RESUMÃO

ÁLGEBRA LINEAR

todos os conceitos, gráficos e fórmulas necessárias, em um só lugar.

GoBooks

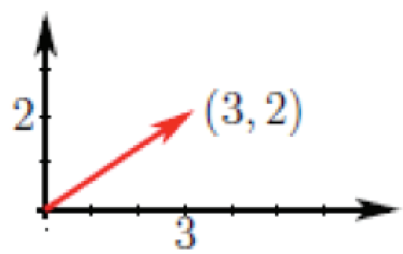
PUC QUE PARIU!

Gobooks.com.br

PucQuePariu.com.br

1. O QUE É ÁLGEBRA LINEAR?
VETORES, OPERAÇÕES E ESPAÇOS VETOR

Um vetor é uma lista ordenada de números. Podemos usar uma interpretação geométrica para enxergar melhor o que é um vetor; essa interpretação é basicamente pensar no vetor como uma "seta" que dá uma direção, sentido e tem um certo tamanho.
Por exemplo, o vetor (3,2) que pertence ao R^2.Sua interpretação geométrica é marcar no plano cartesiano o ponto x=3 , y=2 e ligar a origem (0,0) até esse ponto.



OPERAÇÕES

Soma de vetores - Fazer a soma de vetores é basicamente somar as coordenadas.
Subtração de vetores - A subtração de vetores é igual à soma, a única diferença é que você vai subtrair cada coordenada invés de somá-las.

Multiplicação por escalar - Essa operação consiste em pegar UM número real e multiplicar um vetor , esse número (escalar) multiplica cada coordenada do vetor.

COMBINAÇÃO LINEAR E INDEPENDECIA LINEAR

Combinação linear é tentar escrever um vetor como combinação de outros. Para fazer uma combinação linear usamos as operações que acabamos de apresentar de forma conjunta para tentar chegar ao vetor original.

Exemplo: Existem escalares α,β tal que α*(1,2)+β*(1,1) = (2,3)? Podemos ler isso como "O vetor (2,3) é combinação linear de (1,2) e (1,1)?"

$\alpha*(1,2)+\beta*(1,1) = (2,3) \Rightarrow (\alpha*1+ \beta*1 , \alpha*2 + \beta*1) = (2,3)$

$\alpha = 1 \quad \beta = 1$

logo, (2,3) é combinação linear de (1,2) e (1,1).

Quando um vetor é combinação linear de outros dizemos que eles são Linearmente Dependentes (LD).
No exemplo acima, (2,3) é LD com (1,2) e (1,1); caso não existissema e β que resolvessem aquele sistema, diríamos que eles são Linearmente Independentes (LI).
Para sabermos se n vetores {v1,v2, ..., vn} são LI's ou LD's fazemos como a seguir. Sea1,a2,..., an são escalares, olhamos para o sistema

a1*v1 + a2*v2 + a3*v3 + ... + an*vn = 0 (vetor nulo)

É claro que a1=a2=a3=...=an=0é solução. Se essa for a única solução, então os vetores {v1,v2...vn} são LI. Caso contrário, eles são LD.

Por que isso? Se no sistema abaixo a1≠ 0, então

a1*v1 + a2*v2 +a3*v3 = 0   ->   -a1*v1 = a2*v2 +a3*v3 ->v1= -(a2*v2+a3*v3)/a1

ou seja, v1 é combinação de v2 e v3, sendo então LD. Logo, para que v1, v2 e v3 sejam LI's, deve ser a1=0. O mesmo pode ser feito para provar que a2 e a3 devem ser 0.

PARAMETRIZAÇÃO

É possível descrever espaços em função de vetores, a isso se dá o nome de parametrização. A primeira coisa com que é preciso se preocupar é qual a dimensão do espaço que queremos descrever. Por exemplo, uma reta tem dimensão um, um plano tem dimensão dois, um ponto tem dimensão zero.

Isso é importante porque o número de dimensões do seu espaço é o número de vetores LI's necessários para descrevê-lo. Cada vetor LI dá uma direção, dimensão nova: esses vetores são chamados vetores diretores.

