PTC 3313– Sistemas de Controle
1ª PROVA – 2020

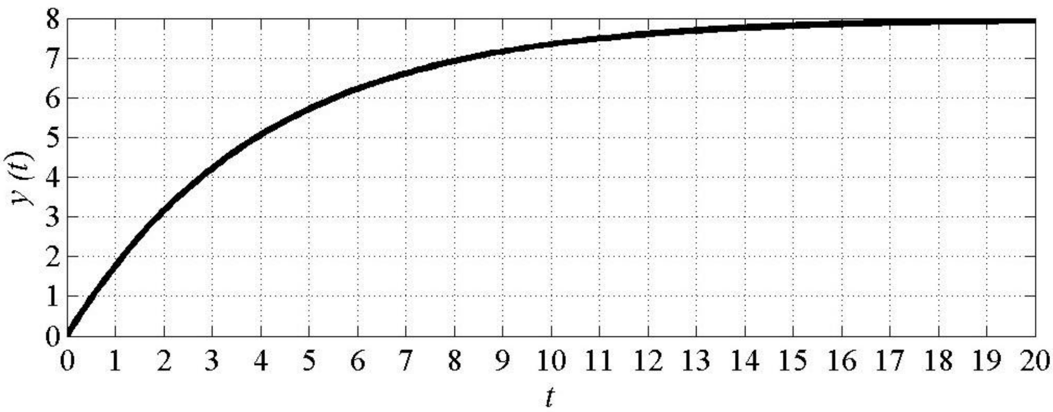
Nome:___________________________ N º USP:__________________

INSTRUÇÕES

- Duração: 3h
- Consulta permitida apenas ao formulário em papel A4 próprio, devidamente identificado e que não contenha soluções de exercícios/problemas.
- Coloque nome e número em todas as folhas.
- Apresente com clareza suas soluções para os problemas. Nunca deixe subentendido seu raciocínio. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Um arquivo único, contendo as soluções das questões propostas e o formulário utilizado, deverá ser entregue. Os nomes dos arquivos das provas digitalizadas deverão conter somente o nome completo do aluno. Ex.: **Diego Colón.pdf** ou **Fuad Kassab Junior.jpg**

1ª questão: (Valor 1,0)

Num motor CC foi aplicado um degrau unitário de tensão nos terminais da sua entrada u(t). A velocidade de saída y(t) foi medida por meio de um tacogerador, cujo gráfico está representado na figura a seguir.



Supondo que o gráfico acima represente a saída $y(t)$ (em Volts) em função de t (em s) de um sistema de primeira ordem, determine a função de transferência do motor CC. **(Valor: 1,0)**

2ª questão: (Valor 5,5)

Um engenheiro quer projetar um sistema de controle proporcional $K (K > 0)$ em malha fechada, com realimentação unitária, para a planta

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)(s^2+2s+17)} .$$

Pede-se:

a) Determine o valor do erro estacionário ao degrau unitário para este sistema. **(Valor 0,5)**

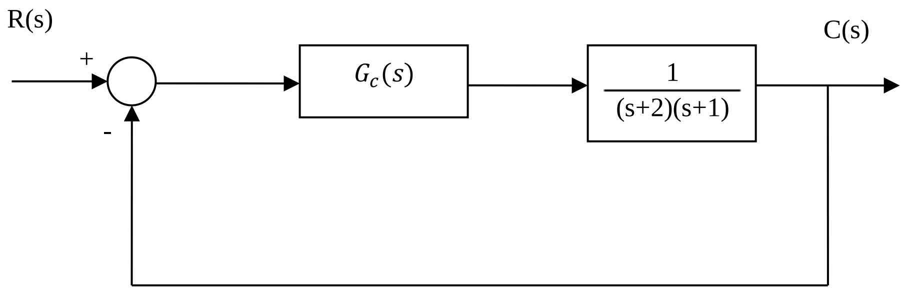
b) Determine, utilizando o critério de Routh-Hurwitz, para que valores de K o sistema é estável. **(Valor 1,0)**

c) Esboce o Lugar Geométrico das Raízes indicando claramente os pontos de início e término do LGR , o LGR sobre o eixo real, os ângulos das assíntotas, intersecção das assíntotas com o eixo real, os pontos de partida e chegada do eixo real (indicando o ganho associado), os ângulos de partida dos polos complexos e, se houver, os pontos de cruzamento com o eixo imaginário (ganho e frequência). **(Valor 3,0)**

d) Determine o valor de K tal que dois polos de malha fechada se situem em $-0.482 \pm 3.73\,j$. **(Valor 1,0)**

3ª questão: (Valor 3,5)

Considere o sistema da seguinte figura.



