Álgebra Linear
Transformações Lineares

Prof. André Tiba

akot@cin.ufpe.br

Baia 65, ramais: 4765 ou 4338

esta aula baseia-se nas notas de aula gentilmente cedidas pelo professor Carlos Mello

Transformações Lineares

1. Introdução
2. Transformação do plano no plano
3. Conceitos e Teoremas
4. Transformações Lineares de Matrizes
5. Exercícios

Introdução

- Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis.
- Muitos problemas podem ser representados por tais funções.

- **Definição:** Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma *transformação linear* é uma função de V em W, $F: V \to W$ que satisfaz as condições:
  i. Quaisquer que sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} \in V$: $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
  ii. Quaisquer que sejam $k \in R$ e $\mathbf{v} \in V$: $F(k\mathbf{v}) = kF(\mathbf{v})$
    - **Princípio da Superposição**

Guardem esse nome!!

Introdução

- Exemplo 1: Seja $V = \mathbf{R}$ e $W = \mathbf{R}$. $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \to 2{,}5x$$

$$F(x) = 2{,}5x$$

$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ e k uma constante, $k \in \mathbf{R}$

$$F(x_1 + x_2) = 2{,}5(x_1 + x_2) = 2{,}5x_1 + 2{,}5x_2 = F(x_1) + F(x_2)$$

$$F(kx_1) = 2{,}5(kx_1) = k(2{,}5x_1) = kF(x_1)$$

- Logo $F(x)$ é uma transformação linear.

Introdução

- Exemplo 2: Seja $V = \mathbf{R}^4$ e $W = \mathbf{R}^2$. F: $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$(x, y, z, t) \rightarrow (2x + y, z - t)$$

$$F\,(x, y, z, t) = (2x + y, z - t)$$

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $\mathbf{u}_1 = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbf{R}^4$ e k uma constante, $k \in \mathbf{R}$:

- $F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

  $= (x_1, y_1, z_1, t_1) + (x_2, y_2, z_2, t_2) = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)$
- $F(k\mathbf{u}_1) = (kx_1, ky_1, kz_1, kt_1) = k(x_1, y_1, z_1, t_1) = kF(\mathbf{u}_1)$
- Logo $F(x)$ é uma transformação linear.

Introdução

- Exemplo 3: Seja $V = \mathbf{R^2}$ e $W = \mathbf{R^3}$. F: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$

$$(x, y) \to (2x + y, x - y, y)$$

$$F(x, y) = (2x + y, x - y, y)$$

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{u}_1 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R^2}$ e k uma constante, $k \in \mathbf{R}$:

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = [2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2), y_1 + y_2]$$

$$= [\ (2x_1 + y_1) + (2x_2 + y_2), (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2), y_1 + y_2)]$$

$$= (2x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) \ + \ (2x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2)$$

$$= F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2)$$

$$F(k\mathbf{u}_1) = (2kx_1 + ky_1, kx_1 - ky_1, ky_1) = k(2x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) = kF(\mathbf{u}_1)$$

- Logo $F(x)$ é uma transformação linear.

Introdução

- Exemplo 4: Seja $V = \mathbf{R^2}$ e $W = \mathbf{R}$. F: $\mathbf{R^2} \rightarrow \mathbf{R}$

$$(x, y) \rightarrow x^2 + y$$

$$F\,(x, y) = x^2 + y$$

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{u}_1 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R^2}$ e k uma constante, $k \in \mathbf{R}$:

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 + y_1 + y_2$$

$$= [(x_1)^2 + y_1\,] + [(x_2)^2 + y_2\,] + 2x_1x_2 = F(\mathbf{u}_1) + F(\mathbf{u}_2) + 2x_1x_2$$

- Logo $F(x)$ não é uma transformação linear.

Introdução

- Exemplo 5: Seja $V = \mathbf{R^2}$ e $W = \mathbf{R^2}$. F: $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$

$$(x, y) \to (y + 1, x)$$

$$F\,(x, y) = (y + 1, x)$$

Sejam $\mathbf{u}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{u}_1 = (x_2, y_2) \in \mathbf{R^2}$ e k uma constante, $k \in \mathbf{R}$:

$$F(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = [\,(y_1 + y_2) + 1, x_1 + x_2)]$$

$$= (y_1 + 1, x_1) + (y_2, x_2) \neq F(\mathbf{u}_1) + (y_2, x_2)$$

  - Logo $F(x)$ não é uma transformação linear.

Portanto: Uma transformação para ser linear, não implica que ela seja derivada de uma função linear.

Introdução

- Observações:
  1. A operação de *transformação* será representada pela letra T.
  2. Da definição de transformação linear, tem-se que a transformação do vetor nulo leva ao mesmo vetor nulo, ou seja, T(**0**) = **0**.
  3. Isso ajuda a detectar transformações não lineares: se T(**0**)≠**0**, implica uma transformação **não** linear.
  4. No entanto, T(**0**) = **0** não é condição suficiente para que T seja linear (Veja Exemplo 4, T(**0**) = **0** mas T é não linear).

Introdução

- Exemplo 6: Seja $V = \mathbf{R^n}$ e $W = \mathbf{R^m}$, $\mathbf{A}$ uma matriz m x n

Definimos $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^m}$

$\mathbf{v} \to \mathbf{A}.\mathbf{v}$

onde **v** é o vetor coluna $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A.v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}.\mathbf{u} + \mathbf{A}.\mathbf{v} = T_{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) + T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v})$

$T_{\mathbf{A}}(k\mathbf{u}) = \mathbf{A}.(k\mathbf{u}) = k\mathbf{A}.\mathbf{u} = kT_{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$

Portanto $L_{\mathbf{A}}$ é uma transformação linear.

