

1 - Louth - Hurwitz

1.1) O processo em malha fechada pode ser representado pelo diagrama de bloco exposto na Figura 1:

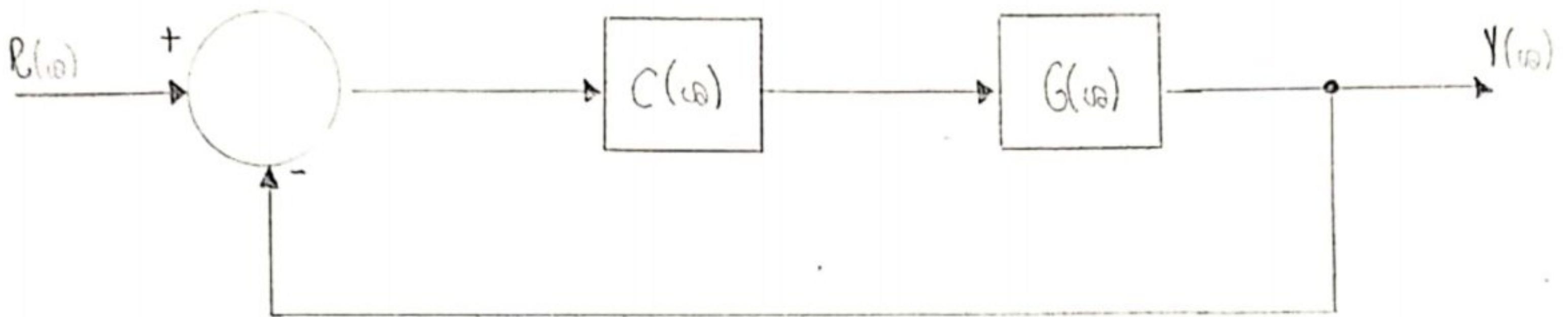


Figura 1 - Diagrama de bloco

em que:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{83,33}{(s+1)(s+5)(s+16,66)}$$

→ Determinando a função de transferência de malha fechada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s) \cdot G(s)}{1 + C(s) \cdot G(s)}$$

$$T(s) = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) \cdot \frac{83,33}{(s+1)(s+5)(s+16,66)}}{1 + \left[\left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) \cdot \frac{83,33}{(s+1)(s+5)(s+16,66)} \right]}$$

$$T(s) = \frac{\frac{83,33 K_p}{(s+1)(s+5)(s+16,66)} + \frac{83,33 K_i}{s(s+1)(s+5)(s+16,66)}}{1 + \left[\frac{83,33 K_p}{(s+1)(s+5)(s+16,66)} + \frac{83,33 K_i}{s(s+1)(s+5)(s+16,66)} \right]}$$

$$T(s) = \frac{83,33(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+5)(s+16,66)} + \frac{83,33(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+5)(s+16,66)}$$

$$T(s) = \frac{83,33(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+5)(s+16,66) + 83,33(K_p s + K_i)}$$

$$T(s) = \frac{83,33(K_p s + K_i)}{[s(s+1)(s+5)(s+16,66)] + 83,33(K_p s + K_i)}$$

A fim de determinar as restrições no valor de K_i em função de K_p , deve-se utilizar o critério de estabilidade de Routh - Hurwitz. Para tanto, deve-se analisar a equação característica da função de transferência $T(s)$.

O critério de estabilidade de Routh - Hurwitz garante que a condição necessária e suficiente a estabilidade é que todos os coeficientes da equação característica e todos os termos da primeira coluna do arranjo tabular tenham o mesmo sinal.

→ Equação característica:

$$s^4 + 22,66 s^3 + 104,96 s^2 + (83,3 + 83,33 K_p) s + 83,33 K_i = 0$$

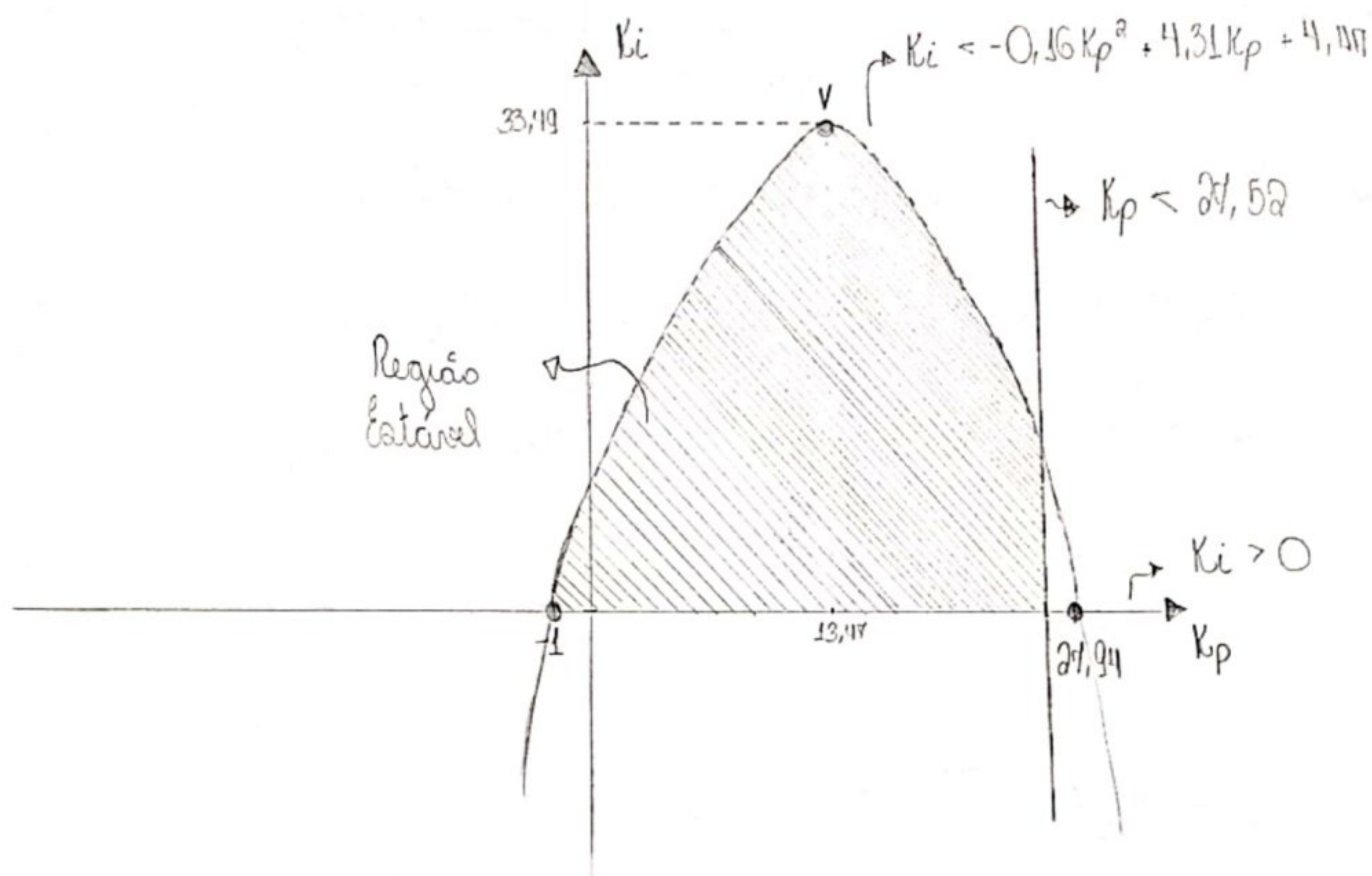
→ Arranjo tabular Routh - Hurwitz:

1	104,96	83,33 K_i
22,66	$(83,3 + 83,33 K_p)$	0
$101,28 - 3,68 K_p$	83,33 K_i	0
$[8436,62 + 8133,12 K_p - 306,65 K_p^2 - 1888,26 K_i]$	0	0
$101,28 - 3,68 K_p$		
83,33 K_i		

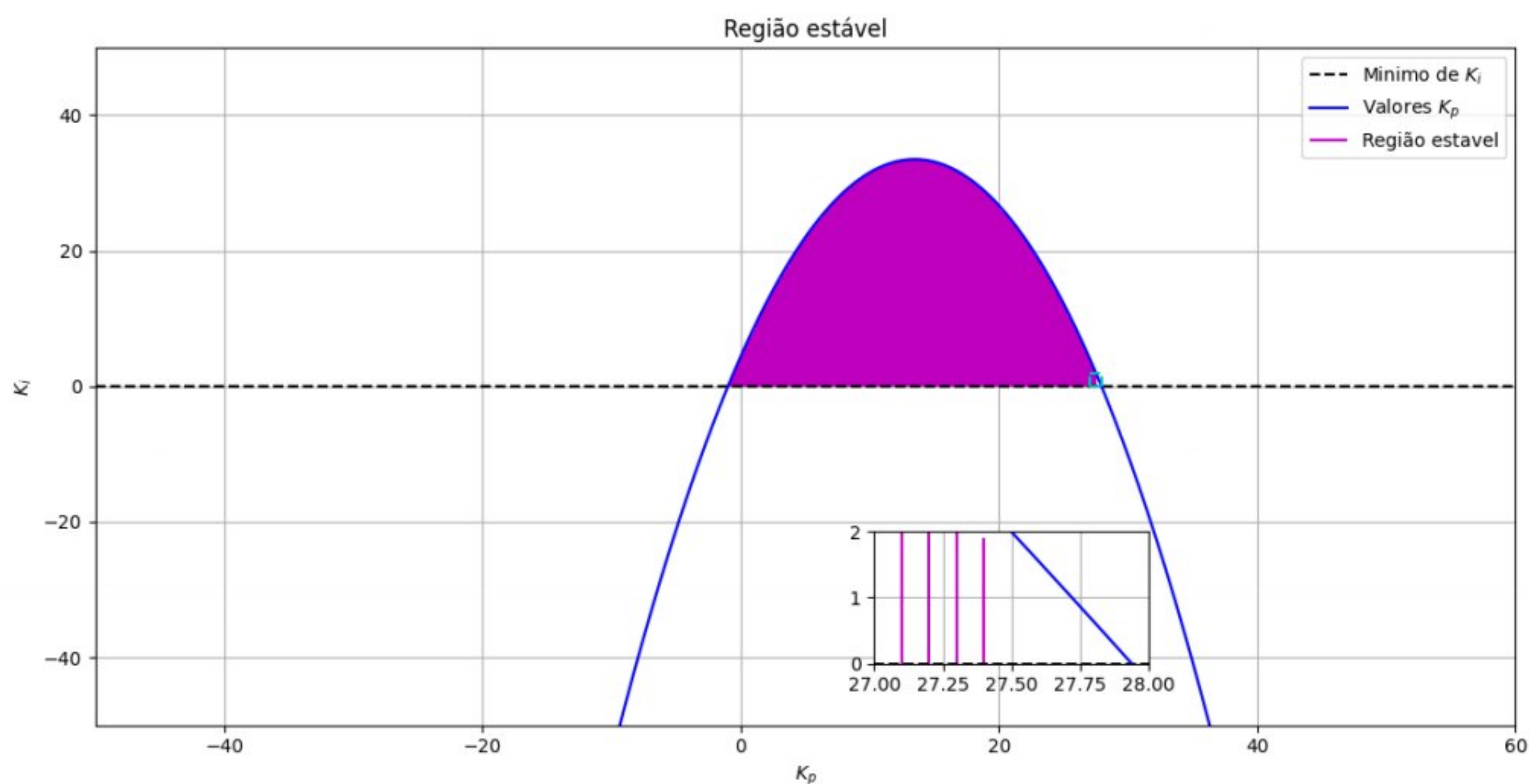
• O vértice da curva é:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = 13,17$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = 33,19$$



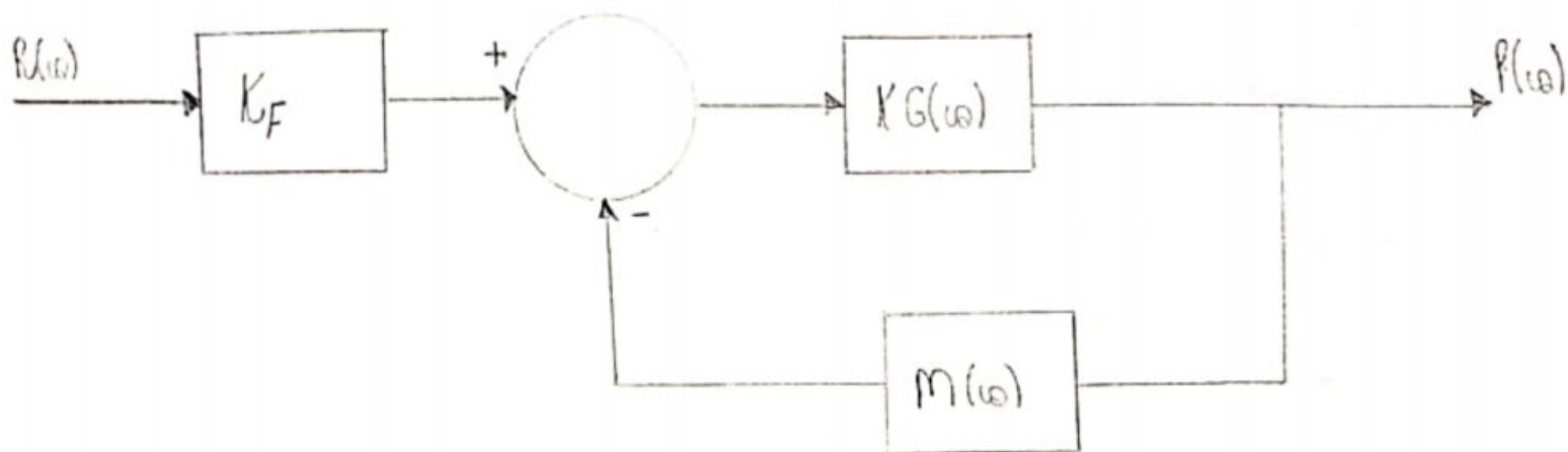
1.3)



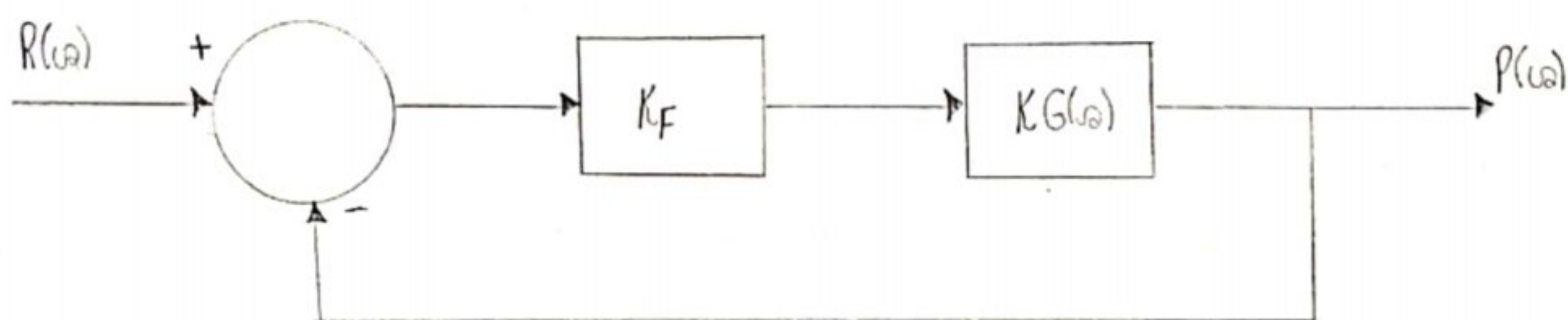
A coordenada $(K_p; K_i)$ que apresenta o menor índice de desempenho ISE é: $(19,19; 14,14)$, com um erro igual à 0,00024.

2 - Lugar Geométrico das raízes

2.1)



→ O diagrama de blocos acima pode ser modificado e reescrito da seguinte forma, considerando $M(s) = K_F$.



O sistema passa a ter realimentação de ganho 1.

→ Determinando os polos e zeros de malha aberta:

$$T_{ma}(s) = K_F \cdot K_G(s) = \frac{2,11 K}{s \cdot (s + 100) \cdot (s + 1,11)}$$

* Os polos do sistema são:

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -100$$

$$p_3 = -1,11$$

* O sistema não possui zeros.

→ Determinando as assíntotas:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\theta_3 = \frac{5\pi}{3} = 300^\circ$$

$$\theta_2 = \pi = 180^\circ$$

→ Determinando a função de transferência para malha fechada:

$$T_{mf}(s) = \frac{T_{mo}(s)}{1 + T_{mo}(s)}$$

$$T_{mf}(s) = \frac{2,11K}{s(s+100)(s+1,71)} \div \left(1 + \frac{2,11K}{s(s+100)(s+1,71)} \right)$$

$$T_{mf}(s) = \frac{2,11K}{\cancel{s(s+100)(s+1,71)} + 2,11K}$$

$$T_{mf}(s) = \frac{2,11K}{s(s+100)(s+1,71) + 2,11K}$$

→ Equação característica de $T_{mf}(s)$:

$$s^3 + 101,71s^2 + 171s + 2,11K = 0 \quad (IV)$$

$$K = -0,47s^3 - 48,20s^2 - 81,04s \quad (V)$$

→ Determinando os pontos onde cruza o eixo imaginário, para tanto utiliza-se o critério de Routh - Hurwitz:

1	171
101,71	2,11K
$\frac{17392,41 - 2,11K}{101,71}$	0
2,11K	0

$$\frac{17392,41 - 2,11K}{101,71} > 0 \quad ; \quad K > 0$$

$$K < 8242,85$$

→ Substituindo o valor máximo de K na equação (IV):

$$\omega^3 + 101,71\omega^2 + 171\omega + 17392,41 = 0$$

Utilizando uma calculadora online, obtenhamos as raízes da equação:

$$\omega_1 = -101,71$$

$$\omega_2 = -13,07j$$

$$\omega_3 = 13,07j$$

→ Determinando as pontas de saída no eixo real:

Derivando a equação (V),

$$\frac{dK}{d\omega} = -1,41\omega^2 - 96,40\omega - 81,04$$

$$-1,41\omega^2 - 96,40\omega - 81,04 = 0$$

$$\Delta = 9292,96 - 457,06$$

$$\Delta = 8835,89$$

$$\hookrightarrow 93,99$$

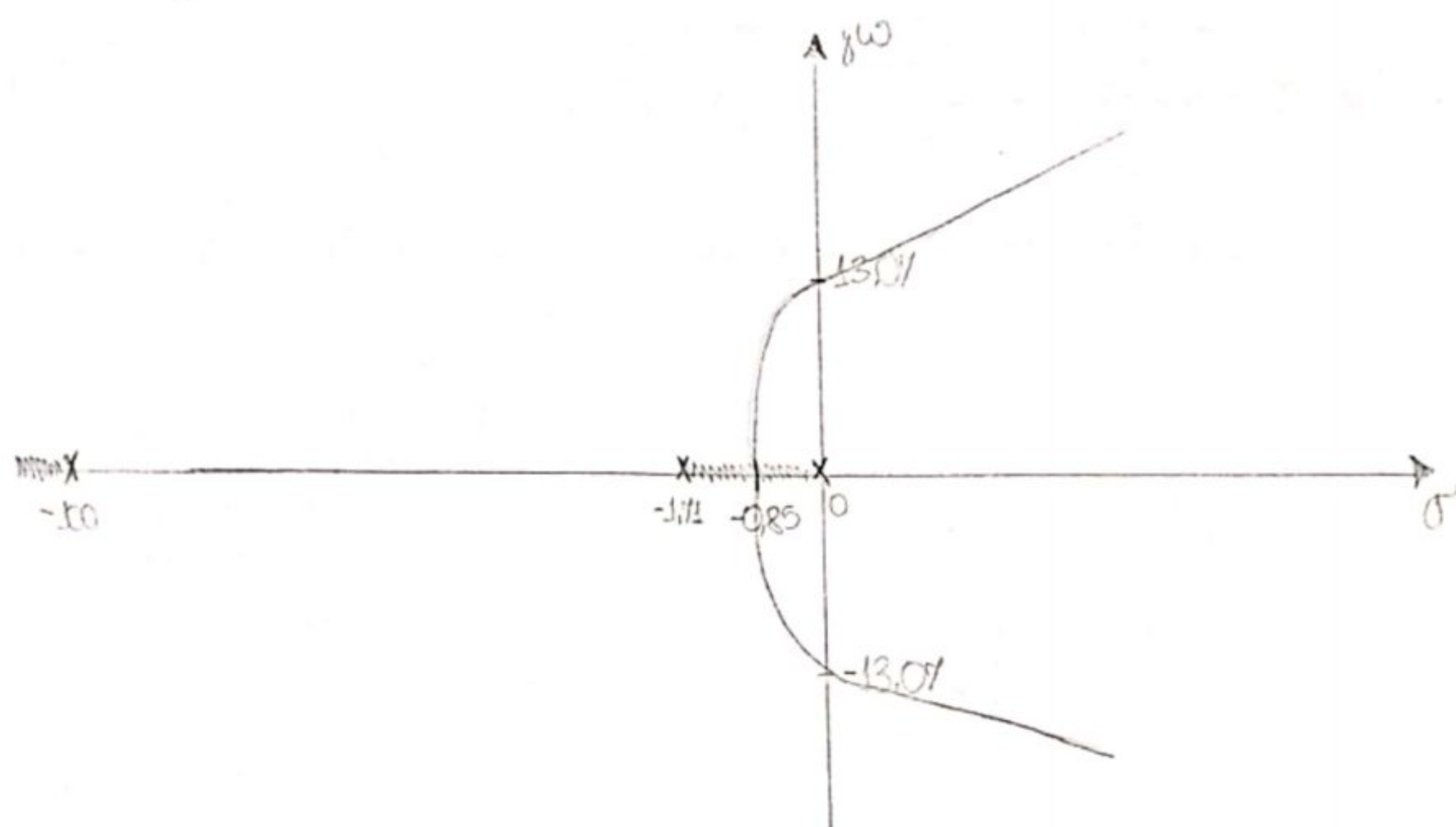
$$\omega = \frac{96,40 \pm 93,99}{-2,82}$$

$$\omega_1 = -0,85$$

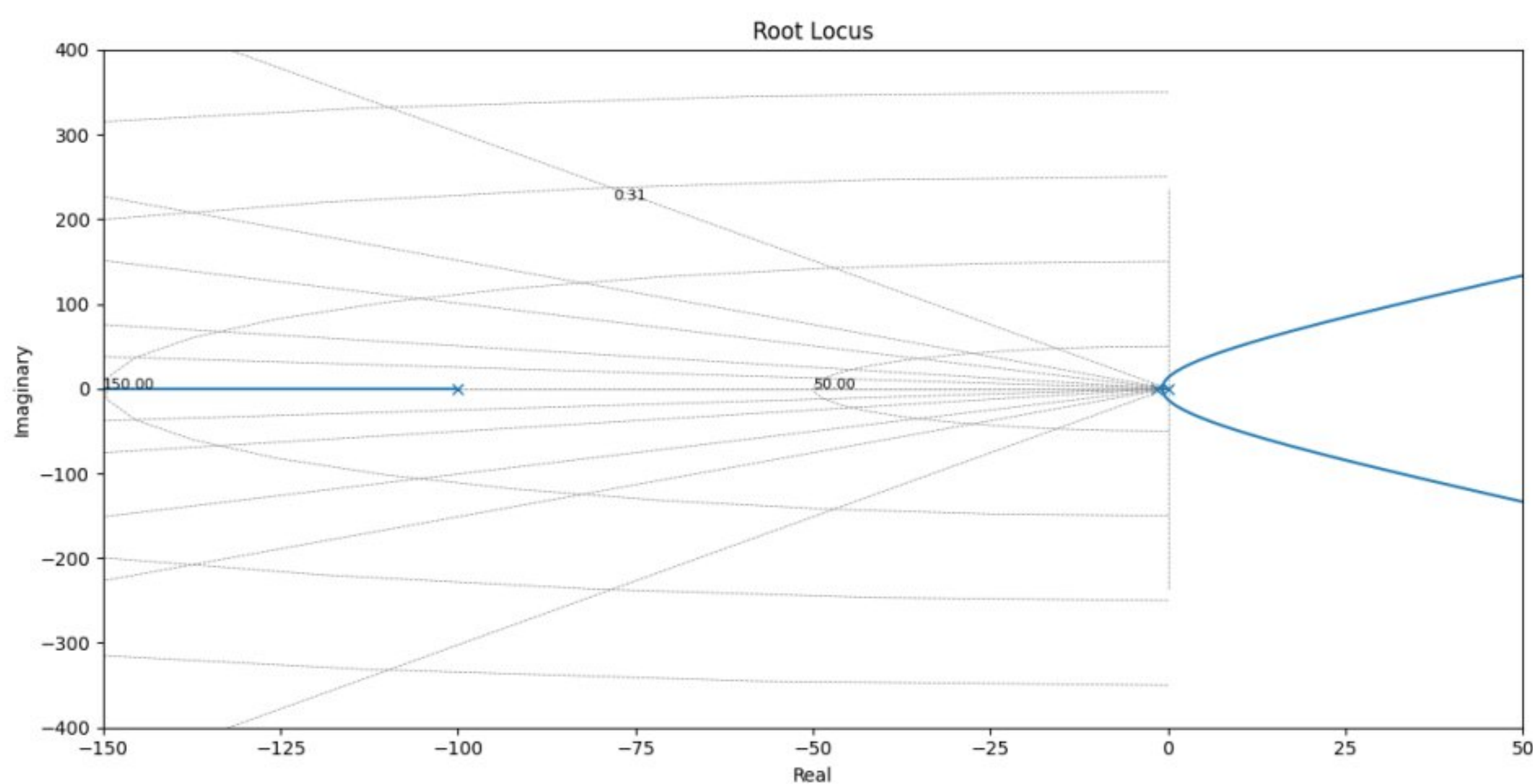
$$\omega_2 = -66,95$$

↳ Não convertem, uma vez que não se encontra no LGR.

→ Realizando o esboço do LGR:



→ Para produzir um lugar geométrico das raízes mais detalhado, utilizou-se a linguagem python e a função `root_locus` da biblioteca `control`. O resultado obtido pode ser visto na Figura 2:



Observa-se que o esboço é fiel a imagem gerada em python.

É desejado que o valor de K garanta um sobressinal de 25%, sendo assim:

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$$

em que ξ é o coeficiente de amortecimento e M_p é o overshoot.

$$\xi = \frac{-\operatorname{Im}(0,25)}{\sqrt{\pi^2 + \operatorname{Im}^2(0,25)}}$$

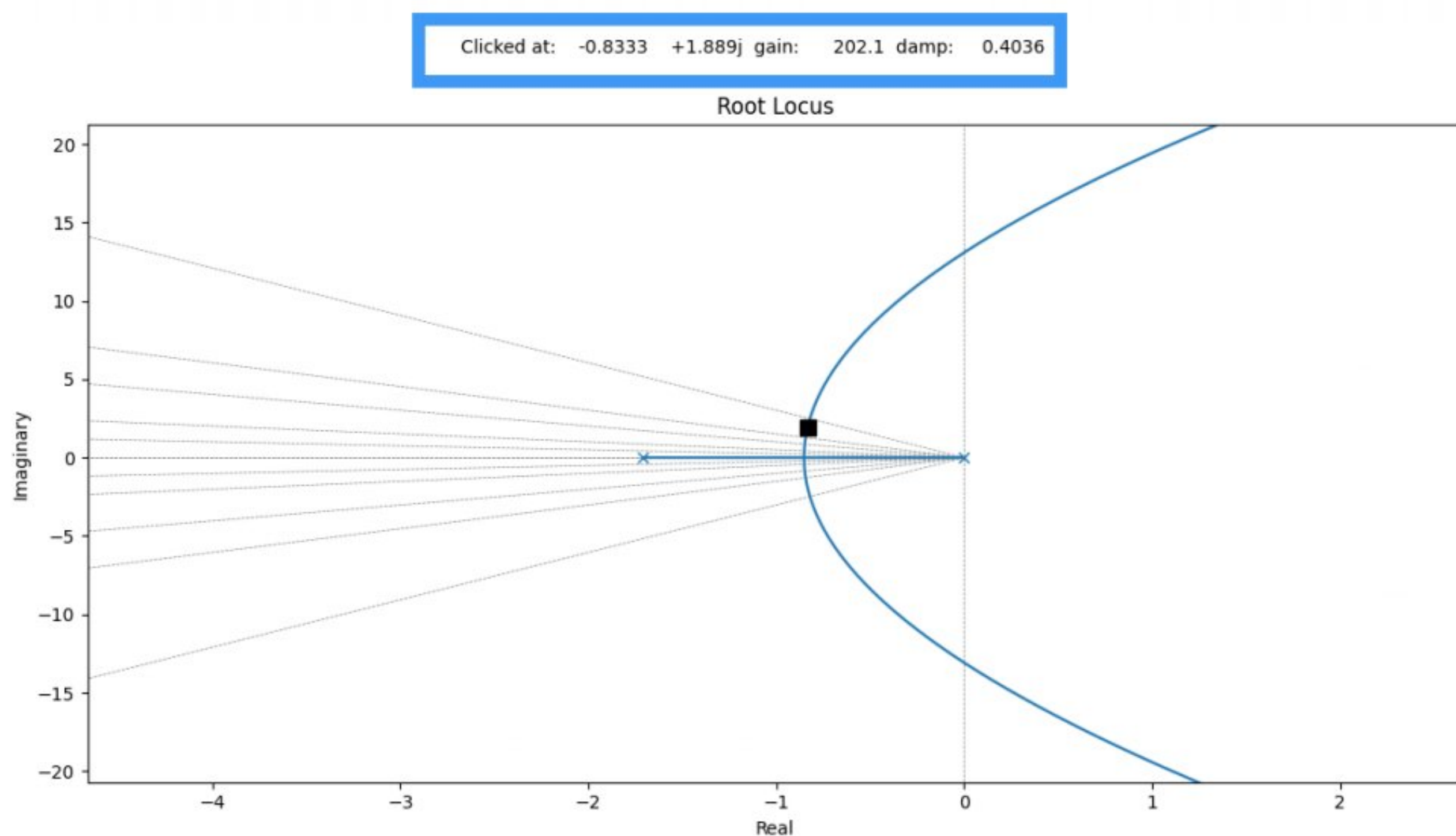
$$\xi = \frac{1,3862}{3,43}$$

$$\xi = 0,4036$$

→ Com o valor do coeficiente de amortecimento é possível determinar o valor de K graficamente. Para o valor do coeficiente de amortecimento obtido o valor de K é 202,1.

Isso assim, pode-se afirmar que o valor de K que assegura esta estabilidade à malha fechada e sobresinal de 25% é:

$$K = 202,1$$



2.2) Se um sistema é estável, então os polos que estão longe do eixo real tem partes reais negativas de valor de grande, e em termos exponenciais correspondentes a estes polos decaem rapidamente a zero. A dominância relativa de polos de malha fechada é determinada pela relação das partes reais dos polos de malha fechada, bem como polos relativos dos resíduos calculados nos polos de malha fechada. O valor dos resíduos depende tanto dos polos quanto dos zeros de malha fechada.

Se as relações entre as partes reais dos pólos excedem $10\times$ e não existirem zeros na vizinhança, então os pólos de malha fechada mais próximos do eixo jo dominarão a resposta transitória. Estes pólos são chamados de dominantes e os mais distantes do eixo jo são chamados de dominados.

Considerando a equação de transferência em malha fechada $T_{mf}(s)$:

$$T_{mf}(s) = \frac{2,11K}{s.(s+100).(s+1,71) + 2,11K}$$

Observa-se que o pólo -100 está muito distante do eixo imaginário quando comparado aos demais pólos, sendo assim pode ser desprezado uma vez que interfere minimamente na resposta do sistema.

Para desprezar o efeito de um pólo em uma função de transferência devemos fazer $s=0$ na parte correspondente a este pólo. Sendo assim:

$$T_{mf}(s) = \frac{2,11K}{s.(0+100).(s+1,71) + 2,11K}$$

$$T_{mf}(s) = \frac{2,11K}{100s^2 + 171s + 2,11K}$$

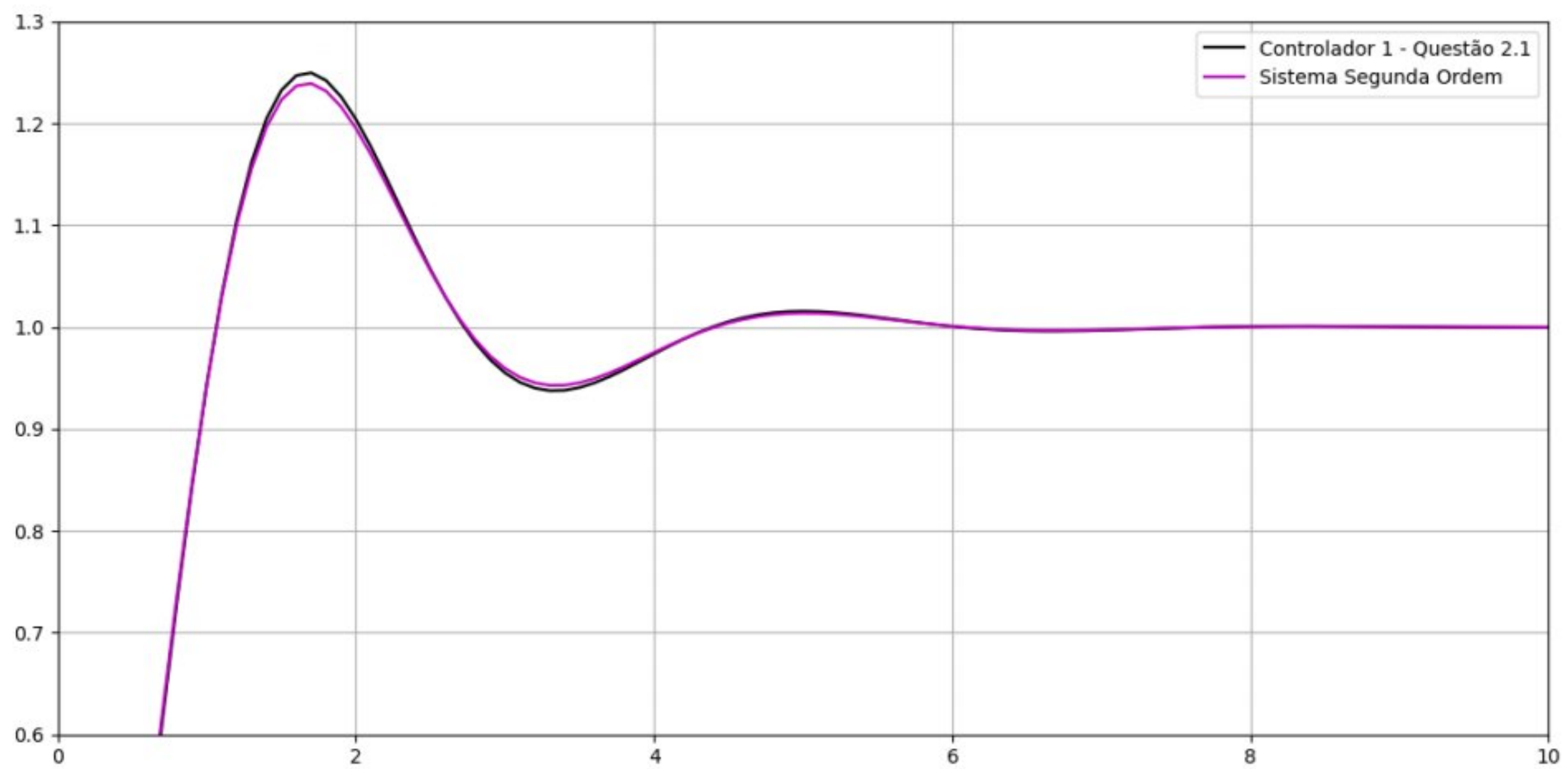
→ Considerando a equação geral para um sistema de segunda ordem:

$$\frac{u_g^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2,11K}{100s^2 + 171s + 2,11K}$$

$$T_{mf}(s) = \frac{0,0211K}{s^2 + 1,71s + 0,0211K}$$

→ Considerando $K = 200,1$:

$$T_{mf}(s) = \frac{4,26}{s^2 + 1,71s + 4,26}$$



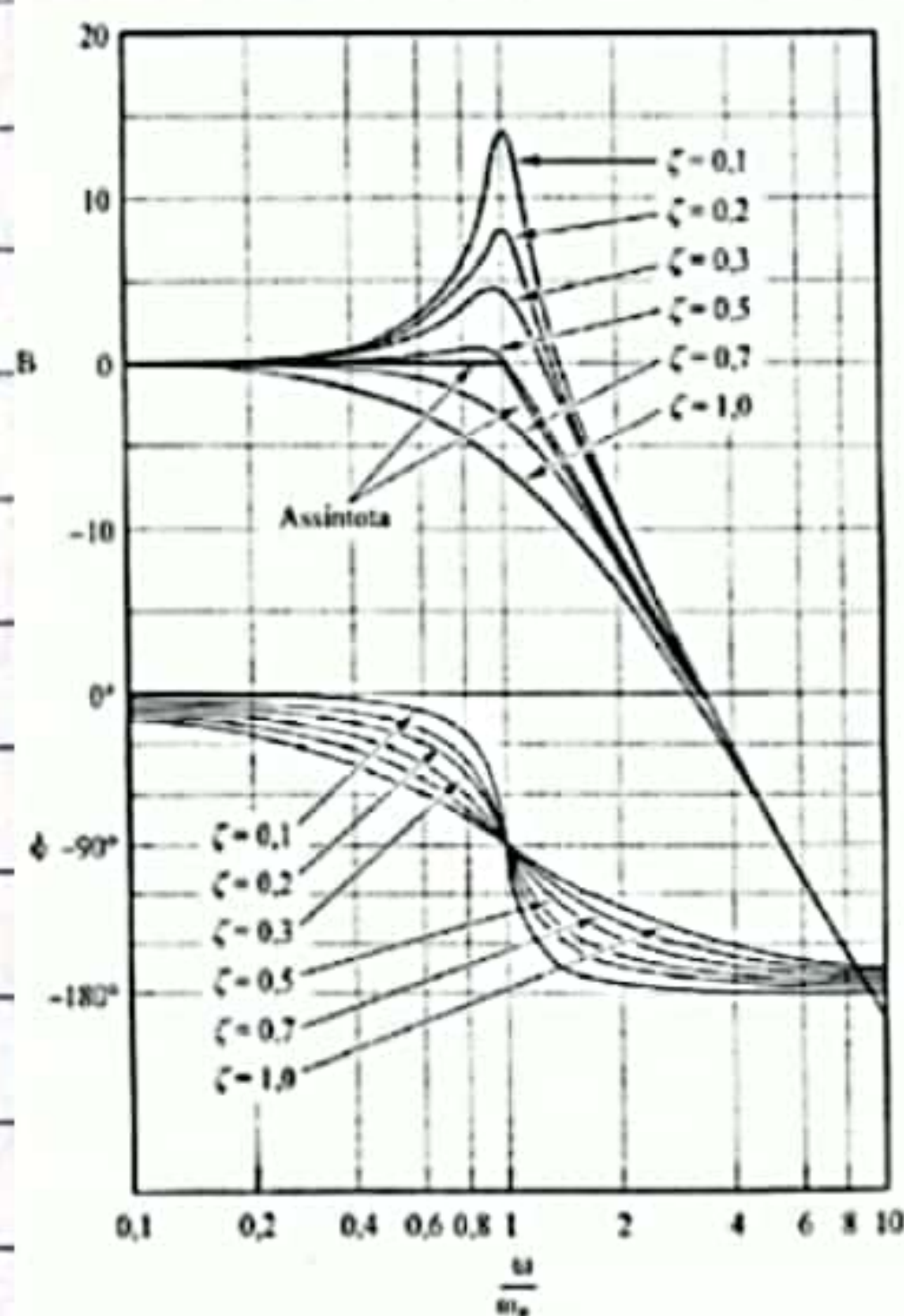
Observa-se pela imagem que as curvas apresentam comportamento semelhantes, estando as curvas sobrepostas.

O erro absoluto máximo entre as duas respostas é de:

$$E_{\text{máx}} = 0,043$$

Isto comprova que ambos os controladores apresentam praticamente as mesmas respostas.

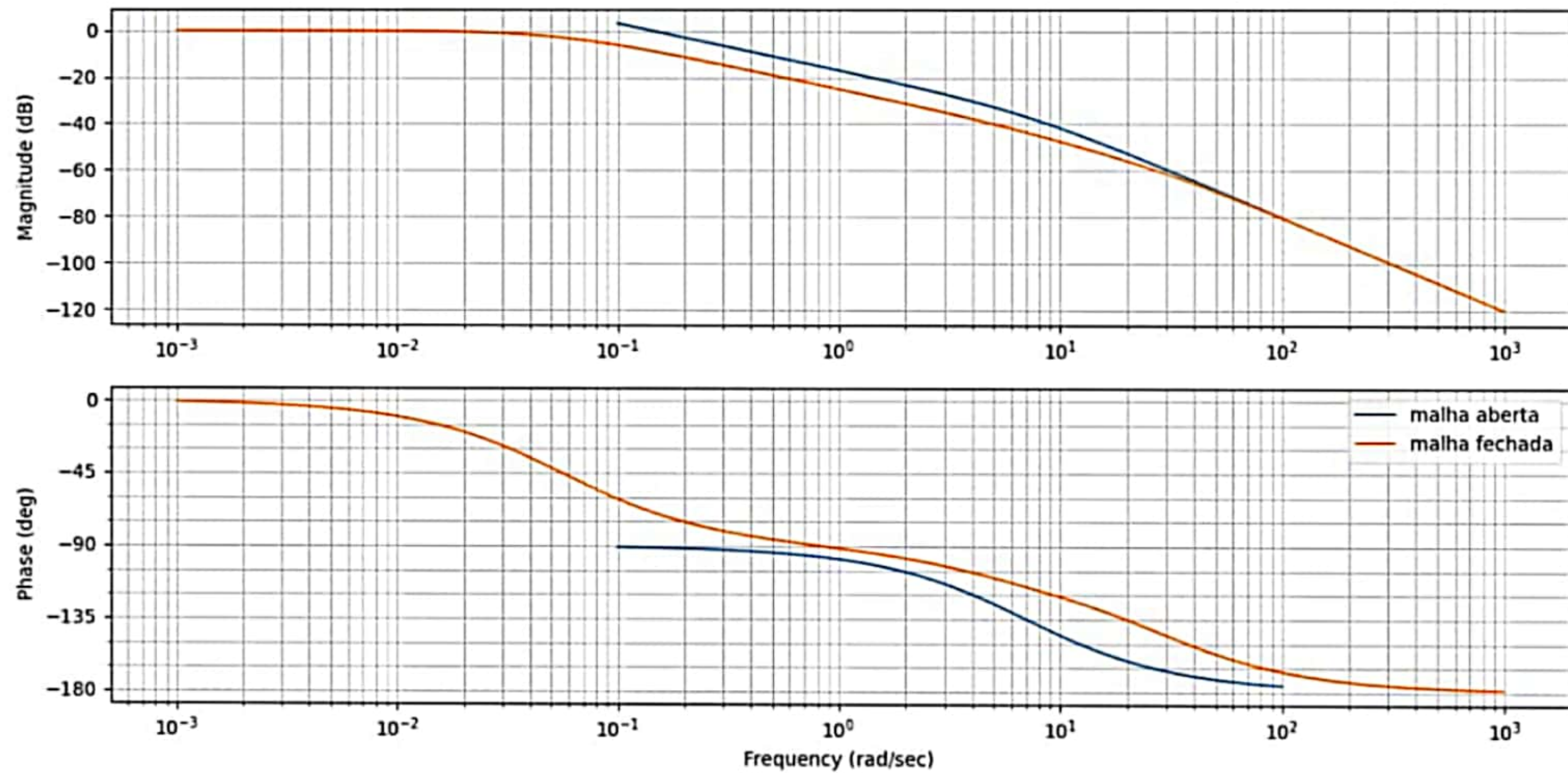
3 - Resposta em frequência



1. Uma vez que as curvas no diagrama de Bode não possuem pico de ressonância, tem-se que $\zeta > 0,707$. Então, considerando a fórmula do subressinal, sabe-se que, quanto maior o coeficiente de amortecimento, maior o subressinal da curva de resposta.

Comparando os diagramas de Bode como figura, vê-se que o coeficiente de amortecimento da resposta em malha é maior que em malha fechada. Assim, embora possa-se esperar que ambos os sistemas tenham subressonâncias, também se pode esperar que a resposta em malha aberta tenha menos oscilações, isto porque, ela possui um maior coeficiente de amortecimento, além disso, ela possuirá um subressinal menor.

Em relação a banda passante, a de malha fechada é maior, e, portanto produzirá uma velocidade de resposta ao tempo de entrada, maior que a de malha aberta.



2. Quando $K=1$, $\zeta > 0,907$ e não possui pico de ressonância

Quando $K=476,3$, $\zeta < 0,907$ e possui pico de ressonância

Para frente a resposta temporal será menos oscilatória, terá o valor menor quando $K=1$. Ademais, a velocidade de resposta será maior para $K=476,3$, isso porque, ele possui uma banda passante maior. Essa argumentação é sustentada com a resposta temporal de cada caso.

