

1) a) Para realizar a verificação da redução de um mecanismo plano por representação geométrica, propõe-se o seguinte passo a passo:

1º passo - determinar o grau de liberdade do mecanismo através da equação de Gruebler, descrita abaixo:

$$M = 3L - 2J - 3G$$

em que  $M$  é o número de grau de liberdade,  $L$  é o número de elos,  $J$  é o número de juntas e  $G$  é o número de elos fixos.

2º passo - determinar as coordenadas do mecanismo no plano.

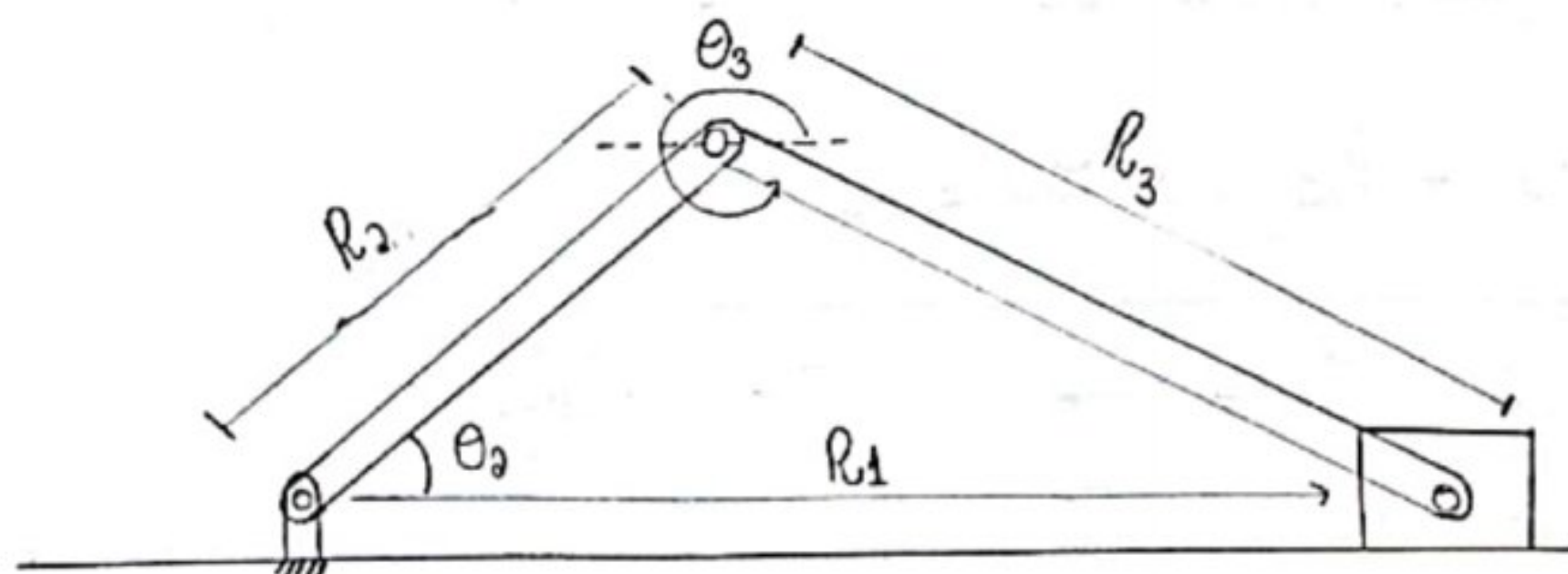
3º passo - determinar o comprimento dos elos.

4º passo - determinar as variáveis do sistema.

5º passo - determinar as equações cinemáticas de posição.

6º passo - reduzir o sistema de equações.

b) O mecanismo escolhido para análise foi do tipo bala-manivela, que pode ser visto no desenho abaixo:



O mecanismo apresenta 3 juntas de rotação e 1 de deslizamento:

$$L = 4$$

$$J = 4$$

$$G = 1$$

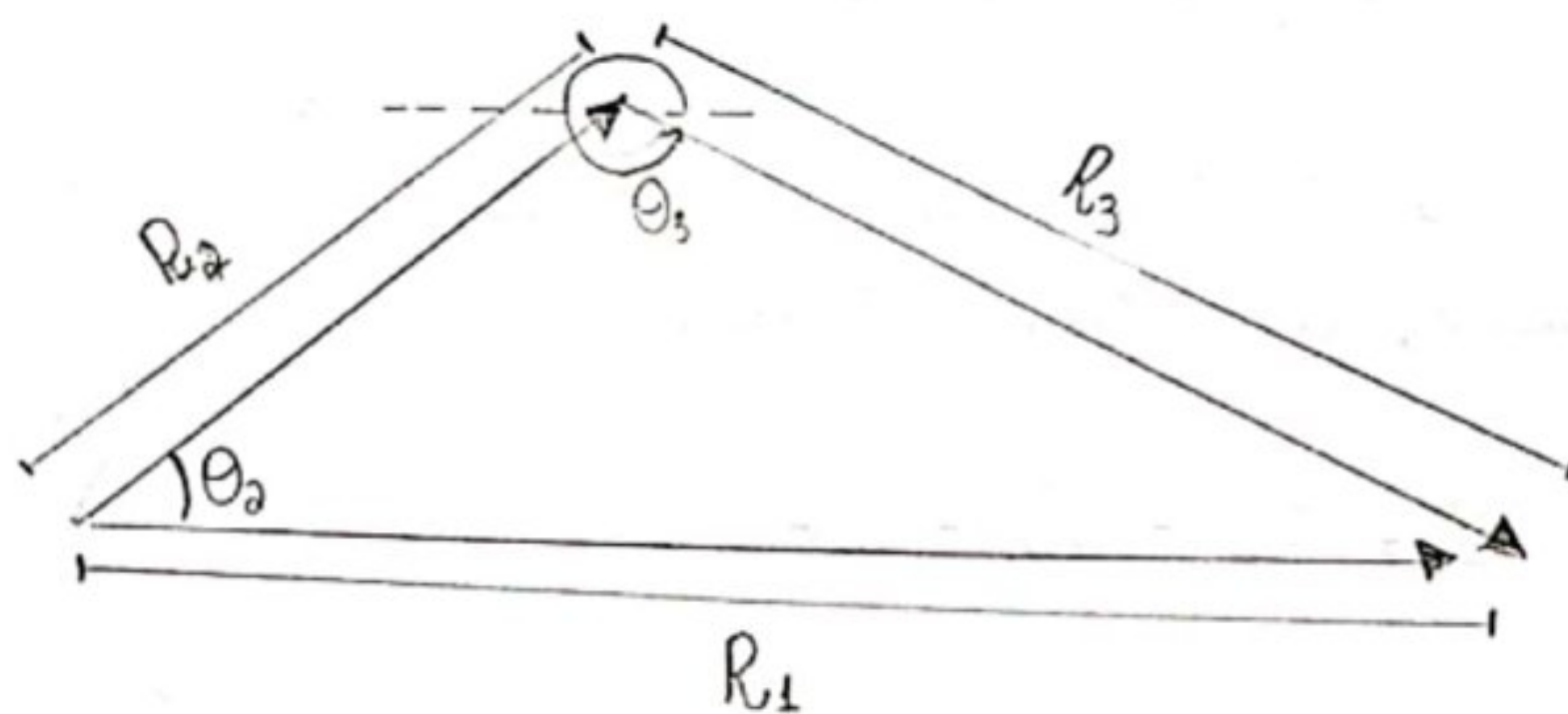
Substituindo os valores na equação de Gruebler:

$$M = 3.4 - 2.4 - 3.1$$



$M = 1$   
 1 grau de liberdade

Redesenhando o mecanismo por vetores, temos:



Analisando os vetores, temos:

$$\vec{R}_1 = \vec{R}_2 + \vec{R}_3$$

$$R_1 = R_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) + R_3(\cos \theta_3 + i \sin \theta_3)$$

$$R_1 = (R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3) + i(R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3)$$

→ Separando a equação em parte real e imaginária, temos:

$$R_1 = R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3 \quad (\text{I})$$

$$0 = i(R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3) \quad (\text{II})$$

→ A partir da equação II, obter-se  $\sin \theta_3$  em função de  $\sin \theta_2$ :

$$R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3 = 0$$

$$\sin \theta_3 = -\frac{R_2 \sin \theta_2}{R_3} \quad (\text{III})$$

→ Utilizando a primeira relação fundamental da trigonometria:

$$\sin^2 \theta_3 + \cos^2 \theta_3 = 1$$

$$\cos \theta_3 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_3} \quad (\text{IV})$$



→ Substituindo III em IV:

$$\cos \theta_3 = \sqrt{1 - \left( \frac{-R_2}{R_3} \cos \theta_2 \right)^2} \quad (V)$$

→ Substituindo V em I:

$$R_1 = R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cdot \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{-R_2}{R_3} \cos \theta_2 \right)^2} \right]$$

↳ Equação da posição.

c) Para plotar o gráfico da variação entre o acionamento e o deslocamento linear do pistão, produziu-se um código em python. Para tanto, foi necessário algumas considerações:

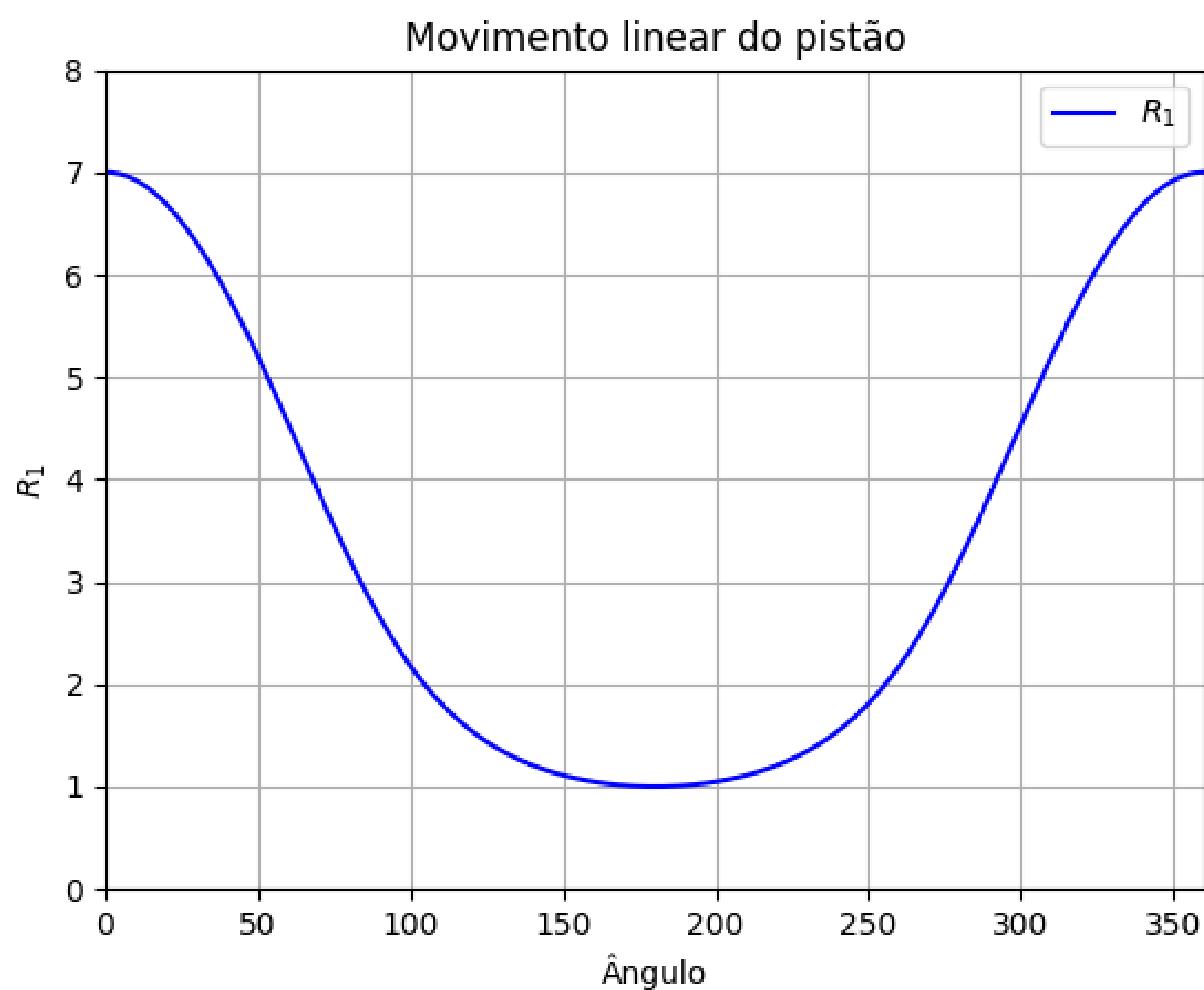
\*  $R_2 = 3 \text{ m}$

\*  $R_3 = 4 \text{ m}$

\*  $\theta_2\text{-INICIAL} = 0^\circ$

O código produzido e o resultado obtido podem ser visualizados abaixo:

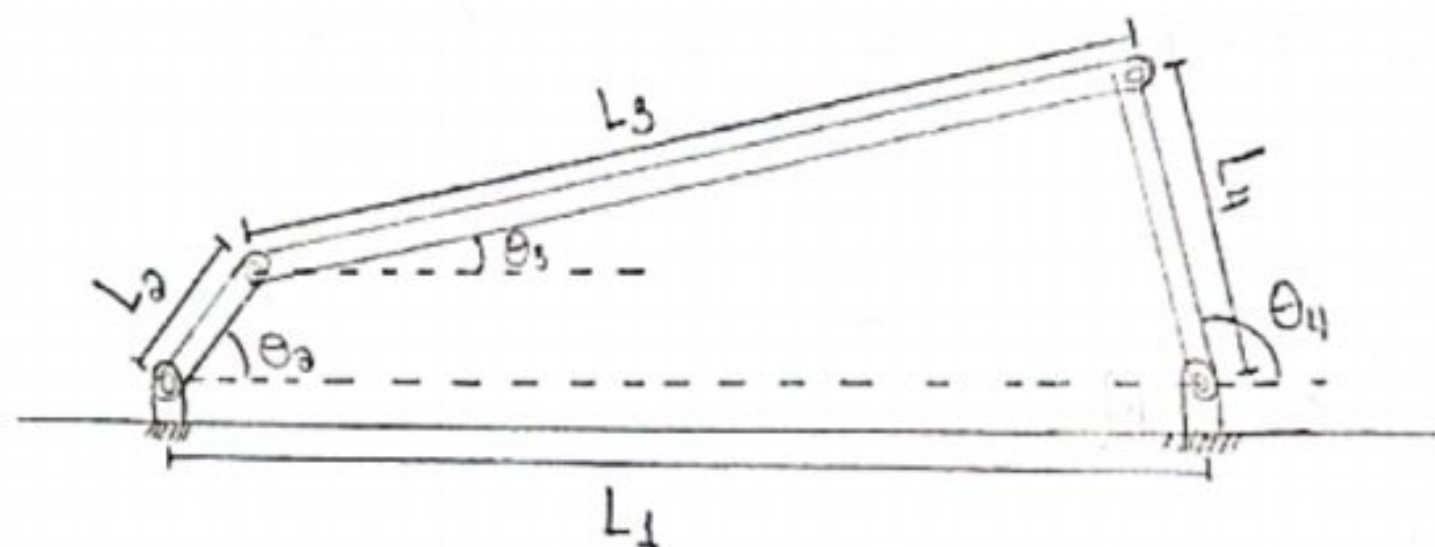
```
1  #@Codigo produzido por Thiago Jose da Silva
2  #@Data: 15/12/2021
3
4  import numpy
5  import math
6  from matplotlib import pyplot as plt
7
8  def equacao_biela_manivela(R2, R3, angulo):
9      """Retorna o valor de R1"""
10     return (R2*math.cos(angulo)) + (R3*(numpy.sqrt(1-((-R2/R3)*math.sin(angulo))**2)))
11
12     R2 = 3
13     R3 = 4
14     angulo_theta_1 = list(range(361))
15     angulo_radiano = []
16
17     for angulo in angulo_theta_1:
18         angulo2 = math.radians(angulo)
19         angulo_radiano.append(angulo2)
20
21     movimento = []
22
23     for theta in angulo_radiano:
24         movimento_insta = equacao_biela_manivela(R2, R3, theta)
25         movimento.append(movimento_insta)
26
27     plt.figure(1)
28     plt.title('Movimento linear do pistão')
29     plt.plot(angulo_theta_1, movimento, 'b', label='$R_1$')
30     plt.grid()
31     plt.ylabel('$R_1$')
32     plt.xlabel('Ângulo')
33     plt.legend()
34     plt.ylim(0,8)
35     plt.xlim(0,max(angulo_theta_1))
36     plt.show()
```



Observa-se a partir do gráfico que a maior distância de  $R_1$  é 7 metros e a menor distância é 1 metro. Além disso, pode-se afirmar que o movimento é invertido quando o ângulo é  $180^\circ$ .



2) Determinando o mecanismo 4 barras e suas dimensões:



$$* L_1 = 8 = d$$

$$* L_2 = 1 = a$$

$$* L_3 = 6 = b$$

$$* L_4 = 4 = c$$

a) → Realizando a lei de Grashof para o mecanismo:  
de acordo a lei de Grashof.

"A soma da menor e da maior barra de um mecanismo 4 barras não pode ser maior que as outras duas barras".

Desse modo:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &\leq L_3 + L_4 \\ 8 + 1 &\leq 6 + 4 \\ 9 &\leq 10 \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

→ Realizando a lei de Reuleaux para o mecanismo:  
de acordo a lei de Reuleaux, um mecanismo 4 barras deve cumprir quatro condições para que seja possível sua montagem:

$$\begin{aligned} L_2 + L_3 + L_4 &\geq L_1 \\ L_2 + L_3 - L_4 &\leq L_1 \\ L_2 + L_1 + L_4 &\geq L_3 \\ L_2 + L_1 - L_4 &\leq L_3 \end{aligned}$$

Verificando as quatro condições para o mecanismo:

$$\begin{array}{cccc} L_2 + L_3 + L_4 \geq L_1 & | & L_2 + L_3 - L_4 \leq L_1 & | & L_2 + L_1 + L_4 \geq L_3 & | & L_2 + L_1 - L_4 \leq L_3 \\ 1 + 6 + 4 \geq 8 & | & 1 + 6 - 4 \leq 8 & | & 1 + 8 + 4 \geq 6 & | & 1 + 8 - 4 \leq 6 \\ 11 \geq 8 \quad (\checkmark) & | & 3 \leq 8 \quad (\checkmark) & | & 13 \geq 6 \quad (\checkmark) & | & 5 \leq 6 \quad (\checkmark) \end{array}$$

Desse modo, afirma-se que o mecanismo atende as leis de Grashof e de Reuleaux, desse modo é possível montar o mecanismo.

De acordo com o critério de Grashof, o mecanismo é de classe I, e a menor barra está conectada a parte fixa. Sendo assim, o mecanismo apresenta um movimento de Manivela - Balanço.



b) Utilizaremos as dimensões já estabelecidas além de um ângulo de entrada  $\theta_3$  igual a  $90^\circ$ , com o intuito de definir os ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$ . Para tanto, empregaremos as equações (4.2g) do Livro de Norton - "cinemática e dinâmica das mecânicas":

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} \right) \quad (I)$$

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left( \frac{B_y}{B_x - d} \right) \quad (II)$$

Devemos agora determinar os valores de  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  e  $d$ . Para isso, utilizaremos as coordenadas dos pontos A e B:

→ Determinando  $A_x$  e  $A_y$ :

$$\begin{aligned} A_x &= a \cdot \cos \theta_3 \\ A_x &= 1 \cdot \cos 90^\circ \\ A_x &= 0 \end{aligned} \quad (III)$$

$$\begin{aligned} A_y &= a \cdot \sin \theta_3 \\ A_y &= 1 \cdot \sin 90^\circ \\ A_y &= 1 \end{aligned} \quad (IV)$$

→ Determinando  $B_x$  e  $B_y$  (o desmembramento é baseado no Livro de Norton):  
As coordenadas de B serão obtidas usando as equações abaixo:

$$b^2 = (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 \quad (V)$$

$$c^2 = (B_x - d)^2 + B_y^2 \quad (VI)$$

Subtraindo as equações VI e V, é possível obter uma equação para  $B_x$ :

$$B_x = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2 \cdot (A_x - d)} - \frac{2A_y B_y}{2 \cdot (A_x - d)}$$

Logo:

$$S = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2 \cdot (A_x - d)}$$

a equação de  $B_x$  pode ser reescrita:

$$B_x = S - \frac{2A_y B_y}{2 \cdot (A_x - d)} \quad (VII)$$



Substituindo VII em VI, encontra-se a equação de  $B_y$ :

$$B_y^2 + \left( S - \frac{A_y B_y}{A_x - d} - d \right)^2 - c^2 = 0 \quad (\text{VIII})$$

A equação VIII pode ser reduzida com uma expressão familiar para as raízes da equação quadrática:

$$B_y = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \quad (\text{IX})$$

em que:

$$\bullet Q = \frac{2A_y(d - S)}{A_x - d}$$

$$\bullet P = \frac{A_y^2}{(A_x - d)^2} + 1$$

$$\bullet S = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2 \cdot (A_y - d)}$$

$$\bullet R = (d - S)^2 - c^2$$

→ Calculando os valores de  $S$ ,  $Q$ ,  $P$  e  $R$  para o mecanismo:

$$\bullet S = \frac{1^2 - 6^2 + 4^2 - 8^2}{2 \cdot (0 - 8)} = \frac{-83}{-16} = \boxed{\frac{83}{16}}$$

$$\bullet Q = \frac{2 \cdot 1 \cdot \left( 8 - \frac{83}{16} \right)}{0 - 8} = \frac{2 \cdot \left( \frac{45}{16} \right)}{-8} = \boxed{-\frac{45}{64}}$$

$$\bullet P = \frac{1^2}{(0 - 8)^2} + 1 = \frac{1}{64} + 1 = \boxed{\frac{65}{64}}$$

$$\bullet R = \left( 8 - \frac{83}{16} \right)^2 - 4^2 = \left( \frac{45}{16} \right)^2 - 16 = \frac{2025}{256} - 16 = \boxed{\frac{-2091}{256}}$$

→ Substituindo os valores encontrados em (IX), tem-se que:

$$B_y = \frac{\frac{45}{64} \pm \sqrt{\left( \frac{-45}{64} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{65}{64} \right) \cdot \left( \frac{-2091}{256} \right)}}{2 \cdot \left( \frac{65}{64} \right)}$$



$$B_y = \frac{45}{64} \pm \sqrt{\frac{2025}{4096} + \frac{134615}{4096}}$$

$$B_y = \frac{65}{32}$$

$$B_y = \frac{45}{64} \pm \sqrt{\frac{136640}{4096}}$$

$$\frac{65}{32}$$

$$B_y = \frac{45}{64} \pm \frac{\sqrt{136640}}{64}$$

$$\frac{65}{32}$$

$$B_y = \frac{45 \pm \sqrt{136640}}{64} \cdot \frac{32}{65}$$

$$B_y = \frac{45 \pm \sqrt{136640}}{130} = \frac{45 \pm 369,65}{130}$$

$$B_{yi} = \frac{45 + 369,65}{130} = \boxed{3,19} \rightarrow \text{configuração aberta}$$

$$B_{yo} = \frac{45 - 369,65}{130} = \boxed{-2,50} \rightarrow \text{configuração cruzada}$$

→ Determinando os valores de  $B_x$  com a equação VII:

$$B_{x1} = \frac{83}{16} - \frac{2 \cdot 1 \cdot 3,19}{2 \cdot (0 - 8)}$$

$$B_{x1} = \frac{83}{16} + \frac{6,38}{16}$$

$$B_{x1} = \frac{89,38}{16} = \boxed{5,59} \rightarrow \text{configuração aberta}$$

$$B_{x2} = \frac{83}{16} - \frac{2 \cdot 1 \cdot (-2,5)}{2 \cdot (0 - 8)} = \frac{83}{16} - \frac{5}{16} = \frac{78}{16} = \boxed{4,88} \rightarrow \text{configuração cruzada}$$



→ Substituindo os valores das componentes  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$  e  $B_y$  nas equações (I) e (II), tem-se que:

\* Para configuração aberta:

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{3,19 - 1}{5,51 - 0} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{2,19}{5,51} \right) = \tan^{-1}(0,39)$$

$$\theta_3 = 21,46^\circ$$

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left( \frac{3,19}{5,51 - 8} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{3,19}{-2,43} \right) = \tan^{-1}(-1,31)$$

$$\theta_4 = -52,40^\circ \text{ ou } 127,30^\circ$$

\* Para configuração cruzada:

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{-2,50 - 1}{4,88 - 0} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{-3,50}{4,88} \right) = \tan^{-1}(-0,71)$$

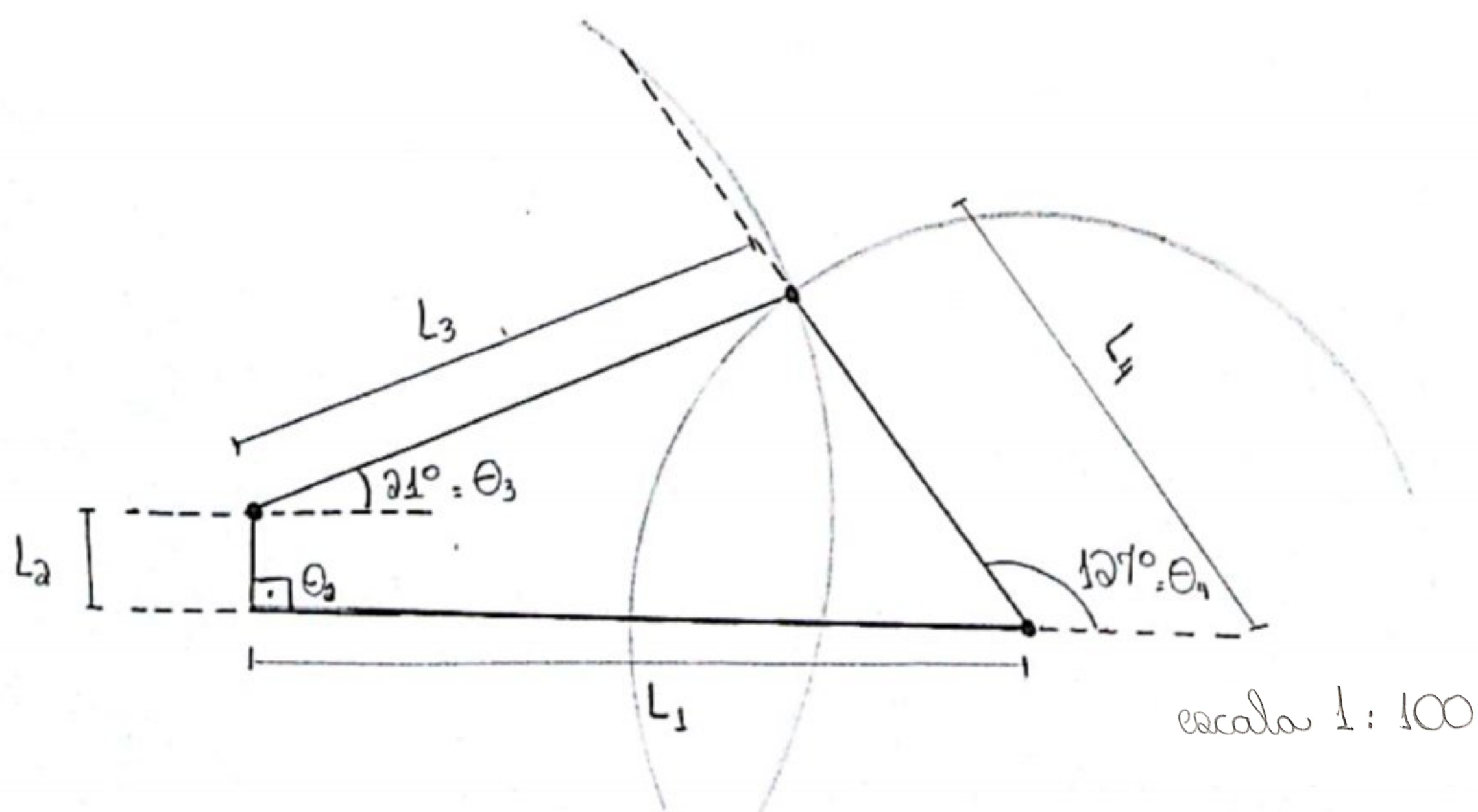
$$\theta_3 = -35,65^\circ \text{ ou } 324,35^\circ$$

$$\theta_4 = \tan^{-1} \left( \frac{-2,50}{4,88 - 8} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{-2,50}{-3,12} \right) = \tan^{-1}(0,80)$$

$$\theta_4 = 38,70^\circ$$

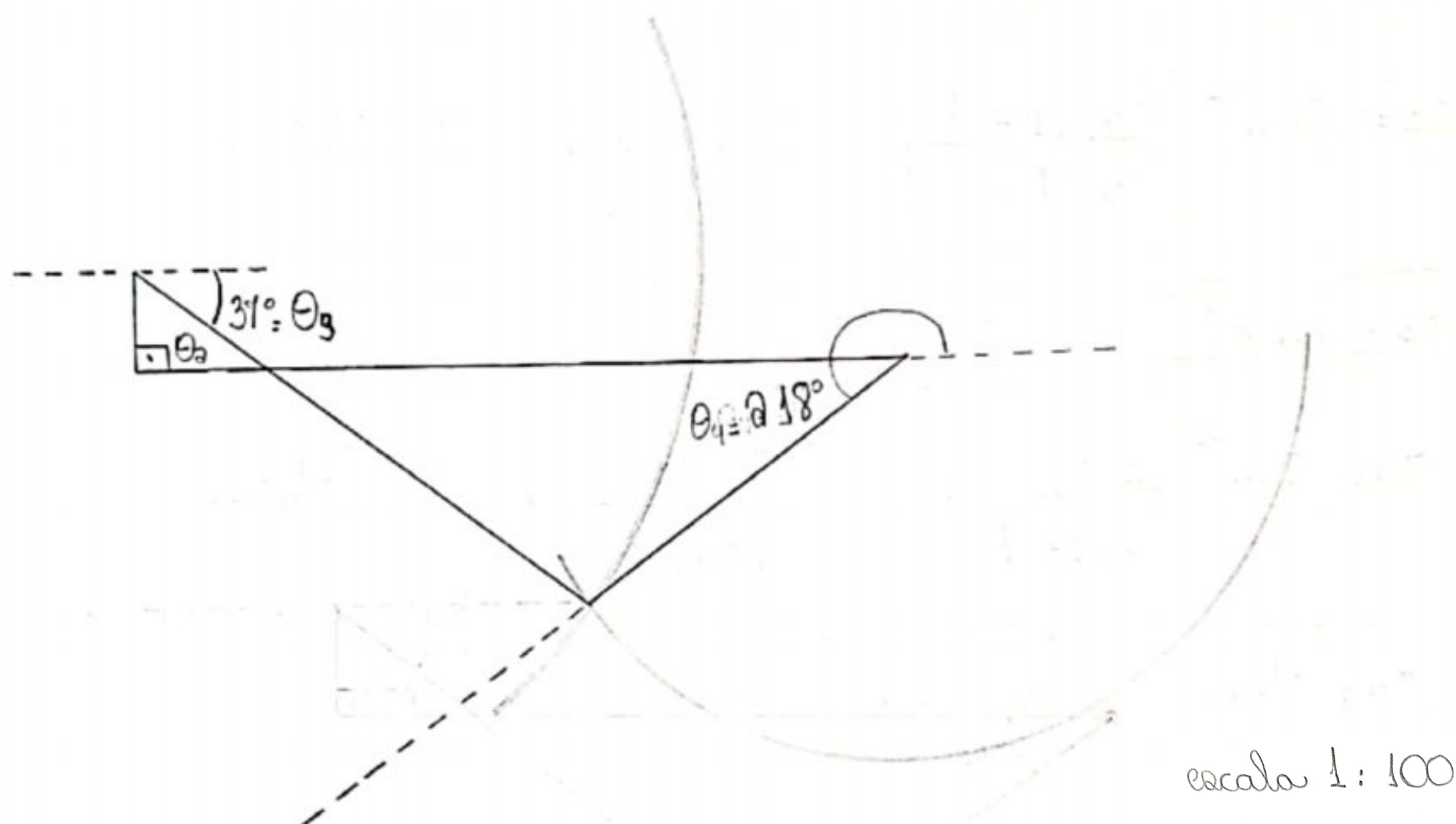
(2º quadrante)

c) → Método Gráfico para configuração aberta:





→ Método Gráfico para configurações cruzadas:



d) Para realizar o método de Newton-Raphson foi desenvolvido um código em linguagem Python, o qual deve retornar os valores de  $\theta_3$  e  $\theta_4$ . O código é visualizado na figura abaixo:

```
1 #@Codigo produzido por Thiago Jose da Silva
2 #@Data: 15/12/2021
3 import math
4 from matplotlib import pyplot as plt
5 import numpy
6
7 """Dados pré determinados"""
8 L1 = 8
9 L2 = 1
10 L3 = 6
11 L4 = 4
12 angulo2 = 90
13 angulo2_radiano = math.radians(angulo2)
14
15 """Valores iniciais para Theta3 e Theta4 """
16 angulo3 = 30
17 angulo3_radiano = math.radians(angulo3)
18 angulo4 = 100
19 angulo4_radiano = math.radians(angulo4)
20
21 erro = 10**(-13)
22 X = 1
23
24 while (numpy.linalg.norm(X) > erro):
25     f1 = L2*math.cos(angulo2_radiano) + L3*math.cos(angulo3_radiano) - L1 - L4*math.cos(angulo4_radiano)
26     f2 = L2*(math.sin(angulo2_radiano)) + L3*(math.sin(angulo3_radiano)) - L4*math.sin(angulo4_radiano)
27     J=[[-L3*math.sin(angulo3_radiano), L4*math.sin(angulo4_radiano)], [L3*math.cos(angulo3_radiano), -L4*math.cos(angulo4_radiano)]]
28     b=[[-f1], [-f2]]
29     X=numpy.linalg.inv(J)*b
30     angulo3_radiano = angulo3_radiano + X[0][0]
31     angulo4_radiano = angulo4_radiano + X[1][0]
32
33 angulo3_final = math.degrees(angulo3_radiano)
34 angulo4_final = math.degrees(angulo4_radiano)
35 print(f"Para um theta2 de entrada igual a {angulo2}, obtêm-se theta3 igual a {angulo3_final} e theta4 igual a {angulo4_final}")
```



```

PROBLEMAS  SAÍDA  TERMINAL  CONSOLE DE DEPURACÃO
Python + - [ ] [ ] ^ x

Instale o PowerShell mais recente para obter novos recursos e aprimoramentos! https://aka.ms/PSWindows

PS C:\Users\thiag> & C:/Users/thiag/AppData/Local/Programs/Python/Python39/python.exe "c:/Users/thiag/OneDrive/Área de Trabalho/Thiago/6º Período/Cinemática/Atividade 2/Metodo_Newton_Raphson.py"
Para um theta2 de entrada igual a 90, obtêm-se theta3 igual a 21.40351798427795 e theta4 igual a 127.11737903227711
PS C:\Users\thiag>

```

A saída do código nos retorna que, para um ângulo de entrada  $\theta_2$  igual a  $90^\circ$ , e as dimensões escolhidas:

$$\left. \begin{array}{l} \theta_3 = 21,40^\circ \\ \theta_4 = 127,12^\circ \end{array} \right\} \text{configuração aberta}$$

e)

	Método analítico	Método Gráfico	Newton - Raphson
$\theta_2$	$90^\circ$	$90^\circ$	$90^\circ$
$\theta_3$	$21,46^\circ$	$21^\circ$	$21,40^\circ$
$\theta_4$	$127,30^\circ$	$127^\circ$	$127,12^\circ$
$\theta_3'$	$-35,65^\circ$	$-37^\circ$	-
$\theta_4'$	$218,70^\circ$	$218^\circ$	-

em que  $\theta_3$  e  $\theta_4$  são para configuração aberta, e  $\theta_3'$  e  $\theta_4'$  para configuração cruzada.

→ Comparando percentualmente os valores obtidos nos métodos analíticos e gráfico, com o método de Newton - Raphson:

	Método Analítico (%)	Método Gráfico (%)
$\theta_3$	0,2 %	1,8 %
$\theta_4$	0,1 %	0,1 %

\*Os valores percentuais apresentam o erro, comparado ao método de Newton - Raphson.