Introdução

- Exemplo 6 (continuação): Seja $V = \mathbf{R^4}$ e $W = \mathbf{R^2}$

Seja **A** uma matriz *2* x 4

Definimos $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R^4} \to \mathbf{R^2}$

Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$

$$T_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \mathbf{A.v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ z - t \end{bmatrix}$$

idêntico ao Exemplo 2

Transformações do plano no plano

- As transformações no plano $\mathbf{R}^2$ permitem que tenhamos uma visão geométrica das transformações lineares.

- Estudaremos basicamente
  - Expansão ou contração
  - Rotação
  - Deformações diversas
  - Translação (não é uma transformação linear)

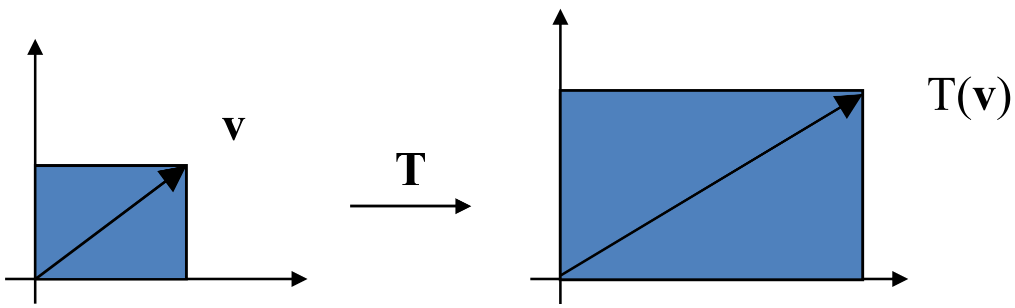
Transformações do plano no plano

1) Expansão (ou contração) uniforme:

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{v} \to \alpha.\mathbf{v}$$

$\alpha > 1$ → Expansão:



Exemplo: $\alpha = 3$
$\mathbf{v} \to 3.\mathbf{v}$
$T(\mathbf{v}) = T(x, y) = (3x, 3y)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

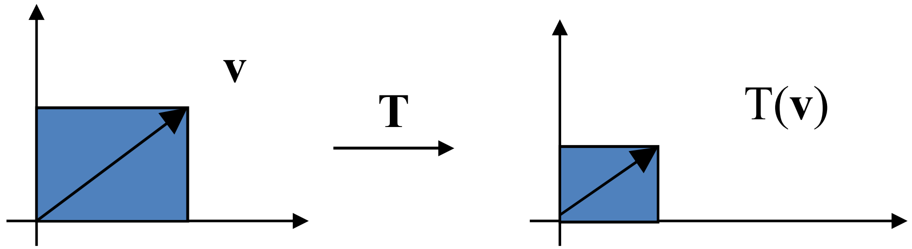
Transformações do plano no plano

1) Expansão (ou contração) uniforme:

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, \alpha \in \mathbf{R}$$

$$\mathbf{v} \to \alpha.\mathbf{v}$$

$0 < \alpha < 1 \rightarrow$ contração:



Exemplo: $\alpha = 1/2$

$\mathbf{v} \to (1/2).\mathbf{v}$

$T(\mathbf{v}) = T(x, y) = (x/2, y/2)$

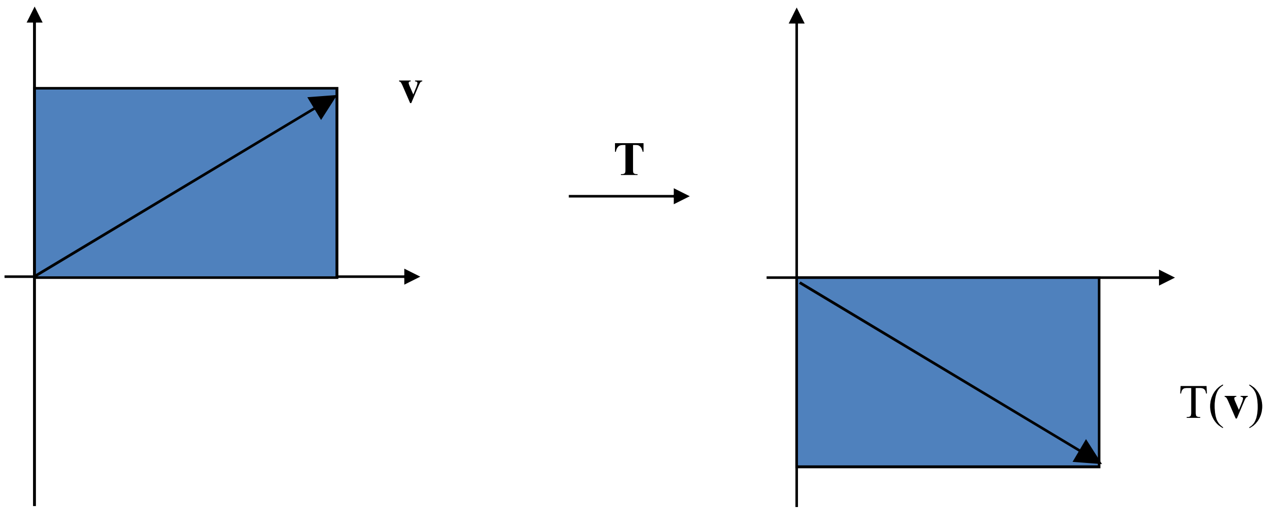
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x/2 \\ y/2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações do plano no plano

