AULA 15 – Euler e o Problema do Carteiro Chinês

Prof. Daniel Kikuti

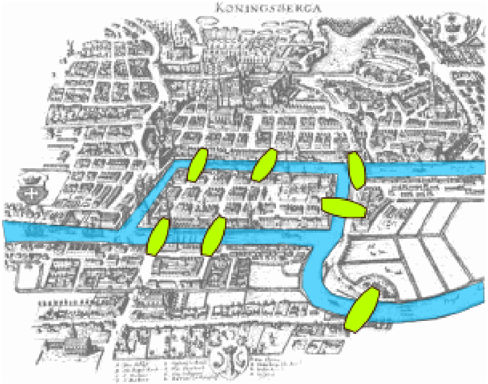
Universidade Estadual de Maringá

22 de julho de 2015

Sumário

Sete Pontes de Königsberg

É possível percorrer todas as pontes de Königsberg uma única vez (sem repetir nenhuma delas)?



Definições

Caminho e circuito euleriano

Um caminho simples ou circuito simples é dito **euleriano** se ele contém todas as arestas de um grafo exatamente uma vez (podendo repetir vértices).

Grafo euleriano

Um grafo que contém um circuito euleriano é chamado de **grafo euleriano**.

Grafo semi-euleriano

Um grafo que contém um caminho euleriano, mas não contém um ciclo euleriano é chamado de **grafo semi-euleriano**.

Exemplo

Classifique os grafos a seguir:

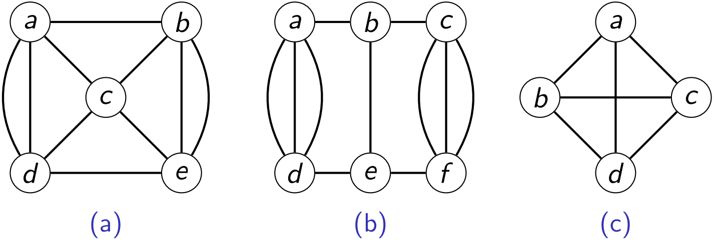
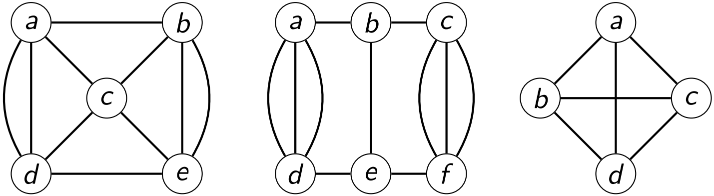


Figura: Alguns exemplos.

Exemplo

Classifique os grafos a seguir:



(a) (b) (c)

Figura: Alguns exemplos.

Figura (a) é euleriano, Figura (b) é semi-euleriano e Figura (c) não é nem euleriano nem semi-euleriano.

Alguns lemas importantes

Lema 1 (Handshaking lemma)

Todo grafo não direcionado possui um número par de vértices com grau ímpar, isto é, $\sum_{v \in V} grau(v) = 2.|E|$.

Lema 2

Dado um grafo conexo com todos os vértices de grau par, então qualquer par de vértice faz parte de um caminho simples e fechado.

Alguns lemas importantes

Lema 1 (Handshaking lemma)

Todo grafo não direcionado possui um número par de vértices com grau ímpar, isto é, $\sum_{v \in V} grau(v) = 2.|E|$.

Lema 2

Dado um grafo conexo com todos os vértices de grau par, então qualquer par de vértice faz parte de um caminho simples e fechado.

Demonstração

[Prova por contradição] Suponha que exista um par de vértices u e v que não admitem um circuito simples em comum. Como o grafo é conexo, então existe um caminho que liga u e v. Portanto, existe uma aresta (x, y) cuja remoção desconecta o grafo, caso contrário haveria um outro caminho disjunto alternativo conectando u e v (ver figura). Portanto, a remoção da aresta (x, y) desconecta o grafo gerando duas componentes conexas, sendo x e y pertencentes a componentes diferentes. Com isso, ambos os vértices passarão a ser os únicos vértices de grau ímpar. Isto contradiz o fato que o número de vértices com grau ímpar de um subgrafo deve ser par (Handshaking lemma).

Teorema de hoje :)

Teorema

Um grafo não orientado conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par.

Teorema de hoje :)

Teorema

Um grafo não orientado conexo G é um grafo euleriano se e somente se todo vértice de G tem grau par.

Demonstração

(Ida) Seja $G = (V, E)$ um grafo euleriano e seja p um circuito euleriano de G. Cada ocorrência de um vértice $v \in V$ em p, implica uma aresta que chega em v e uma aresta que sai de v. Seja k o número de vezes que o vértice v é repetido neste circuito. O grau de v é dado por $grau(v) = 2.k$, que é um número par.

Continuação da demonstração

Demonstração

(Volta) Suponha que todos os vértices possuem grau par. Seja v um vértice do grafo, construiremos um circuito C_1 partindo de v, passando por cada aresta uma única vez e retrocedendo a v. Se G contém todas as arestas de G, então C_1 é euleriano. Senão, seja G' o grafo obtido pela remoção de todas as arestas que fazem parte de C_1. Em G' todos os vértices possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de C_1 (senão o grafo não seria conexo). Recomeçamos o mesmo processo no grafo G', partindo de um vértice comum com C_1, obtendo assim um novo circuito C_2. Podemos juntar os circuitos como mostrado na figura a seguir (quadro). Continuando o processo, necessariamente obteremos um circuito único que contém todas as arestas de G.

Algoritmo de Hierholzer

```
hierholzer(G)
G' = G
v_0 = um vértice qualquer de G
C = caminho contendo apenas v_0
enquanto G'.E ≠ ∅
  u = um vértice em C tal que u.grau > 0 em G'
  U = ciclo em G' que contém u
  C = C substituindo o vértice u pelo ciclo U
  G'.E = G'.E - arestas usadas em U
devolva C
```

Análise do algoritmo

Correção

A correção segue imediatamente do teorema (prova construtiva).

Análise do algoritmo

Correção

A correção segue imediatamente do teorema (prova construtiva).

Complexidade

Depende de como são implementadas as instruções do algoritmo, mas é possível obter um tempo total $O(V + E)$.
Efetuar cada uma das operações a seguir em tempo constante:

- Encontrar arestas que não foram usadas para cada vértice.
- Encontrar um novo vértice para o percurso.
- Conectar dois circuitos compartilhando um vértice.

O Problema do Carteiro Chinês

O problema

Dado um grafo conexo com peso nas arestas, encontre um ciclo de peso mínimo que passe por cada aresta pelo menos uma vez.

O Problema do Carteiro Chinês

O problema

Dado um grafo conexo com peso nas arestas, encontre um ciclo de peso mínimo que passe por cada aresta pelo menos uma vez.

Aplicações

- Entrega de correspondência.
- Coleta de lixo.
- Vendas a domicílio...

Como resolver?

- Se o grafo for euleriano, então aplicar o algoritmo de Hierholzer.
- Se o grafo for semi-euleriano, adicionar uma aresta artificial que representa o caminho mínimo entre os dois vértices de grau ímpar (Dijkstra).
- Se tiver 4 ou mais vértices de grau ímpar
  - Montar um grafo completo com os vértices de grau ímpar, onde cada aresta representa o menor caminho entre o par de vértices (Floyd-Warshal).
  - Encontrar a melhor combinação de pares de vértices.

Exemplo

Quadro...