Conceitos Básicos
5189-32

Rodrigo Calvo
rcalvo@uem.br

Departamento de Informática – DIN
Universidade Estadual de Maringá – UEM

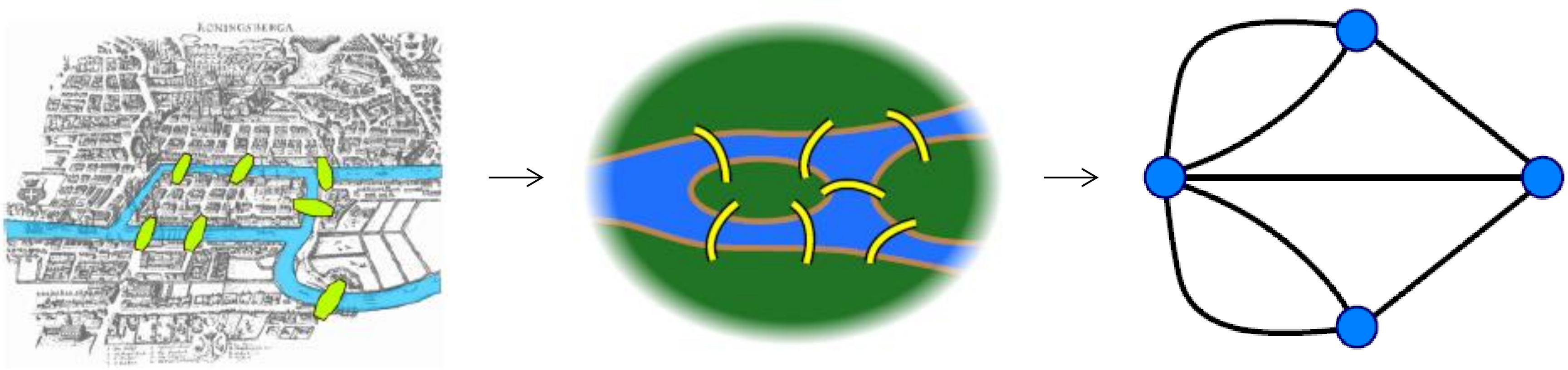
1° semestre de 2016

Histórico

- Leonhard Euler introduziu em 1736 o problema das sete pontes de Königsberg
    - Capital da Prússia (região da Alemanha)
- Königsberg possuía 2 ilhas além de território no continente
- 7 pontes conectavam as ilhas e o continente
- Problema das sete pontes:
    - Encontrar um caminho que passasse por cada uma das pontes uma única vez

Histórico

- Leonhard Euler abstraiu o problema e gerou uma topologia para representar os pontos de interesse da cidade



Histórico

- Leonhard Euler introduziu em 1736 o problema das sete pontes de Königsberg
- Problema encontrado:
    - A ponte utilizada para atingir uma porção de terra não pode ser utilizada para deixá-la.
- Nem todas as porções de possui número par de pontes
- Permite-se somente que a porção de terra inicial e final tenham número ímpar de pontes.
- Assim, Euler demonstrou que não é possível resolver o problema.
- Surgimento da área da matemática denominada de Teoria dos Grafos

Motivação

- Muitas aplicações em computação necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos:
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?
- Existe um tipo abstrato chamado grafo que é usado para modelar tais situações.

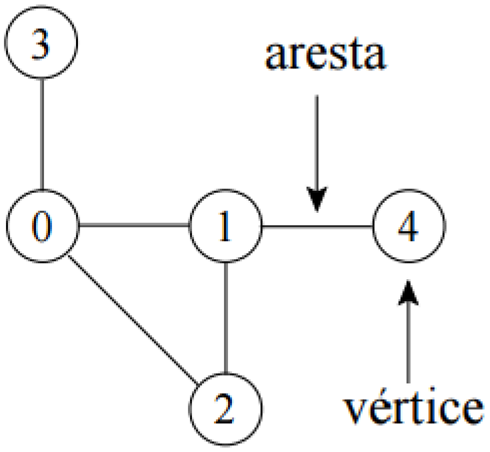
Aplicações

- Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:
  - Ajudar máquinas de busca a localizar informação relevante na Web.
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.