2) Reflexão em torno do Eixo-x:

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to (x, -y)$$



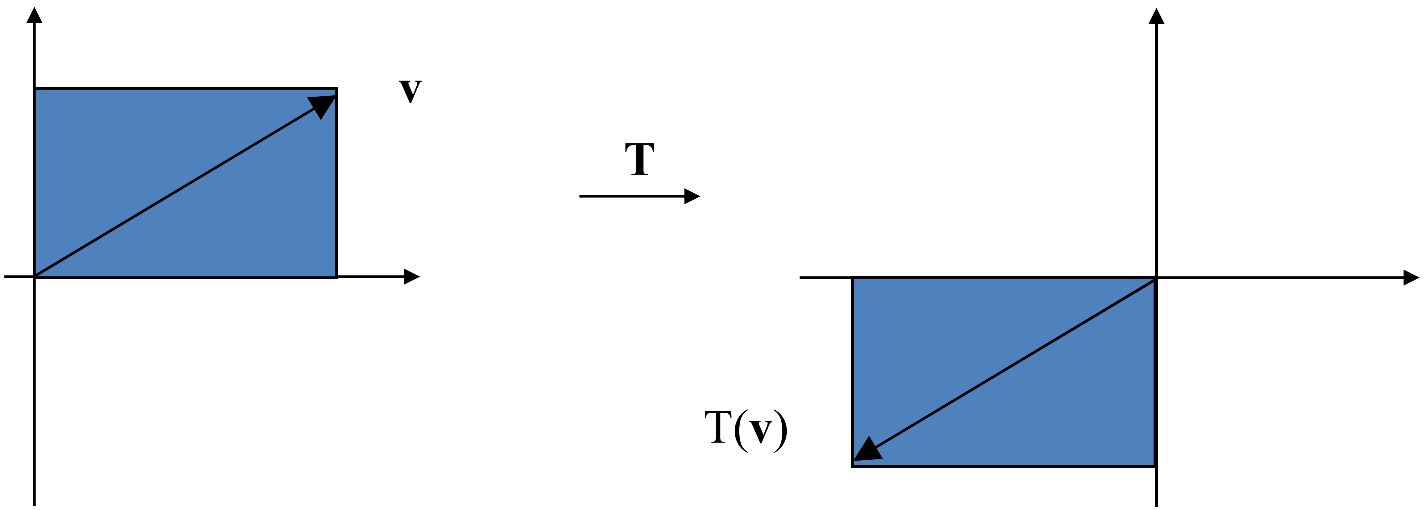
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações do plano no plano

3) Reflexão na origem:

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to (-x, -y)$$



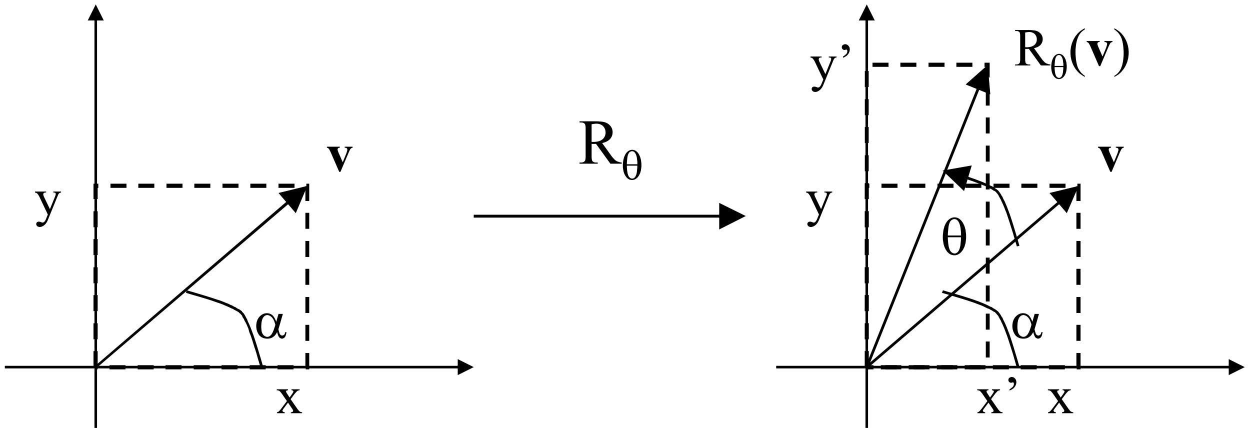
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações do plano no plano

4) Rotação por um Ângulo θ (anti-horário):

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to (x', y')$$



$x' = r.\cos(\theta + \alpha) = r.\cos\alpha.\cos\theta - r.\text{sen}\alpha.\text{sen}\theta$, onde $r = |\mathbf{v}|$

