



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Departamento da Engenharia Mecatrônica
Engenharia Mecatrônica

Análise das característica de malha fechada

Luiza Gomes de Castro e Sá

Thiago José da Silva

Divinópolis

Janeiro/2022

Resumo

No controle em malha fechada, informações sobre a evolução da saída são usadas para especificar o sinal de controle que deve ser aplicado ao processo em determinado instante. Assim, é possível analisar e avaliar o papel dos sinais de erro para caracterizar o desempenho da malha fechada de controle. Sendo assim, o presente trabalho visa estudar o sistema reator químico e suas variáveis e formular o modelo matemático que represente a dinâmica deste. Dessa forma, espera-se trabalhar com um sistema superamortecido com atraso e analisar a dinâmica de malha fechada com controladores P e PI para capacidade de rejeição a perturbação, sensibilidade a variação de parâmetros e sinal do erro de rastreamento. Para tanto, vários conceitos foram apresentados e recorridos durante o processo de montagem do relatório. Através da modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau foi possível aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de 1^a ordem superamortecido com atraso. Ademais, pelo método de resposta ao degrau de 3 parâmetros definiu-se as características necessárias para encontrar a função de transferência que descreve a dinâmica do sistema. Outrossim, o método de CHR foi utilizado para projetar controladores P e PI que, posteriormente, tiveram suas funções de ganho de malha, sensibilidade e sensibilidade complementar explanadas e utilizadas para a análise do sinal do erro do rastreamento. Com a utilização do Teorema do valor final identificou-se a condição para a malha fechada rejeitar perturbações e, dessa forma, concluiu-se se os controladores P e PI conseguem rejeitá-las. Como resultados notou-se que o erro de rastreamento do controlador P é de 0,04, enquanto para o controlador PI é de 0. Sendo assim, evidenciou-se que, embora o erro gerado pelo controlador P seja quase que desprezível, para uma situação em que não há ruídos ou perturbações, o controlador PI apresenta um melhor desempenho. Ademais, concluiu-se, que o controlador P consegue rejeitar apenas uma entrada de impulso unitário. Por outro lado, o controlador PI consegue rejeitar uma entrada de impulso unitário, uma entrada de degrau unitário e uma perturbação temporária na vazão volumétrica da ordem 30%.

Palavras-chaves: Malha fechada; Sistema superamortecido; Erro de rastreamento; Rejeição a perturbação; Controladores;

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
2	Preliminares	2
2.1	Projeto e sintonia de controladores PID	2
2.2	Método de aproximação por Padé	4
2.3	Análise do sinal de erro e Sensibilidade do Sistema a variação de Parâmetros .	4
3	Sistema de reator químico	6
3.1	Descrição do sistema reator químico	6
3.2	Resultados e Discussões	7
4	Conclusão	16
	Referências	17

1 Introdução

Um processo, representado pela função $G(s)$, qualquer que seja sua natureza, está sujeito a mudanças das condições ambientais, envelhecimento, ignorância dos valores exatos dos parâmetros do processo e a outros fatores naturais que afetam um procedimento de controle. Nos sistemas em malha aberta, todos esses erros e alterações resultam em modificações e inexatidão na saída. Um sistema malha fechada sente a modificação na saída devida às mudanças no processos e tenta corrigir a saída. A sensibilidade de um sistema de controle a variações de parâmetros é de fundamental importância (DORF; BISHOP, 2009).

No presente relatório, mais especificamente, busca-se analisar e avaliar o papel dos sinais de erro para caracterizar o desempenho da malha fechada de controle. No controle em malha fechada informações sobre a evolução da saída são usadas para especificar o sinal de controle que deve ser aplicado ao processo em determinado instante. Sendo assim, com a finalidade de aumentar a precisão do sistema e de fazer com que ele reaja a perturbações externas, o sinal de saída é comparado com um sinal de referência e o erro entre os dois sinais é o que determina o sinal de controle que deverá ser aplicado ao processo (BOLTON, 1995).

Por conseguinte, o trabalho em questão visa explorar as áreas que incluem a redução da sensibilidade a incertezas de modelo, erros de regime permanente e rejeição a perturbação através do estudo do sistema reator químico. Esse relatório é composto por Introdução, Seção 1, que expõe o assunto e os objetivos almejados; Preliminares, Seção 2, que discorre a respeito dos métodos utilizados; Sistemas reator químico; Seção 3, que apresenta o desenvolvimento, discussões e resultados da prática; E, por fim, Seção 4, Conclusão, a qual sintetiza os desfechos do trabalho.

1.1 Objetivos

São objetivos desse experimento estudar o sistema reator químico e suas variáveis e formular o modelo matemático que represente a dinâmica deste. Assim, espera-se trabalhar com um sistema superamortecido com atraso e analisar a dinâmica de malha fechada com controladores P e PI para capacidade de rejeição a perturbação, sensibilidade a variação de parâmetros e sinal do erro de rastreamento.

2 Preliminares

Esta Seção apresenta uma revisão dos métodos empregados na realização do experimento.

2.1 Projeto e sintonia de controladores PID

Os sistemas de segunda ordem ou superior podem ser aproximados por modelos de primeira ordem mais tempo morto, o que resulta em um modelo dado pela Equação (2.1):

$$G(s) = \frac{Ke^{\theta s}}{\tau s + 1}, \quad (2.1)$$

na qual θ é o atraso ou tempo morto, τ é a constante de tempo do sistema e K é o ganho estático do sistema, dado pela razão entre a variação de entrada e saída do sistema, assim:

$$K = \left| \frac{\Delta y}{\Delta u} \right|, \quad (2.2)$$

em que Δy é a variação de saída do sistema e Δu é a variação de entrada do mesmo (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

Sendo assim, para aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de primeira ordem aplica-se a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau.

