Folha de Consulta PTC3020 P1 Nome: NUSP: Data:

Laplace

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \triangleq \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

Teoremas de Laplace

Convolução

$$F_1(s)\cdot F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) * f_2(\tau)d\tau$$

Teorema do valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Válido se existir transformada de f(t) e de sua derivada também; se existir limite no infinito de f(t); sF(s) não tiver polos no semiplano direito (S.P.D.).

Teorema do valor inicial

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)$$

Válido se existir transformada de f(t) e de sua derivada também; se existir limite no infinito de f(t);

Propriedades de Laplace

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0_-)$$ Diferenciação

$$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2F(s) - sf(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}\dot{f}(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-)$$

Integração

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau)d\tau}{s}$$

Multiplicação por tempo

$$-\frac{d}{ds}F(s) = \mathcal{L}[tf(t)]$$

Linearidade

$$\mathcal{L}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)] = c_1F_1(s) + c_2F_2(s)$$

Translação na frequência

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Mudança de Escala de tempo

$$\mathcal{L}[f(\omega t)] = \frac{1}{\omega}F(s/\omega)$$

Translação no tempo

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

Transformada inversa de Laplace

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Polos simples

$$\left.\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_i)\right|_{s=-p_i} = \left[\frac{\alpha_1}{s+p_1}(s+p_i)+\ldots+\frac{\alpha_i}{s+p_i}(s+p_i)+\ldots+\frac{\alpha_n}{s+p_n}(s+p_i)\right]_s$$

$$\alpha_i = \left.\frac{B(s)}{A(s)}(s+p_i)\right|_{s=-p_i}$$

Polos múltiplos

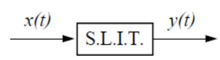
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\ldots(s+p_n)} =$$

$$= \frac{\alpha_{1r}}{(s+p_1)^r} + \frac{\alpha_{1r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{11}}{(s+p_1)} + \frac{\alpha_2}{s+p_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s+p_n}$$

Tabela de transformadas de Laplace usuais

Funções							
$f(t)$	$\delta(t)$	$1(t)$	$t\cdot 1(t)$	e^{-at}	$sen(\omega t)$	$cos(\omega t)$	$e^{-at}\cdot cos(\omega t)$
$F(s)$	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
	Impulso unitário	Degrau unitário					

Funções de transferência

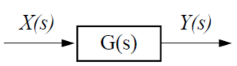


$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0\cdot s^m + b_1\cdot s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\cdot s + b_m}{a_0\cdot s^n + a_1\cdot s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\cdot s + a_n}$$

$$G(s) \overset{\Delta}{=} \left.\frac{Y(s)}{X(s)}\right|_{C.I.Q.}$$

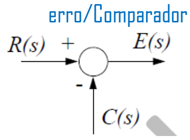
Raízes da equação característica (X(s)) são polos de G(s) e raízes de Y(s) são zeros de G(s)

Diagrama de blocos



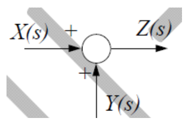
$$Y(s) = G(s)\cdot X(s)$$

Detector de erro/Comparador

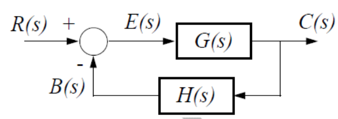


$$E(s) = R(s) - C(s)$$

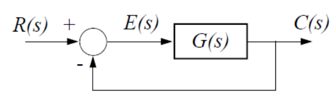
Somador



$$Z(s) = X(s) + Y(s)$$

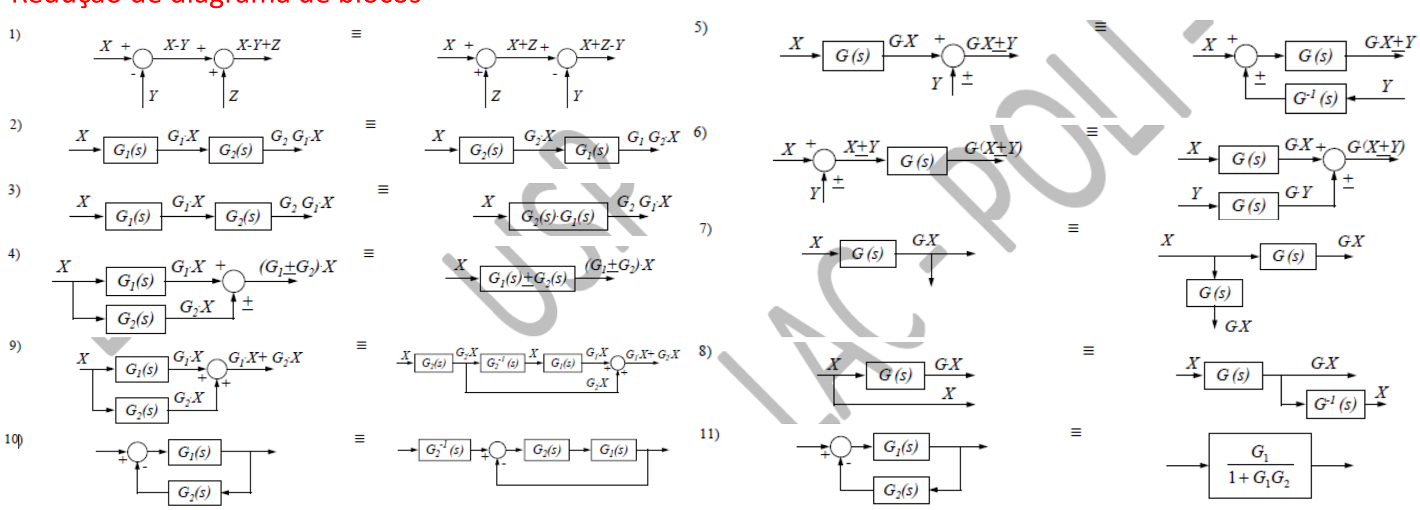


$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}}$$



$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}}$$

Redução de diagrama de blocos



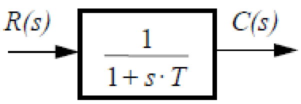
Efeitos da realimentação

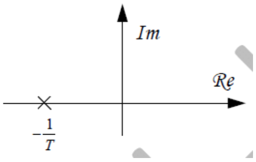
Caso	Regime	Malha Aberta	Malha Fechada
Modelo Exato	Estacionário	$e(\infty)=0$	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \frac{1}{1+KK_0}$
Incerteza em K_0	Estacionário	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \left\lvert\frac{\Delta K_0}{K_0}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \frac{1}{1+KK_0\left\lvert 1+\frac{\Delta K_0}{K_0}\right\rvert}$
Perturbação de Torque	Estacionário	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert = \left\lvert\frac{K_0K_1T}{A}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e(\infty)}{A}\right\rvert \le \frac{1}{KK_0}\left(1+\left\lvert\frac{K_0K_1T}{A}\right\rvert\right)$
	Transitório	τ	$\tau' = \frac{\tau}{1+KK_0}$

No modelo exato, os resultados dizem que em um caso ideal (sem perturbações externa e com modelagem completamente perfeita – situação irreal), o controle poderia ser feito em malha aberta (por conta do erro nulo). Com incerteza em Ko, o erro estacionário em malha fechada é menos sensível a variações em Ko do que em malha aberta. Com perturbação na carga, o erro também é menos sensível em malha fechada do que em malha aberta. Na resposta transitória, a resposta do sistema é mais rápida em malha fechada.

Folha de Consulta PTC3020 P1 Nome: NUSP: Data:

Sistemas de 1ª ordem





Condições iniciais nulas

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+s\cdot T}=\frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}}$$

Resposta ao degrau (condições iniciais nulas)

$$r(t)=1(t)\implies R(s)=\frac{1}{s}\implies C(s)=\frac{1}{s}-\frac{T}{1+sT}$$

$$c(t)=1-e^{-\frac{t}{T}}$$

Degrau com amplitude 1

$t=T \implies c(T)=1-e^{-1}=0.632$

$t=0 \implies \dot{c}(0)=\frac{1}{T}$

$\lim_{t\to\infty} c(t)=c(\infty)=1$

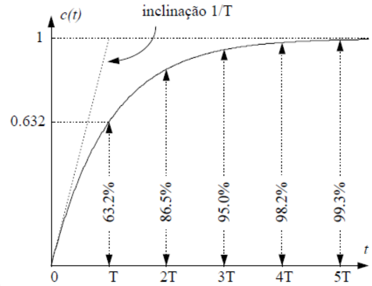
$$c(t)=A\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Degrau com amplitude A

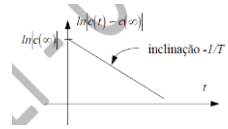
$c(T)=A\cdot(1-e^{-1})\cong 0.632A$

$\dot{c}(0)=\frac{A}{T}$

$c(\infty)=A$



$$\ln|c(t)-c(\infty)|=\ln|c(\infty)|-\frac{t}{T}\quad(t\ge 0)$$



Para descobrir se o Sistema é de 1ª ordem, Traçar o gráfico em escala logarítmica e verificar se é uma reta.

Resposta à rampa

$$r(t)=t\cdot 1(t)\implies R(s)=\frac{1}{s^2}\implies C(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}+\frac{T}{s+\frac{1}{T}}$$

$$c(t)=t-T+T\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Resposta

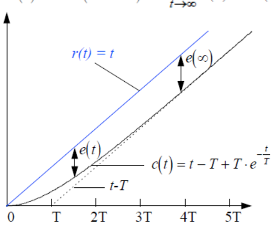
$$c(t)\cong t-T\quad(t>>T)$$

Resposta para t muito grande

$$e(t)=t-\left[t-T+T\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right]=T\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Existência de um erro estacionário

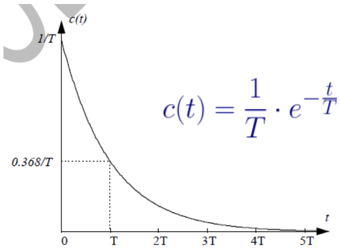
$$e(t)\cong T\quad(t>>T)\qquad \lim_{t\to\infty} e(t)=e(\infty)=T$$



Quanto menor T, mais rápido o transitório a que está sujeita a saída c(t) e menor o erro estacionário e(infty).

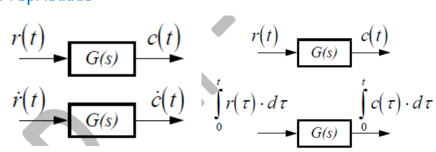
Resposta ao impulso

$$r(t)=\delta(t)\implies R(s)=1\implies C(s)=\frac{1}{1+sT}=\frac{\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}$$



$$c(t)=\frac{1}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Propriedade



Quando aplica-se a derivada de um sinal do sistema, o resultado é a derivada da saída original. O mesmo ocorre com a integral.

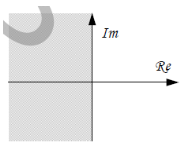
Sistemas de 2ª ordem

Resposta ao degrau unitário

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n\cdot s+\omega_n^2}\qquad(\omega_n>0)$$

$$s^2+2\xi\omega_n\cdot s+\omega_n^2=0$$ As raízes são os polos

Requisito para estabilidade: os polos devem estar no semi-plano esquerdo (S.P.E.)



$$s_{1,2}=\frac{-2\xi\omega_n\pm\sqrt{4\xi^2\omega_n^2-4\omega_n^2}}{2}=\omega_n\cdot\left(-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}\right)$$

$0<\xi<1 \Rightarrow s_1, s_2$ são complexos conjugados (subamortecimento)

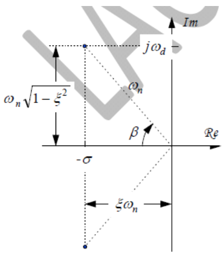
$\xi=1 \Rightarrow s_1=s_2$ são reais (amortecimento crítico)

$\xi>1 \Rightarrow s_1\neq s_2$ são reais (superamortecimento ou sobreamortecimento)

1º caso: 0 < ζ < 1 - Subamortecimento

$$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\cdot\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\overset{\Delta}{=}-\sigma\pm j\cdot\omega_d$$

$$\xi=\cos(\beta)\ \text{ e }\ \sqrt{1-\xi^2}=\operatorname{sen}(\beta)$$



Nomenclatura:

ω_n = frequência natural não amortecida

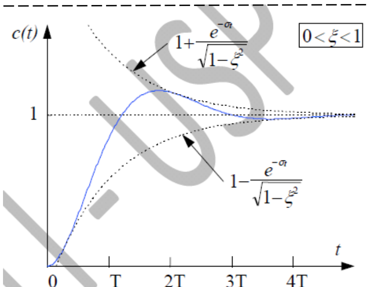
ω_d = frequência natural amortecida

ξ = coeficiente de amortecimento

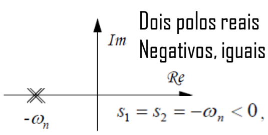
Aplicando o degrau unitário:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s\cdot(s+\sigma+j\omega_d)\cdot(s+\sigma-j\omega_d)}$$

$$\boxed{c(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\sigma t}\cdot\operatorname{sen}(\omega_d t+\beta)\quad(t\ge 0)}$$



2º caso: ζ = 1 – Amortecimento crítico



Dois polos reais Negativos, iguais

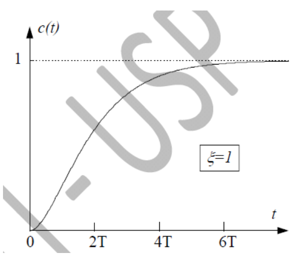
$s_1=s_2=-\omega_n<0$,

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}.$$

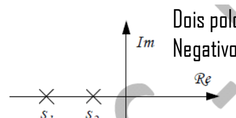
Aplicando o degrau unitário:

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s\cdot(s+\omega_n)^2}$$

$$\boxed{c(t)=1-(1+\omega_n t)\cdot e^{-\omega_n t}\quad(t\ge 0)}$$



3º caso: ζ > 1 – Superamortecimento



Dois polos reais Negativos, distintos

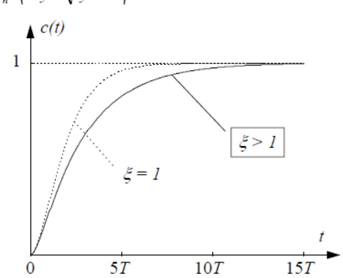
$$s_1=\omega_n\cdot\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)<0$$

$$s_2=\omega_n\cdot\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)<0$$

Aplicando o degrau unitário:

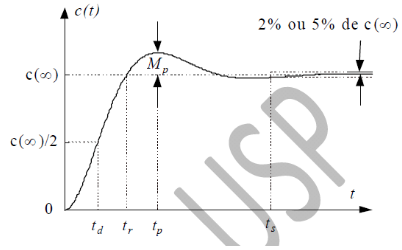
$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s\cdot(s-s_1)\cdot(s-s_2)},$$

$$\boxed{c(t)=1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot\left(\frac{e^{s_2t}}{s_2}-\frac{e^{s_1t}}{s_1}\right)\quad(t\ge 0)}$$



Folha de Consulta PTC3020 P1 Nome: NUSP: Data:

Especificações da Resposta Transitória (s) (subamortecimento)

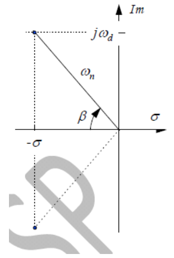


a) tempo de atraso (*delay time*) (t_d);
b) tempo de subida (*rise time*) (t_r);
c) intante de pico (*peak time*) (t_p);
d) tempo de acomodação (*settling time*) (t_s);
e) sobressinal máximo (*maximum peak*) (M_p);

a) **Tempo de Subida** (t_r):

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}}$$

$$c(t_r) = 1$$



b) **Instante de Pico** (t_p):

$$\dot{c}(t_p) = 0$$

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

c) **Sobressinal máximo** (M_p):

$$M_p = c(t_p) - 1$$

$$\boxed{M_p = e^{-\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}} \quad M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)}.$$

d) **Tempo de acomodação** (t_s):

$$T = \frac{1}{\sigma}$$

$$\boxed{t_s(5\%) \cong 3T = \frac{3}{\sigma} = \frac{3}{\xi\omega_n} \quad (0 < \xi < 0.9)}$$

$$\boxed{t_s(2\%) \cong 4T = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad (0 < \xi < 0.9)}$$

Estabilidade

Para a estabilidade dos S.L.I.T., todos os seus polos devem ter parte real negativa (isto é, se situem no S.P.E.).

Critério de Routh (determinar o número de polos de um sistema situados no S.P.D.)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0's^m + b_1's^{m-1} + \ldots + b_{m-1}'s + b_m'}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Procedimento

a) escreva $A(s)$ na forma $A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n$. Admite-se que $a_n \neq 0$, isto é, que eventuais raízes nulas de $A(s)$ já tenham sido removidas.

b) arranje, então, os coeficientes do polinômio numa tabela da seguinte forma:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	...	0
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	...	0
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	...	
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	...	
⋮	⋮					
s^1	f_1					
s^0	g_1					

$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$ e $c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$

$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$ e $c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$

$b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$ e $c_3 = \frac{b_1a_7 - a_1b_4}{b_1}$

O número de raízes de A(s) com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal dos elementos da primeira coluna da tabela.

Teste de Hurwitz (verificar se um polinômio não é estável)

Basta analisar se alguma das opções abaixo é verdadeira.

a) nem **todos** os coeficientes de $A(s)$ **estão presentes** (isto é, pelo menos um dos coeficientes é nulo);

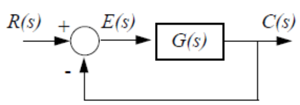
b) nem **todos** os coeficientes de $A(s)$ têm o **mesmo sinal**, (isto é, há pelo menos dois coeficientes com sinais opostos).

OBS: esse teste apenas verifica se o sistema é instável, não sendo possível afirmar que ele é estável caso os critérios sejam obedecidos

Resumo - Importante!

Note que o Critério de Hurwitz **não** permite concluir que um sistema é **estável**. Por outro lado, o Critério de Routh é uma condição necessária e suficiente de estabilidade. Em outras palavras, dele **sempre** se pode concluir se o sistema é estável ou instável.

Erro estacionário



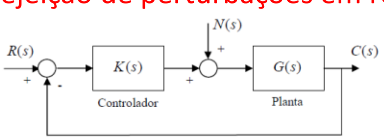
$$G(s) = \frac{K_0 \cdot (\tau_1s+1)\cdot(\tau_2s+1)\cdot\ldots\cdot(\tau_ms+1)}{s^N \cdot (T_1s+1)\cdot(T_2s+1)\cdot\ldots\cdot(T_ps+1)}$$

De acordo com o tipo do sistema e com o tipo da entrada (degrau unitário, rampa unitário, parábola unitária) é possível concluir sobre o erro de acordo com a tabela a seguir:

	$r(t)\quad(t \geq 0)$		
Tipo do Sistema	1	t	$\frac{t^2}{2}$
0	$\frac{1}{1+K_0}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_0}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_0}$

O valor de N define o **tipo** do sistema. Usualmente, fala-se em sistemas tipo 0, 1 ou 2, respectivamente, para $N = 0$, 1 ou 2.

Rejeição de perturbações em regime estacionário



$$c(\infty) = \lim_{s\to 0} s\frac{G(s)}{1+G(s)K(s)}N(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{s^{N_K}G'(s)}{s^{N_G}s^{N_K} + G'(s)K'(s)}N(s).$$

Pertubação do tipo degrau unitário

$$N(s) = \frac{1}{s}$$

$$c(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{s^{N_K}G'(s)}{s^{N_G}s^{N_K} + G'(s)K'(s)}.$$

Pertubação do tipo rampa unitária

$$N(s) = \frac{1}{s^2}$$

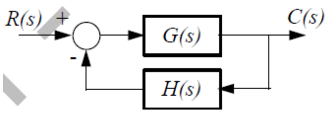
$$c(\infty) = \lim_{s\to 0}\frac{s^{N_K}G'(s)}{s\left[s^{N_G}s^{N_K} + G'(s)K'(s)\right]}.$$

Resumo:
Para que um sistema de controle sujeito a uma perturbação do tipo degrau na entrada da planta a rejeite completamente em regime estacionário é preciso que o controlador tenha pelo menos um polo na origem.
Quando se deseja que o sistema de controle rejeite completamente em regime estacionário perturbações do tipo rampa é necessário que o compensador tenha pelo menos dois polos na origem.

Folha de Consulta PTC3020 P1 Nome: NUSP: Data:

Lugar geométrico das raízes (L.G.R.)

Conjunto dos pontos no plano complexo que correspondem aos polos do sistema em malha fechada.



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\cdot H(s)} \qquad G(s)\cdot H(s) = -1 + j\cdot 0$$

$$G(s)\cdot H(s) = \frac{k\cdot(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot\ldots\cdot(s-z_m)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)}$$

Condição de fase

$$\angle G(s)\cdot H(s) = 180^\circ \pm i\cdot 360^\circ$$

$$\angle s-z_1 + \angle s-z_2 + \ldots + \angle s-z_m - \angle s-p_1 - \angle s-p_2 - \ldots - \angle s-p_n = 180^\circ \pm i\cdot 360^\circ \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Condição de módulo (ganho)

$$|G(s)\cdot H(s)| = 1$$

$$|G(s)\cdot H(s)| = k\cdot\frac{|s-z_1|\cdot|s-z_2|\cdot\ldots\cdot|s-z_m|}{|s-p_1|\cdot|s-p_2|\cdot\ldots\cdot|s-p_n|} = 1$$

$$k = \frac{|s-p_1|\cdot|s-p_2|\cdot\ldots\cdot|s-p_n|}{|s-z_1|\cdot|s-z_2|\cdot\ldots\cdot|s-z_m|}$$

Regras para o traçado do L.G.R.

