# Álgebra Linear - Matrizes

Prof. André Tiba

akot@cin.ufpe.br

Baia 65, ramais: 4765 ou 4338

#### Matrizes

- 1. Definições
- 2. Tipos especiais de Matrizes
- 3. Notação
- 4. Operação com Matrizes

- Uma matriz é uma estrutura bi-dimensional onde todos os elementos são do mesmo tipo (ou inteiros, ou reais, ou complexos, etc ...).
- Os elementos são dispostos em linhas e colunas e cada célula dela é completamente identificada pela sua posição e seu valor.
- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

• Uma matriz de *m* linhas e *n* colunas é representada por:

$$\mathbf{A}_{mxn} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix} = [\mathbf{a}_{ij}]_{mxn}$$

• **Definição:** Duas matrizes  $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$  e  $B_{rxs} = [b_{ij}]_{rxs}$  são ditas iguais A = B, se elas têm o mesmo número de linhas (m = r) e colunas (n = s), e todos os seus elementos correspondentes são iguais  $(a_{ij} = b_{ij})$ .

• Matriz Quadrada: É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas, n = m.

$$\mathbf{A}_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{nxn}$$

obs: diz-se que  $A_{nxn}$  é uma matriz quadrada de ordem n.

• Matriz Nula: é aquela em que  $a_{ij} = 0$ , para todo i e todo j.

$$\mathbf{A}_{nxm} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = [a_{ij} = 0]_{nxm}$$

obs: utiliza-se a o algarismo 0 ("zero") em negrito para representar qualquer matriz nula.

• Matriz Coluna: É aquela que possui apenas uma única coluna.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = [\mathbf{a}_i]_{\mathbf{n}\mathbf{x}\mathbf{1}}$$

• Matriz Linha: É aquela que possui apenas uma única linha.

$$A_{1xn} = (a_1 \ a_2 \ .... \ a_n) = [a_i]_{1xn}$$

obs: A<sub>nx1</sub> também é chamada de vetor coluna.

obs: A<sub>1xn</sub> também é chamada de vetor linha.

• Matriz Diagonal: É uma matriz quadrada (m=n) onde  $a_{ii} = 0$ , para todo  $i \neq j$ .

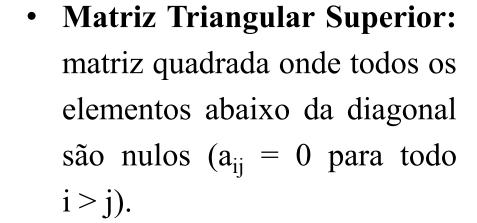
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

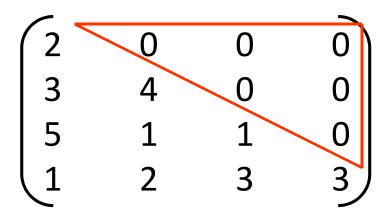
• Matriz Identidade Quadrada: É aquela em que  $a_{ii} = 1$  e  $a_{ij} = 0$ , para todo  $i \neq j$ .

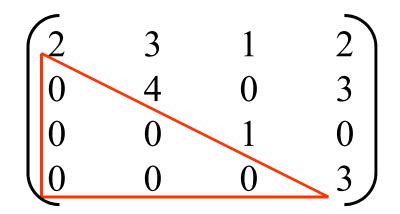
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obs: utiliza-se a letra I ("i" maiúsculo) em negrito para representar qualquer matriz identidade.

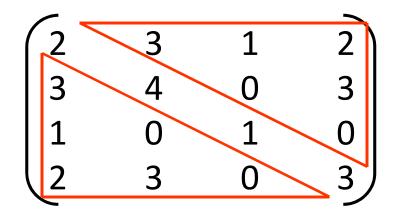
• Matriz Triangular Inferior: matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são nulos  $(a_{ij} = 0)$ para todo i < j).







• Matriz Simétrica: matriz quadrada, n = m, onde  $a_{ij} = a_{ji}$ .



#### Matrizes: notação

- <u>Matrizes</u> são representadas por letras maiúsculas (muitas vezes em negrito); seus elementos são representados pela respectiva letra minúscula, com dois índices;
  - matriz  $\rightarrow$  A;
  - a<sub>ij</sub> elemento de A referente a posição da *i*-ésima linha e *j*-ésima coluna;
- <u>Vetores</u> são representados por letras minúsculas (muitas vezes em negrito); seus elementos são representados pela mesma letra minúscula, com um índice.
  - vetor linha ou coluna  $\rightarrow$  a;
  - a<sub>i</sub> elemento de a, referente a i-ésima linha ou coluna.

• Adição: A soma de duas matrizes de mesma ordem  $A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$  e  $B_{mxn} = [b_{ij}]_{mxn}$ , que denotamos por A + B, é a matriz  $S_{mxn}$  cujos elementos,  $[s_{ij}]$ , são dados pela soma dos correspondentes elementos de A e B, isto é:

$$\bullet \ \ \mathbf{s}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} + \mathbf{b}_{ij}$$

• Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad A + B = S$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2+0 & 3-2 & 4+1 \\ 2+1 & 5+4 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