As variáveis K , τ e θ apresentados em (2.1), são obtidas através da aplicação do **método da resposta ao degrau com 3 parâmetros**. Esse método consiste em inserir uma entrada degrau unitário em um processo de malha aberta e observar a resposta desse sistema com o tempo. Os parâmetros (K, τ, θ) podem ser determinados graficamente de acordo com o observado na Figura 1 (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

A interseção da reta tangente com a resposta ao degrau que tem maior inclinação fornece θ . Além disso, existem várias maneiras de determinar o valor de τ , um dos métodos é através da distância entre os pontos A e B. Já o valor de K é fornecido pela Equação (2.2).

Além disso, é possível obter a constante:

$$T = \frac{\theta}{\theta + \tau} = \frac{\theta}{T_{ar}}, \quad (2.3)$$

em que T_{ar} é o tempo de residência médio e $0 \leq T \leq 1$ é a taxa normalizada do tempo morto(θ). O T , também chamado de taxa de controlabilidade, pode ser usado como um

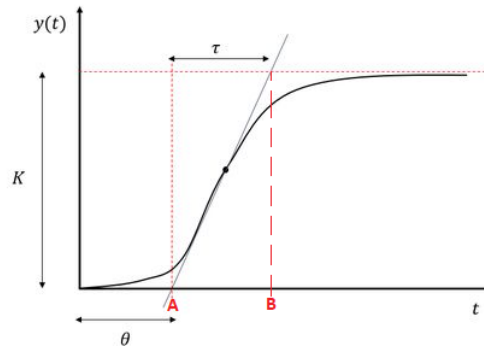


Figura 1 – Determinação gráfica dos parâmetros do método de Ziegler-Nichols.

indicativo para determinar a dificuldade de controle de um sistema, sendo que, a dificuldade aumenta à medida que T aumenta (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

Dessa maneira, com a dinâmica do modelo aproximada por um modelo de primeira ordem com atraso(2.1), é possível aplicar várias técnicas de projeto na determinação dos parâmetros do controlador que atenderão às especificações do regime transitório e do regime permanente do sistema de malha fechada, esse processo é conhecido como sintonia do controlador (OGATA, 2010). No presente trabalho, será utilizado um método de sintonia de controladores PID em malha fechada, sendo ele conhecido como **método CHR**.

Chien, Hrones e Reswick(1952), criaram o método CHR, que define ajustes para o modo servo sem sobressinal, com sobressinal máximo de 20% e para o modo regulatório sem sobressinal. Nesse relatório, utiliza-se a sintonia para resposta mais rápida possível sem sobressinal para o modo regulatório, apresentada na Tabela 1 (GARCIA, 2017).

Tipo de controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{0,3 \tau}{K\theta}$	—	—
PI	$\frac{0,6 \tau}{K\theta}$	4θ	—
PID	$\frac{0,95 \tau}{K\theta}$	$2,375\theta$	$0,421\theta$

Tabela 1 – Parâmetros de sintonia do método CHR sem sobressinal para o modo regulatório

De maneira geral, o aumento do ganho de K_c acelera a resposta do processo, porém para valores altos podem gerar oscilações excessivas e até mesmo instabilizar o sistema. O aumento de T_i , geralmente, torna os controladores PI e PID mais conservadores, eliminando o erro estacionário, porém para valores excessivos o *set point* é retornado muito lentamente. Para a variável T_d , valores pequenos reduz o desvio máximo, o tempo de resposta e a intensidade das oscilações, para T_d muito alto o ruído tende a ser amplificado e a resposta pode se tornar oscilatória. (GARCIA, 2017)

2.2 Método de aproximação por Padé

O método de Padé trata-se de uma expansão assintótica de uma série de Taylor, que pode conferir uma mais rápida convergência ou divergência para a série, simplesmente rearranjando-a como uma divisão de duas expansões (COLORADO, 2021). A aproximação de Padé de uma função $f(x) = \sum_{n=0}^N f_n x^n$ é dada por:

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \quad L, M \geq 0, \quad (2.4)$$

com $P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots p_Lx^L$ e $Q_M(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots q_Mx^M$. É possível determinar os coeficientes dos polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ através da Equação (2.5) (ZHENG; ZHANG, 2017):

$$f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}). \quad (2.5)$$

2.3 Análise do sinal de erro e Sensibilidade do Sistema a variação de Parâmetros

Considera-se o sistema em malha fechada apresentado no diagrama da Figura 2.

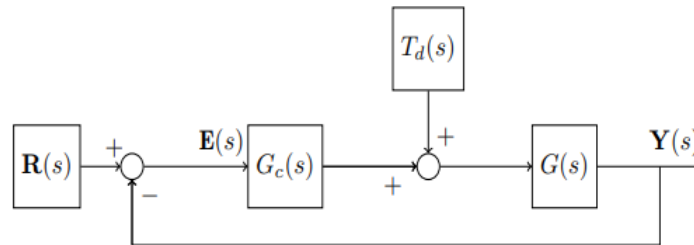


Figura 2 – Diagrama de blocos para um sistema em malha fechada.

Nesse sistema têm-se que a referência para a malha fechada é dada pela função $R(s)$ e $Y(s)$ é a saída da malha de controle. Ademais, a função $G_c(s)$ é a função do controlador, $G(s)$ é a função do sistema e $T_d(s)$ é um sinal de perturbação na entrada do sistema.

