

Capítulo 7

Compensação Usando Lugar das Raízes - Conceitos Básicos

O lugar geométrico das raízes (LGR) é uma ferramenta bastante versátil para o projeto de controladores (ou, como alguns livros chamam, compensadores). O que o controlador/compensador faz é modificar a dinâmica do sistema (ou seja, compensa a dinâmica indesejada), acrescentando mais pólos e zeros (de malha aberta e fechada), ou simplesmente mudando estes de posição, de forma que o sistema em malha fechada atenda as especificações.

7.1 Projeto de Compensadores

Num projeto de em malha fechada, as preocupações do engenheiro de controle devem ser as seguintes:

1. **Garantir Estabilidade em Malha Fechada:** Como já se viu, alguns LGR's possuem partes que estão no SPD. Ou seja, certos valores de parâmetros podem fazer com que os pólos de MF estejam no SPD, e o sistema seja instável em MF. O projetista deve então determinar, a partir do LGR, as faixas de valores dos parâmetros (normalmente K) de forma que a estabilidade em MF seja garantida;
2. **Garantir que As Especificações Sejam Atendidas:** Uma vez que o sistema é estável, é preciso que ele atenda as especificações em regime permanente e transitório, o que é feito pela adequada escolha da dinâmica do compensador (adição de pólos e/ou zeros) e pela mudança de seu ganho (desde que seja estável em MF).

No projeto de um controlador, supõe-se que a planta $G(s)$ não pode ser alterada, e tudo o que se pode mexer está no compensador $H(s)$. Entretanto, nada impede que $G(s)$ não possa mudar por alguma razão (que o projetista não conhece direito).

Há duas ferramentas que dispomos até agora para se projetar um sistema em malha fechada:

- **Conceito de Tipo do Sistema - projeto considerando regime permanente:** que ajuda na determinação de quantos integradores o compensador $H(s)$ precisa ter e qual deve ser o seu ganho K de modo que o sistema em malha fechada tenha o regime permanente desejado;

- **Lugar Geométrico das Raízes - projeto do comportamento transitório:** que ajuda na localização adequada dos pólos de malha fechada de forma que o transitório tenha o comportamento desejado.

O LGR, como já seu viu, é formado pelo conjunto dos caminhos que os pólos de malha fechada descrevem à medida que se varia o ganho em malha aberta. Este conjunto de caminhos pode ser alterado, por outro lado, à medida que adicionamos pólos e/ou zeros no compensador $H(s)$ (ou seja, pólos e zeros de malha aberta). Deste modo, o projetista deve sempre saber como o LGR muda nestas condições.

De maneira geral, pode-se dizer que a adição de zeros do SPE atrai o LGR para a esquerda, uma vez que os zeros são sempre terminações de caminhos de pólos de malha fechada (vide figura 7.1). Já a adição de pólos no SPE introduz novos caminhos, que necessariamente deverão terminar no infinito. Se houver duas assíntotas, pelo menos uma das demais deverá entrar no SPD, o que indica uma possível situação de instabilidade. Esse fato é uma restrição para o uso indiscriminado de integradores (para, por exemplo, melhorar o desempenho em regime permanente).

Evidentemente, a introdução de zeros no SPD (ou seja, o uso de controladores de fase não-mínima) implicará que ramos serão atraídos para o SPD, criando também uma possível situação de instabilidade.

Nota: A introdução de pólos de MA no SPD não é uma boa prática de controle, pois se por alguma razão a malha se abrir, o controlador sozinho será um sistema instável, o que implicará muito provavelmente na sua destruição.

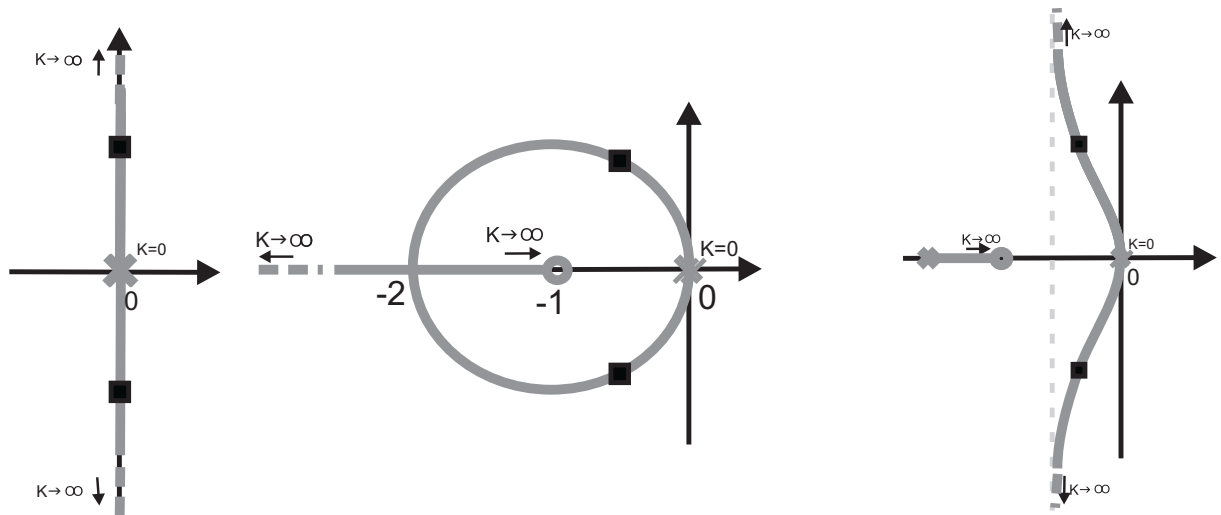


Figura 7.1: Efeito da Adição de Zero de MA

7.2 Análise Qualitativa de Adição de Pólos e Zeros

O que foi dito acima parece sugerir que adicionar zeros é bom e adicionar pólos é ruim. As seguintes observações são então importantes:

1. A adição de zeros está limitada ao fato de $H(s)$ ter de ser um sistema causal;

2. Adicionar zeros no SPD atrai o LGR para eles, o que piora a situação;
3. A adição de pólos, por outro lado, pode ser interessante se desejamos melhorar o regime estacionário. Entretanto, a adição de integradores de $G(s)H(s)$ compromete a estabilidade.
4. adicionar pólos de $H(s)$ no SPD é impensável, pois significa que estaríamos construindo um controlador que é instável (ou seja, se por alguma razão a malha abre, o controlador é destruído).

7.2.1 A questão da robustez de estabilidade

Como foi dito, o sistema em malha fechada está sujeito a vários efeitos aleatórios, como distúrbios, ruídos e incertezas na planta. Esta última significa que a função de transferência verdadeira da planta pode não ser $G(s)$ (que foi usada para fazer o projeto) mas sim $G(s) + \Delta G(s)$. Ou seja, o verdadeiro do sistema pode ser diferente do que foi esboçado pelo projetista, o que poderia significar que pólos de malha fechada que ficaram muito próximos do eixo imaginário no projeto, podem estar mais perto ainda para o sistema real (ou até já estarem no SPD). Deste modo, projetar o sistema para que os pólos dominantes não fiquem muito pouco amortecidos (ou seja, perto do eixo imaginário) é uma boa prática de projeto. Fazendo-se isso, melhora-se a *estabilidade relativa* do sistema.

