Principio da Indução Finita (PIF)

1) Axioma da Boa Ordem em N: Cada subconjunto não vazio de N possui um menor(ou primeiro) elemento

O axioma da boa ordem em N afirma que se A é um subconjunto do conjunto N e $A \neq \Phi$ então existe um elemento n_0 em A satisfazendo $n_0 \leq a$ para cada inteiro a do conjunto A

Teorema :

1. Não existe um inteiro n tal que 0 < n < 1;
2. Para cada inteiro m, não existe n tal que m < n < m + 1;
3. Se m e n são inteiros com m < n então m + 1 ≤ n. Reciprocamente, se m + 1 ≤ n então m < n.

Demonstração:

1. Suponhamos que existe um inteiro n tal que 0 < n < 1. Tal n é um número natural, e, portanto o conjunto A de números naturais caracterizado por $A = \{x \in N / 0 < x < 1\}$ é um conjunto não vazio (visto que n $\in A$).Pelo axioma da boa ordem,A tem um menor elemento n_0 .Porém $0. < n_0 < 1 \Rightarrow 0.n_0 < n_0.n_0 < 1.n_0$,ou seja , $0 < n_0^2 < n_0$ .Temos aí uma contradição ,pois $0 < n_0^2 < 1 \Rightarrow n_0^2 \in A$, porém n_0 é o menor elemento de A e $n_0^2 < n_0$.
2. Sejam m e n dois inteiros e suponhamos m < n < m +1.Então m–n<n –m <(m+1) – m, ou seja ,0 < n – m < 1,o que é impossível ,segundo o item 1 acima.
3. (exercício)

Teorema (Primeiro Princípio de Indução Finita) Seja n_0 um número inteiro e suponhamos que a cada inteiro n , $n \geq n_0$,está associada uma afirmação A(n), a qual possui, para cada n, um valor lógico V(quando verdadeira) ou F(quando falsa).Suponhamos que as condições 1 e 2 abaixo sejam verificadas:

1. A afirmação A(n) é verdadeira para $n = n_0$;
2. Para cada $k \geq n_0$,se A(k) é verdadeira,então A(k + 1) é também verdadeira.

Então a afirmação A(n) é verdadeira para cada $n \geq n_0$.

Teorema(Segundo Princípio de Indução Finita) Seja n_0 um número inteiro e suponhamos que a cada inteiro n , $n \geq n_0$,está associada uma afirmação A(n), a qual possui,para cada n, um valor lógico V ou F. Suponhamos que as condições 1 e 2 abaixo sejam verificadas:

1. A afirmação A(n) é verdadeira para $n = n_0$;

2. Para cada inteiro $k \geq n_0$,se A(n) é verdadeira para $n_0 \leq n \leq k$ então A(k + 1) é também verdadeira.

Então a afirmação A(n) é verdadeira para cada $n \geq n_0$

Exercícios Resolvidos

1)**Provar que: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (n/6)(n + 1)(2n + 1)$, $\forall$ n $\in$ N.**

(1) Para n = 1 $(1/6)(1 + 1)(2 + 1) = (1/6)(2)(3) = (1/6)(6) = 1 = 1^2$.
(2) Hipótese: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (n/6)(n + 1)(2n + 1)$.
(3) Provar $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = [(n+1)/6](n + 2)(2n + 3)$

Demonstração:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = (n/6)(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = (n/6)(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2$ (observe que a soma até n2 é (n/6)(n + 1)(2n + 1). ➔
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = (n +1)[(n/6)(2n + 1) + (n + 1)] = (n + 1)(1/6)(2n2 + n + 6n + 6) =$
$(n + 1)(1/6)(2n^2 + 7n + 6)$ * $= (n + 1)(1/6).2(n + 3/2) .(n + 2) = [(n + 1)/6](n + 2)(2n + 3)$

Nota:- O polinômio $ax^2 + bx + c$, com raízes x1 e x2 pode ser decomposto em a(x – x1)(x – x2).
Como as raízes de $2n^2 + 7n + 6$ são –2 e –3/2, temos $2n^2 + 7n + 6 = 2(n + 3/2)(n + 2)$.

2) **Provar que: 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = (n/3)(n + 1)(n + 2) $\forall$ n $\in$ N.**

(1) Para n = 1. 1.2 = 2 e (1/3)(1 + 1)(1 + 2) = (1/3)(2)(3) = 2.
(2) Hipótese: 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = (n/3)(n + 1)(n + 2)
(3) Provar que: 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = [(n + 1)/3](n + 2)(n + 3).

Demonstração:
1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = (n/3)(n + 1)(n + 2) + (n + 1)(n + 2) = (n + 1)(n + 2)[(n/3) + 1] =
(n + 1)(n + 2)[(n + 3)/3] = [(n + 1)/3](n + 2)(n + 3).

