



Circuitos Digitais I - 6878

Nardênio Almeida Martins

Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Informática

Bacharelado em Ciência da Computação

Aula de Hoje

Roteiro

- Revisão
- Álgebra de Boole
- Teoremas de DeMorgan
- Expressões Booleanas:
 - Expressões a partir de Circuitos
 - Circuitos a partir de Expressões

Revisão

- Portas Lógicas
 - Expressão
 - TV
 - Símbolo

Fundamentos de Lógica

Funções Lógicas

- Variáveis têm apenas 2 estados: 0 ou 1, F ou V
- Também chamadas de Funções Booleanas devido a George Boole

Funções:

- NOT
- BUFFER
- AND
- NAND
- OR
- NOR
- XOR
- XNOR

Fundamentos de Lógica

Tabela Verdade

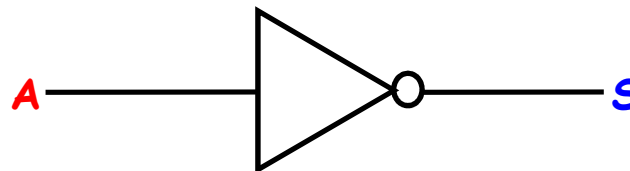
TV da Porta NOT

Entrada Saída

A	S
0	1
1	0

Função NOT Representação: $S = \overline{A}$

Símbolo da Porta NOT



Fundamentos de Lógica

Tabela Verdade

Tabela Verdade: Mapa onde se colocam todas as possíveis situações de entradas e saídas de um circuito lógico

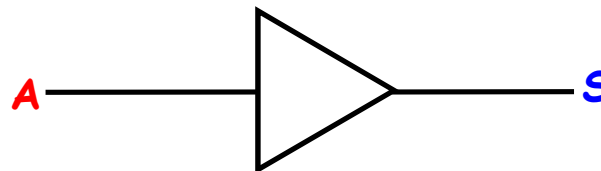
TV do Buffer

Entrada Saída

A	S
0	0
1	1

Função BUFFER Representação: $S = A$

Símbolo do BUFFER



Fundamentos de Lógica

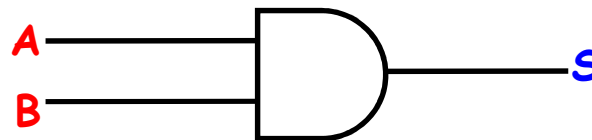
Tabela Verdade

TV da Porta AND

Entradas		Saída
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Função AND Representação: $S = A.B$

Símbolo da Porta AND



Fundamentos de Lógica

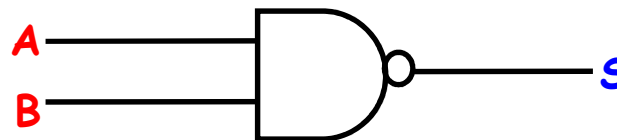
TV da Porta NAND

Entradas		Saída
A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela Verdade

Função NAND Representação: $S = \overline{A.B}$

Símbolo da Porta NAND



Fundamentos de Lógica

Tabela Verdade

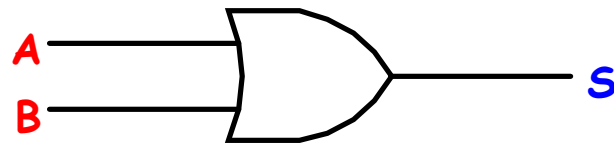
TV da Porta OR

Entradas Saída

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Função OR Representação: $S = A+B$

Símbolo da Porta OR



Fundamentos de Lógica

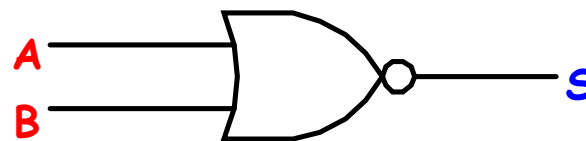
Tabela Verdade

TV da Porta NOR

Entradas		Saída
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Função NOR Representação: $S = \overline{A+B}$

Símbolo da Porta NOR



Fundamentos de Lógica

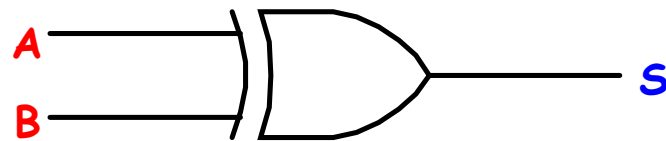
Tabela Verdade

TV da Porta XOR

Entradas		Saída
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Função XOR Representação: $S = A \oplus B$

Símbolo da Porta XOR



Fundamentos de Lógica

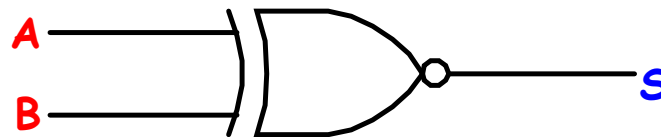
Tabela Verdade

TV da Porta XNOR

Entradas		Saída
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Função XNOR Representação: $S = \overline{A \oplus B} = A \odot B$

Símbolo da Porta XNOR



Aula de Hoje

- **Álgebra de Boole**
- **Teoremas de DeMorgan**
- **Expressões Booleanas:**
 - Expressões a partir de Circuitos
 - Circuitos a partir de Expressões
- **Exposição da próxima aula prática**