- Adição: Propriedades  $(A_{mxn}, B_{mxn} e C_{mxn})$ 
  - A + B = B + A (comutatividade)
  - A + (B + C) = (A + B) + C (associatividade)
  - A + 0 = A, onde 0 denota a matriz nula mxn.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

associatividade aditiva:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$\begin{bmatrix} 2 + (1+3) & 3 + (0+1) \\ 1 + (2+2) & 1 + (3+0) \\ -1 + (3+4) & 0 + (-1-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+1) + 3 & (3+0) + 1 \\ (1+2) + 2 & (1+3) + 0 \\ (-1+3) + 4 & (0-1) - 3 \end{bmatrix}$$

elemento neutro aditivo:

$$A + 0 = A 
 \begin{bmatrix}
 2+0 & 3+0 \\
 1+0 & 1+0 \\
 -1+0 & 0+0
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 2 & 3 \\
 1 & 1 \\
 -1 & 0
 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação por um Escalar: Seja  $A=[a_{ij}]_{mxn}$  e k um número real, então definimos uma nova matriz B como
  - $B = [b_{ij}]_{mxn} = k*A = [k*a_{ij}]_{mxn}$
  - Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad k = 2 \quad \Longrightarrow \quad B = 2*A = \begin{bmatrix} 2*2 & 2*3 \\ 2*1 & 2*1 \\ 2*(-1) & 2*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Propriedades
  - k.(A + B) = k.A + k.B, sendo B uma matriz de mesma ordem que A;
  - $(k_1 + k_2).A = k_1.A + k_2.A$ ,  $k_1$  e  $k_2$  números reais;
  - 0.A = 0, onde 0 é o número zero e 0 é a matriz nula;
  - $k_1.(k_2.A) = (k_1.k_2).A$ ,  $k_1$  e  $k_2$  números reais.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_1 = 2 \quad \mathbf{k}_2 = 3$$

•  $k_1.(A + B) = k_1.A + k_1.B$ 

$$2*\begin{bmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 1+2 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*(2+1) & 2*(1+1) \\ 2*(1+2) & 2*(3+0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*2+2*1 & 2*1+2*1 \\ 2*1+2*2 & 2*3+2*0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2*2 & 2*1 \\ 2*1 & 2*3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2*1 & 2*1 \\ 2*2 & 2*0 \end{bmatrix} = 2* \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + 2* \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

•  $k_1.(k_2.B) = (k_1.k_2).B$ 

$$2*\begin{bmatrix} 3*1 & 3*1 \\ 3*2 & 3*0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2*3*1 & 2*3*1 \\ 2*3*2 & 2*3*0 \end{bmatrix} = 2*3*\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Transposição:** dada uma matriz  $A=[a_{ij}]_{mxn}$ , podemos obter outra matriz  $A'=[b_{ij}]_{nxm}$ , cujas linhas são as colunas de A, isto é,  $b_{ii}=a_{ii}$ .
- A' ou A<sup>t</sup>, é chamada de *transposta de A*.
- Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

#### • Propriedades:

- Se A é simétrica, então A = A'
- A'' = A
- (A + B)' = A' + B'
- (k.A)' = k.A', onde k é um número

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)' = A' + B' 
\begin{bmatrix} 2+3 & 3+3 & 4+5 \\ 1+2 & 5+2 & 7+1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2+3 & 1+2 \\ 3+3 & 5+2 \\ 4+5 & 7+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicação de Matrizes: Sejam  $A=[a_{ij}]_{mxn}$  e  $B=[b_{ij}]_{nxp}$ , definimos  $C=A.B=[c_{uv}]_{mxp}$ , onde:
  - $\bullet c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} b_{uk} \cdot A_{kv}$
  - OBS:
    - i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes  $A_{mxn}$  e  $B_{sxp}$ , se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, i.e., n = s. Além disso, a matriz resultado C = A.B terá ordem mxp.
    - ii) O elemento  $c_{ij}$  é obtido multiplicando os elementos da linha i da primeira matriz pelos elementos da coluna j da segunda matriz, e somando esses produtos

#### • Multiplicação de Matrizes: exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A*B = \begin{bmatrix} 2*1+1*0 & 2*1+1*2 \\ 1*1+3*0 & 1*1+3*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^*\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1^*2 + 1^*1 & 1^*1 + 1^*3 \\ 0^*2 + 2^*1 & 0^*1 + 2^*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B*C = \begin{bmatrix} 1*3 + 1*1 & 1*2 + 1*1 & 1*4 + 1*3 \\ 0*3 + 2*1 & 0*2 + 2*1 & 0*4 + 2*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

C\*A → não é possível pois os tamanhos, da linha de C e da coluna de A, são diferentes!

#### • Multiplicação de Matrizes:

- Propriedades
  - i) Em geral, A.B  $\neq$ B.A, observe que A.B pode ser igual a  $0_{mxn}$ , sem que A ou B sejam  $0_{mxn}$
  - ii) AI = IA = A, onde I é a matriz identidade
  - iii) A.(B + C) = A.B + A.C (Distributividade à esquerda)
  - iv) (A + B).C = A.C + B.C (Distributividade à direita)
  - v) (A.B).C = A.(B.C) (Associatividade)
  - vi) (AB)' = B'A', observe a mudança na ordem do produto
  - vii) 0.A = 0 e A.0 = 0, 0 é uma matriz nula

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 $\blacksquare$  IA = AI = A

$$I*A = \begin{bmatrix} 1*2 + 0*1 & 1*1 + 0*3 \\ 0*2 + 1*1 & 0*1 + 1*3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A*I = \begin{bmatrix} 2*1 + 1*0 & 2*0 + 1*1 \\ 1*1 + 3*0 & 1*0 + 3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

■ (AB)' = B'A'

$$AB = \begin{bmatrix} 2*1 + 1*0 & 2*1 + 1*2 \\ 1*1 + 3*0 & 1*1 + 3*2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \implies (AB)' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

B'A' = 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
\* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  =  $\begin{bmatrix} 1*2+0*1 & 1*1+0*3 \\ 1*2+2*1 & 1*1+2*3 \end{bmatrix}$  =  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ 

#### Matrizes:

• Problemas Sugeridos: do1 ao 14