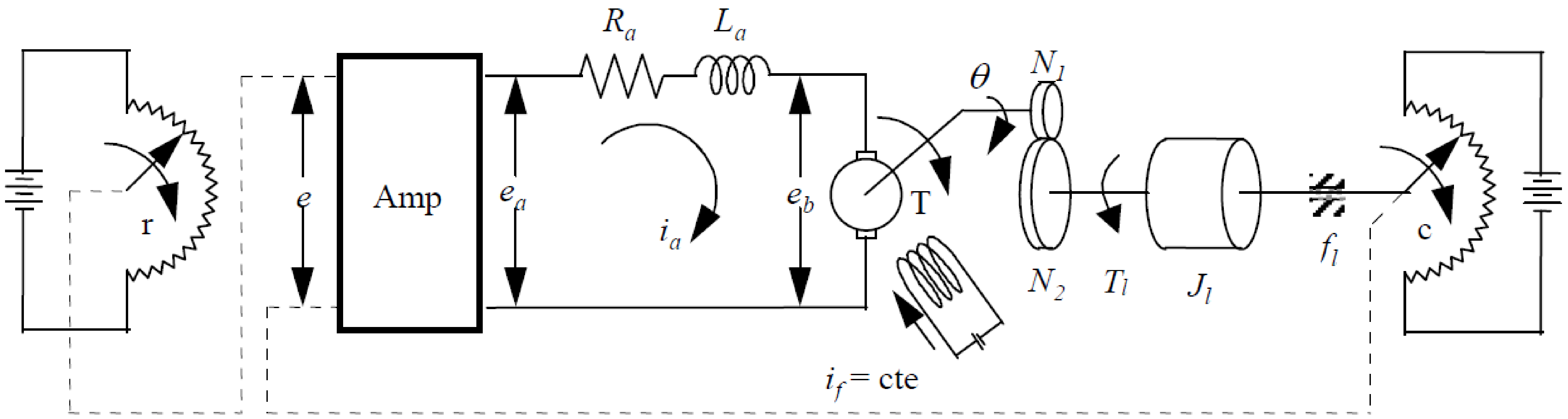
Estudo de um Servomecanismo de Posição



K_1 = ganho do detector de erro potenciométrico (V/rad)

c -> posição angular medida
r -> posição angular desejada

O sinal de erro

$$e(t) = K_1 \cdot \left(r(t) - c(t)\right)$$

é aplicado na entrada de um amplificador de potência de ganho K_p que alimenta a armadura do motor com uma tensão e_a. R_a e L_a representam, respectivamente, a resistência e a indutância do circuito da armadura (é usual desprezar-se L_a). O campo do motor é suposto constante, de maneira que a força contra-eletromotriz induzida na armadura e_b é proporcional à velocidade de rotação do eixo do motor:

Estudo de um Servomecanismo de Posição

$$e_b(t) = K_b \cdot \dot{\theta}(t)$$

c -> posição angular medida (após a engrenagem)
Θ -> posição angular do eixo do motor (antes da engrenagem)

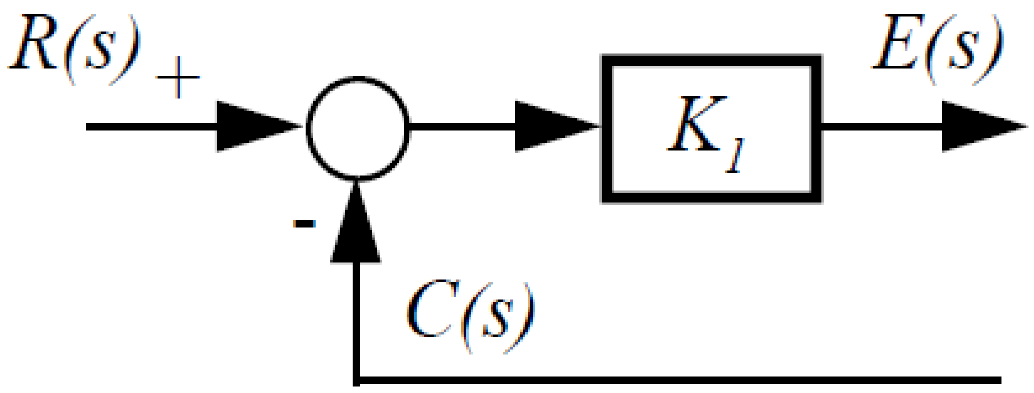
Além disso, o torque T desenvolvido no eixo do motor é admitido proporcional à corrente de armadura i_a:

$$T(t) = K_T \cdot i_a(t)$$

N_1 e N_2 representam os números de dentes das engrenagens acopladas aos eixos do motor e da carga, respectivamente.

A carga, cuja posição angular se deseja controlar, é constituída por uma inércia J_l e por uma parcela dissipativa de atrito viscoso, representada pelo coeficiente f_l.