Fundamentos de Lógica

Álgebra de Boole

- Álgebra proposta pelo matemático George Boole em 1854
- Usada para simplificar circuitos lógicos
 - Todas as variáveis têm valor 0 ou 1
 - Tem 3 operadores:

Nome	Símbolo
OR	+
AND	●
NOT	\overline{A}

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

1. Identidade

- a) $A+0=A$
- b) $A+A=A$
- c) $A.1=A$
- d) $A.A=A$

2. Zero e Um

- a) $A+1=1$
- b) $A.0=0$

3. Inverso

- a) $A+\bar{A}=1$
- b) $A.\bar{A}=0$

Fundamentos de Lógica

Regras da Álgebra de Boole

4. Comutativa

a) $A+B=B+A$

b) $A.B=B.A$

5. Associativa

a) $A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$

b) $A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C$

6. Distributiva

a) $A.(B+C) = A.B+A.C$

b) $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

Exercício

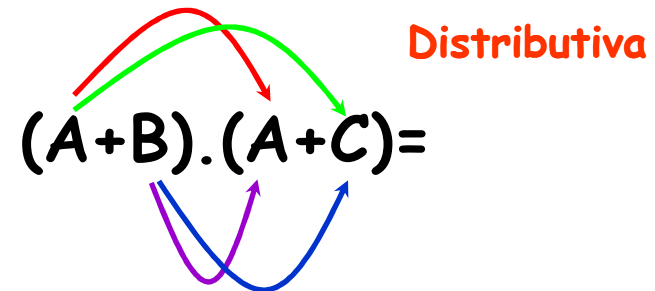
Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

Solução

Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

Distributiva

$(A+B).(A+C)=$



The diagram illustrates the distributive property of multiplication over addition. It shows the expression $(A+B).(A+C)$ with arrows indicating the distribution of the multiplication over the addition in the second factor. A red arrow points from the first A in $(A+B)$ to the first A in $(A+C)$. A green arrow points from the B in $(A+B)$ to the C in $(A+C)$. A purple arrow points from the first A in $(A+B)$ to the C in $(A+C)$. A blue arrow points from the B in $(A+B)$ to the first A in $(A+C)$.

Solução

Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

Distributiva

$$(A+B).(A+C) = A.A + A.C + A.B + B.C$$

Solução

Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

$$(A+B).(A+C) = \underbrace{A.A}_{A} + A.C + A.B + B.C$$

Solução

Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

$$(A+B).(A+C) = A.A + A.C + A.B + B.C$$


$$A + A.C + A.B + B.C$$

A em evidência



Solução

Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

$$(A+B).(A+C) = A.A + A.C + A.B + B.C$$

$$\begin{array}{c} A + A.C + A.B + B.C \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ A \text{ em evidência} \rightarrow \hspace{1.5cm} \\ A.(1 + C + B) + B.C \end{array}$$

Solução

Mostre que $(A+B).(A+C) = A+(B.C)$

$$(A+B).(A+C) = A.A + A.C + A.B + B.C$$

$$A + A.C + A.B + B.C$$

$$A.(1 + C + B) + B.C$$

$$A.1 + B.C = A + B.C$$

Fundamentos de Lógica

Teoremas de DeMorgan

Usados para simplificar expressões booleanas

1º Teorema: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \Rightarrow$ Complemento do Produto é igual à Soma dos Complementos

Fundamentos de Lógica

Teoremas de DeMorgan

Usados para simplificar expressões booleanas

1º Teorema: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ \Rightarrow Complemento do Produto é igual à Soma dos Complementos

Prova

		Saídas Iguais			
A	B	$A \cdot B$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A \cdot B}$
0	0		1	1	
0	1		1	0	
1	0		0	1	
1	1		0	0	

Fundamentos de Lógica

Teoremas de DeMorgan

Usados para simplificar expressões booleanas

1º Teorema: $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \Rightarrow$ Complemento do Produto é igual à Soma dos Complementos

Prova

Saídas Iguais

A	B	$\overline{A \cdot B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Fundamentos de Lógica

Teoremas de DeMorgan

Usados para simplificar expressões booleanas

$$2^{\circ} \text{ Teorema: } \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \Rightarrow$$

Complemento da Soma é igual ao Produto dos Complementos

Exercício

Prove o 2º Teorema de DeMorgan:

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Solução

Prova do 2º Teorema:

