Universidade Estadual de Maringá

Departamento de Informática

Computação Gráfica

CG-08-PROJEÇÕES

NOTAS DE AULA

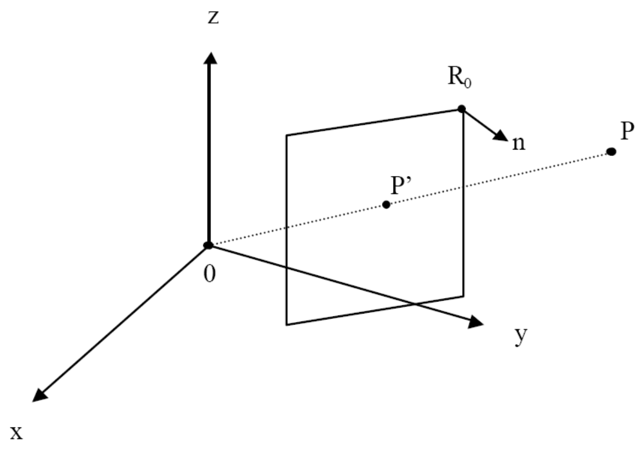
Prof. Dr. Dante Alves Medeiros Filho

Victória Ribeiro de Medeiros

2015

Matemática das Projeções

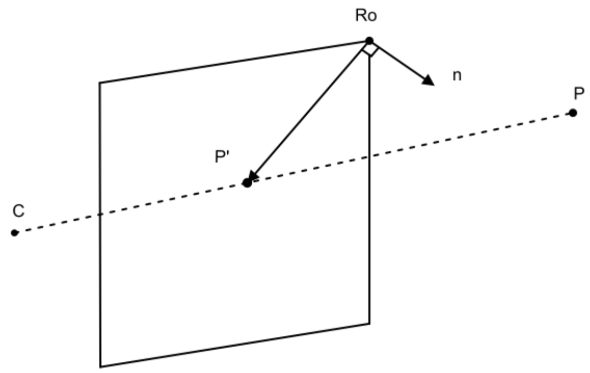
Projeção Perspectiva



O centro de projeção encontra-se na origem do sistema de coordenadas (0,0,0). Precisamos encontrar P’ que é a projeção de P no plano de projeção. Como P e P’ fazem parte da mesma reta P’ pode ser assim determinado:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \propto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

P’ faz parte da reta e do plano de projeção ao mesmo tempo. Desta forma deve satisfazer a ambas as equações. Inicialmente vamos determinar a equação do plano. Sabemos que um plano é univocamente determinado quando se conhece um ponto sobre o plano $R_0(x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal a ele (n_x, n_y, n_z). Temos então



$$\overrightarrow{P'R_0} = (x - x_0)\vec{\imath}, +(y - y_0)\vec{\jmath} + (z - z_0)\vec{k}$$

$$\vec{n} = n_x\vec{\imath} + n_y\vec{\jmath} + n_z\vec{k}$$

A equação do plano nasce do produto interno entre os vetores $\overrightarrow{P'R_0}\,.\vec{n} = 0$ que por serem perpendiculares deve ser zero.

$$\overrightarrow{P'R_0}\,.\vec{n} = (x_0 - x')\,.n_x + (y_0 - y')\,.n_y + (z_0 - z').n_z = 0$$

$$(x_0 - x')\,.n_x + (y_0 - y')\,.n_y + (z_0 - z').n_z = 0$$

$$x_0.n_x - x'.n_x + \; y_0.n_y - \; y'.\; n_y \; + \; z_0.n_z - z'\,.n_z = 0$$

$$-x'.n_x - \; y'.\; n_y - \; z'.n_z = \; -x_0\,.n_x - \; y_0.n_y - z_0\,.n_z$$

Multiplicando por (-1) ambos os lados e chamando o lado direito da equação de d_0

Temos:

$$d_0 = x_0\,.n_x + \; y_0.n_y \; + z_0\,.n_z$$

$$x'\,.n_x + \; y'.\; n_y \; + \; z'\,.n_z = \; d_0$$

como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \propto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Substituindo

$$x' = \propto x$$
$$y' = \propto y$$
$$z' = \propto z$$

$$(\propto x) \,.\, n_x + (\propto y) \,.\, n_y + (\propto z) \,.n_z = d_0$$

$$(\propto x) \,.\, n_x + (\propto y) \,.\, n_y + (\propto z) \,.n_z = d_0$$

$$\propto x. n_x + \propto y \,.\, n_y + \propto z \,.n_z = d_0$$

$$\propto (x. n_x + y \,.\, n_y + z \,.n_{)z} = d_0$$

Temos então

$$\propto = \frac{d_0}{x. n_x + y. n_y + z. n_z}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{d_0}{x. n_x + y. n_y + z. n_z} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d_0}{x. n_x + y. n_y + z. n_z} x \\ \dfrac{d_0}{x. n_x + y. n_y + z. n_z} y \\ \dfrac{d_0}{x. n_x + y. n_y + z. n_z} z \end{pmatrix}$$