Sabendo a dimensão agora é preciso saber por onde o espaço passa, por quais pontos.
Conhecendo 1 ponto do espaço e vetores LI's desse espaço você consegue defini-lo fazendo:

P->Ponto

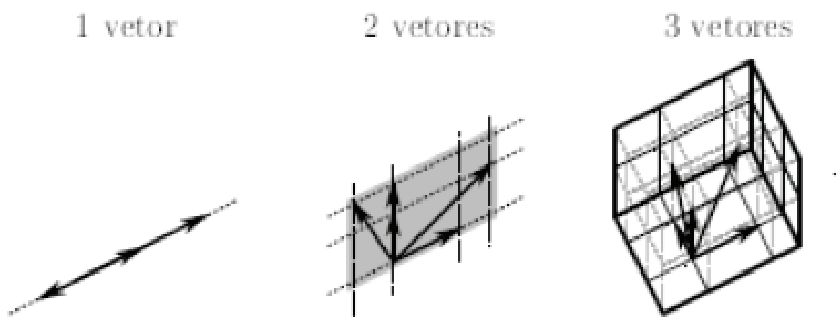
{v1...vn} -> vetores LI's

{t1...tn} -> parâmetros reais

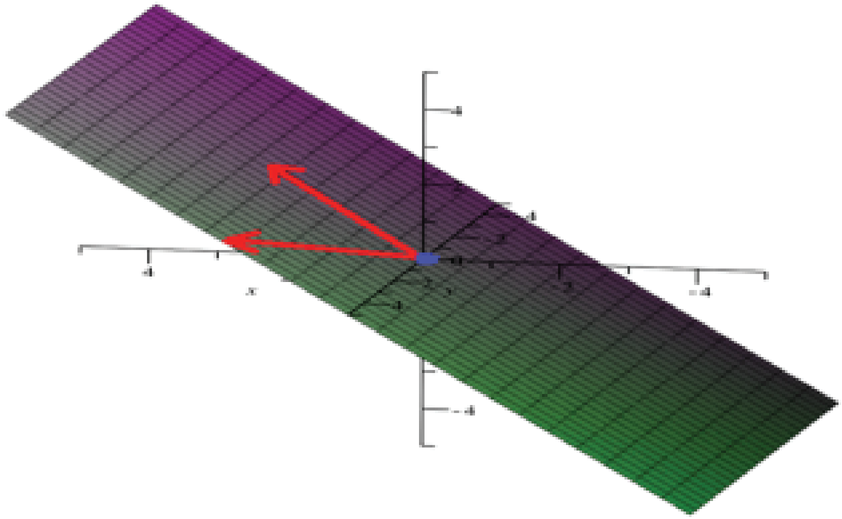
S = P + t1*v1 +t2*v2 +...+ tn*vn{t1...tn} variam

Por que isso?

Olhando somente para (t1*v1 +t2*v2 +...+ tn*vn) percebemos que isso é uma combinação linear, ou seja, como os parâmetros são variáveis livres, estamos definindo TODOS os vetores gerados por {v1...vn}; isso ficará mais claro no exemplo. Ao somarmos um ponto, estamos fixando a posição desses vetores (pois



Exemplo: Vamos parametrizar um plano α que passa no ponto (0,0,0) e contém os vetores (1,1,1) e (1,0,1). Perceba que eles são LI's usando a formula já mencionada.



Então a parametrização seria:$\alpha = (0,0,0) + t(1,1,1) + s(1,0,1)$, ou simplificando: $\alpha=(t+s,t,t+s)$. t e s são variáveis livres. O número de variáveis livres dá a dimensão do espaço, no caso dois, logo dois vetores LI's, um plano.

EQUAÇÕES CARTESIANAS

Outra forma de definir espaço é através de sistemas de equações cartesianas: a solução do sistema é o espaço gerado. Nas equações cartesianas não aparecem os parâmetros, mas sim as coordenadas cartesianas.

O mais importante nesse tópico é saber reconhecer a dimensão do espaço gerado olhando para as equações cartesianas.

É preciso ter em mente que cada equação "prende" uma variável. Por exemplo, pensando em uma equação do R^3, como $x+y+z=0$, podemos escrevê-la de forma que x dependa de y e z, deixando de ser livre: $x= -z-y$. Quando prendemos uma variável, perdemos uma dimensão.
Assim, cada equação tira uma dimensão do meu espaço. A dimensão máxima é dada pelo domínio: se o domínio é R^4, então a dimensão máxima do espaço é 4.
Exemplo:

emR^4 :

{$x+y+z+w=0$

{$z+w=0$

Como são 2 equações independentes (não são combinações), prendemos 2 variáveis, então a dimensão vai ser dada por 4 – 2=2, isto é, temos um plano emR^4.
Como passar da cartesiana para paramétrica?

