Álgebra Linear
Espaço Vetorial - exercícios

Prof. André Tiba

akot@cin.ufpe.br

Baia 65, ramais: 4765 ou 4338

exercício 1

Sejam os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,2)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,0,1)$.

a) Mostre que $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ forma uma base do R^3.

b) Determine o vetor-coordenada de $\mathbf{u} = (5,4,2)$ em relação a β.

c) Determine o vetor $\mathbf{w} \in R^3$, cujo vetor-coordenada em relação a β vale $\mathbf{w}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

<u>Letra a)</u>

Para mostrar que β é uma base, precisamos mostrar que: (i) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são LI (ii) conseguimos representar qualquer vetor $\mathbf{u} = (x,y,z)$ como combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

exercício 1 (continuação)

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ são LI, se e somente se, $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2, + a_3\mathbf{v}_3 = 0$ implica em $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$$a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 + 0a_3 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$ são LI

$$\mathbf{u} = (x,y,z) = a(1,2,3) + b(0,1,2) + c(0,0,1)$$

$$\begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ 3a + 2b + c = z \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = x \\ b = -2x + y \\ c = x + 2y + z \end{matrix}$$

Portanto, qualquer vetor **u** pode ser representado por uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, e $\mathbf{v}_3$.

exercício 1 (continuação)

Letra b)

Devemos encontrar escalares a_1, a_2 e a_3 tal que:

$$a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1) = (5,4,2) = \mathbf{u}$$

$$\begin{cases} a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 5 \\ 2a_1 + a_2 + 0a_3 = 4 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_2 = -6 \\ a_3 = -1 \end{array} \Rightarrow [\mathbf{u}]_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Letra c)

$$[\mathbf{w}]_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = 2(1,2,3) - 3(0,1,2) + 4(0,0,1) = (2, 4-3, 6-6+4) = (2,1,4)$$

exercício 2

Mostre se:

a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$ é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^4$;

b) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{com } a, b, c, d \in \Re \text{ e } b = c + 1 \right\}$ é subespaço vetorial

de M(2,2).

c) $U = \{(x, x+3) : x \in \mathbf{R}\}$ é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^2$.

d) $U = \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbf{R}\}$ é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$.

exercício 2 (continuação)

Para que U seja subespaço de W, devemos mostrar que:

(i) dados $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2 \in U$, então $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$

(ii) dados $\mathbf{u}_1 \in U$ e $k \in \mathbf{R}$ com $k \neq 0$, então $k\mathbf{u}_1 \in U$

exercício 2 (continuação)

Letra a)

$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$: 2x + y – t = 0 e z = 0$\}$ é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^4$?

$$\mathbf{v} = (x, y, 0, 2x + y) \in U$$

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, 0, 2x_1 + y_1)$, $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2, 0, 2x_2 + y_1)$, e $k \in \mathbf{R}, k \neq 0$.

$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0, 2x_1 + y_1 + 2x_2 + y_2)$

$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x_3, y_3, 0, 2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))$

$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x_3, y_3, 0, 2x_3 + y_3) = \mathbf{u}_3$ onde $x_3 = x_1 + x_2$ e $y_3 = y_1 + y_2$

Observe que $\mathbf{u}_3 \in U$, portanto $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$.

exercício 2 (continuação)

$k\mathbf{u}_1 = (kx_1, ky_1, k0, k2x_1 + ky_1)$

$k\mathbf{u}_1 = (kx_1, ky_1, 0, k(2x_1 + y_1)\,) = (x_v, y_v, 0, 2x_v + y_v) = \mathbf{v}$ onde

$x_v = kx_1$ e $y_v = ky_1$

Como $\mathbf{v} \in U$, então $k\mathbf{u}_1 \in U$.

Portanto U é um subespaço vetorial de $\mathbf{R^4}$.

<u>Letra b)</u>

$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{com } a, b, c, d \in \Re \text{ e } b = c + 1 \right\}$ é subespaço vetorial

de M(2,2)?

exercício 2 (continuação)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & c+1 \\ c & d \end{bmatrix} \in U$$

Sejam $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2 \in U$ e $k \in \mathbf{R},\ k \neq 0,$ onde:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1+1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & c_2+1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & c_1+1+c_2+1 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} a_3 & c_3+2 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \mathbf{u}_3$$

mas $\mathbf{u}_3 \notin U,$ portanto U não é subespaço vetorial de M(2,2).

exercício 2 (continuação)

Letra c)

$U = \{(x, x+3): x \in \mathbf{R}\}$ é subespaço vetorial de $\mathbf{R^2}$?