Continuidade do L.G.R.
L.G.R. possui curvas contínuas

Número de ramo do L.G.R.
Os polos da malha fechada descrevem n curvas no L.G.R..

Simetria do L.G.R.
L.G.R. é simétrico em relação ao eixo real

1º passo: Pontos de Início de Término do L.G.R. Deve-se marcar os polos (x) e zeros (o) da malha aberta no plano complexo

$$0 < k < +\infty$$

Pontos de início: K -> 0+
Pontos de término: k -> infty

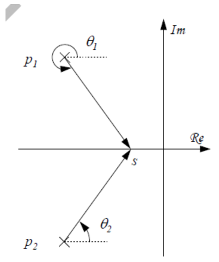
Atenção: Achar a equação característica de malha fechada primeiro para depois achar os polos e os zeros

---

2º passo: L.G.R sobre o eixo real Determinar quais pontos do eixo real que pertencem ao L.G.R

Para que o ponto s do eixo real pertença ao L.G.R., o número total de polos e zeros reais de malha aberta à direita de s deve ser ímpar.

$+\phi_i = +180^\circ$ para cada zero real de malha aberta z_i à direita de s;
$-\theta_i = -180^\circ$ para cada polo real de malha aberta p_i à direita de s;
$\phi_i = \theta_i = 0^\circ$ para cada zero real z_i ou polo real p_i de malha aberta à esquerda de s;



3º passo: Assíntotas Número de assíntotas com k->infty é igual ao excesso de polos sobre zeros para n>m (número de polos menos o número de zeros)

$$\phi_i \cong \theta_j \cong \alpha \qquad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n-m} \pm \frac{i}{n-m}\cdot 360^\circ \quad (i = 0,1,2,\ldots) \quad \alpha_i\ (0 \le i \le n-m-1)$$

Ângulo da assíntota com o eixo real

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Ponto de cruzamento das assíntotas com o eixo real

4º passo: Pontos de partida e de chegada sobre o eixo real Zeros atraem o L.G.R. e polos repelem-no

Se houver dois polos de malha aberta adjacentes sobre o eixo real e se o segmento entre eles for parte do L.G.R., então existirá pelo menos um ponto de partida nesse segmento. De maneira análoga, dois zeros adjacentes no eixo indica pelo menos um ponto de chegada. Se o segmento entre um polo e um zero reais pertencer ao L.G.R., então o número de pontos de partida sobre o segmento igualará o número de chegadas, incluindo-se aí o caso em que tal número é nulo.

$$k = -\frac{A(s)}{B(s)} \qquad \frac{dk}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dA(s)}{ds}\cdot B(s) - A(s)\cdot\frac{dB(s)}{ds} = 0$$

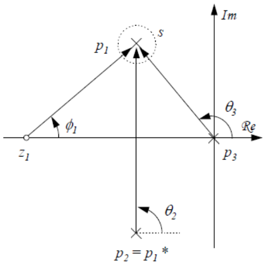
As raízes desta equação polinomial fornecem os possíveis candidatos a solução do problema.

5º passo: Ângulo de partida Determinar os ângulos de partidas de polos e ângulos de chegada a zeros

$$\phi_i = \angle p_1 - z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\theta_i = \angle p_1 - p_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^{m}\phi_j - \sum_{j=2}^{n}\theta_j - 180^\circ \pm i\cdot 360^\circ \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$



6º passo: Pontos de cruzamento com o eixo imaginário

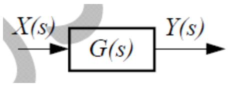
Se utilizando o Critério de Routh, obtém-se os valores do ganho k correspondentes a cruzamentos do eixo imaginário, após isso substituem-se esses valores de k na equação característica, faz-se s = jw e obtém-se os valores de ômega procurados após igualar a zero as partes real e imaginária;

7º passo: Esboço do L.G.R.

Folha de Consulta PTC3020 P2 Nome: NUSP: Data:

Resposta em frequência

Conceituação



$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\boxed{y_\infty(t) = A \cdot \left|G(j\omega)\right| \cdot sen\left(\omega t + \Phi(\omega)\right)}$$

- um S.L.I.T. estável, sujeito a uma entrada senoidal apresenta, em regime permanente, uma saída também senoidal e de mesma frequência que a entrada;
- a relação entre as amplitudes da saída e da entrada (ganho) é dada por $|G(j\omega)|$;
- a diferença entre as fases da saída e da entrada (defasagem) é dada por $\Phi(\omega) = \underline{|G(j\omega)}$;

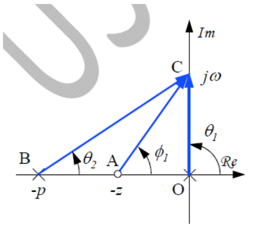
O ganho e a defasagem são a resposta em frequência; Para determinarmos, dado G(s) basta substituirmos s=jw na expressão e obtermos o módulo e a fase da expressão resultante

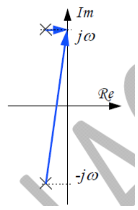
Relação com a configuração de polos e zeros

$$G(s) = \frac{k \cdot (s+z)}{s \cdot (s+p)}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{k \cdot |j\omega + z|}{|j\omega| \cdot |j\omega + p|} = \frac{k \cdot \overline{AC}}{\overline{OC} \cdot \overline{BC}}$$

$$\underline{|G(j\omega)} = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$





Polos próximos ao eixo imaginário origina um pico no ganho (ressonância). Zeros próximos ao eixo imaginária denotam atenuação.

Gráficos de resposta em frequência

Diagramas de Bode

$$20 \cdot \log|G(j\omega)| = 20 \cdot \log|K_0| + \sum_{i=1}^{m} 20 \cdot \log|1 + j\omega\tau_i| - N \cdot 20 \cdot \log|j\omega| - \sum_{i=1}^{p} 20 \cdot \log|1 + j\omega T_i|$$

O ganho, frequentemente, é representado como $20 \cdot log_{10}|G(j\omega)|$. Esta unidade é denominada decibel (dB).

$$G(s) = \frac{k \cdot (s+z_1) \cdot (s+z_2) \ldots (s+z_m)}{s^N \cdot (s+p_1) \cdot (s+p_2) \ldots (s+p_p)}$$

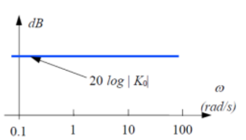
$$\underline{|G(j\omega)} = \underline{|K_0} + \sum_{i=1}^{m} \underline{|1 + j\omega\tau_i} - N \cdot 90° - \sum_{i=1}^{p} \underline{|1 + j\omega T_i}$$

Ganho K_0

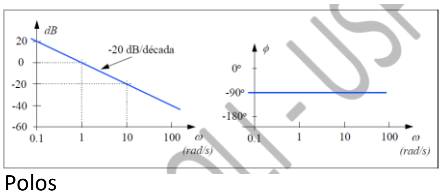
A contribuição de K_0 para o gráfico de Bode de ganho é uma reta horizontal correspondente a $20 \cdot \log|K_0|$.