Usando o mesmo exemplo, sabemos que a equação paramétrica é de R^4, então ela vai ter a cara (x,y,z,w). Sabemos que $z+w=0$, donde $z=-w$, e que $x+y+z+w=0$. Substituindo $z=-w$, temos que $x+y-w+w=0$, ou $x=-y$. Concluímos que $x=-y$ e $z=-w$. Sendo assim, y e w são as variáveis livres – os parâmetros do nosso espaço –e a parametrização fica (-y,y,-w, w).

ESPAÇO GERADO

O espaço gerado pelo conjunto de vetores {v1,v2,...,vn} é o conjunto de todas as combinações lineares de v1,v2,v3...vn.

Notação: Sendo S o espaço gerado e {v1, ... ,vn} vetores contidos nesse espaço, definimos espaço gerado como
S = <v1,v2, ... ,vn> (pode-se ler isso como, S é o espaço gerado por v1,v2...vn

2. SISTEMAS LINEARES E SUAS DIFERENTES FORMAS DE INTERPRETAÇÃO

SISTEMAS LINEARES

São um conjunto de equações cartesianas. Um vetor reposta deve satisfazê-las todas, ao mesmo.

FORMA MATRICIAL DE SISTEMAS LINEARES

Um sistema linear pode ser entendido como uma multiplicação Matriz-Vetor da forma A*x = b, onde A é a matriz cujas entradas são os coeficientes que multiplicam o vetor incógnita (ou vetor reposta) x = (x,y,z,...), e b é o vetor dos termos independentes.

Exemplo: Dado esse sistema

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 10x + 20y = 1250 \end{cases} .$$

podemos escrevê-lo da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \&* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 1250 \end{bmatrix}$$

ou também como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 10 & 20 & 1250 \end{bmatrix}$$

É possível também ver o Sistema Linear como uma combinação linear de vetores. Usando o mesmo exemplo, podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 1250 \end{bmatrix}$$

Ou seja , o sistema tem solução se o vetor (100,1250) pertence ao espaço gerado pelos vetores (1,10) e (1,20).

SISTEMA HOMOGÊNEO

É o sistema linear cujo vetor b dos termos independentes é totalmente nulo. Em forma matricial, um sistema homogêneo tem a forma A*x =0.

É comum aparecer a denominação sistema homogêneo associado. O sistema homogêneo associado a um sistema Ax=b é simplesmente o sistema Ax=0.

É importante notar que se obtivermos uma solução particular (xp) do sistema e a solução geral do homogêneo associado, obtemos todas as soluções do sistema. Isso porque A*(xp)=b e A*(x) = 0, e somando as duas equações temos A(x+xp)=b, donde a solução geral do sistema é dada por xp+x.

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

Existem várias formas de resolver sistemas. A mais conhecida é a substituição, que consiste em isolar uma variável em uma equação e substituir na outra até só sobrar uma.
No entanto a mais eficiente é o escalonamento, que consiste em usar a matriz do sistema e através de combinações das linhas transformá-la em uma matriz triangular superior.
Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 10 & 20 & 1250 \end{bmatrix}$$

Fazendo -10 * a primeira linha + a segunda linha temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 0 & 10 & 250 \end{bmatrix}$$

ou seja, 10*y=250, y=25, substituindo na de cima temos, x+25=100 x = 75

INTERPRETAÇÃO DAS SOLUÇÕES DE UM SISTEMA

Existem três possibilidades para a solução de um sistema

Sistema Possível Determinado (SPD).

Esse tipo de solução define um único vetor resposta x para o sistema. Em termos de combinações lineares, o vetor b pode ser escrito como combinação das colunas da matriz A de forma única. Geometricamente falando, dizemos que essa solução é um ponto no espaço.

Sistema Possível Indeterminado (SPI)

Esse tipo de solução define infinitos vetores resposta x para o sistema. A solução pode ser uma reta, um plano, um hiperplano... Ou seja, o vetor b pode ser escrito de infinitas formas como combinação dos vetores coluna de A.

Sistema Impossível (SI)

Esse tipo de sistema não tem solução: não existe x que satisfaça o sistema. Em outras palavras, o vetor b está fora do espaço gerado pelos vetores coluna da matriz A.