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1 + 3)$, $\mathbf{u}_2 = (x_2, y_2 + 3)$, e $k \in$ **R,** $k \neq 0$.

$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x_1 + x_2\,,\ y_1 + 3 + y_2 + 3)$

$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x_3\,,\ y_3 + 6) = \mathbf{u}_3$ onde $x_3 = x_1 + x_2$ e $y_3 = y_1 + y_2$

Observe que $\mathbf{u}_3 \notin U$, portanto $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \notin U$. Dessa forma U não é subespaço vetorial de $\mathbf{R}^2$.

exercício 2 (continuação)

Letra d)

$U = \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbf{R}\}$ é subespaço vetorial de $\mathbf{R^3}$?

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x, 2x, 3x)$, $\mathbf{u}_2 = (y, 2y, 3y)$, e $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (x+y, 2x+2y, 3x+3y) = (x+y, 2(x+y), 3(x+y))$$

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = (z, 2z, 3z) = \mathbf{u}_3 \qquad \text{onde } x + y = z$$

Como $\mathbf{u}_3 \in U$, então $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in U$.

$$k\mathbf{u}_1 = (kx, 2kx, 3kx) = (t, 2t, 3t) = \mathbf{v} \qquad \text{onde } kx = t$$

Como $\mathbf{v} \in U$, então $k\mathbf{u}_1 \in U$.

Portanto U é um subespaço vetorial de $\mathbf{R^3}$.

exercício 3

Sejam os vetores $\mathbf{v}_1 = (a,b)$ e $\mathbf{v}_2 = (c,d)$ mostre que se $ad = bc$, então $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ são LD e que se $ad \neq bc$, então $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ são LI.

$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ onde α e β são constantes reais

$\alpha(a,b) + \beta(c,d) = (0,0)$

$$(\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d) = (0,0) \rightarrow \begin{matrix} \alpha a = -\beta c \\ \alpha b = -\beta d \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha \frac{b}{d}$$

o sistema é LD se $\alpha \neq 0$ e/ou $\beta \neq 0$

se $ad = bc$, então

$$a\alpha = -c\left(\frac{-\alpha b}{d}\right) \quad \Rightarrow \quad da\alpha = \alpha cb \Rightarrow \alpha = \alpha$$

como α não é explicitamente zero, então $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ é LD.

exercício 3 (continuação)

o sistema é LI se $ad \neq bc$ e $\alpha = \beta = 0$

do item anterior sabemos que: $\alpha da = \alpha cb$

mas $ad \neq bc$, portanto $\alpha da = \alpha cd$ se e somente se $\alpha = 0$

se $\alpha = 0$, então como $\beta c = -\alpha a$ → $\beta = 0$

Neste caso $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2]$ é LI.

exercício 4

Calcule o $[\mathbf{x}]_\beta$ para cada uma das bases abaixo:

a) $\mathbf{x} = (3,2)$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (-1,2)\}$;

b) $\mathbf{x} = (2,-3,1)$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1 = (0,1,1), \mathbf{v}_2 = (-1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,0)\}$;

c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \beta = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

exercício 4 (continuação)

Letra a)

Assuma que o vetor **x** possa ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base β.

$$\mathbf{x} = (3,2) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = a_1(1,1) + a_2(-1,2)$$

$$(3,2) = (a_1 - a_2, a_1 + 2a_2)$$

$$\begin{cases} 3 = a_1 - a_2 \\ 2 = a_1 + 2a_2 \end{cases} \Rightarrow 1 = -3a_2 \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = -1/3 \\ a_1 = 8/3 \end{array}$$

$$[\mathbf{x}]_\beta = \begin{pmatrix} 8/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

exercício 4 (continuação)

Letra b)

$$\mathbf{x} = (2,-3,1) = a_1(1,1,1) + a_2(-1,0,1) + a_3(1,1,0)$$

$$(2,-3,1) = (a_1 - a_2 + a_3,\ a_1 + a_3,\ a_1 + a_2)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 = 2 \\ a_1 + a_3 = -3 \\ a_1 + a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 = L_2 - L_1 \\ L_3 = L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_1 + L_2 \\ \\ L_3 = L_3 - 2L_2 \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 = -L_3 \end{matrix}$$

exercício 4 (continuação)

Letra b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \; L_1 = L_1 - L_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (2,-3,1) \; = 6(1,1,1) - 5(-1,0,1) + -9(1,1,0)$$

$$[\mathbf{x}]_\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

exercício 4 (continuação)

Letra c)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_2 + a_3 + a_4 \\ a_3 & a_1 + a_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 2 \\ a_3 \ = -1 \\ a_1 + a_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 = L_4 - L_1$$

exercício 4 (continuação)