Em geral, $K_0 > 0$ e, portanto, neste caso $\underline{|K_0} = 0°$.

Dessa maneira, o efeito do ganho K_0 sobre os Diagramas de Bode se resume em deslocar o gráfico de ganho e manter inalterado o de defasagem.



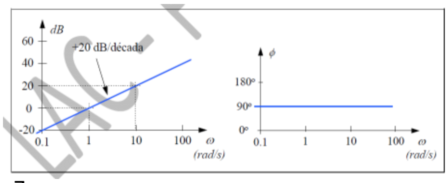
Termos associados a polos e zeros na origem



Polos

$$-20 \cdot log|j\omega|$$

$$-90°$$



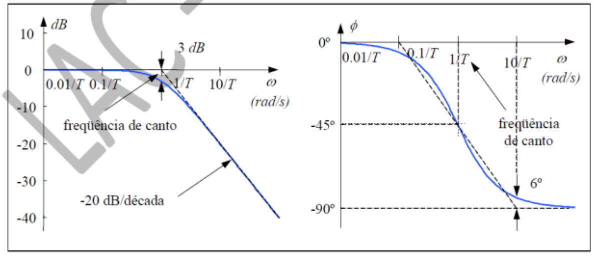
Zeros

$$+20 \cdot log|j\omega|$$

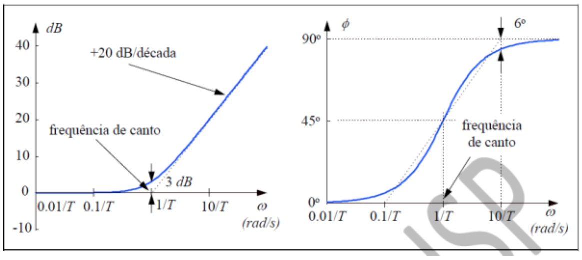
$$+90°$$

Quando os polos (zeros) na origem têm multiplicidade N, o gráfico de ganho apresenta declividade -20N dB/década (+20N dB/década), enquanto o gráfico de defasagem se desloca para $-N \cdot 90°$ $(+N \cdot 90°)$.

Termos associados a polos e zeros reais fora da origem

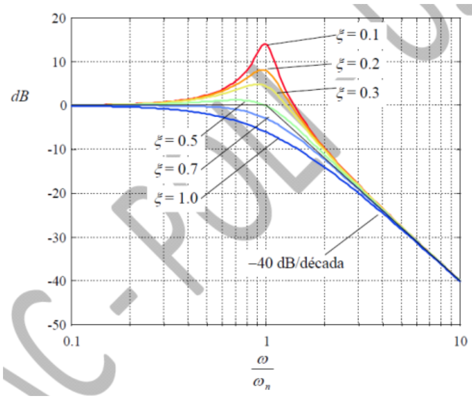


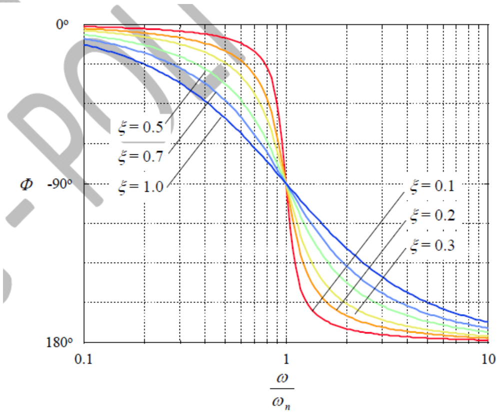
Polos



Zeros

Termos associados a polos e zeros complexos conjugados





No entanto, obviamente o Diagrama de Bode de ganho depende de ξ. Se desenharmos os gráficos com exatidão, perceberemos que os mesmos apresentam um pico de ressonância nas vizinhanças de $\omega = \omega_n$ e que a magnitude deste pico depende de ξ, sendo tanto maior quanto menor for ξ (veja a figura abaixo).

Para concluir este tópico, deve-se observar que, para fatores do tipo:

$$\frac{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}{\omega_n^2}$$

(com $0 < \xi < 1$), correspondentes a zeros complexos conjugados, as curvas de ganho e defasagem podem ser obtidas de imediato, invertendo o sinal daquelas associadas a polos complexos conjugados.

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \left(0 \le \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Frequência de ressonância

$$M_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad \left(0 \le \xi \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ganho de ressonância

Folha de Consulta PTC3020 P2 Nome: NUSP: Data:

Procedimento para Construção dos Diagramas de Bode

- Escrever $G(j\omega)$ na forma de um produto de fatores dos tipos apresentados anteriormente;
- Identificar as frequências de canto associadas a cada um dos fatores;
- Desenhar as aproximações assintóticas das curvas de ganho em *dB* para cada um dos fatores;
- Obter a soma das assíntotas do passo anterior;
- Havendo fatores de segunda ordem, esboçar as curvas de ganho nas vizinhanças de ω_n;
- Desenhar as curvas de defasagem para cada um dos fatores;
- Obter a soma das curvas do passo anterior.

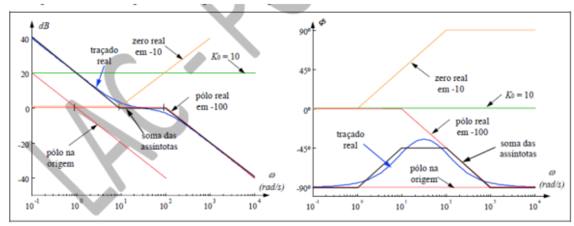
$$G(s)=\frac{k\cdot(s+z_1)\cdot(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{s^N\cdot(s+p_1)\cdot(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

$$G(s)=\frac{K_0\cdot(\tau_1 s+1)\cdot(\tau_2 s+1)\ldots(\tau_m s+1)}{s^N\cdot(T_1 s+1)\cdot(T_2 s+1)\ldots(T_p s+1)}$$ **(Forma de constantes de tempo)**

Basicamente tem-se que pegar a função de transferência G(s), botar em forma de constantes do tempo e analisar polos e zeros.

$$G(j\omega)=\frac{10\cdot(j\cdot 0.1\omega+1)}{j\omega\cdot(j\cdot 0.01\omega+1)}$$

- ganho $K_0=10$;
- um polo na origem;
- um polo real em -100;
- um zero real em -10.



Determinação do Tipo do Sistema e do Ganho K_0 com Base nos Diagramas de Bode

Declividade (dB/dec)	Tipo
0	0
-20	1
-40	2
⋮	⋮

• Sistemas Tipo 0

$$G(s)=K_0\frac{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)\cdots(s\tau_m+1)}{(sT_1+1)(sT_2+1)\cdots(sT_n+1)},\quad (K_0>0)$$

i) o diagrama de Bode de $\widetilde{G}(j\omega)$ tende a uma reta horizontal para frequências suficientemente baixas e

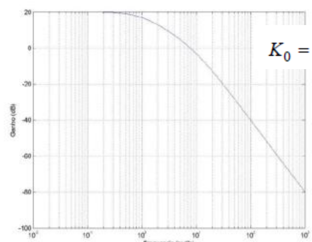
ii) o valor do ganho em baixas frequências K_0 pode ser obtido diretamente do gráfico em baixas frequências.