3. SUBESPAÇOS, ESPAÇOS VETORIAIS E BASES

ESPAÇO VETORIAL

Para que um conjunto seja um espaço vetorial é preciso que seus elementos (vetores, matrizes, funções, etc) respeitem os oito axiomas - quatro da soma, quatro da multiplicação. São eles:

Axioma 3.2 (axiomas da soma vetorial)

- *comutativa:* $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *para todo* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
- *associativa:* $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *para todo* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;
- *elemento neutro da soma: Existe* $\mathbf{0} \in V$ *tal que* $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ *para todo* $\mathbf{u} \in V$;
- *inverso aditivo: Dado* $\mathbf{u} \in V$, *existe* $\mathbf{w} \in V$ *tal que* $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$. *Denotamos* $\mathbf{w}$, *o inverso aditivo de* $\mathbf{u}$, *por* $-\mathbf{u}$.

Axioma 3.3 (axiomas da multiplicação por escalar (produto escalar-vetor)) *Dados vetor $\mathbf{u} \in V$ e escalares α, β:*

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u})$;
- *elemento neutro do produto:* $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Axioma 3.4 (axiomas distributivos) *Dados vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ e escalares α, β:*

- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$.

SUBESPAÇO VETORIAL

Um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial que é, em si, também um espaço vetorial. Assim, para que um subconjunto seja um subespaço vetorial é preciso que seus elementos respeitem duas regras:

- Se somarmos dois elementos quaisquer desse subconjunto, o resultado deve ainda pertencer ao subconjunto.
- Se multiplicarmos um elemento qualquer do subconjunto por um escalar qualquer, o resultado deve ainda pertencer ao subconjunto.

DICA: Caso seja pedido para verificar se um conjunto é ou não um subespaço, prossiga como a seguir.

1. Defina um elemento genérico do seu conjunto: tenha certeza de que todas as condições do conjunto estão satisfeitas por esse elemento.

2. Tome dois elementos genéricos distintos, some-os e verifique se o resultado ainda satisfaz todas as condições do conjunto. Se não, não é subespaço.

3. Multiplique um elemento genérico por um escalar qualquer e verifique se o resultado ainda satisfaz todas as condições do conjunto. Se não, não é subespaço; se sim, é um subespaço!

Observe que se ele respeita essas duas condições, a origem obrigatoriamente pertence ao conjunto. Exemplos: Um plano que passa pela origem é um subespaço. No entanto, o primeiro quadrante do plano cartesiano não é: se multiplicarmos um vetor qualquer do primeiro quadrante por -1, o vetor resultante não estará no primeiro quadrante.

BASE

Pode-se entender a base como as coordenadas de um espaço vetorial: a partir dos elementos da base é possível escrever qualquer elemento do subespaço como uma combinação linear única. Isso significa que a base possui somente elementos LI's, e eles são na quantidade exata, isto é, na dimensão desse espaço vetorial. Se o espaço vetorial tem dimensão n, uma sua base terá n elementos LI's.

MUDANÇA DE BASE

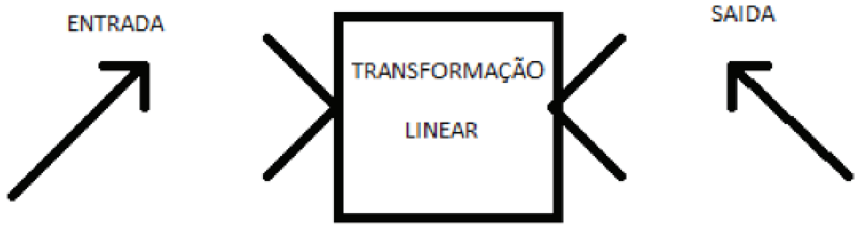
Mudar a base de um espaço é simplesmente mudar as coordenadas do seu espaço: o espaço é o mesmo, o que muda é apenas como ele é descrito.

Exemplo: O vetor (2,3) está escrito na base canônica, mas se quisermos escrevê-lo na base β = {(1,1),(1,0)} – isto é, se quisermos os coeficientes da combinação linear dos vetores de β que gera (2,3) –, então devemos resolver (2,3) = a(1,1)+b(1,0). Teremos a =3 e b=-1; em outras palavras, o vetor (2,3) se escreve na base β como (3,-1).