2º Teorema: $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Prova

Saídas Iguais

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Aula de Hoje

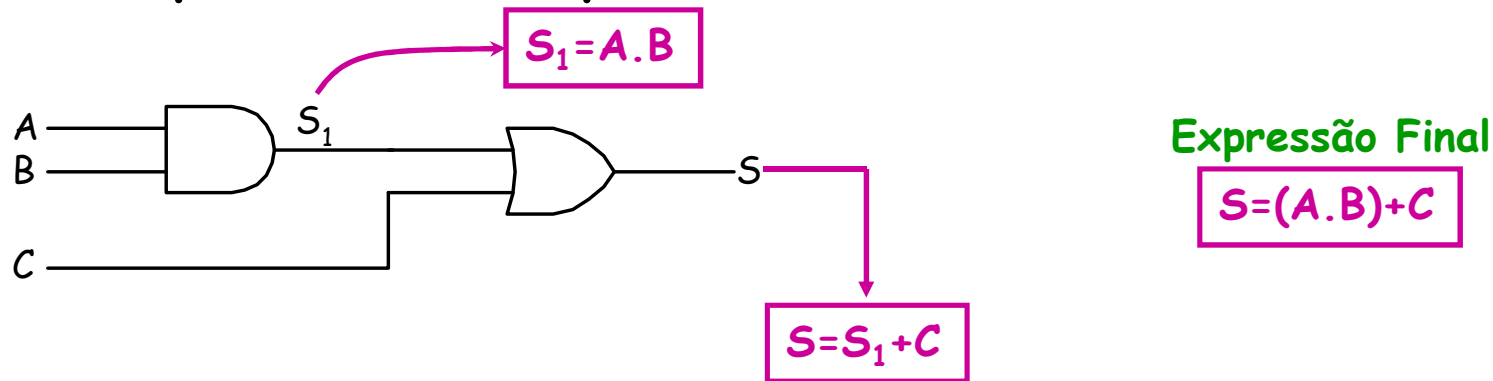
- Álgebra de Boole
- Teoremas de DeMorgan
- Expressões Booleanas:
 - Expressões a partir de Circuitos
 - Circuitos a partir de Expressões

Fundamentos de Lógica

Expressões Booleanas

Todo circuito lógico executa uma expressão booleana

Exemplo: Obter a expressão do circuito abaixo

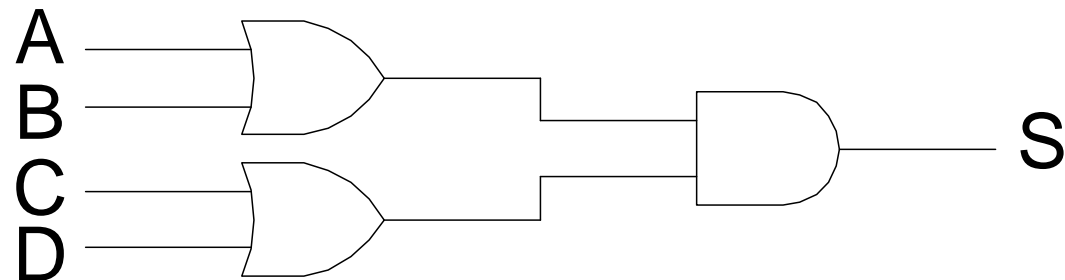


Exercícios

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 1:

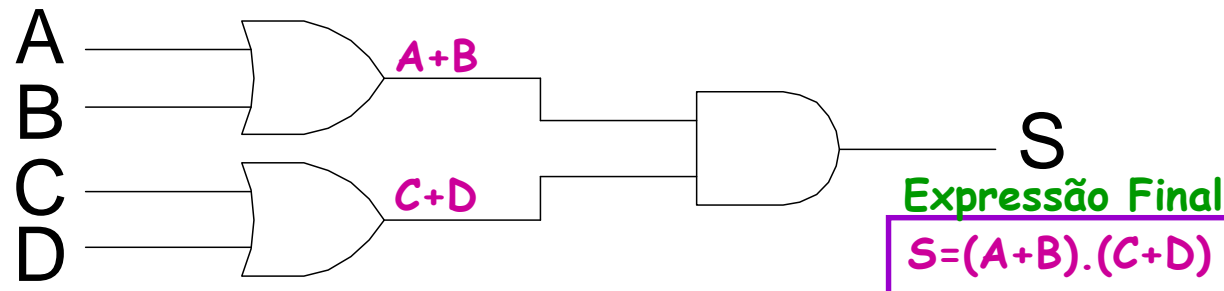


Soluções

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 1:

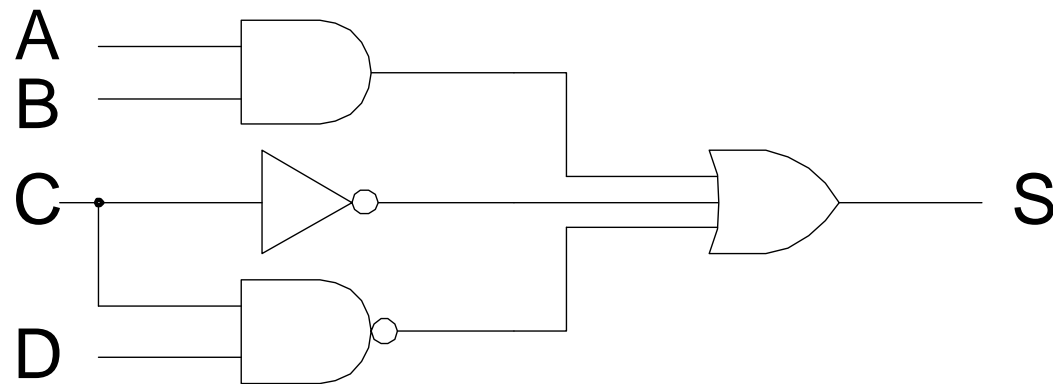


Exercícios

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 2:

