



Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Departamento da Engenharia Mecatrônica
Engenharia Mecatrônica

Modelagem aproximada de processos industriais: modelagem caixa preta

Luiza Gomes de Castro e Sá

Thiago José da Silva

Divinópolis

Dezembro/2021

Resumo

O processo de produzir um modelo a partir de um sistema real é denominado modelagem. Existem três classificações de modelagem: caixa branca, caixa preta e saída e caixa cinza. A modelagem caixa branca torna-se inviável para descrição da dinâmica de sistemas não lineares e de alta complexidade. Sendo assim, o presente trabalho visa realizar a modelagem caixa preta via curva de resposta ao degrau do sistema *fan plate*. Em suma, o sistema é composto por um ventilador e uma placa. Com isso, busca-se estudar o sistema *fan plate* e suas variáveis e obter a função de transferência para o sistema subamortecido e implementar os resultados temporais do modelo e sistema de equações diferenciais. Além disso, busca-se trabalhar com sistemas superamortecidos com atraso e, através de métodos gráficos, projetar controladores P e PI. Ainda, almeja-se implementar a resposta temporal da malha fechada e avaliar sua performance. Para tanto, vários conceitos foram apresentados e recorridos durante o processo de montagem do relatório. Através da modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau foi possível aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de 1ª ordem superamortecido com atraso e de 2ª ordem subamortecido, uma vez que o sistema é autoregulável. Ademais, pelo método de resposta ao degrau de 3 parâmetros definiu-se as características necessárias para encontrar a função de transferência que descreve a dinâmica do sistema. Outrossim, métodos como Ziegler-Nichols e CHR foram utilizados para projetar controladores P e PI que, posteriormente, tiveram suas performances avaliadas pelos índices de desempenho IAE, ITAE e RMSE. Com a utilização da aproximação de Padé encontrou-se as funções aproximadas de ordem 1, 3, 5 e 9 que também foram comparadas entre si. Como resultados notou-se que quanto maior a amplitude do degrau, maior é a divergência entre a resposta do modelo de 2ª ordem obtido e a resposta do sistema real. Outrossim, comprovou-se, que, com a massa total da placa sendo 0,100Kg, o sistema apresentou um comportamento subamortecido. Porém, quando essa constante foi alterada para 0,005Kg, o sistema mostrou caráter superamortecido. Por fim, usando os índices de desempenho IAE, ITAE e RMSE, viu-se que o controlador PI projetado pelo método de Ziegler Nichols apresentou o melhor resultado em todos os índices calculados.

Palavras-chaves: Modelagem caixa preta; Sistema subamortecido; Sistema superamortecido; Fan plate; Controladores;

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
2	Preliminares	2
2.1	Aproximação por um modelo de 1 ^a ordem	2
2.2	Aproximação por um modelo de 2 ^a ordem	4
2.3	Método de aproximação por Padé	5
3	Sistema fan plate	6
3.1	Descrição do sistema fan plate	6
3.2	Aproximação por um modelo de 2 ^a ordem subamortecido	7
3.3	Aproximação por um modelo de 1 ^a ordem	8
4	Resultados e Discussões	10
5	Conclusão	18
	Referências	19

1 Introdução

O processo de produzir um modelo a partir de um sistema real é denominado modelagem. Existem três classificações de modelagem: caixa branca, caixa preta e saída e caixa cinza (AGUIRRE, 2007). A modelagem caixa branca torna-se inviável para descrição da dinâmica de sistemas não lineares e de alta complexidade. Assim, comumente, usa-se a modelagem caixa preta via utilização e a análise da curva de reação do sistema a uma entrada degrau para aproximar a dinâmica do processo por um modelo linear de baixa ordem.

A curva de resposta ao degrau é obtida ao aplicar uma variação abrupta no sinal de excitação do processo (GARCIA, 2017). De maneira geral, em malha aberta, o sistema pode ser classificado como autoregulável ou não autoregulável. O autoregulável é aquele que passa por um regime transitório e se estabiliza em um novo valor, já o não autoregulável não terá a saída do processo estabilizada, mas crescerá ou decrescerá indefinidamente. Nesse caso, mais especificamente, o sistema *fan plate* é autoregulável. Isso significa que ele é estável em malha aberta e pode ser descrito por uma ou mais constantes de tempo, incluindo ou não o tempo morto. Sendo assim, ao aplicar a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau, aproxima-se a dinâmica do sistema por um modelo de primeira ordem ou segunda ordem subamortecido.

Por conseguinte, o presente trabalho visa realizar a análise e modelagem caixa preta do sistema *fan plate*. Em suma, o sistema é formado, resumidamente, por um ventilador e uma placa. Esse relatório é composto por Introdução, Seção 1, que expõe o assunto e os objetivos almejados; Preliminares, Seção 2, que discorre a respeito dos métodos utilizados; Sistemas *fan plate*, Seção 3, que apresenta o desenvolvimento da prática; Resultados e discussões, Seção 4; E, por fim, Seção 5, Conclusão, a qual sintetiza os desfechos do trabalho.

1.1 Objetivos

São objetivos desse experimento estudar o sistema *fan plate* e suas variáveis e formular um modelo matemático que represente a dinâmica deste. Assim, espera-se obter a função de transferência para o sistema subamortecido e implementar os resultados em função do tempo do modelo e sistema de equações diferenciais. Além disso, busca-se trabalhar com sistemas superamortecidos com atraso e, através de métodos gráficos, projetar controladores P e PI. Ainda, almeja-se implementar a resposta temporal da malha fechada e avaliar sua performance.

2 Preliminares

Esta Seção apresenta uma revisão dos métodos empregados na realização do experimento.

2.1 Aproximação por um modelo de 1^a ordem

Os sistemas de segunda ordem ou superior podem ser aproximados por modelos de primeira ordem mais tempo morto, o que resulta em um modelo dado pela Equação (2.1):

$$G(s) = \frac{K e^{\theta s}}{\tau s + 1} \quad (2.1)$$

na qual θ é o atraso ou tempo morto, τ é a constante de tempo do sistema e K é o ganho estático do sistema, dado pela razão entre a variação de entrada e saída do sistema, assim:

$$K = \left| \frac{\Delta y}{\Delta u} \right| \quad (2.2)$$

em que Δy é a variação de saída do sistema e Δu é a variação de entrada do mesmo (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

Sendo assim, para aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de primeira ordem aplica-se a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau.