Mas, $r.\cos\alpha = x$ e $r.\text{sen}\alpha = y$

$\Rightarrow x' = x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta$

Analogamente: $y' = y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta$

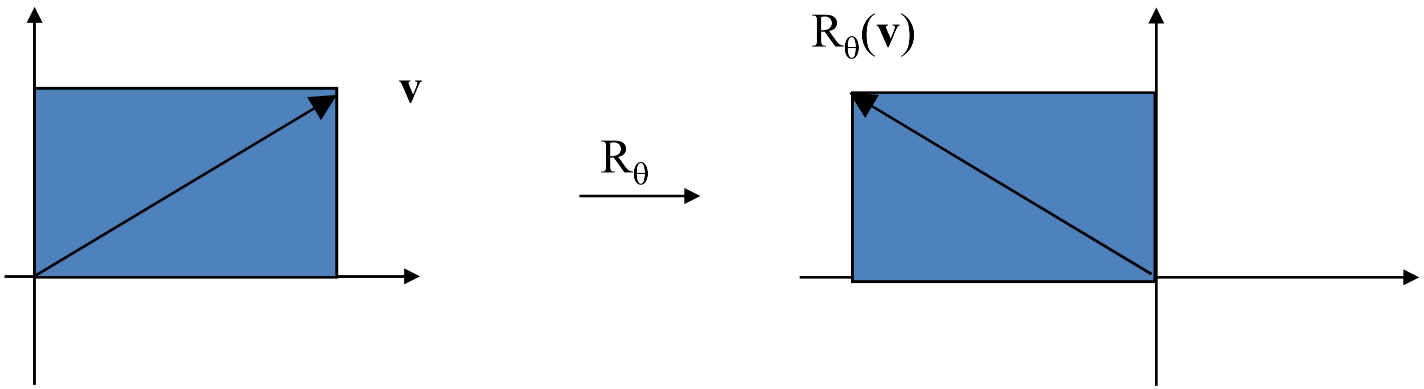
Assim: $R_\theta(x,y) = (x.\cos\theta - y.\text{sen}\theta, y.\cos\theta + x.\text{sen}\theta)$

Transformações do plano no plano

4) Rotação por um Ângulo θ (anti-horário):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Caso $\theta = \pi/2$:



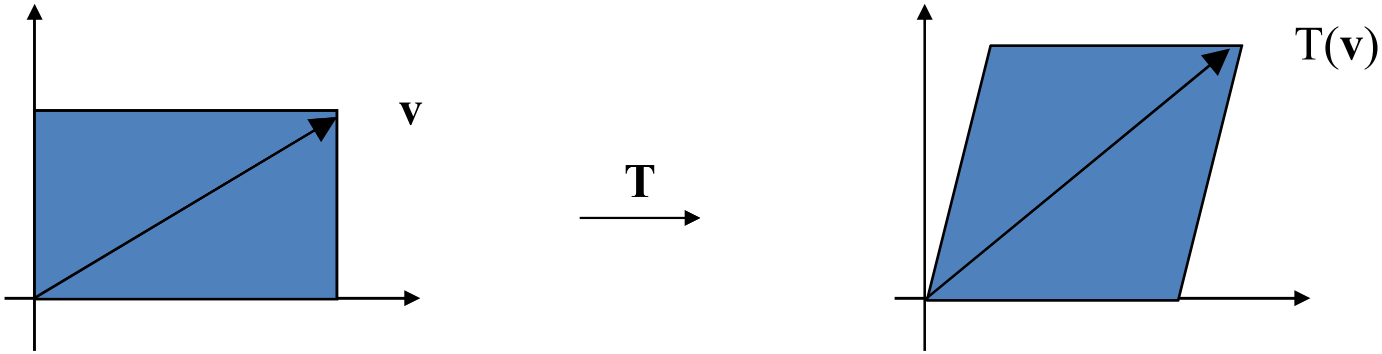
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

Transformações do plano no plano

5) Cisalhamento horizontal:

$$T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \to (x + \alpha y, y),\ \alpha \in \mathbf{R}$$



Exemplo, $\alpha = 2$:

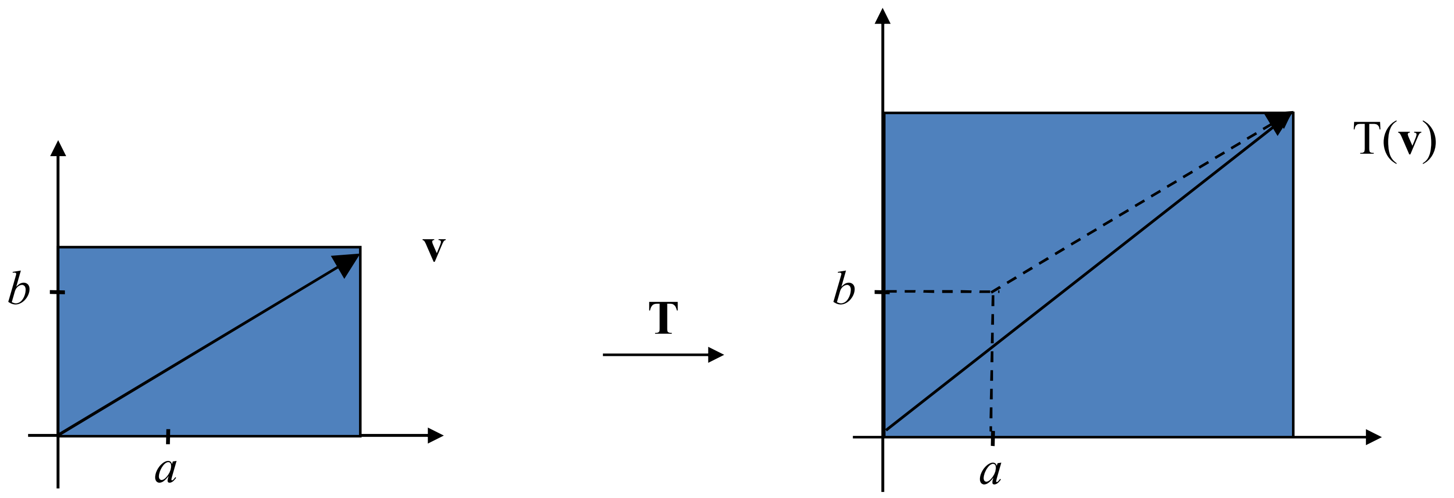
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformações do plano no plano