A dinâmica da função do erro de rastreamento, $E(s)$, é definida a partir da análise do diagrama de blocos, e é dada por (DORF; BISHOP, 2009):

$$E(s) = R(s) - Y(s). \quad (2.6)$$

Que pode ser expressa, após algumas manipulações do diagrama de blocos, como:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s) + G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} T_d(s). \quad (2.7)$$

Dessa forma, através do produto entre as funções do controlador e do sistema presente no denominador da Equação (2.7), tem-se a função **ganho de malha** (DORF; BISHOP, 2009):

$$L(s) = G_c(s)G(s). \quad (2.8)$$

Essa função tem papel fundamental na análise de sistemas de controle, partindo dela, é possível estabelecer a **função sensibilidade**, dada por:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}. \quad (2.9)$$

Da mesma forma, pode-se definir a **função sensibilidade complementar**, $C(s)$:

$$C(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}. \quad (2.10)$$

Assim, com as Equações (2.9) e (2.10), e a presença de ruído de medição, $N(s)$, a Equação (2.7), pode ser reescrita como:

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)T_d(s) + C(s)N(s). \quad (2.11)$$

Analisando a Equação (2.7), verifica-se que, quando $T_d(s) = 0$, o erro de rastreamento tende a zero, uma vez que se tenha a seguinte relação $G_c(s)G(s) \gg 1$. mesmo levá-lo a instabilidade. Porém, uma maior magnitude de $L(s)$ se traduz em menores variações no erro de rastreamento, isto é, uma menor sensibilidade da malha de controle a variações em $G(s)$ (DORF; BISHOP, 2009).

Assim sendo, a **sensibilidade do sistema** é dada pela razão entre a variação percentual da função de transferência do sistema com o controlador e do sistema original, assim:

$$S = \frac{\Delta T(s)G(s)}{\Delta G(s)T(s)}, \quad (2.12)$$

em que $T(s)$ é a função de transferência do sistema. No limite, para pequenas variações reescreve-se (2.12):

$$S = \frac{\partial T/T}{\partial G/G}. \quad (2.13)$$

Assim, a sensibilidade do sistema em malha aberta é igual a 1 e, para o sistema em malha fechada, é determinado por (2.13).

3 Sistema *de reator químico*

Nesta Seção é apresentado a descrição do sistema.

3.1 Descrição do sistema reator químico

A Figura 3 apresenta o sistema de tanques reator químico.

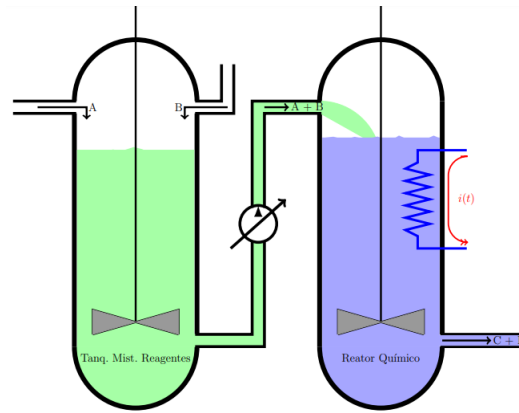


Figura 1. Sistema de tanques reator químico.

Figura 3 – Sistema de tanques reator químico

Dois tanques compõem o sistema, sendo que, o tanque da esquerda é para mistura de reagentes e, o da direita, o reator químico, onde a reação química é catalizada pelo efeito da temperatura. Os reagentes A e B são adicionados e misturados no primeiro tanque e a solução homogeneizada resultante é transportada para o segundo tanque onde ocorre a reação:



O sistema térmico desse reator químico possui a dinâmica em malha aberta dada por:

$$\dot{\theta} = \frac{1}{CV} [Q_r + CF(\theta_1 - \theta(t)) - Q_q - hA(\theta(t) - \theta_i)], \quad (3.2)$$

$$\dot{Q}_r = \frac{1}{12,5\pi h} (-Q_r + Ru), \quad (3.3)$$

em que, Q_r é a quantidade de calor produzida pelo resistor, u é a entrada do sistema de controle, dado pela corrente elétrica que passa pelo resistor e as demais variáveis apresentam os significados e valores apresentados na Tabela 2.

Variáveis	Significado	Valor
Q_r	Quantidade de calor produzida pelo resistor	0,154 (m)
C	Calor específico da solução	4500 J/C·m ³
V	Volume do tanque	10m ³
F	Vazão volumétrica	0,5m ³ /s
θ_i	Temperatura ambiente	20° C
h	Coefficiente de convecção térmico	15W/mC
A	Área da superfície externa do reator químico	31,4m ²
Q_q	Energia química necessária para catalização da reação	7900J/m ³
R	valor da resistência térmica	10KΩ
θ	Ponto de operação do sistema	60°C

Tabela 2 – Parâmetros do sistema

Para determinar o valor inicial de Q_r , deve-se considerar o sistema atuando em regime permanente, isso significa que $\frac{d\theta}{dt} = 0$, sendo assim a Equação (3.2) pode ser reescrita:

$$0 = \frac{1}{CV}[Q_r + CF(\theta_1 - \theta(t)) - Q_q - hA(\theta(t) - \theta_i)]. \quad (3.4)$$

Isolando Q_r e substituindo os dados do sistema na equação, obtêm-se a quantidade de calor produzido pelo resistor para o ponto de operação:

$$\begin{aligned} Q_r &= Q_q + hA(\theta(t) - \theta_i) - CF(\theta_1 - \theta(t)) \\ Q_r &= 116.740J. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Com o valor de Q_r , é possível obter o valor do sinal de controle, u, considerando a Equação (3.3), para tanto, considera-se novamente o sistema em regime permanente, $\frac{dQ_r}{dt} = 0$:

$$0 = \frac{1}{12,5\pi h}(-Q_r + Ru). \quad (3.6)$$

Isolando u, e substituindo os valores obtidos na Tabela 2 e na Equação (3.5), obtêm-se:

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q_r}{R} \\ u &= 11,674A. \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 Resultados e Discussões

Agora, tem-se a análise das respostas do sistema. Utiliza-se o ponto de operação $\theta = 60^\circ C$, que, conforme apresentado na Seção 3.1, exige um sinal de controle de $u = 11,674A$ para atingí-lo.