Letra c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_1 - L_2 \\ \\ \\ L_4 = L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 = L_2 - L_3 \\ \\ L_4 = L_4/2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 = L_1 + L_4 \\ L_2 = L_2 - L_4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{x}]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

exercício 5

Sejam as bases $\beta = \{\mathbf{v}_1 = (2,-1),\ \mathbf{v}_2 = (3,4)\}$, $\beta' = \{\mathbf{e}_1 = (1,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ e $\eta = \{\mathbf{u}_1 = (1,1),\ \mathbf{u}_2 = (-1,1)\}$ do $\mathbf{R}^2$. Calcule:

a) A matriz de mudança de base de β para β' $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}$.

b) A matriz de mudança de base de β' para β $[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta}$.

c) A matriz de mudança de base de β para η $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\eta}$.

d) Para o vetor $\mathbf{v} = (2, -4)$, qual é o seu vetor de coordenadas na bases β e η, ou seja $[\mathbf{v}]_\beta$ e $[\mathbf{v}]_\eta$.

exercício 5 (continuação)

Letra a)

Vamos escrever os vetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ da base β' como combinações lineares dos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ da base β.

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0) = a_1\mathbf{v}_1 + b_1\mathbf{v}_2 = a_1(2, -1) + b_1(3,4)$$

$$(2a_1 + 3b_1\ , -a_1 + 4b_1) = (1, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_1 = 4/11 \\ b_1 = 1/11 \end{matrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1) = a_2\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 = a_2(2, -1) + b_2(3,4)$$

$$(2a_2 + 3b_2\ , -a_2 + 4b_2) = (0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_2 = -3/11 \\ b_2 = 2/11 \end{matrix}$$

exercício 5 (continuação)

Então,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{4}{11}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{11}\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{-3}{11}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{11}\mathbf{v}_2$$

As linhas tornam-se colunas !

$$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Letra b)

Pode ser feito por duas maneiras.

Solução 1: idéia análoga ao do item a), mas agora vamos escrever os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ da base β como combinações lineares dos vetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ da base β'.

exercício 5 (continuação)

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1) = a_1\mathbf{e}_1 + b_1\mathbf{e}_2 = a_1(1, 0) + b_1(0, 1)$$

$$(a_1, b_1) = (2, -1) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ b_1 = -1 \end{array}$$

$$\mathbf{v}_2 = (3, 4) = a_2\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 = a_2(1, 0) + b_2(0, 1)$$

$$(a_2, b_2) = (3, 4) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_2 = 3 \\ b_2 = 4 \end{array}$$

Então,

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$$

As linhas tornam-se colunas !

$$[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

exercício 5 (continuação)

<u>Solução 2:</u> um teorema relaciona as matrizes $[\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta}$ e $[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}$:

$$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \left([\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} \quad \text{ou} \quad [\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = \left([\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1}$$

Do item a), tem-se que:

$$[\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow [\mathbf{I}]_{\beta'}^{\beta} = \left([\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 4/11 & -3/11 & 1 & 0 \\ 1/11 & 2/11 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = (11/4)L_1 \\ L_2 = 11L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/4 & 11/4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 11 \end{array}\right] L_2 = L_2 - L_1 \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -3/4 & 11/4 & 0 \\ 0 & 11/4 & -11/4 & 11 \end{array}\right] \quad L_2 = (4/11)L_2$$

exercício 5 (continuação)

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -3/4 & 11/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \quad L_1 = L_1 + (3/4)L_2 \quad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$[\mathbf{I}]^{\beta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Letra c)</u>

Escrever os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ da base η como combinações lineares dos vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ da base β.

$$\mathbf{v}_1 = (2, -1) = a_1\mathbf{u}_1 + b_1\mathbf{u}_2 = a_1(1, 1) + b_1(-1, 1)$$

$$(a_1 - b_1, a_1 + b_1) = (2, -1) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a_1 = 1/2 \\ b_1 = -3/2 \end{array}$$

exercício 5 (continuação)

$$\mathbf{v}_2 = (3, 4) = a_2\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 = a_2(1, 1) + b_2(-1, 1)$$

$$(a_1 - b_1, a_1 + b_1) = (3, 4) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_2 &= 7/2 \\ b_2 &= 1/2 \end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{u}_2$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{7}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2$$

As linhas tornam-se colunas !

$$[\mathbf{I}]^{\eta}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 7/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

exercício 5 (continuação)

Letra d)