6) Translação (é uma transformação linear <u>apenas</u> quando $a = b = 0$):

$$T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b), \quad a, b \in \mathbf{R}$$



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Verifique que para $a \neq 0$ ou $b \neq 0$:

i. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ii. $T(k\mathbf{u}) \neq kT(\mathbf{u})$

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Dados dois espaços vetoriais V e W e uma base β de V, $\beta = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$. Sejam $\mathbf{w_1}, ...,$ $\mathbf{w_n}$ vetores arbitrários de W. Então existe uma *única* transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w_1}, ..., T(\mathbf{v_n}) = \mathbf{w_n}$.

  Se $\mathbf{v}$ for um vetor do espaço V, ou seja:

  $$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + ... + a_n\mathbf{v_n}$$

  Então,

  $$T(\mathbf{v}) = a_1 T(\mathbf{v_1}) + ... + a_n T(\mathbf{v_n}) = a_1\mathbf{w_1} + ... + a_n\mathbf{w_n}$$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 1: Qual a transformação linear T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Sejam $\mathbf{e_1} = (1,0)$, $\mathbf{e_2} = (0,1)$, $\mathbf{w_1} = (2, -1, 0)$ e $\mathbf{w_2} = (0, 0, 1)$. Observe que $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ formam a base canônica do $\mathbf{R}^2$.

Então deseja-se que $T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{w_1}$ e $T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_2}$

Seja um vetor $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\rightarrow \mathbf{v} = x.\mathbf{e_1} + y.\mathbf{e_2}$

$$T(\mathbf{v}) = T(x.\mathbf{e_1}) + T(y.\mathbf{e_2}) = x.T(\mathbf{e_1}) + y.T(\mathbf{e_2}) = x.\mathbf{w_1} + y.\mathbf{w_2}$$

$$T(\mathbf{v}) = T(x, y) = x(2, -1, 0) + y(0, 0, 1) = (2x, -x, y)$$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 2: Qual a transformação linear T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tal que T(1, 1) = (2, –1, 0) e T(2, –1) = (0, 0, 1)?

Sejam $\mathbf{v_1} = (1,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,-1)$, $\mathbf{w_1} = (2, -1, 0)$ e $\mathbf{w_2} = (0, 0, 1)$. Observe que $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ formam uma base do $\mathbf{R}^2$.

<u>Solução 1:</u>

Então deseja-se que $T(\mathbf{v_1}) = \mathbf{w_1}$ e $T(\mathbf{v_2}) = \mathbf{w_2}$

Seja um vetor $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, → $(x, y) = a(1,1) + b(2,-1)$

$$(x, y) = (a + 2b, a - b)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 1 & -1 & y \end{bmatrix} \underset{L_2 = L_2 - L_1}{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y - x \end{bmatrix}$$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 2 (continuação):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -3 & y-x \end{bmatrix} \quad \mathrm{L}_2 = -\,\mathrm{L}_2/3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & (x-y)/3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{L}_1 = \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x/3+2y/3 \\ 0 & 1 & (x-y)/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad a = \left(x/3+2y/3\right) \quad \text{e} \quad b = (x-y)/3$$

$$\mathbf{v} = (x, y) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = \mathrm{T}(a.\mathbf{v_1}) + \mathrm{T}(b.\mathbf{v_2}) = a.\mathrm{T}(\mathbf{v_1}) + b.\mathrm{T}(\mathbf{v_2}) = a.\mathbf{w_1} + b.\mathbf{w_2}$$

$$\mathrm{T}(\mathbf{v}) = a(2,-1,0) + b(0, 0, 1) = (2a, -a, b)$$

$$\mathrm{T(x, y)} = \left(\frac{2x+4y}{3}, -\frac{x+2y}{3}, \frac{x-y}{3}\right)$$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 2 (continuação):

<u>Solução 2:</u>

$\mathbf{v_1} = (1,1)$, $\mathbf{v_2} = (2,-1)$ formam uma base no $\mathbf{R}^2$, porém não uma base canônica. Temos ainda que:

$$T(\mathbf{v_1}) = T(1,1) = \mathbf{w_1} = (2, -1, 0)$$
$$T(\mathbf{v_2}) = T(2,-1) = \mathbf{w_2} = (0, 0, 1)$$

Observe que $\mathbf{v_1} = (1, 1) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} = (1,0) + (0,1)$

$T(\mathbf{v_1}) = T(\mathbf{e_1}) + T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_1}$

De forma análoga, $\mathbf{v_2} = (2, -1) = 2\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} = 2(1,0) - (0,1)$

