Álgebra Linear - Matrizes

Prof. André Tiba

akot@cin.ufpe.br

Baia 65, ramais: 4765 ou 4338

esta aula baseia-se nas notas de aula gentilmente cedidas pelo professor Carlos Mello

Matrizes

1. Definições
2. Tipos especiais de Matrizes
3. Notação
4. Operação com Matrizes

Matrizes: definições

- Uma matriz é uma estrutura bi-dimensional onde todos os elementos são do mesmo tipo (ou inteiros, ou reais, ou complexos, etc ...).
- Os elementos são dispostos em linhas e colunas e cada célula dela é completamente identificada pela sua posição e seu valor.
- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

Matrizes: definições

- Uma matriz de *m* linhas e *n* colunas é representada por:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{mxn}$$

Matrizes: definições

- **Definição:** Duas matrizes $A_{mxn}=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B_{rxs}=[b_{ij}]_{rxs}$ são ditas iguais $A = B$, se elas têm o mesmo número de linhas $(m = r)$ e colunas $(n = s)$, e todos os seus elementos correspondentes são iguais $(a_{ij} = b_{ij})$.

Matrizes: tipos especiais

- **Matriz Quadrada:** É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, $n = m$.

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{nxn}$$

obs: diz-se que A_{nxn} é uma matriz quadrada de ordem *n*.

Matrizes: tipos especiais

- **Matriz Nula:** é aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo *i* e todo *j*.

$$A_{nxm} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = [a_{ij} = 0]_{nxm}$$

obs: utiliza-se a o algarismo 0 ("zero") em negrito para representar qualquer matriz nula.

Matrizes: definições

- **Matriz Coluna:** É aquela que possui apenas uma única coluna.

$$A_{nx1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = [a_i]_{nx1}$$

obs: A_{nx1} também é chamada de vetor coluna.

- **Matriz Linha:** É aquela que possui apenas uma única linha.

$$A_{1xn} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots. & a_n \end{pmatrix} = [a_i]_{1xn}$$

obs: A_{1xn} também é chamada de vetor linha.

Matrizes: tipos especiais

- **Matriz Diagonal:** É uma matriz quadrada ($m=n$) onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes: tipos especiais

- **Matriz Identidade Quadrada:** É aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obs: utiliza-se a letra I ("i" maiúsculo) em negrito para representar qualquer matriz identidade .

Matrizes: tipos especiais

- **Matriz Triangular Inferior:** matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos ($a_{ij} = 0$ para todo $i < j$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Matriz Triangular Superior:** matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos ($a_{ij} = 0$ para todo $i > j$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes: tipos especiais

- **Matriz Simétrica:** matriz quadrada, $n = m$, onde $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes: notação

- Matrizes são representadas por letras maiúsculas (muitas vezes em negrito); seus elementos são representados pela respectiva letra minúscula, com dois índices;
  - matriz → A;
  - a_{ij} elemento de A referente a posição da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna;
- Vetores são representados por letras minúsculas (muitas vezes em negrito); seus elementos são representados pela mesma letra minúscula, com um índice.
  - vetor linha ou coluna → a;
  - a_i elemento de a, referente a i-ésima linha ou coluna.

Matrizes: operações

- **Adição:** A soma de duas matrizes de mesma ordem $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$ e $B_{mxn} = [b_{ij}]_{mxn}$, que denotamos por $A + B$, é a matriz S_{mxn} cujos elementos, $[s_{ij}]$, são dados pela soma dos correspondentes elementos de A e B, isto é:
  - $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = S$$

$$\begin{bmatrix} 2+0 & 3-2 & 4+1 \\ 2+1 & 5+4 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrizes: operações

- **Adição:** Propriedades (A_{mxn}, B_{mxn} e C_{mxn})
  - A + B = B + A (comutatividade)
  - A + (B + C) = (A + B) + C (associatividade)
  - A + **0** = A, onde **0** denota a matriz nula mxn.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = B + A$$

comutatividade:
$$\begin{bmatrix} 2+1 & 3+0 \\ 1+2 & 1+3 \\ -1+3 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 0+3 \\ 2+1 & 3+1 \\ 3-1 & -1+0 \end{bmatrix}$$

Matrizes: operações

associatividade aditiva:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\begin{bmatrix} 2 + (1+3) & 3 + (0+1) \\ 1 + (2+2) & 1 + (3+0) \\ -1 + (3+4) & 0 +(-1-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+1) + 3 & (3+0) + 1 \\ (1+2) + 2 & (1+3) + 0 \\ (-1+3) + 4 & (0 -1) - 3 \end{bmatrix}$$

elemento neutro aditivo:

$$A + \mathbf{0} = A$$

$$\begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ 1+0 & 1+0 \\ -1+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes: operações

