

## 7. Resposta em Frequência

### 7.1 Introdução

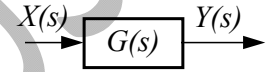
A designação **resposta em frequência** está associada a sistemas lineares invariantes no tempo excitados por entradas senoidais e considerando suas saídas em regime permanente. A importância do estudo da resposta em frequência reside no fato de que sinais periódicos ou não podem ser decompostos em senóides (análise de Fourier).

Os métodos de projeto baseados na resposta em frequência são, talvez, os mais utilizados em ambientes industriais. A razão principal para a popularidade desses métodos é que eles permitem realizar projetos de boa qualidade na presença de incertezas no modelo da planta.

Além disso, outro fator que contribui para a popularidade desses métodos é que, em geral, o levantamento experimental de características de resposta em frequência é uma tarefa fácil. Medidas de amplitudes e fases da saída de uma planta sujeita a entradas senoidais são suficientes para se projetar um controlador.

### 7.2 Conceituação de Resposta em Frequência

Consideremos um S.L.I.T. com Função de Transferência  $G(s)$ . Suponhamos que o sistema seja estável<sup>1</sup> e que  $X(s)$  e  $Y(s)$  representem as transformadas dos sinais de entrada e saída, respectivamente.



Admitamos que  $G(s)$  seja expressa na forma:

$$G(s) = \frac{P(s)}{(s + p_1) \cdot (s + p_2) \cdot \dots \cdot (s + p_n)}$$

onde  $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$  são os polos do sistema, supostos distintos por simplicidade.

Consideremos como entrada um **sinal senoidal** de amplitude  $A$  e frequência  $\omega$ .

$$x(t) = A \sin(\omega t),$$

cuja transformada de Laplace é

$$X(s) = A \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Como o sistema é estável, sua resposta estacionária **não** depende das condições iniciais e, por isso, podemos supô-las nulas.

Nessas condições, podemos decompor  $Y(s)$  em frações parciais e obter:

$$Y(s) = \frac{a}{s + j\omega} + \frac{a^*}{s - j\omega} + \frac{b_1}{s + p_1} + \frac{b_2}{s + p_2} + \dots + \frac{b_n}{s + p_n}$$

onde  $a$  e  $a^*$  são complexos conjugados dados por:

$$a = A \cdot \frac{G(-j\omega)}{-2j} \quad \text{e} \quad a^* = A \cdot \frac{G(j\omega)}{2j}$$

Em virtude da estabilidade do sistema, os termos do tipo

$$\frac{b_i}{s + p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

correspondem a funções do tempo que tendem a zero quando este se torna suficientemente grande. Sendo assim, a resposta estacionária  $y_\infty(t)$  corresponde apenas aos dois primeiros termos da expansão:

<sup>1</sup> Se o sistema é instável, pode-se considerar que a resposta em frequência se refere apenas à parcela forçada da resposta do sistema a uma entrada senoidal.

$$Y_{\infty}(s) = A \cdot \left[ \frac{G(-j\omega)}{-2j} \cdot \frac{1}{s+j\omega} + \frac{G(j\omega)}{2j} \cdot \frac{1}{s-j\omega} \right]$$

Antitransformando, vem:

$$y_{\infty}(t) = A \cdot \left[ \frac{G(-j\omega)}{-2j} \cdot e^{-j\omega t} + \frac{G(j\omega)}{2j} \cdot e^{j\omega t} \right]$$

Como  $G(s)$  é uma função racional,

$$G(-j\omega) = G^*(j\omega)$$

e, portanto, se denotarmos por  $|G(j\omega)|$  e  $\Phi(\omega)$ , respectivamente o módulo e a fase de  $G(j\omega)$ , resulta que:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\Phi(\omega)} \quad \text{e} \quad G(-j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{-j\Phi(\omega)}$$

Portanto:

$$y_{\infty}(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin(\omega t + \Phi(\omega))$$

Este resultado mostra que:

- um S.L.I.T. estável, sujeito a uma entrada senoidal apresenta, em regime permanente, uma saída também senoidal e de mesma frequência que a entrada;
- a relação entre as amplitudes da saída e da entrada (ganho) é dada por  $|G(j\omega)|$ ;
- a diferença entre as fases da saída e da entrada (defasagem) é dada por  $\Phi(\omega) = \angle G(j\omega)$ ;

Portanto, o número complexo  $G(j\omega)$  caracteriza precisamente a saída estacionária do sistema. Em resumo, dado  $G(s)$ , para determinarmos ganho e defasagem do sistema numa dada frequência  $\omega$ , basta substituímos  $s = j\omega$  na expressão de  $G(s)$  e obtermos o módulo e a fase do número complexo resultante.

O ganho e a defasagem em função da frequência definem o que se denomina **resposta em frequência** do sistema.

**Exemplo:** Seja o sistema cuja Função de Transferência é:

$$G(s) = \frac{K_0}{T \cdot s + 1} \quad (K_0, T > 0)$$

Fazendo  $s = j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{K_0}{j\omega T + 1}$$

e, portanto, na frequência  $\omega$  o ganho e a defasagem são dados por:

$$|G(j\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad \text{e} \quad \Phi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctan(\omega T)$$

Desses resultados, nota-se que, para frequências suficientemente pequenas, tem-se:

$$\omega \ll \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)| \cong K_0 \quad \text{e} \quad \Phi(\omega) \cong 0$$

Assim,  $K_0$  é o valor do ganho do sistema em baixas frequências e a saída se apresenta praticamente em fase com a entrada.

Por outro lado, para frequências suficientemente elevadas:

$$\omega \gg \frac{1}{T} \Rightarrow |G(j\omega)| \cong \frac{K_0}{\omega T} \text{ e } \Phi(\omega) \cong -90^\circ$$

### 7.3 Relação com a Configuração de Polos e Zeros

A resposta em frequência de um sistema pode ser obtida graficamente a partir de seu diagrama de polos e zeros.

Vejamos, através de um exemplo simples, como proceder. Seja o sistema com Função de Transferência:

$$G(s) = \frac{k \cdot (s + z)}{s \cdot (s + p)}$$

A resposta em frequência deste sistema pode ser obtida de:

$$G(j\omega) = \frac{k \cdot (j\omega + z)}{j\omega \cdot (j\omega + p)}$$

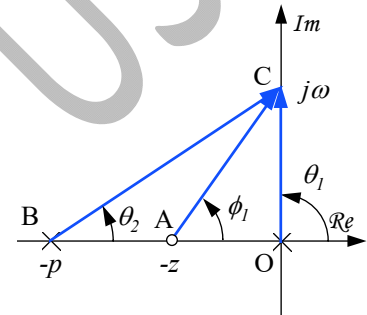
Se localizarmos no plano complexo os polos e o zero do sistema e, em seguida, representarmos os números complexos  $j\omega + z$ ,  $j\omega$  e  $j\omega + p$  teremos a situação indicada na figura ao lado.

Com isso, resulta:

$$|G(j\omega)| = \frac{k \cdot |j\omega + z|}{|j\omega| \cdot |j\omega + p|} = \frac{k \cdot \overline{AC}}{\overline{OC} \cdot \overline{BC}}$$

e

$$\angle G(j\omega) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

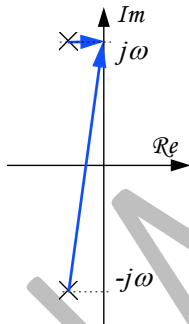


Este tipo de interpretação gráfica permite concluir de imediato que a presença de um par de **polos** complexos conjugados pouco amortecidos (isto é, próximos ao eixo imaginário) dão origem a um **pico** pronunciado no ganho do sistema para frequências próximas da frequência natural amortecida ( $\omega_d$ ) associada ao par de polos.

À ocorrência desse pico denomina-se **ressonância**.

Assim, em correspondência a um par de polos pouco amortecidos tem-se, como havíamos visto anteriormente, uma resposta transitória altamente oscilatória e uma resposta em frequência com ganho elevado numa determinada região de frequências.

De maneira análoga, a presença de **zeros** próximos ao eixo imaginário denota a ocorrência de uma grande **atenuação** para entradas senoidais com frequências próximas às dos zeros. No caso em que há zeros situados sobre o eixo imaginário, senóides de entrada nessa frequência são completamente absorvidas pelo sistema (daí a designação "zeros").



### 7.4 Gráficos de Resposta em Frequência

Existem pelo menos duas maneiras comuns de se representar a resposta em frequência de sistemas, a saber, através de gráficos em escala logarítmica (Diagramas de Bode e Diagramas de Nichols) e através de gráficos polares (Diagramas de Nyquist).

### Diagramas de Bode

Os Diagramas de Bode são gráficos de ganho e defasagem em função da frequência, esta marcada em escala logarítmica. Uma das vantagens de se utilizar a escala logarítmica é que assim é possível representar frequências de ordens de grandeza muito diversas.

O ganho, frequentemente, é representado como  $20 \cdot \log_{10} |G(j\omega)|$ . Esta unidade é denominada decibel (dB).

Além de permitir, em muitos casos, o traçado de esboços das curvas de resposta em frequência de maneira simples e imediata (através de aproximações assintóticas), os gráficos logarítmicos têm a vantagem adicional de transformar produtos e divisões em somas e subtrações, respectivamente.

Os termos que ocorrem com maior frequência na análise da resposta em frequência serão vistos a seguir.

Consideremos inicialmente sistemas que tenham apenas polos e zeros reais. Seja, pois,  $G(s)$  da forma:

$$G(s) = \frac{k \cdot (s + z_1) \cdot (s + z_2) \dots (s + z_m)}{s^N \cdot (s + p_1) \cdot (s + p_2) \dots (s + p_p)}$$

É conveniente reescrever  $G(s)$  como:

$$G(s) = \frac{K_0 \cdot (\tau_1 s + 1) \cdot (\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{s^N \cdot (T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \dots (T_p s + 1)} \quad \text{(Forma de constantes de tempo)}$$

onde:

$$K_0 = \frac{k \cdot z_1 \cdot z_2 \dots z_m}{p_1 \cdot p_2 \dots p_p}$$

$$\tau_i = \frac{1}{z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$T_i = \frac{1}{p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

Fazendo  $s = j\omega$  e tomando o ganho em dB, temos:

$$20 \cdot \log |G(j\omega)| = 20 \cdot \log |K_0| + \sum_{i=1}^m 20 \cdot \log |1 + j\omega\tau_i| - N \cdot 20 \cdot \log |j\omega| - \sum_{i=1}^p 20 \cdot \log |1 + j\omega T_i|$$

enquanto que a defasagem fica:

$$\angle G(j\omega) = \angle K_0 + \sum_{i=1}^m \angle [1 + j\omega\tau_i] - N \cdot 90^\circ - \sum_{i=1}^p \angle [1 + j\omega T_i]$$

As expressões acima indicam claramente a existência de três tipos de termos:

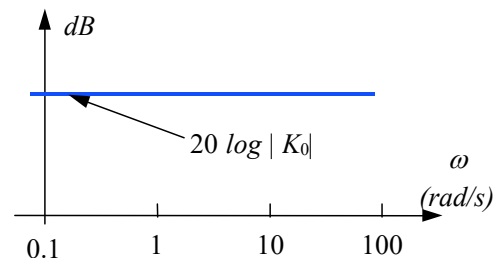
- associados ao ganho  $K_0$ ;
- associados a polos e zeros na origem;
- associados a polos e zeros reais fora da origem.

### Ganho $K_0$

A contribuição de  $K_0$  para o gráfico de Bode de ganho é uma reta horizontal correspondente a  $20 \cdot \log |K_0|$ .

Em geral,  $K_0 > 0$  e, portanto, neste caso  $\angle K_0 = 0^\circ$ .

Dessa maneira, o efeito do ganho  $K_0$  sobre os Diagramas de Bode se resume em deslocar o gráfico de ganho e manter inalterado o de defasagem.



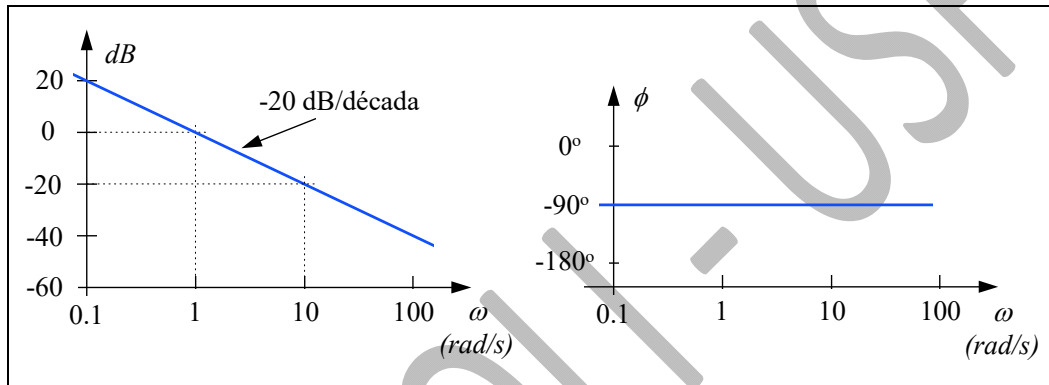
### Termos associados a polos e zeros na origem

Polos simples na origem correspondem a parcelas de ganho do tipo  $-20 \cdot \log|j\omega|$ . No gráfico de Bode, este termo representa uma contribuição na forma de uma reta com declividade  $-20 \text{ dB/década}$  (uma **década** é um par de frequências tais que a razão entre a maior e a menor é igual a 10). Para perceber isto, basta considerar duas frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  separadas por uma década ( $\omega_2 = 10 \cdot \omega_1$ ) e notar que:

$$-20 \cdot \log(\omega_2) = -20 \cdot \log(10\omega_1) = -20 - 20 \cdot \log(\omega_1)$$

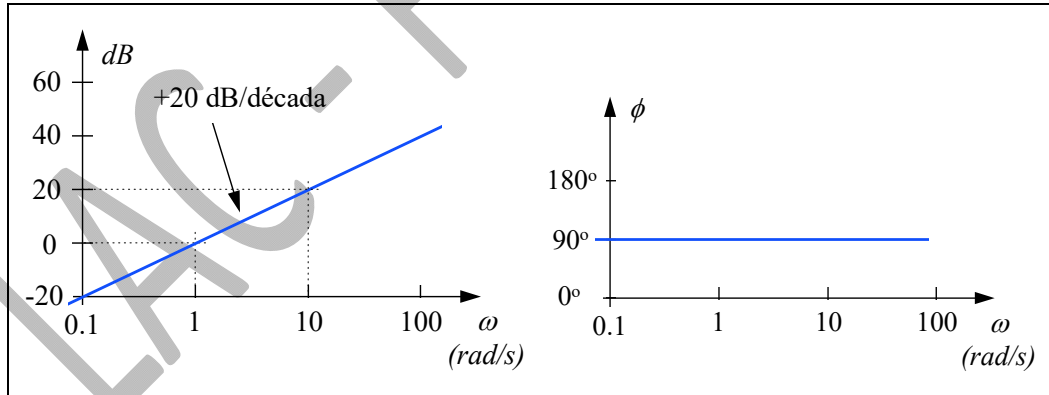
Essa reta passa por  $0 \text{ dB}$  quando  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

A contribuição para a defasagem é de  $-90^\circ$ , independentemente da frequência.



Zeros simples na origem correspondem a parcelas de ganho do tipo  $+20 \cdot \log|j\omega|$ , ou seja, retas com inclinação de  $+20 \text{ dB/década}$  e passando por  $0 \text{ dB}$  quando  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

Sua contribuição para a defasagem é de  $+90^\circ$ , qualquer que seja a frequência.



Quando os polos (zeros) na origem têm multiplicidade  $N$ , o gráfico de ganho apresenta declividade  $-20N \text{ dB/década}$  ( $+20N \text{ dB/década}$ ), enquanto o gráfico de defasagem se desloca para  $-N \cdot 90^\circ$  ( $+N \cdot 90^\circ$ ).

### Termos associados a polos e zeros reais fora da origem

Consideremos inicialmente o caso de polos reais simples fora da origem. A contribuição para o ganho é do tipo  $-20 \cdot \log|1 + j\omega T|$ .

Em baixas frequências, tem-se:

$$\omega T \ll 1 \quad \Rightarrow \quad -20 \cdot \log|1 + j\omega T| \cong -20 \cdot \log|1| = 0 \text{ dB}$$

Em altas frequências:

$$\omega T \gg 1 \Rightarrow -20 \cdot \log|1 + j\omega T| \cong -20 \cdot \log|j\omega T|$$

No gráfico de Bode, este termo representa uma contribuição na forma de uma reta com declividade  $-20 \text{ dB/década}$ .

Por fim, deve-se observar que, para  $\omega = \frac{1}{T}$  (frequência de canto), tem-se para a **assíntota**:

$$\omega T = 1 \Rightarrow -20 \cdot \log|j\omega T| = 0 \text{ dB}$$

Essas duas retas definem aproximações assintóticas para o Gráfico de Bode de  $-20 \cdot \log|1 + j\omega T|$ , válidas a partir de frequências uma década acima ou abaixo da frequência de canto.

O valor **exato** do ganho na frequência de canto é:

$$\omega T = 1 \Rightarrow -20 \cdot \log|1 + j\omega T| = -20 \cdot \log\sqrt{2} \cong -3 \text{ dB}$$

Quanto à defasagem associada a um polo real simples fora da origem, note que:

$$-\angle 1 + j\omega T = -\arctan(\omega T)$$

Para frequências baixas, adotamos a aproximação:

$$\omega T \ll 1 \Rightarrow -\arctan(\omega T) \cong 0^\circ$$

e, para altas frequências:

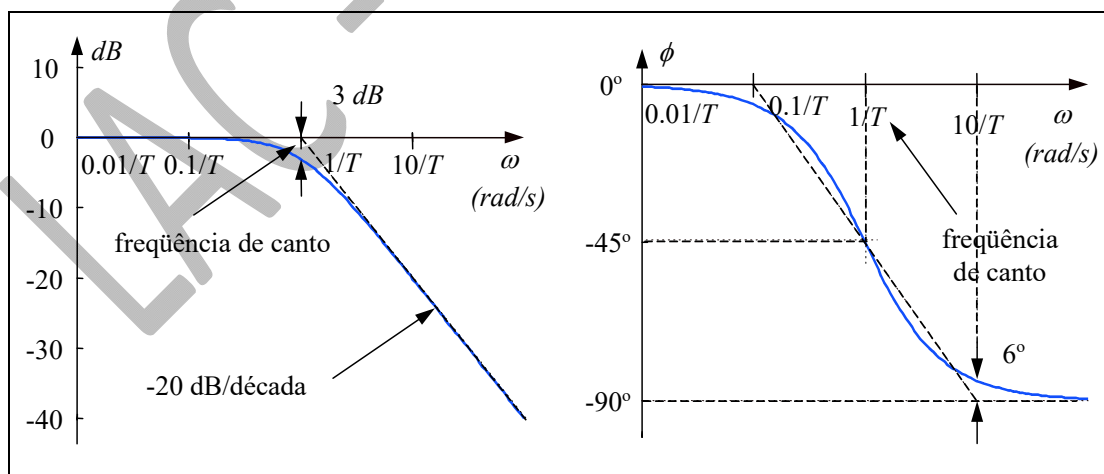
$$\omega T \gg 1 \Rightarrow -\arctan(\omega T) \cong -90^\circ$$

Na frequência de canto:

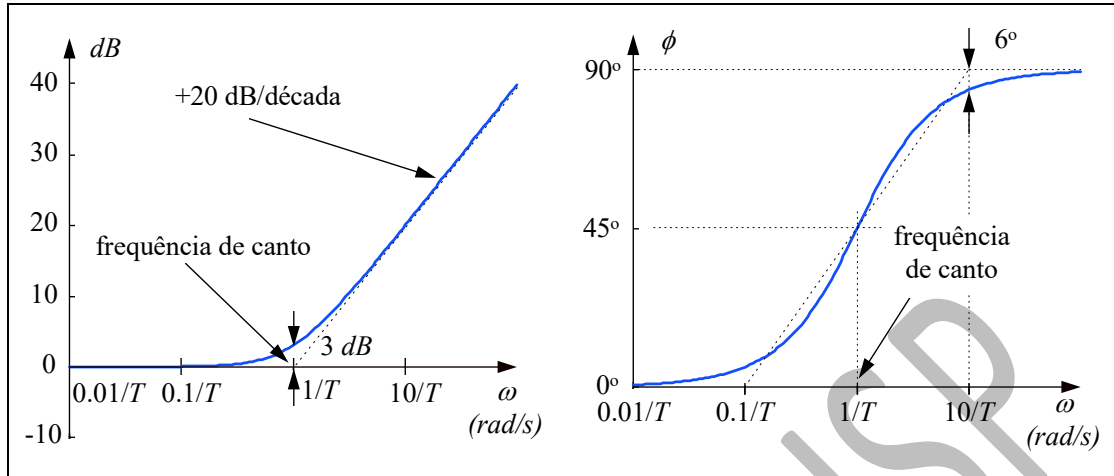
$$\omega T = 1 \Rightarrow -\arctan(\omega T) \cong -45^\circ$$

O erro cometido nas frequências em que  $\omega T = 0,1$  e  $\omega T = 10$  é da ordem de  $0,1 \text{ rad}$  ( $6^\circ$ ).

Com isso traçamos as aproximações assintóticas das curvas de ganho e defasagem através de trechos de reta, conforme mostra a figura abaixo.



A análise anterior conduz de imediato às aproximações referentes a **zeros** reais fora da origem, conforme os gráficos abaixo.



Para o caso de polos (zeros) de multiplicidade  $N$ , a frequência de canto continua sendo  $\omega = 1/T$ . As assíntotas do gráfico são, para baixas frequências, a reta  $0 \text{ dB}$  e, para altas frequências, a reta que passa pelo ponto  $(1/T, 0 \text{ dB})$  e tem declividade  $-20N \text{ dB/década}$  ( $+20N \text{ dB/década}$ ).

A defasagem é dada por  $N$  vezes aquela associada a um polo (zero) simples.

### Termos associados a polos e zeros complexos conjugados

Além dos casos vistos até aqui, correspondentes a polos e zeros reais, é necessário considerar fatores associados a polos e zeros complexos conjugados.

Analisemos inicialmente fatores da Função de Transferência do tipo:

$$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

e, portanto, correspondentes a um par de polos complexos conjugados. Essa forma particular de fatores de segunda ordem tem, como se verá adiante, ganho unitário em baixas frequências.

Podemos reescrevê-la como:

$$\frac{1}{1 + 2\xi \cdot \left(\frac{s}{\omega_n}\right) + \left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2}, \quad 0 < \xi < 1$$

Substituindo  $s$  por  $j\omega$  e considerando o ganho em  $\text{dB}$ , temos:

$$20 \cdot \log \left| \frac{1}{1 + 2\xi \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \cdot \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right| \quad 0 < \xi < 1$$

As assíntotas do Diagrama de Bode de ganho podem, então, ser determinadas.

Em primeiro lugar, consideremos a região de baixas frequências, onde:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow -20 \cdot \log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right| \cong -20 \cdot \log(1) = 0 \text{ dB}$$

Por outro lado, na região de altas frequências, tem-se:

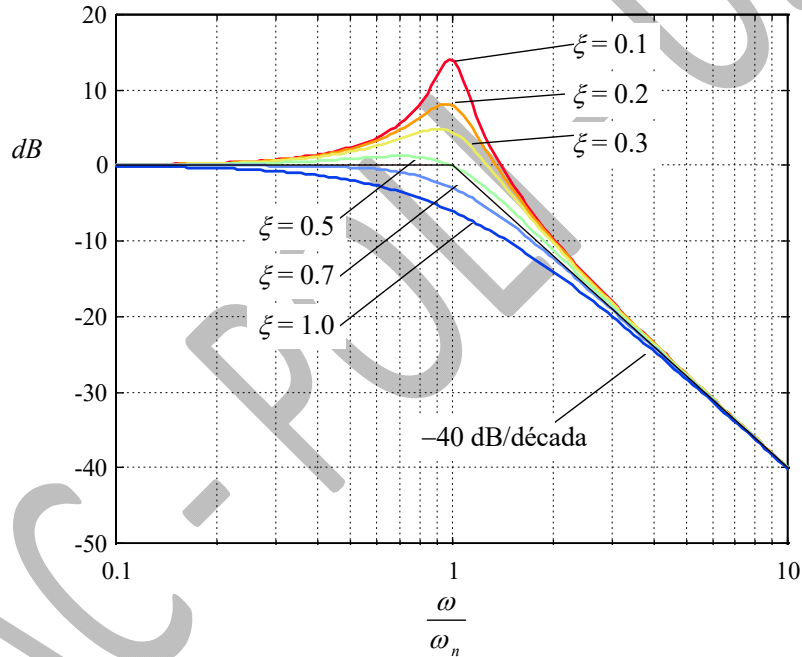
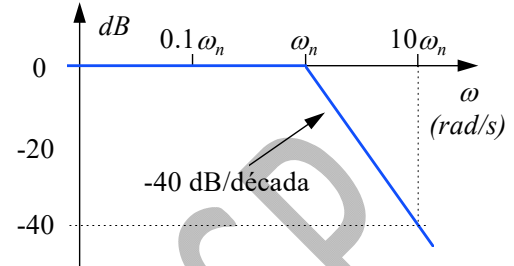
$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow -20 \cdot \log \left| -\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right| \cong -20 \cdot \log \left[ \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right] = -40 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

Note que esta assíntota tem declividade  $-40 \text{ dB/década}$  e intersecta o eixo de  $0 \text{ dB}$  em  $\omega = \omega_n$ . Esta é a frequência de canto para o fator de segunda ordem.

As duas assíntotas obtidas estão representadas na figura ao lado.

Nota-se que elas são independentes do coeficiente de amortecimento  $\xi$ .

No entanto, obviamente o Diagrama de Bode de ganho depende de  $\xi$ . Se desenharmos os gráficos com exatidão, perceberemos que os mesmos apresentam um pico de ressonância nas vizinhanças de  $\omega = \omega_n$  e que a magnitude deste pico depende de  $\xi$ , sendo tanto maior quanto menor for  $\xi$  (veja a figura abaixo).