Considerando $G_c(s) = 1$, pede-se:

a) A ordem e o tipo do sistema? **(Valor: 0,5)**
b) A frequência natural não amortecida, o coeficiente de amortecimento, o sobressinal e o tempo de acomodação (2%) do sistema em malha fechada? **(Valor: 0,5)**
c) É possível projetar um controlador proporcional, i.e., $G_c(s) = k$, tal que o tempo de acomodação (2%) do sistema em malha fechada seja $t_s(2\%) \cong 1{,}0\ s$ e o sobressinal máximo seja $1{,}52\ \%$? Justifique utilizando o Lugar das Raízes. **(Valor: 1,0)**

d) Deseja-se agora empregar o seguinte compensador

$$G_c(s) = k_c \frac{(s + z_c)}{(s + p_c)}.$$

Projete o mesmo de forma a cancelar o polo mais rápido da planta e garantir as mesmas especificações do item c). Justifique utilizando o Lugar das Raízes. **(Valor: 1,5)**

Formulário

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}, para\ 2\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}, para\ 5\%$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi = \cos\beta$$

$$s_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} z_i}{n-m}$$

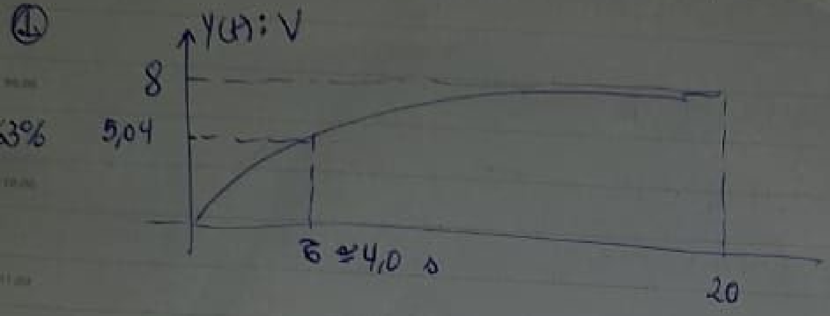
$$\alpha_i = \frac{180}{n-m} \pm \frac{360}{n-m}, i = 0,1,2, \ldots$$

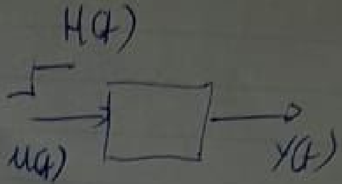
$$K_p = \lim_{s\to o} G(s)H(s)$$

$$K_v = \lim_{s\to o} sG(s)H(s)$$

P1 - PTC 3313 - 02/10/2020

①

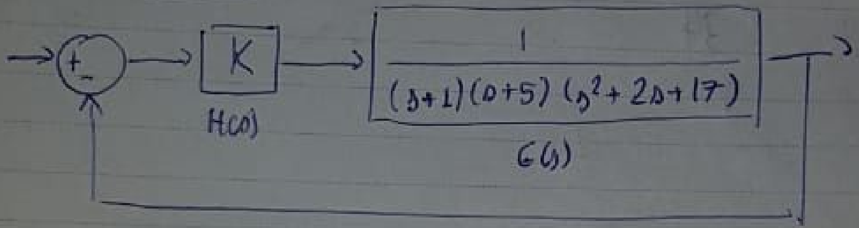




$$G(s) = \frac{8}{4s+1}$$

$$y(t) = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)H(t) = 8\left(1 - e^{-\frac{t}{4}}\right)H(t)$$

②



a) O sistema é tipo zero, logo o erro estacionário é dado por $e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$, $K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$

$$\to K_p = \lim_{s \to 0} \frac{K}{(s+1)(s+5)(s^2+2s+17)} = \frac{K}{5.17} = \frac{K}{85}$$

logo $$e_{ss} = \frac{1}{1+\frac{K}{85}} = \frac{1}{\frac{85+K}{85}} = \frac{85}{85+K}$$

eq. característica : $1 + \dfrac{K}{(s+1)(s+5)(s^2+2s+17)} = 0$

a) $(s+1)(s+5)(s^2+2s+17) + K = 0$

$(s^2+5s+s+5)(s^2+2s+17) + K = 0$

$(s^2+6s+5)(s^2+2s+17) + K = 0$

$s^4 + 2s^3 + \boxed{17s^2} + 6s^3 + \boxed{12s^2} + 102s + \boxed{5s^2} + 10s + 85 + K = 0$

