PTC 2020 – Sistemas de Controle
2ª PROVA - 2015

Nome:________________________________ N º USP:_____________________

Instruções:

1. Duração: 1h40min
2. Ao final da prova, entregue esta folha de questões devidamente identificada.

1) Um determinado sistema de controle possui a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Considerando-se realimentação unitária, pretende-se construir um compensador tipo PD dado pela seguinte função de transferência.

$$G_c(s) = K_p(1 + T_d s)$$

Para tanto, pede-se:

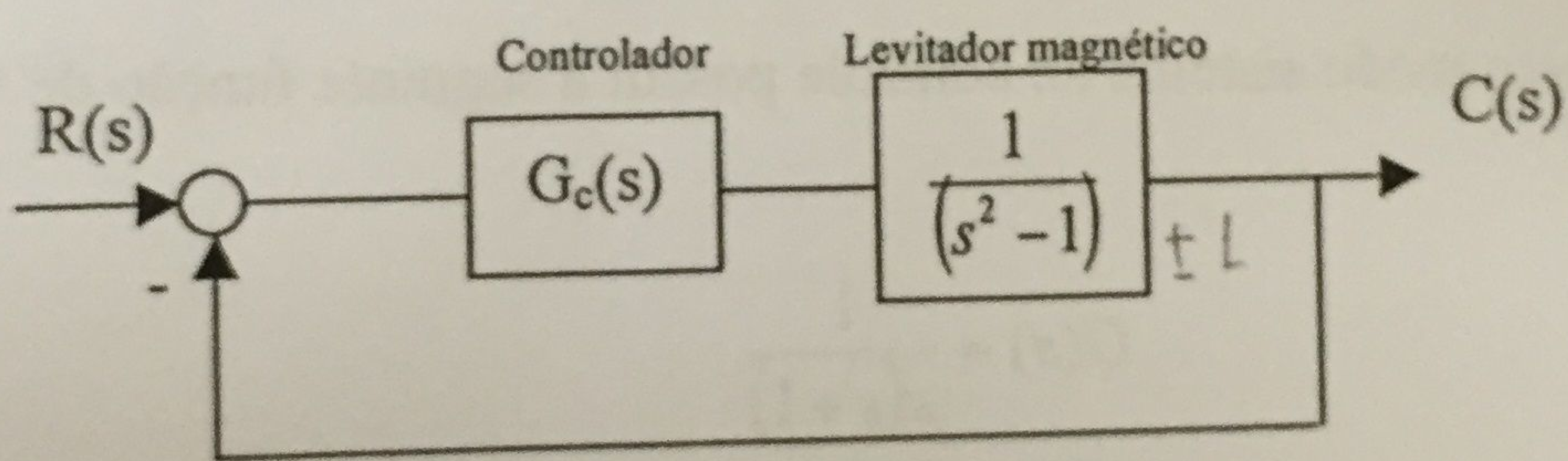
a) Desenhe o lugar das raízes e determine os valores de T_d de modo que a resposta do sistema ao degrau na referência seja sempre amortecida para $\forall K_p > 0$. (1.5)

b) Supondo $T_d = 1$ determine o valor de K_p tal que a resposta ao degrau unitário tenha um tempo de subida de $t_r = 1$s. (1.0)

2) a) Projete um controlador PID para o levitador eletromagnético da figura seguinte, de modo que os pólos de malha fechada dominantes tenham coeficientes de amortecimento $\xi = 0.5$, frequência natural $\omega_n = 2\text{rad/s}$ e que o pólo estável da planta seja cancelado. (1.5)

só o K, a e b

$$G_c(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = K\frac{(s+a)(s+b)}{s}$$



b) É possível realizar o projeto cancelando, porém o pólo instável? Justifique. (1.0)

3) Considere um servomecanismo com a seguinte função de transferência em malha aberta.

$$G_t(s) = \frac{KK_t}{Ts+1} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

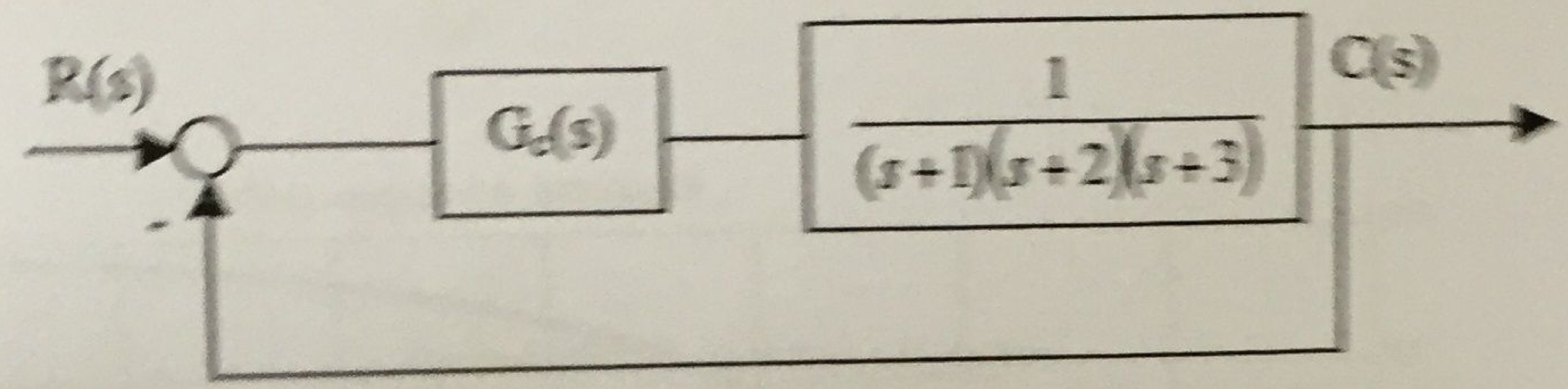
A resposta do sistema a um degrau unitário é apresentada no gráfico a seguir.

Pede-se:

- Os valores de KK_t e de T. (0.5)
- Projete um compensador PI (para controle de velocidade) tal que o pólo em malha aberta seja cancelado e escolha um ganho para o compensador tal que a constante de tempo do sistema em malha fechada seja igual a 0,2s. Considere realimentação unitária. (1.0)

4) Considere o sistema abaixo para o qual se utiliza um controlador tipo PID. A função de transferência do controlador é dada por:

$$G_c(s) = K_P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$



Uma das maneiras de se ajustar os parâmetros do controlador PID (quando o modelo da planta não é bem conhecido) é através de um dos métodos de Ziegler-Nichols, descrito a seguir:

Segundo método (ensaio em malha fechada): com o sistema em malha fechada e utilizando inicialmente um controlador proporcional, aumentar continuamente o ganho proporcional até que surja uma oscilação sustentada. Sejam, então, K_{cr} o valor do ganho nessa situação e P_{cr} o período da oscilação verificada. O ajuste dos parâmetros do controlador é obtido através da tabela ao lado.

	K_P	T_I	T_D
P	0.5 K_{cr}		
PI	0.45 K_{cr}	P_{cr} /1.2	
PID	0.6 K_{cr}	P_{cr} /2	P_{cr} /8

Determine através do método anteriormente descrito os valores apropriados para K_P, T_I e T_D. (1,5).

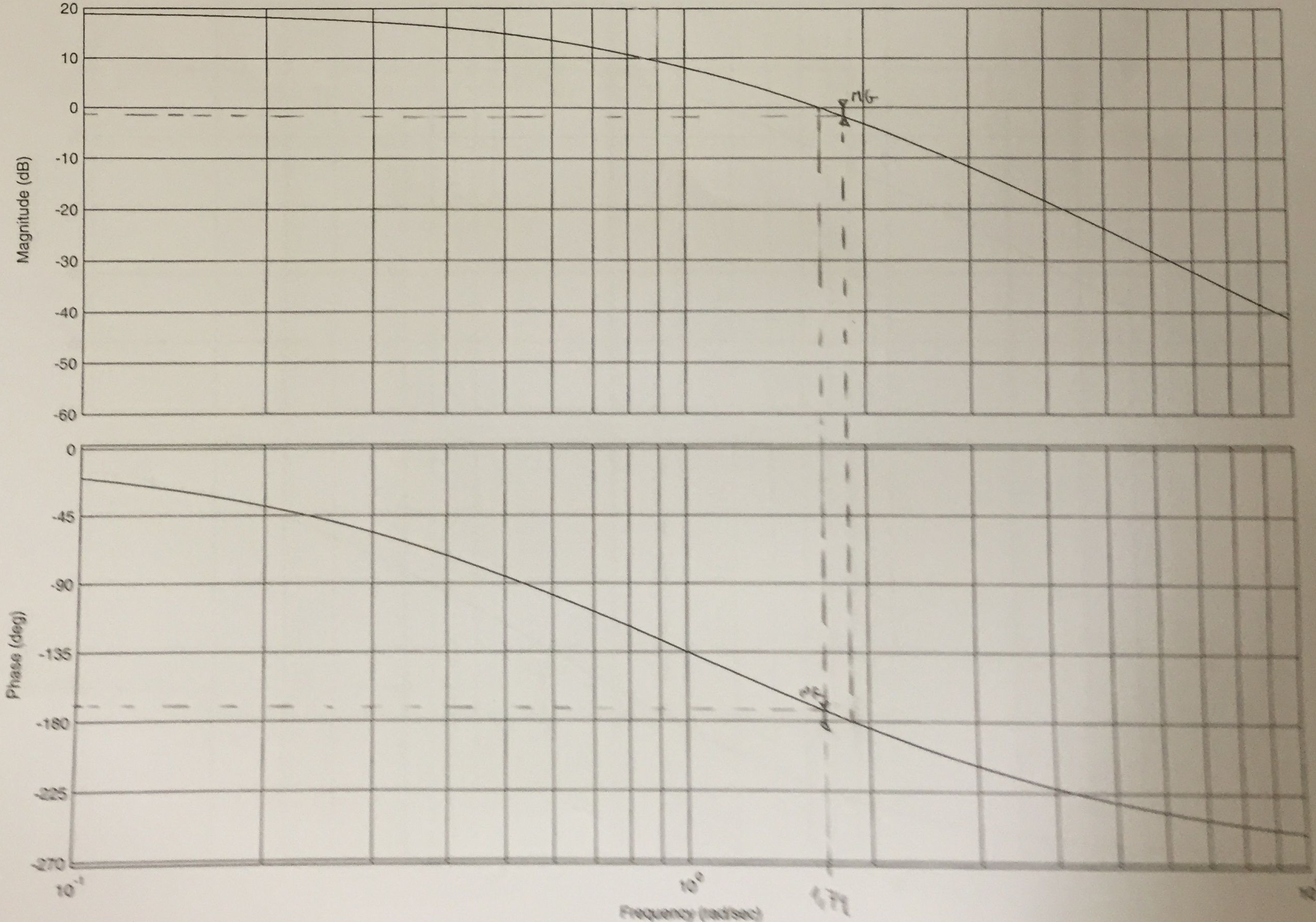
5) Um determinado sistema de controle possui a seguinte função de transferência de malha aberta:

$$G(s) = \frac{k}{(2s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

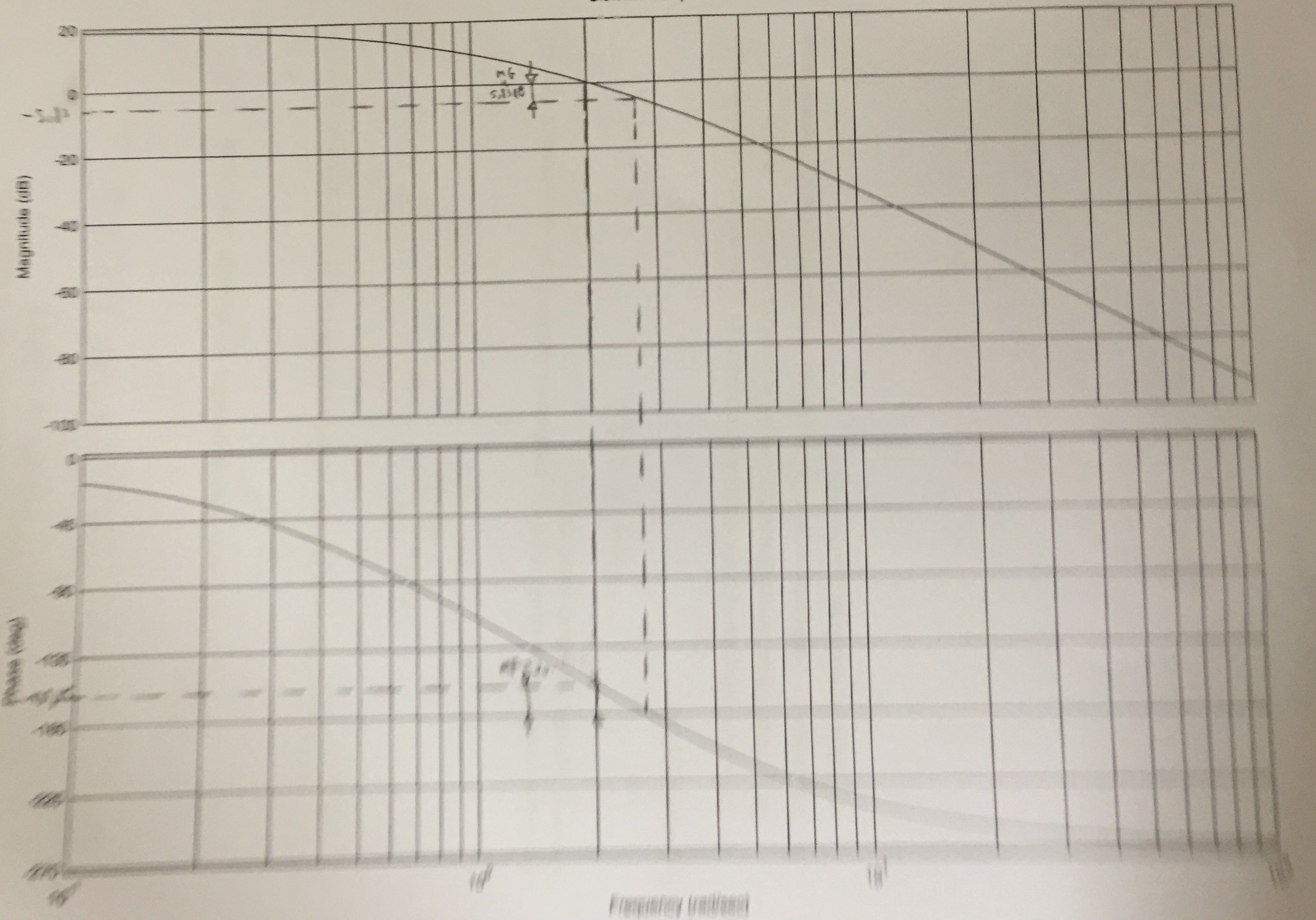
Considerando-se realimentação unitária, pretende-se construir um compensador tipo avanço tal que a constante de erro de posição estático seja $k_p = 9$, e a margem de fase (MF) seja igual a $25°$. Para tanto, pede-se:

a) O valor de k. (0.5)
b) O diagrama de Bode considerando o valor de k do item anterior é apresentado na figura a seguir. Calcule a margem de fase e projete o compensador proposto indicando e justificando claramente os valores calculados. Considere como margem de segurança para o projeto um valor de fase adicional de 5° (1.0)
c) Calcule, a partir da figura do sistema compensado, as novas MF e MG do sistema e comente os resultados. (0.5)

Sistema sem compensacao



Sistema Compensado



Questão 1

1: 2,3
2: 2,5
3: 1,2
4: 1,5
6: 2,0

9,5

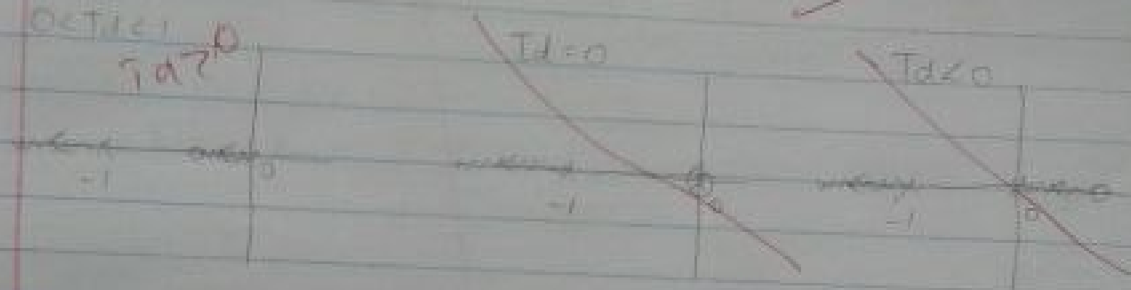
a) $G_c(s)\,G_p(s) = \dfrac{K_p(1+T_d s)}{s(s+1)}$

Vamos desenhar o LGR para alguns valores de Td:

Td<1:   Td=1:

1,3

0<Td<1
Td>0



Logo, para $0 \leq T_d \leq 1$ o sistema é estável e a resposta ao degrau é sempre amortecida ($\xi \geq 1$). Para $T_d > 1$ temos $\xi < 1$ para alguns valores de K_p e $T_d < 0$ é instável.

b) $G_c(s)\,G_p(s) = \dfrac{K_p}{s}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s+K_p} \Rightarrow C(s) = \frac{K_p}{s(s+K_p)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s+K_p}$$

$$a = \frac{K_p}{s+K_p}\Big|_{s=0} = 1 \qquad b = \frac{K_p}{s}\Big|_{s=-K_p} = -1$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+K_p} \Rightarrow c(t) = 1 - e^{-K_p t}$$

1,0

$$c(t_1) = 0,1 \Rightarrow 1 - e^{-K_p t_1} = 0,1 \Rightarrow e^{-K_p t_1} = 0,9 \Rightarrow K_p t_1 = 0,105$$

$$c(t_2) = 0,9 \Rightarrow 1 - e^{-K_p t_2} = 0,9 \Rightarrow e^{-K_p t_2} = 0,1 \Rightarrow K_p t_2 = 2,303$$

$$K_p(t_2 - t_1) = 2,198 \Rightarrow K_p \cdot 1 = 2,198 \Rightarrow \boxed{K_p = 2,198}$$

Questão 2

a) $G(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$ pólo estável: $s=-1$

$G_c(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{s}$ tornamos $a=1$ p/ cancelar o polo estáv

$G(s) \cdot G_c(s) = \frac{K(s+b)}{s(s-1)}$

1.5

$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+b)}{s^2 - s + Ks + Kb} = \frac{K(s+b)}{s^2 + (K-1)s + Kb}$

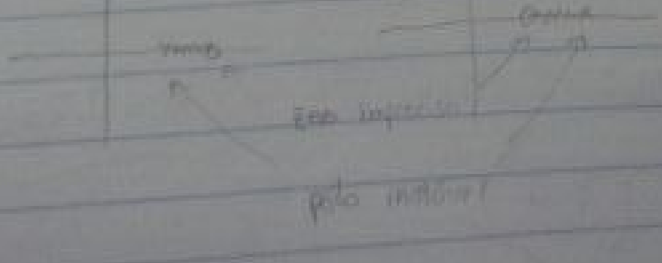
$\omega_n^2 = Kb \Rightarrow Kb = 4$

$2\xi\omega_n = K-1 \Rightarrow 2 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = K-1 \Rightarrow K=3 \therefore b = \frac{4}{3}$

Logo, $G_c(s) = \frac{3(s+1)(s+\frac{4}{3})}{s}$

b) Não é possível a realização do projeto cancelando o pólo instável, uma vez que não é possível, na prática, o posicionamento de um zero perfeitamente sobre o pólo instável. Uma imprecisão leva ao surgimento de um PMF para todo valor de ganho, desestabilizando o sistema.

1.0



Questão 3

a) Do gráfico fornecido temos que o erro estacionário do sist para o degrau unitário é $e_{ss} = 0,1$.

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} \Rightarrow 1+K_p = \frac{1}{0,1} \Rightarrow K_p = 9$$

0,2

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KK_t}{Ts+1} \Rightarrow \boxed{KK_t = 9}$$

$$\frac{R(s)}{C(s)} = \frac{KK_t}{Ts+KK_t+1} \Rightarrow R(s) = \frac{KK_t}{s(Ts+KK_t+1)} = \frac{KK_t}{T} \cdot \frac{1}{s\left(s+\frac{KK_t}{T}\right)} =$$

$$= \frac{KK_t}{T}\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{s+\frac{KK_t}{T}}\right) \qquad a = \frac{T}{KK_t} \quad b = \frac{-T}{KK_t}$$

$$R(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{KK_t}{T}} \Rightarrow r(t) = 1 - e^{-\frac{KK_t}{T}t} = 1 - e^{-\frac{9}{T}\cdot t}$$

Para $t = 0,2$, temos $r(0,2) = 0,44$ (do gráfico) $= 1 - e^{-\frac{1,8}{T}}$

$$\Rightarrow e^{-1,8/T} = 0,56 \Rightarrow \boxed{T = 3,1\,s}$$

b) $G_c = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = K\left(\frac{1+T_i s}{T_i s}\right)$

Para cancelar o polo, tomamos $T_i = T = 3,1\,s$.

$$G_c(s)\cdot G(s) = \frac{K\cdot KK_t}{T_i\cdot s} = \frac{9K}{T_i s}$$

$$\frac{R(s)}{C(s)} = \frac{9K}{T_i s + 9K} = \frac{1}{\frac{T_i}{9K}s + 1}$$

Queremos $\frac{T_i}{9K} = 0,2 \Rightarrow 9K = \frac{3,1}{0,2} \Rightarrow \boxed{K = 1,722}$

(1,0)

Questão 4

Aplicando um controle ~~parametric~~ proporcional $G_c(s) = K$, temos

$$G_c(s)\cdot G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K}{s^3+6s^2+11s+6}$$

A eq. característica é dada, então, por $s^3+6s^2+11s+6+K=0$.
Aplicando o critério de Routh, temos:

s^3	$6+K$	6
s^2	11	1
s^1	$\frac{60-K}{11}$	0
s^0	1	

A planta é estável se $6+K>0$ e $60-K>0 \Rightarrow K>60$

Logo, $K_{cr} = 60$. Neste caso, temos um par de polos complexos conjugados sobre o eixo imaginário. Denotando-os por $\pm j\omega$, temos:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11j\omega + 66 = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^3 j - 6\omega^2 + 11j\omega + 66 = 0 \therefore$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 11\omega = \omega^3 \\ 6\omega^2 = 66 \end{cases} \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{11} \text{ rad/s}$$

Assim, o período de oscilação é dado por

$$\omega = \frac{2\pi}{P_{cr}} \Rightarrow P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow P_{cr} \approx 1{,}89\,s$$

Finalmente, da tabela, tiramos os coeficientes do PID:

$$K_p = 0{,}6K_{cr} = 36$$

$$T_I = P_{cr}/2 \cong 0{,}947$$

$$T_D = P_{cr}/8 \cong 0{,}237$$

1,5

Questão 5

a) $k_p = \lim_{s \to 0} G(s) = k \Rightarrow \boxed{k = 9}$ 0,4

b) Do gráfico temos $MF = +9{,}375°$ e $MG = +2{,}174$.

Assim $\phi_m = 25 - 9{,}375 + 5 = 20{,}625°$

$\operatorname{sen} \phi_m = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \phi_m + \operatorname{sen} \phi_m \alpha = 1 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (1 + \operatorname{sen} \phi_m)\alpha = 1 - \operatorname{sen} \phi_m \Rightarrow \alpha = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \phi_m}{1 + \operatorname{sen} \phi_m} = 0{,}479$

Do gráfico, para um ganho de $-20\log(1/\sqrt{\alpha}) = 3{,}196$ temos $\omega_m = 2{,}0$[illegible]

$\omega_m = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\, T} \Rightarrow T = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}\, \omega_m} = 0{,}722\ s$

Freq de canto: $\dfrac{1}{T} = 1{,}384\ s^{-1}$ e $\dfrac{1}{\alpha T} = 2{,}890\ s^{-1}$ 1,0

Compensador: $G_c(s) = \dfrac{1 + 0{,}722 s}{1 + 0{,}346 s}$

c) Do gráfico compensado temos $MF = +18{,}75°$ e $MG = +4{,}918\ dB$.

As margens de estabilidade aumentaram, porém ainda não satisfazem os requisitos, possivelmente devido ao baixo valor tomado como margem de segurança. O projeto deve ser refeito considerando uma margem de segurança maior.

0,5