- **Multiplicação por um Escalar:** Seja $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e k um número real, então definimos uma nova matriz B como
  - $B = [b_{ij}]_{mxn} = k*A = [k*a_{ij}]_{mxn}$
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad k = 2 \quad \Rightarrow \quad B = 2*A = \begin{bmatrix} 2*2 & 2*3 \\ 2*1 & 2*1 \\ 2*(-1) & 2*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Propriedades
    - $k.(A + B) = k.A + k.B$, sendo B uma matriz de mesma ordem que A;
    - $(k_1 + k_2).A = k_1.A + k_2.A$, k_1 e k_2 números reais;
    - $0.A = \mathbf{0}$, onde 0 é o número zero e **0** é a matriz nula;
    - $k_1.(k_2.A) = (k_1.k_2).A$, k_1 e k_2 números reais.

Matrizes: operações

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 3$$

- $k_1.(A + B) = k_1.A + k_1.B$

$$2*\begin{bmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 1+2 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*(2+1) & 2*(1+1) \\ 2*(1+2) & 2*(3+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*2 + 2*1 & 2*1 + 2*1 \\ 2*1 + 2*2 & 2*3 + 2*0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2*2 & 2*1 \\ 2*1 & 2*3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2*1 & 2*1 \\ 2*2 & 2*0 \end{bmatrix} = 2*\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2*\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- $k_1.(k_2.B) = (k_1.k_2).B$

$$2*\begin{bmatrix} 3*1 & 3*1 \\ 3*2 & 3*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*3*1 & 2*3*1 \\ 2*3*2 & 2*3*0 \end{bmatrix} = 2*3*\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes: operações

- **Transposição:** dada uma matriz $A=[a_{ij}]_{mxn}$, podemos obter outra matriz $A' = [b_{ij}]_{nxm}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$.
- A' ou A^t, é chamada de *transposta de A.*
- Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes: operações

- Propriedades:
  - Se A é simétrica, então A = A'
  - A'' = A
  - (A + B)' = A' + B'
  - (k.A)' = k.A', onde k é um número

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)' = A' + B'$$

$$\begin{bmatrix} 2+3 & 3+3 & 4+5 \\ 1+2 & 5+2 & 7+1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+2 \\ 3+3 & 5+2 \\ 4+5 & 7+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes: operações

- **Multiplicação de Matrizes:** Sejam $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B= [b_{ij}]_{nxp}$, definimos $C = A.B = [c_{uv}]_{mxp}$, onde:
  - $c_{uv} = \Sigma_{k=1}^{n} b_{uk} . A_{kv}$
  - OBS:
    - i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes A_{mxn} e B_{sxp}, se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, i.e., n = s. Além disso, a matriz resultado C = A.B terá ordem mxp.
    - ii) O elemento c_{ij} é obtido multiplicando os elementos da linha *i* da primeira matriz pelos elementos da coluna *j* da segunda matriz, e somando esses produtos

Matrizes: operações

- **Multiplicação de Matrizes: exemplos**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 2*1 + 1*0 & 2*1 + 1*2 \\ 1*1 + 3*0 & 1*1 + 3*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B*A = \begin{bmatrix} 1*2 + 1*1 & 1*1 + 1*3 \\ 0*2 + 2*1 & 0*1 + 2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B*C = \begin{bmatrix} 1*3 + 1*1 & 1*2 + 1*1 & 1*4 + 1*3 \\ 0*3 + 2*1 & 0*2 + 2*1 & 0*4 + 2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

C*A → não é possível pois os tamanhos, da linha de C e da coluna de A, são diferentes !

Matrizes: operações

- **Multiplicação de Matrizes:**
  - Propriedades
    - i) Em geral, $A.B \neq B.A$, observe que A.B pode ser igual a 0_{mxn}, sem que A ou B sejam 0_{mxn}
    - ii) $AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade
    - iii) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (Distributividade à esquerda)
    - iv) $(A + B).C = A.C + B.C$ (Distributividade à direita)
    - v) $(A.B).C = A.(B.C)$ (Associatividade)
    - vi) $(AB)' = B'A'$, observe a mudança na ordem do produto
    - vii) $0.A = 0$ e $A.0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ é uma matriz nula

Matrizes: operações

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- IA = AI = A

$$I*A = \begin{bmatrix} 1*2 + 0*1 & 1*1 + 0*3 \\ 0*2 + 1*1 & 0*1 + 1*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A*I = \begin{bmatrix} 2*1 + 1*0 & 2*0 + 1*1 \\ 1*1 + 3*0 & 1*0 + 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (AB)' = B'A'

$$AB = \begin{bmatrix} 2*1 + 1*0 & 2*1 + 1*2 \\ 1*1 + 3*0 & 1*1 + 3*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2 + 0*1 & 1*1 + 0*3 \\ 1*2 + 2*1 & 1*1 + 2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrizes:

- Problemas Sugeridos: do1 ao 14