A frequência de ressonância  $\omega_r$  pode ser obtida determinando-se o ponto de máximo da função de  $\omega$

$$\left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \right|$$

Resulta então:

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \left( 0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

sendo que, para  $\sqrt{2}/2 < \xi < 1$  não há ressonância. O valor do ganho  $M_r$  na frequência de ressonância pode ser obtido substituindo-se  $\omega_r$  na expressão do ganho:



$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \left(0 \leq \xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Note que, quando  $\xi \rightarrow 0$ ,  $M_r \rightarrow \infty$  e  $\omega_r \rightarrow \omega_n$ .

Examinemos agora a defasagem. Temos:

$$\Phi = \left[ \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)} \right] = - \left[ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j \cdot 2\xi \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \right], \quad 0 < \xi < 1$$

e, portanto, em baixas frequências, temos:

$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow \Phi \cong \underline{1} = 0^\circ$$

enquanto, em altas frequências:

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow \Phi \cong - \left[ - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 \right] = -180^\circ$$

e, na frequência de canto:

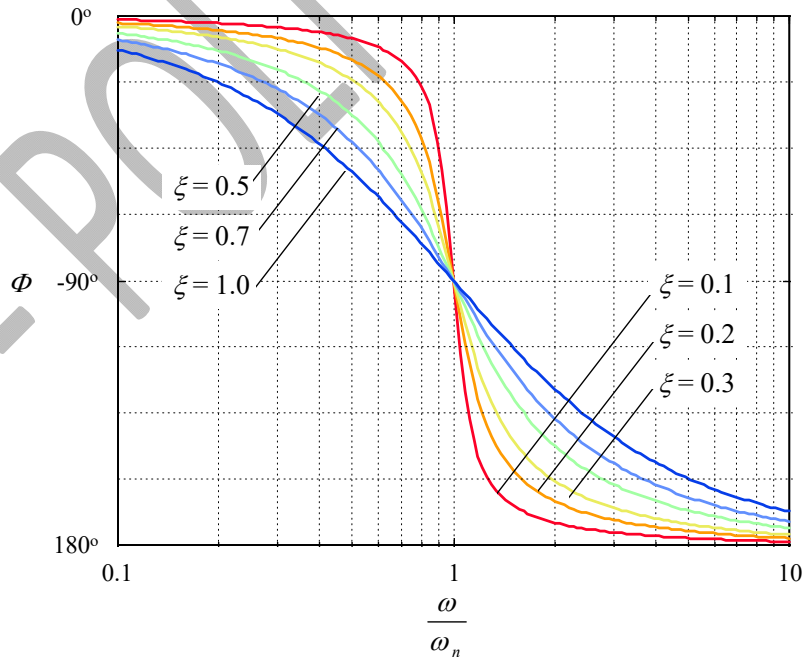
$$\omega = \omega_n \Rightarrow \Phi = - \left[ j \cdot 2\xi \right] = -90^\circ$$

Da mesma forma que o ganho, também a defasagem depende de  $\xi$ . As curvas de defasagem em função da frequência normalizada  $\omega/\omega_n$ , parametrizadas em  $\xi$ , são mostradas na figura ao lado.

Para concluir este tópico, deve-se observar que, para fatores do tipo:

$$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

(com  $0 < \xi < 1$ ), correspondentes a zeros complexos conjugados, as curvas de ganho e defasagem podem ser obtidas de imediato, invertendo o sinal daquelas associadas a polos complexos conjugados.



### Procedimento para Construção dos Diagramas de Bode

Uma das principais vantagens de se trabalhar com gráficos em escala logarítmica é que a multiplicação dos módulos é transformada em adição. Além disso, dispõe-se também de um método simples para esboçar de forma aproximada o Diagrama de Bode do ganho utilizando-se as assíntotas.

O procedimento para construir os Diagramas de Bode é o seguinte:

- Escrever  $G(j\omega)$  na forma de um produto de fatores dos tipos apresentados anteriormente;
- Identificar as frequências de canto associadas a cada um dos fatores;

- Desenhar as aproximações assintóticas das curvas de ganho em  $dB$  para cada um dos fatores;
- Obter a soma das assintotas do passo anterior;
- Havendo fatores de segunda ordem, esboçar as curvas de ganho nas vizinhanças de  $\omega_n$ ;
- Desenhar as curvas de defasagem para cada um dos fatores;
- Obter a soma das curvas do passo anterior.

As aproximações assintóticas dos Diagramas de Bode têm duas características importantes, a saber, a facilidade de **construção** e a simplicidade com que se pode **modificá-las**.

**Exemplo:** esboçar os Diagramas de Bode do sistema cuja Função de Transferência é:

$$G(s) = \frac{100 \cdot (s + 10)}{s^2 + 100s}$$

Em primeiro lugar, reescrevemos  $G(s)$  na forma de constantes de tempo como:

$$G(s) = \frac{10 \cdot (0.1s + 1)}{s \cdot (0.01s + 1)}$$

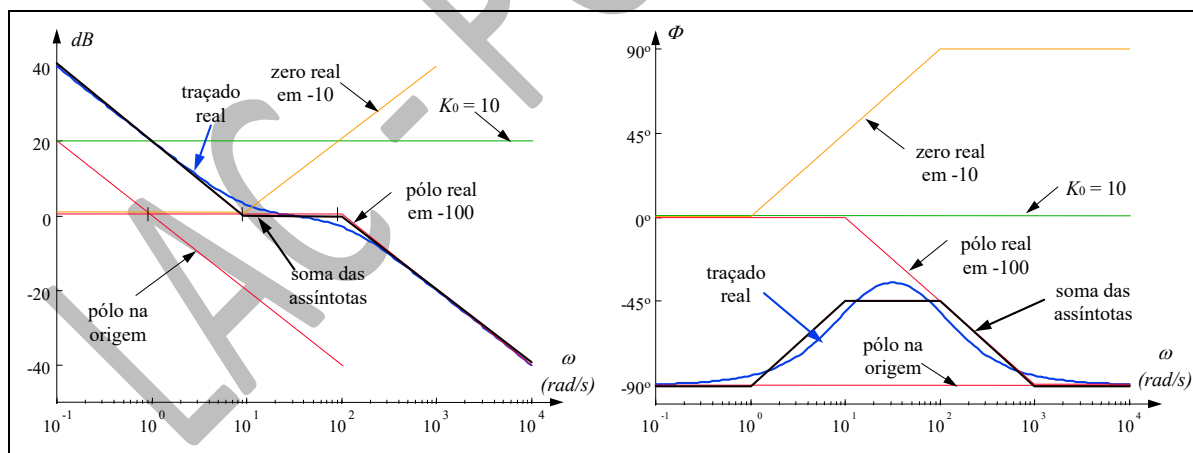
Substituindo  $s$  por  $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{10 \cdot (j \cdot 0.1\omega + 1)}{j\omega \cdot (j \cdot 0.01\omega + 1)}$$

Observamos que, neste caso, há quatro tipo de termos:

- ganho  $K_0 = 10$ ;
- um polo na origem;
- um polo real em  $-100$ ;
- um zero real em  $-10$ .

Os Diagramas de Bode de ganho e defasagem são os seguintes:



### Determinação do Tipo do Sistema e do Ganho $K_0$ com Base nos Diagramas de Bode

Uma simples inspeção do Diagrama de Bode de ganho em baixas frequências permite determinar o tipo do sistema e o ganho  $K_0$ .

A tabela ao lado mostra a correspondência entre a declividade em baixas frequências desse gráfico e o tipo do sistema. Mostra-se a seguir não apenas que essa correspondência é verdadeira, mas também que é simples determinar o ganho  $K_0$  da função de transferência em baixas frequências.

Declividade (dB/dec)	Tipo
0	0
-20	1
-40	2
$\vdots$	$\vdots$

#### • Sistemas Tipo 0

Por simplicidade, consideremos um sistema do Tipo 0 com função de transferência da forma<sup>2</sup>

$$G(s) = K_0 \frac{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1) \cdots (s\tau_m + 1)}{(sT_1 + 1)(sT_2 + 1) \cdots (sT_n + 1)}, \quad (K_0 > 0)$$

cuja resposta em frequência é

$$G(j\omega) = K_0 \frac{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots (j\omega\tau_m + 1)}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots (j\omega T_n + 1)}.$$

Se considerarmos frequências  $\omega$  suficientemente baixas, isto é, tais que

$$\omega \ll \frac{1}{\tau_i} \quad (1 \leq i \leq m)$$

e

$$\omega \ll \frac{1}{T_i} \quad (1 \leq i \leq n),$$

e se denotarmos por  $\tilde{G}(s)$  a aproximação de  $G(s)$  em baixas frequências, então podemos escrever de forma aproximada que

$$\tilde{G}(j\omega) = K_0,$$

pois todos os fatores do numerador e do denominador são aproximadamente iguais a 1. É imediato, portanto, que

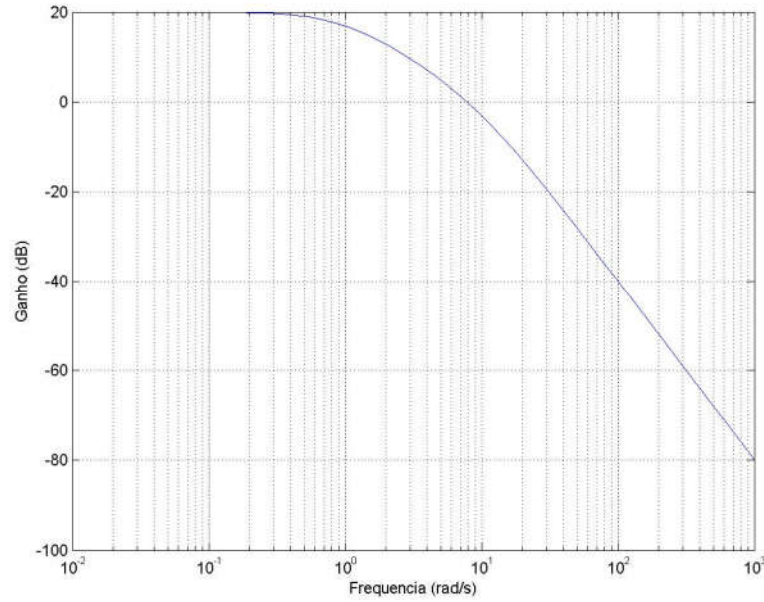
$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j\omega)| \cong 20 \log_{10} K_0,$$

o que significa que:

- i) o diagrama de Bode de  $\tilde{G}(j\omega)$  tende a uma reta horizontal para frequências suficientemente baixas e
- ii) o valor do ganho em baixas frequências  $K_0$  pode ser obtido diretamente do gráfico em baixas frequências.

Como exemplo, consideremos o gráfico de ganho a seguir.

<sup>2</sup> Poderíamos considerar formas mais gerais como, por exemplo, aquelas contendo polos e/ou zeros complexos. No entanto, isso só tornaria a expressão mais complicada e não mudaria as conclusões que serão obtidas utilizando esta forma mais simples.



Observando-se o diagrama, nota-se que a declividade do gráfico em baixas frequências é nula. Portanto, trata-se de um sistema do Tipo 0. Além disso, nota-se que, em baixas frequências,

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| \cong 20 \log_{10} |\tilde{G}(j\omega)| = 20 \text{ dB},$$

e, portanto,

$$K_0 = 10.$$

#### • Sistemas Tipo 1

Consideremos agora um sistema do Tipo 1 com função de transferência da forma

$$G(s) = K_0 \frac{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1) \cdots (s\tau_m + 1)}{s(sT_1 + 1)(sT_2 + 1) \cdots (sT_n + 1)},$$

cujas resposta em frequência é

$$G(j\omega) = K_0 \frac{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots (j\omega\tau_m + 1)}{j\omega(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots (j\omega T_n + 1)}.$$

Se considerarmos frequências  $\omega$  suficientemente baixas, então podemos escrever de forma aproximada que

$$\tilde{G}(j\omega) \cong \frac{K_0}{j\omega},$$

pois todos os outros fatores do numerador e do denominador são aproximadamente iguais a 1. É imediato, portanto, que

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| \cong 20 \log_{10} |\tilde{G}(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{K_0}{\omega} \right| = 20 \log_{10} K_0 - 20 \log_{10} \omega,$$

o que significa que:

i) para frequências suficientemente baixas o diagrama de Bode de  $\tilde{G}(j\omega)$  tende a uma reta com declividade de  $-20\text{dB/dec}$  e

ii) o valor do ganho em baixas frequências  $K_0$  pode ser obtido diretamente **da reta que aproxima o gráfico** em baixas frequências de duas maneiras:

ii.a) ou como consequência do fato de que para

$$\omega = 1,$$

tem-se

$$\log_{10} \omega = 0$$

e, portanto,

$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j1)| = 20 \log_{10} K_0,$$

ou seja,

$$|\tilde{G}(j1)| = K_0;$$

ii.b) ou então considerando a frequência  $\bar{\omega}$  na qual

$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j\bar{\omega})| = 0 \text{ dB}$$

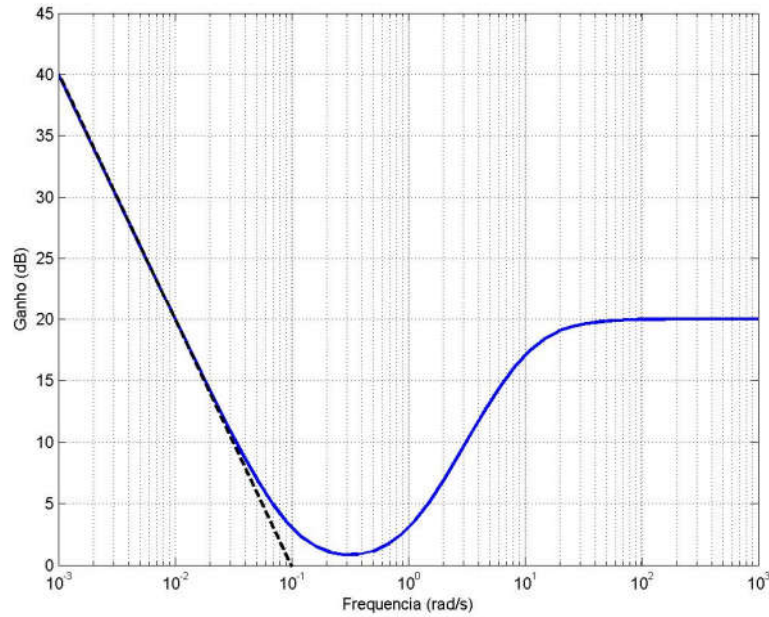
e, portanto,

$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j\bar{\omega})| = 20 \log_{10} K_0 - 20 \log_{10} \bar{\omega} = 0,$$

ou seja,

$$K_0 = \bar{\omega}.$$

Como exemplo, consideremos o gráfico de ganho a seguir.



