AULA 21 – Grafos planares

Prof. Daniel Kikuti

Universidade Estadual de Maringá

17 de agosto de 2015

Conteúdo

- Introdução
  - Definição de grafo planar
  - Motivação para estudo de grafos planares
  - Algumas propriedades
- Caracterização de grafos planares
  - Relação de Euler para grafos planares
  - Teoremas de Kuratowski e Wagner
- Teste de planaridade
  - Indicação de referências bibliográficas

Introdução

Imersão

Uma **imersão** de um grafo G em uma superfície S é uma representação geométrica (desenho) de G em S tal que dois vértices distintos não ocupam o mesmo lugar em S e não existe cruzamento de arestas, a não ser nos extremos quando duas arestas são adjacentes.

Grafo planar

Um grafo G é **planar** se ele tem imersão no plano ($\mathbb{R}^2$).

Faces

As regiões limitadas por uma imersão planar são chamadas de **faces**. Toda imersão planar tem uma face ilimitada denominada de **face externa**.

Introdução

Exemplo

Introdução

Motivação

Aplicação em diferentes áreas (Elétrica, Mecânica, Engenharia Civil, etc.)

- Grafos planares são fáceis de visualizar (projeto elétrico ou hidráulico de uma casa). Cruzamentos dificultam o entendimento.
- Design de circuitos VLSI (quanto menor o número de cruzamentos, melhor o design).
- Projeto de rodovias/ferrovias. Cruzamentos são sempre problemáticos.

Introdução

Propriedades

- São grafos esparsos.
- São grafos 4-coloríveis.
- Várias operações podem ser feitas de maneira eficientes, o que leva ao desenvolvimento de algoritmos mais eficientes quando comparados com algoritmos para grafos genéricos (estruturas de dados especiais para armazenamento e manipulação).
- O tamanho de um grafo planar incluindo faces, arestas e vértices é $O(V)$.

Introdução

Problema de decisão

Dado um grafo $G = (V, E)$, G é planar, isto é, pode ser desenhado no plano sem cruzar arestas?

Problema computacional

Dado um grafo $G = (V, E)$, se G é planar, como G pode ser desenhado no plano tal que nenhuma aresta se cruze? Ou seja, mostre a representação planar do grafo G.

Caracterização de grafos planares

O grafo K_4 é planar?

E os grafos K_5 e $K_{3,3}$?

Caracterização de grafos planares

Algumas observações importantes

- Uma aresta de um ciclo pertence a duas faces;
- Uma aresta de corte (ponte) pertence somente a uma face;
- Um grafo planar é acíclico se e somente se o número de faces é igual a 1.

Caracterização de grafos planares

Teorema de Euler

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com F faces, então $|V| + F - |E| = 2$.

Caracterização de grafos planares

Teorema de Euler

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com F faces, então $|V| + F - |E| = 2$.

Demonstração

Indução no número de faces. Se $F = 1$, então G não possui ciclos (é uma árvore). Portanto, $|E| = |V| - 1$ e o resultado da relação se verifica. Assim, assuma que $F \geq 2$ e que o resultado se verifica para todos os grafos planares conexos com $F - 1$ faces. Seja G um grafo planar com F faces. Como $F \geq 2$, G contém um ciclo. Seja (u, v) uma aresta pertencente a um ciclo. O grafo $G' = (V, E - \{(u, v)\})$ é um grafo planar conexo com $|V|$ vértices, $|E| - 1$ arestas e $F - 1$ faces (note que a remoção de uma aresta comum a duas faces faz com que duas faces se tornem uma só no grafo G'). Pela hipótese indutiva,

$$|V| - (|E| - 1) + (F - 1) = 2 \implies |V| - |E| + F = 2.$$

Caracterização de grafos planares

Corolário

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com pelo menos três vértices, então $|E| \leq 3|V| - 6$.

Caracterização de grafos planares

Corolário

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com pelo menos três vértices, então $|E| \leq 3|V| - 6$.

K_5 não é planar

$|V| = 5$, $|E| = 10 > 3|V| - 6 = 9$.

Caracterização de grafos planares

Corolário

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com pelo menos três vértices, então $|E| \leq 3|V| - 6$.

K_5 não é planar

$|V| = 5$, $|E| = 10 > 3|V| - 6 = 9$.

Condição necessária, mas não suficiente

Verifique que o grafo formado pela junção do K_5 com o $K_{3,3}$ por meio de uma aresta respeita o Corolário.

Caracterização de grafos planares

Definição de subdivisão

- A **subdivisão** de uma aresta $(u, v) \in E$ é a operação de substituir (u, v) por um caminho (u, w, v), onde w é um novo vértice.
- Um grafo H é dito ser uma subdivisão de G se H pode ser obtido de G por uma sequência de subdivisões de arestas.

Observações

- Se G é planar, então qualquer subdivisão H de G é planar.
- Se G não é planar, então qualquer subdivisão H de G não é planar.
- Se uma subdivisão H de G não é planar, então G não é planar.

Caracterização de grafos planares

Grafo minor

- Seja (u, v) uma aresta em um grafo G. Remova os vértices u e v. Adicione um novo vértice w a $G - (u, v)$ e conecte w a todos os vértices em $V - \{u, v\}$ para os quais u ou v são adjacentes em G. Esta operação é chamada de **contração de aresta**.
- Um grafo H é dito ser **minor** de G, se uma cópia isomórfica de H pode ser obtida de G por uma sequência de remoções ou contrações de arestas.

Exemplo

Caracterização de grafos planares

Teorema de Kuratowski

Um grafo G é planar se, e somente se, ele não contém uma subdivisão do $K_{3,3}$ e do K_5.

Teorema de Wagner

Um grafo G é planar se, e somente se, ele não contém um grafo minor $K_{3,3}$ ou K_5.