Introduzindo coordenadas homogêneas e considerando $w = x. n_x + y. n_y + z. n_z$, temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 x \\ d_0 y \\ d_0 z \\ w \end{pmatrix}$$

Para voltarmos às coordenadas cartesianas, basta dividirmos tudo por w, como segue

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d_0.x}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \\ \dfrac{d_0 y}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \\ \dfrac{d_0 z}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \\ \dfrac{w}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \end{pmatrix}$$

como:

$$w' = \frac{w}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} = \frac{x.n_x + y.n_y + z.n_z}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} = 1$$

temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{d_0.x}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \\ \dfrac{d_0 y}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \\ \dfrac{d_0 z}{x.n_x + y.n_y + z.n_z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim em coordenadas homogêneas podemos expressar a equação na forma matricial:

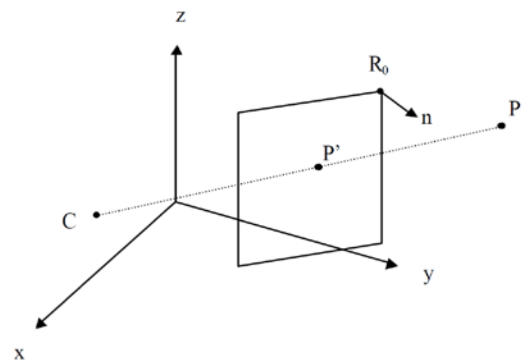
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Genericamente podemos escrever:

$$P' = M_{per}^{0}.P$$

Observe que esta matriz projeta o ponto P no plano, cujo ponto projetado é chamado de P' e o centro de projeção está na origem do sistema. Todo o processo se vale de um único sistema de coordenadas chamado de sistema global de coordenadas ou mais conhecido pelo termo em inglês ***world coordinate system***.

Vamos agora generalizar este sistema de projeções. Vamos considerar que o ponto de vista ou centro de projeção esteja fora da origem, como ilustra a figura a seguir:



Note que sabemos realizar a projeção quando o centro de projeção se encontra na origem. De forma análoga ao estudo feito com transformações de escala e rotação quando fora da origem, é possível transladar este sistema para a origem e aplicar a matriz M_{per}^{0} e depois fazer a transformação de translação que volta ao ponto de vista inicial. Vejamos como ficam estas matrizes:

$$M_{per} = T(a,b,c).M_{per}^{0}.T(-a,-b,-c)$$

$$M_{per} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{per} = \begin{pmatrix} d + an_x & an_y & an_z & -ad_0 \\ bn_x & d + bn_y & bn_z & -bd_0 \\ cn_x & cn_y & d + cn_z & -cd_0 \\ n_x & n_y & n_z & -d_1 \end{pmatrix}$$

Com

$$d_0 = x_0\,.n_x + \; y_0.n_y \; + z_0\,.n_z$$

$$d_1 = a\,.n_x + \; b.n_y \; + c\,.n_z$$

$$d = d_0 \; - d_1$$

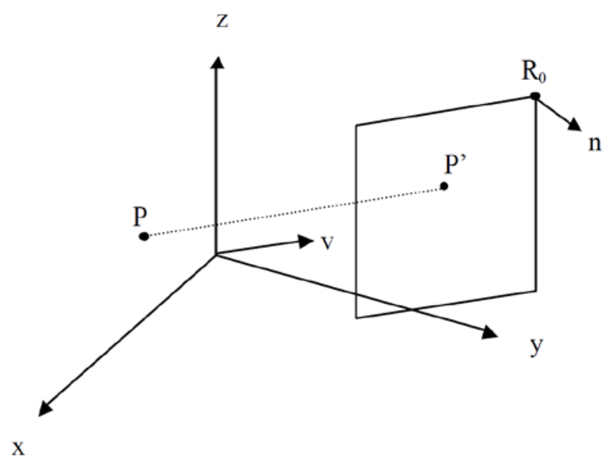
Assim, para calcularmos o ponto P' que é a projeção de P no plano basta multiplicarmos P pela matriz perspectiva da seguinte forma:

$$P' = \; M_{per}.P$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + an_x & an_y & an_z & -ad_0 \\ bn_x & d + bn_y & bn_z & -bd_0 \\ cn_x & cn_y & d + cn_z & -cd_0 \\ n_x & n_y & n_z & -d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