4. TRANSFORMAÇÕES LINEARES E SUAS APLICAÇÕES

TRANSFORMAÇÃO LINEAR(TL)

Uma transformação linear é o análogo às funções de números reais, porém com vetores. Pode-se pensar nela como uma máquina, um vetor do espaço que passe pela máquina é modificado, e sai diferente do outro lado.



Uma transformação linear T entre espaços vetoriais não é uma função qualquer. Para que uma função entre espaços vetoriais seja uma TL, ela deve satisfazer para quaisquer vetores u,v e escalar c:

$T(v+u)=T(v)+T(u)$
$T(c*v)= c*T(v)$

Observe que toda TL satisfará, como consequência, $T(0) = 0$.

FORMA GERAL DE UMA TRANSFORMAÇÃO

Dizemos que uma transformação linear está escrita na forma geral se está em uma notação que mostra o que a transformação faz em um vetor genérico.

Exemplo: Uma transformação $T: R^3 \text{->} R^3$ dada por $T(x,y,z)=(x+y+z,x,z)$ está escrita na forma geral. Se tomarmos, por exemplo, o vetor (1,2,3) teremos $T(1,2,3) = (1+2+3,1,3)=(6,1,3)$.

FORMA MATRICIAL

Uma TL pode sempre ser escrita como uma matriz, o que facilita contas, pois aplicar a transformação em um vetor equivale a multiplicar a matriz pelo vetor.

O primeiro passo para montar a matriz de uma TL é saber o tamanho dela. Essa informação vem do Domínio e do Contradomínio: dada uma TL$R^m \text{->} R^n$, m é o Domínio e n é o Contradomínio. Dessa forma a matriz da TL vai ser n x m(n linhas e m colunas), ou seja, Contradomínio x Domínio.

O segundo passo é saber em qual base estamos trabalhando; se não for mencionado considera-se a base canônica. Conhecida a base, basta aplicar a TL cada um de seus vetores, o resultado de cada TL é uma coluna da matriz da transformação.

> Obs.: É importante respeitar a ordenação da base, isto é, a primeira coluna deve corresponder à imagem pela TL do primeiro vetor da base e analogamente para os demais.

Exemplo: Considere a TL $T: R^3 \text{->} R^3$ dada por $T(x,y,z)=(x+y+z,x,z)$.Aplicando-a aos vetores da base, no caso os vetores canônicos, obtemos:

- $T(1,0,0) = (1,1,0)$
- $T(0,1,0)=(1,0,0)$
- $T(0,0,1)=(1,0,1)$

donde a matriz fica:

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{3}{c}{\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}} \\ T(1,0,0) & T(0,1,0) & T(0,0,1) \end{array}$$

NÚCLEO, IMAGEM E BIJEÇÃO

O núcleo(Nuc) de uma TL são todos os vetores do domínio que quando transformados levam ao vetor nulo. Para descobrir o Núcleo de uma transformação basta resolver o Sistema T(v)=0; os vetores v que satisfazem esse sistema compõem o Núcleo.

A Imagem(Im) de uma TL é a "cara da máquina": é como um vetor genérico sai depois de transformado. Para descobrir a imagem de uma transformação, basta analisar o subespaço gerado pela transformação de uma base do domínio. Por exemplo, se o domínio é R^3, basta tomarmos três vetores LI's, transformá-los e analisar o subespaço gerado por eles.

Uma TL é injetora se o único vetor do núcleo é o vetor nulo, ou seja, quando a dimensão do núcleo é 0.
Uma TL é sobrejetora se sua imagem tem a mesma dimensão do Contradomínio.
Uma TL é bijetora se for simultaneamente injetora e sobrejetora.

Uma TL é quadrada se seu domínio e contradomínio têm a mesma dimensão, digamos n. Note que nesse caso sua matriz será n x n.

Propriedades:
dim(Nuc)+ dim(Im) = dim(Domínio); isso se aplica a toda TL
Uma TL quadrada é injetora se e somente se ela é sobrejetora. Com efeito, se ela é injetora, dim(Nuc) = 0, dondedim(Im) = dim(D), pela propriedade anterior. Como dim(D)=dim(CD), pois a TL é quadrada, segue quedim(Im)=dim(CD), isto é, a TL é sobrejetora. A implicação contrária é análoga.

COMPOSIÇÃO DE TL'S

Dadas duas TL's T e S, para que a composta S(T(v)) faça sentido, é necessário que o contradomínio de T tenha a mesma dimensão do domínio de S. Nesse caso, podemos usar a forma matricial para avaliar S(T(v)): basta fazer a multiplicação das duas matrizes S * T, e aplicar o resultado a v. Com efeito, a matriz produto S*T é a matriz da composta de S com T.

