



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

Centro de Tecnologia - CTC
Departamento de Informática – DIN

5189-32 – ALGORITMOS EM GRAFOS – INFORMÁTICA
Prof. Rodrigo Calvo

Lista de Exercícios 1

Conceitos Básicos

- 1) Faça uma lista de todos os grafos que tenham $\{a, b, c\}$ por conjunto de vértices.
- 2) Quantas aresta um grafo completo de 5 vértices possui? Faça uma figura do grafo.
- 3) O grafo das palavras é definido como: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, rato e ralo são adjacentes, enquanto ralo e rota não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

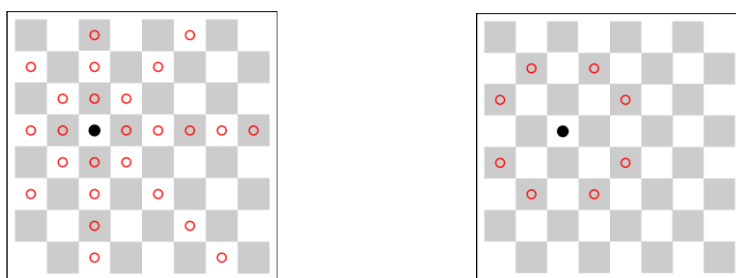
*caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato remo reta reto rota vaiado
varado virada virado virava*

Escreva a lista de adjacência.

- 4) Para qualquer inteiro positivo k , um cubo de dimensão k (ou k -cubo) é o grafo definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são todas as sequências $b_1 b_2 \dots b_k$ de bits; dois vértices são adjacentes se e somente se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, os vértices do cubo de dimensão 3 são 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111; o vértice 000 é adjacente aos vértices 001, 010, 100 e a nenhum outro; e assim por diante. O cubo de Q_k dimensão k será denotado por Q_k . Faça figuras dos cubos Q_1 , Q_2 e Q_3 . Escreva a lista de adjacência. Quantos vértices tem Q_k ? Quantas arestas tem Q_k ?
- 5) O grafo dos movimentos da rainha em jogo de xadrez, ou simplesmente grafo da rainha, é definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas (no tabuleiro usual temos $t = 8$) e dois vértices são adjacentes se a uma rainha pode saltar de um deles para o outro em um só

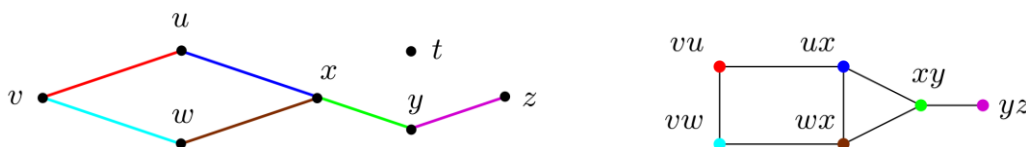
movimento. Para deixar claro o número de linhas e colunas do tabuleiro, podemos dizer que esse é o grafo da rainha t -por- t (veja figura). Faça uma figura do grafo da rainha 4-por-4. Escreva a matriz de adjacência e grafo da rainha 4-por-4. Quantas arestas tem o grafo da rainha 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo da rainha t -por- t ?

- 6) O grafo do cavalo t -por- t é definido da seguinte maneira: os vértices do grafo são as casas de um tabuleiro de xadrez com t linhas e t colunas; dois vértices são adjacentes se um cavalo do jogo de xadrez pode saltar de um deles para o outro em um só movimento (veja figura). Faça uma figura do grafo do cavalo 3-por-3. Escreva a matriz de adjacência do grafo do cavalo 3-por-3. Quantas arestas tem o grafo do cavalo 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo do cavalo t -por- t ?



Tabuleiros de xadrez 8-por-8. A figura esquerda indica todos os vizinhos do vértice • no grafo da rainha. A da direita indica todos os vizinhos do vértice • no grafo do cavalo.