Conceitos básicos

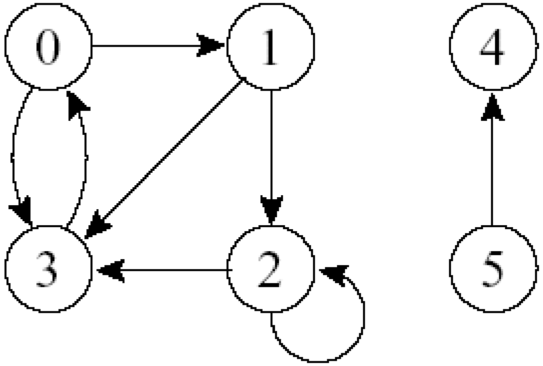
- **Grafo**: conjunto de vértices e arestas.
- **Vértice**: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.
- **Aresta**: conexão entre dois vértices.

- Notação: G = (V, A)
  - G: grafo
  - V: conjunto de vértices
  - A: conjunto de arestas



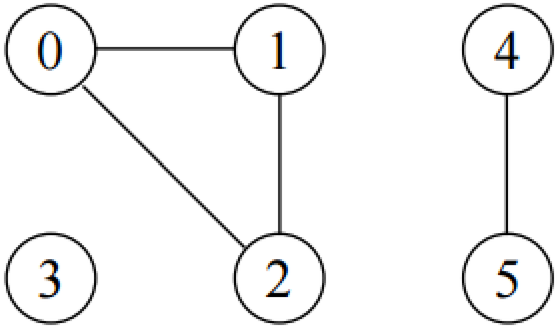
Grafos Direcionados

- Um grafo direcionado *G* é um par *(V, A)*, onde *V* é um conjunto finito de vértices e *A* é uma relação binária em *V*
  - Uma aresta *(u, v)* sai do vértice *u* e entra no vértice *v*. O vértice *v* é ***adjacente*** ao vértice *u*.
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de ***self-loops***.



Grafos Não Direcionados

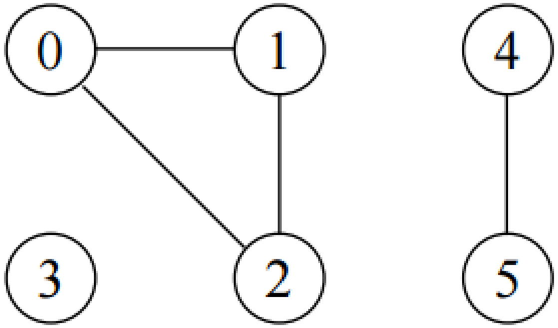
- Um grafo não direcionado *G* é um par *(V, A)*, onde *V* o conjunto de arestas *A* é constituído de pares de vértices não ordenados.
    - As arestas *(u, v)* e *(v, u)* são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
    - ***Self-loops*** não são permitidos.



Grau de um vértice

- Em grafos não direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vértice de grau zero é dito isolado ou não conectado

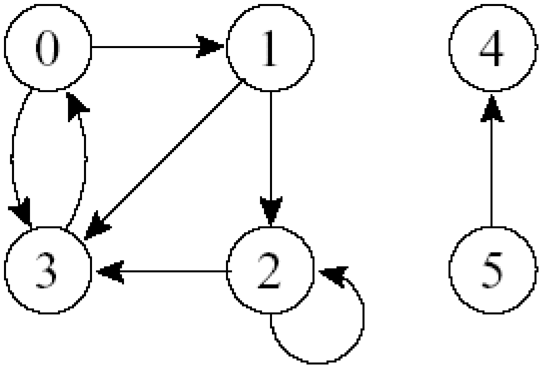
Exemplo:
- O vértice 1 tem grau 2
- O vértice 3 é isolado.



Grau de um vértice

- Em grafos direcionados:
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree*) mais o número de arestas que chegam nele (*in-degree*).

Exemplo:
- O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.