$\omega \ll \frac{1}{\tau_i}\quad (1\le i\le m)$

e

$\omega \ll \frac{1}{T_i}\quad (1\le i\le n),$

$$\widetilde{G}(j\omega)=K_0,\qquad 20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\omega)\right|\cong 20\log_{10}K_0,$$



$K_0=10.$

• Sistemas Tipo 1

$$G(s)=K_0\frac{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)\cdots(s\tau_m+1)}{s(sT_1+1)(sT_2+1)\cdots(sT_n+1)},$$

$\omega \ll \frac{1}{\tau_i}\quad (1\le i\le m)$

e $\qquad \widetilde{G}(j\omega)\cong\frac{K_0}{j\omega},$

$\omega \ll \frac{1}{T_i}\quad (1\le i\le n),$

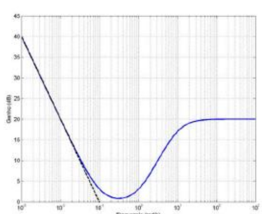
$$20\log_{10}|G(j\omega)|\cong 20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\omega)\right|=20\log_{10}\left|\frac{K_0}{\omega}\right|=20\log_{10}K_0-20\log_{10}\omega,$$

i) para frequências suficientemente baixas o diagrama de Bode de $\widetilde{G}(j\omega)$ tende a uma reta com declividade de –20dB/dec e

ii) o valor do ganho em baixas frequências K_0 pode ser obtido diretamente **da reta que aproxima o gráfico** em baixas frequências de duas maneiras:

ii.a) ou como consequência do fato de que para $\omega=1$, ➡ $\log_{10}\omega=0$ ➡ $20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j1)\right|=20\log_{10}K_0$ ➡ $\left|\widetilde{G}(j1)\right|=K_0$

ii.b) ou então considerando a frequência ϖ na qual $20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\varpi)\right|=0\,\text{dB}$ ➡ $20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\varpi)\right|=20\log_{10}K_0-20\log_{10}\varpi=0,$ ➡ $K_0=\varpi.$



$K_0=0{,}1.$

• Sistemas Tipo 2

$$G(s)=K_0\frac{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)\cdots(s\tau_m+1)}{s^2(sT_1+1)(sT_2+1)\cdots(sT_n+1)},$$

$\omega \ll \frac{1}{\tau_i}\quad (1\le i\le m)$

e $\qquad \widetilde{G}(j\omega)\cong\frac{K_0}{(j\omega)^2},$

$\omega \ll \frac{1}{T_i}\quad (1\le i\le n),$

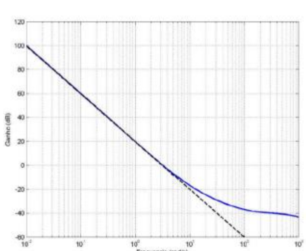
$$20\log_{10}|G(j\omega)|\cong 20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\omega)\right|=20\log_{10}\left|\frac{K_0}{\omega^2}\right|=20\log_{10}K_0-40\log_{10}\omega,$$

i) para frequências suficientemente baixas o diagrama de Bode de $\widetilde{G}(j\omega)$ tende a uma reta com declividade de –40dB/dec e

ii) o valor do ganho em baixas frequências K_0 pode ser obtido diretamente **da reta que aproxima o gráfico** em baixas frequências de duas maneiras:

ii.a) ou como consequência do fato de que para $\omega=1$, ➡ $\log_{10}\omega=0$ ➡ $20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j1)\right|=20\log_{10}K_0,$ ➡ $\left|\widetilde{G}(j1)\right|=K_0;$

ii.b) ou então considerando a frequência ϖ na qual $20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\varpi)\right|=0\,\text{dB}$ ➡ $20\log_{10}\left|\widetilde{G}(j\varpi)\right|=20\log_{10}K_0-40\log_{10}\varpi=0,$ ➡ $K_0=\varpi^2.$



$K_0=10,$

Folha de Consulta PTC3020 P2   Nome: NUSP: Data:

Diagramas de Nyquist

Formas Gerais de Gráficos Polares

$$G(j\omega)=\frac{K_0\cdot(1+j\cdot\omega\tau_1)\cdot(1+j\cdot\omega\tau_2)\ldots(1+j\cdot\omega\tau_m)}{(j\omega)^N\cdot(1+j\cdot\omega T_1)\cdot(1+j\cdot\omega T_2)\ldots(1+j\cdot\omega T_p)}$$

Sejam $n=N+p$ e m, respectivamente, os graus dos polinômios do denominador e do numerador. Vamos supor, como é usual, que $n\geq m$.

Analisemos o comportamento de $G(j\omega)$ quando $\omega\to+\infty$. Há dois casos a considerar:

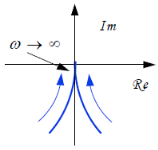
i) $n=m$ $G(j\infty)=\dfrac{K_0\cdot\tau_1\cdot\tau_2\ldots\tau_m}{T_1\cdot T_2\ldots T_p}$

Diagrama termina no eixo real para w -> infty

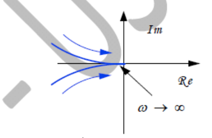
ii) $n>m$ $G(j\infty)=0$

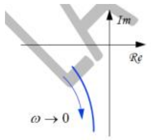
Diagrama termina na origem para w -> infty

se n - m = 1, então $|G(j\omega)\cong-90^\circ$ e a aproximação da origem tem uma das formas abaixo:



se n - m = 2, então e a aproximação da origem se dá como representado no gráfico.





ii) **Sistemas do tipo 1** : neste caso, $N=1$ e, portanto, o termo predominante de $G(j\omega)$ é o fator $j\omega$ que aparece no denominador. Sendo assim,

$$\lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)|=\infty$$

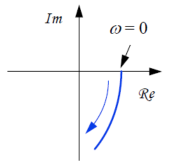
e

$$\lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=-90^\circ$$

i) **Sistemas do tipo 0** : neste caso, $N=0$ e, portanto,

$$G(j0)=K_0$$

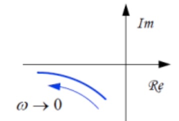
o que significa que o ponto inicial do Diagrama de Nyquist se localiza sobre o eixo real positivo. Pode-se mostrar, também, que a tangente ao Diagrama em $\omega=0$ é perpendicular ao eixo real.



iii) **Sistemas do tipo 2** : neste caso, $N=2$ e, de maneira semelhante ao caso anterior, o termo predominante de $G(j\omega)$ é o fator $(j\omega)^2$ que aparece no denominador. Dessa forma,

$$\lim_{\omega\to 0}|G(j\omega)|=\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\omega\to 0}\angle G(j\omega)=-180^\circ$$

e, portanto, em baixas frequências, o Diagrama de Nyquist é assintótico a uma reta paralela ao eixo real negativo (eventualmente, o próprio eixo).

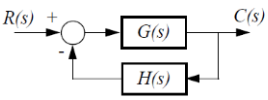


Critério de Nyquist

O Critério de Nyquist é um resultado teórico que permite estudar a estabilidade de um sistema em **malha fechada graficamente** com base na inspeção do diagrama polar da resposta em frequência (diagrama de Nyquist) de **malha aberta**, sem a necessidade de determinar os polos do sistema em malha fechada.