TRANSFORMAÇÃO DE MUDANÇA DE BASE

Já vimos que para achar a forma matricial de uma TL precisamos da imagem dos vetores da base. Mas e se tivermos mais de uma base, digamos α e β? Suponha que queiramos achar uma transformação que, quando aplicada a um vetor escrito na base α, produza o mesmo vetor, porém escrito na base β. Chamamos uma tal transformação de uma mudança de base.

Lembre que as colunas da matriz de uma TL são as imagens dos vetores da base pela TL. Assim, as colunas de uma mudança de base de α para β, serão os vetores de α escritos na base β.

Exemplo: Da base canônica α = {(1,0),(0,1)} para a base β = {(1,1),(1,0)}.
T(1,0) =(0,1), as coordenadas do vetor (1,0) de α escrito na base β
T(0,1) =(1,-1), as coordenadas do vetor (0,1) de α escrito na base β

$$T= \begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Definição 4.33 (matriz inversa e singular) *Diz-se que uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é* **invertível** *se existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $AB = BA = I$. Neste caso dizemos que B é a* ***matriz inversa*** *de A e denota-se B por A^{-1} (a unicidade é provada no próximo lema).*

Caso $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ não seja invertível dizemos que A é ***singular***.

Lema 4.34 (propriedades da inversa) *Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Então:*

(a) Inversa de A é única;

(b) $AB = I$ se, e somente se, $BA = I$, se e somente se $B = A^{-1}$;

(c) Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Teorema 4.36 (algoritmo para calcular matriz inversa) *Seja A uma matriz quadrada.*

(a) Monte matriz estendida $[A|I]$;

(b) Escalone totalmente até obter a matriz identidade no lado esquerdo.

Caso isto seja possível, a inversa aparecerá do lado direito: $[I|A^{-1}]$.

5. PRODUTO INTERNO, ÂNGULOS ENTRE VETORES, COMPLEMENTO ORTOGONAL E APLICAÇÕES

PRODUTO INTERNO

Definição 5.1 (produto interno no $\mathbb{R}^n$) *Dados $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, define-se o* ***produto interno***[2] *ou* ***produto escalar*** *de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ por $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$.*

Outras notações utilizadas são $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ para $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle$.

Exemplo: v=(a,b) e w=(c,d), <v I w> = a*c + b*d

O resultado do produto escalar de dois vetores é um número real.

Lema 5.2 (propriedades do produto interno) *Considere $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. O* ***produto interno***[3] *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) simetria: $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} \,|\mathbf{v} \rangle$;

(b) linearidade: $\langle \alpha\mathbf{u} + \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u} \,|\mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v} \,|\mathbf{w} \rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) positividade: $\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Definição 5.3 (norma) *Definimos a* ***norma***[4] *(ou comprimento) de $\mathbf{v}$ por $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v} \,|\mathbf{v} \rangle}$.*

Definição 5.4 (distância) *Definimos a* ***distância***[4] *entre dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.*

Propriedades:

- $\|0\| = 0$ *(vetor nulo tem norma zero)*,
- $\|\mathbf{v}\| = 0$ *se, e somente se,* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *(o único vetor com norma zero é o vetor zero)*,
- $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(vetor multiplicado por escalar tem norma modificada por módulo do escalar)*,
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ *se, e somente se* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
- $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$,
- $d(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{v}\|$.

ÂNGULO ENTRE VETORES

É possível determinar o cosseno do angulo entre dois vetores não-nulos usando o produto escalar, através da formula:

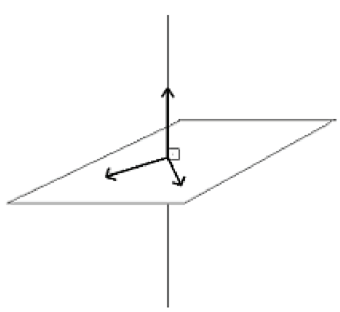
$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

Um caso especial é quando θ = π/2, ou seja, quando os vetores são perpendiculares. Nesse caso, cos(π/2) = 0, logo substituindo na equação acima temos que < u I v> = 0 se e somente se u for perpendicular a v. Observe que o vetor nulo é perpendicular a todos os vetores.

