PTC 3020 – SISTEMAS DE CONTROLE
2a. PROVA – 2022

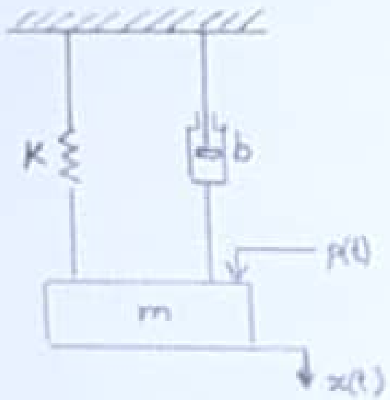
Nome:______________________________________ Nº USP ____________

INSTRUÇÕES

- Duração: 1h40min
- Consulta permitida apenas ao formulário em papel A4 próprio e à cópia da tabela de transformadas de Laplace, devidamente identificados. O formulário não deve conter soluções de exercícios/problemas.
- Coloque nome e número em todas as folhas.
- Ao final da prova, entregue estas folhas de questões e o formulário de consulta.
- Apresente com clareza suas soluções para os problemas. Nunca deixe subentendido seu raciocínio. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

1ª questão: **(Valor 2,0)** (Ogata – System Dynamics, pág. 437)

Considere o seguinte sistema mecânico onde é aplicada uma força $p(t) = Psin(\omega t)$. Assumindo que o deslocamento $x(t)$ é medido a partir da posição de equilíbrio, determine a saída $x(t)$ em regime estacionário.



Solução

A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = p(t)$$

Aplicando a TLaplace (c.i.=0), resulta

$$(ms^2+bs+k)X(s) = P(s)$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{P(s)} = G(s) = \frac{1}{ms^2+bs+k}} \quad (1.a)$$

Como a entrada é senoidal

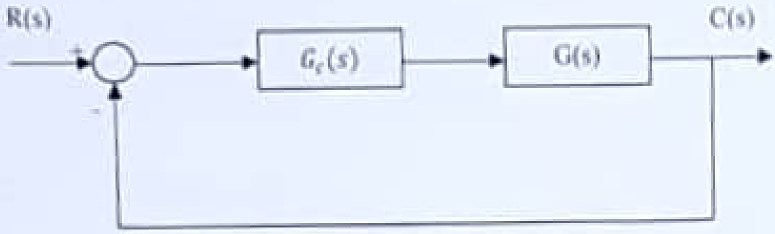
$$\frac{X(j\omega)}{P(j\omega)} = G(j\omega) = \frac{1}{-m\omega^2+bj\omega+k} = \frac{1}{(k-m\omega^2)+jb\omega}$$

uestão: **(Valor 1,0)**

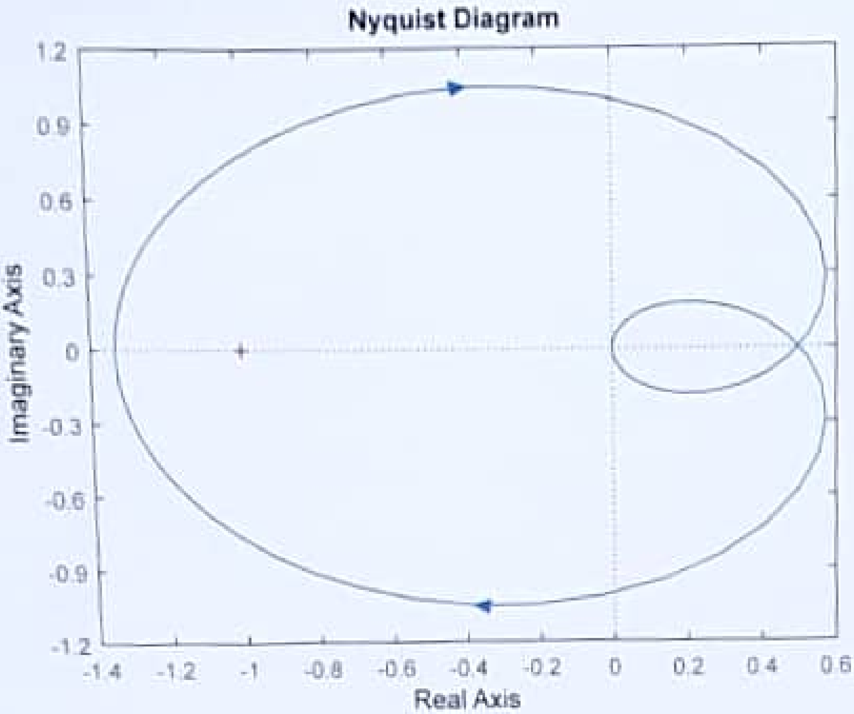
onsidere a seguinte função de transferência de um processo

