Árvores Geradoras Mínimas
5189-32

Rodrigo Calvo
rcalvo@uem.br

Departamento de Informática – DIN
Universidade Estadual de Maringá – UEM

1° semestre de 2016

Introdução

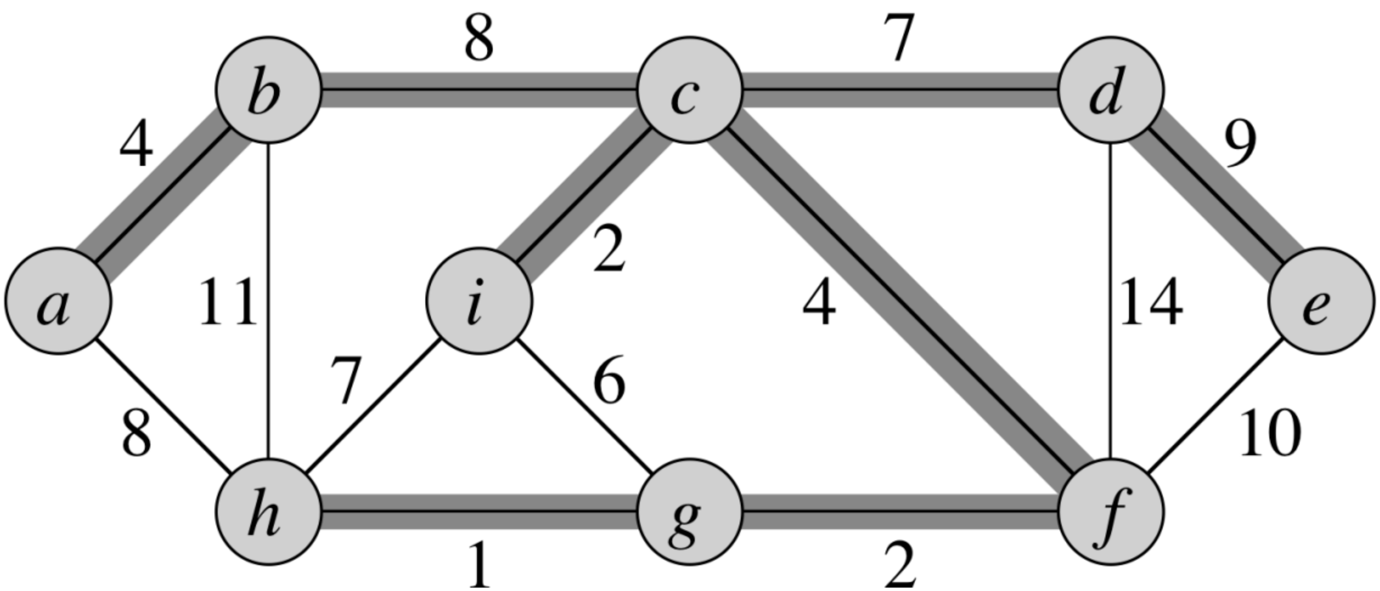
- Dado um grafo conexo não direcionado $G = (V, E)$ e uma função peso $w : E \to \mathbf{R}$, queremos encontrar um subconjunto acíclico $T \subseteq E$ que conecte todos os vértices de G e cujo peso total $w(T)$ seja minimizado

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u,v)$$

- Como T é acíclico e conecta todos os vértices, T forma uma árvore, denominada de **árvore geradora mínima** (MST)
- O problema de determinar T é chamado de **problema da árvore geradora mínima**
- Dois algoritmos gulosos são propostos para resolver este problema:
    - Algoritmo de Kruskal
    - Algoritmo de Prim

Introdução

- Propriedades de uma MST:
  - Tem |V| − 1 arestas
  - Não tem ciclos
  - Pode não ser única



Árvore Geradora Mínima

- Como construir uma árvore geradora mínima? Uma aresta de cada vez!
- Um conjunto *A* é inicialmente vazio
- Em cada etapa, uma aresta (*u*, *v*) pode ser adicionada a *A*, de forma a manter a seguinte invariante:
    - Antes de cada iteração, *A* é um subconjunto de alguma árvore geradora mínima
- A aresta (*u*, *v*) é chamada de **aresta segura** para *A*