$\mathbf{v} = (2, -4) \rightarrow [\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = [\mathbf{I}]_{\beta}^{\beta'}[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/11 \\ -6/11 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v} = (2, -4) = 20/11(2, -1) - 6/11(3,4) = (22/11, -44/11) = (2, -4)$

$$[\mathbf{v}]_{\eta} = [\mathbf{I}]_{\beta}^{\eta}[\mathbf{v}]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1/2 & 7/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20/11 \\ -6/11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{v} = (2, -4) = -1(1, 1) - 3(-1,1) = (2, -4)$

exercício 6

Verifique se os conjuntos abaixo formam uma base. Em caso negativo, inclua ou exclua o número de elementos necessários de maneira a formar uma base.

a) $\beta = \{\mathbf{v}_1 = (-1,0), \mathbf{v}_2 = (2,1), \mathbf{v}_3 = (1,1), \mathbf{v}_4 = (1,3)\}$, base do $\mathbf{R}^2$.

b) $\beta = \{\mathbf{v}_1 = (-1,1,0), \mathbf{v}_2 = (2,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,1)\}$, base do $\mathbf{R}^3$.

c) $\beta = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ base de M(2,2).

exercício 6 (continuação)

Para que um conjunto de vetores seja uma base, ele deve satisfazer duas condições:

i. Devem ser LI;

ii. $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n] = V$, ou seja, deve ser capaz de gerar qualquer outro vetor de V por combinação linear.

Letra a)

$\beta = \{\mathbf{v}_1 = (-1,0), \mathbf{v}_2 = (2,1), \mathbf{v}_3 = (1,1), \mathbf{v}_4 = (1,3)\}$. Este conjunto deve ser LD pois é composto por 4 vetores, e uma base do $\mathbf{R}^2$, precisa de dois vetores apenas (mesmo número que a dimensão de $\mathbf{R}^2$). Vamos mostrar explicitamente que o sistema é LD e em seguida selecionar os vetores que formarão uma base do $\mathbf{R}^2$.

exercício 6 (continuação)

O conjunto será LI se $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ implicar explicitamente em $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

$$a_1(-1, 0) + a_2(2, 1) + a_3(1, 1) + a_4(1, 3) = (0, 0)$$

$$(-a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4, a_2 + a_3 + 3a_4) = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} -a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \\ a_2 + a_3 + 3a_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{conjunto LD, como esperado}$$

Para escolher quais vetores formarão a base, devemos escolher dois vetores e testar as propriedades i) e ii). Vamos fazer o teste para os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_4$. Veja que esta escolha foi ao acaso, poderíamos ter escolhido qualquer outro par de vetores.

exercício 6 (continuação)

$a(-1, 0) + b\,(1, 3) = (0, 0) \Rightarrow (-a + b, a + 3b) = (0, 0)$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -3b \end{cases} \Rightarrow$$

se e somente se $a = b = 0$

Portanto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4\}$ é LI

Seja um vetor qualquer do $\mathbf{R^2}$ $\mathbf{v} = (x,y)$, $\mathbf{v}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_4$, em outras palavras, $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_4] = \mathbf{R^2}$?

$a(-1, 0) + b\,(1, 3) = (x, y) = \mathbf{v} \Rightarrow (-a + b, 3b) = (x, y)$

$$b = y/3$$
$$a = y/3 - x$$

$x, y \in \mathbf{R}$

Assim, $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_4] = \mathbf{R}^2$ e portanto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4\}$ é uma base do $\mathbf{R}^2$. Observe que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4\}$ não é a <u>única</u> base possível, teste por exemplo $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ ou $\{\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_2\}$ e verifique que ambos também são bases do $\mathbf{R}^2$.

exercício 6 (continuação)

<u>Letra b)</u>

$a\mathbf{v}_1 + \; b\mathbf{v}_2 \; + c\mathbf{v}_3 = \; \mathbf{0}$ $(-1,1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)\}$.

$a(-1,1,0) \; + \; b(2,1,1) \; + c\,(1,1,1) = (0,0,0)$

$(-\,a+2b + c, a + b + c, b + c) = (0,0,0)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 = L_1 - L_2 \\ \\ L_3 = L_3 - 3L_2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = -\,L_3 \end{array}$$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; L_2 = L_2 - L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} a = b = c = 0 \\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \text{ é LI} \end{array}$$

Seja um vetor qualquer do $\mathbf{R}^3$ $\mathbf{v} = (x, y, z)$, $\mathbf{v}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, em outras palavras, $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \mathbf{R}^3$?