Detector de erro potenciométrico

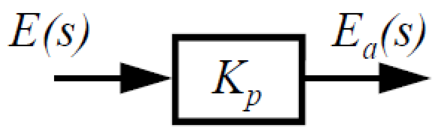


$$E(s) = K_1 \cdot [R(s) - C(s)]$$

$$[K_1] = {}^{V}\!/_{rad}$$

Estudo de um Servomecanismo de Posição

Amplificador



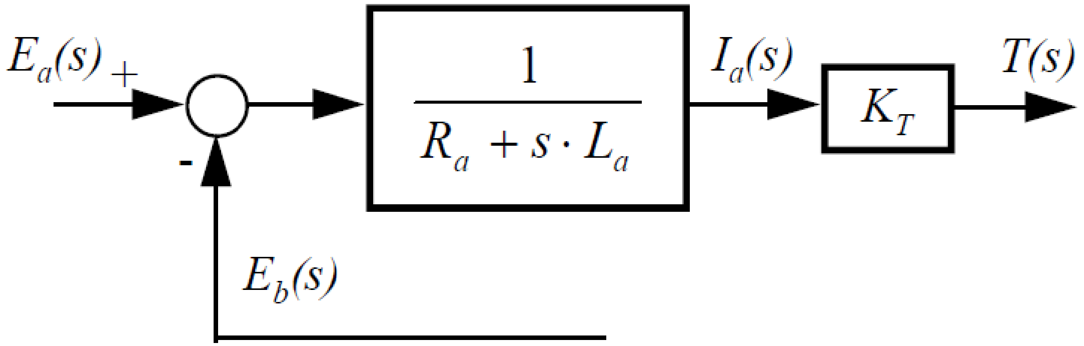
$$E_a(s) = K_p \cdot E(s)$$

Motor CC

$$e_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \cdot \dot{i}_a(t) + e_b(t) \quad \Rightarrow E_a(s) = (R_a + s \cdot L_a) \cdot I_a(s) + E_b(s)$$

$$e_b(t) = K_b \cdot \dot{\theta}(t) \quad \Rightarrow E_b(s) = K_b \cdot s \cdot \Theta(s)$$

$$T(t) = K_T \cdot i_a(t) \quad \Rightarrow T(s) = K_T \cdot I_a(s)$$

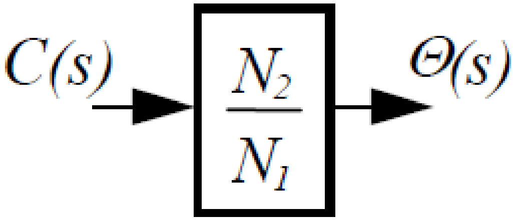


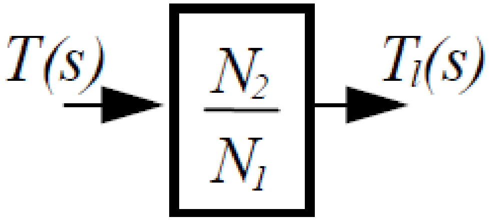
Trata-se de uma realimentação, pois $E_b(s)$ depende de um sinal $\Theta(s)$ que aparecerá mais adiante!

Estudo de um Servomecanismo de Posição

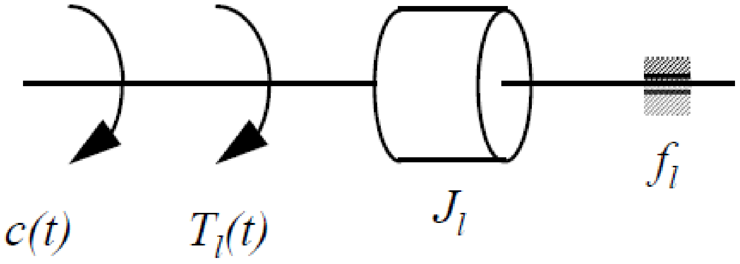
Transmissão

$$\Theta(s) = \frac{N_2}{N_1} \cdot C(s) \qquad T_l(s) = \frac{N_2}{N_1} \cdot T(s)$$