COMPLEMENTO ORTOGONAL

O complemento ortogonal V de um subespaço vetorial H é o maior subespaço vetorial com a seguinte propriedade: qualquer vetor de V é perpendicular a H, isto é, a todo vetor de H. Nesse caso, escrevemos V = e dizemos que V é o complemento ortogonal de H.

Um bom exemplo visual é pensar em um plano e uma reta perpendicular ao plano: qualquer vetor da reta é perpendicular a todo vetor do plano.



Para calcular o complemento ortogonal de um subespaço H, montamos uma matriz A cujas linhas são os vetores de uma base de H. O complemento ortogonal será então o Núcleo da matriz A, ou seja, devemos resolver o sistema A*x=0.

6. O QUE É DETERMINANTE DE UMA MATRIZ E SUAS INTERPRETAÇÕES GEOMÉTRICAS

DETERMINANTE

O determinante é uma função que associa a cada matriz real quadrada A um número denotado por det(A); esse número é uma generalização de área e volume. Para uma matriz 2x2, consideramos as colunas da matriz como arestas de um paralelogramo apoiado na origem, e calculamos sua área.

CÁLCULO DO DETERMINANTE

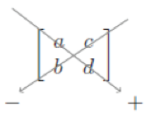
Para matrizes 2x2 temos

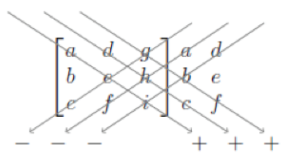
$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Det(A) = ad – cb
Para matrizes 3x3 temos

$$A = \begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

Det(A) = aei-ahf+ dhc-dbi+ gbf-gec.





PROPRIEDADES DO DETERMINANTE

1. O determinante é linear em cada coluna
2. O determinante é linear em cada linha
3. O determinante é zero se e somente se as colunas ou as linhas são LD's
4. Det(Id)=1
5. Se trocarmos duas colunas, ou duas linhas, o determinante troca de sinal
6. Det(A*B)=Det(A)*Det(B)
7. Det(A) =Det(AT)
8. O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é o produto dos elementos da diagonal.
9. São equivalentes: Det(A) = 0; A não é invertível; as colunas de A são LD's; as linhas de A são LD's; Nuc(A) ≠ 0.

Agora podemos calcular o determinante de matrizes n x n para qualquer n: basta escaloná-la e usar as propriedades 5 e 8! Lembre que caso haja troca de linhas, o determinante muda de sinal para cada troca.

PRODUTO VETORIAL

A operação de produto vetorial resulta num vetor perpendicular a todos os outros vetores de um subespaço. Em outras palavras, o produto escalar do resultado com cada um dos vetores originais é 0. Usaremos essa operação apenas em R^3.

O produto vetorial de u e vé denotado por u x v. Podemos calcular esse vetor montando uma matriz M de modo que u seja a segunda linha de M e v a terceira. Pondo enfim(i,j,k)– os versores da base – como a primeira linha, o determinante de M nos dá u x v.

Exemplo: u = (1,1,1) , v=(-1,1,-1) , u x v

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

O determinante dessa matriz é:-2*i + 0*j + 2*k = -2*(1,0,0) + 0*(0,1,0) + 2*(0,0,1) = (-2,0,2).Esse vetor w é o resultado da operação u x v. Observe que <u|w>=0 e <v|w>=0, como esperado.

PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL

Lema 6.18 (propriedades do produto vetorial) *Sejam* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *os vetores da base canônica do* $\mathbb{R}^3$. *Dados* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$:

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$;

(b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ *(antisimétrica)*;

(c) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{z} + k\mathbf{v} \times \mathbf{z}$ *(bilinear)*;

(d) $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3$ *(orientação e normalização)*;

(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *é perpendicular a* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

(f) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ *é igual a área do paralelogramo gerado por* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$.

7. AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ E COMO DIAGONALIZÁ-LA

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dada uma matriz A, se um número real λ e um vetor não-nulo v satisfazem A*v = λ*v, então dizemos que λ é autovalor de A e que v é um autovetor de A associado a λ. Geometricamente, isso significa que a direção de v é preservada por A, o tamanho de v é modificado por um fator |λ| e o sentido é invertido se λ for negativo.

Note que se v é autovetor de A associado a λ, qualquer múltiplo não-nulo de v é também autovetor de A associado a λ.

CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Os autovalores de uma matriz A são solução da equação Det(A – λ*Id)=0, onde Id é a matriz identidade. Essa é uma equação polinomial, cujas raízes são os autovalores de A.
Exemplo: Calcule os autovalores de A

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fazendo A – λ*Id temos

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

o determinante dessa matriz é (1-λ)*(-1-λ) – (1*1) = -2 + λ^2. Devemos então achar as raízes de p(λ)= λ^2 - 2. São elas:

$$\lambda_1 := \sqrt{2}$$

$$\lambda_2 := -\sqrt{2}$$

Agora que sabemos os autovalores, podemos descobrir os autovetores associados a eles. Para isso chamamos v de um vetor genérico (x,y) e, para cada valor de λ, resolvemos o sistema A*(x, y) = (λ *x , λ *y).

PROPRIEDADES DOS AUTOVALORES

- Uma matriz n x n tem n autovalores, contadas as multiplicidades (como raiz de polinômio).
- A soma dos autovalores de uma matriz é o traço da matriz.
- O produto dos autovalores de uma matriz é o determinante da matriz.
- Se uma matriz é triangular, seus autovalores são os elementos da diagonal.
- Se uma matriz é simétrica, todos seus autovalores são reais, e autovetores associados a autovalores distintos são perpendiculares entre si.

DIAGONALIZAÇÃO

Diagonalização é um tipo de decomposição matricial. Diagonalizar uma matriz A é encontrar uma matriz P invertível e uma matriz diagonal D tais que $A=P*D*P^{-1}$. Nesse caso, os autovalores de A são as entradas diagonais de D (veja abaixo).

Observe que as colunas de P são autovetores de A. Note que como precisamos que P seja invertível, devemos ser capazes de encontrar uma base do nosso domínio composta de autovetores de A – eles devem ser LI's; caso contrário det(P) = 0 e não haverá inversa.

Definição 7.4 (matriz diagonalizável) *Dizemos que uma matriz quadrada A é* ***diagonalizável*** *se existe P invertível tal que $P^{-1}AP = D$ (ou de forma equivalente $A = PDP^{-1}$), com D diagonal.*

Observação 7.4 *Portanto se A é diagonalizável, $AP = PD$. Note que se $P = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ e D é matriz diagonal com $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$, então $AP = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ A\mathbf{v}_1 & \cdots & A\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \uparrow & & \uparrow \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$ Assim, $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$. Logo as colunas de P são autovetores de A com autovalores na diagonal de D.*

Definição 7.5 (decomposição espectral) *Se A é diagonalizável chamamos de* ***decomposição espectral*** *de A uma fatoração $A = PDP^{-1}$ com D diagonal e P invertível.*

Exemplo: Encontre a decomposição espectral da matriz A

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Primeiramente, vamos encontrar os autovalores de A, as raízes de det(A-λ*Id):

$$-\lambda + \lambda^2 - 2$$

As raízes desse polinômio são -1 e 2, logo os autovalores de A são -1 e 2. Agora devemos encontrar os autovetores de A associados a -1 e 2. Para os autovetores associados a -1:
A*(x,y)=(-x,-y) equivale ao sistema x+y=-x; 2x=-y
Assim, o autovetor associado a -1 é da forma (t,-2t), t real. Tomaremos t = 1, obtendo um autovetor v1=(1,-2) associado a -1.
Para os autovetores associados a 2:
A*(x,y)=(2x,2y) equivale ao sistema x+y=2x; 2x=2y
Assim, o autovetor associado a 2 é da forma (t,t), t um real. Tomaremos novamente t = 1, obtendo um autovetor v2=(1,1) associado a 2.
Como os autovetores são LI's, podemos diagonalizar A. Teremos

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad Di := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A inversa de P é:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Enfim, a decomposição fica A =P*D*P^{-1}. Verifique que multiplicar as três matrizes encontradas nessa ordem resultará em A.

Obs.: Os autovalores nas entradas diagonais de D e os autovetores-coluna em P devem respeitar a mesma ordem. Em outras palavras, a primeira coluna de P deve ser um autovetor associado à primeira entrada diagonal de D, e analogamente para as demais.

No exemplo acima, 2é o autovalor associado a (1,1). Observe que 2está na segunda coluna de D, e o vetor (1,1) é a segunda coluna de P.

giovannitramontin@hotmail.com

www.facebook.com/giovanni.tramontin

98851-9104