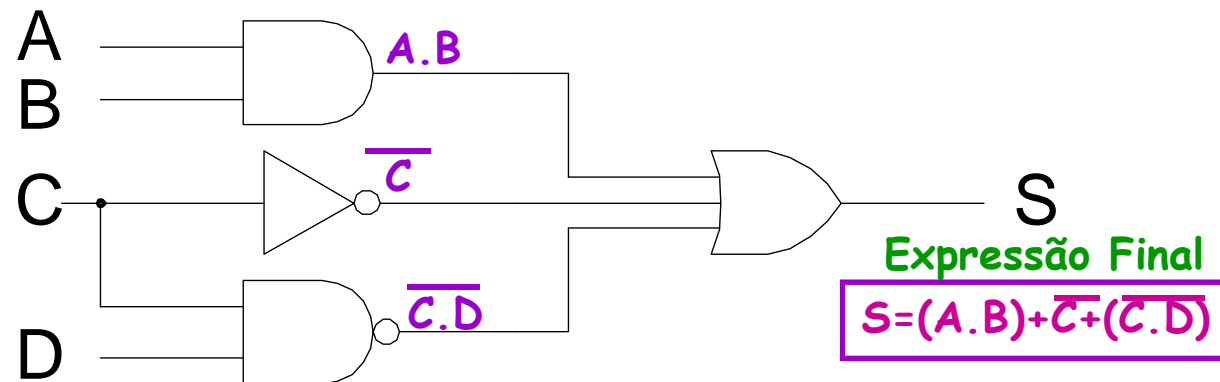


Soluções

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 2:

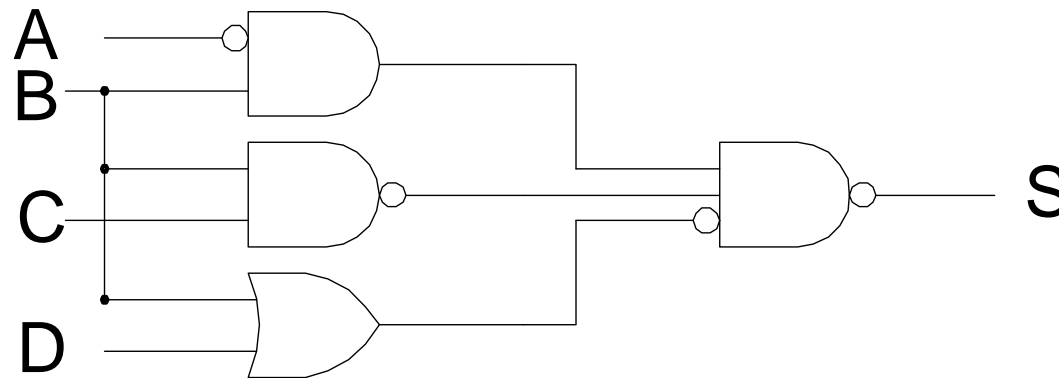


Exercícios

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 3:

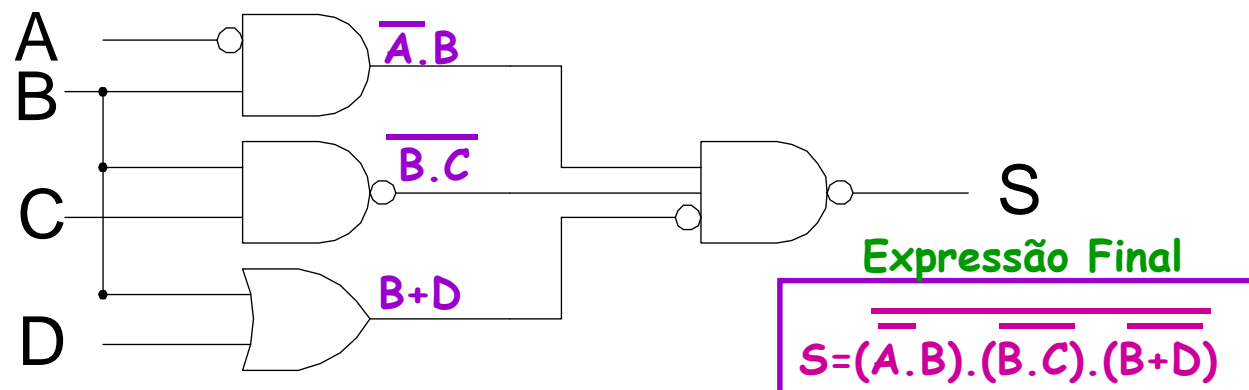


Soluções

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 3:

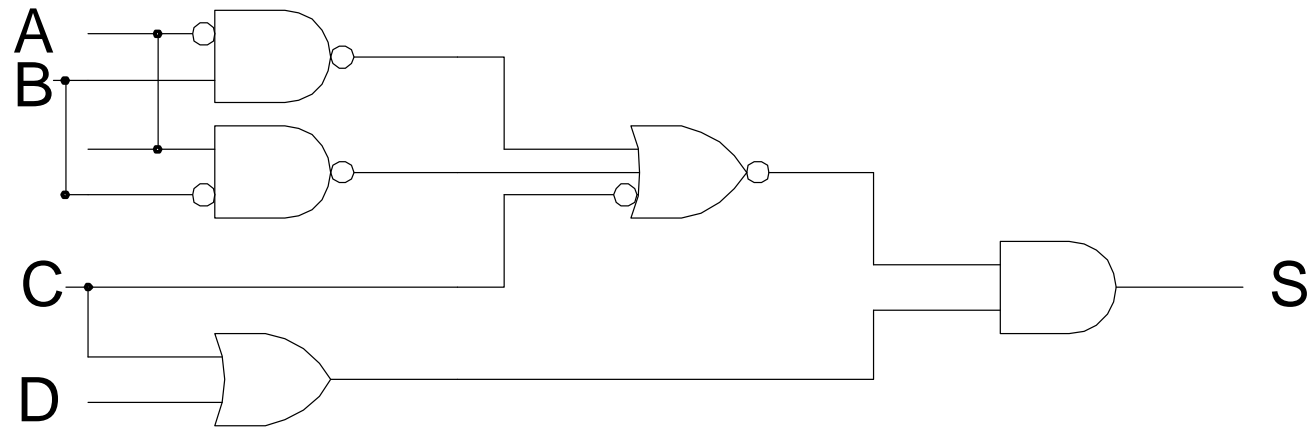


Exercícios

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 4:

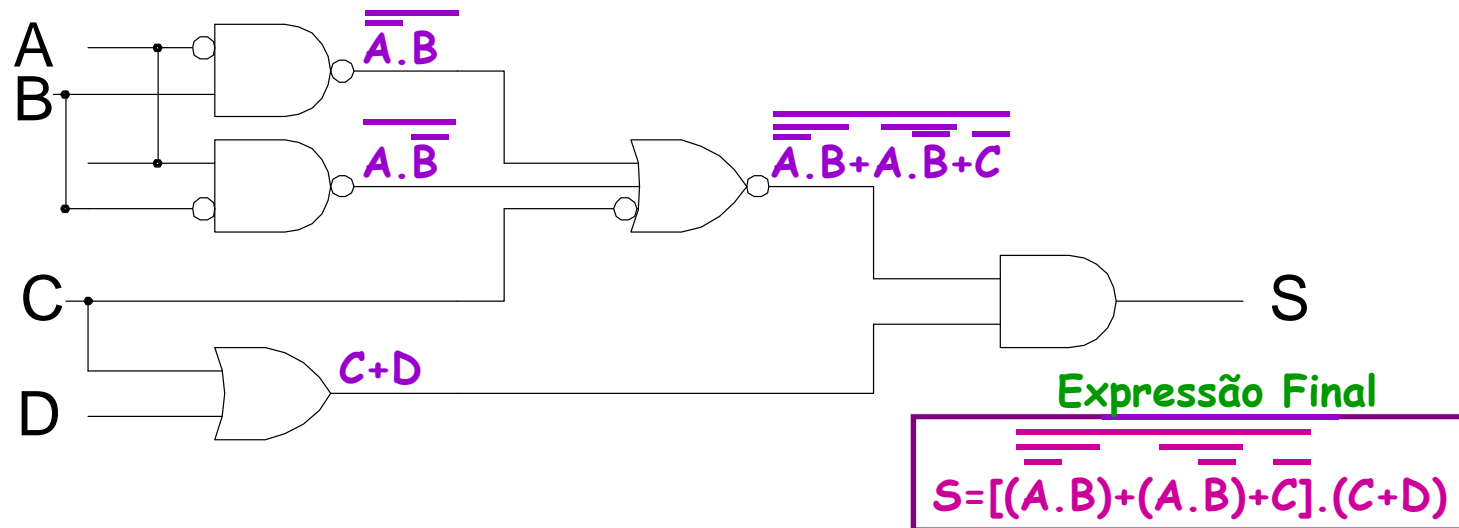


Soluções

Expressões Booleanas

Obtenha a expressão booleana a partir do circuito lógico

Circuito 4:



Fundamentos de Lógica

Até aqui: obtemos a expressão booleana a partir do circuito

Próximos passos:

- Obter o circuito lógico a partir da expressão
- Obter a tabela verdade a partir da expressão
- Obter a expressão a partir da tabela verdade

Fundamentos de Lógica

Obter Circuito Lógico a partir da Expressão

Método: Identificar as portas lógicas na expressão e desenhá-las com as respectivas ligações

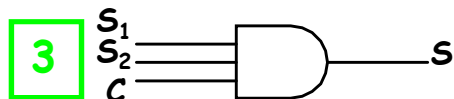
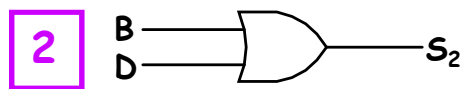
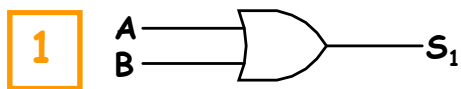
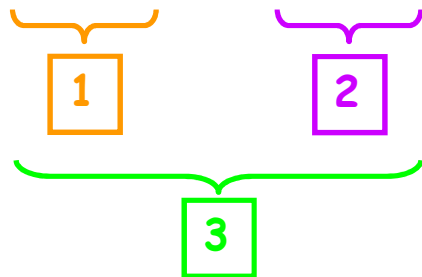
Exemplo: obter o circuito que executa a expressão
 $S = (A + B) \cdot C \cdot (B + D)$