$T(\mathbf{v_2}) = T(2\mathbf{e_1}) + T(-\mathbf{e_2}) = 2T(\mathbf{e_1}) - T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_2}$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 2 (continuação):

$$\begin{cases} T(\mathbf{e_1}) + T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_1} \\ 2T(\mathbf{e_1}) - T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{w_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3T(\mathbf{e_1}) = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} \\ T(\mathbf{e_1}) = (\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2})/3 \\ T(\mathbf{e_2}) = (2\mathbf{w_1} - \mathbf{w_2})/3 \end{array}$$

$$T(\mathbf{e_1}) = [(2, -1, 0) + (0, 0, 1)]/3 \quad = (2/3, -1/3, 1/3)$$

$$T(\mathbf{e_2}) = [2.(2, -1, 0) - (0, 0, 1)]/3 \ = (4/3, -2/3, -1/3)$$

Seja um vetor $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\rightarrow \mathbf{v} = x.\mathbf{e_1} + y.\mathbf{e_2}$

$$T(\mathbf{v}) = T(x.\mathbf{e_1}) + T(y.\mathbf{e_2}) \ = x.T(\mathbf{e_1}) + y.T(\mathbf{e_2}) =$$

$$T(\mathbf{v}) = x(2/3, -1/3, 1/3) + y\ (4/3, -2/3, -1/3)$$

$$T(x, y) = \left(\frac{2x+4y}{3}, -\frac{x+2y}{3}, \frac{x-y}{3} \right)$$

Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear. A *imagem de T* é o conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$, tal que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{w}$. Ou seja:
  - $\text{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W \,;\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$

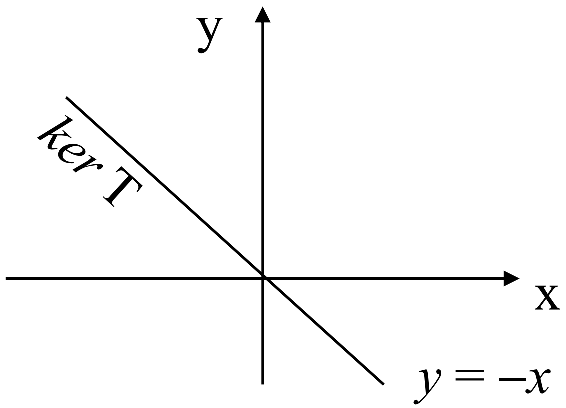
- **Definição:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{0}$ é chamado de *núcleo de T*, sendo denotado por *ker* T *(ker = kernel*). Isto é:
  - $\mathit{ker}\ T = \{\mathbf{v} \in V \,;\, T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$

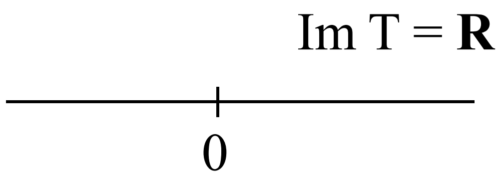
Conceitos e Teoremas

Exemplo 3: T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$T(x, y) \rightarrow x + y$$

- Neste caso, *ker* T = $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x + y = 0\}$
- Isto é, *ker* T é a reta $y = -x$
- Veja que *ker* T = $\{(x, -x);\ x \in \mathbf{R}\} = \{x.(1, -1);\ x \in \mathbf{R}\} = [(1, -1)]$
- Im T = $\mathbf{R}$, pois dado $\mathbf{w} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{w} = T(\mathbf{w}, 0)$





Qualquer valor dos reais satisfaz o par $(x, -x)$.

Conceitos e Teoremas

Exemplo 4: T: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$T(x, y, z) \rightarrow (x, 2y, 0)$$

- Então a imagem de T:
  - $\text{Im}(T) = \{(x, 2y, 0): x, y \in \mathbf{R}\}$
    $= \{x.(1, 0, 0) + y.(0, 2, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$
    $= \langle (1, 0, 0), (0, 2, 0) \rangle$

  Assim, *dim* Im(T) = 2

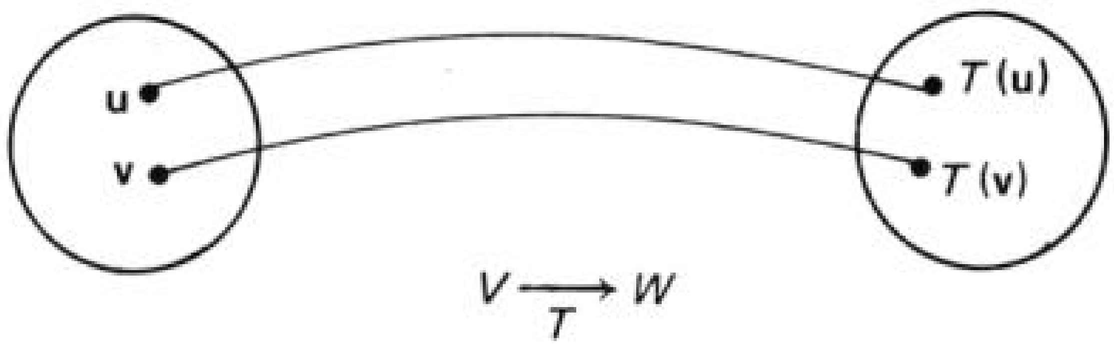
- O núcleo de T é dado por:
  - $\ker T = \{(x,y,z): T(x, y, z) = (0,0,0)\}$
    $= \{(x,y,z): (2x, y, z) = (0,0,0)\}$
    $= \{(0, 0, z): z \in R\} = \{z(0,0,1): z \in R\} \Rightarrow [(0, 0, 1)]$

  Assim, dim *ker* T = 1

Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transformação T:$V \rightarrow W$, dizemos que T é *injetora* se, dados $\mathbf{u} \in V$ e $\mathbf{v} \in V$ com T(**u**) = T(**v**), tivermos **u** = **v** ou, de forma equivalente, T é injetora se dados $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, então $T(\mathbf{u}) \neq T(\mathbf{v})$.

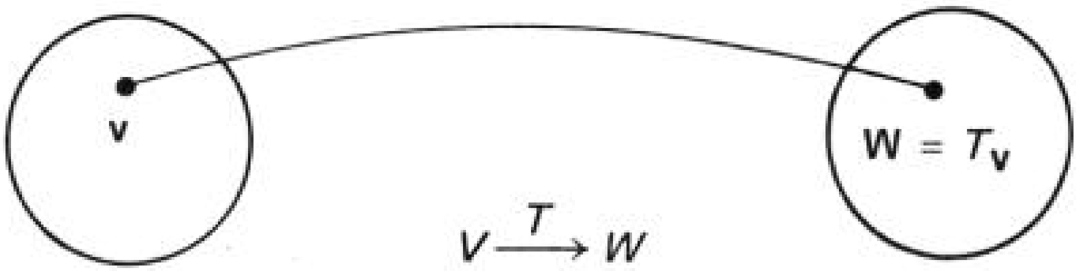
- Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas.



Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transformação T:$V \rightarrow W$, dizemos que T é <u>*sobrejetora*</u> se a imagem de T coincidir com W, ou seja T(V) = W.

- Em outras palavras, T é sobrejetora se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{w}$.



Conceitos e Teoremas

Exemplo 5: T: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$x \rightarrow (x, 0)$$

Sejam $x, y \in \mathbf{R}$, vamos supor que $T(x) = T(y)$.

Então $T(x) = (x, 0)$ e $T(y) = (y, 0)$

$(x, 0) = (y, 0) \Rightarrow x = y$, logo T é injetora.

Porém T não é sobrejetora uma vez que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(x,0): x \in \mathbf{R}\} \neq \mathbf{R}^2$$

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então *ker* T={**0**}, se e somente se, T é injetora.

- **Teorema:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear, então: dim *ker* T + dim *Im* T = dim V.

- **Corolário 1:** Se dim V = dim W, então T linear é injetora, se e somente se, T é sobrejetora.

- **Corolário 2:** Seja T:$V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se dim V = dim W, então T leva base em base
  - Base de V em base de W.

Conceitos e Teoremas

- Quando uma transformação linear T: $V \to W$ for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, dá-se o nome de ***isomorfismo.***
  - Os espaços vetoriais V e W são ditos Isomorfos.

Conceitos e Teoremas

Exemplo 6: $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x - 2y,\ z,\ x + y)$$

Verifique que T é um isomorfismo e calcule sua inversa T^{-1}.

Para que T seja um isomorfismo, T deve ser injetora e sobrejetora.

Pelo teorema, T será injetora se *ker* T = {**0**} (ou seja, o único elemento do núcleo de T for o vetor nulo (0,0,0)):

$$\ker T = \{(x,y,z) : (x - 2y,\ z,\ x + y) = (0, 0, 0)\}$$

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \text{ se e somente se } \quad \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 6 (continuação):

Pelo corolário 2, tem-se que T é um isomorfismo.

Tomando a base canônica de $\mathbf{R}^3$, sua imagem pela transformação será:

$T(1,0,0) = (\mathit{1} - 2.\mathit{0}, \mathit{0}, \mathit{1} + \mathit{0}) = (1,0,1)$

$T(0,1,0) = (\mathit{0} - 2.\mathit{1}, \mathit{0}, \mathit{0} + \mathit{1}) = (-2,1,0)$

$T(0,0,1) = (\mathit{0} - 2.\mathit{0}, \mathit{1}, \mathit{0} + \mathit{0}) = (0,1,0)$

Ou Seja,

$\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\} = \{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$

que continua sendo uma base de $\mathbf{R}^3$.

Conceitos e Teoremas

Exemplo 6 (continuação):

Calculando a transformação inversa de T, T^{-1}:

Veja que:

$$\left.\begin{array}{l} T(1,0,0) = (1,0,1) \\ T(0,1,0) = (-2,1,0) \\ T(0,0,1) = (0,1,0) \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (1,0,0) = T^{-1}(1,0,1) \\ (0,1,0) = T^{-1}(-2,1,0) \\ (0,0,1) = T^{-1}(0,1,0) \end{array}\right\} T^{-1}(x,y,z) = ?$$

Vamos escrever (x,y,z) em relação à base $\{(1,0,1), (-2, 0,1), (0,1,0)\}$

$$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(-2, 0, 1) + c(0, 1, 0)$$

$$\begin{cases} a - 2b = x \\ c = y \\ a + b = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (x + 2z)/3 \\ b = (z - x)/3 \\ c = y \end{cases}$$

Conceitos e Teoremas

Exemplo 6 (continuação):

$$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(-2, 0, 1) + c(0, 1, 0)$$

Aplicando a inversa,

$$\mathrm{T}^{-1}(x, y, z) = \mathrm{T}^{-1}[a(1, 0, 1)] + \mathrm{T}^{-1}[b(-2, 0, 1)] + \mathrm{T}^{-1}[c(0, 1, 0)]$$

$$\mathrm{T}^{-1}(x, y, z) = a\mathrm{T}^{-1}(1, 0, 1) + b\mathrm{T}^{-1}(-2, 0, 1) + c\mathrm{T}^{-1}(0, 1, 0)$$

$$\mathrm{T}^{-1}(x, y, z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c\,(0,0,1)$$

$$\mathrm{T}^{-1}(x, y, z) = \frac{x+2z}{3}(1,0,0) + \frac{z-x}{3}(0,1,0) + y(0,0,1)$$

$$\mathrm{T}^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)$$

Transformações Lineares de Matrizes

Exemplo 1:

Sejam as bases canônicas do $\mathbf{R}^2$ e do $\mathbf{R}^3$:

$\beta=\{(1,0,0),(0,1,0), (0,0,1)$ e $\beta'=\{(1,0),(0,1)\}$.