$\underset{a_0}{1} s^4 + \underset{a_1}{8} s^3 + \underset{a_2}{34} s^2 + \underset{a_3}{112} s + \underset{a_4}{(85+K)} = 0$

s^4 1   34   85 + K

s^3 8   112   0

s^2 $\dfrac{8.34-112}{8}$ $\dfrac{8(85+K)-0}{8}$

s^1

s^0

	a_0	a_2	a_4
s^4	1	34	85 + K
	a_1	a_3	a_5
s^3	8	112	0
	b_1	b_2	
s^2	20	85+K	
	c_1	c_2	
s^1	$\dfrac{20.112-8.(85+K)}{20} = \dfrac{1560-8K}{2}$	0	
s^0	85+K		

640
40
-6s

1560
680
2240

240
32
272
-112
160

2240
680
1560

$\dfrac{2240-680-8K}{20}$

$\dfrac{1560-8K}{20}$

cond 1 $1 > 0$ $8 > 0$ $20 > 0$ $\dfrac{1560-8K}{2} > 0$

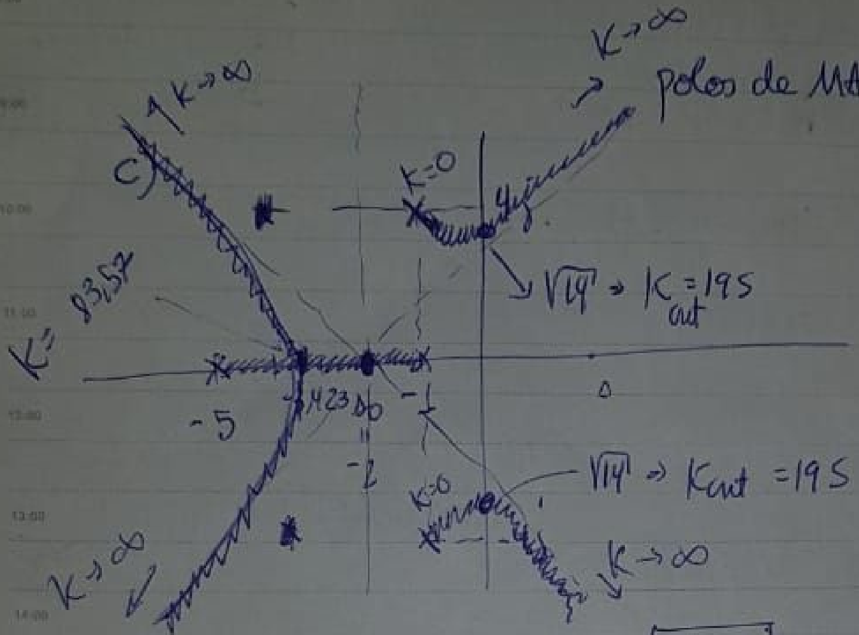
$85 + K > 0$

$1560 > 8K$ $K > -85$

$K < \dfrac{1560}{8} = 195$

☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

② $0 < K < 195$



polos de MA: $-1, -5, -1 \pm 4j$

$s^2+2s+17=0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 17}}{2} = -1 \pm \frac{\overset{j2\cdot 4}{\sqrt{-4\cdot 16}}}{2} = -1 \pm 4j$

Cond. fase: $GH = -1 \Rightarrow \angle GH = 180° \pm l\cdot 360, \ l \in \mathbb{Z}$