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = (x, y, z)$$

$$a(-1,1,0) + b(2,1,1) + c\,(1,1,1) = (x, y, z)$$

$$(-a+2b + c, a + b + c, b + c) = (x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ -1 & 2 & 1 & z \end{bmatrix} \; L_3 = L_3 + L_1$$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 3 & 2 & z+x \end{bmatrix} \; L_1 = L_1 - L_2 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -1 & z+x-3y \end{bmatrix} \; L_3 = -L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & -(z+x)+3y \end{bmatrix} \; L_2 = L_2 - L_3 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & -(z+x+2y) \\ 0 & 0 & 1 & -(z+x)+3y \end{bmatrix}$$

$$a = x - y$$

$$b = -(x+2y+z) \qquad x, y, z \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2 \; \mathbf{v}_3] = \mathbf{R}^3$$

$$c = -(x - 3y + z)$$

Portanto $\beta = \{\mathbf{v}_1 = (-1,1,0), \mathbf{v}_2 = (2,1,1), \mathbf{v}_3 = (1,1,1)\}$, base do $\mathbf{R}^3$.

exercício 6 (continuação)

Letra c)

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \rightarrow a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+b+c & -b+c \\ 2a+c & a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$a = b - c \qquad b = c$

$c = -2a \qquad c = a$

$a = b = c = 0 \rightarrow$ é LI

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \qquad x, y, z, t \in \mathbf{R}$$

Suponha $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} a+b+c & -b+c \\ 2a+c & a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$a = 2 \quad c = -1 \quad b = -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2-2-1 & -(-2)-1 \\ 2\times 2-1 & 2-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Portanto $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] \neq M(2,2) \rightarrow \beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ não é base de M(2,2).

Seja $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vamos inserir $\mathbf{v}_4$ no conjunto β e verificaremos se agora β forma uma base de M(2,2).

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 + d\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} a+b+c & -b+c \\ 2a+c & a-c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 - 2L_1 \\ L_4 = L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 = -L_2 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 = L_1 - L_2 \\ \\ L_3 = L_3 + 2L_2 \\ L_4 = L_4 + L_2 \end{array}$$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 = -L_3/3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 = L_1 - 2L_3 \\ L_2 = L_2 + L_3 \\ \\ L_4 = L_4 + 3L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad a = b = c = d = 0$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é LI

exercício 6 (continuação)

Seja **v** um vetor qualquer de M(2,2), deve-se verificar se pode ser representado por $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

$$a\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix} \quad x, y, z, t \in \mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix}a+b+c & b-c\\ 2a+c & a-c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & x\\ 0 & -1 & 1 & 0 & y\\ 2 & 0 & 1 & 0 & z\\ 1 & 0 & -1 & 1 & t\end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = L_3 - 2L_1\\ L_4 = L_4 - L_1\end{array}$$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & -2 & -1 & 0 & z-2x \\ 0 & -1 & -2 & 1 & t-x \end{bmatrix} \mathrm{L}_2 = -\mathrm{L}_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & -2 & -1 & 0 & z-2x \\ 0 & -1 & -2 & 1 & t-x \end{bmatrix} \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \\ \\ \mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_2 \\ \mathrm{L}_4 = \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & -3 & 0 & z-2x-2y \\ 0 & 0 & -3 & 1 & t-x-y \end{bmatrix} \mathrm{L}_3 = -\mathrm{L}_3/3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (-z+2x+2y)/3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & t-x-y \end{bmatrix}$$

$\mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3$ $\qquad$ $\mathrm{L}_4 = \mathrm{L}_4 + 3\mathrm{L}_3$

$\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_3$

exercício 6 (continuação)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (-x-y+2z)/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (2x-y-z)/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (2x+2y-z)/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x+y-z+t \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = (-1-1+2\times 3)/3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + (2\times 1-1-3)/3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$(2\times 1+2\times 1-3)/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + (1+1-3+3) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é LI, e $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4] = M(2,2)$, então é β uma base de M(2,2).

exercício 7

Se

$$[\mathbf{I}]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ache

a) $[\mathbf{v}]_{\alpha}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $[\mathbf{v}]_{\alpha'}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

exercício 7

Letra a)

$$[\mathbf{v}]_{\alpha} = [\mathbf{I}]_{\alpha}^{\alpha'}[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Letra b)

$$[\mathbf{I}]_{\alpha'}^{\alpha} = \left([\mathbf{I}]_{\alpha}^{\alpha'}\right)^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 = L_1/3 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \\ L_2 = L_2 - 2L_1 \end{array}$$

exercício 7

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \quad [\mathbf{I}]_{\alpha'}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{v}]_{\alpha'} = [\mathbf{I}]_{\alpha'}^{\alpha}[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$