Observando-se o diagrama, nota-se que a declividade do gráfico em baixas frequências é de  $-20$  dB/dec. Portanto, trata-se de um sistema do Tipo 1. Além disso, nota-se que a aproximação em baixas frequências (reta tracejada) cruza a linha de  $0$  dB em  $\bar{\omega} = 0,1$  rad/s e, com base em ii.a), conclui-se que

$$K_0 = 0,1.$$

Chegaríamos à mesma conclusão se tivéssemos prolongado a reta tracejada e lido o valor do ganho ( $-20$  dB) na frequência  $\omega = 1,0$  rad/s.

### • Sistemas Tipo 2

Este caso é bastante parecido com o anterior (Tipo 1). Consideremos então um sistema do Tipo 2 com função de transferência da forma

$$G(s) = K_0 \frac{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1) \cdots (s\tau_m + 1)}{s^2 (sT_1 + 1)(sT_2 + 1) \cdots (sT_n + 1)},$$

cujas resposta em frequência é

$$G(j\omega) = K_0 \frac{(j\omega\tau_1 + 1)(j\omega\tau_2 + 1) \cdots (j\omega\tau_m + 1)}{(j\omega)^2 (j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1) \cdots (j\omega T_n + 1)}.$$

Se considerarmos frequências  $\omega$  suficientemente baixas, então podemos escrever de forma aproximada que

$$\tilde{G}(j\omega) \cong \frac{K_0}{(j\omega)^2},$$

pois todos os outros fatores do numerador e do denominador são aproximadamente iguais a 1. É imediato, portanto, que

$$20 \log_{10} |G(j\omega)| \cong 20 \log_{10} |\tilde{G}(j\omega)| = 20 \log_{10} \left| \frac{K_0}{\omega^2} \right| = 20 \log_{10} K_0 - 40 \log_{10} \omega,$$

o que significa que:

i) para frequências suficientemente baixas o diagrama de Bode de  $\tilde{G}(j\omega)$  tende a uma reta com declividade de  $-40\text{dB/dec}$  e

ii) o valor do ganho em baixas frequências  $K_0$  pode ser obtido diretamente **da reta que aproxima o gráfico** em baixas frequências de duas maneiras:

ii.a) ou como consequência do fato de que para

$$\omega = 1,$$

tem-se

$$\log_{10} \omega = 0$$

e, portanto,

$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j1)| = 20 \log_{10} K_0,$$

ou seja,

$$|\tilde{G}(j1)| = K_0;$$

ii.b) ou então considerando a frequência  $\bar{\omega}$  na qual

$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j\bar{\omega})| = 0 \text{ dB}$$

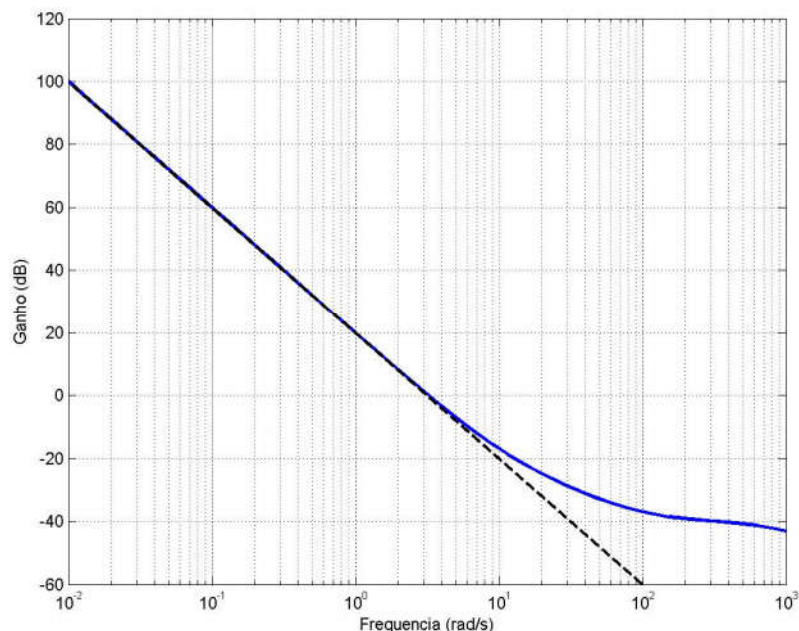
e, portanto,

$$20 \log_{10} |\tilde{G}(j\bar{\omega})| = 20 \log_{10} K_0 - 40 \log_{10} \bar{\omega} = 0,$$

ou seja,

$$K_0 = \bar{\omega}^2.$$

Como exemplo, consideremos o gráfico de ganho a seguir.



Observando-se o diagrama, nota-se que a declividade do gráfico em baixas frequências é de  $-40$  dB/dec. Portanto, trata-se de um sistema do Tipo 2. Além disso, da aproximação em baixas frequências (reta tracejada), obtém-se que

$$K_0 = 10,$$

de imediato utilizando-se ii.a).

A determinação de  $K_0$  é menos precisa utilizando-se ii.b). Mesmo assim, observa-se no gráfico que a frequência  $\bar{\omega}$  em que a reta tracejada cruza a linha de 0 dB é pouco maior que 3 – de fato, essa frequência é aproximadamente  $3,16$  rad/s e  $3,16^2 \cong 10$ .

### Diagramas de Nyquist

Os Diagramas de Nyquist são gráficos polares de resposta em frequência parametrizados em  $\omega$ . Em outras palavras, para cada valor de  $\omega$  no intervalo  $0 \leq \omega \leq \infty$ , desenha-se no plano complexo o ponto que representa  $G(j\omega)$ .

Os Diagramas de Nyquist podem ser desenhados a partir de dados retirados dos Diagramas de Bode, pois estes são de construção mais simples e sistemática. Note, porém, que os valores de ganho em dB devem ser modificados para seus valores originais (em unidades de engenharia) utilizando-se a função antilogaritmo.

**Exemplo:** Seja o sistema tal que:

$$G(s) = \frac{1}{s + 10} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 10}$$

É imediato notar que:

$$\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad G(j \cdot 0) = \frac{1}{10}$$

e que, para  $\omega$  suficientemente grande:



$$\omega \gg 10 \text{ rad/s} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

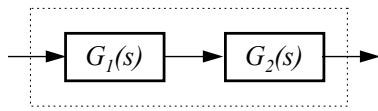
de maneira que, em altas frequências, o Diagrama de Nyquist se aproxima da origem do plano complexo com fase  $-90^\circ$ .

Para  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ , por exemplo:

$$\omega = 10 \text{ rad/s} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2}}, \angle G(j\omega) = -45^\circ$$

Calculando mais alguns pontos, podemos esboçar o Diagrama de Nyquist.

Neste caso, pode-se mostrar que o Diagrama de Nyquist para  $0 \leq \omega \leq \infty$  tem a forma de uma semi-circunferência.



Como já vimos anteriormente, não havendo carregamento, a Função de Transferência combinada de dois sistemas em cascata é igual ao produto das Funções de Transferência individuais:

binada de dois sistemas em cascata é igual ao produto das Funções de Transferência individuais:

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

de maneira que:

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

e

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

Embora estas relações sejam de praticamente nenhum interesse para o traçado de Diagramas de Nyquist, elas podem ser úteis para avaliar qualitativamente o efeito de compensadores sobre a resposta em frequência.

Uma vantagem dos Diagramas de Nyquist é que eles representam as características de resposta em frequência (ganho e fase) num único gráfico. Além disso, como veremos adiante ao estudarmos o Critério de Nyquist, tais diagramas permitem analisar a estabilidade de sistemas em malha fechada de forma simples e imediata.

Por outro lado, uma de suas desvantagens é que os Diagramas de Nyquist não permitem identificar as contribuições individuais de cada um dos fatores que compõem a Função de Transferência.

### Formas Gerais de Gráficos Polares

Seja:

$$G(j\omega) = \frac{K_0 \cdot (1 + j \cdot \omega \tau_1) \cdot (1 + j \cdot \omega \tau_2) \dots (1 + j \cdot \omega \tau_m)}{(j\omega)^N \cdot (1 + j \cdot \omega T_1) \cdot (1 + j \cdot \omega T_2) \dots (1 + j \cdot \omega T_p)}$$

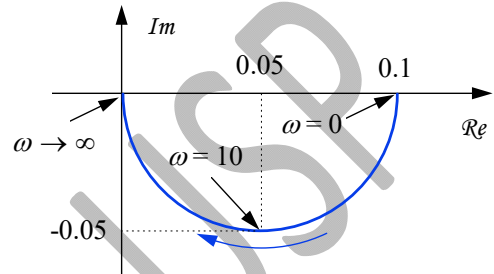
onde admitiremos, por hipótese, que:

$$K_0 > 0$$

Sejam  $n = N + p$  e  $m$ , respectivamente, os graus dos polinômios do denominador e do numerador. Vamos supor, como é usual, que  $n \geq m$ .

Analisemos o comportamento de  $G(j\omega)$  quando  $\omega \rightarrow +\infty$ . Há dois casos a considerar:

i)  $n = m$ : neste caso, é imediato que



$$G(j\infty) = \frac{K_0 \cdot \tau_1 \cdot \tau_2 \dots \tau_m}{T_1 \cdot T_2 \dots T_p}$$

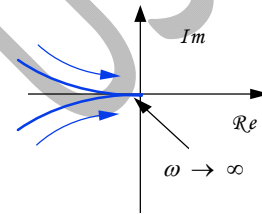
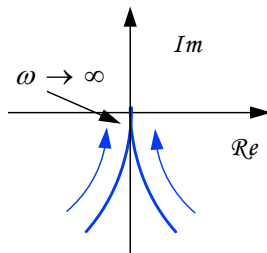
o que significa que o Diagrama de Nyquist termina sobre o eixo real, porém fora da origem.

ii)  $n > m$  : neste caso, também é imediato que

$$G(j\infty) = 0$$

e o Diagrama de Nyquist termina na origem. A forma como  $G(j\omega)$  se aproxima da origem depende do excesso do número de polos sobre o número de zeros. Para  $\omega$  **suficientemente grande**, temos as seguintes possibilidades:

- se  $n - m = 1$ , então  $\angle G(j\omega) \cong -90^\circ$  e a aproximação da origem tem uma das formas abaixo:
- se  $n - m = 2$ , então  $\angle G(j\omega) \cong -180^\circ$  e a aproximação da origem se dá como representado no gráfico.



- e assim por diante.

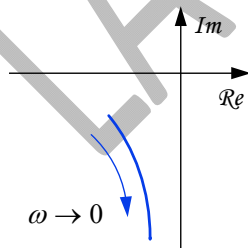
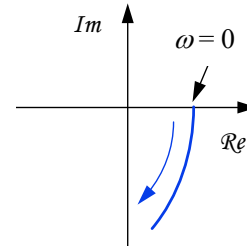
Isso mostra que, para  $n > m$ , os Diagramas de Nyquist se aproximam da origem para  $\omega \rightarrow \infty$  sempre por direções tangentes aos eixos real ou imaginário, positivo ou negativo.

