PTC3360 - Introdução a Redes e Comunicações

4.1 Densidade espectral de energia e de potência - Parte 1

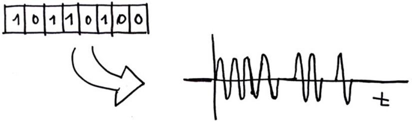
[Lathi and Ding, 2012, Seções 3.1 a 3.4 e 3.7]

Outubro 2025

Sumário

Camada física

- Vimos que a principal função da camada física é representar os bits que compõem um quadro por meio de sinais adequados ao meio de transmissão.

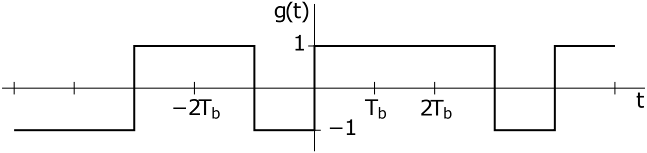


- Há muitas questões de projeto envolvidas nessa representação:
    - Qual a duração do pulso utilizado para representar cada bit? Quantos bits por pulso? Qual a taxa de transmissão?
    - Qual forma de onda utilizar? Qual a banda de frequências ocupada?
    - Qual a taxa de erros no receptor? O que determina essa taxa?
    - ...
- Estudar essas questões é o principal objetivo desse capítulo.

Representação no tempo e na frequência

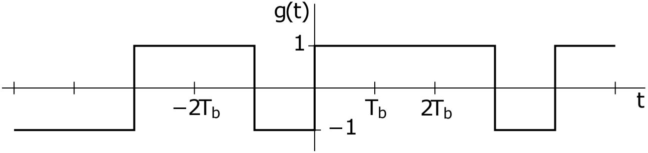
- Primeira pergunta a ser respondida: Como representar os sinais da camada física no domínio da frequência?
- Exemplo:
  - $1 \to p(t)$;
  - $0 \to -p(t)$

  sendo $p(t)$ um pulso retangular de amplitude unitária e duração T_b. Um trecho de sinal gerado $g(t)$ é mostrado a seguir:



- Como obter representação em frequência de $g(t)$? É só calcular a Transformada de Fourier (TF)??

Representação espectral: problemas



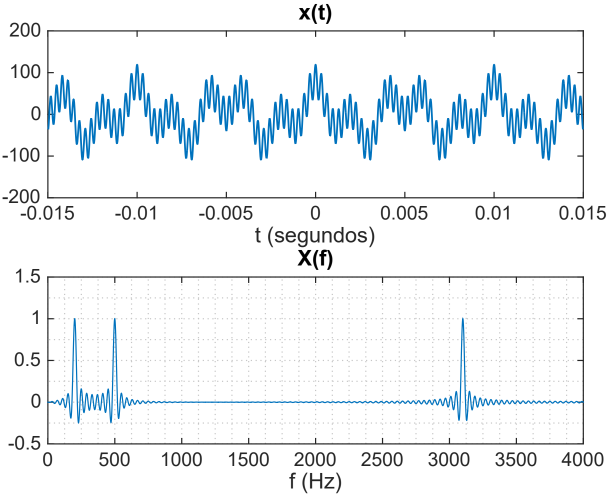
- Note que:
  - $g(t)$ não é integrável em valor absoluto (sinal de potência) e nem é periódica $\Rightarrow$ Não tem TF e nem série de Fourier! ☹
  - $g(t)$ é diferente para cada sequência de bits diferente...Como caracterizar o conjunto de possíveis $g(t)$? ☹
- Precisamos de uma nova ferramenta, além da transformada de Fourier.
- Para estudar a camada física precisamos aprender a representar no domínio da frequência sinais como $g(t)$. Para isso, vamos precisar do conceito de *Densidade Espectral de Potência*.

Sumário

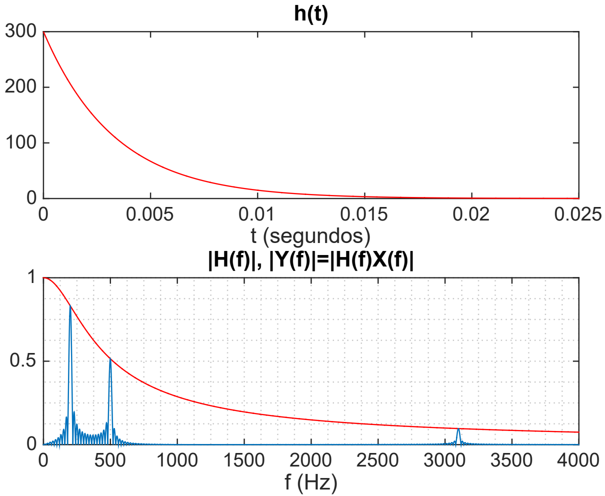
Objetivo

- O objetivo dessa seção é obter uma representação na frequência para sinais como o $g(t)$ dos slides anteriores.
- Para chegar lá, vamos definir e rever alguns conceitos sobre Transformadas de Fourier (TF) e sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT).
- Antes, vamos ver um exemplo ilustrativo do porquê da representação espectral ser tão importante em comunicações: muitas vezes é mais simples ou conveniente representar sinais ou sistemas LIT no domínio da frequência.
- As seguintes simulações foram geradas neste Colab.

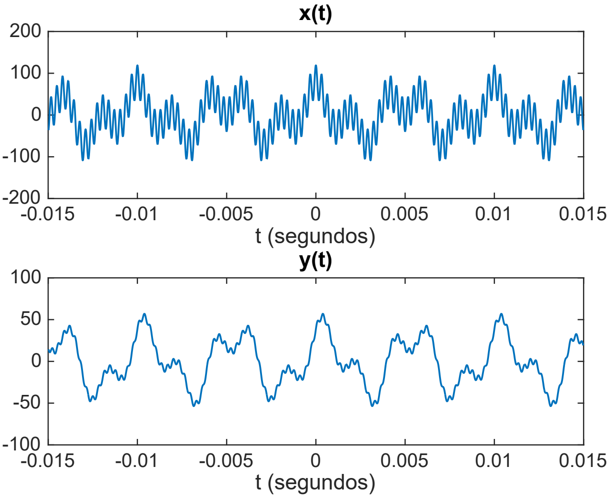
Exemplo inicial



Exemplo inicial



Exemplo inicial



Definição e exemplos

Vamos explicar a forma do espectro obtida no exemplo inicial.

Definição: par transformado $g(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} G(f)$

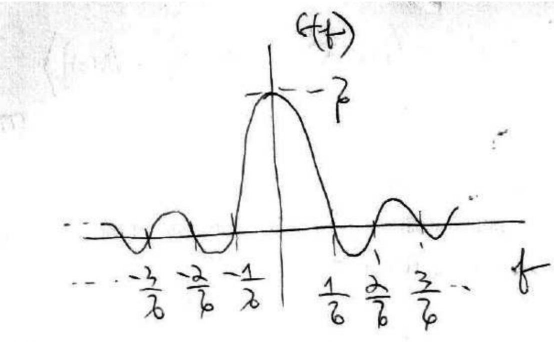
$$\boxed{G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt,\ \omega = 2\pi f}$$

$$\boxed{g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) e^{j\omega t} df}$$

Exemplo 1: Pulso Retangular

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{TF}{\longleftrightarrow} \tau \text{sinc}(\pi f \tau)$$

Definição e exemplos



Atenção!

$$\text{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin x}{x}$$

Algo parecido com o $G(f)$ do exemplo inicial, porém lá havia 3 formas como acima, não centradas em $f = 0$.

Definição e exemplos

Propriedade P1: Linearidade

$$ag_1(t) + bg_2(t) \xleftrightarrow{TF} aG_1(f) + bG_2(f)$$

Propriedade P2: Deslocamento no tempo e na frequência

$$e^{j2\pi f_c t} h(t) \xleftrightarrow{TF} H\left(f - f_c\right)$$

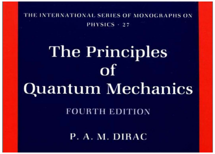
$$h\left(t - t_0\right) \xleftrightarrow{TF} e^{-j2\pi f t_0} H(f)$$

Definição e exemplos

Exemplo 2: Impulso de Dirac

$$\delta\,(t) \xleftrightarrow{TF} 1$$

$$1 \xleftrightarrow{TF} \delta(f)$$



15. The δ function

Our work in § 10 led us to consider quantities involving a certain kind of infinity. To get a precise notation for dealing with these infinities, we introduce a quantity $\delta(x)$ depending on a parameter x satisfying the conditions

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx &= 1 \\ \delta(x) = 0 \text{ for } x &\neq 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Definição e exemplos

Exemplo 3: Impulso de Dirac deslocado

$$\delta\left(t - t_0\right) \xleftrightarrow{TF} e^{-j2\pi f t_0}$$

$$e^{j2\pi f_c t} \xleftrightarrow{TF} \delta\left(f - f_c\right)$$

Exemplo 4: Sinal Cossenoidal

$$\cos(2\pi f_c t) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - f_c\right) + \delta\left(f + f_c\right)\right]$$

Definição e exemplos

Sinal do exemplo inicial: combinação de rect(t) e sinal cossenoidal. E sua TF ?

Exemplo 5: Modulação

$$h(t)\cos(2\pi f_c t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\left[H\left(f-f_c\right)+H\left(f+f_c\right)\right]$$

Exemplo 6: Pulso cossenoidal

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\left(2\pi f_c t\right) \overset{TF}{\longleftrightarrow} \frac{\tau}{2}\left[\text{sinc}\left(\pi\left(f-f_c\right)\tau\right)+\text{sinc}\left(\pi\left(f+f_c\right)\tau\right)\right]$$

Com esses exemplos, você consegue explicar o espectro mostrado no Slide 9?

TF e sistemas LIT

- A Transformada de Fourier é muito útil na análise de sistemas LIT. Lembrando:

Propriedade P3: Convolução no tempo

$$h(t) * x(t) \xleftrightarrow{TF} H(f)X(f)$$

Energia e a TF

- Até aqui tratamos de sinais determinístas.
- Para tratar no domínio da frequência sinais aleatórios, como os que aparecem nos modelos para a camada física de um sistema de comunicação, são fundamentais os conceitos de energia e potência .

Conceito de Energia de $g(t)$

$$E_g \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt$$

- É possível exprimir E_g em função de $G(f)$?

Propriedade P4: Teorema de Parseval

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

Definição e significado prático da DEE

Densidade espectral de energia (DEE)

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

$\Rightarrow \Psi_g(f) \triangleq |G(f)|^2$ é a *densidade espectral de energia* de $g(t)$

DEE tem significado prático!

Exemplo 7: Energia de sinal filtrado

Um sinal $x(t)$ é filtrado por um filtro passa-baixas ideal com frequência de corte B, resultando no sinal $y(t)$. Mostre que a energia de $y(t)$ é dada por

$$E_y = \int_{-B}^{B} \Psi_x(f) df$$

Referências

Lathi, B. B. P. and Ding, Z. (2012). *Sistemas de Comunicações Analógicos e Digitais Modernos*. LTC.