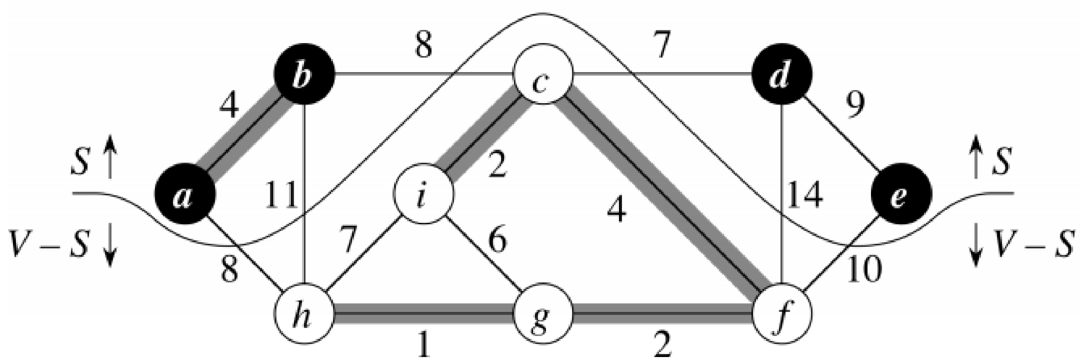
Árvore Geradora Mínima

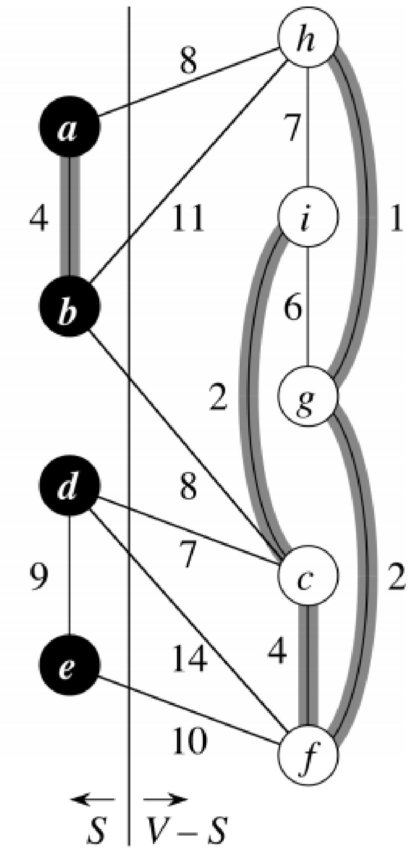
```
generic-mst(G, w)
A = Ø
while A não forma uma árvore geradora
  encontre uma aresta (u, v) que seja segura para A
  A = A U {(u, v)}
return A
```

Árvore Geradora Mínima

- Definições que auxiliam no processo de reconhecimento de umaa aresta segura:
  - Seja $S \subset V$ e $A \subseteq E$
  - Um **corte** $(S, V - S)$ de um grafo não direcionado $G = (V, E)$ é uma partição de V
  - Uma aresta $(u, v) \in E$ **cruza** o corte $(S, V - S)$ se um de seus extremos está em S e o outro em $V - S$
  - Um corte **respeita** o conjunto A de arestas se nenhuma aresta em A cruza o corte
  - Uma aresta é uma **aresta leve** cruzando um corte se seu peso é o mínimo de qualquer aresta que cruza o corte

Árvore Geradora Mínima





Árvore Geradora Mínima

- Teorema 23.1
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não direcionado com uma função peso w de valor real definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, seja $(S, V - S)$ qualquer corte de G que respeita A e seja (u, v) uma aresta leve cruzando $(S, V - S)$. Então a aresta (u, v) é segura para A.

Árvore Geradora Mínima

- Ideia da prova
- Seja T uma MST que inclui *A*
  - Se T contém (*u*, *v*), é claro que (*u*, *v*) é segura para *A*
  - Se T não contém (*u*, *v*), constrói-se outra MST T’ que inclui $A \cup \{(u, v)\}$

Árvore Geradora Mínima

- Corolário 23.2
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não direcionado com uma função peso w de valor real definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, e seja $C = (V_C, E_C)$ um componente conexo (árvore) na floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve conectando C a algum outro componente em G_A, então (u, v) é segura para A.