$$G(s)=\frac{s-2}{(s+3)(s+1)}$$

e o seguinte diagrama de blocos do sistema em malha fechada, composto por um controlador proporcional com ganho $G_c(s) = K$ e o processo com função de transferência $G(s)$.



Para $K=2$ o diagrama de Nyquist da função $K \cdot G(s)$ é mostrado a seguir.



Descreva como aplicar o critério de Nyquist para determinar a estabilidade do sistema em malha fechada e determine se o sistema dado em malha fechada é estável. **(Valor: 1,0)**

Mas

$$x(t) = |G(j\omega)| \cdot P \sin(\omega t + \phi)$$

onde

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \qquad (0.5)$$

e

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{b\omega}{(k-m\omega^2)}\right) \quad (0.5)$$

$$\therefore \boxed{x(t) = \frac{P}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{b\omega}{(k-m\omega^2)}\right)\right)}$$

ou, considerando $k/m = \omega_n^2$ e $b/k = 2\zeta/\omega_n$,

resulta

$$x(t) = \frac{P/k}{\sqrt{[(1-(\omega^2/\omega_n^2)]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \cdot \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)\right)$$

[Pa]ra aplicar o critério de Nyquist devemos [con]tar o número de envolvimentos (N) de $KG(j\omega)$ [e]m torno do ponto $-1+j0$ e verificar o número (P) de polos de malha aberta no SPD. Para que o sistema seja estável devemos ter $N = -P$.

Da função $KG(s) = \frac{K(s-2)}{(s+3)(s+1)}$ verificamos que $P = 0$. Do diagrama de Nyquist da função $KG(s)$ verificamos que $N = 1$.

Logo, como $N \neq -P$ o sistema é instável.

Questão: **(Valor 4,5)**

Considere o sistema com a seguinte Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+5)}$$

Deseja-se projetar um compensador por atraso de fase (Figura 1) de forma que o erro estacionário para rampa unitária seja de 0.05 s e a margem de fase seja de, no mínimo, 30°.

Figura 1 – Compensador por atraso de fase

Determine:

a) O valor de K_C. **(Valor: 0,5)**

b) O diagrama de Bode do sistema não compensado considerando o valor de K_C do item anterior é apresentado na figura seguinte. Indique claramente as margens de fase e de ganho e estime (medindo a partir da figura) seus valores com os respectivos sinais. **(Valor: 0,5)**

5.2 cm – 140 dB

0.3 – MG

$\boxed{MG \cong -8\,dB}$

at

5.2 cm – 140 dB

0.65 cm – at

$\boxed{at \cong 17,5\,dB}$

(0.75

4.5 cm – 180°

0.55 – MF

(0.75

$\boxed{MF \cong -22°}$

(≈ 6 rad/s)

d)