- 7) Duas arestas de um grafo G são adjacentes se têm uma ponta comum. Essa relação de adjacência define o grafo das arestas de G . De modo mais formal, o grafo das arestas de um grafo G é o grafo (AG, A) em que A é o conjunto de todos os pares de arestas adjacentes de G . O grafo das arestas G é denotado por $L(G)$. (Veja a figura) Faça uma figura de $L(K_3)$. Faça uma figura de $L(K_4)$, onde K_3 e K_4 são grafos completos de 3 e 4 vértices, respectivamente. Escreva a matriz de adjacência de $L(K_4)$. Quantos vértices e quantas arestas tem $L(K_n)$?



Um grafo (esquerda) e o seu grafo das arestas (direita).

- 8) Uma pequena fábrica tem cinco máquinas — 1, 2, 3, 4 e 5 — e seis operários — A, B, C, D, E e F. A tabela especifica as máquinas que cada operário sabe operar:

A 2, 3

B 1, 2, 3, 4, 5

C 3

D E 2, 4, 5

F 2, 5

Faça uma figura do grafo bipartido que representa a relação entre operários e máquinas. Faça a matriz de adjacência do grafo resultante. É possível reduzir o tamanho da matriz? Se for possível, quais seriam as mudanças necessárias na matriz de adjacência?

9) É verdade que o grafo do cavalo no tabuleiro t-por-t é bipartido?

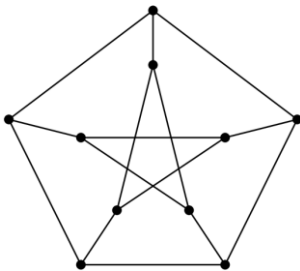
10) Qual o número máximo de arestas que um grafo bipartido pode ter?

11) Dada uma matriz de adjacência para um grafo não direcionado, como calcular o grau de cada vértice? E para um grafo direcionado? Considerando agora uma lista de adjacência para grafos direcionados e não direcionados, como encontrar o grau de cada vértice?

12) Um grafo estrela $G=(V, A)$ é um grafo bipartido onde um vértice $V_1 = \{x\}$ e toda aresta (x, u) , $u \in V_2$ e $V_1 \cup V_2 = V$. Sendo assim, qual é o grau do vértice x e dos demais vértices do grafo?

13) Em um grafo completo, qual o grau dos vértices?

14) No grafo a seguir, qual o vértice com menor grau, o de maior grau e qual o grau médio do grafo?



15) Um grafo $G = (V, A)$ é dito regular se todos os vértices possuem o mesmo grau. Um grafo é r -regular se todos os vértices possuem grau r . Mostre que para um grafo bipartido com subconjuntos de vértices V_1 e V_2 é r -regular, $|V_1| = |V_2|$.

- 16) É verdade que todo grafo não direcionado com pelo menos dois vértices tem dois vértices com o mesmo número de vizinhos?
- 17) Mostre que, em todo grafo não direcionado, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas.
- 18) Mostre que todo grafo com n vértices tem no máximo $n(n - 1)/2$ arestas.
- 19) Mostre que em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é necessariamente par.
- 20) Quantas arestas tem o grafo da dama 8-por-8? Quantas arestas tem o grafo da dama t -por- t ? Quantas arestas tem o grafo do cavalo 4-por-4? Quantas arestas tem o grafo do cavalo t -por- t ?
- 21) Qual é o número mínimo de arestas que um ciclo pode ter em um grafo não direcionado. Por quê?
- 22) Considere o ciclo $\{u v w x y z u\}$. Mostre que $\{z y x w v u z\}$ também é um circuito. Mostre que qualquer permutação cíclica — como $\{w x y z u v w\}$, por exemplo — também é um circuito. Mostre que todas essas expressões representam o mesmo circuito.
- 23) É verdade que todo grafo 2-regular é um circuito?
- 24) Suponha que H é um subgrafo de G . Se $V_H = V_G$, é verdade que $H = G$? Se $E_H = E_G$, é verdade que $H = G$?
- 25) Seja G um grafo, V_0 um subconjunto de V_G e E_0 um subconjunto de E_G . É verdade que (V_0, E_0) é um subgrafo de G ?