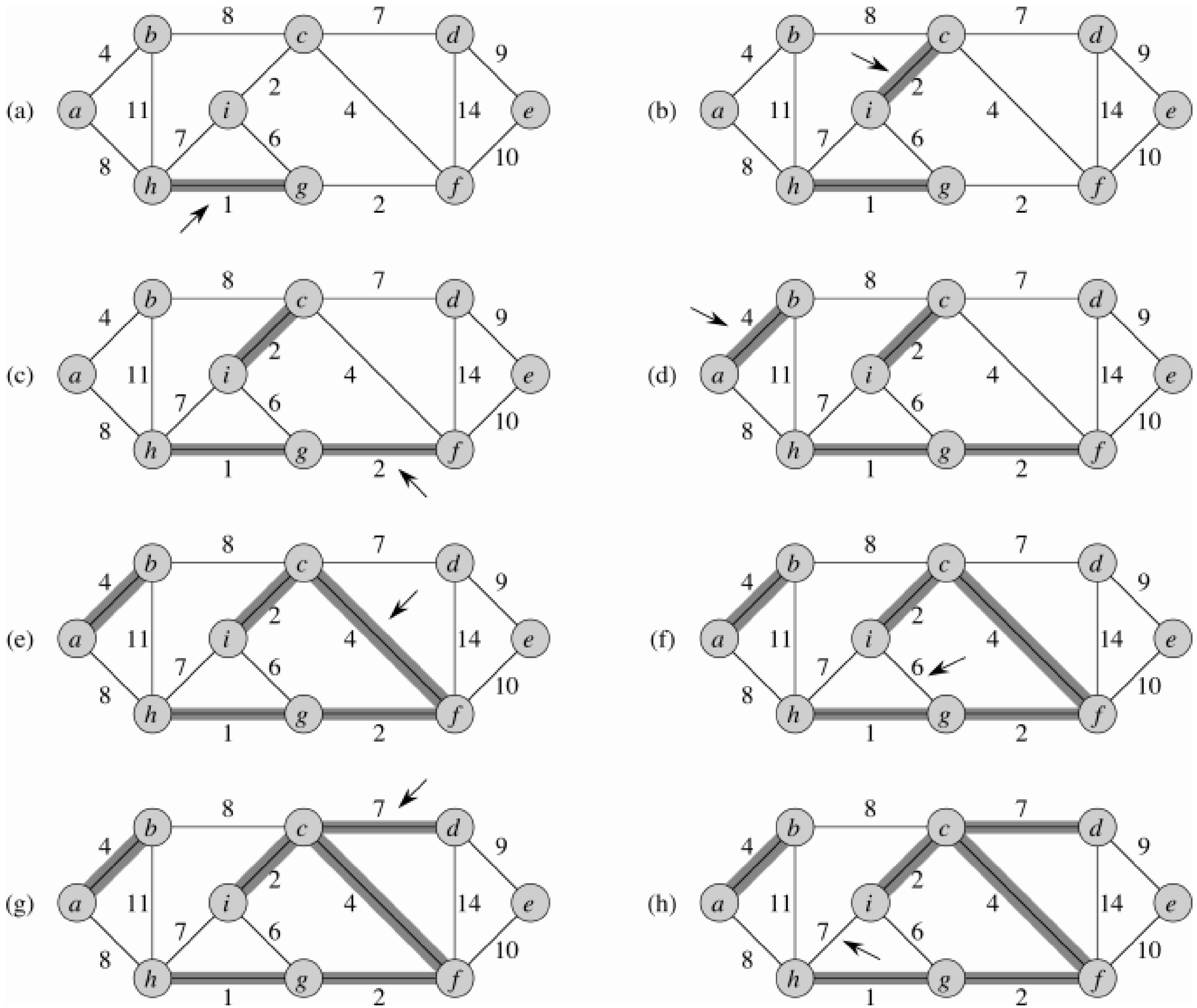
Árvore Geradora Mínima

- Corolário 23.2
  - Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não direcionado com uma função peso w de valor real definido em E. Seja A um subconjunto de E que está incluído em alguma árvore geradora mínima correspondente a G, e seja $C = (V_C, E_C)$ um componente conexo (árvore) na floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma aresta leve conectando C a algum outro componente em G_A, então (u, v) é segura para A.
  - Prova
    - Considere $S = V_C$ no Teorema 23.1