Fundamentos de Lógica

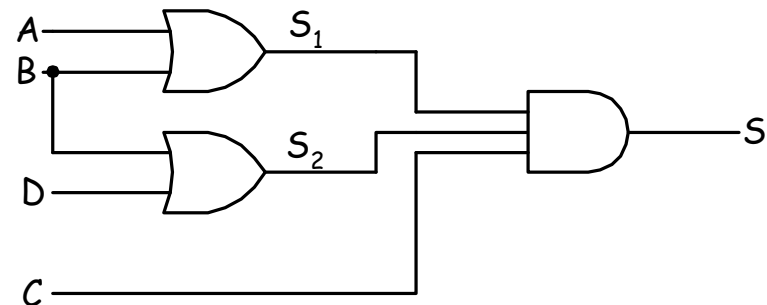
Obter Circuito Lógico a partir da Expressão

Solução:

$$S = (A+B) \cdot C \cdot (B+D)$$



Circuito Obtido



Exercícios

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

1. $S = A.B.C + (A+B).C$

2. $S = [\overline{(\overline{A}+B)} + \overline{(C.D)}].\overline{D}$

3. $S = [\overline{(\overline{A.B}) + (\overline{C.D})}].E + \overline{A}.(A.\overline{D}.\overline{E} + C.D.E)$

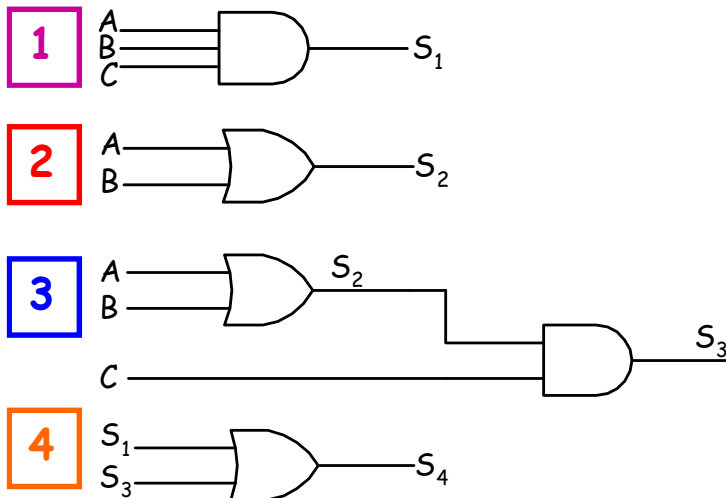
Soluções

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

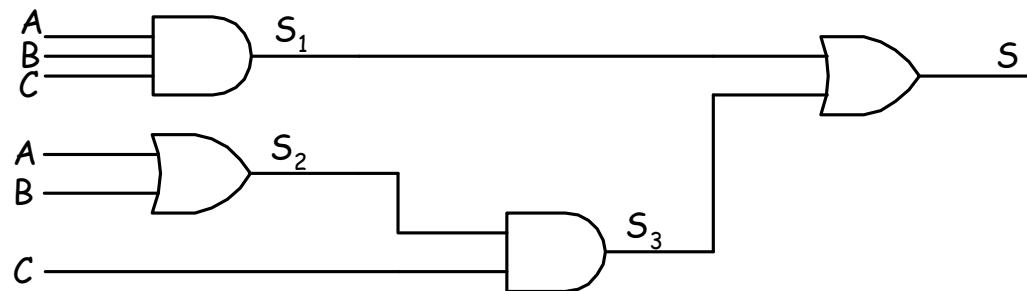
$$1. S = A.B.C + (A+B).C$$

Diagrama de anotações para a expressão booleana:

- 1: Grupo de $A.B.C$ (círculo magenta)
- 2: Grupo de $(A+B)$ (quadrado vermelho)
- 3: Grupo de $(A+B).C$ (curva azul)
- 4: Grupo de toda a expressão $A.B.C + (A+B).C$ (curva laranja)



Circuito Obtido



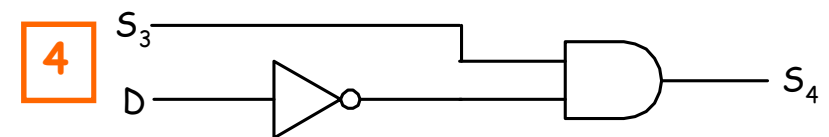
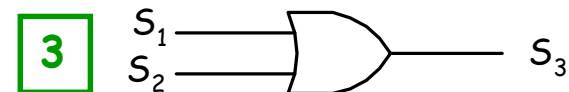
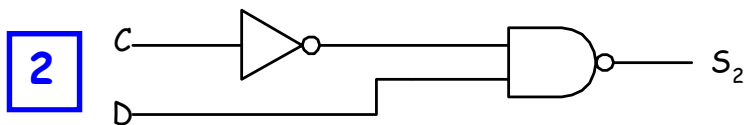
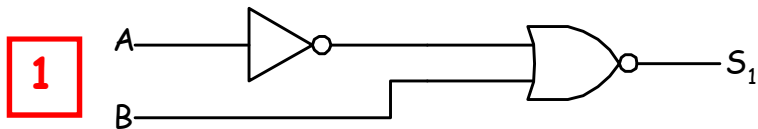
Soluções