As variáveis K , τ e θ apresentados em (2.1), são obtidas através da aplicação do **método da resposta ao degrau com 3 parâmetros**. Esse método consiste em inserir uma entrada degrau unitário em um processo de malha aberta e observar a resposta desse sistema com o tempo. Os parâmetros (K, τ, θ) podem ser determinados graficamente de acordo com o observado na Figura 1 (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

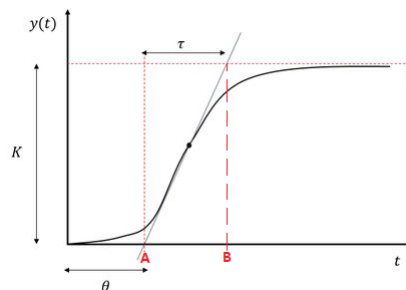


Figura 1 – Determinação gráfica dos parâmetros do método de Ziegler-Nichols.

A interseção da reta tangente com a resposta ao degrau que tem maior inclinação fornece θ . Além disso, existem várias maneiras de determinar o valor de τ , um dos métodos é através da distância entre os pontos A e B. Já o valor de K é fornecido pela Equação (2.2).

Além disso, é possível obter a constante:

$$T = \frac{\theta}{\theta + \tau} = \frac{\theta}{T_{ar}} \quad (2.3)$$

em que T_{ar} é o tempo de residência médio e $0 \leq T \leq 1$ é a taxa normalizada do tempo morto(θ). O T , também chamado de taxa de controlabilidade, pode ser usado como um para determinar a dificuldade de controle de um sistema, sendo que, a dificuldade aumenta à medida que T aumenta (ASTROM; HAGGLUND, 1995).

Dessa maneira, com a dinâmica do modelo aproximada por um modelo de primeira ordem com atraso((2.1)), é possível aplicar várias técnicas de projeto na determinação dos parâmetros do controlador que atenderão às especificações do regime transitório e do regime permanente do sistema de malha fechada, esse processo é conhecido como sintonia do controlador (OGATA, 2010). No presente trabalho, serão utilizados dois métodos de sintonia de controladores PID em malha fechada, sendo eles: **o método da curva de reação do processo de Ziegler-Nichols** e **o método CHR**.

Ziegler e Nichols apresentaram regras para a determinação de valores do ganho proporcional K_p , do tempo integral T_i e do tempo derivativo T_d , baseadas nas características da resposta transitória de dada planta(determinadas conforme mostrado na Figura 1), de acordo com a Tabela 1 (OGATA, 2010).

Tipo de controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{1}{\theta S^*}$	—	—
PI	$\frac{0,9}{\theta S^*}$	$\frac{10 \theta}{3}$	—
PID	$\frac{1,2}{\theta S^*}$	2θ	$\frac{\theta}{2}$

Tabela 1 – Parâmetros de sintonia pelo método da curva de Reação do processo

Além disso, Chien, Hrones e Reswick(1952), criaram o método CHR, que define ajustes para o modo servo sem sobressinal, com sobressinal máximo de 20% e para o modo regulatório sem sobressinal. Nesse relatório, utiliza-se a sintonia para resposta mais rápida possível sem sobressinal para o modo regulatório, apresentada na Tabela 2 (GARCIA, 2017).

Tipo de controlador	K_c	T_i	T_d
P	$\frac{0,3 \tau}{K\theta}$	—	—
PI	$\frac{0,6 \tau}{K\theta}$	4θ	—
PID	$\frac{0,95 \tau}{K\theta}$	$2,375\theta$	$0,421\theta$

Tabela 2 – Parâmetros de sintonia do método CHR sem sobressinal para o modo regulatório

De maneira geral, o aumento do ganho de K_c acelera a resposta do processo, porém para valores altos podem gerar oscilações excessivas e até mesmo instabilizar o sistema. O aumento de T_i , geralmente, torna os controladores PI e PID mais conservadores, eliminando o erro estacionário, porém para valores excessivos o *set point* é retornado muito lentamente. Para a variável T_d , valores pequenos reduz o desvio máximo, o tempo de resposta e a intensidade das oscilações, para T_d muito alto o ruído tende a ser amplificado e a resposta pode se tornar oscilatória. (GARCIA, 2017)

2.2 Aproximação por um modelo de 2ª ordem

A forma padrão do sistema de segunda ordem é dada por:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.4)$$

em que K é o ganho estático do sistema, ω_n é a frequência natural do sistema e ζ é o coeficiente de amortecimento.

O comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros ζ e ω_n . Se $\zeta > 1$, o sistema é chamado superamortecido. Por outro lado, se $0 < \zeta < 1$, os polos de malha fechada são complexos conjugados e situam-se no semiplano esquerdo do plano s e o sistema é chamado de subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória (OGATA, 2010). E, na especificação das características das respostas transitórias de um sistema de controle a uma entrada em degrau unitário, é comum especificar o seguinte:

1. Tempo de atraso, t_d : tempo requerido para que a resposta alcance metade de seu valor final pela primeira vez.
2. Tempo de subida, t_r : Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, o tempo de subida de 0% a 100% é o normalmente utilizado.
3. Tempo de pico, t_p : é o tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal. Dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.5)$$

4. Máximo sobressinal (ou apenas sobressinal), M_p : é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir da unidade.
5. Tempo de acomodação, t_s : é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (geralmente de 2% ou 5%) em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente. Dessa forma, o t_s correspondente à essa faixa de tolerância

pode ser medido por em termos da constante de tempo $T = 1/\zeta\omega_n$. Para $0 < \zeta < 0,9$. Assim, por conveniência, definimos t_s como:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de 2\%}) \quad (2.6)$$

$$t_s = 3T = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de 5\%}) \quad (2.7)$$

Essas especificações são mostradas graficamente na Figura 2.

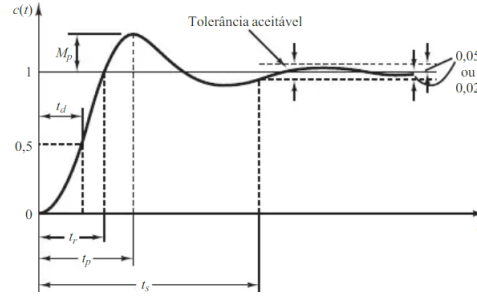


Figura 2 – Curva de resposta em degrau unitário que mostra t_d , t_r , t_p , M_p e t_s .

Como dito anteriormente, o sistema *fan plate* é autoregulável e, sendo assim, ao aplicar a modelagem caixa preta via curva de reação a uma entrada degrau é possível aproximar a dinâmica do sistema por um modelo de segunda ordem subamortecido, dado por:

$$G(s) = \frac{Ke^{-\theta s}}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1} \quad (2.8)$$

No qual: K é o ganho estático do sistema, θ é o atraso ou tempo morto, τ é a constante de tempo do sistema e ζ é o coeficiente de amortecimento.

2.3 Método de aproximação por Padé

O método de Padé trata-se de uma expansão assintótica de uma série de Taylor, que pode conferir uma mais rápida convergência ou divergência para a série, simplesmente rearranjando-a como uma divisão de duas expansões (COLORADO, 2021). A aproximação de Padé de uma função $f(x) = \sum_{n=0}^N f_n x^n$ é dada por:

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \quad L, M \geq 0 \quad (2.9)$$

com $P_L(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_L x^L$ e $Q_M(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_M x^M$. É possível determinar os coeficientes dos polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$ através da Equação (2.10) (ZHENG; ZHANG, 2017):

$$f(x) - \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = O(x^{L+M+1}) \quad (2.10)$$

3 Sistema *fan plate*

3.1 Descrição do sistema *fan plate*

A Figura 3 apresenta o sistema *fan plate*.

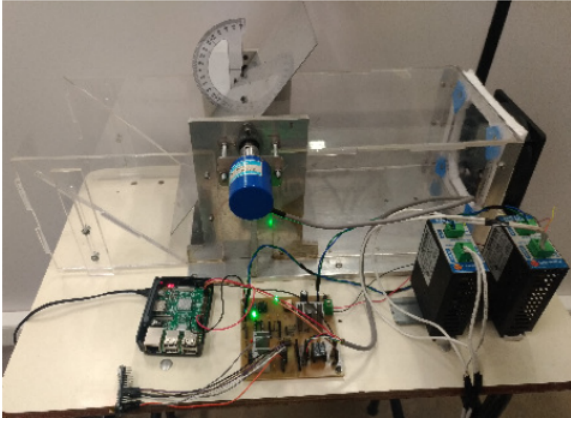


Figura 3 – Sistema mecânico *fan plate*

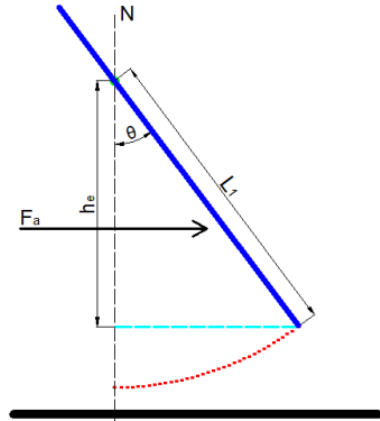


Figura 4 – Esquema simplificado do *fan plate*

O sistema é formado por um ventilador, uma placa de alumínio cuja posição angular é mensurada por um encoder, um cooler de alta velocidade e um raspberry pi para programação e controle do sistema. Nesse estudo, o objetivo é controlar a posição angular da placa a partir do controle do fluxo de ar gerado pelo ventilador. A Figura 4 mostra o desenho esquemático simplificado do *fan plate*.

Dessa forma, a dinâmica do sistema é determinada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= K_1 \cos^2 x_1 u - (K_2 \sin x_1 + K_3 x_2) \\ y &= x_1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que x_1 é a posição angular da placa, x_2 é a velocidade angular da placa, y é a saída do sistema, u é a entrada do sistema e K_i , com $i = 1, 2, 3$, são definidos por:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{d_{cm} \rho_{ar} C_a L_a L_1}{2m_t \left(\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)} \\ K_2 &= \frac{g d_{cm}}{\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2} \\ K_3 &= \frac{\mu d_{cm}^2}{m_t \left(\frac{L_t^2}{12} + d_{cm}^2 \right)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Além disso, tem-se os dados:

Variáveis	Significado	Valor
L_a	Largura da placa móvel de alumínio	0,154 (m)
L_1	Comprimento da placa acima do eixo de rotação	0,155(m)
L_t	Distância do centro de massa da placa.	0,270(m)
d_{cm}	Distância do centro de massa da placa	0,020(m)
m_t	Massa total da placa	0,100 (Kg)
ρ_{ar}	Densidade do ar	1,23 (Kg/m ³)
C_a	Coefficiente de arrasto	2,05(N)
μ	Coefficiente de atrito viscoso	5
g	aceleração da gravidade	9,81 (m/s ²)

Tabela 3 – Parâmetros do sistema

3.2 Aproximação por um modelo de 2^a ordem subamortecido

Para definir o sinal de controle necessário para manter o sistema na posição angular $\theta = 50^\circ (0,873 \text{ rads})$, utiliza-se os parâmetros da Tabela 3. Além disso, uma vez que o sistema encontra-se estabilizado, $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$. Assim, através das equações apresentadas em (2.2), tem-se que $K_1 = 0,9295$, $K_2 = 30,3012$ e $K_3 = 3,0888$. E, substituindo esses valores na Equação (3.1), encontra-se o sinal de controle procurado:

$$u_1 = 60,43751m/s^2 \approx 60,44m^2/s^2 \quad (3.3)$$

Agora, com o sistema na posição angular $\theta = 50^\circ$, aplica-se uma entrada ao degrau definida por:

$$u_d = u_1 + 0,20u_1 \approx 72,5250m/s^2 \quad (3.4)$$

A resposta temporal do sistema a essa entrada ao degrau pode ser visualizada na Seção 4, Figura 5. Além disso, as curvas envoltórias para a curva de resposta ao degrau unitário (OGATA, 2010), plotadas em vermelho com os valores de ζ e ω_n , bem como os limites de $\pm 2\%$ e $\pm 5\%$, podem ser visualizadas na Figura 6, na mesma Seção.

Assim, a partir da análise gráfica da curva da resposta, discutida logo após a Figura 6, é possível identificar, os parâmetros do transitório do sistema, introduzidos na Seção, 2.2. sendo eles:

$$\begin{aligned} t_p &= 0,348 & t_r &= 0,1909 & M_P &= 0,5877 \\ t_{s2} &= 2,498s & t_{s5} &= 1,831s \end{aligned} \quad (3.5)$$

Determinadas as especificações da resposta transitória, é possível obter a função de transferência do sistema através da Equação (2.4). Para tanto, faz-se necessária a identificação dos valores do coeficiente de amortecimento ζ , da frequência natural ω_n e do ganho estático K . Dessa forma, com o tempo de acomodação t_s pelo critério de 2% e o t_p encontrado, e substituindo-os nas equações 2.5 e 2.6, tem-se um sistema de duas variáveis e duas equações, resolvendo-o encontra-se:

$$\begin{aligned}\omega_n &= 9,16848 \\ \zeta &= 0,17465\end{aligned}\tag{3.6}$$

Por fim, o valor de K é dado pela Equação (2.2), na qual, nesse caso, $\Delta u = u_d - u_1$ e $\Delta y = 0,9276 - 0,873$, assim:

$$K = 0,00455\tag{3.7}$$

Então, aplicando os valores encontrados em (3.6) e (3.7), a Equação de transferência fica:

$$G_1(s) = \frac{0,3825}{s^2 + 3,203s + 84,06}\tag{3.8}$$

Dessa forma, as raízes do polinômio característico do sistema, ou seja, as raízes do denominador da função de transferência, podem ser calculadas:

$$\begin{aligned}s_1 &= -1,6015 + j9,0275 \\ s_1 &= -1,6015 - j9,0275\end{aligned}\tag{3.9}$$

Finalmente, é possível validar a resposta do modelo obtido(Equação (3.8)) comparando-a com a resposta do sistema (3.1). Essa validação, feita em uma sequência de degraus diferentes daquela utilizada na obtenção do modelo, para tanto, em um tempo de simulação de 20s, aplicou-se o seguinte: de 0 à 3,33s: não houve perturbação no sistema, $u=u_1$; de 3,33s à 6,66s: degrau de $1,20u_1$; de 6,66s à 10s: não houve perturbação no sistema, $u=u_1$; de 10s à 13,33s: degrau de $0,80u_1$; de 13,33s à 16,66s: não houve perturbação no sistema, $u=u_1$; de 16,66s à 20s: degrau de $1,30u_1$. A resposta em função do tempo do sistema a essas perturbações pode ser vista na Seção 4, Figura 7.

3.3 Aproximação por um modelo de 1^a ordem

Agora, para definir o sinal de controle necessário para manter o sistema na posição angular $\theta = 38^\circ(0,663\text{rad})$, utiliza-se os parâmetros da tabela 3, porém, com $m_t = 0,005$ Kg. Assim, de maneira análoga ao que foi feito na Seção 3.2, uma vez que o sistema encontra-se

estabilizado, $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$. E, através das equações apresentadas em (3.2), tem-se que $K_1 = 18,5909$, $K_2 = 30,3012$ e $K_3 = 61,7761$. E, substituindo esses valores na Equação (3.1), encontra-se o sinal de controle procurado:

$$u_2 = 1,61597m^2/s^2 \approx 1,62m^2/s^2 \quad (3.10)$$

Dessa forma, a fim de obter um modelo de 1ª ordem para o sistema, aplicou-se o seguinte para o modelo real não linear ((3.1)): de 0 à 12,5s: não houve perturbação no sistema, $u=u_2$; de 12,5s à 25s: degrau de $1,20u_1$; de 25s à 37,5s: não houve perturbação no sistema, $u=u_2$; de 37,5s à 50s: degrau de $0,80u_2$. A resposta temporal do sistema a essas perturbações pode ser vista na Figura 8.

Depois, usa-se o método da resposta ao degrau com 3 parâmetros, apresentado na Seção 3.3, para determinar os 3 parâmetros da Equação (2.1). Para isso, foi necessário traçar a reta tangente a curva de resposta do degrau positivo de $1,2u_2$. A Equação da reta tangente foi obtida pela identificação de sua inclinação, ou seja, localizando dois pontos da curva entre os quais ela se comporta como uma reta (STEWART, 2013), tais pontos foram $t=12,6s$ e $t=12,599s$.

Com isso, na Seção 4, são expostas a Figura 9 (que apresenta a curva de resposta ao degrau positivo e a reta tangente a ela, em vermelho) e, em seguida, sua análise gráfica. Então, com essa discussão tem-se os 3 parâmetros, encontrados conforme orientado pela Figura 1.

$$\begin{aligned} \theta_{pos} &= 0,011 \\ \tau_{pos} &= 1,1266 \\ K_{pos} &= 0,1966 \end{aligned}$$

Por fim, substituindo os valores de θ , τ e K na Equação (2.1), obteve-se o modelo de primeira ordem para o sistema:

$$G_2(s) = \frac{0,1966}{1,1266s + 1} \quad (3.11)$$

É importante ressaltar que, nesse caso, como o atraso do modelo obtido é suficientemente pequeno, ele pode ser desconsiderado e assim, aproximado para $\theta = 0$.

Depois, acrescentou-se ao modelo obtido em (3.11) um atraso de 0,15 segundos, através do método de Padé, explanado na Seção 2.3.

Os resultados e respectivas análises são apresentados na seção 4.

4 Resultados e Discussões

Agora, tem-se a análise das respostas do sistema. Inicialmente, utiliza-se o ponto de operação $\theta = 50^\circ$, desenvolvido conforme apresentado na Seção 3.2. A resposta temporal do sistema a uma entrada ao degrau de $1,2u_1$ pode ser visualizada na Figura 5.

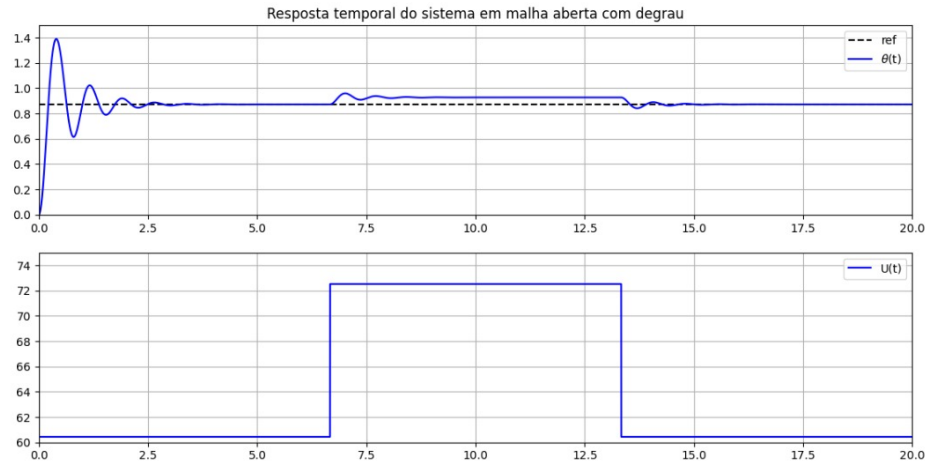


Figura 5 – Resposta temporal do sistema ao degrau de $1,2u_1$ aplicado.

E, a fim de obter os parâmetros do transitório do sistema, introduzidos na Seção 2.2, essa curva foi normalizada e é apresentada em 6.

Assim, através da análise gráfica da Figura 6, ficam explícitos os valores do tempo de subida $t_r = 0,1909$, tempo de pico $t_p = 0,348$ e máximo sobressinal $M_p = 0,5877$, todos devidamente sinalizados pelas cotas. Além disso, os limites, superiores e inferiores, de 2% e de 5% do valor final, estão plotados nas cores amarelo e verde, respectivamente. Dessa forma, o tempo de acomodação t_s do sistema, diante do critério de 2% e de 5%, foram identificados, sendo eles $t_{s2} = 2,498s$ e $t_{s5} = 1,831s$.

Com essas especificações, calculou-se os valores de ζ e ω_n (3.6), que geraram as curvas envoltórias da curva da resposta (OGATA, 2010), em vermelho. Obtidos todos os parâmetros, conforme explanado na Seção 3.2, determinou-se a função de transferência ((3.8)):

$$G_1(s) = \frac{0,3825}{s^2 + 3,203s + 84,06} \quad (4.1)$$

e, a fim de validar esse modelo, comparou-se sua resposta com a resposta do modelo real. Essa validação foi feita em uma sequência de degraus diferente daquela utilizada na obtenção do

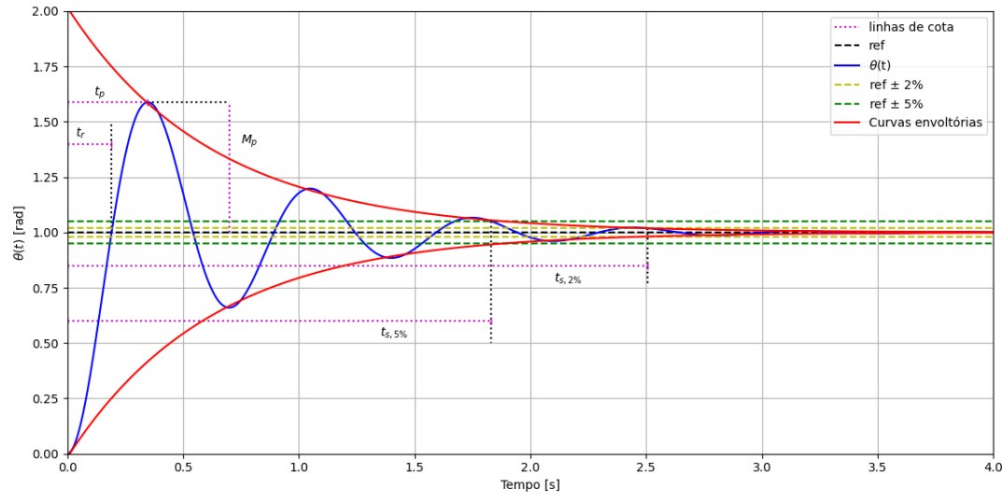


Figura 6 – Parâmetros do transitório do sistema.

modelo (conforme apresentado em 3.2) e a resposta temporal do sistema a essas perturbações pode ser vista na Figura 7.

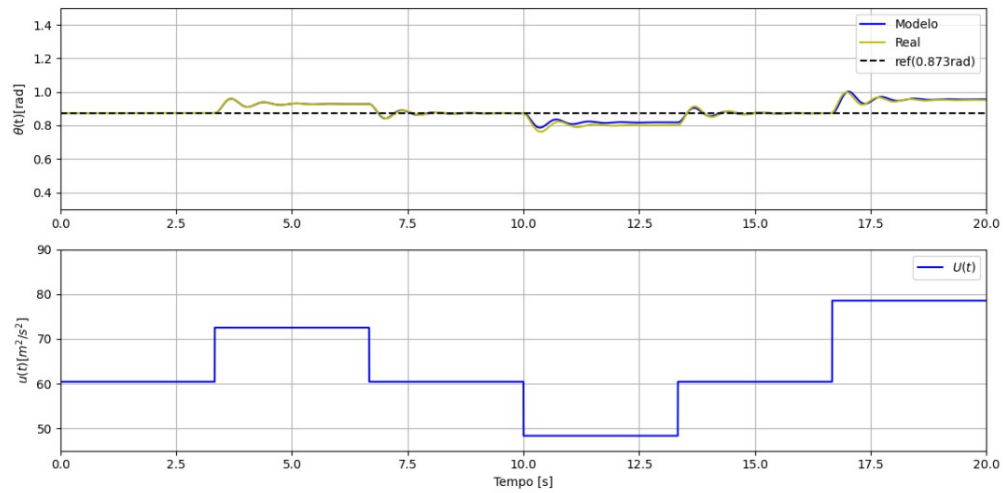


Figura 7 – Resposta temporal do modelo obtido e do sistema real.

Portanto, infere-se da validação apresentada na Figura 7 que, a resposta do modelo obtido ao degrau de $120\%u_1$ é quase correspondente a resposta do sistema real. Isso acontece porque o modelo foi obtido a partir da resposta a esse degrau. Além disso, nota-se que quanto maior a amplitude do degrau, maior é a divergência entre a resposta do modelo obtido e a resposta do sistema real. Outrossim, a resposta temporal do modelo obtido, quando aplicado

um degrau positivo, descreve melhor a dinâmica do sistema quando comparada a resposta a um degrau negativo.

Por último, analisa-se os valores identificados das raízes do polinômio característico do modelo, expostas na Equação 3.9: $-1,6015 + j9,0275$ e $-1,6015 - j9,0275$. Elas são complexas conjugadas e se situam no semiplano esquerdo do plano s . Sendo assim, de acordo com a definição apresentada em 2.2, configuram polos de um sistema subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória.

Agora, para as análises que se seguem, adota-se o ponto de operação $\theta = 38^\circ$, desenvolvido na Seção 3.3. A resposta temporal do sistema a entrada aos degraus de $1,2 u_2$ e $0,8u_2$ pode ser visualizada na Figura 8.

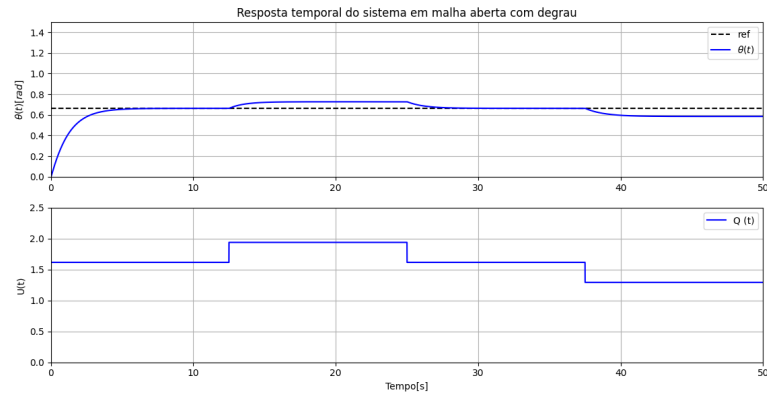


Figura 8 – Resposta temporal do sistema em malha aberta com degrau.

E, a fim de encontrar os 3 parâmetros necessários para obter o modelo de 1^a ordem para o sistema, analisa-se a Figura 9 pelo método da resposta ao degrau com 3 parâmetros (2.1), conforme apresentado na Figura 1.

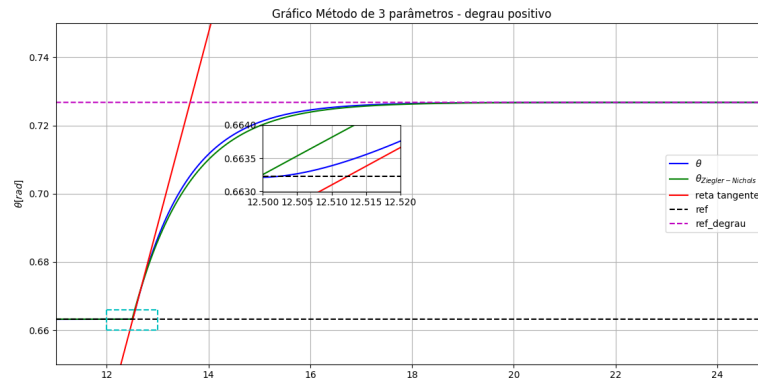


Figura 9 – Método da resposta ao degrau com 3 parâmetros para o degrau positivo $1,2u_2$.

Vê-se, em verde, a curva de resposta ao degrau positivo de $1,2u_2$ e, em vermelho, a reta tangente a ela. A linha tracejada em ciano denota a área na qual foi aplicado um zoom Gráfico para melhor visualização do atraso do sistema. Assim, identificou-se que o atraso para esse degrau é de aproximadamente $\theta_{pos} = 0,011s$. Além disso, tem-se que $\Delta y = 0,0635\text{rads}$ $\Delta u = 0,3232m^2/s^2$, que, através da Equação (2.2), resulta em um ganho estático $K_{pos} = 0,1966$. Ademais, para determinar τ , observa-se que o ponto de interseção da reta tangente com a referência da resposta em degrau ocorre em $t = 13,64s$ e, pelo seguimento AB da Figura 1, $\tau_{pos} = 1,1266$.

À vista disto, de acordo com o desenvolvimento apresentado na Seção 3.3, substituindo os valores de θ_{pos} , τ_{pos} e k_{pos} na Equação (2.1), obteve-se, através do método da resposta ao degrau com 3 parâmetros, um modelo de primeira ordem para o sistema, dado por:

$$G_2(s) = \frac{0,2438}{1,3780s + 1} \quad (4.2)$$

Sendo assim, obedecendo a Equação (2.1), a Equação (4.2) pode ser reescrita, adicionando o tempo morto, de 0,15 segundos, da seguinte forma:

$$G_{2atraso}(s) = \frac{0,2438e^{0,15s}}{1,3780s + 1} \quad (4.3)$$

A aproximação por padé é comumente usada para aproximar o atraso do sistema por uma função linear, como visto na Seção 2.3. Realizando aproximações de ordem 1, 3, 5 e 9 para o sistema representado pela Equação (4.2), considerando outra vez um atraso de 0,15 segundos, obteve-se os modelos Gráficos apresentados na Figura 10:

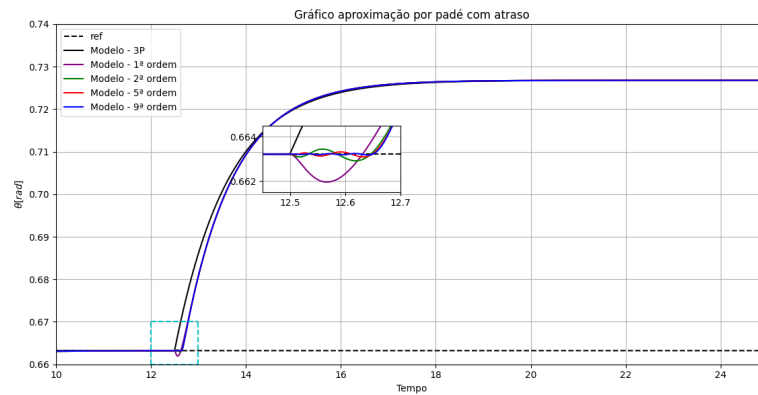


Figura 10 – Aproximação de Padé para o degrau positivo de $1,2u_2$ com atraso de 0,15s.

A partir da análise do Gráfico 10, pode-se afirmar que o modelo que obteve uma melhor resposta foi o de ordem 9, representado pela cor azul, aproximando mais do atraso desejado

de 0,15 segundos e apresentando uma menor oscilação no começo do degrau. Enquanto que o pior modelo foi o de 1º ordem, retratado pela cor roxa, não atingindo o atraso desejado e exibindo grande oscilação na origem do degrau. Dessa forma, pode-se afirmar que quanto maior a ordem utilizada na aproximação de padé, melhor será o resultado final.

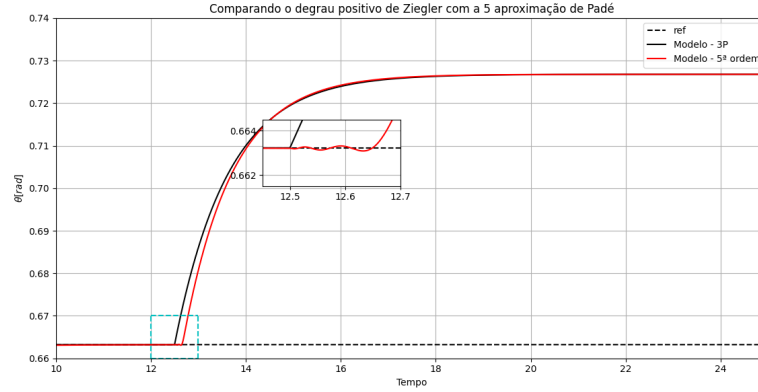


Figura 11 – Comparação entre modelo de primeira ordem de 3 parâmetros com modelo de atraso de 0,15 segundos

É possível observar pela análise gráfica da Figura 11, que a curva em preto representa a resposta encontrada através do método de três parâmetros, enquanto que a curva vermelha simboliza a aproximação de padé de 5 ordem para um atraso de 0,15. Analisando melhor o zoom Gráfico disponibilizado, é possível perceber que a curva vermelha cumpre seu papel, ao realizar o atraso de 0,15 segundos solicitado, apresentando pequenas oscilações durante este tempo. Analisando de maneira geral, pode-se observar que ambas atingiram valores de pico ao mesmo instante.

Com o objetivo de projetar controladores P e PI, utilizou-se dois métodos de curva de reação ao processo: Método de Ziegler-Nichols e o Método de CHR, trabalhados na Seção 2.1. Após a utilização dos métodos, obteve-se quatro controladores: dois controladores proporcionais e dois controladores proporcionais integrais, sendo eles apresentados nas Equações apresentadas em (4.4).

$$\begin{aligned}
 C_{P-ZN} &= \frac{38,2}{1} \\
 C_{PI-ZN} &= \frac{17,19s + 34,38}{0,5s} \\
 C_{P-CHR} &= \frac{11,46}{1} \\
 C_{PI-CHR} &= \frac{13,75s + 22,92}{0,6s}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Assim, para o sistema em estudo, *fan plate*, tem-se o diagrama de controle apresentado

na figura 12, em que ref é a entrada de referência, u é o sinal de controle necessário para atingir o ponto de operação desejado e Um é uma entrada que denota uma variação paramétrica da massa.

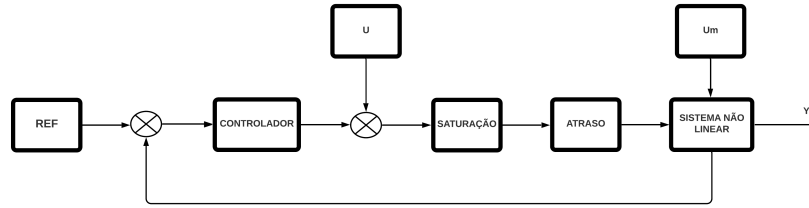


Figura 12 – Diagrama de controle

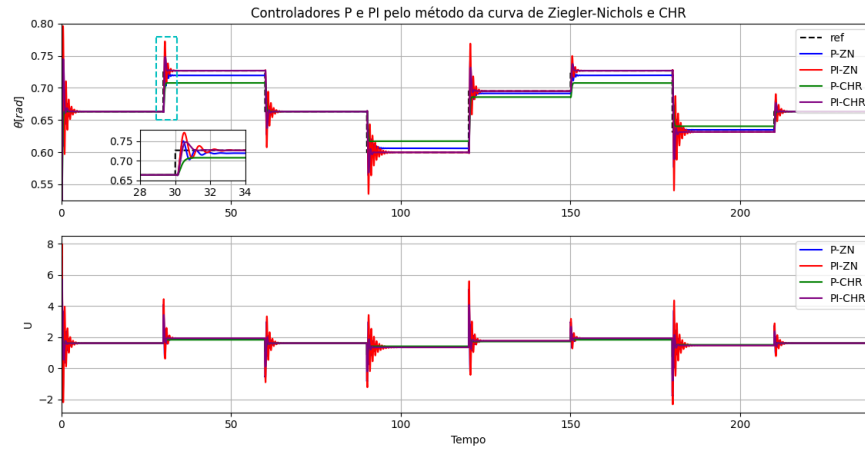


Figura 13 – Curvas dos controladores P e PI

Na Figura 13 é possível observar a presença de quatro curvas distintas que representam a resposta do sistema não linear em malha fechada, cada uma referente a um tipo de controlador projetado. Vale destacar a superioridade dos controladores PI, para ambos os métodos, comparado ao controladores P, visto que eles acompanham de maneira mais satisfatória a referência do sistema. Analisando os controladores PI entre si, pode-se afirmar que o controlador projetado pelo método de CHR, apresenta um melhor desempenho qualitativo, visto que o mesmo possui um menor overshoot e uma menor oscilação. É possível observar ainda, no segundo subplot, que os controladores do método de Ziegler-Nichols, tanto P quanto PI, possuem sinais de entrada com valores mais altos que os controladores de CHR.

A Figura 14 é referente a rejeição a perturbação, momento em qual a massa é alterada para 120% de seu valor no intervalo de 60 a 160 segundos. Realizando a análise do Gráfico, pode-se afirmar que os controladores PI apresentaram, qualitativamente, um me-

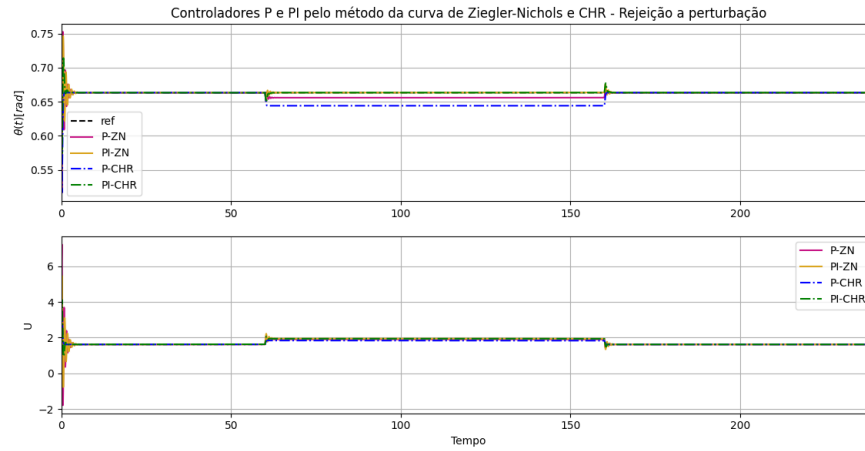


Figura 14 – Curvas rejeição a perturbação dos controladores P e PI

lhor desempenho quando comparado ao controladores P, uma vez que mesmo com a variação paramétrica aplicada, o sistema retorna para o ponto de operação.

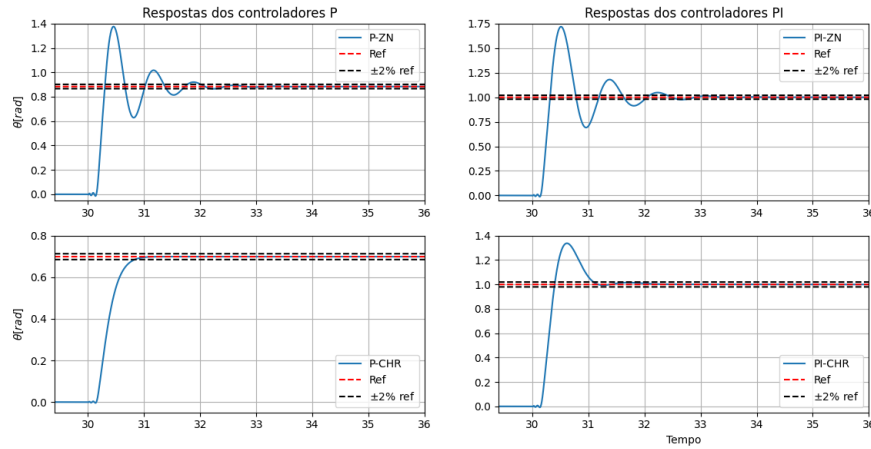


Figura 15 – Resposta dos controladores P e PI - primeiro degrau positivo

Realizando-se o estudo dos Gráficos da Figura 15 constatou-se que o controlador proporcional do método de CHR representa um sistemas criticamente amortecido, o que impossibilita a determinação dos parâmetros característicos da resposta transitória de sistemas subamortecidos de 2ª ordem, apresentados na Seção 2.2.

Já para o controlador proporcional de Ziegler Nichols, e para os controladores proporcionais-integrais, tanto do método de ZN quanto para o método de CHR, conseguiu-se obter os

parâmetros solicitados, os quais podem ser observados na Equação (4.5).

$$\begin{aligned}
 t_{pP-ZN} &= 0,45 & t_{rP-ZN} &= 0,30 & t_{sP-ZN} &= 2,27 & M_{P_{P-ZN}} &= 55,60\% \\
 t_{pPI-ZN} &= 0,51 & t_{rPI-ZN} &= 0,31 & t_{sPI-ZN} &= 2,74 & M_{P_{PI-ZN}} &= 71,90\% \\
 t_{pPI-CHR} &= 0,02 & t_{rPI-CHR} &= 0,40 & t_{sPI-CHR} &= 1,09 & M_{P_{PI-CHR}} &= 33,80\%
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Em que t_p é o tempo de pico, t_r é o tempo de subida, t_s é o tempo de acomodação e M_p é o sobressinal máximo - dado pela relação (a/b) . A grande diferença entre os dois métodos de curva é observado no valor de t_s , uma vez que o controlador do método de Ziegler-Nichols apresenta uma grande oscilação ao receber a entrada degrau.

Com o intuito de analisar a performance da malha fechada para cada um dos quatro controladores, utilizou-se os índices IAE, ITAE e RMSE. Os valores obtidos podem ser visualizados nas Tabelas 4 e 5.

Índice de Desempenho	Controlador P Ziegler Nichols	Controlador PI Ziegler Nichols	Controlador P CHR	Controlador PI CHR
IAE	1,1076	0,5045	2,3825	0,2731
ITAE	1,5892	0,0617	4,1500	0,0138
RMSE	0,0091	0,0102	0,0142	0,0081

Tabela 4 – Índices de desempenho para as curvas da Figura 13

Índice de Desempenho	Controlador P Ziegler Nichols	Controlador PI Ziegler Nichols	Controlador P CHR	Controlador PI CHR
IAE	0,08262	0,0904	1,9744	0,0619
ITAE	1,3070	0,0198	3,3703	0,0145
RMSE	0,0069	0,0039	0,0133	0,0032

Tabela 5 – Índices de desempenho para as curvas da Figura 14

Através da análise das Tabelas 4 e 5, pode-se afirmar que os controladores PI projetados apresentaram, na maioria dos casos, um melhor resultados, tanto para a resposta do sistema em malha fechada quanto para a rejeição a perturbação, comparados aos controladores P. Comparando apenas os controladores PI, pode-se afirmar que o projetado pelo método de Ziegler-Nichols apresentou uma melhor eficiência, uma vez que seu índice de desempenho foi o menor.

5 Conclusão

Conclui-se, após finalizar o trabalho, que estudando o sistema *fan plate*, é possível aproximar a dinâmica do sistema para um modelo de 2ª ordem utilizando a modelagem caixa preta. Obtido tal modelo, tornou-se viável validá-lo e implementar a sua resposta em função do tempo, bem como a dinâmica real do sistema, a fim de compará-las. Assim, inferiu-se que quanto maior a amplitude do degrau, maior é a divergência entre a resposta do modelo obtido e a resposta do sistema real. Outrossim, a resposta temporal do modelo de 2ª ordem obtido, quando aplicado um degrau positivo, descreve melhor a dinâmica do sistema quando comparada a resposta a um degrau negativo. Nesse primeiro momento, comprovou-se, por meio da avaliação das raízes do polinômio característico do modelo, que, com a massa total da placa sendo 0,100Kg, o sistema apresentou um comportamento subamortecido.

Ademais, utilizando o método da resposta ao degrau de 3 parâmetros, obteve-se uma aproximação para um modelo de 1ª ordem que, em seguida, foi alterado, acrescentando ao mesmo um atraso de 0,15 segundos. Aqui, notou-se que, após alterar a massa total da placa para 0,005Kg, o sistema mostrou caráter superamortecido. Além disso, obtidas as aproximações de Padé de ordem 1, 3, 5 e 9, comparou-se as respostas obtidas pelas funções e afirma-se que o modelo de ordem 9 obteve uma resposta melhor, ficando mais próximo do atraso desejado de 0,15 segundos e apresentando uma menor oscilação no começo do degrau.

Outrossim, utilizando o método da curva de reação do processo de Ziegler-Nichols e o Método de CHR, projetou-se controladores do tipo P e PI. E, a fim de avaliar o comportamento dos projetores a rejeição a perturbação, alterou-se a massa da placa para um determinado intervalo de tempo, concluindo que o controladores PI apresentaram a melhor resposta a perturbação. Por fim, após avaliar a performance dos controladores usando os índices de desempenho IAE, ITAE e RMSE pode-se dizer que o controlador PI projetado pelo método de Ziegler Nichols apresentou o melhor resultado em todos os índices calculados, tanto para a resposta do sistema em malha fechada quanto para a rejeição a perturbação.

Referências

- AGUIRRE, L. *Introdução à identificação de sistemas*. 2. ed. [S.l.]: UFMG, 2007. Citado na página 1.
- ASTROM, K.; HAGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2. ed. [S.l.]: PID, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- COLORADO, U. of. *Padé approximation*. 2021. Disponível em: <https://www.colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/pade_2.pdf>. Citado na página 5.
- GARCIA, C. *Controle de Processos Industriais - Estratégias Convencionais*. 1. ed. [S.l.]: Busher, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 1, 3 e 4.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 7 e 10.
- STEWART, J. *Calculus: early transcendentals*. 7. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2013. Citado na página 9.
- ZHENG, L.; ZHANG, X. *Modeling and Analysis of Modern Fluid Problems*. 1. ed. [S.l.]: Elsevier, 2017. Citado na página 5.