7.2.2 Pólos de Malha Fechada Adicionais

Como se sabe, o número de pólos de Malha Fechada pode ser maior que dois (os pólos dominantes). O efeito destes pólos no desempenho global do sistema só pode ser avaliado depois que o projeto estiver terminando, mas de maneira geral, eles terão um efeito na resposta do sistema em malha fechada, que é o de desviar da resposta de segunda ordem dos pólos dominantes. Este efeito será tanto menor quanto mais à esquerda estes pólos adicionais estiverem, ou quanto mais próximos dos zeros de MF estiverem. Todo projeto então deve ser seguido de uma avaliação do efeito destes pólos.

7.3 Projeto de Compensadores Proporcionais

O tipo de controle em malha fechada mais simples que se pode fazer é o **controle proporcional**, que consiste em adotar um compensador $H(s) = K$, isto é, formado somente por um ganho. Neste caso, o LGR é da própria planta, isto é, a FTMA é dada por $KG(s)$.

O projeto inicia-se tipicamente com a determinação dos pólos de malha fechada dominantes que o sistema deve possuir (para atender as especificações). Há então duas possibilidades: ou o LGR da planta passa por estes pólos e determina-se o valor de K para que isto aconteça, ou o LGR não passa, e o compensador proporcional é incapaz de atender estas especificações.

Apesar disso, o compensador proporcional não é inútil, já que na maioria das vezes toda uma região de pólos de malha fechada atendem as especificações. Eventualmente, o LGR da planta passa nesta região e o compensador consegue atender as especificações. A vantagem do compensador proporcional é sua simplicidade (a implementação analógica seria somente um amplificador).

7.4 Projeto de Compensadores de Avanço de Fase

O compensador de avanço de fase possui a função de transferência:

$$H(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

onde $0.1 < \alpha < 0.9$ tipicamente (por questões de facilidade de implementação). O zero está sempre à direita do pólo, e normalmente se insere o zero de modo que este atraia os ramos do LGR que determinam os pólos dominantes. Deste modo, consegue-se colocar o par de pólos na posição desejada. O posicionamento adequado do pólo e do zero de $H(s)$ pode fazer com que a parte complexa do LGR passe em qualquer posição do SPE, em particular, na posição onde estão os pólos de malha fechada dominantes desejados para o sistema. Esse posicionamento do pólo e do zero vai fixar α e T .

Por fim, aplicando-se a condição de módulo para s sendo o pólo de MF desejado, pode-se obter o valor de K_c correspondente, e o projeto termina, com uma proposta de controlador $H(s)$.

Passa-se então para a fase de verificação se as especificações estão realmente sendo atendidas, devido aos pólos adicionais de malha fechada (e efeito de zeros).

Exemplo: Seja o sistema de controle em malha fechada com a planta:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Deseja-se projetar um compensador em cascata $H(s)$ tal que a porcentagem de sobressinal seja aproximadamente 8,3% e o tempo de acomodação para 2% seja aproximadamente $t_a = 2,0$ segundos. Deste modo, aplicando-se as fórmulas, tem-se que:

$$t_a(2\%) = 2 = \frac{4}{\xi\omega_n}, \text{ o que resulta em } \xi\omega_n = 2$$

e

$$M_p = 0,083 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \text{ de onde se tira que } \ln(0,083) = \frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

fazendo mais algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$\ln(0,083)\sqrt{1-\xi^2} = -\pi\xi, \text{ o que significa que } 6,1947(1-\xi^2) = 9,8696\xi^2$$

o que resulta no sistema $\xi^2 = 0,3856$. Deste modo, os valores possíveis para $\xi = \pm 0,6210$, e manteremos somente o valor positivo. Usando-se a primeira equação, chega-se que

$$\omega_n = 3,2206 \text{ rad/s}$$

Os pólos de malha fechada que o sistema deveria ter (se fosse de segunda ordem) seriam então:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -2 \pm j3,2206\sqrt{1-(0,6210)^2} = -2 \pm j2,52$$

Inicialmente, vamos verificar se é ou não possível que um controlador proporcional satisfaça esta especificação. Na figura 7.2 mostra-se o LGR para $GH = \frac{4K}{s(s+1)}$, ou seja, com o controlador proporcional.

Nota-se que a reta do LGR passa no -1 , o que significa que os ramos complexos não vão passar no pólo de malha fechada. Deste modo, o controlador proporcional não

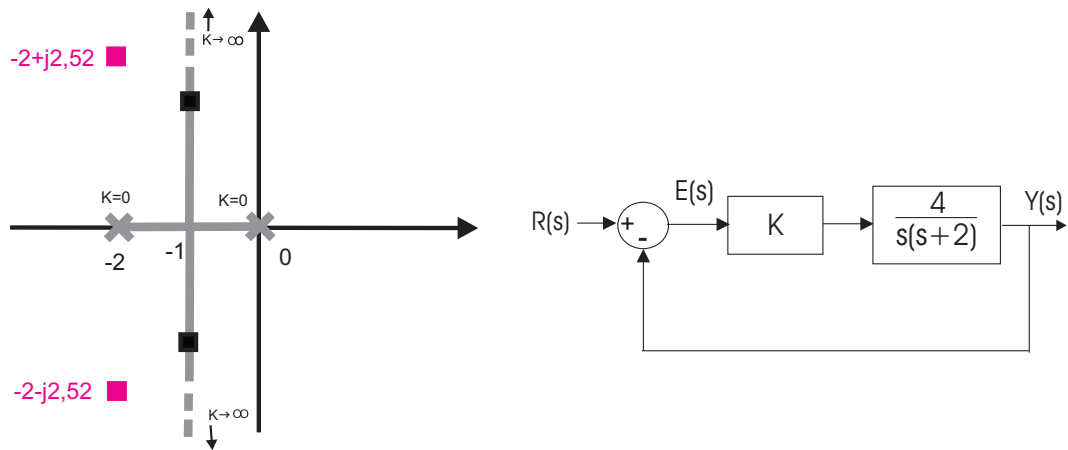


Figura 7.2: LGR do exemplo para Controle Proporcional

atende as especificações. Passa-se então para um controlador um pouco mais sofisticado, que deve deformar o LGR para que ele passe nos pólos de malha fechada desejado.

Como o PD é um controlador não-realizável, o segundo mais simples é o controle por avanço de fase, que de maneira geral, atrai o LGR para o lado esquerdo (devido ao fato do zero estar mais perto eixo imaginário do que o pólo). O LGR desejado deve ser da forma mostrada na figura 7.3.