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

$$2. S = [(\overline{A+B}) + (\overline{C \cdot D})] \cdot \overline{D}$$

Diagram illustrating the grouping of terms in the Boolean expression for circuit implementation:

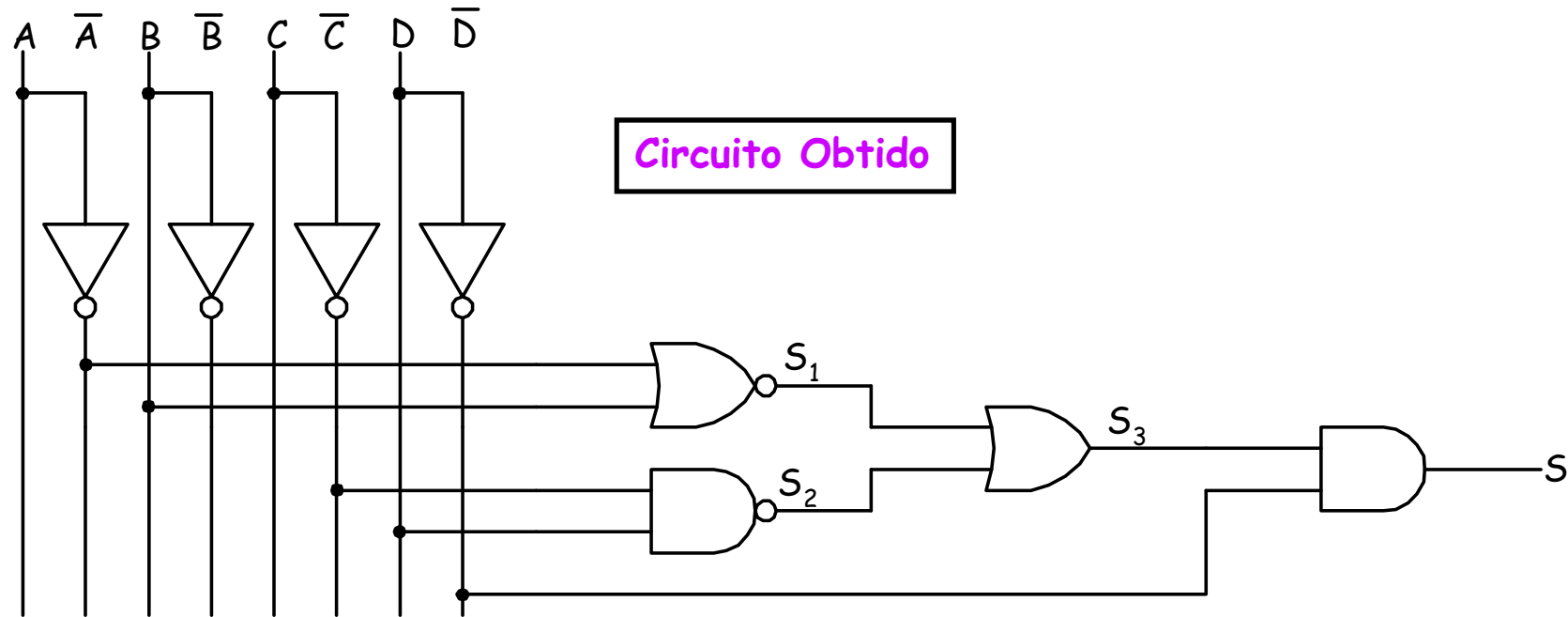
- 1: Grouping $\overline{A+B}$ (Red box)
- 2: Grouping $\overline{C \cdot D}$ (Blue circle)
- 3: Grouping $(\overline{A+B}) + (\overline{C \cdot D})$ (Green bracket)
- 4: Grouping $[(\overline{A+B}) + (\overline{C \cdot D})] \cdot \overline{D}$ (Orange bracket)



Soluções

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

$$2. S = [(\overline{A+B}) + (\overline{C \cdot D})] \cdot \overline{D}$$

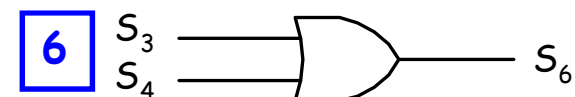
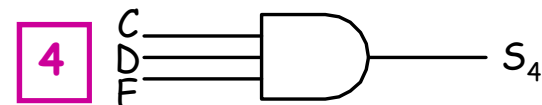
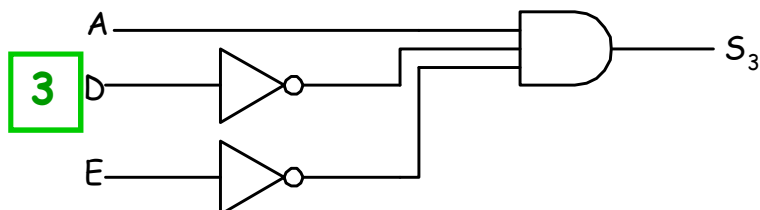
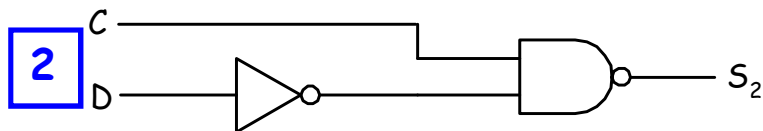
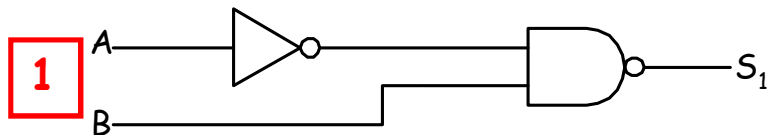