3)Demonstrar por indução matemática:

a) $2^n < 2^{n+1}$, $\forall$ n $\in$ N.
b) $2^n > n^2$, $\forall$ $n \geq 5$.

solução: a)
(1) Para n = 1, $2^1 = 2 < 2^{1+1} = 2^2 = 4$, verdadeiro.
(2) Hipótese: $2^n < 2^{n+1}$.
(1) Provar $2^{n+1} < 2^{n+2}$.

Demonstração:

Por hipótese $2^n < 2^{n+1}$ ➔ $2.2^n < 2.2^{n+1}$ ➔ $2^{n+1} < 2^{n+2}$.

(1) É verdade para n = 5, pois $2^5 = 32$ e $5^2 = 25$.
(2) Hipótese: $2^n > n^2$.
(3) Provar $2^{n+1} \geq (n+1)^2$

Demonstração: - Provemos inicialmente que $2^n > 2n + 1$, para $n \geq 5$.
Esta proposição é verdadeira para n = 5, pois 25 > 10 + 1 = 11.
Supondo verdadeira para n, $2^n > 2n + 1$, devemos ter $2^{n+1} > 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$.
Ora, $2^n > 2n + 1$ e $2^n > 2$ para n > 1. Somando membro a membro, $2^n + 2^n > 2n + 1 + 2$ ➔ $2.2^n > 2n + 3$ ➔
➔ $2^{n+1} > 2n + 3$ (i)

Pela hipótese $2^n > n^2$ e conforme demonstrado, $2^n > 2n + 1$. Somando membro a membro essas igualdades, concluímos: $2^n + 2^n > n^2 + 2n + 1$ ➔ $2^{n+1} > (n + 1)^2$. (expressão a ser demonstrada em (3).

Exercícios Propostos

1)Demonstrar que $10^{n+1} - 9n - 10$ é um múltiplo de 81 para todo inteiro positivo n

2)Mostre que para cada inteiro n, n ≥ 0, o inteiro $9^n - 1$ é divisível por 8.

3)A seqüência de Fibonacci é um exemplo de um seqüência de inteiros definida indutivamente.Ela é definida como $a_0, a_1, \ldots$, sendo $a_0 = a_1 = 1$ e, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ para cada $n \geq 0$.

a) Prove por indução sobre n que $a_n = \dfrac{[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n}{\sqrt{5}}$

b)Mostre que $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

4)prove que o conjunto $S = \{m \in Z : 7 < m < 8\}$ é vazio.

5)Para n ≥ 0,mostre que $a_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é um número divisível por 133.

6)Para $\alpha \in R, \alpha \neq 2k\pi$ e n≥ 1,mostre que $\sum_{i=1}^{n} \text{sen}(i\alpha) = \dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{n\alpha}{2}\right)}{\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}.\text{sen}\left[\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\alpha\right]$

7)Para n ≥ 3,mostre que $2^n + 1$ é um número composto se n não é uma potência de 2.

8)Seja $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.Determine A^n para n ≥1.

9)Para n≥ 0 e x ≠ 1,mostre que $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(x+i)^{(i)}} = \frac{x}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(x+n)^{(n)}}$ onde $(x+i)^{(i)} = (x+1).(x+2)...(x+i)$

10)Prove que $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ é um inteiro para n = 0,1,2,..

11)Tome $a, b, p_1, p_2, ..., p_n$ como números reais onde a ≠ b .Defina $f(x) = (p_1 - x)(p_2 - x)...(p_n - x)$ .Prove que

$$\det b \begin{bmatrix} p_1 & a & a & a & \dots & a & a \\ b & p_2 & a & a & \dots & a & a \\ b & b & p_3 & a & \dots & a & a \\ b & b & b & p_4 & \dots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & b & \dots & p_{n-1} & a \\ b & b & b & b & \dots & b & p_n \end{bmatrix} = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

12)Se $A_1 + ... + A_n = \pi$, $0 < A_i \le \pi$,i = 1,2,...,n,então $\operatorname{sen} A_1 + \cdots + \operatorname{sen} A_n \le n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

13)Tome $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen}(2x) + ... + a_n \operatorname{sen}(nx).$,onde $a_1, ..., a_n$ são números reais e onde n é um inteiro positivo.Sabendo que $|f(x)| \le |\operatorname{sen} x|, \forall x \in R$,prove que $|a_1 + 2a_2 + ... + na_n| \le 1$.

14)Prove que $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + ... + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = \frac{a}{a(a+nb)}$

15)Prove que para $x_1, x_2, ..., x_n$ inteiros não negativos $\frac{x_1 + ... + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1....x_n}$

OBS: Alguns exercícios foram colocados apenas a título de conhecimento, que estão além do nível IME e ITA.

Bibliografia:

1)Mathematical Circles – Dmitri Fomin
2)Manual de Indução Matemática – Luiz Lopes
3)Introdução à Álgebra – Adilson Gonçalves
4)Fundamentos de Matemática Elementar- Gelson Iezzi
5)Curso de Análise- Elon Lages