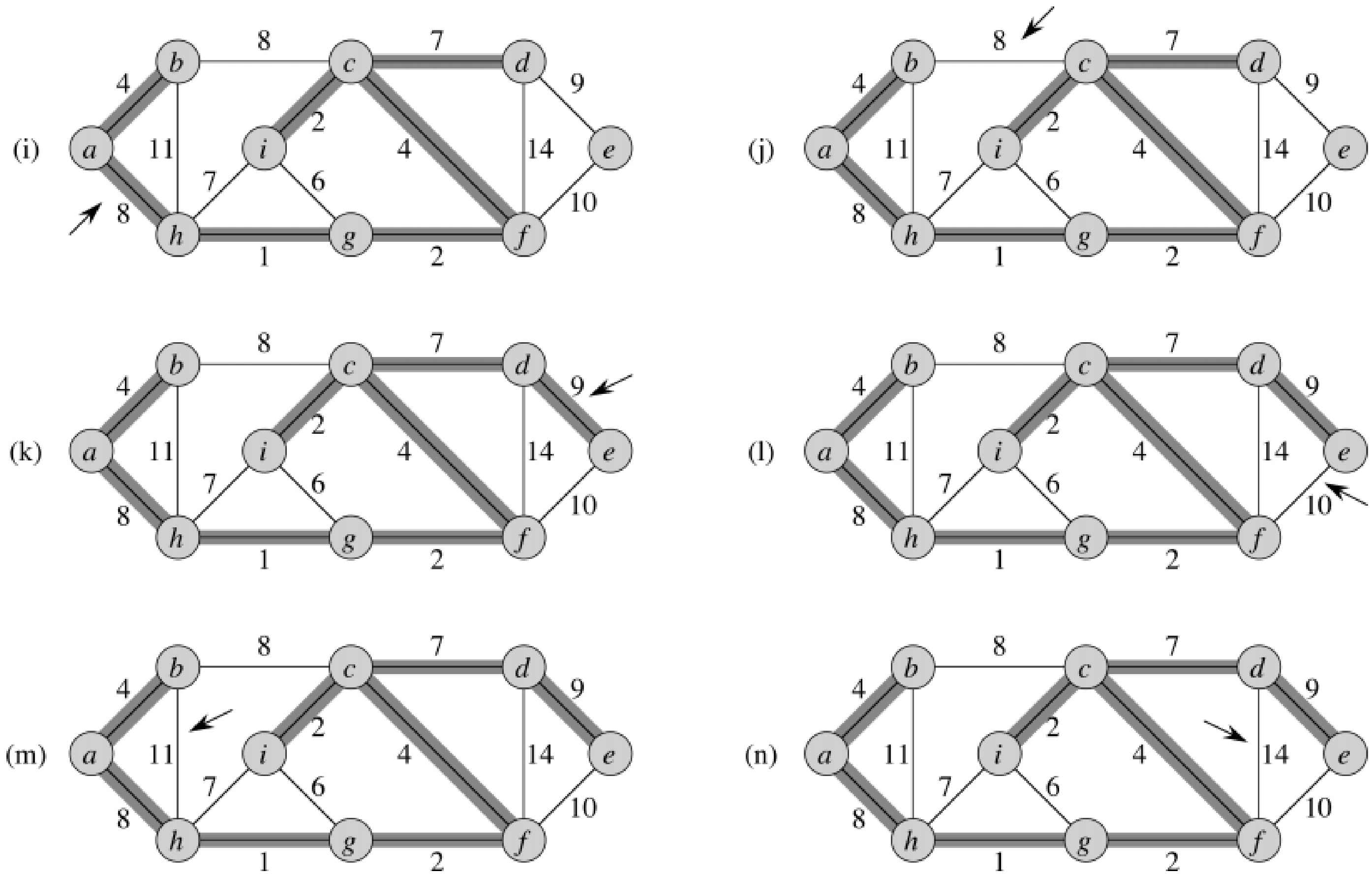
Algoritmo de Kruskal

- Baseia-se diretamente no algoritmo genérico apresentado
- Inicialmente cada vértice está em sua própria componente (árvore)
- De todas as arestas que conectam duas árvores quaisquer na floresta, uma aresta (u, v) de peso mínimo é escolhida. A aresta (u, v) é segura para alguma das duas árvores
- Utiliza uma estrutura de dados de conjuntos disjuntos
- Cada conjunto contém os vértices de uma árvore da floresta atual

Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal



Algoritmo de Kruskal

```
mst-kruskal(G, w)
A = 0
for cada vértice v em G.V
  make-set(v)
ordenar por peso as arestas de E
for cada aresta (u, v) em E, em ordem de peso
  if find-set(u) != find-set(v)
    A = A U {(u, v)}
    union(u, v)
return A
```