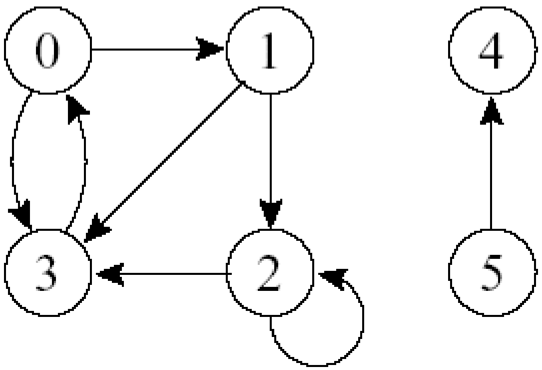


Caminho entre vértices

- Um caminho de comprimento k de um vértice x a um vértice y em um grafo $G = (V, A)$ é uma seqüência de vértices $(v_0, v_1, v_2, . . . , v_k)$ tal que $x = v_0$ e $y = v_k$, e $(v_i{-}1, v_i) \in$ A para $i = 1, 2, . . . , k$.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices $v_0, v_1, v_2, . . . , v_k$ e as arestas $(v_0, v_1),(v_1, v_2), . . . ,(v_k{-}1, v_k)$.
- Se existir um caminho c de x a y então y é alcançável a partir de x via c.

Caminho entre vértices

- Um caminho é simples se todos os vértices do caminho são distintos.



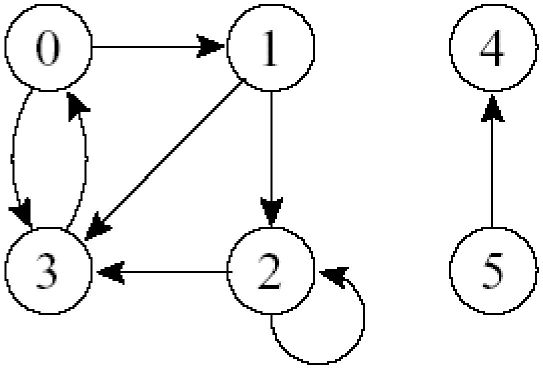
- Exemplo:

  - O caminho (0, 1, 2, 3) é simples e tem comprimento 3;

  - O caminho (1, 3, 0, 3) não é simples.

Caminho entre vértices

- Um subcaminho do caminho p = (v_0, v_1, v_2, . . . , v_k) é uma subsequência contígua de seus vértices



Exemplo:

- O caminho (2, 3, 0) é um subcaminho do caminho (1, 2, 3, 0, 1, 3).

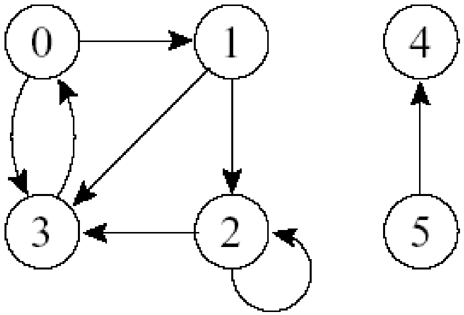
Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Um caminho *(v_0, v_1, . . . , v_k)* forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices v_1, v_2, . . . , v_k são distintos.
  - O ***self-loop*** é um ciclo de tamanho 1.

Ciclos

- Em um grafo direcionado:
  - Dois caminhos $(v_0, v_1, . . . , v_k)$ e $(v'_0, v'_1, . . . , v'_k)$ formam o mesmo ciclo se existir um inteiro *j* tal que

    $v'_i = v_{(i+j) \bmod k}$ para $i = 0, 1, . . . , k - 1$.

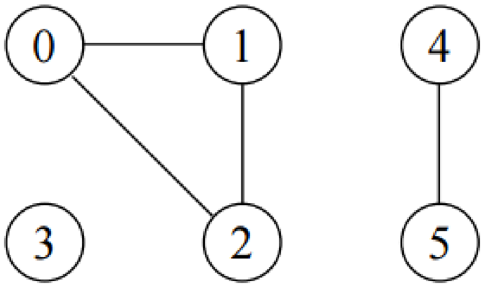


Exemplo:

- O caminho (0, 1, 2, 3, 0) forma um ciclo.
- O caminho(0, 1, 3, 0) forma o mesmo ciclo que os caminhos (1, 3, 0, 1) e (3, 0, 1, 3).