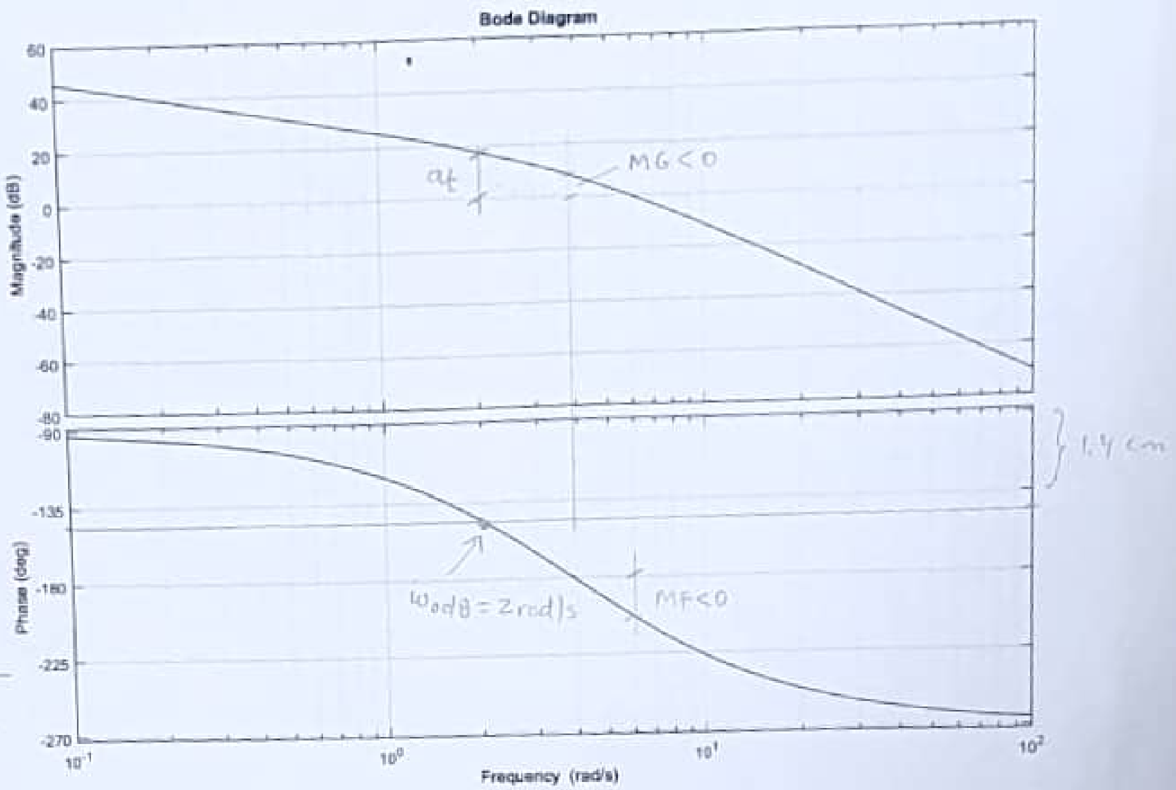
ω_{0dB}

4.5 cm – 180°

$\frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2}}$ x_{0dB} – 55°

ω 4.5 · x = 1.375 cm   90+55 = 145°

x = $\boxed{\omega_{0dB} = 2\,rad/s}$



c) Projete o compensador proposto indicando e justificando claramente os valores calculados. Considere como margem de segurança para o projeto um valor de fase adicional de 5° e escolha a frequência de canto do zero do compensador uma década abaixo da frequência prevista de 0 dB. **(Valor: 2,5)**

d) Considere agora $K_c = 10$ e $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$. Calcule a frequência para a qual o módulo do sistema $K_cG(s)$ vale -20.~~2~~ dB. **(Valor: 1,0)**

Solução:

a) $e_\infty = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{sK_cG_c(s)G(s)}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{s\,K_c\frac{sT+1}{\beta sT+1}\frac{1}{s(s+3)(s+5)}}\right] = \frac{1}{K_c/15} \leq 0.05$

$\frac{K_c}{15} \geq 20 \Rightarrow \boxed{K_c \geq 300}$ (0.5)

b) (vide figura) (0.5)

c) Determinação da freq. de 0 dB: da figura

$-180° + MF_{des} + M_s = -180° + 30 + 5 = -145° \Rightarrow \boxed{\omega_{0dB} = 2\,rad/s}$ (0.5)

Atenuação associada à ω_{0dB} (vide figura):

$a_t = 17,5\,dB$ (vide tabela na prova)

$20\log\beta = 17,5 \Rightarrow \boxed{\beta \cong 7,5}$ (0.5)

Escolhendo o zero do compensador uma década à esquerda de $\omega_{0dB} = 2\,rad/s$, teremos:

(0.75) $\boxed{\omega_z = \frac{1}{T} = 0.2\,s^{-1}} \Rightarrow \boxed{T = 5\,s}$