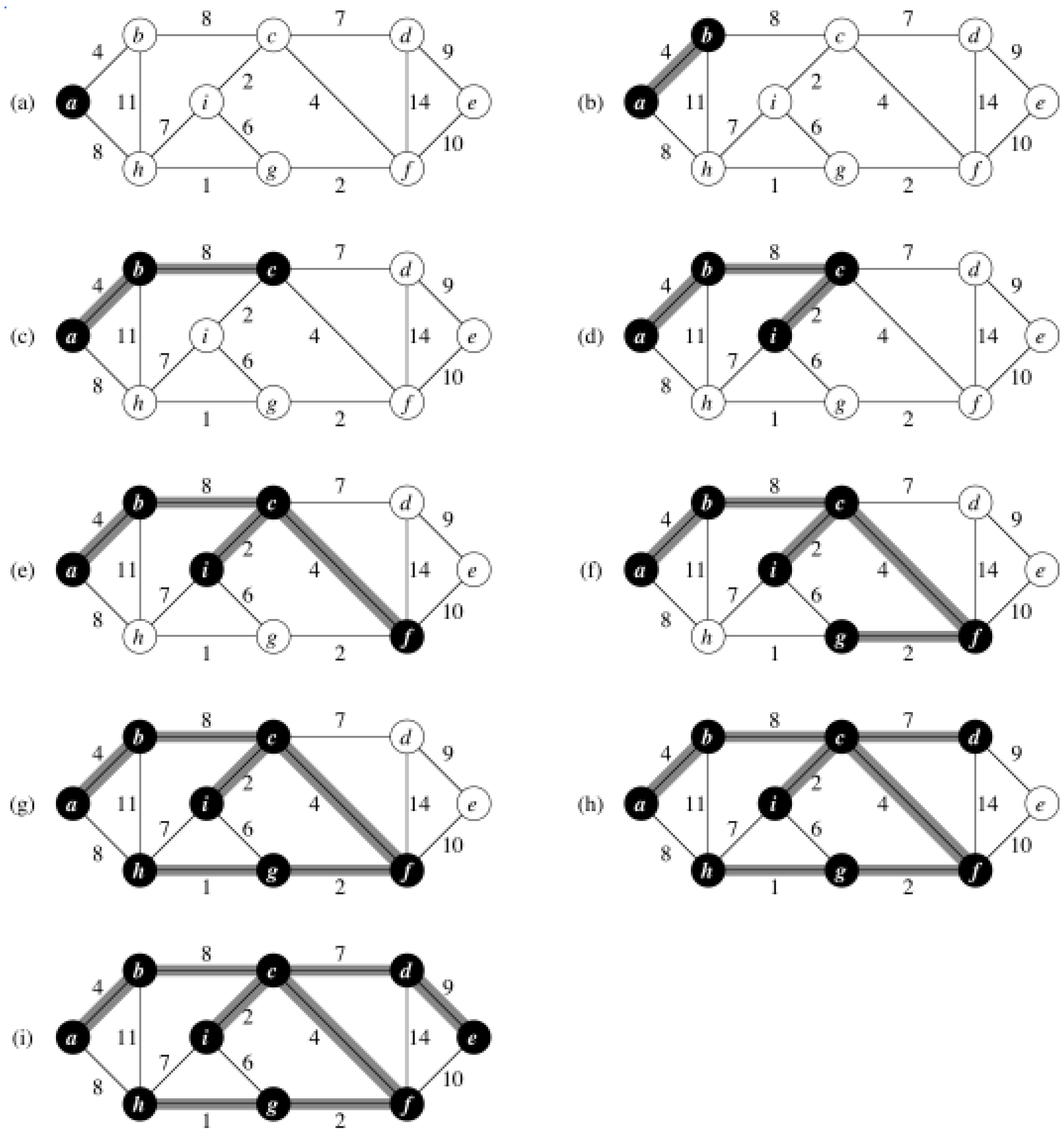
Análise do Algoritmo de Kruskal

- A ordenação das arestas na linha 4 demora $O(E \lg E)$
- Operações com conjuntos disjuntos (depende da implementação)
  - O laço das linhas 5 a 8 executa $O(E)$ **`find-set`** e **`union`**. Juntamente com as $|V|$ operações **`make-set`**, elas demoram $O((V + E)\alpha(V))$, onde α é uma função de crescimento muito lento
  - Pelo fato de G ser supostamente conexo, temos que $|E| \geq |V| - 1$, portanto o tempo com operações com conjuntos disjuntos é $O(E\alpha(V))$
  - Além disso, $\alpha(|V|) = O(\lg V) = O(\lg E)$, e portanto o tempo total das operações com conjuntos disjuntos é $O(E \lg E)$
- Somando o custo de ordenação e o custo das operações com conjuntos disjuntos, temos $O(E \lg E)$. Observando que $|E| < |V^2|$, temos que $\lg |E| = O(\lg V)$, e portanto, o tempo de execução do algoritmo é $O(E \lg V)$