A fim de obter um modelo de 1ª ordem para o sistema, aplicou-se um degrau de 1,2u para o modelo real não linear (3.2).

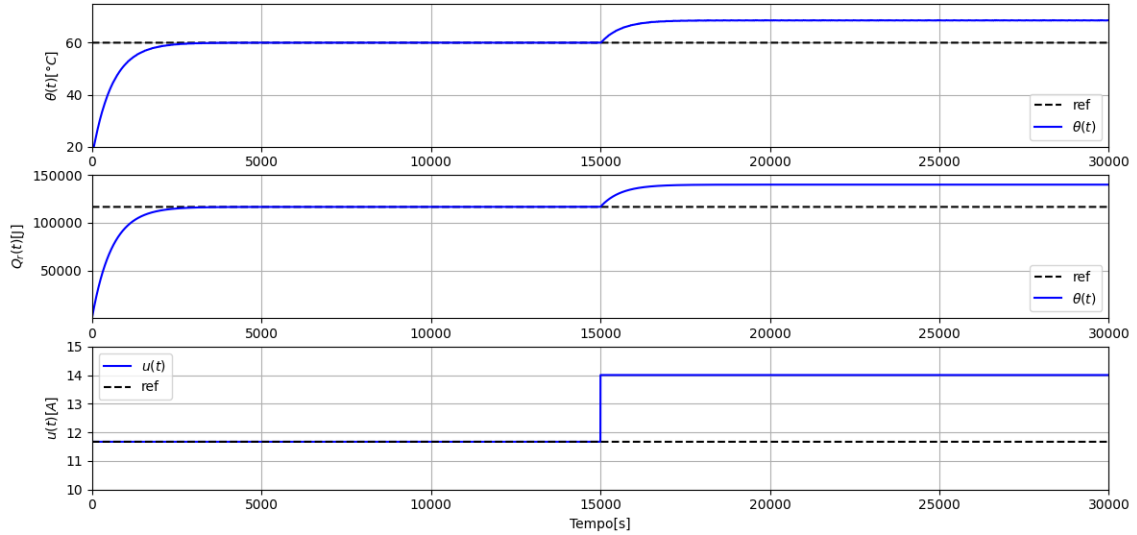


Figura 4 – Resposta temporal do sistema com degrau positivo de 1,2u

Depois, usa-se o método da resposta ao degrau com 3 parâmetros, apresentado na Seção 2.1, para determinar os 3 parâmetros (K , θ , τ) da Equação (2.1). Para isso, foi necessário traçar a reta tangente a curva de resposta do degrau positivo de 1,2u. A equação da reta tangente foi obtida pela identificação de sua inclinação, ou seja, localizando dois pontos da curva entre os quais ela se comporta como uma reta (STEWART, 2013), tais pontos foram $t=15050s$ e $t=15100s$. Com isso, obteve-se a Figura 5.

Vê-se, em azul, a curva de resposta ao degrau positivo de 1,2u e, em vermelho, a reta tangente a ela. Além disso, tem-se que $\Delta y = 8,5527 \text{ rads}$ $\Delta u = 2,3348 \text{ m}^2/\text{s}^2$, que, através da Equação (2.2), resulta em um ganho estático $K = 3,6631$. Ademais, para determinar τ , observa-se que o ponto de interseção da reta tangente com a referência da resposta em degrau ocorre em $t = 15654s$ e, pelo seguimento AB da Figura 1, $\tau = 640$. É importante ressaltar que, nesse caso, como o atraso do modelo obtido é suficientemente pequeno quando comparado ao tempo total de simulação ele pode ser desconsiderado e assim, aproximado para $\theta = 0$.

À vista disto, substituindo os valores de θ , τ e K na Equação (2.1), obteve-se, através do método da resposta ao degrau com 3 parâmetros, um modelo de primeira ordem para o sistema, dado por:

$$G(s) = \frac{3,663}{640s + 1}. \quad (3.8)$$

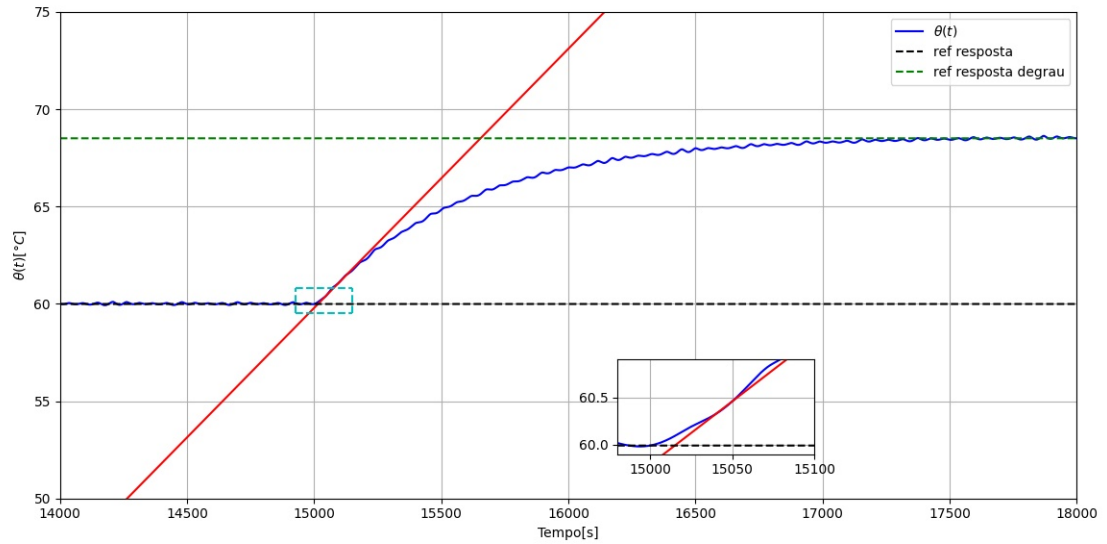


Figura 5 – Método da resposta ao degrau com 3 parâmetros

Agora, é possível validar a resposta do modelo obtido (Equação (3.8)) comparando-a com a resposta do sistema (3.2). Essa validação, feita em uma sequência de degraus diferentes daquela utilizada na obtenção do modelo e pode ser visualizada na Figura 6.

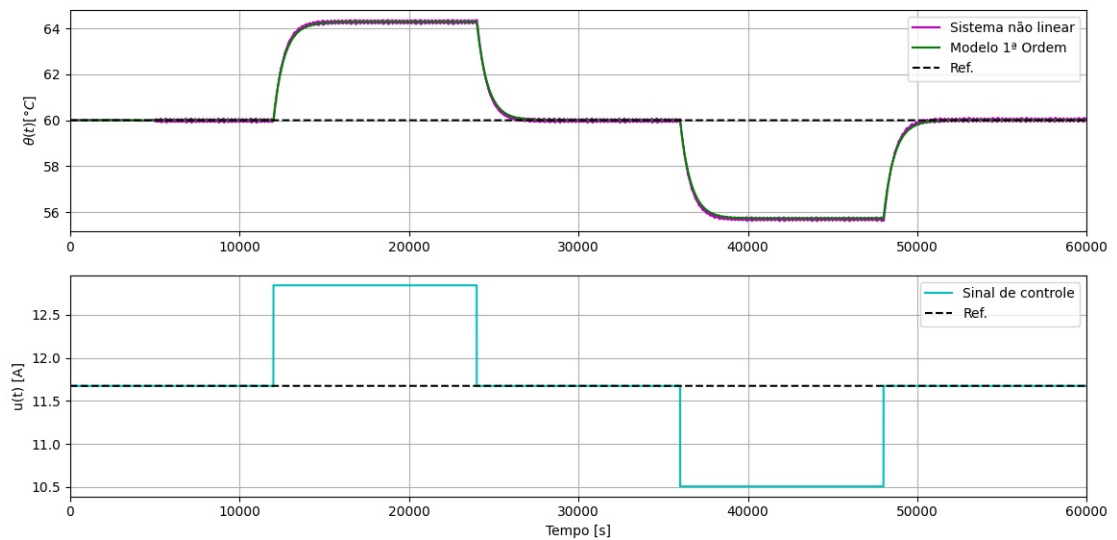


Figura 6 – Validação do sistema de primeira ordem junto ao sistema real.

Portanto, infere-se, a partir da Figura 6, que a resposta do modelo obtido correspondente, quase que de maneira perfeita, a resposta do sistema real. Isso é comprovado ao observar que o comportamento das curvas é análogo para diferentes degraus de entrada.

Após determinada o modelo de primeira ordem que descreve a dinâmica do sistema, adicionou-se um atraso de 8s, utilizando a Aproximação de Padé, explanado na Seção 2.2. Sendo assim, a Equação (3.8), pode ser reescrita:

$$G(s) = \frac{3,663e^{8s}}{640s + 1}. \quad (3.9)$$

Assim, considerando esse atraso, é possível projetar um controlador proporcional e outro proporcional-integral para o sistema utilizando o método CHR, apresentado na Seção 2.1, na Tabela 1.

Dessa maneira, tem-se que, para o controlador P, o ganho K_c é 6,552, e portanto, a função de transferência desse controlador é definida por:

$$G_P(s) = \frac{6,552}{1}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, para o controlador PI, tem-se que o ganho K_c equivale a 1,31 e T_I é 32s. Assim, a função de transferência desse controlador pode ser definida por:

$$G_{PI}(s) = \frac{41,93s + 1,31}{32s}. \quad (3.11)$$

Com os controladores proporcional e proporcional-integral definidos, é possível determinar as características expostas na Seção 2.3, ou seja, o ganho de malha, sensibilidade e sensibilidade complementar para cada um dos controladores.

Substituindo as Equações (3.10) e (3.11) nas Equações (2.8), (2.9) e (2.10), obtêm-se:

$$L_{CP}(s) = \frac{24}{640s + 1}, \quad (3.12)$$

$$L_{CPI}(s) = \frac{153,6s + 4,8}{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 32s}, \quad (3.13)$$

$$S_{CP}(s) = \frac{640s + 1}{640s + 25}, \quad (3.14)$$

$$S_{CPI}(s) = \frac{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 32s}{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 185,6s + 4,8}, \quad (3.15)$$

$$C_{CP}(s) = \frac{1,536 \cdot 10^4 s + 24}{4,096 \cdot 10^5 s^2 + 1,664 \cdot 10^4 s + 25}, \quad (3.16)$$

$$C_{CPI}(s) = \frac{3,146 \cdot 10^6 s^3 + 1,032 \cdot 10^5 s^2 + 153,6s}{4,194 \cdot 10^8 s^4 + 4,456 \cdot 10^6 s^3 + 1,042 \cdot 10^5 s^2 + 153,6s}, \quad (3.17)$$

em que L_{CP} e L_{CPI} são os ganhos de malha dos controladores proporcional e proporcional integral, respectivamente. S_{CP} e S_{CPI} são as sensividades dos controladores proporcional e proporcional integral, nessa ordem. C_{CP} e C_{CPI} são as sensividades complementares dos controladores proporcional e proporcional-integral, respectivamente.

Para determinar a função e realizar a análise de erro de rastreamento de cada controlador, basta substituir os valores obtidos para a sensividade e sensividade complementar na Equação (2.11):

$$E_P(s) = \frac{640s + 1}{640s + 25}R(s) - \frac{3.663}{640s + 25}T_d(s) + \frac{1,536 \cdot 10^4 s + 24}{4,096 \cdot 10^5 s^2 + 1,664 \cdot 10^4 s + 25}N(s), \quad (3.18)$$

$$E_{PI}(s) = \frac{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 32s}{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 185,6s + 4,8}R(s) - \frac{7,502 \cdot 10^4 s^2 + 117,2s}{1,311 \cdot 10^7 s^3 + 1,393 \cdot 10^5 s^2 + 3258s + 4,8}T_d(s) + \frac{3,146 \cdot 10^6 s^3 + 1,032 \cdot 10^5 s^2 + 153,6s}{4,194 \cdot 10^8 s^4 + 4,456 \cdot 10^6 s^3 + 1,042 \cdot 10^5 s^2 + 153,6s}N(s). \quad (3.19)$$

Realizando, agora, a análise de erro de rastreamento $E(s)$, considerando uma situação, em que não há perturbações nem ruídos, a Equação (2.11) pode ser reescrita como:

$$E(s) = S(s)R(s). \quad (3.20)$$

A fim de realizar uma análise quantitativa da Equação (3.20), utiliza-se as Equações (3.14) e (3.15) aplicadas ao Teorema do Valor Final(DORF; BISHOP, 2009) para uma entrada de degrau unitário. Desse modo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E_P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS_{CP}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{640s + 1}{640s + 25} = 0,04. \quad (3.21)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E_{PI}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS_{CPI}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 32s}{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 185,6s + 4,8} = 0. \quad (3.22)$$

Por conseguinte, o erro de rastreamento pra o controlador P é de 0,04, enquanto para o controlador PI é de 0. Pode-se afirmar portanto, que para uma situação em que não há ruídos ou perturbações, o controlador PI apresenta um melhor desempenho, embora o erro gerado pelo controlador P seja quase que desprezível.

Após realizar a análise de erro de sinal, é válido determinar as funções sensibilidade para cada controlador. Para tanto, utiliza-se a Equação (2.13). Sendo assim, faz-se necessário determinar a Equação $T(s)$ para malha fechada.

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}, \quad (3.23)$$

em que $T(s)$ é a função de transferência do sistema com controlador, $G(s)$ é a função de transferência do sistema e $C(s)$ é a função de transferência do controlador.

Manipulando a Equação (2.13), realizando a derivada parcial, tem-se:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} \frac{G(s)}{T(s)} \\
 S &= \frac{[C(s)(1 + G(s)C(s))] - [C(s)(G(s)C(s))]}{(1 + G(s)C(s))^2} \frac{G(s)(1 + G(s)C(s))}{G(s)C(s)} \\
 S &= \frac{C(s)}{(1 + G(s)C(s))^2} \frac{G(s) + G(s)^2 C(s)}{G(s)C(s)} \\
 S &= \frac{1 + G(s)C(s)}{(1 + G(s)C(s))^2} \\
 S &= \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \\
 S &= \frac{1}{1 + L(s)},
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

em que S é a função de sensibilidade, $G(s)$ é a função de transferência do sistema e $C(s)$ é a função de transferência do controlador.

Observa-se que Equação da sensibilidade (3.24) é igual a Equação de Sensitividade (2.9). E, de fato essas funções são iguais (DORF; BISHOP, 2009).

Desse modo, considerando as Equações (3.12) e (3.13), e substituindo na Equação (3.24) pode-se obter $S(s)$ para ambos os controladores.

$$\begin{aligned}
 S_{CP}(s) &= \frac{1}{1 + \frac{24}{640s+1}} \\
 S_{CP}(s) &= \frac{640s+1}{640s+25}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 S_{CPI}(s) &= \frac{1}{1 + \frac{153,6s+4,8}{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 32s}} \\
 S_{CPI}(s) &= \frac{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 32s}{2,048 \cdot 10^4 s^2 + 185,6s + 4,8}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Para realizar a análise de erro de rastreamento de cada controlador de modo a investigar o efeito da perturbação no erro, pode-se modificar a Equação (2.11), assim, considerando $R(s) = N(s) = 0$:

$$E(s) = -S(s)G(s)T_d(s). \tag{3.27}$$

Sendo assim, as Equações (3.18) e (3.19) podem ser reescritas para atenderem ao formato da Equação (3.27):

$$E_P(s) = -\frac{3.663}{640s+25}T_d(s), \tag{3.28}$$

$$E_{PI}(s) = -\frac{7,502 \cdot 10^4 s^2 + 117,2s}{1,311 \cdot 10^7 s^3 + 1,393 \cdot 10^5 s^2 + 3258s + 4,8} T_d(s). \quad (3.29)$$

Para que a malha fechada rejeite sinais de perturbação, é necessário que o erro de regime permanente seja nulo, ou seja, $e_\infty = 0$. Sendo assim, para verificar se essa condição para rejeição de perturbação é atendida para malha fechada com os controladores P e PI, aplica-se o Teorema do Valor Final (DORF; BISHOP, 2009) para as Equações (3.28) e (3.29), considerando, inicialmente, uma entrada de impulso unitário, dessa forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_P(s) \cdot 1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{3.663}{640s + 25} \right) = 0, \quad (3.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_{PI}(s) \cdot 1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{7,502 \cdot 10^4 s^2 + 117,2s}{1,311 \cdot 10^7 s^3 + 1,393 \cdot 10^5 s^2 + 3258s + 4,8} \right) = 0. \quad (3.31)$$

Dessa forma, percebe-se que para uma entrada de impulso unitário, o erro do regime permanente é nulo para ambos os controladores. E, portanto, pode-se afirmar que os controladores P e PI, em malha fechada, conseguem rejeitar a perturbação.

Tal afirmativa pode ser validada através da simulação da resposta do sistema para uma entrada de impulso unitário. A resposta temporal a perturbação pode ser visualizada na Figura 7.

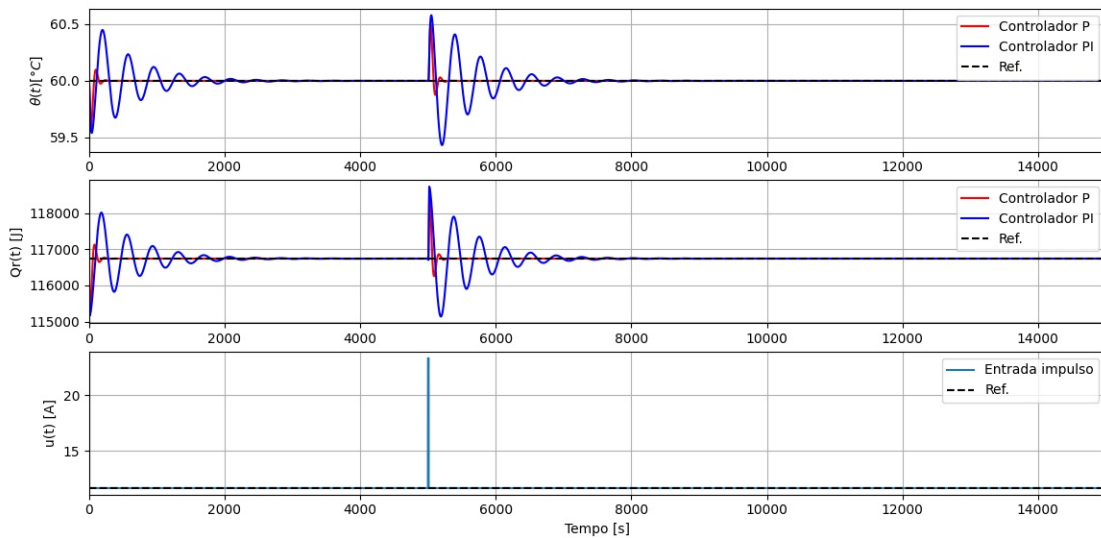


Figura 7 – Resposta temporal do sistema Reator Químico para perturbação por impulso

Assim, observa-se que mesmo após o impulso provocado no sinal de controle, a saída de ambos os controladores retornaram para o ponto de operação, o que corrobora com o

que foi evidenciado nas Equações (3.30) e (3.31), provando que estes conseguem rejeitar a perturbação.

Considerando agora, uma entrada para degrau unitário, empregando outra vez o Teorema do Valor Final, têm-se:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_P(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{3.663}{640s + 25} \right) = 0.1465, \quad (3.32)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_{PI}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{7,502 \cdot 10^4 s^2 + 117,2s}{1,311 \cdot 10^7 s^3 + 1,393 \cdot 10^5 s^2 + 3258s + 4,8} \right) = 0. \quad (3.33)$$

Assim, constata-se que para uma entrada de degrau unitário, o erro do regime permanente é nulo para o controlador PI, porém, essa condição não é atendida pelo controlador P. Assim sendo, pode-se afirmar que o controlador PI, em malha fechada, consegue rejeitar a perturbação da entrada degrau, mas, por outro lado, o controlador P não consegue.

Novamente, a fim de validar essa constatação, simula-se a resposta do sistema para uma entrada de degrau unitário. A resposta temporal a perturbação pode ser visualizada na Figura 8.

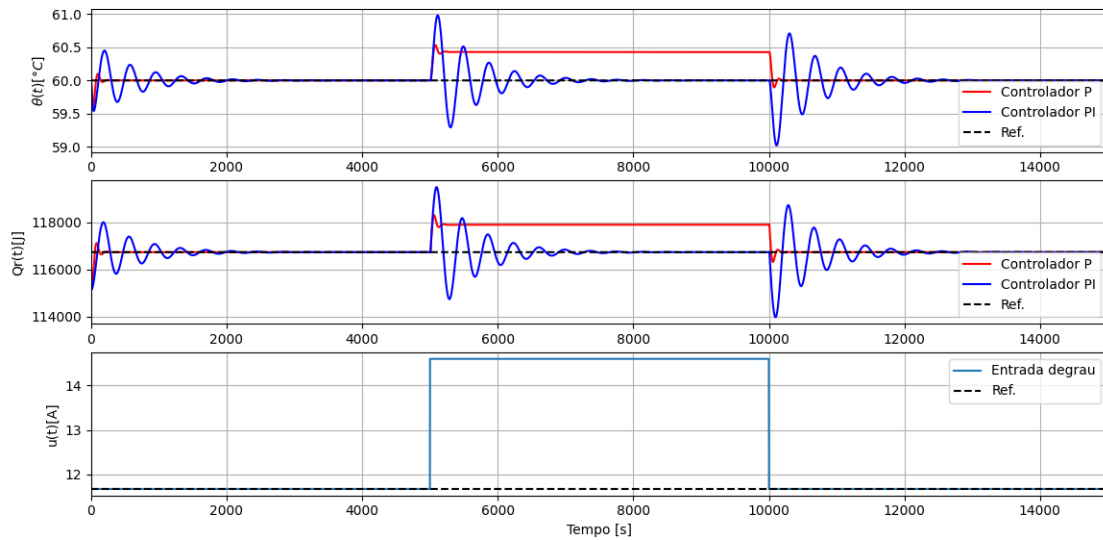


Figura 8 – Resposta temporal do sistema Reator Químico para perturbação por degrau

Desse modo, nota-se que após o degrau provocado no sinal de controle, a saída do controlador PI retorna ao ponto de operação, enquanto a saída do controlador P assume um novo valor. Isso comprova o que foi mostrado nas Equações (3.32) (3.33).