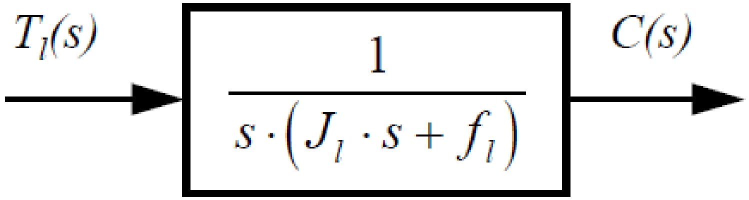




Carga Mecânica

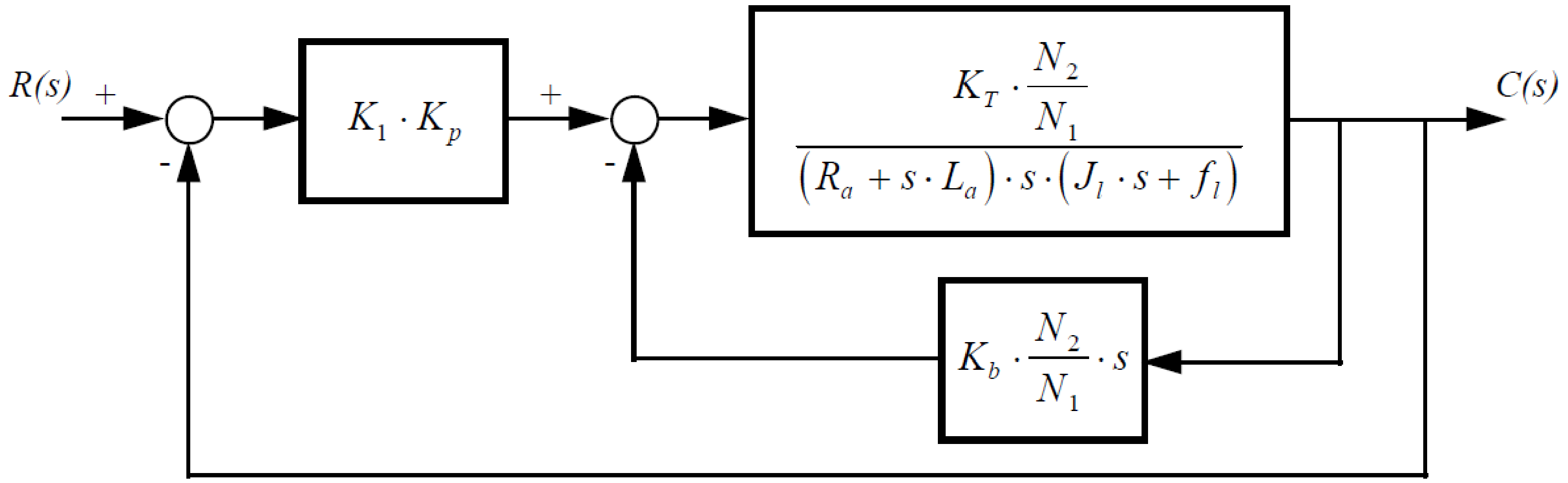


$$T_l(t) = J_l \cdot \ddot{c}(t) + f_l \cdot \dot{c}(t) \;\Rightarrow T_l(s) = \left(J_l \cdot s^2 + f_l \cdot s\right) \cdot C(s)$$



Estudo de um Servomecanismo

Juntando todos esses blocos num mesmo diagrama, temos:



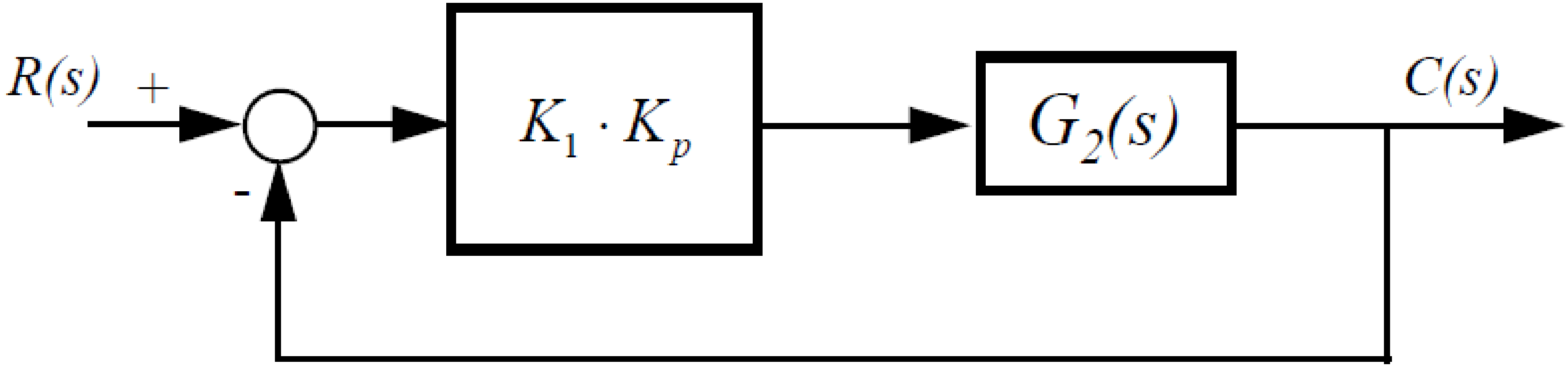
Definindo:

$$G_1(s) = \frac{K_T \cdot \frac{N_2}{N_1}}{(R_a + s \cdot L_a) \cdot s \cdot (J_l \cdot s + f_l)}$$

$$H(s) = K_b \cdot \frac{N_2}{N_1} \cdot s$$

Estudo de um Servomecanismo de Posição

a malha de realimentação interna pode ser reduzida a um bloco equivalente $G_2(s)$:

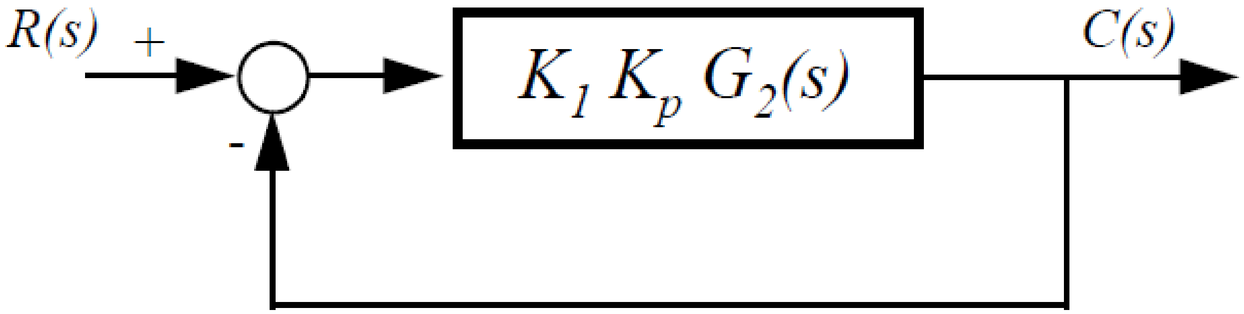


onde:

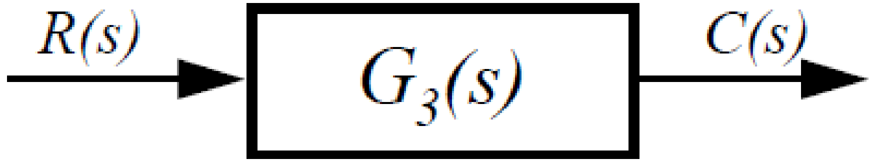
$$G_2(s) = \frac{K_T \cdot \dfrac{N_2}{N_1}}{s \cdot \left[L_a \cdot J_l \cdot s^2 + \left(L_a \cdot f_l + R_a \cdot J_l \right) \cdot s + R_a \cdot f_l + K_T \cdot K_b \cdot \left(\dfrac{N_2}{N_1} \right)^2 \right]}$$

Estudo de um Servomecanismo Posição

Podemos, agora, agrupar os dois blocos do ramo direto em um único, obtendo:

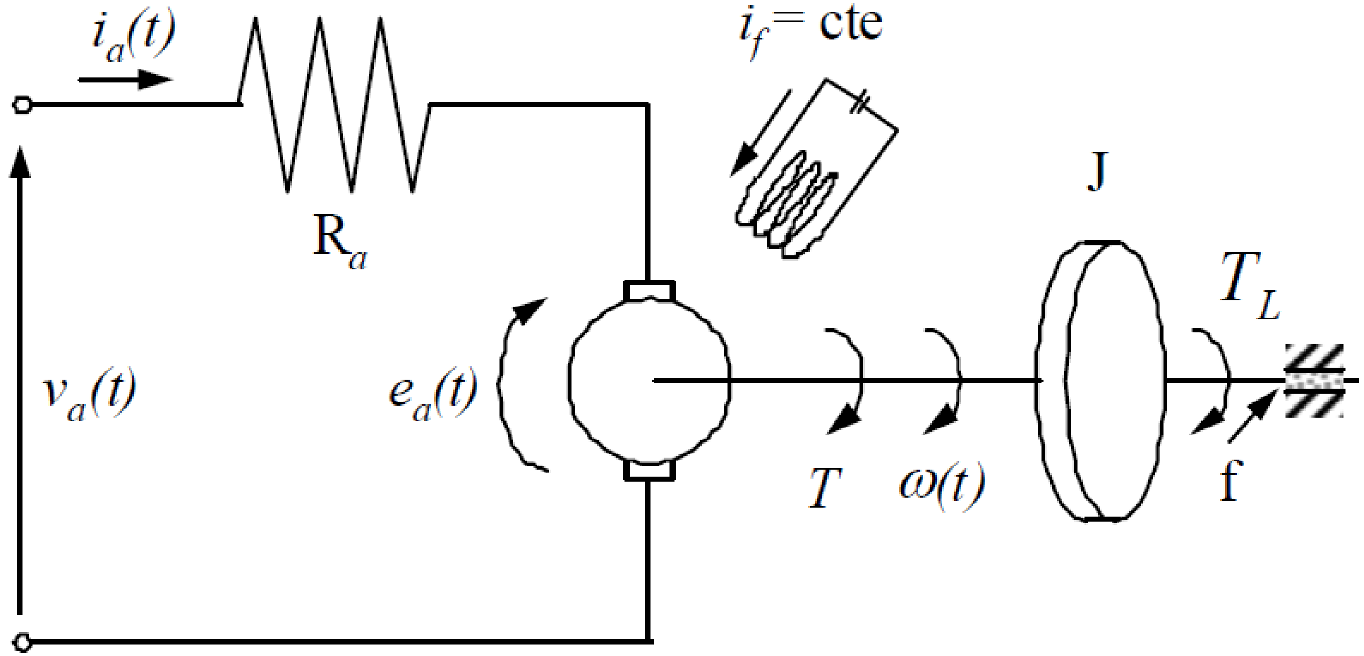


Por fim, este diagrama pode ser reduzido a um único bloco:



onde: $$\boxed{G_3(s) = \frac{K_1 K_p G_2(s)}{1 + K_1 K_p G_2(s)}}$$

Estudo de um Servomecanismo de Velocidade



Desprezando o atrito viscoso (f=0) e levando em conta a existência de um torque de carga $T_L(t)$, que pode ser encarado como uma perturbação sobre o sistema, tem-se:

$$J\dot{\omega}+\frac{K_T K_b}{R_a}\omega=\frac{K_T}{R_a}v_a+T_L\ ,$$

onde K_T e K_b são as constantes de torque e de força contra eletromotriz induzida, respectivamente.

Estudo de um Servomecanismo de Velocidade

Definindo

$$\tau = \frac{JR_a}{K_T K_b} \qquad K_0 = \frac{1}{K_b} \qquad K_1 = \frac{R_a}{K_T},$$

a equação acima pode ser reescrita como

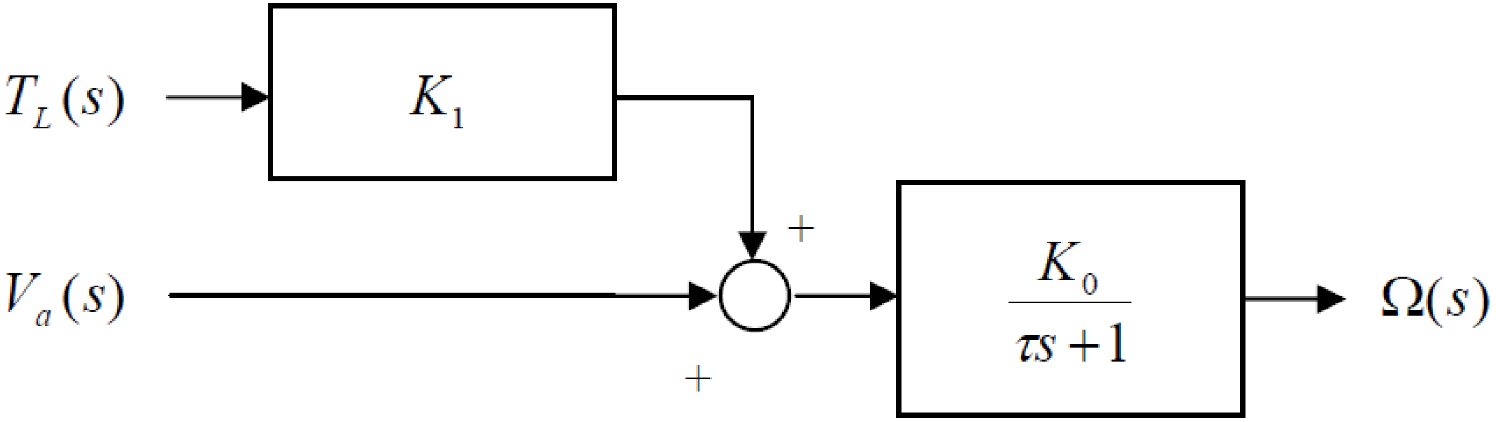
$$\tau\dot{\omega} + \omega = K_0\left(v_a + K_1 T_L\right).$$

Transformando segundo Laplace, vem:

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}\left[V_a(s) + K_1 T_L(s)\right],$$

Estudo de um Servomecanismo de Velocidade

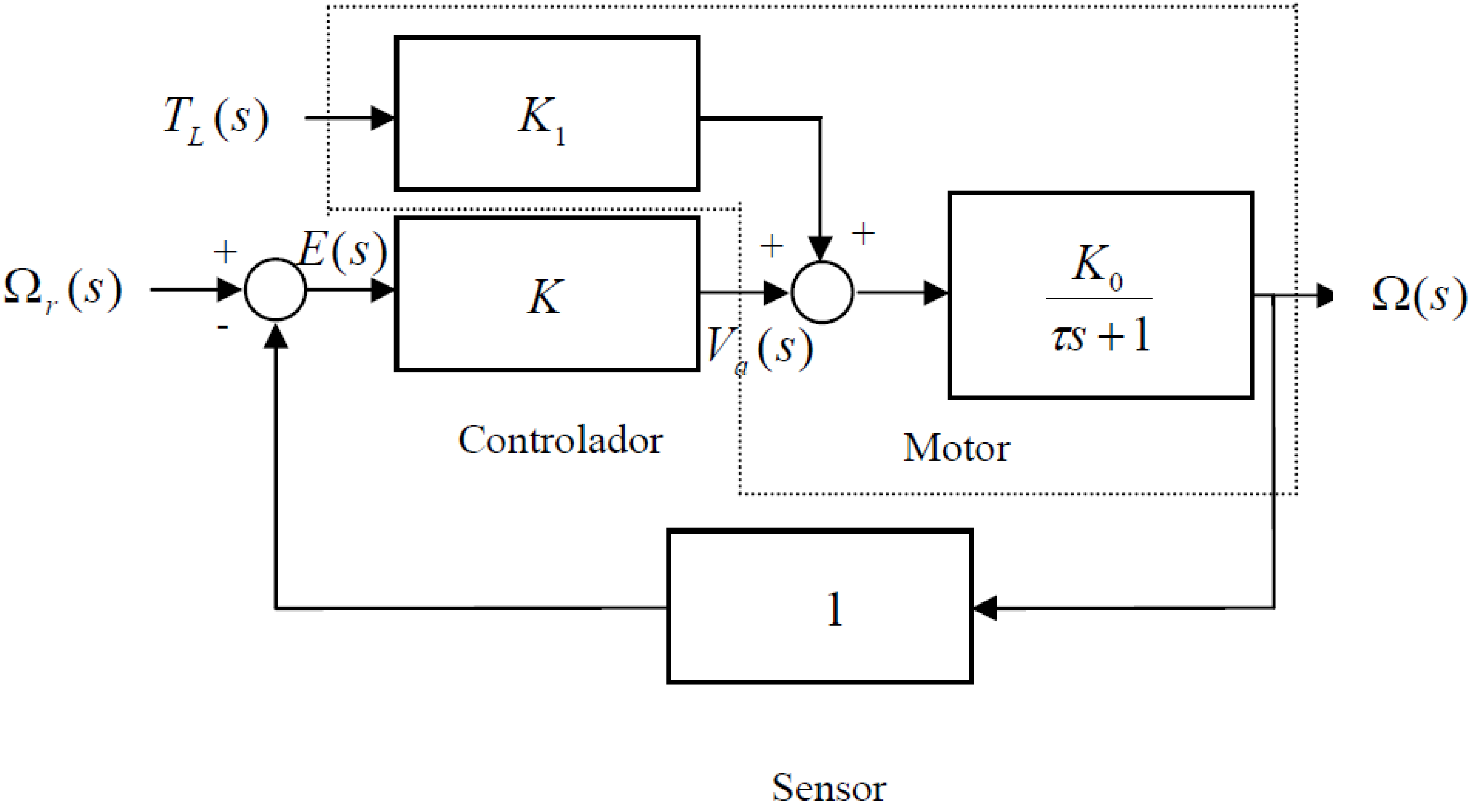
que, na forma de diagrama de blocos, pode ser representada por:



Note que tudo se passa como se o torque de carga fosse uma perturbação sobre a tensão de armadura do motor. Note também que quando $T_L(t)$ é um torque resistente, o efeito da perturbação se faz sentir como uma redução da tensão de armadura, o que é de se esperar.

Estudo de um Servomecanismo de Velocidade

Considere-se um tacômetro de ganho unitário (isto é, que forneça 1 V. de tensão de saída para uma velocidade de rotação de 1 rad/s) sendo utilizado como sensor de velocidade angular. Com isso, podemos construir um sistema de controle de velocidade em malha fechada:



Estudo de um Servomecanismo de Velocidade

O controlador acima talvez seja o mais simples dentre todos, sendo chamado de **proporcional**, pois a variável de controle ($V_a(s)$) é proporcional ao erro ($E(s)$). Fisicamente ele pode ser representado por um amplificador de ganho K, que suporemos ajustável pelo projetista para satisfazer a requisitos de projeto do sistema de controle de velocidade.

O objetivo do sistema de controle é fazer com que a velocidade do motor ($\Omega(s)$) acompanhe a velocidade de referência ($\Omega_r(s)$). Ou, em outras palavras, fazer com que o erro seja ou nulo ou suficientemente pequeno. Na realidade, na análise a seguir será considerado apenas o caso simples em que os sinais aplicados são degraus e será avaliada apenas a resposta do sistema em regime estacionário (exceto na Seção 4.5).

A seguir, o sistema em **malha fechada** é comparado com o sistema em **malha aberta** para observar alguns dos efeitos importantes da realimentação.

4.2 Modelo Exato e Sem Torque de Carga ($T_L = 0$)

- **Malha Aberta**

Neste caso,

$$V_a(s) = K\Omega_r(s)$$

e, portanto,

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s+1} K\Omega_r(s) .$$

Supondo que a velocidade angular de referência seja um degrau de amplitude A e aplicando o Teorema do Valor Final, tem-se

$$\omega(\infty) = \lim_{t\to\infty} \omega(t) = \lim_{s\to 0} s\Omega(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{K_0}{\tau s+1} K \frac{A}{s} = K_0 K A$$

e, portanto, em regime estacionário o erro é dado por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = (1 - K_0 K)A$$

$$K = \frac{1}{K_0} ,$$

resulta

$$e(\infty) = 0 ,$$

- **Malha Fechada**

Neste caso, a função de transferência de malha fechada é

$$\frac{\Omega(s)}{\Omega_r(s)} = \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0}.$$

Se considerarmos novamente a velocidade de referência como sendo um degrau de amplitude dada A, o Teorema do Valor Final fornece:

$$\omega(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0} \frac{A}{s} = \frac{KK_0}{1 + KK_0} A.$$

Com isso, o erro estacionário resulta:

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = \frac{1}{1 + KK_0} A$$

e, portanto,

$$\left| \frac{e(\infty)}{A} \right| = \frac{1}{1 + KK_0}.$$

Se escolhermos o ganho do controlador K tal que

$$KK_0 >> 1,$$

então

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| << 1,$$

o que significa que, em regime estacionário, o erro de acompanhamento da velocidade de referência é muito menor que esta. Ou seja,

$$\omega(\infty) \cong A.$$

Neste ponto, parece não haver vantagem alguma do sistema em malha fechada com relação àquele em malha aberta. Pelo contrário, se antes o acompanhamento do sinal de referência era exato, agora passou a não sê-lo mais! Em outras palavras, se o modelo do sistema a controlar fosse conhecido **exatamente** (o que **nunca** ocorre na prática!) e se o sistema **não** estivesse sujeito a **perturbações externas** (o que também **nunca** ocorre na prática!), o controle poderia ser feito em malha aberta.

