Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Departamento da Engenharia Mecatrônica
Engenharia Mecatrônica

Compensações em malha aberta

Luiza Gomes de Castro e Sá
Thiago José da Silva

Divinópolis

Dezembro/2021

1.1 - Processo Petroquímico

De acordo com o enunciado, quando a vazão mássica está estabilizada em 40 Kg/s e a saída do medidor indica 2V, a seguinte função de transferência representa o sistema:

$$\frac{V_m(s)}{Q(s)} = \frac{K.(100s + 150)}{s^3 + 36s^2 + 280s + 3000} \qquad (I)$$

1) Para determinar o valor de K, vamos determinar o valor de $V_m(s)$ e $Q(s)$ a partir dos "dados" do enunciado:

$$V_m(s) = s.V_m(t) \quad \Big| \quad Q(s) = s.Q(t) \quad \Big| \quad \frac{V_m(0)}{Q(0)} = \frac{2}{40}$$
$$V_m(0) = s.2 \quad \Big| \quad Q(0) = s.40$$

→ Substituindo as considerações na equação (I), e considerando "s" nulo:

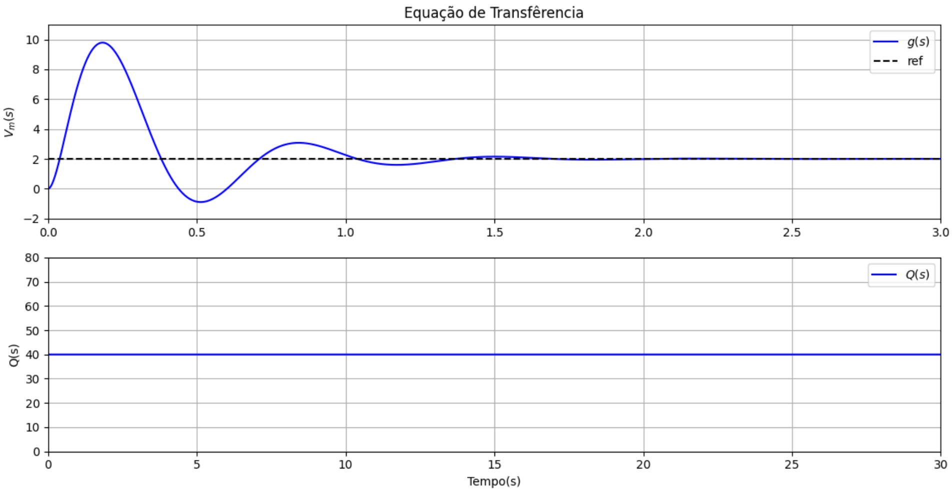
$$\frac{2}{40} = \frac{K.(\cancel{100.0} + 150)}{0^3 + \cancel{36.0^2} + \cancel{280.0} + 3000}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{150K}{3000}$$

$$30K = 30$$

$$\boxed{K = 1}$$

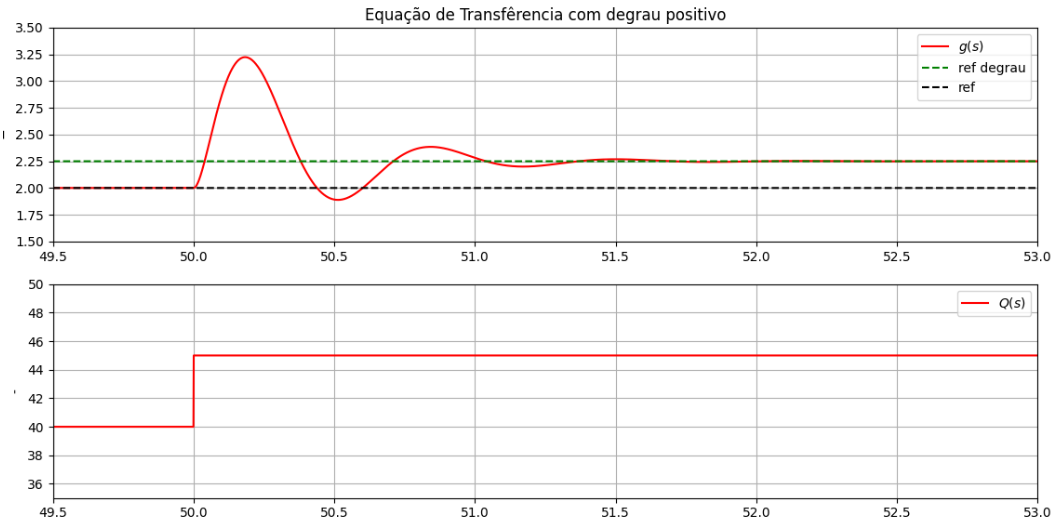
→ Plotando o gráfico da equação I, para K = 1, obtém-se a seguinte resposta:



2) Após determinado o valor de K, a equação (I) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{V_m(s)}{Q(s)} = \frac{100s + 150}{s^3 + 36s^2 + 280s + 3000}$$

Ao sofrer uma variação abrupta de vazão mássica, de 40 Kg/s para 45 Kg/s, o comportamento dinâmico do sistema é representado pelo gráfico abaixo:



A partir da análise do gráfico, pode-se afirmar que o sistema apresenta um comportamento de subamortecimento. Além disso, observa-se que o sistema manifesta um alto valor de overshoot. Tal comportamento pode ser explicado por um baixo valor do coeficiente de amortecimento. Outro ponto a se destacar é o valor em que o sistema se estabiliza com o degrau de entrada, este valor é aproximadamente 2,26 V.

3) Reescrevendo a equação I, realizando uma manipulação no denominador, tem-se que:

$$\frac{V_m(s)}{Q(s)} = \frac{100 \cdot (s + 1{,}5) \cdot K}{(s+30) \cdot (s^2 + 6s + 100)} \qquad (II)$$

Para determinar a equação de compensação, é necessário definir os polos, estabelecendo um em relação ao τ fornecido pela questão.

Definindo $\tau = 0,25$ é possível determinar um de seus polos:

$$p_1 = \tau^{-1} = \frac{1}{0,25} = 4$$

O segundo polo é definido afim de obter uma simplificação algébrica na equação (II):

$$p_2 = 1,5$$

Sendo assim:

$$G_\tau(s) = \frac{(s^2 + 6s + 100)}{(s + 1,5).(s + 4)}$$

Desse modo, a equação de compensação $G(s)$, pode ser determinado da seguinte maneira:

$$G(s) = \frac{V_m(s)}{Q(s)} . G_\tau(s)$$

$$G(s) = \frac{100K.\cancel{(s + 1,5)}}{(s + 30).\cancel{(s^2 + 6s + 100)}} . \frac{\cancel{(s^2 + 6s + 100)}}{\cancel{(s + 1,5)}(s + 4)}$$

$$G(s) = \frac{100K}{(s + 30).(s + 4)} \qquad (III)$$

→ Aplicando frações parciais na equação (III), junto com a técnica dos limites ou método de Heaviside:

$$\frac{100K}{(s+30).(s+4)} = \frac{A}{(s + 30)} + \frac{B}{(s + 4)}$$

Utilizando o conceito de limites para determinar os coeficientes

$$A = \lim_{s \to -30} \frac{100K}{s + 4} = \frac{100K}{-26} = -3,846K$$

$$B = \lim_{s \to -4} \frac{100K}{(s+30)} = \frac{100K}{26} = 3,846\ K$$

Sendo assim, a equação pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$G(s) = -\frac{3,846K}{(s+30)} + \frac{3,846K}{(s+4)} \quad (IV)$$

Analisando a equação (IV), observa-se que são polos da equação G(S), os números -30 e -4. Partindo das definições de polos dominantes e polos insignificantes, temos que o polo -30 é desprezível, uma vez que:

① O polo -4 é mais próximo da origem ao ser comparado com o polo -30. Os polos que estão mais próximos do eixo imaginário no lado esquerdo do plano complexo proporcionam grandes respostas transitórias.

② Calculando a magnitude do polo -30 em relação ao polo -4, tem-se que:

$$\frac{-30}{-4} = \underline{7,5}$$

A magnitude é de 7,5 implicando uma magnitude maior que 5. Desse modo, o polo pode ser considerado insignificante para a resposta transiente.

Sendo assim, a equação (IV) pode ser reescrita:

$$G(s) = \frac{3,846K}{(s+4)} \quad (V)$$

→ Para determinar o valor de K, consideramos a frequência nula e $G(s) = \frac{Vm(s)}{Q(s)}$:

$$\frac{2}{40} = \frac{3,846K}{4}$$

$$38,46K = 2$$

$$K = 0,052 \quad (VI)$$

→ Substituindo (VI) em (V):

$$G(s) = \frac{3,846 \cdot (0,052)}{(s+4)}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{0,2}{(s+4)}}$$ → Equação de Compensação

4) O tempo de acomodação ts é o tempo necessário para que as oscilações transitórias permaneçam dentro de uma faixa de 2% em torno do valor final do regime permanente. O valor do tempo de acomodação pode ser calculado da seguinte forma:

$$t_s = 4\tau \quad \text{ou} \quad t_s = \frac{4}{W_n \zeta}$$

a) Para o medidor não-compensado:

Após uma mudança abrupta de vazão de 45 Kg/s para 35 Kg/s, para o sistema entrar em estado estacionário, utilizaremos a seguinte equação:

$$t_s = \frac{4}{W_n \zeta} \quad (VII)$$

A fim de determinar os valores do coeficiente de amortecimento e a frequência natural, iremos comparar a equação (II) com a equação geral de terceira ordem:

$$\frac{100(s+1,5) \cdot K}{(s+30) \cdot (s^2 + 6s + 100)} = \frac{\alpha \zeta W_n^3}{(s + \alpha \zeta W_n) \cdot (s^2 + 2\zeta W_n s + W_n^2)}$$

A partir da análise das equações, podemos afirmar que:

① $W_n^2 = 100$

$\boxed{W_n = 10}$ → frequência natural (VIII)

② $2 \zeta W_n = 6$

$\zeta = \frac{6}{20}$

$\boxed{\zeta = 0,3}$ → coeficiente de amortecimento (IV)

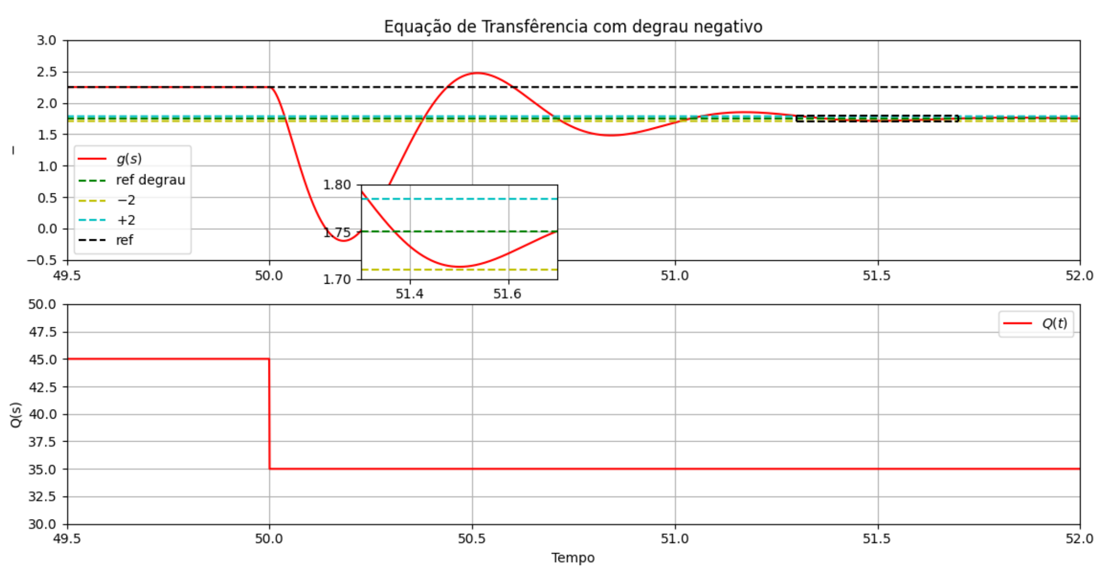
→ Substituindo os valores de (VIII) e (IV) em (VII):

$$ts = \frac{4}{0,3 \cdot 10}$$

$$ts = \frac{4}{3}$$

$\boxed{ts = 1,33}$ → tempo de acomodação sem compensador

A imagem abaixo representa a resposta do sistema ao degrau de 45 Kg/s para 35 Kg/s:



Para a simulação do sistema foi adotado uma tolerância de ± 2% na saída, a fim de considerar o sistema trabalhado como estável para a faixa de valores de 1,71V até 1,785V. Desse modo, observa-se que o tempo de acomodação do sistema é aproximadamente 1,33, assim como o valor obtido algebricamente.

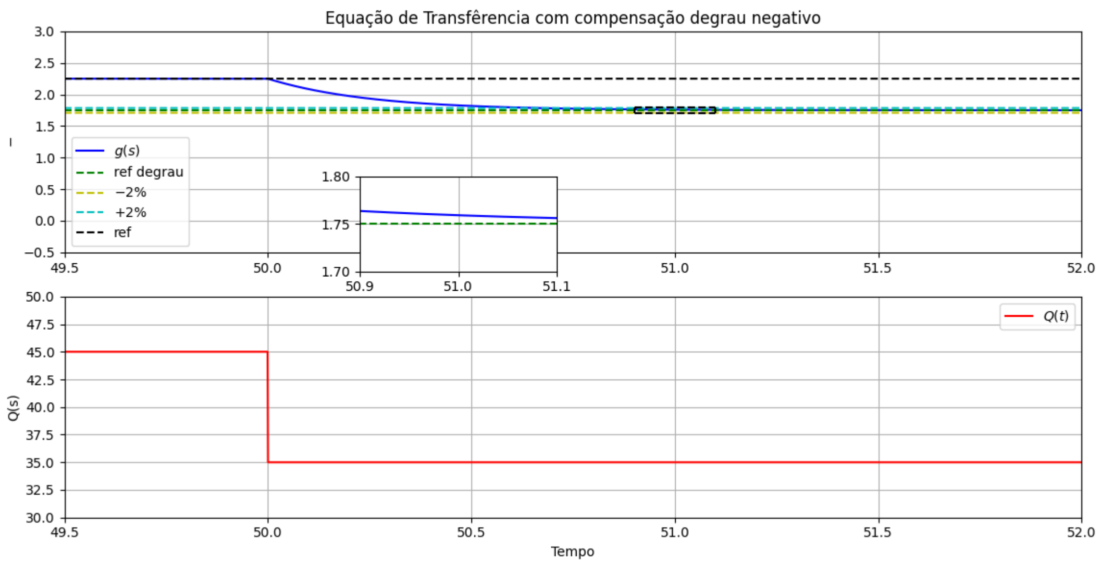
b) Como consideramos na questão 3, o valor de τ para a compensação é de 0,25. Utilizando a fórmula abaixo é possível determinar o tempo de acomodação:

$$ts = 4 . \tau$$

$$ts = 4 . 0,25$$

$\boxed{ts = 1}$ → tempo de acomodação com compensador.

A imagem abaixo representa a resposta do sistema ao degrau de 45 Kg/s para 35 Kg/s com compensador:



Pode-se observar a partir do gráfico que o sistema se estabiliza em m = 1,75. Para o tempo de acomodação igual a 1, o sistema atinge 98,86% de estabilidade. Sendo assim, pode-se considerar que o tempo encontrado algebricamente é aproximadamente o mesmo que encontrado pela simulação.

1.2- Interconexão de sistemas

1- Dados os 3 sistemas:

$S_1: \ddot{y}_1(t) + \dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1(t)$

$S_2: \tau \dot{y}_2(t) + 10\, y_2(t) = 20\, u_2(t)$

$S_3: \dot{y}_3(t) + p\, y_3(t) = \dot{u}_3(t) + z\, u_3(t)$

Trabalha-se com cada um deles separadamente:

→ $S_1: \ddot{y}_1(t) + \dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1(t)$

$x_1 = y_1 \qquad \dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_2$

$x_2 = \dot{y}_1 \qquad \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + u_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 \end{cases}$$

* Equação Dinâmica

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

* Equação de Saída

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_1(t)$$

Dessa forma, encontrado a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

E, uma vez que os autovalores da matriz A são iguais às raízes da equação homogênea, assim:

$$\lambda(A) = \text{Raízes}(\lambda^2 + \lambda + 1 = 0)$$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \qquad \lambda_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\Delta = -3$

* Função de transferência

$$\left[s^2 \cdot Y_1(s) - s \cdot Y_1(0) - \dot{y}(0)\right] + \left[s \cdot Y_1(s) - Y_1(0)\right] + Y_1(s) = U_1(s)$$

$$s^2 Y_1(s) + s Y_1(s) + Y_1(s) = U_1(s)$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

De acordo com a equação de transferência encontrada, vê-se que:

- A função não tem zeros
- Os polos de $G_1(s)$ são iguais a λ_1 e λ_2 $\boxed{(s_1 = \lambda_1 \;\; e \;\; s_2 = \lambda_2)}$

b) S_2: $\tau \dot{y}_2(t) + 10 y_2(t) = 20 u_2(t)$

$x_1 = y_1$ $\qquad \dot{x}_1 = \frac{-10x_1 + 20u_2}{\tau}$ $\qquad \left\{ \dot{x}_1 = \frac{-10x_1 + 20u_2}{\tau} \right.$

$x_2 = \dot{y}_1$

* Equação Dinâmica

$$\left[\dot{x}_1\right] = \underbrace{\left[-10/\tau\right]}_{A} \cdot \left[x_1\right] + \left[20/\tau\right] u_2(t)$$

* Equação de Saída

$$y_2 = \left[1\right]\left[x_1\right] + \left[0\right] u_2(t)$$

Dessa forma, encontrada a matriz A:

$$A = \left[-10/\tau\right]$$

E, uma vez que os autovalores da matriz A são iguais às raízes da eq. homogênea, assim:

$$\lambda(A) = \text{Raízes}\left(\frac{\tau\lambda}{20} + \frac{10}{20} = 0\right)$$

$$\lambda(A) = \text{Raízes}\left(\lambda\tau + 10 = 0\right)$$

$\lambda \tau + 10 = 0$

$\lambda = \dfrac{-10}{\tau}$

* Função de transferência:

$$\tau\left[s\, Y_2(s) - Y_2(0)\right] + 10\, Y_2(s) = 20\, U_2(s)$$

$$\tau s\, Y_2(s) + 10\, Y_2(s) = 20\, U_2(s)$$

$$Y_2(s)\left[\tau s + 10\right] = 20\, U_2(s)$$

$$\frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = \frac{20}{\tau s + 10}$$

De acordo com a equação de transferência encontrada, vê-se que:

- A função não tem zeros
- O polo de $G_2(s)$ é igual à λ. $\boxed{(s = -10/\tau = \lambda)}$

b) S_3: $\dot{y}_3(t) + p\,y_3(t) = \dot{u}_3(t) + Z\,u_3(t)$

Nesse caso, a forma padronizada é dada por:

$$\dot{y} + a_1 y = b_0 \dot{u} + b_1 u$$

Ou,

$\beta_0 = b_0 = 1$ $\qquad\qquad$ $\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = Z - p \cdot 1 = Z - p$

Assim, tem-se

$x_1 = y_3 - \beta_0 u_3 = y_3 - u_3$

$\dot{x}_1 = -p x_1 + \beta_1 \cdot u_3 = -p x_1 + (Z - p) u_3$

$\left\{ \dot{x}_1 = -p x_1 + (Z - p) u_3 \right.$

* Equação Dinâmica:

$$\left[\dot{x}_1\right] = \left[-p\right]\left[x_1\right] + \left[Z - p\right] u_3(t)$$

* Equação de Saída

$$y_3 = \left[1\right]\left[x_1\right] + \left[1\right] u_3(t)$$

Dessa forma, encontrada a matriz A

$$A = [-p]$$

E, uma vez que os autovalores da matriz A são iguais as raízes da equação homogênea, assim

$$\lambda(A) = \text{Raízes}(\lambda + p = 0)$$

$$\lambda + p = 0$$
$$\lambda = -p$$

* Função de transferência

$$s\,Y_3(s) + \cancel{Y_3(0)} + p\,Y_3(s) = s\,U_3(s) + u_3(0) + Z\,U_3(s)$$

$$Y_3(s)[s+p] = U_3(s)[s+Z]$$

$$\frac{Y_3(s)}{U_3(s)} = \frac{s+Z}{s+p}$$

De acordo com a equação de transferência encontrada, vê-se que:

- O zero da função é igual à -Z
- O polo da função é igual à -p. $\boxed{(s = -p = \lambda)}$ //

Portanto, é possível concluir que:

- No sistema 1 (S_1), os polos da função de transferência são iguais aos autovalores obtidos da matriz A, e a função não tem zeros.
- No sistema 2 (S_2), o polo da função de transferência é igual ao autovalor obtido na matriz A, e a função não tem zeros.
- No sistema 3 (S_3), o polo da função de transferência é igual ao autovalor obtido na matriz A. Além disso, essa função tem um zero porém, não é possível compará-lo, pois o autovalor da matriz não exprime um valor relacionado à ele, apenas ao polo.

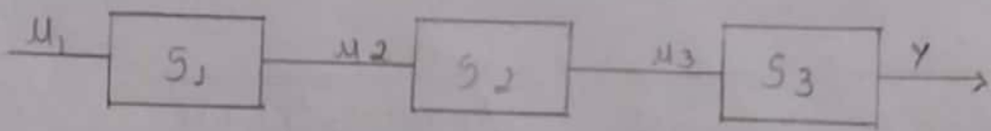
2- Com as equações de espaço de estados do item anterior:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 \end{cases} \qquad S_2: \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{-10x_1 + 20u_2}{\tau} \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} \dot{x}_1 = -p x_1 + (Z-p) u_3 \end{cases}$$

Agora, uma vez que trabalharemos com os três sistemas em conjunto, para diferenciar as variáveis x_1 e $\dot{x}_1$ de cada um deles, as equações são reescritas assim:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} \dot{x}_{1-S2} = \dfrac{-10x_{1-S2} + 20u_2}{\tau} \end{cases} \qquad S_3: \begin{cases} \dot{x}_{1-S3} = -p\, x_{1-S3} + (Z+p) u_3 \end{cases}$$

E, considerando a conexão em série dos três sistemas:



Assim,

$$y_1 = u_2 = x_1 \qquad y_2 = u_3 = x_{1-S2}$$

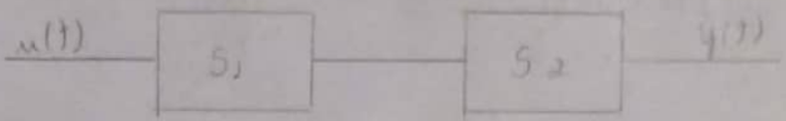
E as equações ficam:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u_1 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} \dot{x}_{1-S2} = \dfrac{-10x_{1-S2} + 20x_1}{\tau} \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} \dot{x}_{1-S3} = -pX_{1-S3} + (2-p)X_{1-S2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_{1-S2} \\ \dot{x}_{1-S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 20/\tau & 0 & -10/\tau & 0 \\ 0 & 0 & Z-P & -P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{1-S2} \\ x_{1-S3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{1-S2} \\ x_{1-S3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_1$$

3- Supondo a conexão em série dos sistemas S_1 e S_2, com um sinal $u(t)$ alimentando S_1 e a saída da associação dada por $y(t) = y_2(t)$, ou seja



a função de transferência pode ser obtida através da equação

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

E, $G_1(s)$ e $G_2(s)$ foram encontradas na questão 1 do exercício 12, sendo

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \qquad G_2(s) = \frac{20}{\tau s + 10}$$

Assim:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{20}{\tau s + 10} = \frac{20}{(\tau s + 10)(s^2 + s + 1)}$$

$$G(s) = \frac{20}{(\tau s + 10)(s + s_1)(s + s_2)}$$

Através dessa equação fica evidente que existem 3 polos, um deles é dado por

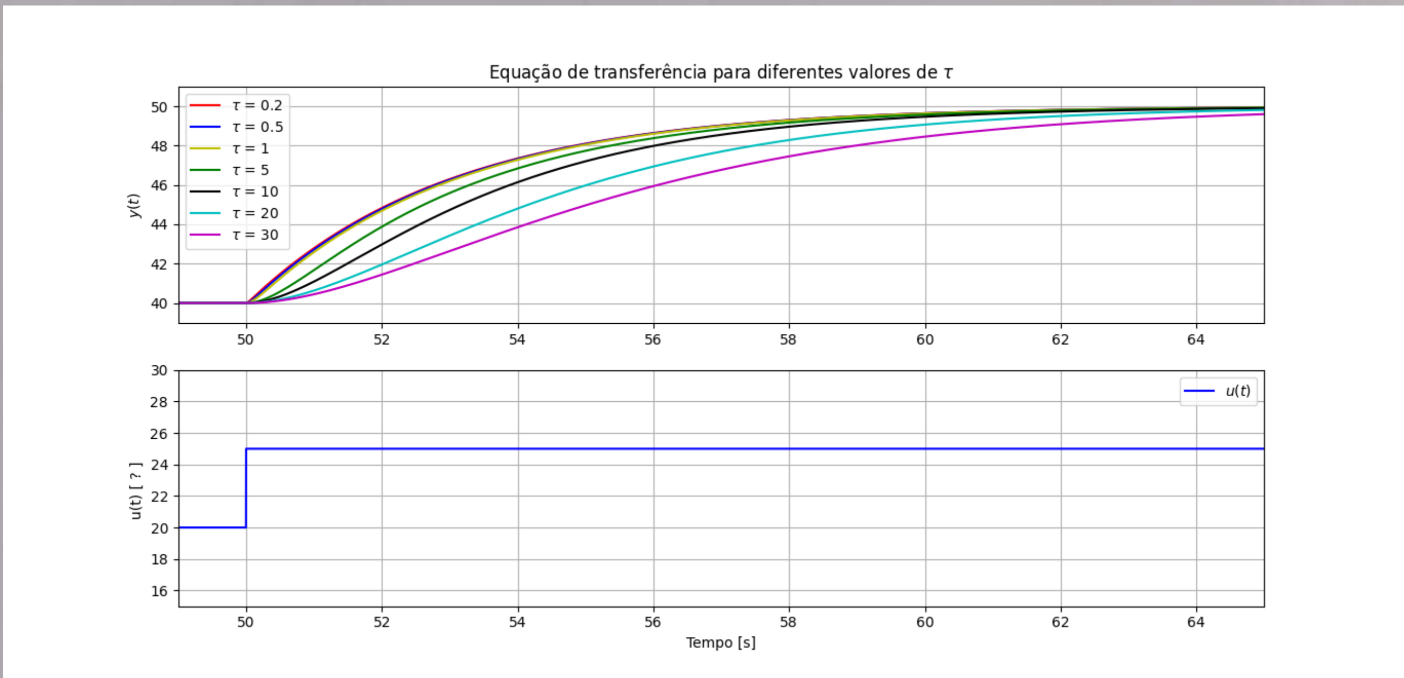
$$\tau s + 10 = 0$$
$$s = \frac{-10}{\tau}$$

Já s_1 e s_2 podem ser encontrados

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \qquad s_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \qquad s_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$$
$$\Delta = -3$$

Com isso, os polos dominantes são s_1 e s_2 por estarem mais próximos do eixo imaginário.