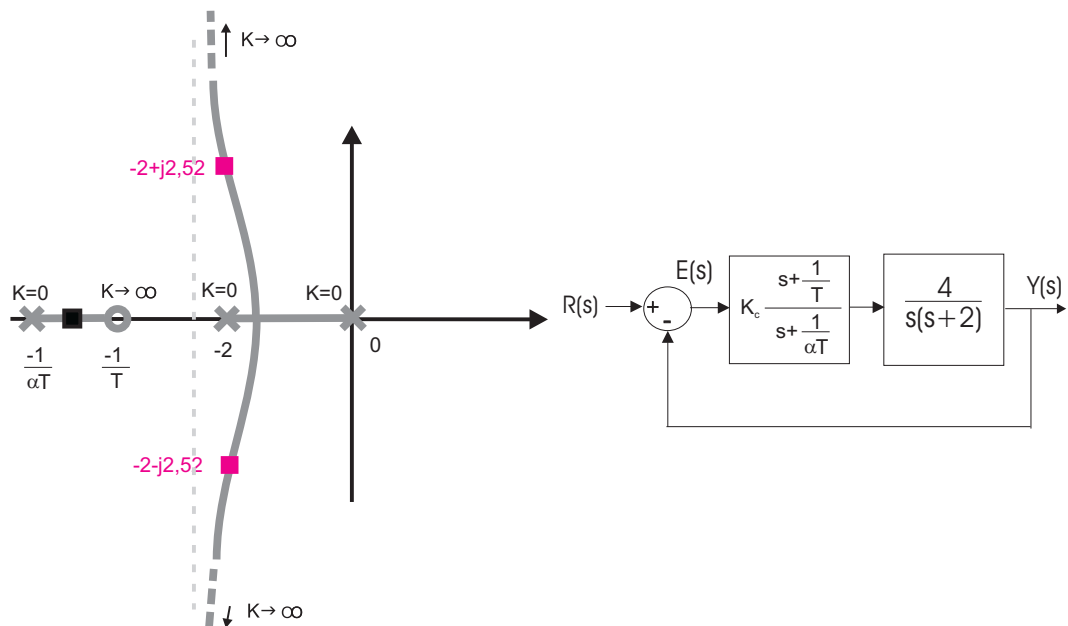


Figura 7.3: LGR desejado para controle de avanço de fase

A função de transferência do controlador é da forma:

$$H(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

deste modo $H(0) = \alpha K_c$. A função de transferência em malha aberta é então:

$$G(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)} K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

onde o valor de α deve ser escolhido entre 0,1 e 0,9 por questões práticas (facilidade de implementação).

Para que o LGR passe nos pólos desejáveis, é necessário que, ao se aplicar a condição de fase, os pólos $s_{1,2}$ satisfaçam essa condição. Ou seja:

$$\angle(H(s)G(s)) = \angle(s + \frac{1}{T}) - \angle(s) - \angle(s + 2) - \angle(s + \frac{1}{\alpha T}) = 180^\circ \pm \ell.360^\circ$$

Deste modo, devemos escolher T e α de modo que esta equação seja satisfeita para $s = -2 \pm j2,52$, ou seja:

$$\angle(-2 \pm j2,52 + \frac{1}{T}) - \angle(-2 \pm j2,52) - \angle(-2 \pm j2,52 + 2) - \angle(-2 \pm j2,52 + \frac{1}{\alpha T}) = 180^\circ \pm \ell.360^\circ$$

$$\underbrace{\angle((\frac{1}{T} - 2) \pm j2,52)}_{\arctan(\frac{2,52}{\frac{1}{T}-2})} - \underbrace{\angle(-2 \pm j2,52)}_{-128,2367^\circ} - \underbrace{\angle(j2,52)}_{-90^\circ} - \underbrace{\angle((\frac{1}{\alpha T} - 2) \pm j2,52)}_{\arctan(\frac{2,52}{\frac{1}{\alpha T}-2})} = 180^\circ \pm \ell.360^\circ$$

Como temos uma equação e duas incógnitas, precisamos chutar um valor de uma e calcular o valor da outra. Normalmente, chutamos o valor de α . Vamos começar chutando $\alpha = 0,1$. Após algumas substituições, chega-se a:

$$\arctan(\frac{2,52}{\frac{1}{T}-2}) - \arctan(\frac{2,52}{\frac{10}{T}-2}) = 38,2367^\circ$$

Após resolver a equação (usando, por exemplo a função SOLVE do matlab), chega-se a $T = 0,206$, de modo que o zero do controlador fica em $-\frac{1}{T} = -4,85$ e o pólo do controlador fica em $-\frac{1}{\alpha T} = -48,50$.

Escolhendo-se então estes valores para o pólo e o zero do controlador, o LGR passa pelos pólos de malha fechada desejado. Entretanto, é preciso ainda calcular para que valor de K_c se obtém estes pólos de MF desejados. Para tanto, utiliza-se a condição de módulo.

Pela condição de módulo, tem-se que:

$$|GH| = \left| \frac{4K_c}{(-2 + j2,52)(j2,52)} \frac{(-2 + j2,52 + 4,85)}{(-2 + j2,52 + 48,50)} \right| = 1$$

Isolando-se K_c , tem-se

$$K_c = \frac{|-2 + j2,52||j2,52||46,50 + j2,52|}{4|2,850 + j2,52|} = 24,7$$

Deste modo, o controlador projetado é simplesmente:

$$H(s) = 24,7 \left(\frac{s + 4,85}{s + 48,5} \right)$$

Na figura 7.4, tem-se o LGR realmente obtido e os pólos reais do sistema. Nota-se que os pólos dominantes verdadeiros do sistema em malha fechada estão bastante próximos

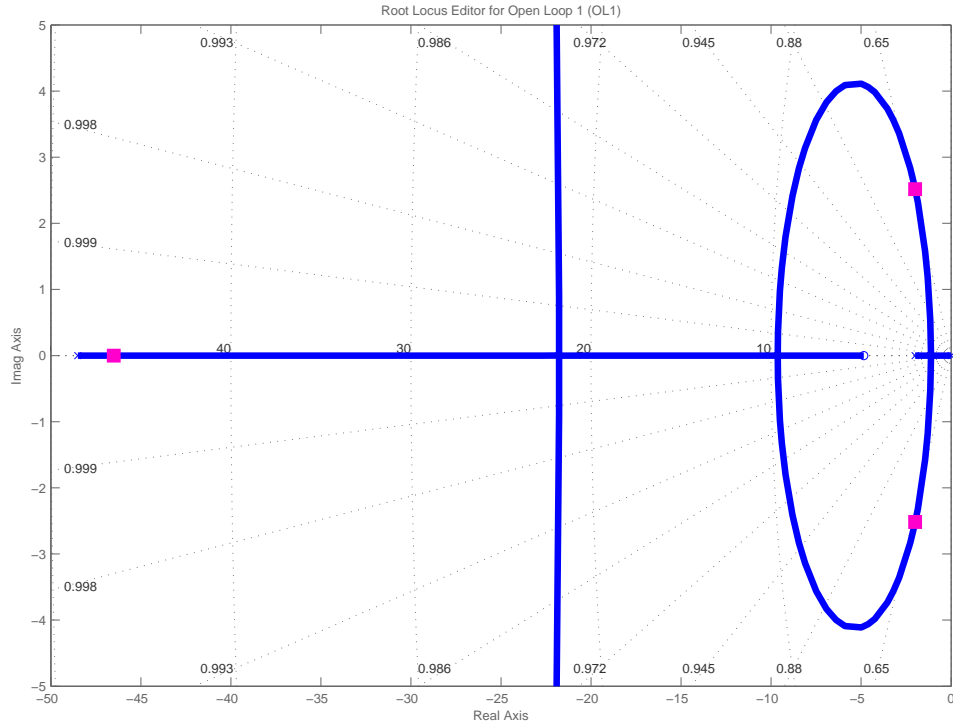


Figura 7.4: LGR real do controle por avanço de fase

dos desejados. Entretanto, existe um terceiro pólo. Para se calcular o valor deste, a única forma é determinar a função de transferência em malha fechada.