Seja ainda a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontre a transformação linear: $T_A:\mathbf{R}^3\rightarrow\mathbf{R}^2$

Seja $\mathbf{u}$ um vetor do $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Então $T_A(\mathbf{u}) = \mathbf{A}.\mathbf{u}$:

$$T_A(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-3y+5z \\ 2x+4y-z \end{bmatrix}$$

$T_A(x,y,z) = (x - 3y + 5z,\ 2x + 4y - z\ )$

Transformações Lineares de Matrizes

Exemplo 2:

Seja : $T_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$

$$T_A(x,y,z) = (2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z\ )$$

E as bases

$$\beta = \{(1,1,1),(1,1,0),\ (1,0,0)\} \text{ e } \beta' = \{(1,3),(1,4)\}.$$

Encontre $[\mathrm{T}]_{\beta'}^{\beta}$

$$T_A(1,1,1) = (2.\mathit{1} + \mathit{1} - \mathit{1}\ ,\ 3.\mathit{1} - 2.\mathit{1} + 4.\mathit{1}\ ) = (2,\ 5) = 3.(1,3) - 1.(1,4)$$

$$T_A(1,1,0) = (2.\mathit{1} + \mathit{1} - \mathit{0}\ ,\ 3.\mathit{1} - 2.\mathit{1} + 4.\mathit{0}\ ) = (3,\ 1) = 11.(1,3) - 8.(1,4)$$

$$T_A(1,0,0) = (2.\mathit{1} + \mathit{0} - \mathit{0}\ ,\ 3.\mathit{1} - 2.\mathit{0} + 4.\mathit{0}\ ) = (2,\ 3) = 5.(1,3) - 3.(1,4)$$

Então,

$$[\mathrm{T}]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares de Matrizes

Exemplo 3:

Seja : $T_A:\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$

$T(x,y,z) = (2x + y - z,\ 3x - 2y + 4z)$

E as bases

$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$.

Encontre $[\mathrm{T}]_{\beta'}^{\beta}$

$T(1,1,1) = (2.\mathit{1} + \mathit{0} - \mathit{0}\ ,\ 3.\mathit{1} - 2.\mathit{0} + 4.\mathit{0}\ ) = (2, 3) = 2.(1,0) + 3.(0,1)$

$T(1,1,0) = (2.\mathit{0} + \mathit{1} - \mathit{0}\ ,\ 3.\mathit{0} - 2.\mathit{1} + 4.\mathit{0}\ ) = (1, -2) = 1.(1,0) - 2.(0,1)$

$T(1,0,0) = (2.\mathit{0} + \mathit{0} - \mathit{1}\ ,\ 3.\mathit{0} - 2.\mathit{0} + 4.\mathit{1}\ ) = (-1, 4) = -1.(1,0) + 4.(0,1)$

Então,

$$[\mathrm{T}]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Transformações Lineares de Matrizes

Exemplo 4:

Sejam as bases: β ={(1,1),(0,1)} e β' ={(0,3,0),(−1,0,0), (0,1,1)}, encontre a transformação T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, cuja matriz vale:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$T(1,1) = 0.(0, 3, 0) - 1.(-1, 0, 0) - 1.(0, 1, 1) = (1, -1, -1)$

$T(0,1) = 2.(0, 3, 0) + 0.(-1, 0, 0) + 3.(0, 1, 1) = (0, 9, 3)$

Transformações Lineares de Matrizes

Exemplo 4 (continuação):

Podemos escrever um vetor $\mathbf{v} = (x,y)$ do $\mathbf{R}^2$ na base β como:

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,1) \rightarrow \quad a = x \text{ e } b = y - x$$

$$(x,y) = x(1,1) + (y - x)(0,1)$$

Aplicando a Transformação linear T:

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(x,y) &= \mathrm{T}[x(1,1) + (y - x)(0,1)] = \mathrm{T}[x(1,1)] + \mathrm{T}[(y - x)(0,1)] \\ &= x.\mathrm{T}(1,1) + (y - x).\mathrm{T}(0,1) \\ &= x.(1, -1, -1) + (y - x).(0, 9, 3) \\ &= (x, -10x - 9y, -4x - 3y) \end{aligned}$$

Transformações Lineares de Matrizes

- Seja $T: V \to V$ uma transformação linear e α e β bases de V então:
  - $[T]^{\beta}_{\beta} = [\ I\ ]^{\alpha}_{\beta}\, [T]^{\alpha}_{\alpha}\, [\ I\ ]^{\beta}_{\alpha}$

- Lembrando que $[\ I\ ]^{\beta}_{\alpha} = ([\ I\ ]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$ e chamando $[\ I\ ]^{\alpha}_{\beta} = A$, temos que
  - $[T]^{\beta}_{\beta} = A \,.\, [T]^{\alpha}_{\alpha} \,.\, A^{-1}$

- Nesse caso, dizemos que as matrizes $[T]^{\beta}_{\beta}$ e $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ são *semelhantes*.

Exercícios Sugeridos

- Problemas Sugeridos: 2, 3, 4, 6, 7, 11, 14, 19, 20 e 23