$-\angle s+1 - \angle s+5 - \angle s+1+4j - \angle s+1-4j = 180 \pm l\cdot 360$

no eixo real: parcela dos complexos não influi ⇒ só trecho entre

o o

assíntotas: $\alpha = \frac{180}{4} \pm \frac{360}{4} = 45° \pm 90° \cdot l$

$s_\sigma = \frac{-1-5-1+4j-1-4j}{4} = -\frac{8}{4} = -2$

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

$\cancel{-12 - 24.9 - 68.3 - 112}$

$+4.27 - 24.9 + 68.3 - 112$

$108 - 216 + 204 - 112$

312

ponto de partida do eixo real

$$s^4 + 8s^3 + 34s^2 + 112s + 85 + K = 0$$

$$K = -s^4 - 8s^3 - 34s^2 - 112s - 85 \longrightarrow$$

$$\frac{dK}{ds} = -4s^3 - 24s^2 - 68s - 112 = 0$$

$\Rightarrow$ só há uma raiz real $\Rightarrow$ $-3,4233$

$$\frac{dK}{ds} = -4.(-3,4233) - 24.(3,4233)^2 - 68.(-3.423) - 112 \cong 0$$

ângulos de partida

$$-\angle s+1 - \angle s+5 - \angle s+1+4j - \angle s+1-4j = 180°$$

p/ $-1+4j$

$$-\angle -1+4j+1 - \angle -1+4j+5 - \angle -1+4j+1+4j - \phi = 180°$$

$$-90° - \angle 4+4j - 90° - 180° = \phi$$

$$-90° - 45° - 90° - 180° = \phi$$

$$-45° = \phi$$

pontos de cruzamento

$s = j\omega$

$$s^4 + 8s^3 + 34s^2 + 112s + 85 + K = 0$$

$$\omega^4 - 8j\omega^3 - 34\omega^2 + 112j\omega + 85 + K = 0$$

$$(\omega^4 - 34\omega^2 + 85 + K) + j(-8\omega^3 + 112\omega) = 0$$

$$\omega(-8\omega^2 + 112) = 0 \qquad \text{I}$$

$$\omega^4 - 34\omega + 85 + K \qquad \text{II}$$

☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

34
14
136
34
476
14
14
56
14
196

196
85
281
195
476

& (I) $\Rightarrow$ $\omega^2 = \frac{112}{8} = \frac{56}{4} = \frac{28}{2} = 14 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{14}$

$\omega = 0$

$\omega^4 - 34\omega + 85 + K = 0$

como $K > 0 \Rightarrow \omega = 0$ não serve

$(\sqrt{14})^4 - 34 \cdot \sqrt{14}^2 + 85 + K = 0$

$(14)^2 - 34(\sqrt{14})^2 + 85 + k = 0$

$196 - 476 + 85 + k = 0$

$281 - 476 + K = 0$

195

$\Rightarrow$ $\omega = \pm\sqrt{14}$

$K = 195$

d) Condição de fase

$-\angle s+1 - \angle s+5 - \angle s+1+4j - \angle s+1-4j = 180°$

$-\angle -0{,}482+3{,}73j+1 - \angle -0{,}482+3{,}73j+5 - \angle -0{,}482+3{,}73j+1+4j$

$-\angle -0{,}482+3{,}73j+1-4j = 180°$

$-\angle 0{,}5180+3{,}73j - \angle 4{,}5180+3{,}73j - \angle 0{,}5180+7{,}73j$

$-\angle 0{,}5180-0{,}27j$

$-82{,}6937 - 39{,}5426 - 86{,}1662 - 27{,}5361$

$\cong 180°$

$\Rightarrow$ pertence ao LGR

Importante Planejamento Outros Assuntos

/ /

condição de módulo

$$K = |s+1|\,|s+5|\,|s^2+2s+17|$$

$$K = |-0{,}482+3{,}73j+1|\,|-0{,}482+3{,}73j+5|$$
$$\cdot\,|(-0{,}482+3{,}73j)^2+2.(-0{,}482+3{,}73j)+17$$

$$K = |0{,}5180+3{,}73j|\,|4{,}518+3{,}73j|$$

$$\vdots$$

$$K = |s^4+8s^3+34s^2+112s+85|$$

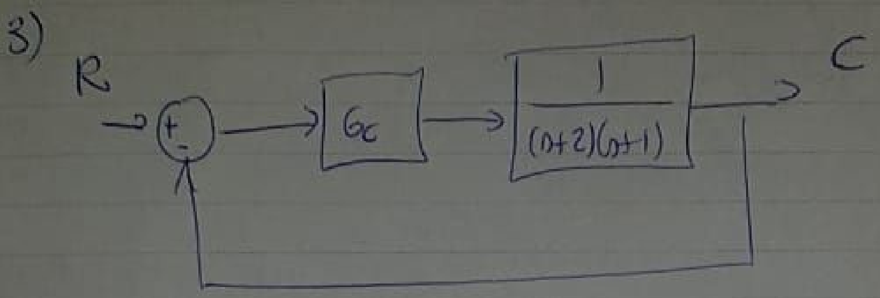
$\uparrow$

$-0{,}482+3{,}73j$

$$\Rightarrow K \cong 100$$

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

3)



a) p/ $G_c(s) = 1 \rightarrow$ tipo $\emptyset \rightarrow$ não há integradores na FTMA

ordem: $\dfrac{\frac{1}{(s+2)(s+1)}}{1 + \frac{1}{(s+2)(s+1)}} = \dfrac{1}{(s+2)(s+1)+1} \rightarrow$ ordem 2

b) $\dfrac{1}{(s^2+3s+2)+1} = \dfrac{1}{s^2+3s+3} = \dfrac{C}{R}$ FTMF

comparando: $\dfrac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow \omega_n^2 = 3$