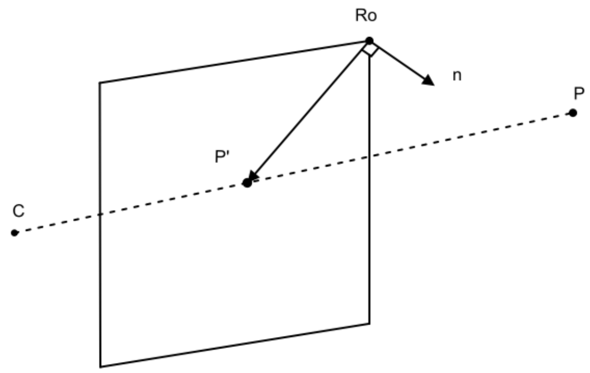
Projeção Paralela

Como vimos o que caracteriza um determinado tipo de projeção é a localização do ponto de vista em relação ao plano de projeção. Vimos ainda que na projeção perspectiva o ponto de vista está situado a uma determinada distância conhecida do plano de projeção. Na projeção paralela é considerada a distância entre o ponto de vista e o plano de projeção como sendo infinita, assim não temos um ponto de vista definido, temos uma direção de projeção. Esta direção de projeção geralmente é definida por um vetor. A direção de projeção pode ser obtida pelo vetor que liga P a P' como o mostra a figura a seguir:



Considere um plano de projeção que contém o ponto $R_0(x_0, y_0, z_0)$ de normal $n(n_x, n_y, n_z)$ e uma direção de projeção dada pela direção do vetor v(a,b,c), como mostra a figura acima.

O plano é mais uma vez determinado por um vetor perpendicular ao plano e um ponto sobre ele. Temos o vetor normal n e o ponto P'. Desta forma temos dois vetores a saber: $\overrightarrow{P'R_0}$ e $\vec{n}$. Como os vetores $\overrightarrow{P'R_0}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares o produto interno entre eles é zero.



Temos:

$$\overrightarrow{P'R_0} = (x - x_0)\vec{\imath}, +(y - y_0)\vec{\jmath} + (z - z_0)\vec{k}$$

$$\vec{n} = n_x\vec{\imath} + n_y\vec{\jmath} + n_z\vec{k}$$

Fazendo o produto interno entre eles e igualando a zero temos:

$$\overrightarrow{P'R_0}.\vec{n} = (x'_0 - x').n_x + (y_0 - y').n_y + (z_0 - z').n_z = 0$$

$$(x'_0 - x').n_x + (y_0 - y').n_y + (z_0 - z').n_z = 0$$

$$x'.n_x + y'.n_y + z'.n_z - x_0.n_x - y_0.n_y - z_0.n_z = 0$$

$$x'.n_x + y'.n_y + z'.n_z = x_0.n_x + y_0.n_y + \ z_0.n_z$$

Fazendo

$$d_0 = x_0.n_x + y_0.n_y + \ z_0.n_z$$

Temos:

$$x'.n_x + y'.n_y + z'.n_z = d_0$$

Como P e P' formam uma reta de cossenos diretores (a,b,c), são válidas as relações:

$$P' = P + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.t$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.t$$

$$x' = x + a.t$$
$$y' = y + b.t$$
$$z' = z + c.t$$

Substituindo na equação do plano

$$(x + a.t).n_x + (y + b.t).n_y + (z + c.t).n_z = \ d_0$$

$$t = \frac{d_0 - (x.n_x + y.n_y + z.n_z)}{d_1}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . [\frac{d_0 - \left(x.n_x + y.n_y + z.n_z\right)}{d_1}]$$

Com

$$d_0 = x_0 \, .n_x + \; y_0.n_y \; + z_0 \, .n_z$$

$$d_1 = a \, .n_x + \; b.n_y \; + c \, .n_z$$

Temos assim a seguinte matriz para a projeção paralela expressa em coordenadas homogêneas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + an_x & -an_y & -an_z & ad_0 \\ -bn_x & d_1 - bn_y & -bn_z & bd_0 \\ -cn_x & -cn_y & d_1 - cn_z & cd_0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos escrever genericamente:

$$P' = M_{par}.P$$

Referências

ANGEL, Edward. **Interactive computer graphics**: a top-down approach with OpenGL. Massachusetts: Addison-Wesley, 1997.

FOLEY, D. James et al. **Computer graphics**: principles and practice. Delhi: Pearson Education, 2004.

GOMES, J.; VELHO, L. **Fundamentos da computação gráfica**. Rios de Janeiro: IMPA, 2008.

HEARN, Donald; BAKER, Pauline M. **Computer graphics**: C version. New Jersey: Printice Hall, 1986.

ROGERS, D. F.; ADAMS, J. A. **Mathematical elements for computer graphics**. New York: McGRAW-HILL, 1990