$N=Z-P$ N: número de envolvimentos no sentido horário

i) a função $f(s)$

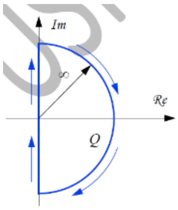


A estabilidade da malha fechada requer
Que todas as raízes da equação característica
Estejam no S.P.E

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}$$

$$f(s)=1+G(s)\cdot H(s)=0$$

ii) o contorno fechado Q percorrido por s no plano s



O sistema é estável apenas de nenhum de seus polos se localiza no S.P.D.
O sentido adotado é o horário.

iii) os números de polos (P) e de zeros (Z) de f(s) no interior desse contorno Q no plano s

$$G(s)H(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \quad f(s)=\frac{D(s)+N(s)}{D(s)} \quad Z=0, \Rightarrow N=-P$$

Nota-se, portanto, que os polos de $f(s)$ são os polos de malha aberta de $G(s)H(s)$; por sua vez, os zeros de $f(s)$ são os polos de malha fechada do sistema. Considerando então os polos e zeros de $f(s)$ no interior do contorno Q, temos que ***P* é o número de polos instáveis de malha aberta e *Z* é o número de polos instáveis de malha fechada**.

iv) a imagem de f(s) no plano f(s) quando s percorre o contorno Q no plano s

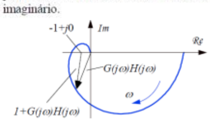
Em resumo, para se obter o gráfico da imagem de $f(s)$ quando s percorre o contorno Q, basta desenhar o gráfico polar da resposta em frequência de $1+G(s)H(s)$ e completar a figura desenhando seu simétrico em relação ao eixo real.

Muito provavelmente, você não terá que desenhar o gráfico na prova

v) o número de voltas (N) da imagem de f(s) em torno da origem do plano f(s)

Construído o gráfico da imagem de $f(s)$ conforme o item iv), este passo é trivial: basta contar o número de envolvimentos (N) desse gráfico em torno da origem do plano f(s) no sentido horário.

Devemos ter em mente que, para aplicarmos o Teorema do Mapeamento na investigação da estabilidade, é necessário que o **Contorno de Nyquist não passe sobre polos ou zeros de malha aberta do sistema**. Dessa maneira, até este ponto está excluído de nossa discussão o caso em que o sistema em malha aberta tem polos ou zeros sobre o eixo imaginário.



Portanto, o envolvimento da origem pelo Diagrama de Nyquist de $1+G(j\omega)\cdot H(j\omega)$ é equivalente ao envolvimento do ponto $-1+j\cdot 0$ pelo lugar geométrico de $G(j\omega)\cdot H(j\omega)$.

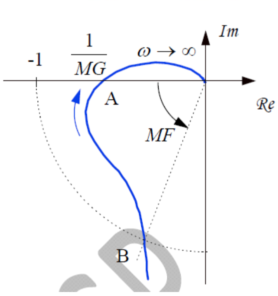
Sistemas de Fase Mínima

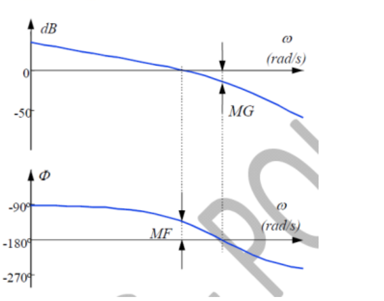
Diz-se que um sistema dado por sua função de transferência $G(s)$ é de **fase mínima** quando todos os seus polos e zeros se localizam no semi-plano complexo esquerdo. Quando há pelo menos um polo ou zero no semi-plano direito, diz-se que o sistema é de **fase não mínima**.

$G_1(s)=\dfrac{1+0.1s}{1+s}$ Fase mínima $G_2(s)=\dfrac{1-0.1s}{1+s}$ Fase não mínima

Margens de estabilidade

Para um grande número de sistemas de controle, dois parâmetros são úteis para medir a distância do Diagrama de Nyquist ao ponto -1+j0. Esses parâmetros são a **margem de ganho** (MG) e a **margem de fase** (MF) e constituem o que se costuma denominar margens de estabilidade de um sistema de controle.





A margem de ganho é uma medida de quanto o ganho pode ser aumentado antes de causar instabilidade do sistema.

A margem de fase, por sua vez, é uma medida de quanto de defasagem pura o sistema tolera antes de se tornar instável.

É igualmente simples determinar MG e MF nos Diagramas de Bode. O valor de MG pode ser obtido do gráfico de ganho na frequência em que a defasagem é igual a -180°. O valor de MF, por sua vez, pode ser lido diretamente do gráfico de defasagem na frequência em que o ganho é 0 dB. A figura ao lado ilustra estes fatos.

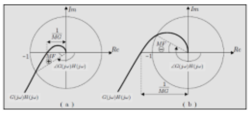


Figura 5.32 (a) Sistema em malha fechada estável. (b) Sistema em malha fechada instável.

Uma vez que as margens de estabilidade representam uma medida da proximidade do Diagrama de Nyquist com relação ao ponto -1+j0, elas dão uma indicação da robustez do sistema face a incertezas do modelo matemático utilizado para o projeto (por isso, essas margens podem ser adotadas como critérios de projeto). Essa é a razão da importância e da popularidade dos conceitos de margens de ganho e de fase.

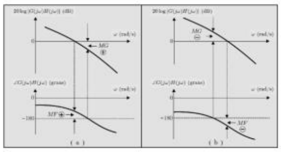
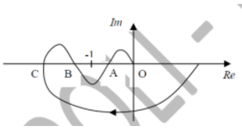


Figura 5.33 (a) Sistema em malha fechada estável. (b) Sistema em malha fechada instável.

É prática usual considerar satisfatórias as margens de ganho superiores a 6 dB (o que corresponde a ganhos maiores que 2) e as margens de fase entre 30° e 60°.

Sistemas condicionalmente estáveis



Supondo que $G(s)H(s)$ seja estável ($P=0$), o Critério de Nyquist permite concluir que, em malha fechada, o sistema também é estável, uma vez que $N=0$.

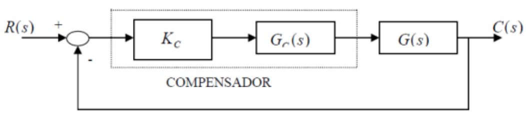
Aumentando o ganho de maneira que o ponto $-1+j0$ pertença ao segmento AO, resulta $N=+2$ (Verifique isto como lição de casa!) e, portanto, o sistema em malha fechada passa a ser instável. O mesmo acontece quando se reduz o ganho de forma que o ponto $-1+j0$ pertença ao segmento CB.

Sistemas deste tipo, em que a malha fechada é estável apenas para valores de ganho pertencentes a um determinado intervalo, são denominados **condicionalmente estáveis**.