4.3 Incerteza em K_0 e Sem Torque de Carga ($T_L = 0$)

Suponhamos que o parâmetro K_0 não seja conhecido exatamente, mas se apresente afetado por uma incerteza ΔK_0, de maneira que seu valor real seja $K_0+\Delta K_0$.

- **Malha Aberta**

Neste caso, temos:

$$\Omega(s) = \frac{K_0 + \Delta K_0}{\tau s + 1} K\Omega_r(s) = \frac{K_0 + \Delta K_0}{\tau s + 1}\frac{1}{K_0}\Omega_r(s),$$

em que a última igualdade decorre da mesma escolha anterior de K, isto é,

$$K = \frac{1}{K_0}.$$

e, portanto, para o mesmo degrau de referência de amplitude A, em regime estacionário o Teorema do Valor Final fornece

$$\omega(\infty) = \left(1 + \frac{\Delta K_0}{K_0}\right)A.$$

Logo, o erro estacionário é

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = \frac{-\Delta K_0}{K_0} A$$

e, portanto,

$$\left| \frac{e(\infty)}{A} \right| = \left| \frac{\Delta K_0}{K_0} \right|,$$

o que significa que a incerteza em K_0 se reflete totalmente sobre o erro estacionário. Assim, por exemplo, um erro de 10% em K_0 produz um erro de 10% em $\omega(\infty)$.

- **Malha Fechada**

Neste caso, temos:

$$\frac{\Omega(s)}{\Omega_r(s)} = \frac{K(K_0 + \Delta K_0)}{\tau s + 1 + K(K_0 + \Delta K_0)}$$

e, portanto, em regime estacionário para o degrau de referência Ω_r de amplitude A,

$$\omega(\infty) = \left[\frac{K(K_0 + \Delta K_0)}{1 + K(K_0 + \Delta K_0)} \right] A.$$

O erro estacionário é dado então por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = \left[1 - \frac{K(K_0 + \Delta K_0)}{1 + K(K_0 + \Delta K_0)} \right] A = \frac{1}{1 + K(K_0 + \Delta K_0)} A.$$

Portanto,

$$\frac{e(\infty)}{A} = \frac{1}{1 + K(K_0 + \Delta K_0)} = \frac{1}{1 + KK_0\left(1 + \dfrac{\Delta K_0}{K_0}\right)}$$

Suponhamos que

$$\left|\frac{\Delta K_0}{K_0}\right| < 1,$$

o que é uma hipótese bastante razoável, pois significa que a incerteza em K_0 é inferior a 100%.

Resulta então que, se escolhermos o ganho do controlador K suficientemente grande, isto é, se ele for tal que

$$KK_0 >> 1,$$

então

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| << 1$$

Assim, por exemplo, se KK_0=100>>1 e $|\Delta K_0/K_0|$=0,1 (ou seja, 10%), então $|e(\infty)/A|\leq$0,011 (ou seja, 1,1%). Note que, de acordo, com a seção 4.2, em que K_0 é admitido conhecido exatamente, o erro estacionário para KK_0=100 é de $|e(\infty)/A|$=0,0099 (ou seja, 0,99%). Em resumo, o efeito que a incerteza em K_0 tem sobre a velocidade estacionária apresenta-se bastante reduzido quando comparado com aquele que existe em malha aberta.

4.4 PERTURBAÇÃO NA CARGA (SEM INCERTEZA EM K_0)

Até aqui **não** consideramos a presença do torque de carga T_L em nossa análise. Vejamos agora qual é seu efeito sobre a velocidade estacionária.

- **Malha Aberta**

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}\left[K\Omega_r(s) + K_1 T_L(s)\right].$$

Neste caso,

Considerando o mesmo ganho escolhido em malha aberta no 1o. caso, isto é,

$$K = \frac{1}{K_0},$$

e considerando degraus em Ω_r e T_L de amplitudes A e T, respectivamente, ou seja,

$$\Omega_r(s) = A / s$$

$$T_L(s) = T / s,$$

resulta em regime estacionário:

$$\omega(\infty) = A + K_0 K_1 T.$$

4.4 Perturbação na Carga (Sem Incerteza em K_0)

Até aqui **não** consideramos a presença do torque de carga T_L em nossa análise. Vejamos agora qual é seu efeito sobre a velocidade estacionária.

- **Malha Aberta**

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}\left[K\Omega_r(s) + K_1 T_L(s)\right].$$

Neste caso,

Considerando o mesmo ganho escolhido em malha aberta no 1o. caso, isto é,

$$K = \frac{1}{K_0},$$

e considerando degraus em Ω_r e T_L de amplitudes A e T, respectivamente, ou seja,

$$\Omega_r(s) = A / s$$

$$T_L(s) = T / s,$$

resulta em regime estacionário:

$$\omega(\infty) = A + K_0 K_1 T.$$

Portanto, o erro estacionário é dado por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = -K_0 K_1 T \quad ,$$

de onde resulta que

$$\left|\frac{e(\infty)}{A}\right| = \left|\frac{K_0 K_1 T}{A}\right|,$$

sendo, pois, proporcional ao torque da carga T. É importante notar que K_0 e K_1 são **fixos** para um dado motor e, por isso, o projetista **não** tem meios de reduzir o erro estacionário.