Passemos, agora, a analisar o comportamento dos Diagramas de Nyquist em baixas frequências. Para isto é necessário distinguir o tipo do sistema:

i) **Sistemas do tipo 0** : neste caso,  $N = 0$  e, portanto,

$$G(j0) = K_0$$

o que significa que o ponto inicial do Diagrama de Nyquist se localiza sobre o eixo real positivo. Pode-se mostrar, também, que a tangente ao Diagrama em  $\omega = 0$  é perpendicular ao eixo real.



ii) **Sistemas do tipo 1** : neste caso,  $N = 1$  e, portanto, o termo predominante de  $G(j\omega)$  é o fator  $j\omega$  que aparece no denominador. Sendo assim,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty$$

e

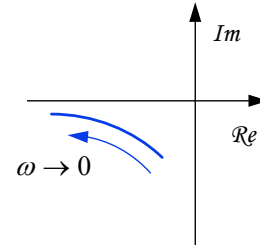
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = -90^\circ$$

o que significa que, em baixas frequências, o Diagrama de Nyquist é assintótico a uma reta paralela ao eixo imaginário negativo (eventualmente, o próprio eixo).

iii) **Sistemas do tipo 2** : neste caso,  $N = 2$  e, de maneira semelhante ao caso anterior, o termo predominante de  $G(j\omega)$  é o fator  $(j\omega)^2$  que aparece no denominador. Dessa forma,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = -180^\circ$$

e, portanto, em baixas frequências, o Diagrama de Nyquist é assintótico a uma reta paralela ao eixo real negativo (eventualmente, o próprio eixo).



## 7.5 Critério de Nyquist

### • O que é o Critério de Nyquist

O Critério de Nyquist é um resultado teórico que permite estudar a estabilidade de um sistema em **malha fechada graficamente** com base na inspeção do diagrama polar da resposta em frequência (diagrama de Nyquist) de **malha aberta**, sem a necessidade de determinar os polos do sistema em malha fechada.

### • Importância do Critério de Nyquist

Não é necessário dispor de um modelo na forma de função de transferência ou de equação diferencial para se determinar a estabilidade do sistema em malha fechada. O gráfico da resposta em frequência de malha aberta utilizado pode, inclusive, ser obtido experimentalmente. Este é uma das razões da importância do Critério de Nyquist e de seu uso prático.

Entende-se por robustez da estabilidade de um sistema de controle a capacidade que o mesmo apresenta de manter a estabilidade a despeito da existência de erros de modelagem. Este aspecto é de grande importância prática, pois qualquer modelo adotado para representar o comportamento de um sistema tem sempre o caráter aproximado, sendo sempre incapaz de representá-lo com absoluta fidelidade. O Critério de Nyquist é também uma ferramenta importante para a análise da robustez da estabilidade.

### • Base teórica do Critério de Nyquist: o Teorema do Mapeamento

O Critério de Nyquist está baseado num resultado da Teoria de Funções de Variáveis Complexas denominado Teorema do Mapeamento (ou Princípio do Argumento).

A dedução rigorosa do Critério de Nyquist envolve a Teoria de Funções de Variáveis Complexas. No entanto, no caso em que a função de transferência do sistema é uma função racional, pode-se utilizar uma argumentação bastante simples para sugerir a validade do Critério.

Para isso, suponhamos que  $f(s)$  seja uma função racional escrita na forma:

$$f(s) = \frac{(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Note que  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  são os zeros de  $f(s)$  e que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são os polos de  $f(s)$ .

Na figura ao lado estão representados no plano  $s$  alguns polos e zeros arbitrariamente escolhidos de uma função  $f(s)$  genérica. Está, também, desenhada uma curva fechada  $Q'$  envolvendo apenas o zero  $Z_1$ , a qual **não passa sobre nenhum polo ou zero** de  $f(s)$ .

Seja  $O'$  um ponto qualquer de  $Q'$ , representado pelo número complexo  $s$ . Quando  $O'$  se desloca sobre  $Q'$  no sentido **horário**, descrevendo uma volta completa, o segmento  $s - Z_1$  percorre um ângulo total de  $360^\circ$ ; todos os outros segmentos descrevem um ângulo líquido de  $0^\circ$ .

Vejamos, agora, o que ocorre com a imagem da função  $f(s)$  quando se realiza o percurso acima (a imagem de  $f(s)$  é o mapeamento de  $Q'$  por  $f(s)$  no plano complexo). Não é difícil perceber que, quando  $s$  percorre  $Q'$  no sentido horário, a imagem de  $f(s)$  dá uma volta completa em torno da origem também no sentido **horário**, já que:

$$\angle f(s) = \angle [s - Z_1] + \angle [s - Z_2] + \dots + \angle [s - Z_n] - \angle [s - p_1] - \angle [s - p_2] - \dots - \angle [s - p_n]$$

Como a fase é convencionada **positiva** no sentido **anti-horário**, isso significa que a variação total da fase de  $f(s)$  é  $-360^\circ$ .

Consideremos, agora, um caminho fechado  $Q''$  envolvendo os zeros  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  e o polo  $p_1$ . Quando  $s$  percorre  $Q''$  no sentido **horário**, cada um dos segmentos  $s - Z_1, s - Z_2, s - Z_3$  e  $s - p_1$  descreve um ângulo líquido de  $360^\circ$ . Consequentemente, a mudança total de fase experimentada por  $B(s)$  é de  $-3 \times 360^\circ + 1 \times 360^\circ = -720^\circ$ , o que significa que o número total de rotações em torno da origem, descritos pela imagem de  $f(s)$  no sentido **horário**, é 2.

Podemos estender essas conclusões para o caso geral de um contorno fechado  $Q$ , que não passa sobre nenhum polo ou zero de  $f(s)$ , e que contém em seu interior  $Z$  zeros e  $P$  polos de  $f(s)$ . Neste caso, quando o ponto  $s$  percorre o contorno  $Q$  no sentido **horário**, o número total  $N$  de envoltimentos da origem no sentido **horário** apresentado pela imagem de  $f(s)$  é igual a  $Z - P$ , isto é,

$$N = Z - P.$$

Este resultado constitui o Teorema do Mapeamento. Em sua aplicação, consideram-se **negativos** os envoltimentos da origem pela imagem de  $f(s)$  no sentido **anti-horário**.

O Teorema do Mapeamento é o resultado teórico básico para a elaboração do Critério de Nyquist.

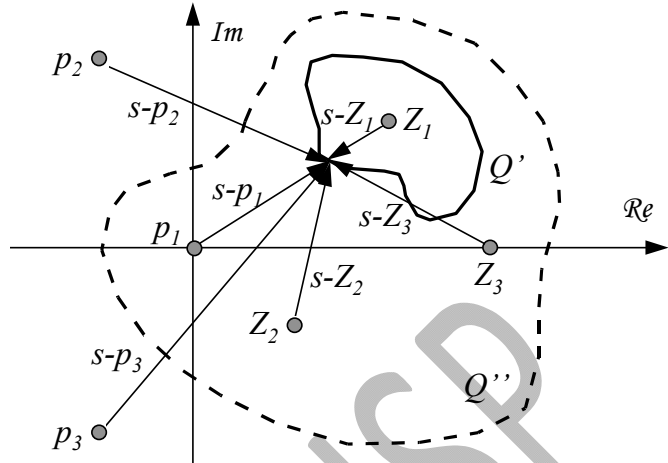
Deve-se notar que o Teorema do Mapeamento apresenta os seguintes **elementos importantes**:

- i) a função  $f(s)$ ;
- ii) o contorno fechado  $Q$  percorrido por  $s$  no plano  $s$ ;
- iii) os números de polos ( $P$ ) e de zeros ( $Z$ ) de  $f(s)$  no interior desse contorno  $Q$  no plano  $s$ ;
- iv) a imagem de  $f(s)$  no plano  $f(s)$  quando  $s$  percorre o contorno  $Q$  no plano  $s$ ;
- v) o número de voltas ( $N$ ) da imagem de  $f(s)$  em torno da origem do plano  $f(s)$ .

#### • O Critério de Nyquist

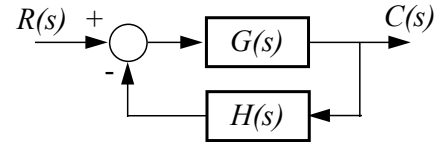
Para apresentar o Critério de Nyquist, a seguir vamos identificar cada um dos elementos i)-v) acima.

##### i) a função $f(s)$



Consideremos o sistema em malha fechada ao lado, cuja Função de Transferência em malha fechada é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$



A estabilidade do sistema em malha fechada requer que todas as raízes da sua equação característica

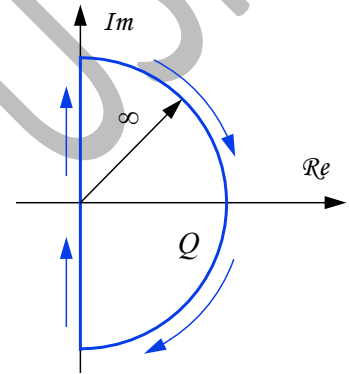
$$f(s) = 1 + G(s) \cdot H(s) = 0$$

pertencam ao S.P.E.. Esta é pois a **função  $f(s)$**  do item i).

### ii) o contorno fechado $Q$ percorrido por $s$ no plano $s$

Sabemos que um sistema é estável se e apenas se nenhum de seus polos se localiza no S.P.D. Sendo assim, uma possível escolha para o contorno  $Q$  consiste em considerar uma curva fechada no plano  $s$  que contenha em seu interior todo o S.P.D. O contorno  $Q$  é assim constituído por todo o eixo  $j\omega$ , em conjunto com uma semi-circunferência de raio tendendo a infinito no S.P.D.. Esta curva recebe o nome de **contorno** (ou **caminho**) de **Nyquist** (veja a figura ao lado).

Conforme indicado, o sentido adotado para o percurso do caminho é o **horário**.



### iii) os números de polos ( $P$ ) e de zeros ( $Z$ ) de $f(s)$ no interior desse contorno $Q$ no plano $s$

Se nós escrevermos  $G(s)H(s)$  na forma de uma razão entre dois polinômios:

$$G(s)H(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

a função  $f(s)$  pode ser reescrita como

$$f(s) = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}.$$

Nota-se, portanto, que os polos de  $f(s)$  são os polos de malha aberta de  $G(s)H(s)$ ; por sua vez, os zeros de  $f(s)$  são os polos de malha fechada do sistema. Considerando então os polos e zeros de  $f(s)$  no interior do contorno  $Q$ , temos que  **$P$  é o número de polos instáveis de malha aberta e  $Z$  é o número de polos instáveis de malha fechada.**

Obviamente, a condição para que o sistema em malha fechada seja estável é que

$$Z = 0,$$

a qual, considerando-se o Teorema do Mapeamento, pode ser reescrita como

$$N = -P.$$

Esta igualdade é essencialmente a expressão do **Critério de Nyquist**.

### iv) a imagem de $f(s)$ no plano $f(s)$ quando $s$ percorre o contorno $Q$ no plano $s$

Para utilizar o Critério de Nyquist conforme sua expressão acima é, portanto, necessário determinar o valor de  $N$ . Isto requer que se construa o gráfico da imagem de  $f(s)$  quando  $s$  percorre o contorno de Nyquist.

O contorno de Nyquist é composto por três partes:

**a) o semi-eixo positivo ( $s=j\omega$ ,  $\omega \geq 0$ )**

Neste caso,

$$f(s) = f(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega)$$

e, portanto, a imagem de  $f(s)$  é o próprio gráfico polar da resposta em frequência de  $1 + G(s)H(s)$ .

**b) o semi-eixo negativo ( $s=-j\omega$ ,  $\omega \geq 0$ )**

Neste caso,

$$f(s) = f(-j\omega) = 1 + G(-j\omega)H(-j\omega).$$

Como  $f(s)$  é uma função racional, é fácil concluir que

$$f(-j\omega) = f^*(j\omega),$$

em que  $f^*(j\omega)$  representa o conjugado de  $f(j\omega)$ .

Assim, a imagem de  $f(s)$  é resulta simétrica em relação ao eixo real daquela do item a).

**c) a semi-circunferência de raio infinito**

Como

$$f(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)}$$

e como, para os sistemas usuais, o grau do polinômio  $N(s)$  é menor ou igual ao grau de  $D(s)$ , temos que

$$f(s) \rightarrow \text{cte}$$

sobre a semi-circunferência, já que  $s \rightarrow \infty$ . Aliás, não por acaso, essa constante é a mesma que se obtém quando  $s = j\omega \rightarrow \infty$ .

Em resumo, para se obter o gráfico da imagem de  $f(s)$  quando  $s$  percorre o contorno  $Q$ , basta desenhar o gráfico polar da resposta em frequência de  $1 + G(s)H(s)$  e completar a figura desenhando seu simétrico em relação ao eixo real.

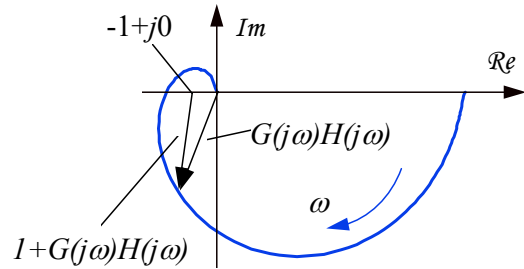
**v) o número de voltas (N) da imagem de  $f(s)$  em torno da origem do plano  $f(s)$**

Construído o gráfico da imagem de  $f(s)$  conforme o item iv), este passo é trivial: basta contar o número de envoltimentos ( $N$ ) desse gráfico em torno da origem do plano  $f(s)$  no sentido horário.

Note-se que o número de voltas em torno da origem é convencionado positivo quando ocorre no sentido horário e negativo, quando se dá no sentido anti-horário.

Por fim, é oportuno observar que, se consideramos o Diagrama de Nyquist de  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ , a função  $1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  pode ser visualizada como um segmento orientado com a origem no ponto  $-1 + j \cdot 0$  e a extremidade no ponto  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ , conforme mostra a figura ao lado.

Portanto, o envolvimento da origem pelo Diagrama de Nyquist de  $1 + G(j\omega) \cdot H(j\omega)$  é equivalente ao envolvimento do ponto  $-1 + j \cdot 0$  pelo lugar geométrico de  $G(j\omega) \cdot H(j\omega)$ .



Devemos ter em mente que, para aplicarmos o Teorema do Mapeamento na investigação da estabilidade, é necessário que o **Contorno de Nyquist não passe sobre polos ou zeros de malha aberta do sistema**. Dessa maneira, até este ponto está excluído de nossa discussão o caso em que o sistema em malha aberta tem polos ou zeros sobre o eixo imaginário.

Discutiremos como contornar esta dificuldade adiante.

**Exemplo:** Seja o sistema tal que

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{K_0}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad (K_0, T_1, T_2 > 0)$$

O Diagrama de Nyquist para  $-\infty < \omega < +\infty$  tem o aspecto indicado na figura ao lado, onde se observa que o número de envoltimentos do ponto  $(-1+j0)$  é:

$$N = 0$$

Como o sistema em malha aberta não tem polos no S.P.D.:

$$P = 0$$

Está, portanto, satisfeita a condição do Critério de Nyquist:

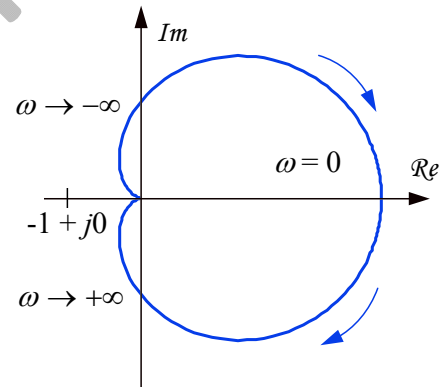
$$N = -P$$

e podemos concluir que, em malha fechada, o sistema é estável para qualquer valor de  $K > 0$ .

Consideraremos, agora, o caso em que  $G(s)H(s)$  contém polos ou zeros sobre o eixo imaginário.

Para estudarmos a estabilidade de sistemas deste tipo, é preciso modificar o Contorno de Nyquist.

Consideremos o caso em que  $G(s)H(s)$  possui polos (ou zeros) na **origem**, por ser esta situação bastante comum. Uma análise equivalente pode ser realizada quando  $G(s)H(s)$  contém polos ou zeros em outros pontos do eixo imaginário.



O procedimento usual nestes casos é considerar uma semi-circunferência de raio  $\varepsilon \ll 1$ , com centro na origem, conforme ilustrado na figura ao lado.

A região do S.P.D. que é evitada por este contorno modificado tende a se tornar arbitrariamente pequena à medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Com isso, os eventuais polos de malha fechada no S.P.D. são envolvidos.

**Exemplo:** seja o sistema tal que

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{K_0}{s \cdot (1 + sT)} \quad (K_0, T > 0)$$

De início, notamos que:

$$G(j0^+) \cdot H(j0^+) = -j\infty$$

e

$$G(j0^-) \cdot H(j0^-) = +j\infty$$

Na semi-circunferência:

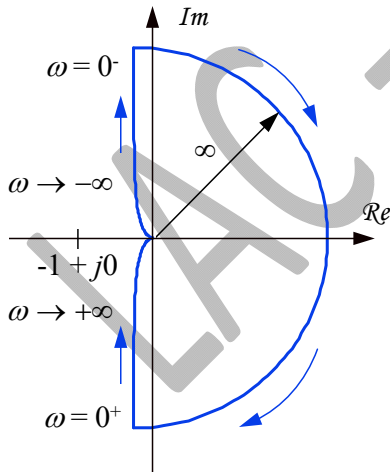
$$s = \varepsilon \cdot e^{j\theta}$$

e, portanto:

$$G(\varepsilon \cdot e^{j\theta}) \cdot H(\varepsilon \cdot e^{j\theta}) \cong \frac{K_0}{\varepsilon \cdot e^{j\theta}} = \frac{K_0}{\varepsilon} \cdot e^{-j\theta}$$

Para que o percurso se realize no sentido indicado,  $\theta$  deve crescer desde  $-90^\circ$  até  $+90^\circ$ . Por consequência, a fase de  $G(j\omega)H(j\omega)$  irá variar de  $+90^\circ$  a  $-90^\circ$ . Além disso, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $|G \cdot H| \rightarrow \infty$ .

Portanto, os "pontos"  $G(j0^-) \cdot H(j0^-) = +j\infty$  e  $G(j0^+) \cdot H(j0^+) = -j\infty$  são unidos por uma semi-circunferência de raio infinito no S.P.D.



Com essas considerações, podemos traçar o lugar geométrico de  $G(s)H(s)$  quando  $s$  percorre o Contorno de Nyquist modificado.

Como  $G(s)H(s)$  não tem polos no S.P.D.,

$$P = 0$$

Observando a figura ao lado, vê-se que:

$$N = 0$$

Com isso, o Critério de Nyquist garante a estabilidade do sistema em malha fechada, independentemente do valor de  $K$ , uma vez que:

$$N = -P$$

Para concluir esta seção, convém notar que se a Função de Transferência de malha  $G(s)H(s)$  contém um polo de multiplicidade  $n$  na origem ( $n = 2, 3, \dots$ ), o lugar geométrico de  $G(s)H(s)$ , correspondente a  $s$  sobre a semi-circunferência de raio  $\varepsilon \ll 1$ , apresenta  $n$  semi-circunferências de raio infinito no sentido horário em torno da origem.

## 7.6 Sistemas de Fase Mínima

Diz-se que um sistema dado por sua função de transferência  $G(s)$  é de **fase mínima** quando todos os seus polos e zeros se localizam no semi-plano complexo esquerdo. Quando há pelo menos um polo ou zero no semi-plano direito, diz-se que o sistema é de **fase não mínima**.



Na literatura, muitas vezes se usa a designação *fase não mínima* para indicar que há zeros no semi-plano direito, já que, quando há polos no semi-plano direito, diz-se que o sistema é *instável*.

As designações *fase mínima* e *fase não mínima* têm sua motivação nos gráficos da defasagem da resposta em frequência. Considerem-se, por exemplo, as seguintes duas funções de transferência:

$$G_1(s) = \frac{1 + 0.1s}{1 + s}$$

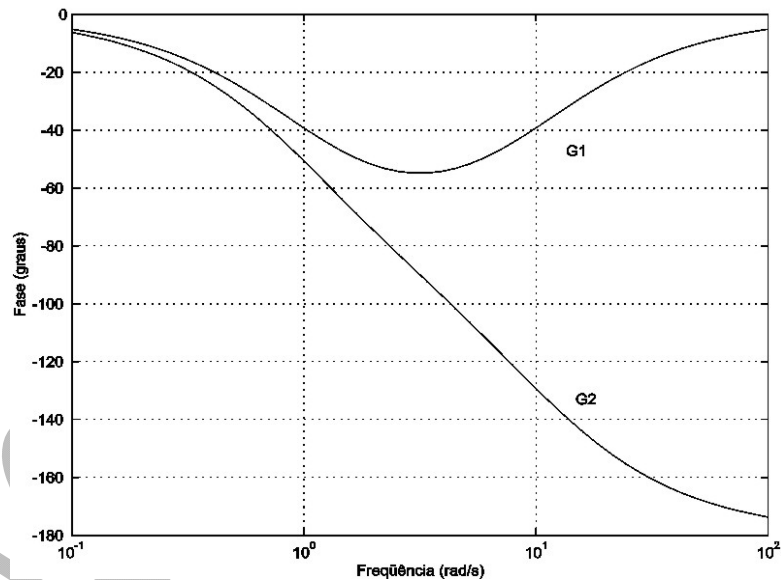
$$G_2(s) = \frac{1 - 0.1s}{1 + s}$$

Pelas definições acima, está claro que  $G_1(s)$  é de fase mínima, pois seu polo (-1) e zero (-10) estão ambos situados no semi-plano esquerdo. Por outro lado,  $G_2(s)$  é de fase não mínima, já que tem um zero (10) no semi-plano direito.

Em primeiro lugar, é óbvio que ambas as funções têm o mesmo ganho, uma vez que

$$|G_1(j\omega)| = \frac{|1 + 0.1j\omega|}{|1 + j\omega|} = \frac{|1 - 0.1j\omega|}{|1 + j\omega|} = |G_2(j\omega)|$$

O mesmo não ocorre, contudo, com as defasagens. Os diagramas de Bode a seguir mostram que, em valor absoluto, a defasagem correspondente a  $G_1(s)$  é menor do que a associada a  $G_2(s)$ . De maneira mais geral, a defasagem associada a uma função de transferência de fase mínima é, em valor absoluto, a mínima dentre todas as defasagens possíveis associadas a sistemas com mesmo ganho.



## 7.7 Margens de Estabilidade

Para um grande número de sistemas de controle, dois parâmetros são úteis para medir a distância do Diagrama de Nyquist ao ponto  $-1+j0$ . Esses parâmetros são a **margem de ganho** (MG) e a **margem de fase** (MF) e constituem o que se costuma denominar margens de estabilidade de um sistema de controle.

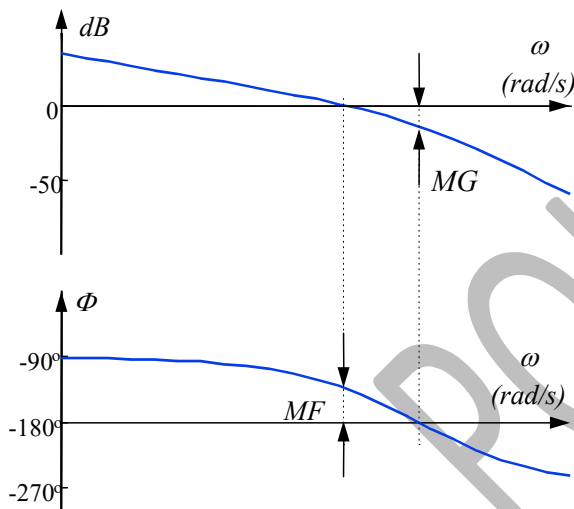
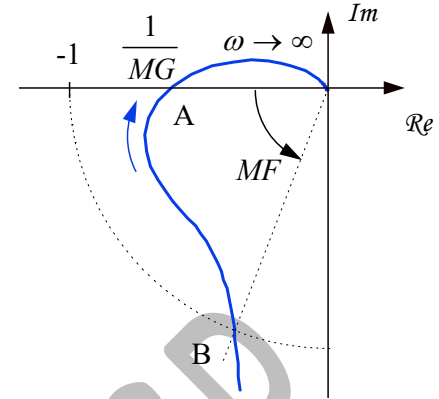
O Diagrama de Nyquist ao lado ilustra as definições de MG e MF.

A margem de ganho é uma medida de quanto o ganho pode ser aumentado antes de causar instabilidade do sistema.

A margem de fase, por sua vez, é uma medida de quanto de defasagem pura o sistema tolera antes de se tornar instável.

Deve-se notar que variações de ganho preservam a forma do Diagrama de Nyquist, alterando apenas suas dimensões. Assim, tomando como referência a figura ao lado, ao aumentarmos o ganho do sistema, o ponto A caminha para a esquerda (sobre o eixo real negativo). Se o ganho chegar a MG, então o ponto A estará sobre o ponto crítico  $-1+j0$  e o sistema, na iminência de perder a estabilidade.

De maneira análoga, o efeito de defasagens puras é apenas girar o Diagrama de Nyquist em torno da origem. Tomando como base o ponto B, notamos que se for introduzida uma defasagem pura na Função de Transferência de malha do sistema de valor igual a MF esse ponto coincidirá com o ponto  $-1+j0$ .



É igualmente simples determinar MG e MF nos Diagramas de Bode. O valor de MG pode ser obtido do gráfico de ganho na frequência em que a defasagem é igual a  $-180^\circ$ . O valor de MF, por sua vez, pode ser lido diretamente do gráfico de defasagem na frequência em que o ganho é  $0\text{ dB}$ . A figura ao lado ilustra estes fatos.

Uma vez que as margens de estabilidade representam uma medida da proximidade do Diagrama de Nyquist com relação ao ponto  $-1+j0$ , elas dão uma indicação da robustez do sistema face a incertezas do modelo matemático utilizado para o projeto (por isso, essas margens podem ser adotadas como critérios de projeto). Essa é a razão da importância e da popularidade dos conceitos de margens de ganho e de fase.

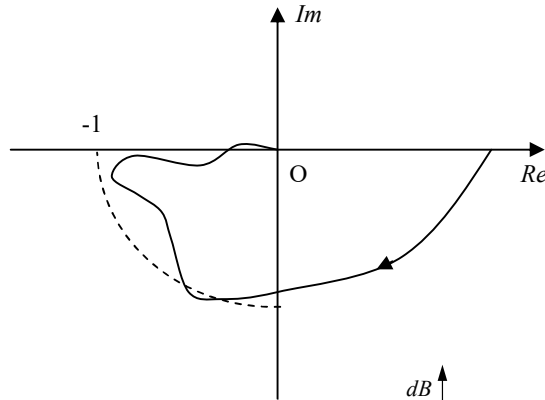
É prática usual considerar satisfatórias as margens de ganho superiores a  $6\text{ dB}$  (o que corresponde a ganhos maiores que 2) e as margens de fase entre  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .

As margens de estabilidade devem ser utilizadas com algum cuidado, conforme as observações a seguir.

Na página 257 do livro *Feedback Control of Dynamic Systems*, de G.F. Franklin, J.D. Powell e A.E. Naeini, Addison-Wesley, 1986, encontram-se os seguintes comentários:- "Em alguns casos, as noções de margens de ganho e fase falham. Para sistemas de 1a. e 2a. ordens, a fase nunca atinge  $180^\circ$ , e, portanto, a margem de ganho é  $\infty$ . Para sistemas de ordem mais elevada, é possível haver mais de um ponto de cruzamento de  $0\text{ dB}$  e mais de um cruzamento de  $180^\circ$  e as margens de estabilidade podem induzir a erros. Além disso, sistemas de fase não mínima apresentam critérios de estabilidade que são opostos àqueles definidos acima. Todos esses casos especiais podem ser tratados voltando-se ao Diagrama de Nyquist e ao Critério de Nyquist baseado no número de envoltimentos do ponto  $-1$ ."

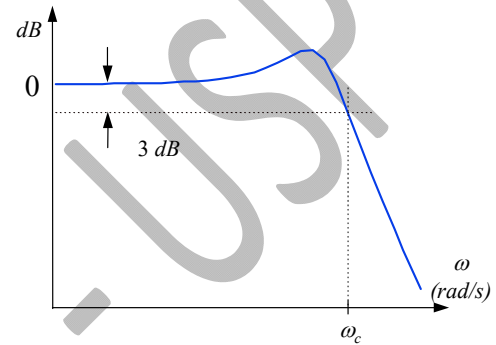
Na página 498 do livro *Modern Control Systems*, de R.C. Dorf e R.H. Bishop, Addison-Wesley, 1998 (8a. ed.), constam as seguintes observações: "É relativamente simples examinar o Diagrama de Nyquist (e os de Bode) de um sistema de fase mínima. Um cuidado especial é necessário com sistemas de fase não-mínima e o Diagrama de Nyquist completo deve ser analisado para se determinar a estabilidade". "As margens de ganho e fase podem ser calculadas facilmente através de um programa de computador, supondo que o sistema seja de fase mínima. No entanto, para sistemas de fase não mínima, o Diagrama de Nyquist completo deve ser construído."

Por fim, é oportuno notar que, mesmo para sistemas de fase mínima, valores considerados bons de margens de ganho e fase podem não ser indicadores confiáveis da distância do Diagrama de Nyquist ao ponto  $-1$ . A figura abaixo ilustra este fato: o sistema em questão tem amplas margens de ganho e fase, mas uma pequena perturbação na região de frequências próxima ao ponto  $-1$  pode desestabilizá-lo.



## 7.8 Frequência de Corte e Largura de Banda

Considere a resposta em frequência  $C(j\omega)/R(j\omega)$  de um sistema em *malha fechada* e, em particular, seu Diagrama de Bode de ganho, conforme ilustrado pela figura (típica) ao lado. A **frequência de corte**  $\omega_c$  é definida como sendo aquela a partir da qual o ganho cai abaixo de 3 dB com relação ao ganho de baixas frequências.



Assim, o sistema em malha fechada atenua com um fator maior ou igual a  $\sqrt{2}/2$  as componentes dos sinais cujas frequências são superiores a  $\omega_c$ .

A região de frequências  $0 \leq \omega \leq \omega_c$ , denominada **largura de banda** (ou largura de faixa, ou ainda, banda passante), corresponde, a grosso modo, às componentes dos sinais que são transmitidas da entrada para a saída do sistema. Dessa maneira, quanto maior a largura de banda, tanto maiores as frequências dos sinais que são transmitidos através do sistema e, portanto, maior a sua **velocidade de resposta**.

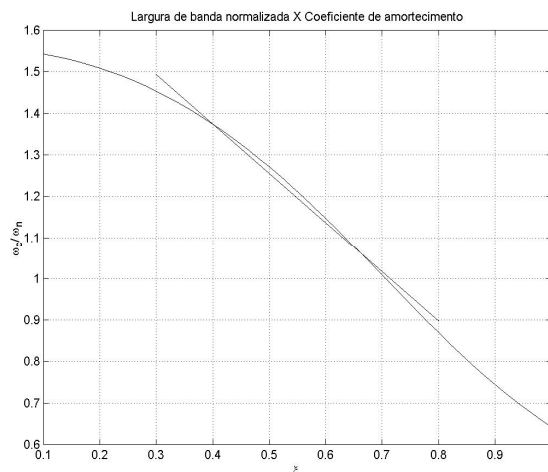
Para sistemas de 2a. ordem com função de transferência

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

pode-se calcular o valor da largura de banda normalizada  $\omega_c / \omega_n$  em função do coeficiente de amortecimento  $\xi$ . No intervalo  $0.3 \leq \xi \leq 0.8$  vale a seguinte aproximação linear

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} \cong -1.19\xi + 1.85$$

a qual pode ser muito útil para fins de projeto. A figura a seguir contém os gráficos exato e da aproximação linear.

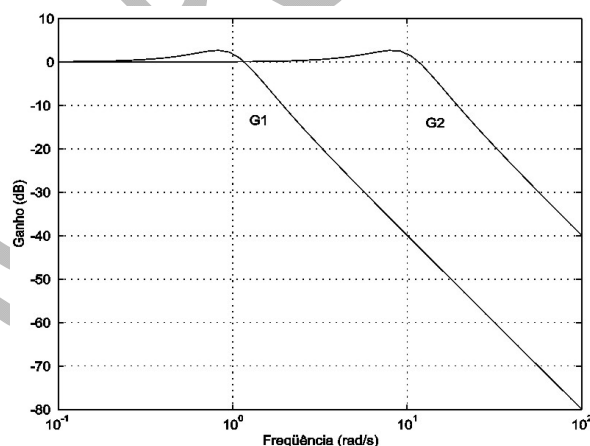


A especificação da largura de banda é, em geral, determinada pelos seguintes fatores:

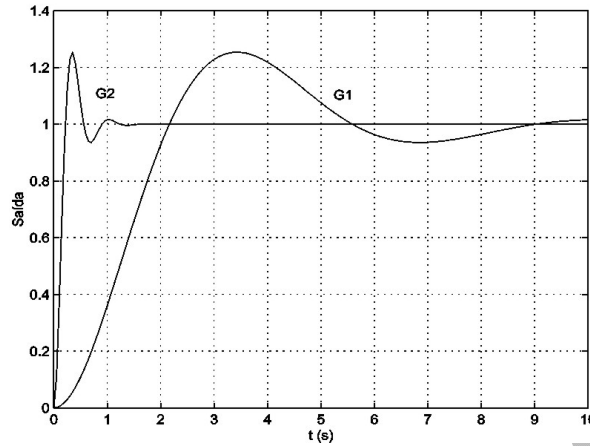
- i) fidelidade de reprodução dos sinais de entrada pela saída;
- ii) características de filtragem requeridas para o ruído de alta frequência;
- iii) erros de modelagem.

Estabelece-se assim normalmente um conflito: por um lado, para que a saída do sistema siga com precisão entradas que variam rapidamente, é necessário que a largura de faixa seja grande; por outro lado, do ponto de vista de amplificação de ruídos e da preservação da estabilidade na presença de erros de modelagem, é necessário que a largura de banda não seja excessivamente ampla.

Para ilustrar, considerem-se dois sistemas com funções de transferência  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  cujos ganhos são apresentados na figura abaixo.

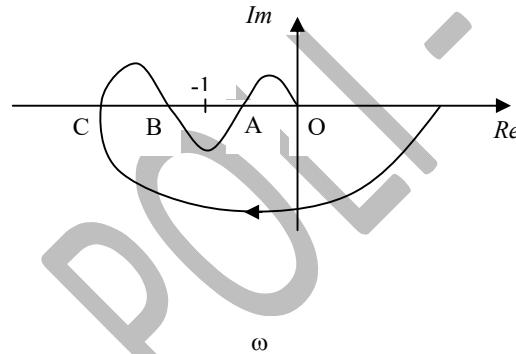


Observa-se claramente que a frequência de corte de  $G_1(s)$  é de aproximadamente 1,2 rad/s, ao passo que a de  $G_2(s)$  está em torno de 12 rad/s. Isto significa que  $G_2(s)$  é capaz de responder mais rapidamente do que  $G_1(s)$ . Para comprovar este fato, a figura abaixo contém as respostas a degrau de ambos os sistemas.



### 7.9 Sistemas Condicionalmente Estáveis

Consideremos um sistema tal que o diagrama polar de  $G(j\omega)H(j\omega)$  tem o aspecto ilustrado na figura abaixo.



Supondo que  $G(s)H(s)$  seja estável ( $P = 0$ ), o Critério de Nyquist permite concluir que, em malha fechada, o sistema também é estável, uma vez que  $N = 0$ .

Aumentando o ganho de maneira que o ponto  $-1 + j0$  pertença ao segmento AO, resulta  $N = +2$  (Verifique isto como lição de casa!) e, portanto, o sistema em malha fechada passa a ser instável. O mesmo acontece quando se reduz o ganho de forma que o ponto  $-1 + j0$  pertença ao segmento CB.

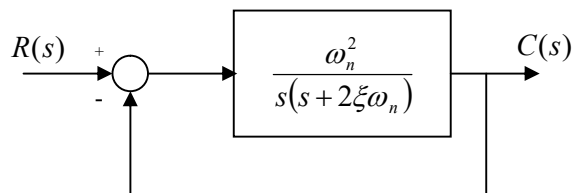
Sistemas deste tipo, em que a malha fechada é estável apenas para valores de ganho pertencentes a um determinado intervalo, são denominados **condicionalmente estáveis**.

### 7.10 Correlação entre a Resposta a Degrau e a Resposta em Frequência para Sistemas de 2a. Ordem

Seja

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}, 0 < \xi < 1,$$

e considere-se o seguinte sistem



cuja função de transferência em malha fechada é dada por

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_{mf}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Para se obter a margem de fase deste sistema, deve-se inicialmente determinar a frequência de cruzamento do ganho  $\omega_g$ , isto é, deve-se resolver a seguinte equação:

$$|G(j\omega_g)| = 1$$

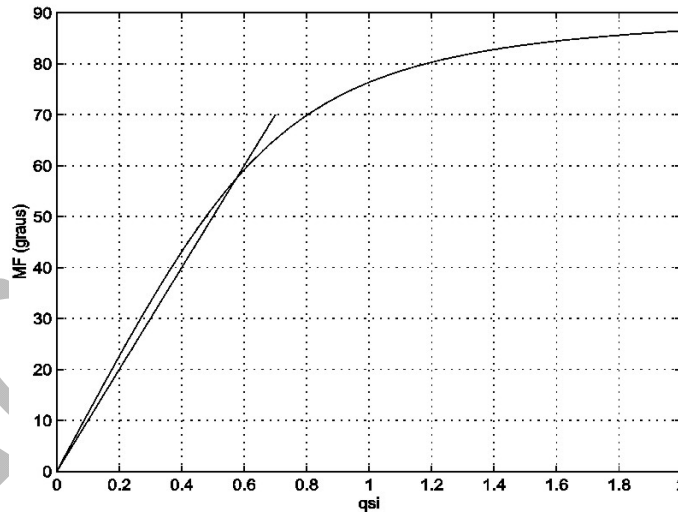
Feito isto, obtém-se

$$\omega_g = \omega_n \sqrt{1 + 4\xi^4 - 2\xi^2},$$

podendo-se, então, calcular

$$MF = 180^\circ + \arg(G(j\omega_g)) = \tan^{-1} \left( \frac{2\xi}{\sqrt{1 + 4\xi^4 - 2\xi^2}} \right).$$

O gráfico de  $MF$  em função de  $\xi$  é o seguinte:



Nota-se com facilidade que para  $\xi \leq 0.7$ , esse gráfico pode ser razoavelmente aproximado por uma reta conforme indicado na figura. Essa aproximação, **para  $MF$  em graus**, é dada por

$$MF \cong 100\xi \quad (0 < \xi \leq 0.7).$$

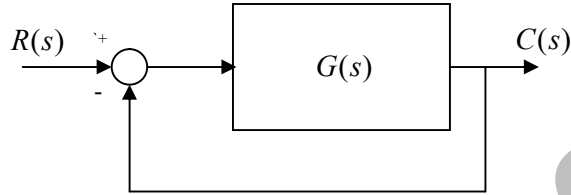
Havíamos visto anteriormente que, para sistemas de 2a. ordem, o coeficiente de amortecimento determinava os valores do sobressinal e do pico de ressonância:

$$M_p = \exp \left( -\pi \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$$

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

e agora acabamos de ver que o mesmo ocorre com a margem de fase. Em outras palavras, para esses sistemas, a margem de fase, o sobressinal, o pico de ressonância e o coeficiente de amortecimento contêm essencialmente a mesma informação. Assim, por exemplo, a um pequeno coeficiente de amortecimento correspondem uma pequena margem de fase e grandes sobressinal e pico de ressonância.

Para sistemas de fase mínima de **ordem qualquer** pode-se mostrar também que sistemas com pequena margem de fase apresentam ressonância. Para isso, considere-se o sistema com realimentação unitária



Designando por  $G_{mf}(s)$  a função de transferência em malha fechada, temos:

$$G_{mf}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}.$$

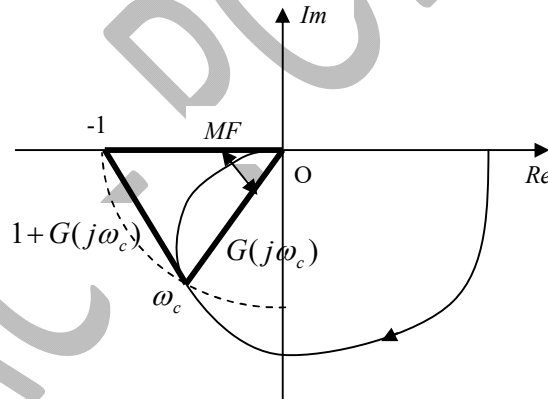
Para a frequência  $\omega_g$  de cruzamento do ganho,

$$|G(j\omega_g)| = 1$$

e, portanto,

$$|G_{mf}(j\omega_g)| = \left| \frac{G(j\omega_g)}{1 + G(j\omega_g)} \right| = \frac{1}{|1 + G(j\omega_g)|}.$$

Admita-se que o Diagrama de Nyquist de  $G(s)$  seja o seguinte:



Pelo exposto acima, é imediato que o triângulo destacado é isósceles e, portanto,

$$|1 + G(j\omega_g)| = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{MF}{2}\right).$$

Sendo assim, resulta que

$$|G_{mf}(j\omega_g)| = \frac{1}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{MF}{2}\right)},$$

de onde se conclui que, se a margem de fase é "pequena",  $|G_{mf}(j\omega_g)|$  é "grande". Ou seja, há uma ressonância em torno de  $\omega_g$ .

## 7.11 Diagramas de Nichols

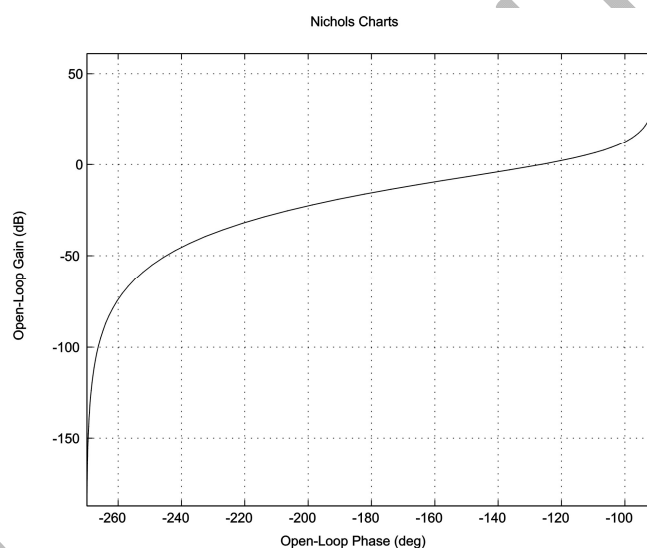
Além dos diagramas de Bode e de Nyquist, é comum utilizarem-se também os diagramas de Nichols para representar a resposta em frequência de um sistema. Estes diagramas são gráficos da resposta em frequência parametrizados em  $\omega$ . Em ambos os eixos utilizam-se escalas lineares: no eixo das abscissas marcam-se as defasagens em graus, ao passo que no eixo das ordenadas marcam-se os ganhos em dB. Da mesma maneira que os diagramas de Nyquist, neste caso um único gráfico contém as informações de ganho e defasagem do sistema.

### Exemplo

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}.$$

Seu diagrama de Nichols é mostrado na figura abaixo.



Os diagramas de Nichols podem ser construídos ponto a ponto, ou então a partir de leituras de alguns pares ganho-defasagem nos diagramas de Bode.

Note-se que uma variação de ganho produz apenas um deslocamento do diagrama na vertical (para cima, no caso de aumento de ganho e para baixo, em caso contrário), sem alterar sua forma.

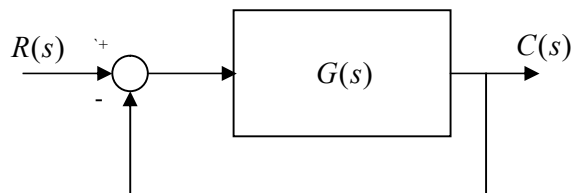
Suas principais vantagens no projeto de compensadores são as seguintes:

- permitem avaliar de maneira rápida e simples o efeito de compensadores;
- permitem a leitura direta das margens de estabilidade do sistema.

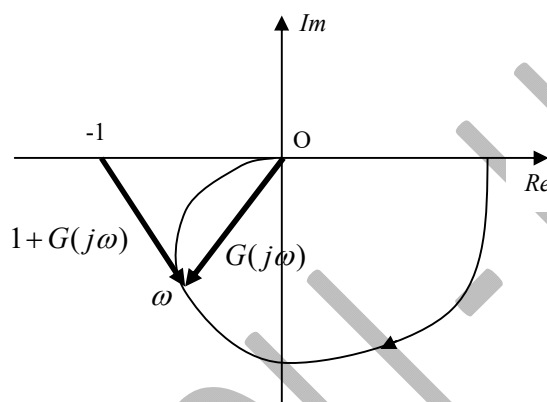


## 7.12 Resposta em Frequência de Malha Fechada

Considere-se o sistema em malha fechada com realimentação unitária representado pelo diagrama de blocos:



para o qual se conhece a resposta em frequência em malha aberta:



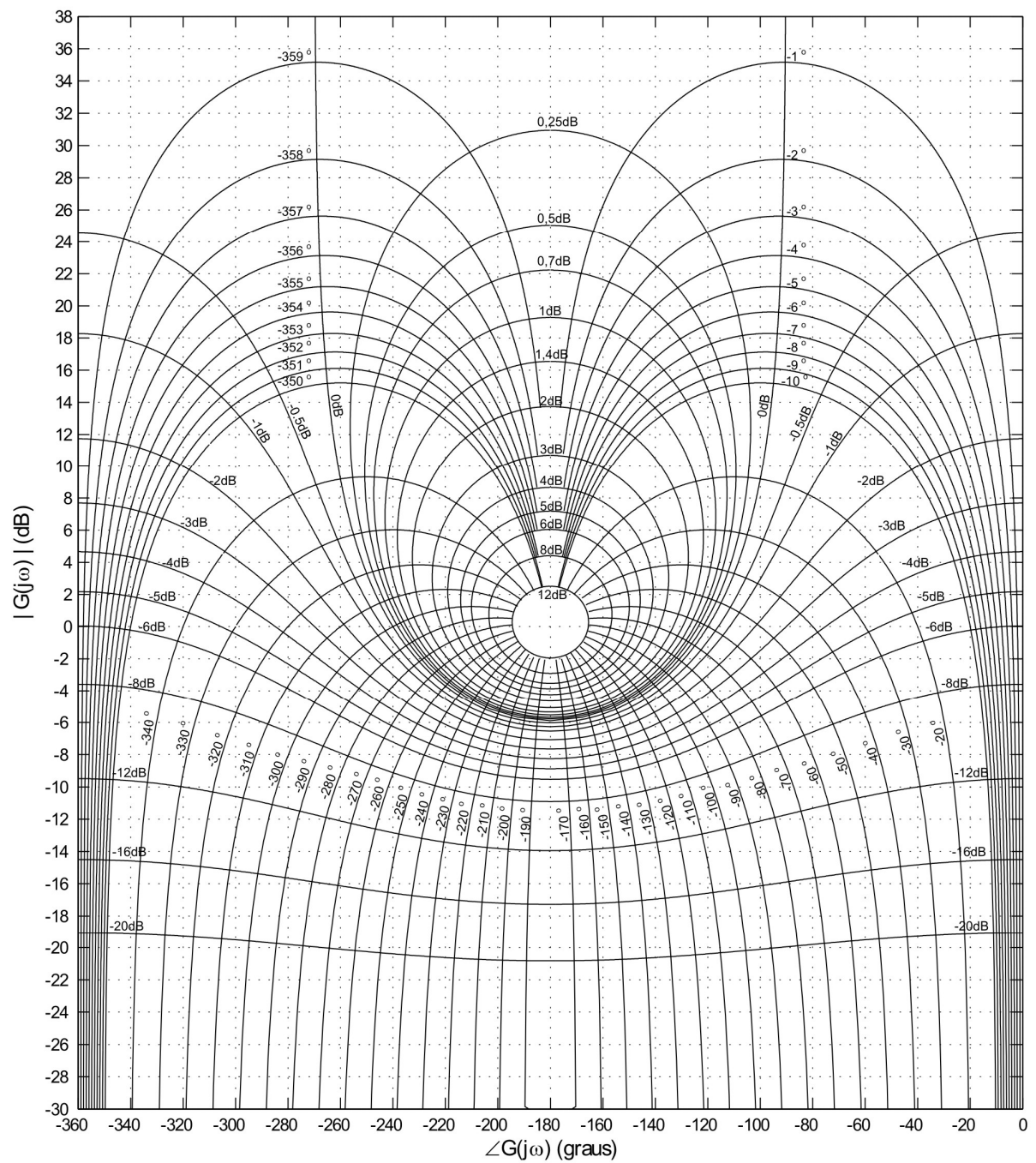
Para uma frequência  $\omega$  qualquer pode-se calcular a resposta em frequência em malha fechada  $G_{mf}(j\omega)$ :

$$G_{mf}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

Para calculá-la, basta pois fazer o quociente entre os dois números complexos destacados na figura. Sendo assim, a cada ponto do plano complexo, é possível associar um número complexo que representa a resposta em frequência em malha fechada que lhe corresponde.

É evidente que isso pode ser feito de maneira equivalente sobre o plano ganho (dB) x fase (graus) - a cada ponto deste plano pode-se associar um número complexo que representa a resposta em frequência correspondente em malha fechada. Unindo os pontos calculados de ganho constante, têm-se curvas de nível de ganho. Da mesma forma podem ser traçadas as curvas de fase constante. Ao diagrama assim construído dá-se o nome de **Carta de Nichols**.

Assim, conhecendo-se a resposta em frequência de malha aberta de um sistema com realimentação unitária, a Carta de Nichols permite determinar rapidamente a resposta em frequência em malha fechada. Nos dias de hoje, o valor da Carta de Nichols está na orientação do projetista a respeito do tipo de compensador a utilizar num problema de projeto de maneira a satisfazer especificações do sistema de malha fechada dadas no domínio da frequência.



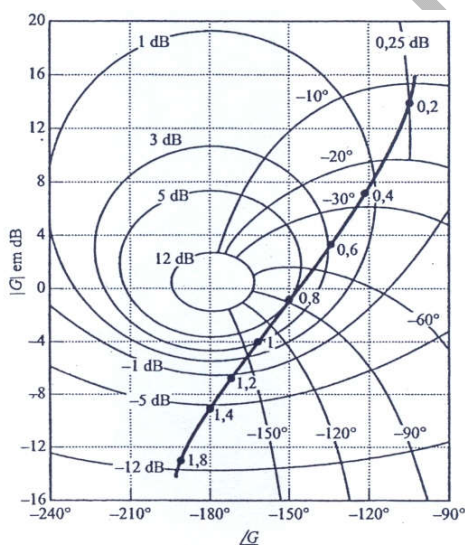
**Exemplo**

Seja o sistema em malha fechada com realimentação unitária cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}.$$

Considerem-se os seguintes pontos da resposta em frequência de **malha aberta**  $G(j\omega)$ :

$\omega$ (rad/s)	Ganho (dB)	Fase (graus)
0,2	13,8	-107,0
0,4	7,1	-123,1
0,6	2,7	-137,7
0,8	-0,9	-150,5
1,0	-4,0	-161,6
1,2	-6,8	-171,2
1,4	-9,4	-179,5
1,8	-14,0	-192,9



Fonte: Livro do Ogata, pg. 407, Figura 6.78-(a).

Localizando-se esses pontos na Carta de Nichols, podem-se ler de imediato os valores da resposta em frequência de **malha fechada**  $G_{mf}(j\omega)$ :

$\omega$ (rad/s)	Ganho (dB)	Fase (graus)
0,2	0,25	-12
0,4	1,5	-26
0,6	3,0	-47
0,8	5,0	-86
1,0	3,0	-135
1,2	-1,6	-164
1,4	-5,8	-180
1,8	-11,0	-196

Observando a figura acima, também podem ser determinados por inspeção os valores das margens de estabilidade:

$$MG = 9 \text{ dB}$$

$$MF = 35^\circ,$$

assim como os valores do pico e da frequência de ressonância

$$M_r = 5 \text{ dB}$$

$\omega_r = 0,8 \text{ rad/s}$ .

Note que as Margens de Ganho e Fase são lidas, respectivamente, nos pontos onde a curva de resposta em frequência de malha aberta cruza os eixos de  $0 \text{ dB}$  e  $-180^\circ$ . O pico e a frequência de ressonância, por sua vez, são lidos no ponto em que essa mesma curva tangencia a curva de nível de malha fechada de ganho máximo.

LAC-POLI-USP