Ciclos

- Em um grafo não direcionado:
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$ e o caminho contém pelo menos 3 arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.

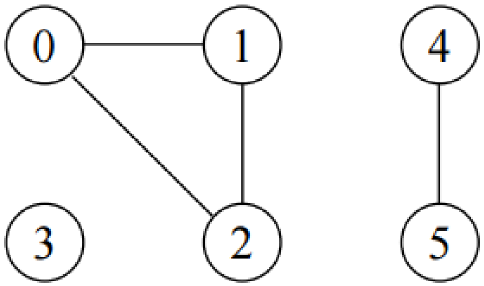


Exemplo:

- O caminho (0, 1, 2, 0) é um ciclo.

Ciclos

- Em um grafo não direcionado (<u>outra definição</u>):
  - Um caminho $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forma um ciclo se $v_0 = v_k$, $k > 0$ e todas as arestas do caminho são distintas.
  - O ciclo é simples se os vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são distintos.



Exemplo:

- O caminho (0, 1, 2, 0) é um ciclo.

Ciclos

- Um grafo (direcionado ou não) que não contém ciclo é dito **acíclico**.

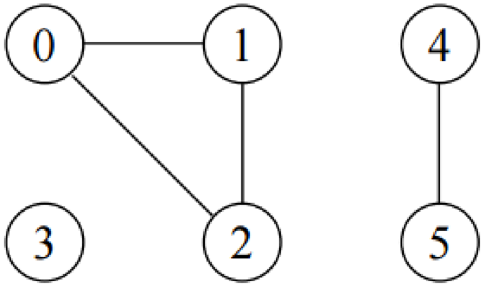
Componentes conectados

- Um grafo não direcionado é **conectado** se cada par de vértices está conectado por um caminho.
- Os **componentes conectados** são as porções conectadas de um grafo.
- Um grafo não direcionado é **conectado** se ele tem exatamente um componente conectado

Exemplo:

- Os componentes são:

{0, 1, 2}, {3} e {4, 5}

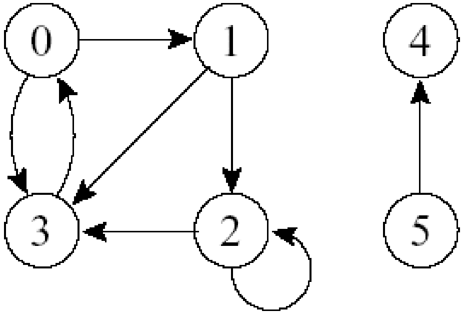


Componentes fortemente conectados

- Um grafo direcionado *G = (V, A)* é **fortemente conectado** se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os **componentes fortemente conectados** de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação **"são mutuamente alcançáveis"**.
- Um **grafo direcionado fortemente conectado** tem apenas um componente fortemente conectado.

Componentes fortemente conectados

- Em um grafo direcionado



Exemplo:

- {0, 1, 2, 3}, {4} e {5} são os componentes fortemente conectados

- O componente {4, 5} não é fortemente conectado, pois somente o vértice 4 é alcançável a partir do vértice 5. O vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.

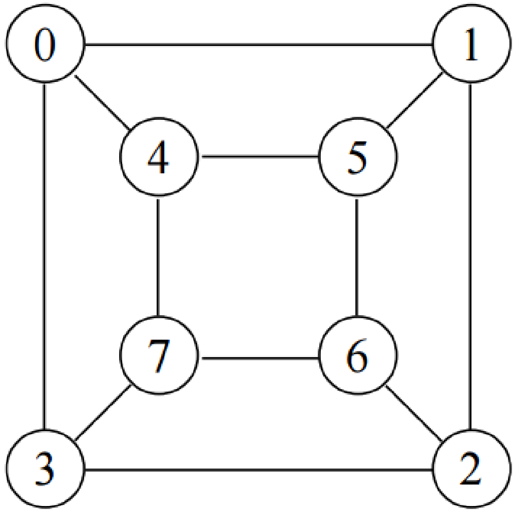
Grafos Isomorfos

- Dois grafos $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são isomorfos se existe uma bijeção $f : V \rightarrow V'$ tal que $(u, v) \in A$ se e somente se $(f(u), f(v)) \in A'$.