Soluções

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

$$3. S = \overline{(\overline{A.B}) + (\overline{C.D})} . E + \overline{A} . (\overline{A.D.E} + C.D.E)$$

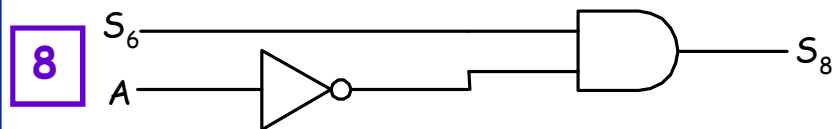
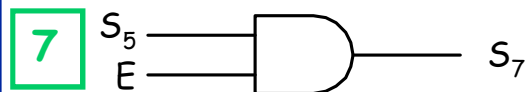
1 2 3 4
5 6



Soluções

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

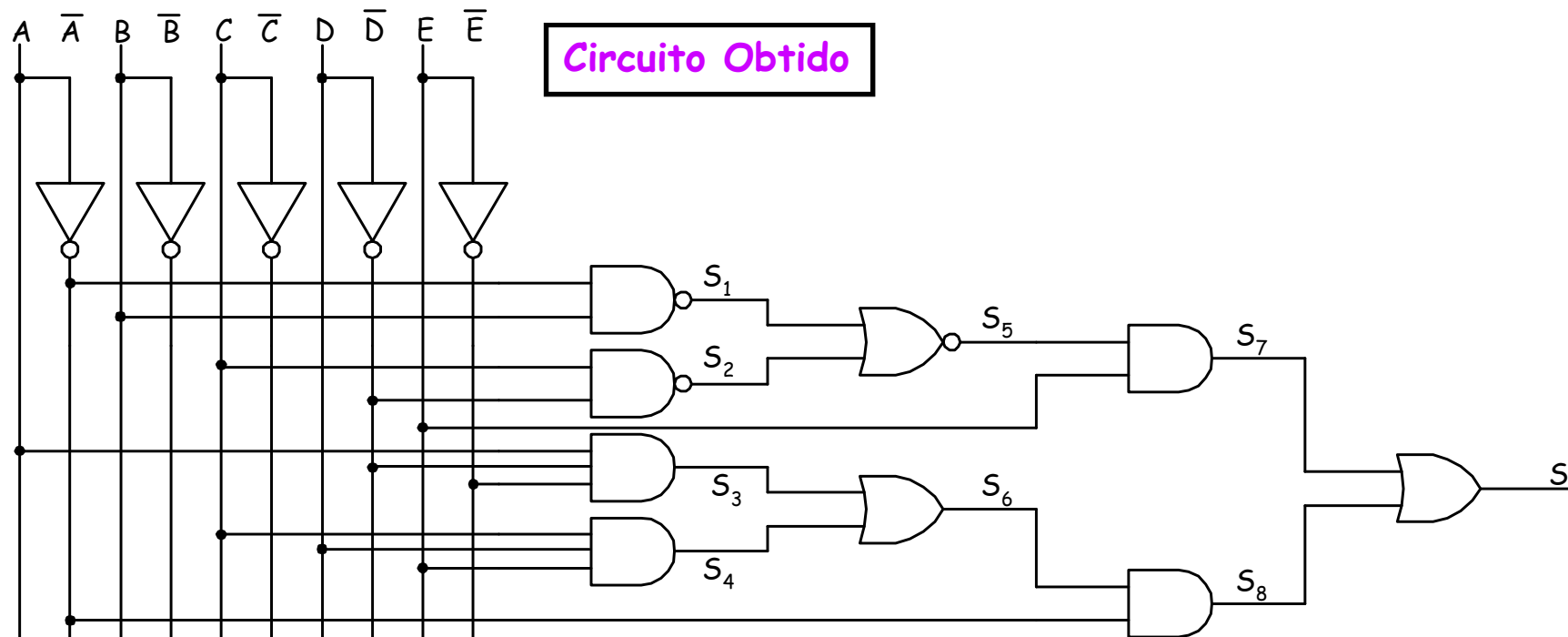
$$3. S = [(\overline{A.B}) + (\overline{C.D})].E + \overline{A}.(A.\overline{D}.\overline{E} + C.D.E) \quad 9$$



Soluções

Obter os circuitos que executam as seguintes expressões booleanas:

$$3. S = \overline{(\overline{A} \cdot B) + (C \cdot \overline{D})} \cdot E + \overline{A} \cdot (A \cdot \overline{D} \cdot \overline{E} + C \cdot D \cdot E)$$



Próxima Aula

- Obter a tabela verdade a partir da expressão
- Obter a expressão a partir da tabela verdade