Obs: $\boxed{MF_{final} = 28,7°\ (2,04\,rad/s)}$

(0.75) $\boxed{\omega_p = \frac{1}{\beta T} = 0.0266\,s^{-1}} \Rightarrow \boxed{\beta T = 37,59\,s}$

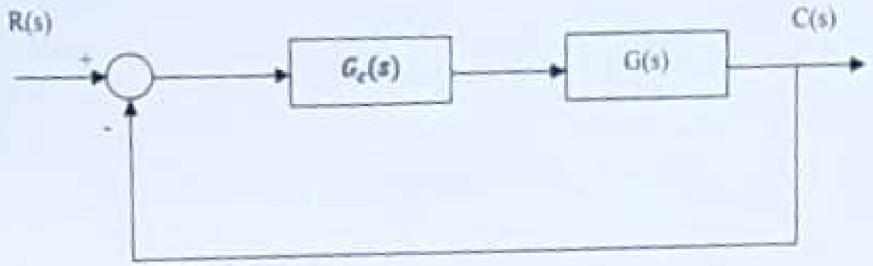
d) $20\log|K_cG_c(s)| = -20.2 \Rightarrow |K_cG_c(s)| = 0.097723 = \frac{10}{|s(s+2)|}$

$\frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2+4}} = 0.097723$ 0.1 $\Rightarrow \omega\sqrt{(\omega^2+4)} = 102.33$ 100 $\Rightarrow \omega^2(\omega^2+4) = 10471,4289$ 10 000

$\omega^4 + 4\omega^2 - 10471,4289 = 0$ 10.000. Fazendo $\omega^2 = \alpha$, teremos: $\alpha^2 + 4\alpha - 10471,4289 = 0$ 10.000

$\alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 41835,7156}}{2}$ 40000 $<$ $100,33$ 98.0199 ; $-~~104,33~~$ -102.0199 $\Rightarrow \omega^2 = 100,33$ 98,0199 $\Rightarrow \boxed{\omega \cong 10.01\,rad/s}$ 9,9 (1.0) questão: **(Valor 3,5)** (Castrucci, Bittar e Mauro Sales, 2ª ed. 2018, pág. 202)

Considere o seguinte sistema



onde $G_c(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{s}$ e $G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+8)}$.

Determine os valores das constantes K, a e b do controlador PID da figura acima, de modo que o sistema em malha fechada tenha um sobressinal $M_p = 0{,}25383$ e um tempo de acomodação $t_s(2\%) = 1s$ quando é aplicado um degrau unitário na referência.

(vide tabela na prova)

Solução:

$$M_p = 0{,}25383 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \overset{-1.3863}{-1.371} \Rightarrow \frac{\pi^2\zeta^2}{1-\zeta^2} = \overset{1.9218}{1.8799}$$

$$9.8696\zeta^2 + \overset{1.9218\zeta^2}{1.8799\zeta^2} = \overset{1.9218}{1.8799} \Rightarrow \overset{11.7914}{11.7495}\zeta^2 = \overset{1.9218}{1.8799} \Rightarrow \zeta^2 = \overset{0.1625}{0{,}16} \Rightarrow \boxed{\zeta = \overset{\sim 0.4}{0.4}} \quad (0.5)$$

Por outro lado,

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1 \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta} = \frac{4}{0.4} = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 10 \text{ rad/s}} \quad (0.5)$$

Admitindo então uma FTMF do tipo

$$G_{MF}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{100}{s^2+8s+100}$$

Assim, se tivermos uma FTMA do tipo $G_{MA}(s) = \frac{100}{s(s+8)}$ então

$$G_{MF}(s) = \frac{100}{s^2+8s+100}.$$ Logo, devemos impor

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{s} \cdot \frac{1}{(s+1)^2(s+8)} = \frac{100}{s(s+8)} \quad (0.5) \; (1.0)$$

Para tanto, basta escolher $(s+a)(s+b) = (s+1)^2$ e $K = 100$. Assim, resulta

$$s^2 + (a+b)s + ab = s^2 + 2s + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = b = 1} \qquad \Rightarrow \begin{cases} K = 100 & (0.5) \\ a = 1 & (0.5) \\ b = 1 & (0.5) \end{cases}$$