Esta função é dada por:

$$T(s) = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)G(s)} = \frac{\frac{4}{s(s+2)} \frac{24,70(s+4,85)}{s+48,5}}{1 + \frac{4}{s(s+2)} \frac{24,70(s+4,85)}{s+48,5}} = \frac{98,8(s+4,85)}{s^3 + 50,7s^2 + 197,54s + 487,6818}$$

Os pólos desta função de transferência são: $-2,00 \pm j2,53$ e $-46,64$. Nota-se então que o terceiro pólo está bastante afastado (mais que 10 vezes), entretanto, o zero de malha fechada não está cancelando com nenhum outro pólo, o que significa que ele está causando um efeito indesejado na resposta ao degrau, pois ele quebra a dominância dos pólos complexos conjugados desejados. De fato, calculando-se a resposta ao degrau unitário para o sistema em MF (usando a função "step" para $T(s)$), tem-se a resposta apresentada na figura 7.5.

Nota-se que o sobressinal ficou um pouco acima do desejado (11,6%, em comparação com 8,3%) e o tempo de acomodação ficou 1,64, o que é menor que o valor desejado. Isto se deve ao efeito do zero (e menos, do terceiro pólo).

7.4.1 Cancelamento de Pólo com Zero no SPE

É sempre possível tentar alocar o zero do compensador de avanço de fase exatamente sobre um dos pólos da planta, na esperança de simplificar o LGR. Isso ocorre no caso do exemplo anterior.

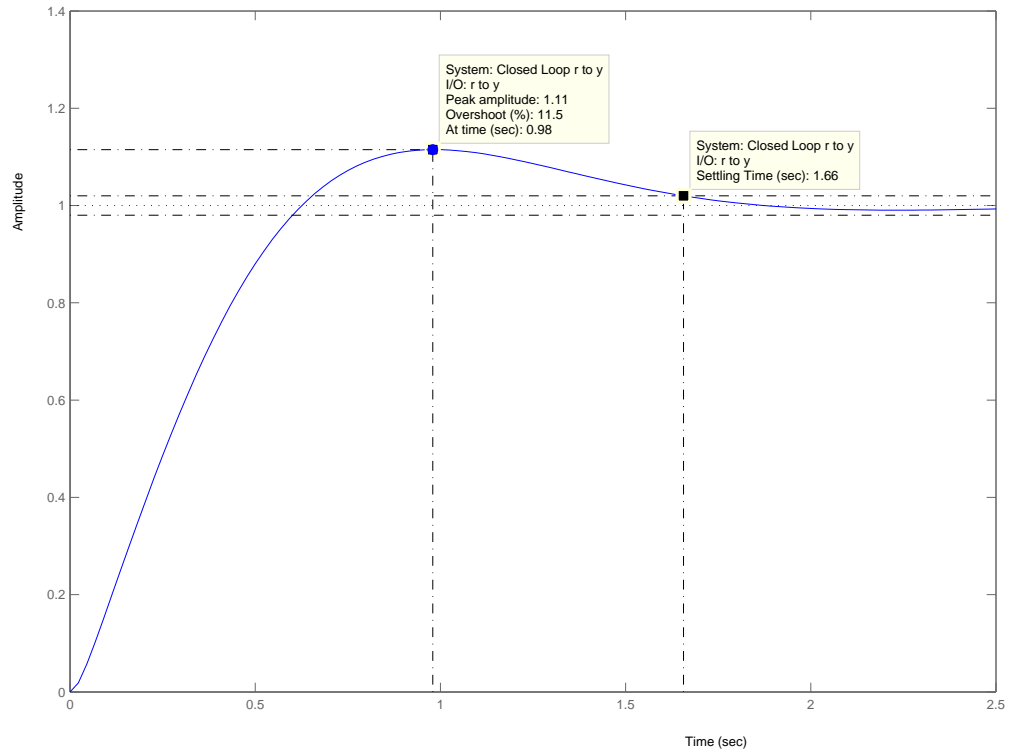


Figura 7.5: Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada

Entretanto, na prática o cancelamento nunca ocorre, o que pode gerar um LGR ligeiramente diferente do que se esperava (fazer aqui o exemplo anterior).

7.5 Problemas

7.5.1 Problema 1

Seja a planta $G(s) = \frac{1}{(s^2-1)(s+2)}$. Deseja-se projetar um sistema de controle em malha fechada para esta planta.

a) Esboce o LGR (destacando os principais parâmetros) e explique, baseado neste, se é possível ou não obter um sistema em malha fechada assintoticamente estável somente com controle proporcional. (0,75 ponto)

b) Considerando o projeto de um compensador PD, cuja função de transferência é $G_{PD}(s) = K(1 + T_d s)$, onde $K > 0$ e $T_d > 0$, esboce os possíveis formatos do LGR. Baseado neles, qual é a ordem do sistema em malha fechada? (0,5 ponto)

c) Projete valores para K e T_d de modo que o sistema em malha fechada tenha um par de pólos dominantes com $\omega_n = 1.02$ e $\xi = 0.707$, com tolerância de 5 %. (1,5 ponto)

d) Encontre os pólos de malha fechada que o seu sistema projetado possui e diga se as especificações estão sendo atendidas (e se não estão, qual a razão). (0,75 ponto)

e) Encontre, para o sistema em malha fechada, o erro estacionário ao degrau, rampa e parábola. Também encontre o sobressinal e o tempo de acomodação a dois por cento. (0,5 ponto)

7.5.2 Problema 2

Deseja-se projetar um sistema de controle em malha fechada para a planta instável $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$. Deseja-se que o tempo de acomodação a dois por cento seja de 1 segundo e um sobressinal de dez por cento.

1. Encontre um compensador por avanço de fase tal que o sistema satisfaça estes requisitos (usando o método do lugar das raízes). Verifique o valor do erro estacionário para este sistema. (2.0 pontos)
2. Verifique os pólos e zeros de malha fechada que o sistema possui. Há pólos dominantes ? Explique o que você faria para deixá-los dominantes (se ainda não são). (1,0 ponto)

Capítulo 8

Projeto por Lugar das Raízes - Controladores de Atraso e Avanço-Atraso

Neste capítulo, apresenta-se o projeto de compensadores por atraso de fase usando-se o método do lugar das raízes.

8.1 Projeto de Compensador de Atraso de Fase

O objetivo do compensador de atraso de fase, diferentemente do compensador de avanço, não é mudar os pólos dominantes de malha fechada de lugar, mas sim que esses permaneçam os mesmos (ou seja, a resposta no domínio do tempo deve ser a mesma). Entretanto, esses mesmos pólos dominantes devem corresponder a valores do ganho de malha aberta K_{MA} maiores que no caso sem atraso de fase. Portanto, este compensador deve ser inserido em série com outros compensadores pré-existentes. Na figura 8.1 mostra-se onde se deve inserir o compensador de atraso de fase $H_2(j\omega)$ no caso onde não se deseja mudar os pólos de malha fechada dominantes de posição.