- **Malha Fechada**

Neste caso,

$$\Omega(s) = \frac{\dfrac{KK_0}{\tau s + 1}}{1 + \dfrac{KK_0}{\tau s + 1}} \Omega_r(s) + \frac{\dfrac{K_0}{\tau s + 1}}{1 + \dfrac{KK_0}{\tau s + 1}} K_1 T_L(s),$$

ou seja,

$$\Omega(s) = \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0} \Omega_r(s) + \frac{K_0 K_1}{\tau s + 1 + KK_0} T_L(s).$$

Considerando os mesmos degraus em Ω_r e T_L:

$$\Omega_r(s) = A / s$$

$$T_L(s) = T / s,$$

em regime estacionário tem-se

$$\omega(\infty) = \frac{KK_0}{1 + KK_0} A + \frac{K_0 K_1}{1 + KK_0} T$$

e, portanto, o erro estacionário é dado por

$$e(\infty) = A - \omega(\infty) = \frac{1}{1+KK_0} A - \frac{K_0 K_1}{1+KK_0} T .$$

Daí resulta que

$$\frac{e(\infty)}{A} = \frac{1}{1+KK_0} \left(1 - \frac{K_0 K_1 T}{A} \right)$$

e, portanto,

$$\left| \frac{e(\infty)}{A} \right| \leq \frac{1}{1+KK_0} \left(1 + \left| \frac{K_0 K_1 T}{A} \right| \right)$$

Sendo assim, se o ganho K do controlador for escolhido suficientemente grande de maneira que

$$KK_0 >> 1,$$

então, pode-se escrever aproximadamente:

$$\left| \frac{e(\infty)}{A} \right| \leq \frac{1}{KK_0} \left(1 + \left| \frac{K_0 K_1 T}{A} \right| \right).$$

Note que o termo

$$\left| \frac{K_0 K_1 T}{A} \right|$$

representa o erro estacionário em malha aberta e, portanto, o erro estacionário em malha fechada poderá ser feito pequeno se o ganho K do controlador for tomado suficientemente grande.

4.5 Resposta Transitória

- **Malha Aberta**

Neste caso, como vimos,

$$\Omega(s) = \frac{K_0}{\tau s + 1}\left[K\Omega_r(s) + K_1 T_L(s)\right].$$

Assim, a dinâmica de malha aberta é de 1a. ordem com constante de tempo

$$\tau = \frac{JR_a}{K_T K_b},$$

que não depende do ganho K do controlador e, portanto, **não** pode ser alterada por diferentes escolhas do valor deste ganho. Em outras palavras, é **impossível**, por exemplo, conseguir-se uma resposta mais rápida do sistema através do ajuste do ganho do controlador.

- **Malha Fechada**

Em malha fechada,

$$\Omega(s) = \frac{KK_0}{\tau s + 1 + KK_0}\Omega_r(s) + \frac{K_0K_1}{\tau s + 1 + KK_0}T_L(s).$$

Neste caso, a dinâmica também é de 1a. ordem. No entanto, a constante de tempo é

$$\tau' = \frac{\tau}{1 + KK_0}$$

e, portanto, a resposta do sistema se torna mais rápida à medida que o ganho K do controlador aumenta.

Obs: Em geral, é preciso ter cuidado com o uso de valores elevados de K, pois estes podem provocar a instabilidade do sistema em malha fechada.[1]

A Tabela a seguir resume o estudo dos efeitos da realimentação sobre o sistema de controle de velocidade analisado.

Caso	**Regime**	**Malha Aberta**	**Malha Fechada**
Modelo Exato	Estacionário	$e(\infty) = 0$	$\left\lvert \dfrac{e(\infty)}{A} \right\rvert = \dfrac{1}{1 + KK_0}$
Incerteza em K_0	Estacionário	$\left\lvert \dfrac{e(\infty)}{A} \right\rvert = \left\lvert \dfrac{\Delta K_0}{K_0} \right\rvert$	$\left\lvert \dfrac{e(\infty)}{A} \right\rvert = \dfrac{1}{\left\lvert 1 + KK_0\left(1 + \dfrac{\Delta K_0}{K_0}\right) \right\rvert}$
Perturbação de Torque	Estacionário	$\left\lvert \dfrac{e(\infty)}{A} \right\rvert = \left\lvert \dfrac{K_0 K_1 T}{A} \right\rvert$	$\left\lvert \dfrac{e(\infty)}{A} \right\rvert \leq \dfrac{1}{KK_0}\left(1 + \left\lvert \dfrac{K_0 K_1 T}{A} \right\rvert\right)$
	Transitório	τ	$\tau' = \dfrac{\tau}{1 + KK_0}$