Folha de Consulta PTC3020 P2 Nome: NUSP: Data:

Compensação

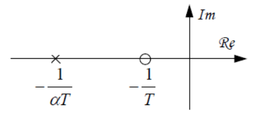
Compensação por avanço de fase



$$\Phi_m = arcsen\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$$

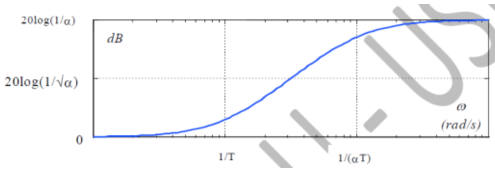
Avanço máximo $\phi_n = MFdes - MFatual + MS$

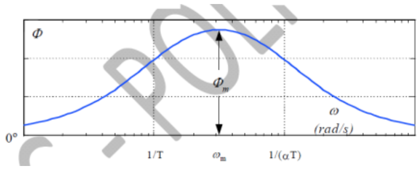
$$G_C(s) = \frac{1+sT}{1+s\alpha T} \qquad (\alpha < 1)$$

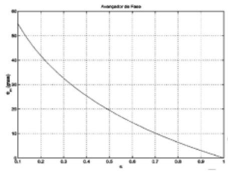


$$\omega_m = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\alpha T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T}$$

Frequência no avanço máximo







Compensação por avanço de fase por meio do LGR

i. com base nas especificações de resposta transitória, determine as localizações dos polos dominantes em malha fechada;

ii. desenhe o L.G.R. e verifique se apenas um ajuste de ganho é suficiente para alocar os polos nas posições desejadas; caso contrário, calcule a deficiência de ângulo Φ a ser suprida pelo compensador;

Torcendo pra não cair

iii. determine as posições do polo e zero do compensador de maneira que este contribua com o ângulo Φ requerido (e, eventualmente, exija o mínimo ganho adicional K_C);

iv. determine o ganho de malha aberta do sistema compensado por meio da condição de módulo do L.G.R..

Compensação por avanço de fase por meio da resposta em freqüência

i. determine o ganho K_c a fim de satisfazer as especificações referentes a erro estacionário;

ii. usando esse valor de K_c, obtenha a margem de fase do sistema não compensado;

iii. determine o ângulo de avanço de fase necessário Φ_m a ser fornecido pelo compensador;

iv. determine o fator de atenuação α por meio da equação:

$$\mathrm{sen}(\Phi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

v. obtenha a freqüência ω_m onde o ganho do sistema não compensado vale $-20log\left(1/\sqrt{\alpha}\right)$. Esta deve ser a nova freqüência onde o ganho é 0 dB;

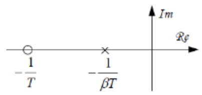
vi. calcule T utilizando a equação:

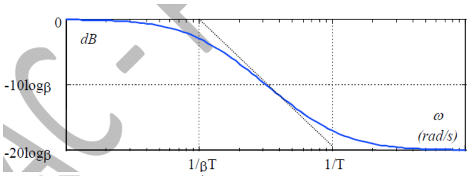
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\cdot T}$$

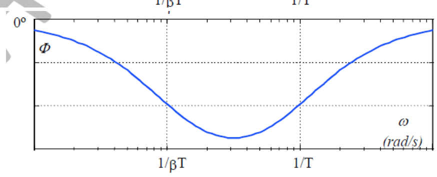
vii. determine as freqüências de canto do compensador $\frac{1}{T}$ e $\frac{1}{\alpha T}$.

Compensação por atraso de fase

$$G_c(s) = \frac{sT+1}{s\beta T+1} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}} \qquad (1 < \beta \le 10)$$







Compensação por atraso de fase por meio do LGR

i. desenhe o L.G.R. para o sistema não compensado e, com base nas especificações da resposta transitória, localize os polos dominantes de malha fechada sobre o L.G.R.;

ii. determine o ganho utilizando a condição do módulo;

iii. calcule o erro estacionário de interesse para o problema;

iv. determine o fator de redução do erro necessário para satisfazer as especificações;

v. escolha o polo e o zero do compensador de maneira a produzir a redução requerida no erro estacionário sem, contudo, alterar sensivelmente o L.G.R. nas vizinhanças dos polos dominantes;

vi. desenhe o L.G.R. para o sistema compensado;

vii. utilizando a condição de módulo, recalcule o ganho para que os polos dominantes de malha fechada se localizem nas posições desejadas.

Torcendo pra não cair

Compensação por atraso de fase por meio da resposta em freqüência

i. determine o ganho de forma a satisfazer a especificação referente a erro estacionário;

ii. usando esse valor de ganho, trace os Diagramas de Bode do sistema não compensado e determine as margens de ganho e fase;

iii. se a especificação relativa à margem de fase não estiver satisfeita, determine a freqüência na qual a defasagem da função de transferência de malha é igual a -180° + MF, onde MF é a margem de fase desejada acrescida de 5 ° a 12° (para neutralizar o atraso de fase introduzido pelo compensador). Escolha esta freqüência como sendo aquela em que o ganho deverá valer 0 dB;

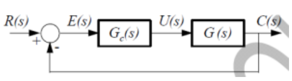
iv. escolha a freqüência de canto $\omega = 1/T$ (correspondente ao zero do compensador) de uma oitava a uma década **abaixo** da freqüência de cruzamento de 0 dB fixada no passo anterior;

v. determine a atenuação necessária para fazer com que o ganho 0 dB corresponda à freqüência fixada no passo (iv);

vi. determine β considerando que a atenuação obtida no passo anterior é $-20log(\beta)$;

vii. calcule a freqüência de canto $\omega = \frac{1}{\beta T}$ associada ao polo do compensador.

Compensadores PID



$$G_c(s) = K_p\cdot\left[1+\frac{1}{s\cdot T_i}+s\cdot T_d\right]$$

T_i é chamado tempo de "reset" e T_d, tempo derivativo ou "rate time".

Controlador proporcional:

$$G_c(s) = K_p$$

Controlador PD:

$$G_c(s) = K_p\cdot\left[1+s\cdot T_d\right]$$

Controlador PI:

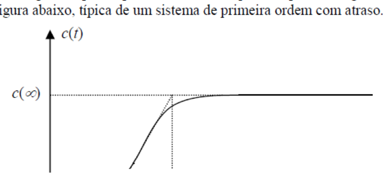
$$G_c(s) = K_p\cdot\left[1+\frac{1}{s\cdot T_i}\right]$$

Controlador PID:

$$G_c(s) = K_p\cdot\left[1+\frac{1}{s\cdot T_i}+s\cdot T_d\right]$$

Primeira Regra do Método de Ziegler-Nichols

Esta regra se aplica apenas no caso em que a resposta a degrau da planta em malha aberta tem o aspecto indicado na figura abaixo, típica de um sistema de primeira ordem com atraso.



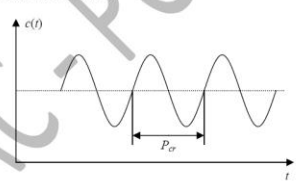
Tipo do Compensador	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

Para o compensador PID é imediato verificar que sua função de transferência resulta:

$$G_c(s) = 0.6T\frac{\left(s+\frac{1}{L}\right)^2}{s}.$$

Segunda Regra do Método de Ziegler-Nichols

Para aplicar esta regra, inicialmente, considera-se o sistema em malha fechada com um controlador proporcional (isto é, $T_i=\infty$ e $T_d=0$). Suponhamos que, aumentando-se o ganho K_p, a saída resulte oscilatória e que, quando o ganho atinge um determinado valor, a saída exibe oscilações não amortecidas (se isto não ocorre, o método não se aplica!). Seja P_{cr} o período dessas oscilações e K_{cr} o valor do ganho.



Tipo do Compensador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Para o compensador PID, sua função de transferência resulta

$$G_C(s) = 0{,}075\,K_{cr}\,P_{cr}\frac{(s+4/P_{cr})^2}{s}$$