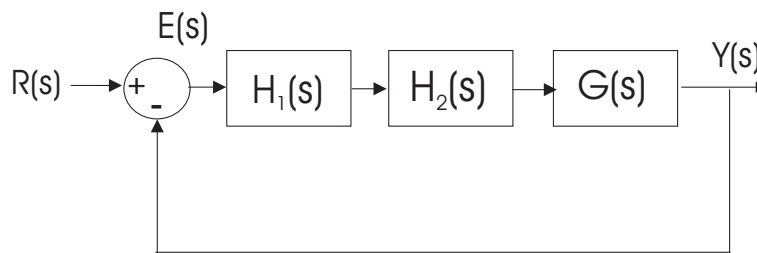


Figura 8.1: Compensador de Atraso de Fase

A forma geral da função de transferência do compensador de atraso é:

$$H_2(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}, \text{ com } \beta > 1$$

Deste modo, aplicando-se a condição de fase, tem-se:

$$\angle G(s)H_1(s)H_2(s) = \underbrace{\angle(s + \frac{1}{T}) - \angle(s + \frac{1}{\beta T})}_{\angle H_2(s)} + \angle G(s)H_1(s) = 180^\circ \pm \ell 360^\circ$$

Como não se deseja alterar a posição dos pólos de malha fechada dominantes (mas o ganho em malha correspondente pode mudar) é necessário que o LGR continue passando aproximadamente nestes pólos mesmo após a inserção do compensador adicional $H_2(s)$, ou seja, a contribuição de fase deste compensador nos pólos de malha fechada desejados (que são os mesmos), ou seja, $\angle H_2(s_1)$, deve ser pequena, tipicamente da forma

$$-5^\circ < \angle H_2(s_1) < 0^\circ$$

vide figura 8.2.

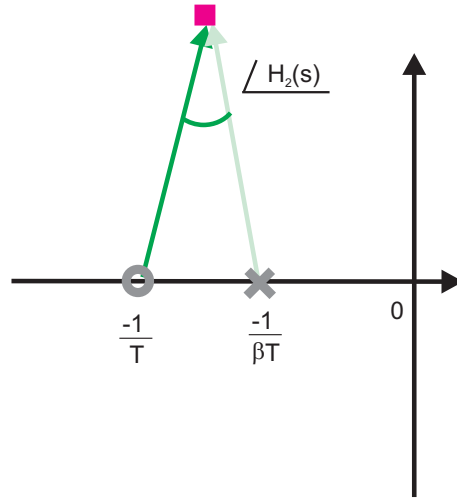


Figura 8.2: Posição do Pólo e do Zero no Compensador de Atraso de Fase

Ao se aplicar a condição de módulo para a nova função de transferência em malha aberta, o que se tem é:

$$|H_2(s_1)H_1(s_1)G(s_1)| = 1$$

Entretanto, antes da inserção do compensador de atraso, valia $|H_1(s_1)G(s_1)| = 1$, o que significa que devemos ter $|H_2(s_1)| = 1$. Ou seja,

$$K_c \frac{|s_1 + \frac{1}{T}|}{|s_1 + \frac{1}{\beta T}|} \approx 1$$

A escolha de $-5^\circ < \angle H_2(s_1) < 0^\circ$ implica que $|s_1 + \frac{1}{T}| \approx |s_1 + \frac{1}{\beta T}|$, o que implica que, ao final dos cálculos, deve-se chegar a $K_c \approx 1$. Isto significa por fim que $H_2(0) = K_c \beta \approx \beta$.

O ganho em malha aberta em baixas frequências para o sistema novo fica dado então por

$$K'_{MA} = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)H_1(s)H_2(s) \approx K_{MA}\beta$$

ou seja, o efeito da inserção do compensador de avanço de fase, já que $\beta > 1$, é a diminuição do erro estacionário, sem contudo mudar a resposta transitória do sistema, pois os pólos dominantes não são alterados. A figura 8.3 mostra o efeito da inserção de um compensador de atraso de fase $H_2(s)$. A posição dos pólos de malha fechada dominantes é praticamente a mesma.

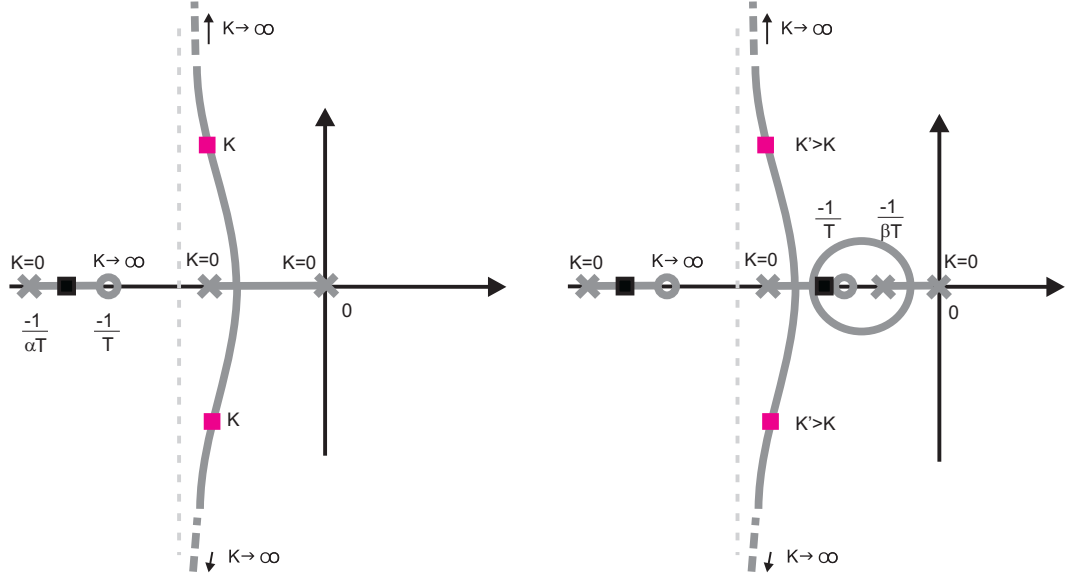


Figura 8.3: Efeito no LGR do Compensador de Atraso de Fase

Evidentemente, se $\beta = 1$, teríamos que o pólo e o zero de $H_2(s)$ seriam iguais. Então, a diferença entre a posição deste é tanto maior quanto maior for β , e tanto maior quanto maior for $\angle H_2(s_1)$. Deste modo, ao se aumentar β , aumenta-se $\angle H_2(s_1)$.

Para que possamos ter um aumento maior de β sem que isso implique em ultrapassar os limites $-5^\circ < \angle H_2(s_1) < 0^\circ$, devemos colocar o pólo $-1/\beta T$ bem próximo da origem, de forma que tenhamos mais margem para variar β .

A inserção de um compensador de atraso de fase implica em:

1. Introdução de um pólo adicional de malha fechada no sistema, o que significa que temos mais um fator para desviar a resposta transitória do sistema da resposta dos pólos dominantes. Este termo novo na resposta é conhecido como *cauda*.
2. Procura-se fazer com que um pólo de malha fechada cancele com o zero adicional introduzido no sistema.

8.2 Exemplos de Aplicação

Para o sistema projetado no exemplo anterior (projeto do compensador de avanço de fase), tinha-se que a função de transferência em malha aberta final era:

$$G(s)H_1(s) = \frac{4}{s(s+2)} \frac{24,70(s+4,85)}{(s+48,5)}$$

Como se tratava de um sistema de tipo 1, a constante de erro de velocidade era:

$$K_v = K_{MA} = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s)H_1(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{4}{s(s+2)} \frac{24,70(s+4,85)}{(s+48,5)} = 4,94$$

ou seja, o erro estacionário à rampa é dado por $e_{ss} = 1/K_v = 0,202$. Isto é, 20,2%. Deseja-se agora que esse mesmo sistema mantenha a resposta transitória e tenha ainda um erro estacionário de 5%. Isto significa que a nova constante de erro de velocidade, isto é, K'_v deve ser 1/0,05. Ou seja, $K'_v = 20$.

A inserção do compensador de atraso de fase faria com que o ganho em malha aberta, ou seja, $K'_{MA} = K'_v$ ficasse igual ao ganho antes da inserção, ou seja,

$$K'_v = \beta K_v$$

Deste modo, deveremos ter

$$\beta = \frac{K'_v}{K_v} = \frac{20}{4,94} = 4,05$$

A posição do pólo de malha fechada deve continuar a mesma que no exemplo anterior, ou seja $-2 \pm j2,53$.

8.2.1 Primeira proposta de compensador

Inicialmente, deve-se chutar a posição do pólo, ou seja, $-1/\beta T$ de forma que este fique próximo da origem. Entretanto, por questões práticas de implementação, não se pode chutar este valor tão pequeno quanto se queira. Vamos então chutar inicialmente $-1/\beta T = -0,1$, e depois verificar quanto deu $\angle H_2(-2 \pm j2,52)$. Na figura 8.4, tem-se uma representação dos pólos de malha aberta do sistema próximos da origem, e também o pólo dominante de malha fechada que se deseja manter.

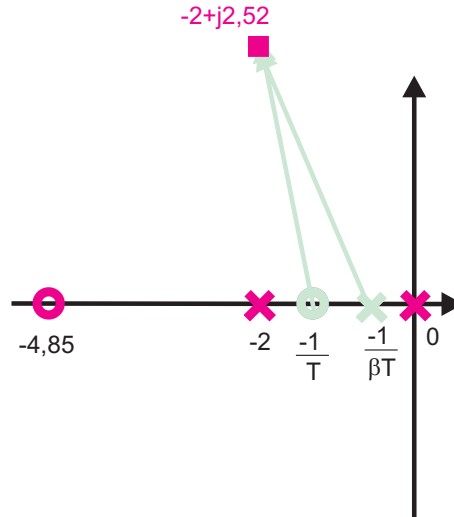


Figura 8.4: Efeito no LGR do Compensador de Atraso de Fase

Esta posição do pólo do compensador resultaria em $T = 1/(0,1 \cdot 4,05) = 2,47$, uma vez que devemos ter $\beta = 4,05$. Isto ainda implica que a posição do zero deve ser $-1/T = -0,405$. Pode-se então calcular esta fase como sendo:

$$\angle H_2(-2 \pm j2,52) = \angle(-2 + 2,52j + 0,405) - \angle(-2 + 2,52j + 0,1) = -4,7^\circ$$

Isto significa que está dentro da faixa de tolerância. Espera-se então que o efeito na posição dos pólos dominantes seja pequeno.

Pela condição de módulo, deve-se ter que:

$$|H_2(-2 \pm j2, 52)||H_1(-2 \pm j2, 52)||G(-2 \pm j2, 52)| = 1$$

o que significa que

$$\frac{4}{|s||s+2|} \frac{24,70|s+4,85|}{|s+48,5|} K_c \frac{|s+0,405|}{|s+0,1|} \Big|_{s=-2 \pm j2,52} = 1$$

o que vai resultar em $K_c = 1,063$. Este compensador fica então:

$$H_2(s) = 1,063 \frac{s+0,405}{s+0,1}$$

O valor de K'_v para o primeiro compensador é dado por:

$$K'_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H_1(s)H_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{4}{s(s+2)} \frac{24,70(s+4,85)}{(s+48,5)} 1,063 \frac{(s+0,405)}{(s+0,1)} = 21,27$$

de modo que teremos:

$$e_{ss} = \frac{1}{21,27} = 0,047$$

A função de transferência em malha aberta fica então:

$$G(s)H_1(s)H_2(s) = \frac{105,02(s+4,85)(s+0,405)}{s(s+2)(s+48,5)(s+0,1)}$$

e a função de transferência em malha fechada fica:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)H_1(s)H_2(s)}{1 + G(s)H_1(s)H_2(s)} = \\ &= \frac{\frac{105,02(s+4,85)(s+0,405)}{s(s+2)(s+48,5)(s+0,1)}}{1 + \frac{105,02(s+4,85)(s+0,405)}{s(s+2)(s+48,5)(s+0,1)}} = \\ &= \frac{105,02(s+4,85)(s+0,405)}{(s+46,4)(s+0,4278)(s^2+3,776s+10,39)} \quad (8.1) \end{aligned}$$

Os pólos de malha fechada dominantes são $-1,89 \pm j2,61$.

O LGR do novo sistema fica como mostrado na figura 8.5.

8.2.2 Segunda proposta de compensador

Este valor poderia ser ainda menor, uma vez que a contribuição de ângulo ainda está muito grande. Escolhendo-se então $-1/\beta T = -0,01$, o que implica que $T = 1/0,014,05 = 24,69$. Isto implica ainda que $-1/T = -0,0405$, de modo que a contribuição de fase fica:

$$\angle H_2(-2 \pm j2, 52) = \angle(-2 + 2,52j + 0,405) - \angle(-2 + 2,52j + 0,01) = -0,43^\circ$$