$2\xi\omega_n = 3$

$\Rightarrow \underset{1,7321}{\omega_n = \sqrt{3}} \Rightarrow 2\xi\sqrt{3} = 3 \Rightarrow \xi = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\xi = 0,866}$

$k = \frac{1}{3}$

$M_p = \exp\left(-0,866 \cdot \pi / \sqrt{1-0,866^2}\right)$

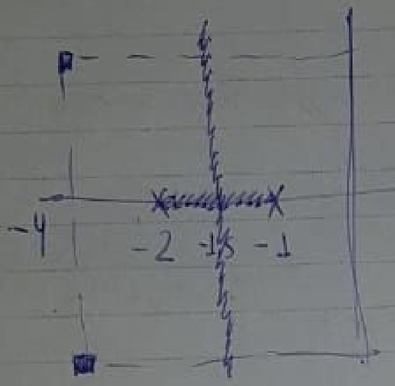
~~exp (~~ $= 0,43\%$

$t_a(2\%) = \dfrac{4}{\xi\omega_n} = \dfrac{4}{0,866 \cdot 1,7321} = 2,667\ s$

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

c) $G_c(s) = k$ $\qquad G(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+1)}$

FTMA : $\dfrac{k}{(s+2)(s+1)}$



pelo LGR, ele não passa nos polos desejados, cuja parte real está em -4. Logo não é possível.

$t_s(2\%) = 1,0 = \dfrac{4}{\xi\omega_n}$, $\xi\omega_n = \sigma$ $\Rightarrow$ $\dfrac{4}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 4$

$M_p = 1,52\%$?

$$0,0152 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \ln 0,0152 = -\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\sqrt{1-\xi^2}\,\ln 0,0152 = -\xi\pi \Rightarrow (1-\xi^2)(\ln 0,0152)^2 = \xi^2\pi^2$$

$$(\ln 0,0152)^2 - (\ln 0,0152)^2\xi^2 = \pi^2\xi^2$$

$$\Rightarrow \xi^2\left[\pi^2 + (\ln 0,0152)^2\right] = (\ln 0,0152)^2$$

$$\xi^2 = \frac{(\ln 0,0152)^2}{\pi^2 + (\ln 0,0152)^2} = 0,6397$$

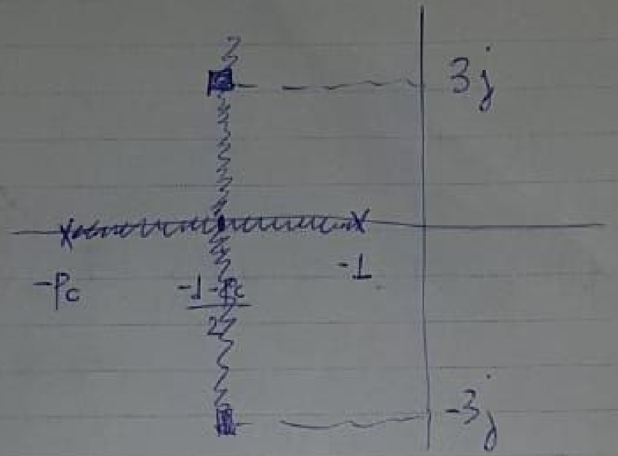
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi \cong 0,8$$

d)

→ escolhendo $z_c = 2$

$$G_c(s) = k_c \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)}$$



logo, FTMA

$$G_cG = \frac{k_c}{(s+p_c)}\cancel{(s+2)} \cdot \frac{1}{\cancel{(s+2)}(s+1)} =$$

$$= \frac{k_c}{(s+p_c)(s+1)}$$

como a parte complexa do LGR tem parte real $\frac{-1-p_c}{2}$

basta fazer: $\frac{-1-p_c}{2} = -4 \Rightarrow -1-p_c = -8$

$\Rightarrow p_c = 7 \Rightarrow G_c(s) = k_c \frac{(s+2)}{(s+7)}$

como $\xi\omega_n = 4 \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{0,8} = 5$

logo $\omega_d = 5\sqrt{1-0,8^2} = 3$

Pela condição de módulo

$$|G_c G| = 1$$

$$\frac{k_c}{|s+7||s+1|} = 1 \Rightarrow k_c = |s+7||s+1|$$

$$k_c = |-4+3j+7||-4+3j+1| = |3+3j||3+3j|$$

$$k_c = 18$$

Controlador:

$$\boxed{G_c(s) = 18 \cdot \frac{s+2}{s+7}}$$

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos