Universidade Estadual de Maringá
Centro de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

LISTA DE EXERCÍCIOS PARA 2ª AVALIAÇÃO

6876 – Álgebra Linear – Ciência da Computação – Turma 02

Professor: Marcelo Augusto de Oliveira Alberti

Transformações Lineares

01 - Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:

a) $f: R^2 \to R^2$
$(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$

b) $g: R^2 \to R$
$(x, y) \longmapsto xy$

c) $h: M_2 \to R$
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

d) $k: P_2 \to P_3$
$ax^2 + bx + c \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx$

02 - a) Ache a transformação linear $T: R^3 \to R^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$, $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$.

b) Encontre v de R^3 tal que $T(v) = (3,2)$.

03 - a) Ache a transformação linear $T: R^2 \to R^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$, $T(0,-2) = (0,1,0)$?

b) Ache $T(1,0)$ e $T(0,1)$.

c) Ache a transformação linear $S: R^3 \to R^2$ tal que $S(3,2,1) = (1,1)$, $S(0,1,0) = (0,-2)$ e $S(0,0,1) = (0,0)$?

d) Ache a transformação linear $P: R^2 \to R^2$ tal que $P = S \circ T$.

04 - Dados $T: U \longrightarrow V$ linear e injetora e $u_1, u_2, \dots, u_k$, vetores LI em U, mostre que $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_k)\}$ é LI.

05 - Sejam R, S e T três transformações lineares de R^3 em R^3.

Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $[R] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, ache T tal que $R = S \circ T$.

06 - Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de R^2 e R^3 respectivamente e $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Ache T.

b) Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, ache $[S]_\beta^\alpha$.

07 - Se $R(x,y) = (2x, x-y, y)$ e $S(x,y,z) = (y-z, z-x)$,

a) Ache $[R \circ S]$.

b) Ache $[S \circ R]$.

08 - Mostre que se $T: V \longrightarrow W$ é uma transformação linear,

a) $Im(T)$ é um subespaço de W.

b) $\ker(T)$ é um subespaço de V.

09 - Sejam S e T aplicações lineares de V e W. Definimos $S + T$ como $(S+T)v = S(v) + T(v)$ para todo $v \in V$ e definimos αS como $(\alpha S)v = \alpha \cdot S(v)$ para todo $\alpha \in V$ e $v \in V$.

a) Mostre que $S + T$ é uma transformação linear de V em W.
b) Mostre que αS é uma transformação linear de V em W.
c) Mostre que $X = \{T |\ T: V \longrightarrow W\}$ é um espaço vetorial sobre **R**.
d) Suponha que $\dim V = 2$ e $\dim W = 3$. Tente procurar $\dim X$.

10 - No exercício 6 determine $ker\ T, Im\ T, Im\ S, ker\ S$ e comprove a validade do teorema do núcleo e da imagem para estas transformações.

11 - Considere a transformação linear $T: R^3 \to R^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$.

a) Determine uma base do núcleo de T.
b) Dê a dimensão da imagem de T.
c) T é sobrejetora? Justifique.
d) Faça o esboço de $\ker T$ e $Im\ T$.

12 - Sejam $\alpha = \{(0,2),(2,-1)\}$ e $\beta = \{(1,1,0),(0,0,-1),(1,0,1)\}$ bases de R^2 e R^3, e $[S]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$. Dê a expressão para $S(x,y)$.

13 - Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Encontre $ker\ T_A$, $Im\ T_A$, $ker\ T_B$, $Im\ T_B$, $ker\ (T_B \circ T_A)$ e $Im\ (T_B \circ T_A)$. Determine bases para estes seis subespaços.

Autovalores e Autovetores

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas. (Ex. 1 á 5)

01 - $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(x,y) = (2y, x)$.

02 - $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, 2x+y)$.

03 - $T: R^3 \to R^3$ tal que $T(x,y,z) = (x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$.

04 - $T: P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2+bx+c) = ax^2+cx+b$.

05 - $T: R^4 \to R^4$ tal que $T(x,y,z,w) = (x, x+y, x+y+z, x+y+z+w)$.

06 - Encontre a transformação linear $T: R^2 \to R^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

Ache os autovalores e autovetores das matrizes: (Ex. 7 á 13)

07 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

08 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

09 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

11 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12 - $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13 - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

14 - Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de A de um espaço vetorial real.

15 - Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T: R^2 \to R^2$. Mostre que:

a) Os autovetores v_1 e v_2 correspondentes são LI.

b) $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LI.

16 - Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Ache os autovalores de A e de A^{-1}.

b) Quais são os autovetores correspondentes?

Operadores Diagonalizáveis

$\boxed{01}$ - Entre os operadores dos exercícios 1 a 6 de autovalores e autovetores, verifique quais são diagonalizáveis.

$\boxed{02}$ - Dizemos que uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se seu operador associado $T_A: R^n \to R^n$ for diagonalizável se, e somente se A admitir n autovetores LI. Baseado nisto, verifique quais das matrizes dos exercícios 7 a 13 (autovalores e autovedores) são diagonalizáveis.

$\boxed{03}$ - Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

a) A é diagonalizável (use a definição do exercício anterior)

b) Encontre o polinômio minimal.

$\boxed{04}$ - Para quais valores de $\boldsymbol{a}$ as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{05}$ - Sejam $T: R^3 \to R^3$ linear, $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, base canônica de R^3, $\beta = \{(0,1,1), (0,-1,1), (1,0,1)\}$, e $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

b) Ache $[T]_\beta^\beta$ e o polinômio característico. Que observação vc faz a este respeito?

c) Encontre uma base $\boldsymbol{\gamma}$ de R^3, se for possível, tal que $[T]_\gamma^\gamma$ seja diagonal.