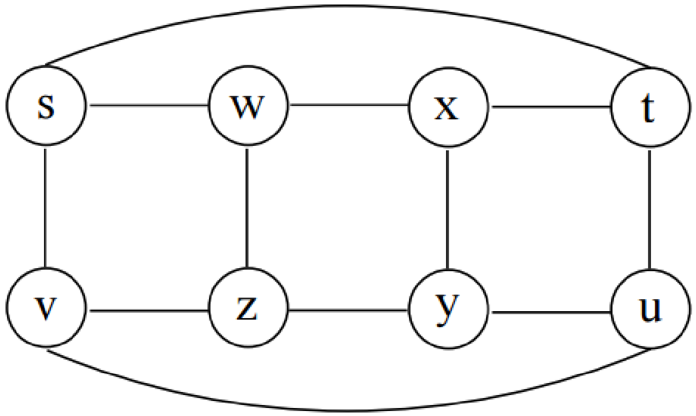
- Se for possível identificar os vértices de G como vértices de G’, mantendo as arestas correspondentes de G em G’, então os grafos são **isomorfos**.

Grafos Isomorfos

$G_1 = (V, A)$

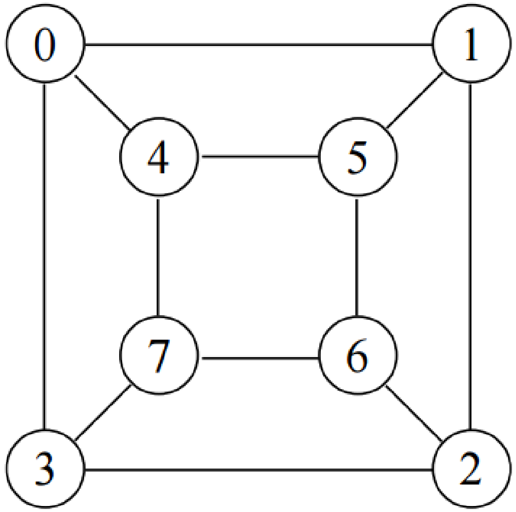


$G_1' = (V', A')$

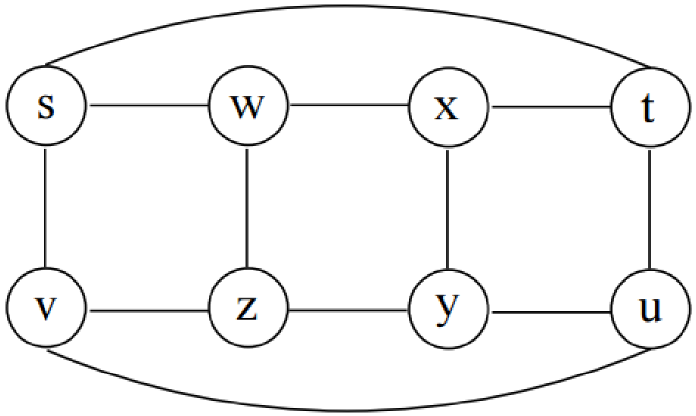


Grafos Isomorfos

$G_1 = (V, A)$



$G_1' = (V', A')$



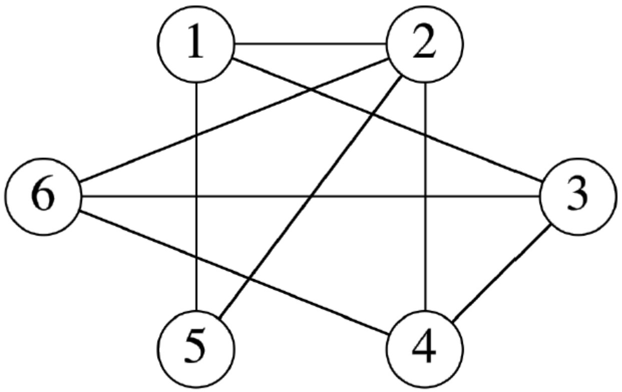
$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$|V| = 8$
$|A| = 12$

$V' = \{s, t, u, v, w, x, y, z\}$
$|V'| = 8$
$|A'| = 12$

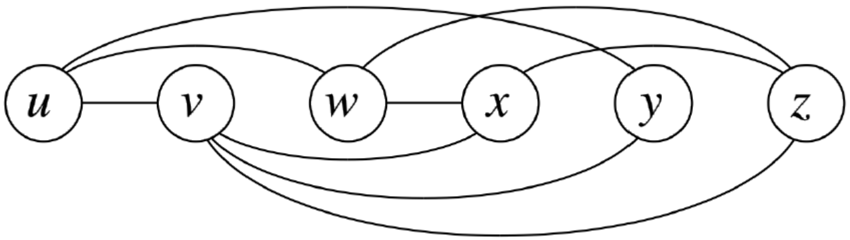
- Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora
  f (0) = s, f (1) = t, f (2) = u, f (3) = v, f (4) = w, f (5) = x, f (6) = y, f (7) = z
- Logo G_1 e G_1' são **isomorfos**

Grafos Isomorfos

$G_2 = (V, A)$

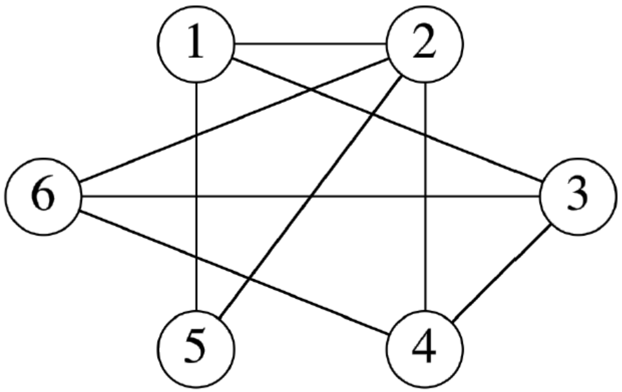


$G_2' = (V', A')$

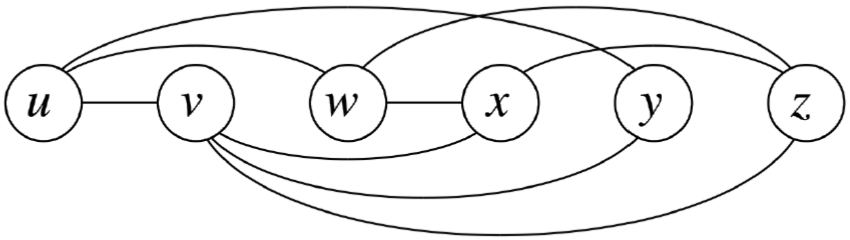


Grafos Isomorfos

$G_2 = (V, A)$



$G_2' = (V', A')$



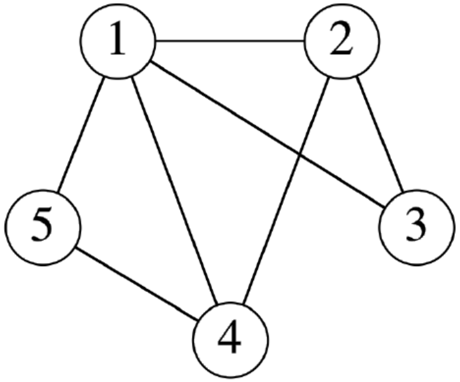
$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$|V| = 6$
$|A| = 9$

$V' = \{u, v, w, x, y, z\}$
$|V'| = 6$
$|A'| = 9$

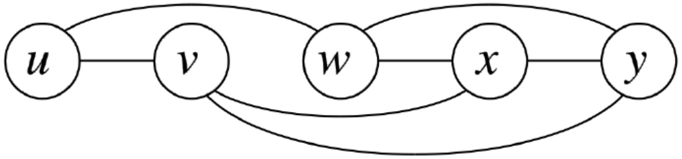
- Mapeamento de V para V' dado pela função bijetora
  f (1) = u, f (2) = v, f (3) = w, f (4) = x, f (5) = y, f (6) = z
- Logo G_2 e G_2' são **isomorfos**

Grafos Isomorfos

$G_3 = (V, A)$

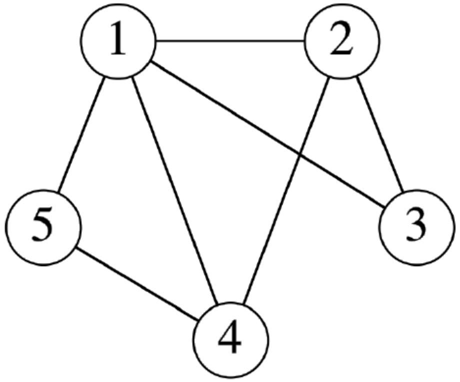


$G_3' = (V', A')$



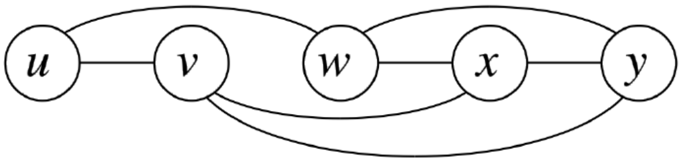
Grafos Isomorfos

$G_3 = (V, A)$



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$|V| = 5$
$|A| = 7$

$G_3' = (V', A')$



$V' = \{u, v, w, x, y\}$
$|V'| = 5$
$|A'| = 7$

- Em G_3' não há um vértice que corresponde ao vértice 1 do grafo G_3
- Logo G_3 e G_3' não são **isomorfos**

Subgrafos

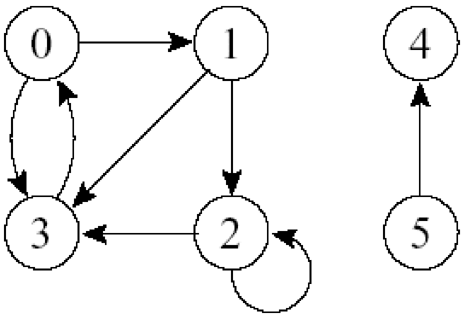
- Um grafo $G' = (V', A')$ é um subgrafo de $G = (V, A)$ se $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$.

- Dado um conjunto $V' \subseteq V$, o subgrafo induziro por V' é o grafo $G' = (V', A')$, onde $A' = \{(u,v) \in A \mid u, v \in V'\}$.

Subgrafos

- Dado o grafo *G = (V, A)*, qual é o subgrafo *G' = (V', A')* induzido pelo conjunto de vértices {1, 2, 4, 5} ?

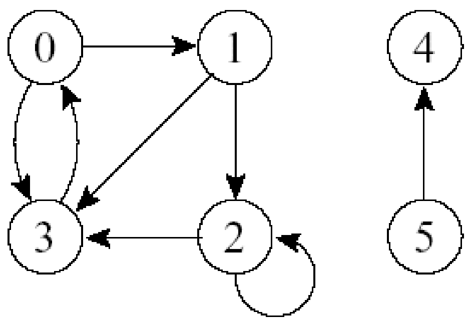
G



Subgrafos

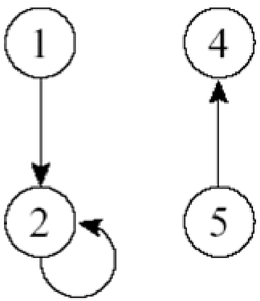
- Dado o grafo *G = (V, A)*, qual é o subgrafo *G' = (V', A')* induzido pelo conjunto de vértices {1, 2, 4, 5} ?

G



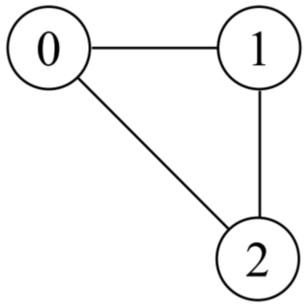
- G' = ({1, 2, 4, 5}, {(1, 2), (2, 2), (5, 4)}

G'

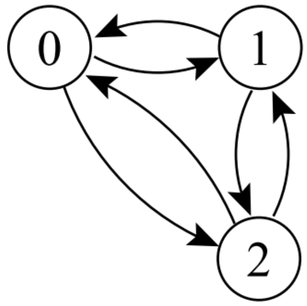


Versão Direcionada e Não Direcionada

- A versão direcionada de um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um grafo direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $(u, v) \in A$.
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u).



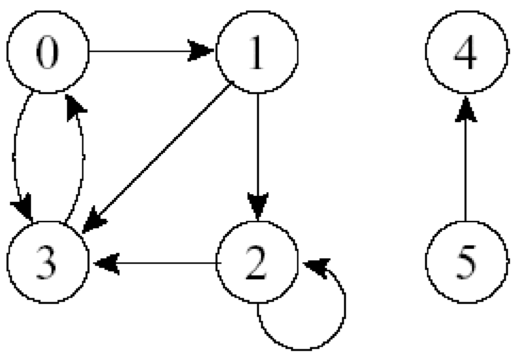
G



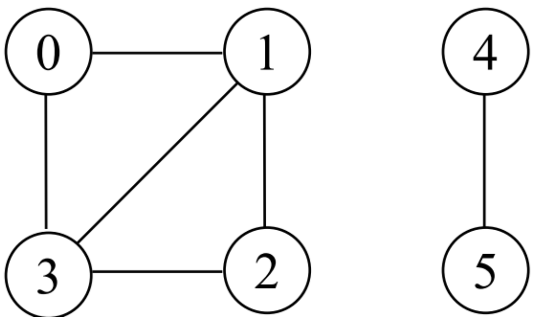
G’

Versão Direcionada e Não Direcionada

- A versão não direcionada de um grafo direcionado $G = (V, A)$ é um grafo não direcionado $G' = (V', A')$ onde $(u, v) \in A'$ se e somente se $u \neq v$ e $(u, v) \in A$.
- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os **self-loops**.



G



G′

Vizinho

- Em um grafo orientado, um **vizinho** de um vértice *u* é qualquer vértice que seja adjacente a *u* na versão não direcionada
  - *v* é **vizinho** de *u* se $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$

- Em um grafo não direcionado, *u* e *v* são **vizinhos** se são adjacentes

Grafos completos

- Um **grafo completo** é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.
- Possui $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V| - 1)/2$ arestas, pois do total de $|V|^2$ pares possíveis de vértices devemos subtrair $|V|$ **self-loops** e dividir por 2 (cada aresta ligando dois vértices é contada duas vezes).
- O número total de grafos diferentes com $|V|$ vértices é $2|V|(|V| - 1)/2$ (número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de $|V|(|V| - 1)/2$ possíveis arestas).

Outras classificações de grafos

- **Grafo ponderado**: possui pesos associados às arestas.

- **Grafo bipartido**: grafo não direcionado $G = (V, A)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 tal que $(u, v) \in A$ implica que:

  $u \in V_1$ e $v \in V_2$ ou

  $u \in V_2$ e $v \in V_1$

  - Todas as arestas ligam os dois conjuntos V_1 e V_2.

Outras classificações de grafos

- **Multigrafo**: grafo não direcionado em que pode haver várias arestas entre vértices e também **self-loops**.

- **Hipergrafo**: grafo não direcionado em que cada aresta conecta um número arbitrário de vértices.

Árvores

- **Árvore livre** (ou somente **Árvore**): grafo não direcionado acíclico e conectado.
- **Floresta**: grafo não direcionado acíclico, podendo ou não ser conectado.
- **Árvore geradora** de um grafo conectado $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma árvore.
- **Floresta geradora** de um grafo $G = (V, A)$: subgrafo que contém todos os vértices de G e forma uma floresta.

Bibliografia

- Wikipedia - Seven Bridges of Königsberg

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo B.4.

- Nivio Ziviani. Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C. 3a Edição Revista e Ampliada, Cengage Learning, 2010. Capítulo 7. Seção 7.1