Dessa forma, obtêm-se simulações da saída para entradas em degrau em $u(t)$ para cada um dos valores de $\tau \in \{0,2;\ 0,5;\ 1,0;\ 5,0;\ 10,0;\ 20,0;\ 30,0\}$:



Com a análise do gráfico, é possível relacionar o comportamento obtido com o posicionamento dos polos:

↳ Quando $\tau \in \{0,2;\ 0,5;\ 1,0\}$

$\tau = 0,2$, $s = -50$

$\tau = 0,5$, $s = -20$

$\tau = 1,0$, $s = -10$

Nesse caso, esses polos são muito maiores que os polos dominantes e podem, portanto, serem desconsiderados

↳ Quando $\tau \in \{5, 10\}$

$\tau = 5$, $s = -2$

$\tau = 10$, $s = -1$

Agora, há uma aproximação dos polos dominantes. Além disso, há uma diminuição da amplitude das oscilações pois a parte real vai ficando mais próxima do eixo imaginário

↳ Quando $\tau = 20$

$\tau = 20$, $s = -0,5$

Finalmente, o polo s está localizado a uma mesma distância do eixo imaginário que os polos s_1 e s_2

Quando $\tau = 30$

$\tau = 30, \; s = -1/3$

Agora, com $\tau = 30$, o polo s fica mais próximo do eixo imaginário que os polos s_1 e s_2 e, assim, se torna o polo dominante. Vale ressaltar que, devido à proximidade desses, o comportamento do sistema ainda é afetado por eles e, portanto, não podem ser desprezados.

4- Com a associação em série S_1 e S_3,

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_3(s)$$

Que também foram obtidos na questão 1 do exercício 1.2:

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \qquad G_3(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{s + z}{s + p} = \frac{s + z}{(s^2 + s + 1)(s + p)}$$

$$G(s) = \frac{s + z}{(s + p)(s + s_1)(s + s_2)}$$

Com essa equação fica evidente que existem 3 polos, um deles é dado por

$$s + p = 0$$
$$s = -p$$

E, s_1 e s_2 foram encontrados na questão anterior (3 do exercício 1.2), de maneira análoga, nesse caso,

$$s_1 = \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2} \qquad s_2 = \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2}$$

Para que a associação resulte em um sistema que não apresente oscilações, o polo s deve ser dominante, ou seja, a parte real de s deve ser maior que a parte real dos outros polos, s_1 e s_2. Além disso, a fim de garantir que s_1 e s_2 não afetem o comportamento, uma vez que s_1 e s_2 estão no ponto $-0,5$ no eixo real, tem-se que

$s > -\frac{0,5}{10} \rightarrow s > -0,05$

Sabendo disso, como $s = -p$, tem-se que "p" precisa ser menor que 0,05. Por fim, para garantir estabilidade, "p" deve ser maior que 0.

$$0 < p < 0,05$$

Ademais, para resultar em um ganho estático nulo, faz-se

$$K_{estático} = \lim_{s \to 0} G(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s+z}{(s^2+s+1)(s+p)} = \frac{z}{p}$$

Para que $\frac{z}{p} = 0$, $z = 0$, $p \neq 0$.

1.3 - Sistema realimentado

A equação diferencial linear que descreve o sistema é:

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) = 5v(t)$$

Observa-se que a equação está no espaço do tempo, sendo necessário modificar o espaço para o frequência deve-se realizar a transformada de Laplace.

⇨ Transformada de Laplace:

$$L(\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) = 5v(t)) = [s^2X(s) - sX(0) - \dot{X}(0)] + 10.[sX(s) - X(0)] = 5V(s)$$

$$s^2X(s) - sX(0) - \dot{X}(0) + 10sX(s) - 10X(0) = 5V(\ )$$

$$s^2X(s) + 10sX(\ ) = 5V(s) + sX(0) + \dot{X}(0) + 10X(0)$$

$$X(s) = \frac{5V(s) + sX(0) + \dot{X}(0) + 10X(0)}{s^2 + 10s}$$

Após realizada a transformada de Laplace é possível determinar a equação de transferência do sistema, para tanto considera-se que as condições iniciais são nulas:

⇨ Equação de transferência:

$$X(s) = \frac{5V(s)}{s^2 + 10s}$$

$$\boxed{\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{5}{s.(s+10)} = g(s)} \quad (I)$$

