



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Departamento da Engenharia Mecatrônica

Engenharia Mecatrônica

# **Análise e Modelagem de Sistema de Tanques Acoplados**

Luiza Gomes de Castro e Sá

Thiago José da Silva

Divinópolis

Novembro/2021

# Resumo

Para analisar, compreender e projetar sistemas de controle, usa-se modelos matemáticos quantitativos de sistemas físicos. O comportamento dinâmico é geralmente descrito através de equações diferenciais ordinárias (DORF; BISHOP, 2009). Sendo assim, o presente trabalho visa realizar a análise e modelagem do sistema proposto. Em suma, o sistema é composto por dois tanques acoplados que compõe o reator químico. Com isso, busca-se estudar o sistema de tanques do reator e suas variáveis e formular um modelo matemático que represente a dinâmica deste. Posteriormente, espera-se linearizar o modelo em torno do ponto de operação e implementar os resultados em função do tempo do sistema linearizado e sistema de equações diferenciais. Além disso, almeja-se obter a modelagem caixa preta e a implementação dos resultados em função dos modelos. Para tanto, vários conceitos foram apresentados e recorridos durante o processo de montagem do relatório. Através do balanço de energia a EDO do sistema foi definida e classificada como não linear e, uma aproximação linear foi obtida pela expansão em série de Taylor. Ademais, com a transformada de Laplace, a função de transferência foi estipulada. Outrossim, métodos como Ziegler-Nichols e Miller foram implementados e comparados entre si. E, após o desenvolvimento do código e plotagem dos gráficos, visualizou-se que o tempo de estabilização no ponto de operação do sistema é de 15 segundos. Além disso, observou-se que a EDO, a expansão em série de Taylor e a equação de transferência apresentam comportamentos semelhantes. Com a utilização de degraus - perturbações em torno de operação - foi possível a análise gráfica do método de Ziegler-Nichols e Miller. Como resultado, notou-se que o método de Ziegler-Nichols apresentou melhor desempenho qualitativa e quantitativamente. Ao final, concluiu-se que o presente trabalho proporcionou a integração entre os conhecimentos obtidos em aulas teóricas com a produção da modelagem matemática do sistema de tanques reator químico. Sua elaboração direcionou o grupo para realização de pesquisas, estudo de hipóteses, análises, dedução de equações e implementações. Portanto, pode-se afirmar que os objetivos propostos pelo trabalho foram alcançados com êxito.

**Palavras-chaves:** Análise; Modelo matemático; Linearização; Tanques acoplados; Simulação.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Preliminares . . . . .</b>	<b>2</b>
2.1	Balanco de energia . . . . .	2
2.2	Funções e sistemas lineares . . . . .	2
2.3	Expansão em série de Taylor . . . . .	2
2.4	Transformada de Laplace . . . . .	3
2.5	Método da Resposta ao Degrau com 3 parâmetros - Ziegler-Nichols . . . . .	4
2.6	Método da Resposta ao Degrau com 3 parâmetros - Miller . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Sistema de tanques reator químico . . . . .</b>	<b>5</b>
3.1	Análise de tanques acoplados . . . . .	5
3.2	Aproximação linear do sistema . . . . .	8
3.3	Função de transferência . . . . .	9
3.4	Método de Ziegler-Nichols . . . . .	9
3.5	Método de Miller . . . . .	10
3.6	Controlabilidade do sistema . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Resultados e Discussões . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>16</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>17</b>

# 1 Introdução

Para analisar, compreender e projetar sistemas de controle, usa-se modelos matemáticos quantitativos de sistemas físicos. O comportamento dinâmico é geralmente descrito através de equações diferenciais ordinárias (DORF; BISHOP, 2009). O processo de produzir um sistema matemático a partir de um sistema real é denominado modelagem. Existem três classificações de modelagem: caixa-branca, que considera apenas as variáveis de entrada e a física do sistema; Caixa-preta, que considera apenas variáveis de entrada e saída e caixa-cinza, que trabalha com as variáveis de entrada, saída e a física do sistema (AGUIRRE, 2007). À vista disso, no estudo em questão, serão empregados os modelos caixa-branca e caixa-preta.

Outrossim, uma grande maioria de sistemas físicos são lineares dentro de uma certa gama de valores das variáveis. Contudo, todos os sistemas se tornam, em última análise, não lineares a medida que os valores das variáveis crescem sem limites (DORF; BISHOP, 2009). Nesse estudo, especificamente, por se tratar de um sistema físico não linear, serão apresentadas aproximações de linearização que permitem o uso de métodos baseados na transformada de Laplace.

Por conseguinte, o presente trabalho visa realizar a análise e modelagem do sistema proposto. Em suma, o sistema é composto por dois tanques acoplados que compõe o reator químico. Esse relatório é composto por Introdução, capítulo 1, que expõe o assunto e os objetivos almejados; Preliminares, capítulo 2, que discorre a respeito dos métodos utilizados; Sistemas de tanques reator químico, capítulo 3, que apresenta o desenvolvimento da prática; Resultados e discussões, capítulo 4; E, por fim, o capítulo 5, Conclusão, a qual sintetiza os desfechos do trabalho.

## 1.1 Objetivos

São objetivos desse experimento estudar o sistema de tanques do reator e suas variáveis e formular um modelo matemático que represente a dinâmica deste. Posteriormente, espera-se linearizar o modelo em torno do ponto de operação e implementar os resultados em função do tempo do sistema linearizado e sistema de equações diferenciais. Além disso, busca-se obter a modelagem caixa preta e a implementação dos resultados em função dos modelos.

## 2 Preliminares

### 2.1 Balanço de energia

Em processos químicos há duas formas de transferência de energia entre o sistema e suas vizinhanças. A primeira está relacionada com a forma de energia que o sistema apresenta (energias cinéticas, potências e internas). A segunda forma envolve as energias transferidas do sistema para as vizinhanças, e vice-versa, enquanto dura o processo (JUNIOR; CRUZ, 2013).

$$\boxed{\text{Taxa de energia acumulada}} = \boxed{\text{Taxa de energia entrada}} - \boxed{\text{Taxa de energia saída}} + \boxed{\text{Taxa de energia gerada}} - \boxed{\text{Taxa de energia gasta pelo trabalho realizado}}$$

Figura 1 – Balanço de Energia

### 2.2 Funções e sistemas lineares

Embora sistema linear e função linear sejam termos com significados diferentes, ambos são classificados como lineares caso possuam as seguintes duas propriedades (DORF; BISHOP, 2009):

- Homogeneidade:

$$f(ax) = af(x) \quad (2.1)$$

Essa propriedade também é conhecida como escalonamento ou proporcionalidade.

- Aditividade:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad (2.2)$$

### 2.3 Expansão em série de Taylor

Para linearizar sistemas não lineares tem-se o conceito de expansão em série de Taylor, a qual expressa o valor de uma função em termos do valor dessa função em um ponto particular, da variação em torno desse ponto e das derivadas calculadas nesse ponto (NISE, 2012).

Sendo assim, essa abordagem permite estudar o comportamento da função  $f = f(x)$ , arbitrária, contínua e suave, em torno de um ponto fixo ( $x = x_0$ ). Nesse ponto de operação, portanto, a função é dada por  $f(x_0)$  e deseja-se conhecer o comportamento do valor da função quando  $x = x_0 + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon = x - x_0$ .

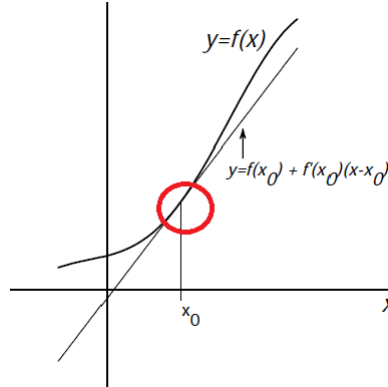


Figura 2 – Representação da expansão em série de Taylor.

Na figura 2, tem-se a reta tangente à curva  $f(x)$  no ponto  $x_0$ . Por definição, isso é o mesmo que a derivada  $f'(x_0)$  (STEWART, 2006). Ou seja:

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (2.3)$$

Através da observação da figura 2, é possível notar que, quando  $x$  é próximo de  $x_0$ , a reta tangente ao ponto  $x_0$  é quase coincidente com a função  $f(x)$ . Dessa forma, tem-se o seguinte:

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.4)$$

Para funções com diversas variáveis, a expansão em série de Taylor é dada por:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \simeq g(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_0} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x_2=x_0} (x_2 - x_{20}) + \dots + \left. \frac{\partial g}{\partial x_n} \right|_{x_n=x_0} (x_n - x_{n0}) \quad (2.5)$$

## 2.4 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace consiste na transformação de uma função  $f(t)$  em outra função  $F(s)$ . Ela existe para as equações diferenciais lineares para as quais a integral da transformação converge. Sendo assim, a capacidade de obter aproximações de sistemas

físicos permite ao analista o uso da transformada de Laplace (DORF; BISHOP, 2009). A transformação de Laplace para uma função do tempo,  $f(t)$ , é

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}[f(t)] \quad (2.6)$$

A variável  $s$  pode ser considerada o operador diferencial tal que

$$s \equiv \frac{d}{dt} \quad (2.7)$$

## 2.5 Método da Resposta ao Degrau com 3 parâmetros - Ziegler-Nichols

Esse método consiste em inserir uma entrada degrau unitário em um processo de malha aberta e observar a resposta desse sistema com o tempo. O modelo é caracterizado pelos três parâmetros ( $K$ ,  $\tau$ ,  $\theta$ ) e apresenta resposta ao degrau descrita por (ASTROM; HAGGLUND, 1995):

$$s(t) = K \left( 1 - e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \right) \quad (2.8)$$

Os parâmetros ( $K$ ,  $\tau$ ,  $\theta$ ) podem ser determinados graficamente, que pode ser observado na imagem 3 .

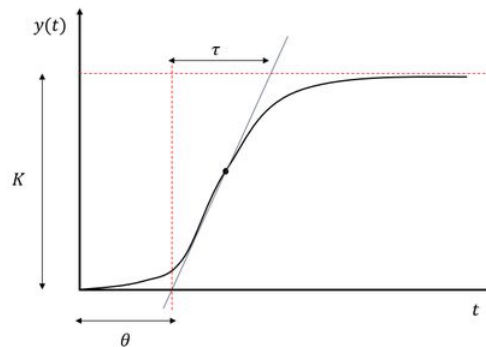


Figura 3 – Determinação gráfica dos parâmetros do método de Ziegler-Nichols.

## 2.6 Método da Resposta ao Degrau com 3 parâmetros - Miller

Esse método propõe que o tempo em que a resposta alcança 63,2% de seu valor final equivale soma de  $\theta + \tau$ , ou seja

$$0,632\Delta y = \theta + \tau \quad (2.9)$$

## 3 Sistema de tanques reator químico

### 3.1 Análise de tanques acoplados

A figura 4 apresenta o sistema de tanques reator químico.

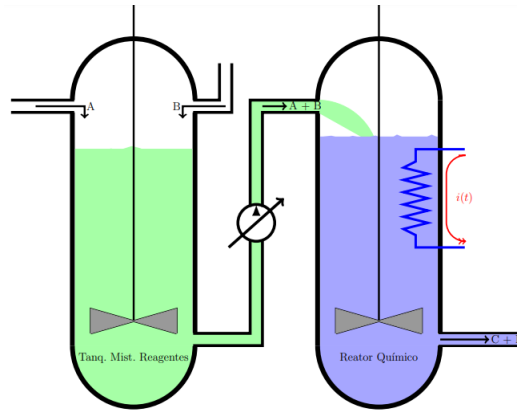


Figura 1. Sistema de tanques reator químico.

Figura 4 – Sistema de tanques reator químico

Dois tanques compõe o sistema, sendo que, o tanque da esquerda é para mistura de reagentes e, o da direita, o reator químico, onde a reação química é catalizada pelo efeito da temperatura. Os reagentes A e B são adicionados e misturados no primeiro tanque e a solução homogeneizada resultante é transportada para o segundo tanque onde ocorre a reação:



Para determinar a equação diferencial ordinária que representa o sistema de um tanque reator, utiliza-se a análise do balanço de energia por unidade de massa.

$$\frac{d(\rho V E)}{dt} = \frac{d(U_e + E_{ke} + E_{\phi e})\rho V}{dt} + Q - W \quad (3.2)$$

Sabe-se que:

$$F = \frac{V}{dt} \quad (3.3)$$

sendo F a vazão volumétrica, V o volume e dt a taxa de variação no tempo.

$$\frac{d(\rho V E)}{dt} = \sum_{i=1}^{nE} F_e \rho_e (U_e + E_{ke} + E_{\phi e}) - \sum_{i=1}^{nS} F_s \rho_s (U_s + E_{ks} + E_{\phi s}) + Q - W \quad (3.4)$$



Nesse sistema, serão desconsideradas as energias cinéticas ( $E_k$ ) e a energia potencial ( $E_\Phi$ ), visto que a energia interna do sistema é bem superior as duas, sendo assim, a única taxa de energia do sistema será a taxa de energia interna. Além disso a taxa líquida do trabalho pode ser desprezada, visto que é bem pequena quando comparada as taxas de transferência e convecção de calor.

$$\frac{d(\rho V U_{int})}{dt} = \sum_{i=1}^{nE} F_e \rho_e (U_e) - \sum_{i=1}^{nS} F_s \rho_s (U_s) + Q \quad (3.5)$$

Considerando que o volume do tanque 2 é composto inteiramente por líquidos e o sistema em pressão constante, pode-se afirmar que:

$$U_{int} + \Delta(PV) = H$$

em que  $U_{int}$  é a energia interna do sistema,  $\Delta(PV)$  é a energia elástica e  $H$  é a entalpia.

Por se tratarem de líquidos, considerando que este líquido é incompressível, por tanto a energia elástica é nula, sendo assim pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} U_{int} &\approx H \\ \hat{U}_{int} &= \hat{H} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Desse modo, a equação (3.5), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dU_{int}}{dt} = -\Delta(F\rho\hat{H}) + \sum Q \quad (3.7)$$

em que  $U_{int}$  é a energia interna do sistema,  $F$  é a vazão volumétrica,  $\rho$  é a densidade da solução,  $\hat{H}$  é a entalpia por unidade de massa,  $Q$  são os calores presentes no sistema e  $\Delta$  representa a variação de entrada e saída.

Continuando análise a partir da equação (3.6):

$$\begin{aligned} d\hat{U}_{int} &= d\hat{H} \\ \Delta H &= \int C dT \\ dU_{int} = dH &= C dt \\ d\hat{U}_{int} = d\hat{H} &= c_p dT \end{aligned} \quad (3.8)$$

$c_p$  é o calor específico a pressão constante. A energia interna total do líquido no tanque é:

$$\begin{aligned} U_{int} &= \rho V \hat{H}_{int} \\ \frac{dU_{int}}{dt} &= \rho V c_p \frac{dT}{dt} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Em um sistema com pressão constante, pode-se afirmar a variação de entalpia é igual a quantidade de calor gerado pela reação:

$$\begin{aligned}\Delta \hat{H} &= Q_e \\ Q_e &= c_p(\theta_i - \theta)\end{aligned}\tag{3.10}$$

sendo  $Q_e$  o valor do calor de entrada no reator 2 gerado pela reação química no reator 1.

Pode-se afirmar também que compõe o sistema o calor provindo do Efeito Joule e o calor do processo de convecção, desse modo:

$$\sum Q = Q_{EJ} + L(\theta)\tag{3.11}$$

Substituindo as equações (3.9), (3.10) e (3.11) na equação (3.6):

$$\rho V C \frac{d\theta}{dt} = Q + L(\theta) + F \rho Q_e\tag{3.12}$$

sendo  $\rho$  a densidade da solução,  $V$  o volume da solução,  $c_p$  calor específico a pressão constante,  $\frac{d\theta}{dt}$  é a taxa de variação da temperatura,  $Q_{EJ}$  o calor proveniente do efeito joule,  $L(\theta)$  a taxa de calor transferida por convecção,  $F$  a vazão volumétrica,  $\rho$  é a densidade da solução e  $Q_e$  o valor de entrada da solução.

Sabe-se que a fórmula para o cálculo de transferência de calor por convecção é:

$$L(\theta) = hA(\theta_i - \theta)\tag{3.13}$$

Substituindo (3.10) e (3.13) em (3.12):

$$\rho V c_p \frac{d\theta}{dt} = Q_{EJ} + hA(\theta_i - \theta) + \rho F c_p(\theta_i - \theta)\tag{3.14}$$

Isolando  $\frac{d\theta}{dt}$  encontra-se a EDO que descreve o sistema:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{Q_{EJ}}{\rho V c_p} + \frac{hA(\theta_i - \theta)}{\rho V c_p} + \frac{F(\theta_i - \theta)}{V}\tag{3.15}$$

Considera-se  $Q_{EJ}$  sendo a variável de entrada do sistema, e  $\theta$  sendo a variável de saída, a qual deseja controlar.

Para concluir se o sistema é linear, deve-se verificar se a EDO cumpre os dois princípios apresentados na seção 2.2, a começar com o da homogeneidade (2.1):

$$\begin{aligned}\frac{da\theta}{dt} &= \frac{Q_{EJ}}{\rho V c_p} + \frac{hA(\theta_i - a\theta)}{\rho V c_p} + \frac{F(\theta_i - a\theta)}{V} \\ a \left[ \frac{d\theta}{dt} \right] &= a \left[ \frac{Q_{EJ}}{\rho V c_p} + \frac{hA(\theta_i - \theta)}{\rho V c_p} + \frac{F(\theta_i - \theta)}{V} \right]\end{aligned}\tag{3.16}$$

A equação 3.16 evidencia que a EDO 3.15 não possui a propriedade da homogeneidade, fato que a classifica como não linear.

Tem-se como dados do sistema:

Variáveis	Significado	Valor
V	Volume do reator químico	10 ( $m^3$ )
$c_p$	Calor específico a pressão constante	4500 ( $J/Kg \cdot ^\circ C$ )
F	Vazão volumétrica	3 ( $m^3/s$ )
$\theta_i$	Temperatura ambiente no local dos tanques	20 ( $^\circ C$ )
h	Coefficiente de convecção natural.	15 ( $W/m^2 \cdot ^\circ C$ )
$A_{ext}$	Superfície do tanque para troca de calor por convecção.	31.4 ( $m^2$ )
$\rho_s$	Massa específica da solução	1000 ( $Kg/m^3$ )
$\theta$	Ponto de operação do sistema	60 $^\circ C$

Tabela 1 – Dados do sistema

Para determinar o valor inicial de  $Q_{EJ}$ , deve-se considerar o sistema atuando em regime permanente. Isso significa que  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ , sendo assim:

$$0 = \frac{Q_{EJ}}{\rho V c_p} + \frac{hA(\theta_i - \theta)}{\rho V c_p} + \frac{F(\theta_i - \theta)}{V} \quad (3.17)$$

Isolando Q e substituindo os dados do sistema na equação, obtêm-se o valor do sinal de controle necessário para levar o sistema para o ponto de operação desejado:

$$\begin{aligned} Q_{EJ} &= -hA(\theta_i - \theta) - \rho F C(\theta_i - \theta) \\ Q_{EJ} &= 540.018.840.J \end{aligned} \quad (3.18)$$

## 3.2 Aproximação linear do sistema

Agora, para obter um modelo local linearizado, aplica-se a expansão em série de Taylor truncada na primeira derivada, vista na seção 2.3, na EDO (3.15):

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &\simeq f(\theta, Q_{EJ}) + \frac{\partial f}{\partial \theta} \Delta\theta + \frac{\partial f}{\partial Q_{EJ}} \Delta Q_{EJ} \\ \frac{d\theta}{dt} &\simeq 0 - \left( \frac{F}{V} + \frac{hA}{\rho V c_p} \right) (\theta_1 - \theta) + \frac{(Q_1 - Q_{EJ})}{\rho V c_p} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, tem-se a aproximação linearizada do sistema:

$$\frac{d\theta}{dt} \simeq - \left( \frac{F}{V} + \frac{hA}{\rho V c_p} \right) (\theta_1 - \theta_i) + \frac{(Q_1 - Q_{EJ})}{\rho V c_p} \quad (3.20)$$

Na seção 4, é possível visualizar a imagem 7, a qual apresenta a saída do sistema e a resposta do modelo linear obtido.

### 3.3 Função de transferência

Após obter a aproximação linear da função é possível encontrar a função de transferência. Para tanto, utiliza-se a transformada de Laplace, vista na seção 2.4:

$$s\theta(s) = -\left(\frac{F}{V} + \frac{hA}{\rho V c_p}\right)\theta(s) + \frac{Q(s)}{\rho V c_p} \quad (3.21)$$

$$\frac{\theta(s)}{Q(s)} = G(s) = \frac{1}{\rho V c_p \left(s + \frac{F}{V} + \frac{hA}{\rho V c_p}\right)}$$

### 3.4 Método de Ziegler-Nichols

De acordo com a seção 2.5, é possível obter o valor de  $\tau$  utilizando o gráfico de degraus - que será melhor apresentado na seção de Resultados Discussões.

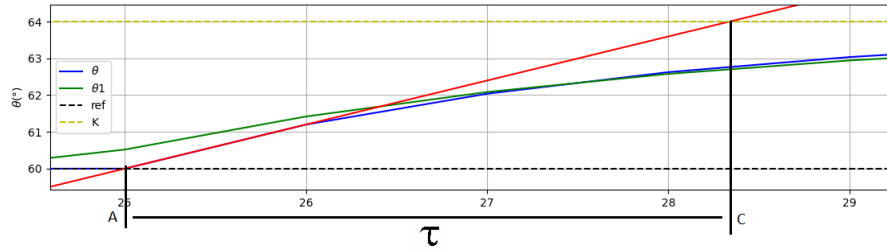


Figura 5 – Valor  $\tau$

A partir do gráfico 5, observa-se que a reta vermelha corta o ponto de operação no tempo 25 segundos e atinge o valor estacionário do degrau em aproximadamente 28.33 segundos. Desse modo:

$$\tau = 28.33 - 25 \quad (3.22)$$

$$\tau = 3.33s$$

Para o degrau negativo,  $\tau$  apresentará o mesmo valor de 3.33 segundos.

Para realizar a curva referente ao modelo de primeira ordem, curva verde(figura 11), utilizou-se a equação:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (3.23)$$

em que  $\tau$  foi encontrado na seção 3.4 e K pode ser encontrado utilizando a seguinte fórmula:

$$K = \left| \frac{\Delta y}{\Delta u} \right| \quad (3.24)$$

sendo  $\Delta y \approx 3.99616286150048$  e  $\Delta u \approx 53998116$ , substituindo na equação:

$$K \approx 0.740\mu \quad (3.25)$$

com os dados obtidos, é possível determinar a equação de Ziegler para modelo de primeira ordem:

$$G(s)_{Ziegler} \approx \frac{0.740\mu}{3.33s + 1} \quad (3.26)$$

### 3.5 Método de Miller

Analisando graficamente obtêm-se que o  $\tau$  de Miller é igual a 2.09s. Pode-se afirmar que o ganho estático para o método de Ziegler é igual ao ganho estático para o método de Miller, sendo assim:

$$K \approx 0.740\mu \quad (3.27)$$

Substituindo o valor de K e tau de Miller na equação (3.23), afim de determinar a equação de Miller para modelo de primeira ordem:

$$G(s)_{Miller} \approx \frac{0.740\mu}{2.09s + 1} \quad (3.28)$$

### 3.6 Controlabilidade do sistema

A taxa normalizada do tempo morto ou taxa de controlabilidade, pode ser obtida pela seguinte equação:

$$T = \frac{\theta}{\theta + \tau} = \frac{\theta}{T_{ar}} \quad (3.29)$$

Sendo o tempo morto,  $\theta \approx 0$ , afirma-se que  $T \approx 0$ .

## 4 Resultados e Discussões

A partir da equação diferencial obtida para o sistema de tanques acoplados, produziu-se um programa em Python que apresenta o modelo em malha aberta. O gráfico abaixo apresenta os dois sinais do sistema e o sinal de controle:

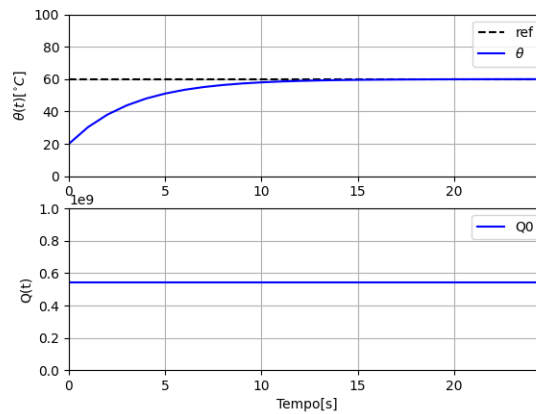


Figura 6 – Resposta temporal do sistema

Analisando o gráfico 6 observa-se que a temperatura inicial do sistema inicia-se em  $20^{\circ}C$  e demora aproximadamente 15 segundos para atingir o ponto de operação, estabilizando o sistema, em  $60^{\circ}C$ .

Após a linearização, através da expansão em série de Taylor, acrescentou-se ao código desenvolvido um trecho que gerou o gráfico 7 contendo a saída do sistema e a resposta do modelo linear obtido na equação (3.20).

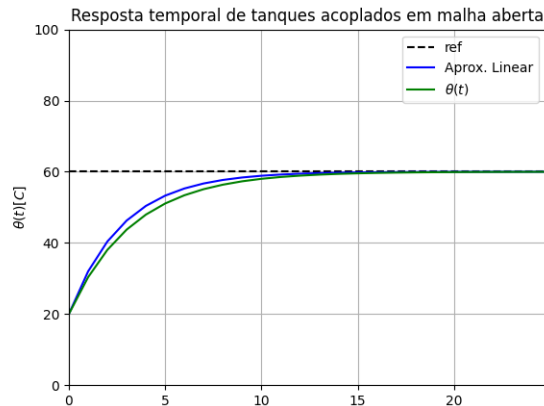


Figura 7 – Saída do sistema e resposta do modelo linear.

Posterior à aplicação da Transformada de Laplace, obteve-se a equação de transferência (3.21), a fim de obter um resultado de uma equação diferencial linear invariante no tempo. Com a equação plotou-se o seguinte gráfico:

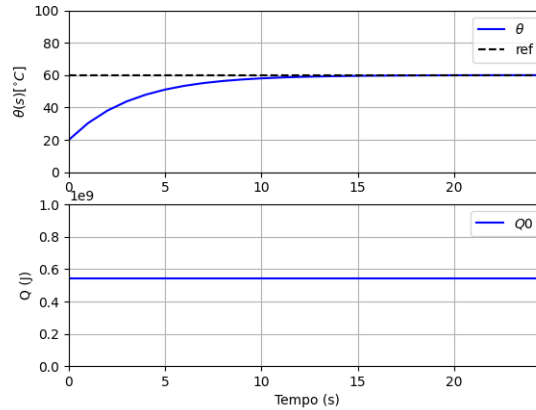


Figura 8 – Equação de transferência

Observa-se a partir do gráfico da figura 8 que apesar de estar em domínio diferente da equação (3.15) do gráfico 6, ambos apresentam o mesmo comportamento, ao se estabilizar no ponto de operação  $60^{\circ}C$  após um período de 15 segundos.

A fim de comparar a resposta da função de transferência com a resposta obtida pela implementação da equação diferencial, deve-se adotar o procedimento de *offset* no sistema, tanto na entrada da função de transferência como na saída da mesma. Isso pode ser observado no diagrama esquemático 9.

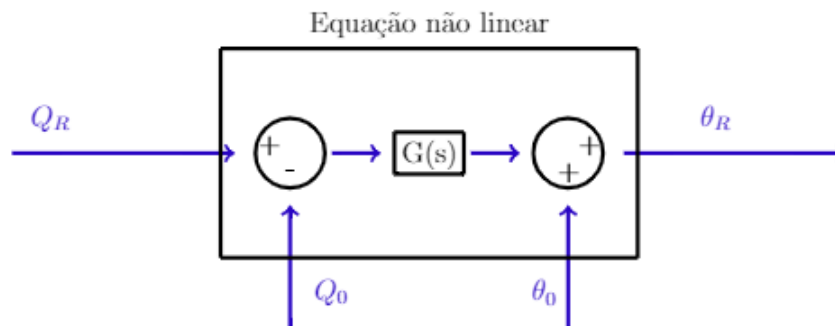


Figura 9 – Diagrama esquemático

No diagrama,  $Q_R$  é a entrada real do sistema,  $Q_0$  a entrada em equilíbrio do sistema,  $\theta_R$  é a saída real do sistema,  $\theta_0$  é a saída de equilíbrio,  $G(s)$  é a equação de transferência e os círculos representam os *offset's* de entrada e saída.

A partir da análise da figura 9 observa-se que ao entrar com o valor de calor de equilíbrio, o *offset* de entrada irá gerar uma entrada igual a 0 na equação de transferência, e, conseqüentemente, uma saída nula. Porém, devido ao *offset* de saída, a temperatura final do sistema será a temperatura de equilíbrio. Desse modo, pode-se afirmar que ambas as saídas do sistema real e da equação de transferência são equivalentes, por conseguinte ambos os modelos podem ser utilizados para a modelagem do processo de controle do sistema de tanques acoplados.

Utilizando a modelagem em caixa preta, a fim de aproximar o sistema de um modelo linear de baixa ordem, emprega-se o sinal de degrau para alterar o valor de entrada  $Q_{EJ}$ , em aproximadamente  $\pm 10\%$ , com o objetivo de analisar a curva de reação do sistema.

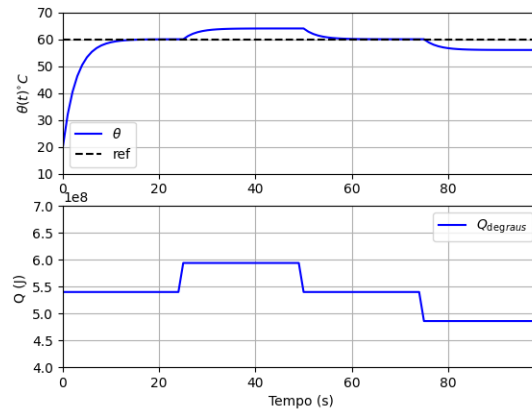


Figura 10 – Degraus

Constata-se, a partir da figura 10, que o sinal de entrada em degrau provoca uma perturbação de aproximadamente  $\pm 4^\circ\text{C}$  em torno do ponto de operação, com isso a saída do processo passará por um regime transitório e estabilizará em um novo valor. O sistema então pode ser considerado autoregulado, ou seja, estável em malha aberta.

A partir do gráfico da figura 10, analisando o degrau de subida, plotou-se uma reta vermelha tangente ao degrau, cujo o coeficiente angular é obtido considerando os tempos 25 e 26 segundos, e as temperaturas no mesmo tempo, que representam o início da inclinação da reta. O mesmo procedimento foi realizado para o degrau negativo, porém desta vez foram considerados o tempos 75 e 76 segundos.

Após a análise, a partir da equação (3.26) para a curva de Ziegler, e a partir da equação (3.28) para a curva de Miller, plota-se os seguintes gráficos:



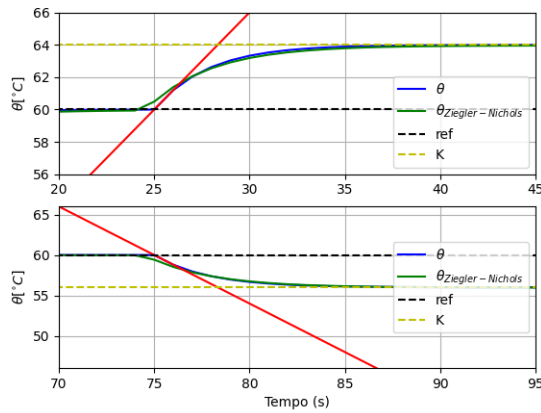


Figura 11 – Método de Ziegler-Nichols

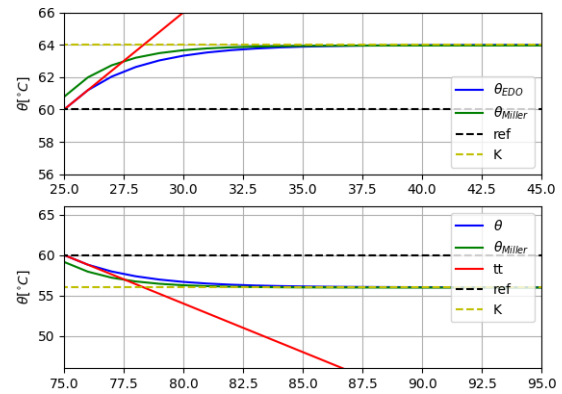


Figura 12 – Método de Miller

Observa-se uma certa semelhança entre as curvas geradas pelos métodos de Ziegler-Nichols, Miller e a equação de primeira ordem (3.15), tal igualdade é observada no comportamento gráfico no eixo y, uma vez que ambos se estabilizam no mesmo valor. A diferença é destacada quando nota-se o tempo de subida do degrau, sendo que a equação de primeira ordem apresenta um atraso de 1 segundo, devido ao período adotado, comparado aos métodos supracitados.

Agora, para comparar o desempenho dos modelos obtidos pelas equações (3.26) e (3.28), observa-se os gráficos 13 e 14:

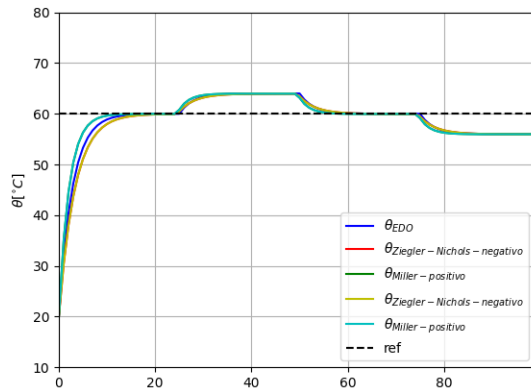


Figura 13 – Todos os modelos

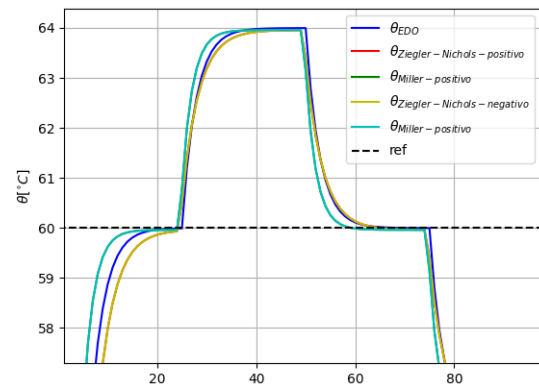


Figura 14 – Análise qualitativa

A figura 14, deixa explícito que, qualitativamente, o modelo de Ziegler-Nichols obteve a melhor resposta. Isso porque, esse modelo se aproximou mais da EDO do sistema.

Agora, analisando de maneira quantitativa, através do índice de performance RMSE, tem-se as seguintes respostas:

Modelo	índice RMSE
Ziegler-Nichols degrau positivo	0.6210
Ziegler-Nichols degrau negativo	0.6210
Miller degrau positivo	0.9406
Miller degrau negativo	0.9406

Tabela 2 – Análise quantitativa

Os índices deram iguais para os degraus negativos e positivos, visto que ambos apresentam o mesmo comportamento para o valor  $\tau$ . Sendo assim, dada a comparação entre os modelos de Ziegler-Nichols e Miller através do índice de performance RMSE, tem-se que o modelo Ziegler-Nichols obteve, também, quantitativamente, um melhor desempenho.

De acordo com o apresentado em 3.6, infere-se que o sistema é de fácil controle. Esse fato é justificado pela natureza autoregulável do processo, ou seja, o sistema é estável em malha aberta.

## 5 Conclusão

Conclui-se, após finalizar o trabalho, que estudando o sistema de tanques do reator químico e suas variáveis e levantando as principais hipóteses necessárias, foi possível formular o modelo matemático que representa a dinâmica deste. Obtido tal modelo, foi viável linearizá-lo em torno de um ponto de operação, através da expansão em série de Taylor, e implementar os resultados em função do tempo do sistema linearizado e da equação diferencial encontrada. Por fim, obteve-se os modelos aproximados via modelagem caixa preta para o sistema reator químico.

Ademais, comparou-se os modelos obtidos, com a equação diferencial ordinária, tanto qualitativamente, quanto por meio do índice de performance RMSE. Dessa maneira, é notório o melhor desempenho daqueles obtidos pelo método de Ziegler-Nichols quando comparados ao comportamento daqueles obtidos pelo método de Miller. Faz-se necessário ressaltar que, os modelos obtidos da resposta ao degrau negativo, comportaram-se de mesma forma que os modelos obtidos da resposta ao degrau positivo. Sendo assim, o método de Ziegler-Nichols assemelhou-se mais à dinâmica descrita pela EDO do sistema e, portanto, foi considerado mais apropriado.

Portanto, o presente trabalho proporcionou a integração entre os conhecimentos obtidos em aulas teóricas com a produção da modelagem matemática do sistema de tanques reator químico. A partir dos modelos matemáticos foi possível simular a resposta temporal do sistema de tanques reator químico de forma que pôde-se observar a influência do calor de entrada na dinâmica do sistema. Sua elaboração direcionou o grupo para realização de pesquisas, estudo de hipóteses, análises, dedução de equações e implementações. Finalmente, pode-se afirmar que os objetivos propostos pelo trabalho foram alcançados com êxito.

# Referências

- AGUIRRE, L. *Introdução à identificação de sistemas*. 2. ed. [S.l.]: UFMG, 2007. Citado na página 1.
- ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2. ed. [S.l.]: PID, 1995. Citado na página 4.
- DORF, R.; BISHOP, R. *Sistemas de controles modernos*. 8. ed. [S.l.]: LTC, 2009. Citado 4 vezes nas páginas i, 1, 2 e 4.
- JUNIOR, A. B.; CRUZ, A. *Fundamentos de Balanços de Massa e Energia*. [S.l.]: Edufscar, 2013. Citado na página 2.
- NISE, N. *Engenharia de sistemas de controle*. 6. ed. [S.l.]: LTC, 2012. Citado na página 2.
- STEWART, J. *Cálculo Volume 1*. 5. ed. [S.l.]: Thomson, 2006. Citado na página 3.