Algoritmo de Prim

- Baseia-se diretamente no algoritmo genérico apresentado
- As arestas do conjunto *A* formam uma única árvore
- A árvore começa com uma raiz arbitrária r e aumenta até alcançar todos os vértices em *V*
- Para cada vértice *v*, *v*.chave é o peso mínimo de qualquer aresta que conecta *v* a um vértice da árvore; *v*.chave = ∞ se não existe nenhuma aresta deste tipo
- Em cada passo, um vértice *u* com a menor chave é adicionado a árvore junto com a aresta (*u*.pai, *u*)
- A questão principal para implementar o algoritmo de Prim de forma eficiente é tornar fácil a seleção de uma nova aresta a ser adicionada à árvore

Algoritmo de Prim



Algoritmo de Prim

```
mst-prim(G, w, r)
for cada u em G.V
  u.chave = infinito
  u.π = NIL
r.chave = 0
Q = G.V
while Q != 0
  u = extract-min(Q)
  for cada v em u.adj
    if v em Q e w(u, v) < v.chave
      v.π = u
      v.chave = w(u, v)
```

Análise do Algoritmo de Prim

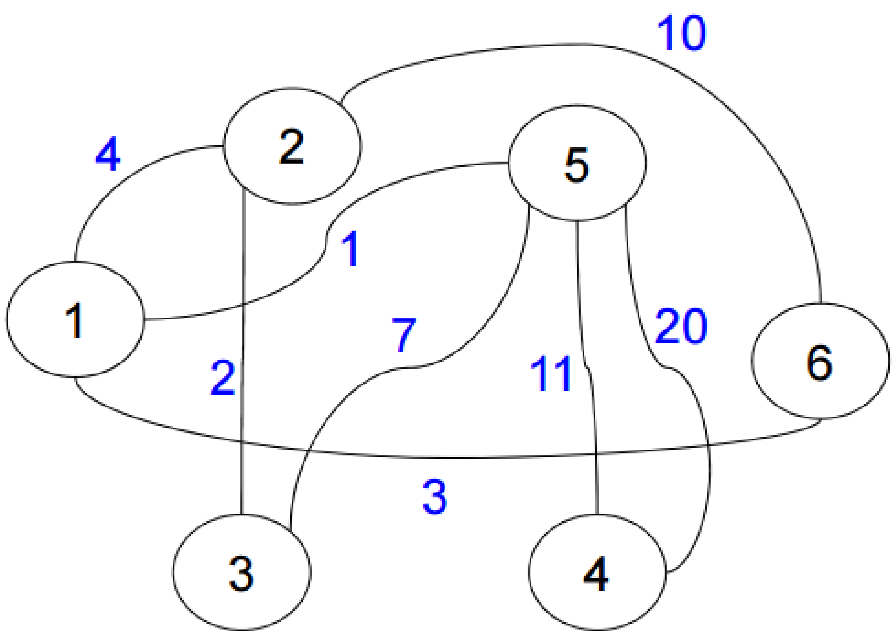
- Depende de como a fila de prioridade é implementada
- Se a fila for implementada como um heap mínimo, o algoritmo **`build-min-heap`** é utilizado na inicialização nas linhas 1 a 5 no tempo O(V)
- O corpo do laço while é executado $|V|$ vezes, como cada operação **`extract-min`** demora O(lg V), o tempo total para todas as chamadas de **`extract-min`** é O(V lg V)
- O laço for das linhas 8 a 11 é executado no total O(E) vezes
- O teste de pertinência da linha 9 pode ser implementa em tempo constante
- A atribuição na linha 11 envolve uma operação implícita de **`decrease-key`**, que demora O(lg V), o tempo para todas as chamadas de **`decrease-key`** é O(E lg V)
- Portanto, o tempo total do algoritmo é (V lg V + E lg V) = O(E lg V)

Análise do Algoritmo de Prim

- Se heap de Fibonacci for utilizado, o tempo de execução assintótico pode ser melhorado
- **`extract-min`** é executado em tempo amortizado de O(lg *V*)
- **`decrease-key`** é executado em tempo amortizado de O(1)
- Tempo total do algoritmo melhora para O(*E* + *V* lg *V*)

Exercício

- Encontre uma árvore geradora mínima para o grafo abaixo utilizando o algoritmo de Prim (e o de Kruskal)



Bibliografia

- Thomas H. Cormen et al. Introduction to Algorithms. 3rd edition. Capítulo 25.