Com a equação de transferência é possível implementar o controlador proporcional:

⇨ Controlador proporcional:

Com o controlador proporcional, em malha fechada, a função de transferência passa a ser dada por:

$$G_{mf}(s) = \frac{K_p \cdot g(s)}{1 + K_p \cdot g(s)} \qquad (\text{II})$$

Substituindo a equação I em II:

$$G_{mf}(s) = \frac{K_p \cdot \left(\frac{5}{s \cdot (s+10)}\right)}{1 + K_p \cdot \left(\frac{5}{s \cdot (s+10)}\right)}$$

$$G_{mf}(s) = \frac{\frac{5K_p}{s \cdot (s+10)}}{1 + \frac{5K_p}{s \cdot (s+10)}}$$

$$G_{mf}(s) = \frac{\frac{5K_p}{\cancel{s \cdot (s+10)}}}{\frac{s \cdot (s+10) + 5K_p}{\cancel{s \cdot (s+10)}}}$$

$$\boxed{G_{mf}(s) = \frac{5K_p}{s \cdot (s+10) + 5K_p}} \qquad (\text{III})$$

1) Para determinar os valores de Kp que torna a malha fechada assintoticamente estável, utiliza-se o critério de estabilidade de Routh. Em resumo, o critério de estabilidade de Routh afirma que a condição necessária e suficiente para a estabilidade é que os coeficientes da equação característica e todos os termos da primeira coluna do arranjo tabular tenham o mesmo sinal. Realizando o arranjo tabular para equação característica da equação (III), tem-se que:

Eq. característica $\rightarrow s^2 + 10s + 5K_p = 0$

$* a_0 = 1$

$* a_1 = 10$

$* a_2 = 5K_p$

$* a_3 = 0$

S_2	a_0	a_2
S_1	a_1	a_3
S_0	$\frac{(a_1 . a_2)-(a_0 . a_3)}{a_1}$	

$\Longrightarrow$

S_2	1	$5K_p$
S_1	10	0
S_0	$5K_p$	

→ Como todos os elementos devem apresentar o mesmo sinal numérico, pode-se afirmar que:

$$5K_p > 0$$

$$\boxed{K_p > 0}$$

Sendo assim, para qualquer valor de Kp maior que 0, o sistema é assintoticamente estável.

2) Para determinar a faixa de valores de Kp em que a malha fechada seja estável e com comportamento superamortecido, partiremos da resposta da questão 1 e da análise da equação característica.

→ Para o sistema ser estável, Kp tem que ser maior que 0.

→ Para o sistema apresentar comportamento superamortecido, ele deve possuir dois polos reais, negativos e distintos. Para isso, analisa-se a equação característica:

$$s^2 + 10s + 5K = 0$$

*O termo "$+10s$" garante que as raízes serão negativas ao utilizar a fórmula de Bháskara, desde que Δ seja menor que 100, ou seja $K>0$.

*Para serem reais e distintos, $\Delta > 0$:

Digitalizado com CamScanner

$$\Delta > 0$$

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

$$100 - 20K_p > 0$$

$$\boxed{K_p < 5}$$

Desse modo, Kp pode variar entre 0 e 5 $(0 < K_p < 5)$, para que o sistema seja estável e apresente comportamento super-amortecido.

3) Considerando que Gmf(s) possa ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{5K_p}{s^2 + 10s + 5K_p} = \frac{C}{s^2 + (2\zeta W_n)s + W_n^2}$$

temos que "$W_n = \sqrt{5K_p}$" e que "$(2\zeta W_n) = 10$". Realizando as devidas manipulações e considerando o coeficiente de amortecimento igual a 0.5, obtemos:

$$2 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{5K_p} = 10$$

$$(\sqrt{5K_p})^2 = (10)^2$$

$$5K_p = 100$$

$$\boxed{K_p = 20}$$

4) Dadas as condições da questão 3, temos a frequência natural é obtida pela expressão:

$$W_n = \sqrt{5K_p}$$

como $K_p = 20$:

$$W_n = \sqrt{5 \cdot 20}$$

$$\boxed{W_n = 10 Hz}$$

5) Os pólos são as raízes do denominador da função de transferência, ou seja, são os valores de "s" com que o denominador tenha valor igual a zero. A localização dos pólos determina a natureza dos modos do sistema. Para valores de Kp maiores que 5, os pólos serão complexos conjugados com parte real negativa, fazendo com que o sistema passe a funcionar como subamortecido. Quanto maior o valor de Kp, maior será o overshoot gerado no sistema, isso significa que o sistema será mais instável e oscilatório para grandes valores de Kp.

A fim de verificar o efeito de Kp na equação, plotou-se o gráfico com diferentes valores para Kp: