	0

Fundamentos de Lógica

Mapa de Karnaugh para 2 variáveis

TV para 2 variáveis

A	B	S
0	0	S_1
0	1	S_2
1	0	S_3
1	1	S_4

Mapa de Karnaugh para 2 variáveis

$\bar{A}\bar{B}$ $\bar{A}B$

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	S_1	S_2
A	S_3	S_4

$A\bar{B}$ AB

Cada quadrante do Mapa de Karnaugh corresponde a uma linha da Tabela Verdade

Fundamentos de Lógica

Mapa de Karnaugh para 2 variáveis

TV para 2 variáveis

A	B	S
0	0	S_1
0	1	S_2
1	0	S_3
1	1	S_4

Mapa de Karnaugh para 2 variáveis

00 01

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	S_1	S_2
A	S_3	S_4

10 11

O "endereço" de cada quadrante só muda em 1 bit em relação ao seu vizinho

Fundamentos de Lógica

Exemplo

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	0
Caso 3:	1	0	1
Caso 4:	1	1	0

Expressão da Tabela Verdade $S=\overline{A}.\overline{B}+A.\overline{B}$

Simplificação da Expressão por Álgebra de Boole

$S=\overline{A}.\overline{B}+A.\overline{B}$

$S=\overline{B}.\underbrace{(\overline{A}+A)}_{1}$

$S=\overline{B}$

Os dois termos da expressão diferem apenas pela variável *A*

Isso indica que a expressão independe de *A* $\Rightarrow$ pode-se eliminar *A* da expressão

Fundamentos de Lógica

Exemplo

	A	B	S
Caso 1:	0	0	1
Caso 2:	0	1	0
Caso 3:	1	0	1
Caso 4:	1	1	0

Expressão da Tabela Verdade $S=\overline{A}.\overline{B}+A.\overline{B}$

Simplificação da Expressão por Mapa de Karnaugh

$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{B}$	B	$\overline{A}B$
$\overline{A}$	1	0	
A	1	0	
$A\overline{B}$			AB

No mapa, os termos adjacentes podem ser agrupados para simplificar a expressão (igual à Álgebra, mas de forma visual)

O termo agrupado elimina uma variável $\Rightarrow S=\overline{B}$

($\overline{B}$ é o "endereço" do par de "1s", ou seja, a intersecção das variáveis que não " mudam")

Exercícios

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

1)

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

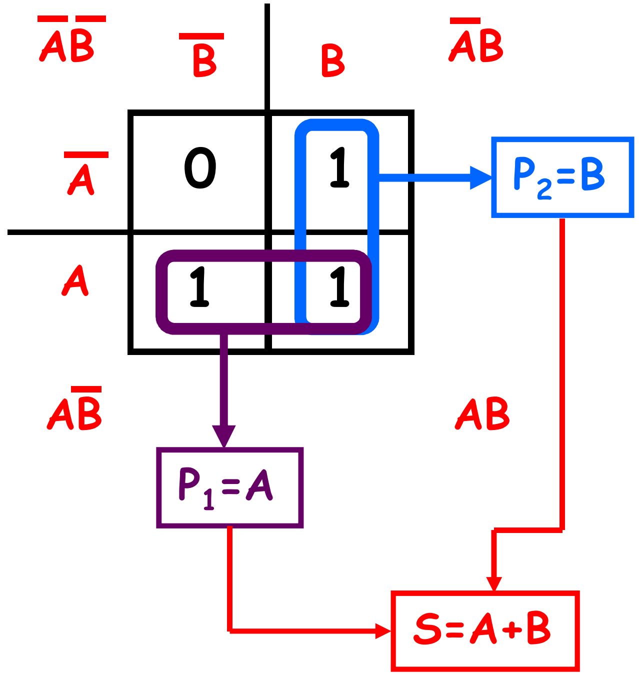
Soluções

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

1)

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$S=\overline{A}.B+A.\overline{B}+A.B$



Exercícios

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

2)

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

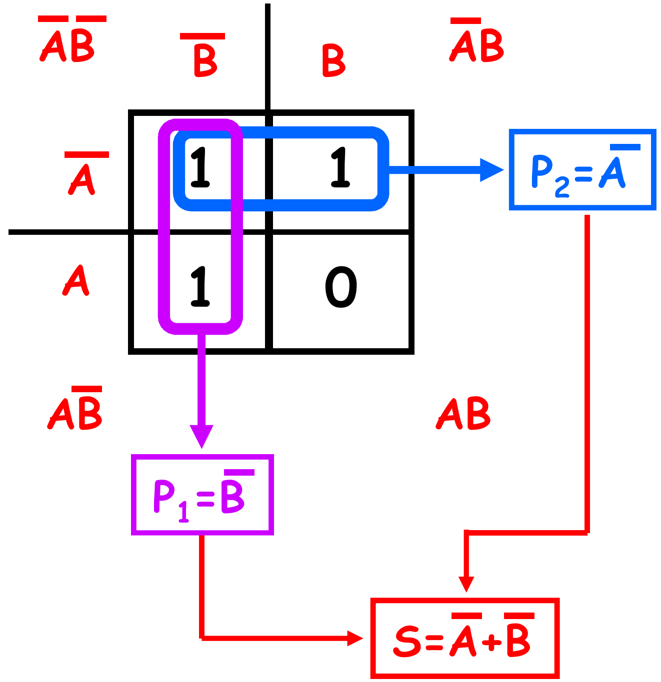
Soluções

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

2)

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$S=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}.B+A.\overline{B}$



Exercícios

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

3)

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

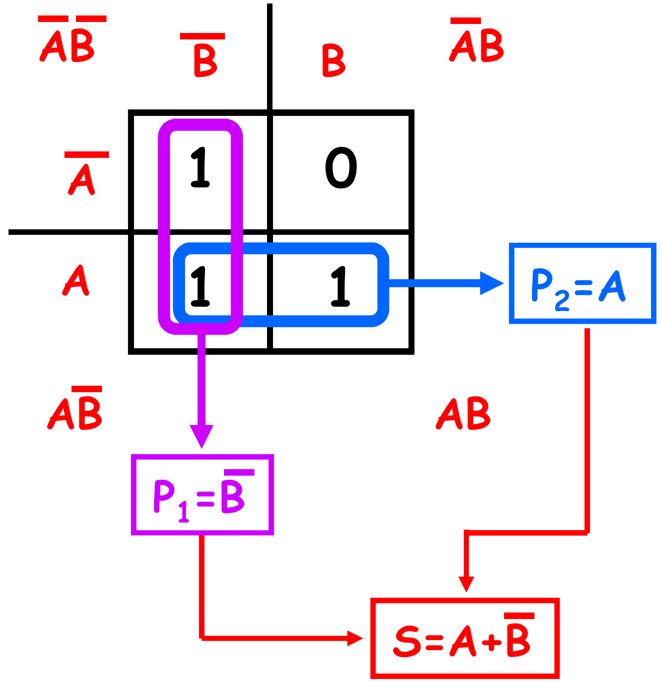
Soluções

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

3)

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

$S=\overline{A}.\overline{B}+A.\overline{B}+A.B$



Exercícios

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

4)

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

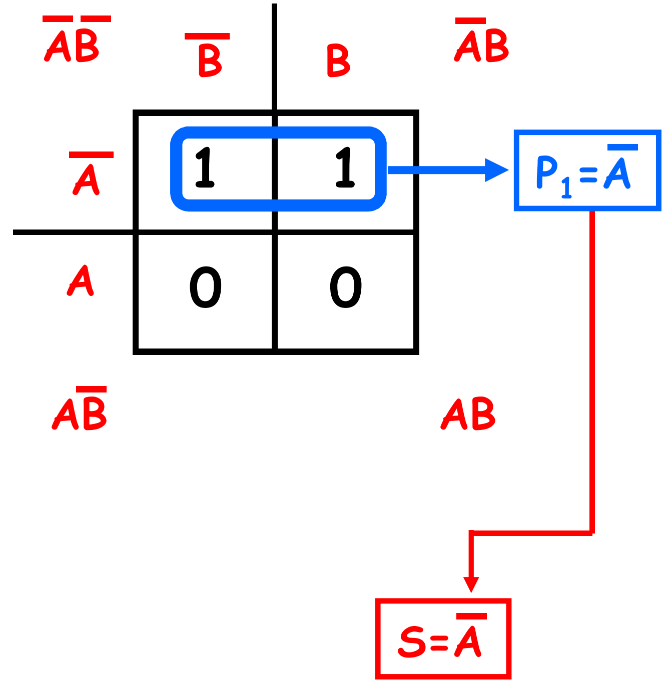
Soluções

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

4)

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$S=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}.B$



Exercícios

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

5)

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Soluções

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

5)

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$S=\overline{A}.\overline{B}+\overline{A}.B+A.\overline{B}+A.B$

Simplificação da Expressão por <u>Álgebra de Boole</u>

$S=\overline{A}.\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}+A.\underbrace{(\overline{B}+B)}_{1}$

$S=\overline{A}+A$

$S=1$

$\overline{A}\overline{B}$ $\overline{A}B$

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	1
A	1	1

$A\overline{B}$ AB

$Q_1=1$ Quadra

$S=1$

Exercícios

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

6)

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

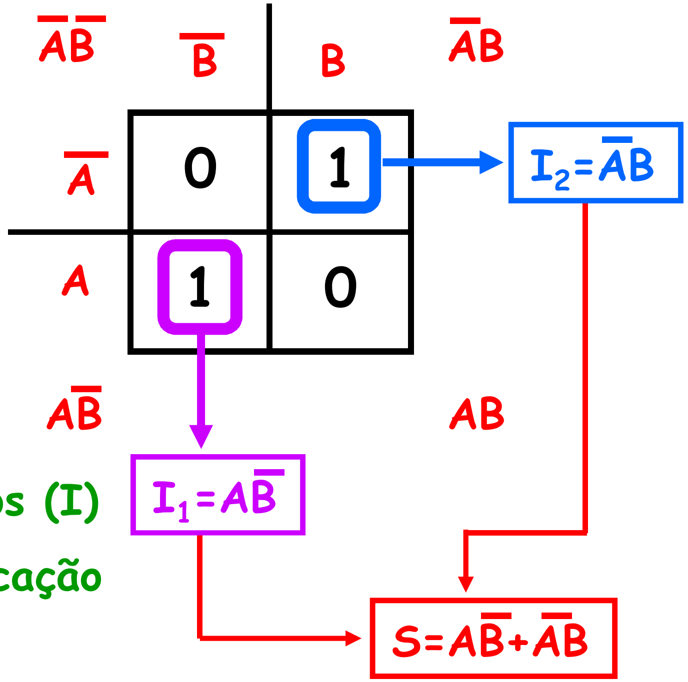
Soluções

Dada a Tabela Verdade, determine a expressão lógica a partir da TV e faça a simplificação por meio do Mapa de Karnaugh

6)

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$S=\bar{A}.B+A.\bar{B}$



Termos Isolados (I)

Obs.:Não houve simplificação

Resumo da Aula de Hoje

Tópicos mais importantes:

- Formas de Onda
- Simplificação de Expressões Booleanas por Mapa de Karnaugh

Próxima Aula

- **Mapa de Karnaugh de 3 e 4 variáveis**