Aplicando-se novamente a condição de módulo, tem-se que

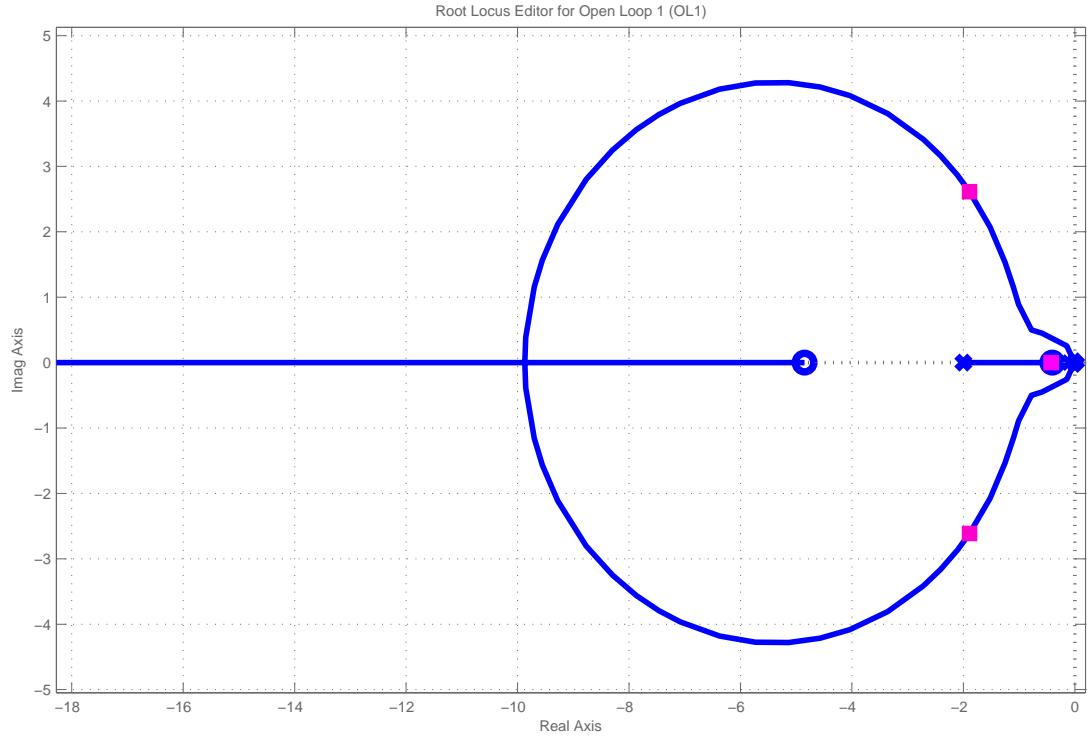


Figura 8.5: LGR do sistema com o compensador de atraso

$$\frac{4}{|s||s+2|} \frac{24,70|s+4,85|}{|s+48,5|} K_c \frac{|s+0,0405|}{|s+0,01|} \Big|_{s=-2 \pm j2,52} = 1$$

o que vai resultar em $K_c = 1,0104$. Este compensador fica então:

$$H_2(s) = 1,0104 \frac{s+0,0405}{s+0,01}$$

$$G(s)H_1(s)H_2(s) = \frac{99,83(s+4,85)(s+0,0405)}{s(s+2)(s+48,5)(s+0,01)}$$

e a função de transferência em malha fechada fica:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{G(s)H_1(s)H_2(s)}{1+G(s)H_1(s)H_2(s)} = \\ &= \frac{99,83(s+4,85)(s+0,0405)}{(s+46,4)(s+0,04075)(s^2+3,97s+10,35)} \quad (8.2) \end{aligned}$$

Os pólos de malha fechada dominantes são $-1,99 \pm j2,53$. Na figura 8.6 tem-se o LGR do sistema com o segundo compensador de atraso. A parte onde houve modificação está ampliada.

Na figura 8.7 tem-se a resposta ao degrau para este último sistema.

A resposta à rampa para os três sistemas é mostrada na figura 8.8. O caso sem atrado é mostrado na curva azul. O caso do primeiro exemplo de atraso é mostrado em cor de

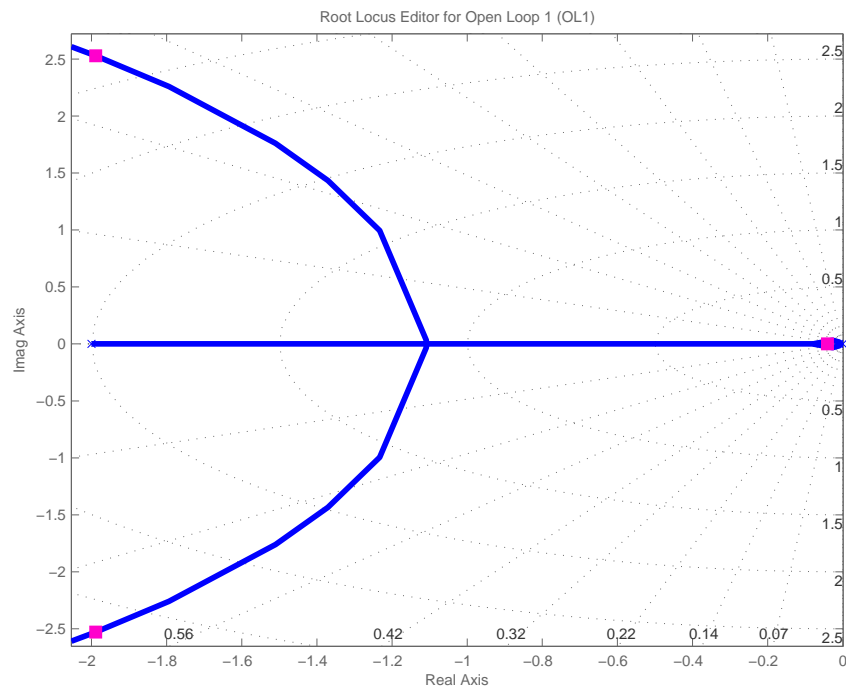


Figura 8.6: LGR do sistema com o segundo compensador de atraso

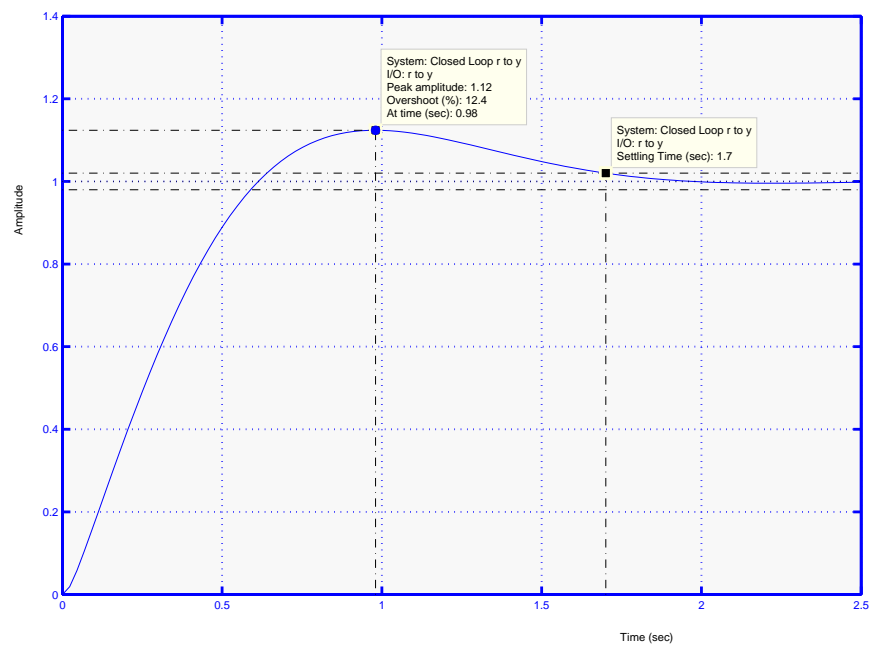


Figura 8.7: Resposta ao Degrau para o Segundo Sistema

rosa, e o segundo caso de atraso na curva amarela. Apesar de nestes dois últimos o erro estacionário ser igual, o primeiro caso é quando o erro estacionário demora menos para ser atingido.

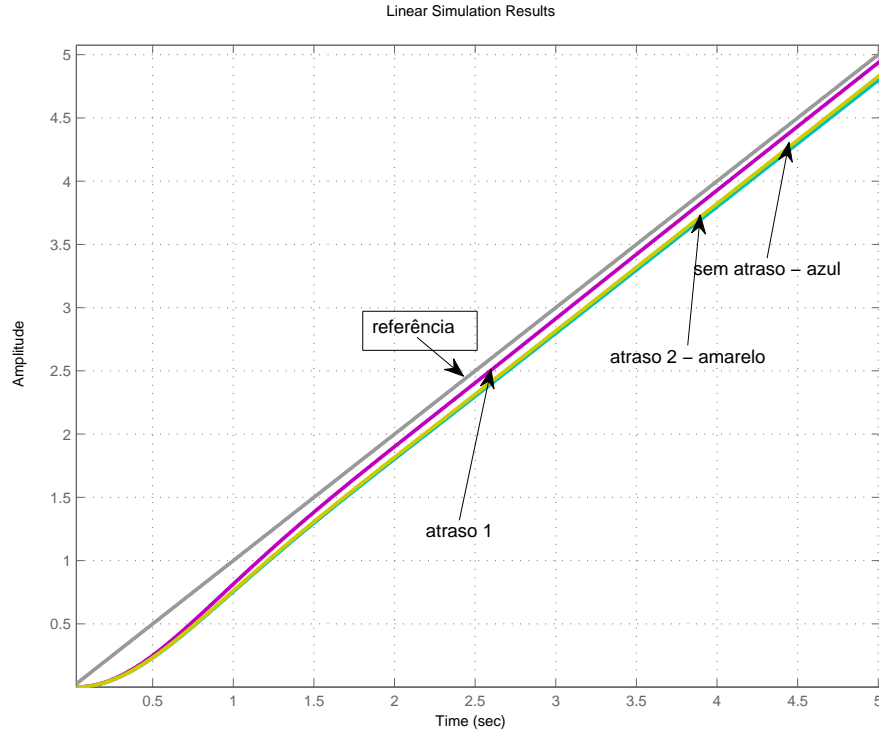


Figura 8.8: Resposta ao degrau do Sistema em Malha Fechada

8.3 Compensadores na Malha de Realimentação

A posição dos compensadores, tanto na malha direta quanto na malha de realimentação, não alteram a equação característica do sistema. Entretanto, os zeros de malha fechada são diferentes para os dois casos (basta comparar as funções de transferência em malha fechada para os dois casos). Deste modo, o método de traçar o lugar das raízes permanece o mesmo (mesmas regras).

Na figura 8.9 tem-se um diagrama de blocos de um sistema *com dois graus de liberdade*. Isto porque a presença de dois controladores em malha diferentes permite que as funções de transferência em malha fechada entre as diversas entradas e a saída possam ser projetadas de forma independente. De fato, pode-se calcular as três funções de transferência em malha fechada, o que resulta em:

$$G_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p(s)G_{c1}(s)}{1 + G_p(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))}$$

$$G_{yn}(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = -\frac{G_p(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))}{1 + G_p(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))}$$

$$G_{yd}(s) = \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))}$$

e a dependência entre estas três funções passa a ser:

$$G_{yr}(s) = G_{yd}(s)G_{c1}(s)$$

$$G_{yn}(s) = -\frac{G_p(s) - G_{yd}(s)}{G_p(s)}$$

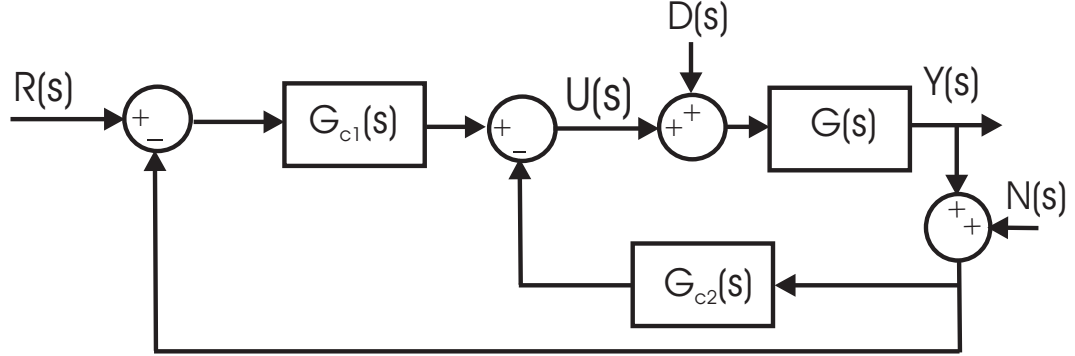


Figura 8.9: Sistema com Dois Graus de Liberdade

O denominador das três funções é o mesmo, que é a própria equação característica do sistema em malha fechada. Isto é:

$$1 + G_p(s)(G_{c1}(s) + G_{c2}(s))$$

Note que os controladores aparecem somados.

Uma aplicação comum é o chamado controle PI-D, onde o controlador na malha direta é simplesmente um PI, ou seja:

$$G_{c1}(s) = K_p + K_i \frac{1}{s}$$

e o controlador na malha de realimentação é um *derivativo causal*, isto é, da forma:

$$G_{c2}(s) = K_d \frac{s}{s + \gamma}$$

Para todos os efeitos, para o traçado do LGR, tudo se passa como se fosse um PID causal na malha direta.

A vantagem desta estrutura de controle está no fato de não haver derivação da entrada. No caso desta ser um degrau, a sua derivada tende a ser um pulso de grande amplitude, o que significa que uma derivação na malha direta implicaria na presença deste pulso de grande amplitude o sinal de controle $u(t)$.

8.3.1 Diminuição do Efeito do Ruído

A arquitetura de controle apresentada acima, apesar de resolver alguns problemas práticos, ainda sofre de um problema: a derivação realizada em $y(t)$, apesar de causal, ainda aumenta o ruído causado por $n(t)$ (devido ao ganho do derivador causal ser maior em altas frequências). Pode ser interessante, se viável fisicamente, introduzir mais um sensor no sistema (ou seja, transformar a planta em SIMO) para medir o sinal $\dot{y}(t)$, o que é melhor que derivá-lo no controlador. O projeto neste caso seria feito considerando o controlador derivativo não causal (isto é $K_d s$) e posteriormente, em vez de implementar fisicamente o PI-D, tudo se passaria como se fosse um PI na malha direta com duas malhas de realimentação: 1) uma externa, de $y(t)$, cujo erro é alimentado no PI, 2) uma interna, com realimentação de \dot{y} , e com um ganho na malha de realimentação igual a K_d .

8.4 Idéias para NUNCA Usar

8.4.1 Cancelamento de Pólo e Zero no SPD

Quando a planta é instável, ou seja, existem pólos de malha aberta no SPD, nunca se deve tentar alocar zeros do compensador sobre estes pólos (de modo a haver cancelamento de pólo com zero), pois como foi dito, este cancelamento nunca ocorre na prática. Isso implicará na existência de um ramo do LGR inteiramente no SPD, o que significa que um pólo de malha fechada será sempre instável.