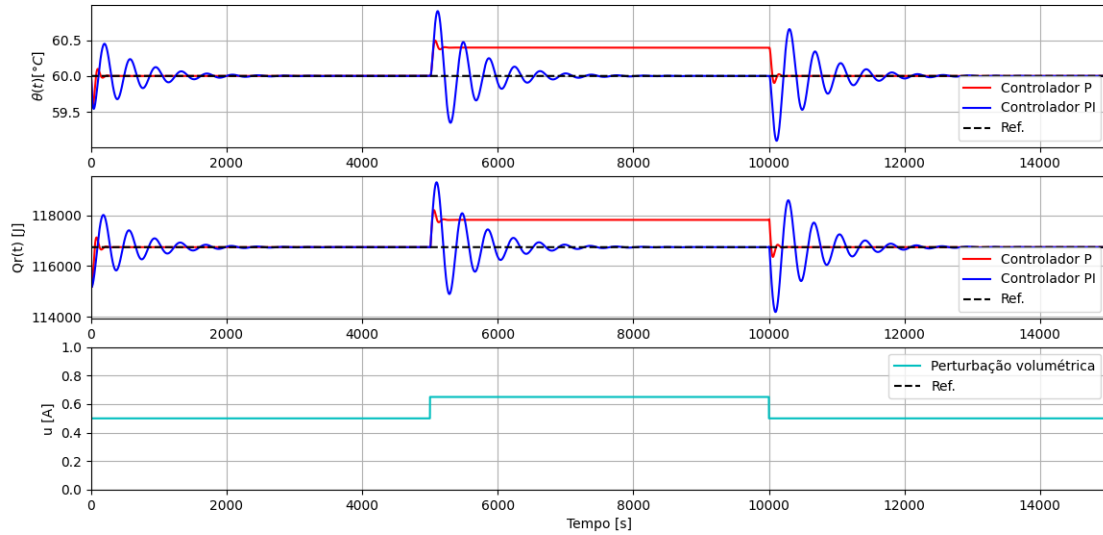


Figura 9 – Resposta temporal do sistema Reator Químico para perturbação temporária na vazão volumétrica de ordem 30%

Por fim, na Figura 9, tem-se a resposta do sistema em malha fechada para uma perturbação temporária na vazão volumétrica do sistema da ordem 30%.

Através da análise da Figura 9, vê-se que a saída do controlador PI retorna ao ponto de operação, enquanto a saída do controlador P assume um novo valor.

Assim, é possível relacionar a resposta temporal obtida pela perturbação temporária na vazão volumétrica de 30% com a condição que antes foi estabelecida para a malha fechada rejeitar perturbações. Vê-se que, nesse caso, os controladores se comportaram de maneira semelhante ao visto na perturbação via entrada degrau e, portanto, os resultados podem ser aproveitados. Desse modo, conclui-se que o erro do regime permanente é nulo para o controlador PI, conforme mostrado na Equação (3.33), porém essa condição não é atendida pelo controlador P, já que seu erro é 0,1465, visto na Equação (3.32). Assim sendo, pode-se afirmar que o controlador PI, em malha fechada, consegue rejeitar a perturbação temporária na vazão volumétrica, mas, por outro lado, o controlador P não consegue.

4 Conclusão

Conclui-se, após finalizar o trabalho, que estudando o sistema reator químico é possível aproximar a dinâmica do sistema para um modelo de 1^a ordem utilizando a modelagem caixa preta. Obtido tal modelo, tornou-se viável validá-lo e implementar a sua resposta em função do tempo, bem como a dinâmica real do sistema, a fim de compará-las. Além disso, através da aproximação de Padé adicionou-se um atraso de 8s ao sistema e, com isso, projetou-se, pelo método de CHR, um controlador proporcional e outro proporcional-integral para o sistema.

A partir do estudo da dinâmica dos controladores P e PI analisou-se as características de malha fechada. Determinadas as funções de ganho de malha, sensibilidade e sensibilidade complementar de cada um deles, verificou-se o sinal do erro de rastreamento. Nesse primeiro momento, constatou-se que o erro de rastreamento do controlador P é de 0,04, enquanto para o controlador PI é de 0. Sendo assim, evidenciou-se que, embora o erro gerado pelo controlador P seja quase que desprezível, para uma situação em que não há ruídos ou perturbações, o controlador PI apresenta um melhor desempenho.

Ademais, sabendo que para que a malha fechada rejeite sinais de perturbação, é necessário que o erro de regime permanente seja nulo, verificou-se se os controladores P e PI atendiam a essa condição. Concluiu-se, através da obtenção de equações e simulações, que para uma entrada de impulso unitário, ambos conseguem rejeitar a perturbação. Porém, ao analisar, de maneira semelhante, as respostas dos controladores para uma entrada de degrau unitário e para uma perturbação temporária na vazão volumétrica da ordem 30%, viu-se que, nesse caso, apenas o controlador PI consegue rejeitar essa perturbação, enquanto o controlador P não consegue rejeitá-la.

Referências

ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2. ed. [S.l.]: PID, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.

BOLTON, W. *Engenharia de controle*. [S.l.]: Makron Books, 1995. Citado na página 1.

COLORADO, U. of. *Padé approximation*. 2021. Disponível em: <https://www.colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/pade_2.pdf>. Citado na página 4.

DORF, R.; BISHOP, R. *Sistemas de controles modernos*. 8. ed. [S.l.]: LTC, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 1, 4, 5, 11, 12 e 13.

GARCIA, C. *Controle de Processos Industriais - Estratégias Convencionais*. 1. ed. [S.l.]: Busher, 2017. Citado na página 3.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2010. Citado na página 3.

STEWART, J. *Calculus: early transcendentals*. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. Citado na página 8.

ZHENG, L.; ZHANG, X. *Modeling and Analysis of Modern Fluid Problems*. 1. ed. [S.l.]: Elsevier, 2017. Citado na página 4.