

# Modelagem Caixa Branca

Prof. Lucas S. Oliveira

Disciplina: Laboratório de Análise de Sistemas Lineares

November 6, 2021

# Organização do Documento

Objetivos

Modelagem Escoamento de Fluido

- Identificar a entrada e saída do sistema.
- Analisar os fenômenos físicos relacionados ao processo.
- Obter um modelo matemático que descreva a dinâmica do sistema.
- Apresentar e justificar as hipóteses assumidas durante a modelagem.
- Definir a região de validade do modelo.

# Modelagem Escoamento de Fluido

Exemplo 2.12 Livro do DORF.

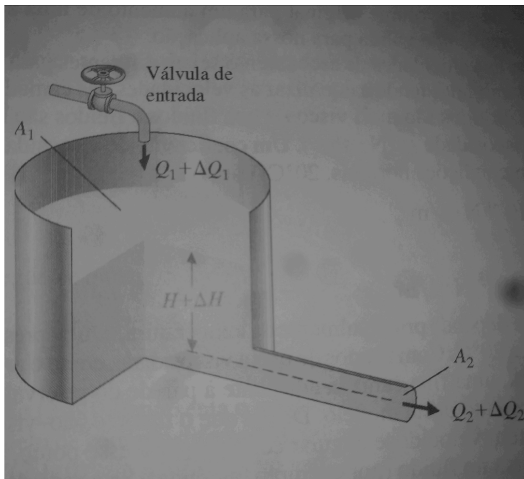


Figure 1: Diagrama esquemático do tanque de escoamento de fluido.

# Identificação das Variáveis

- Altura da coluna de líquido:  $H$
- Vazão de entrada:  $Q_1$
- Vazão de saída:  $Q_2$

Da dinâmica do processo, têm-se:

$$\Delta H = 0$$

quando  $Q_1 = Q_2$ .

# Hipóteses Iniciais

1. O fluido é incompressível.
2. O fluido é não viscoso.

# Princípio de Conservação da Massa

$$m = \rho V \quad (1)$$

em que:  $m$  é a massa de fluido no reservatório,  $\rho$  a massa específica ou densidade e  $V$  o volume de fluido armazenado no reservatório.

$$V = A_1 H \quad (2)$$

em que  $A_1$  é a área da seção transversal do tanque e  $H$  a altura da coluna de fluido. Ao substituir (2) em (1), têm-se

$$m = \rho A_1 H \quad (3)$$

# Resposta Temporal

Ao derivar (3) em relação ao tempo, obtêm-se:

$$\dot{m} = \rho A_1 \dot{H} \quad (4)$$

Note que  $\dot{\rho} = 0$  devido a hipótese do fluido ser incompressível.



# Regime Permanente

$$\Delta H = 0$$

Isso implica, que  $\dot{m} = 0$ , o que resulta em

$$\dot{m} = Q_1 - Q_2 \quad (5)$$

Sendo  $Q_2 = \rho A_2 v_2$ , em  $A_2$  é área de saída do tanque e  $v_2$  é a velocidade de saída do fluido do tanque. Portanto, (5) pode ser reescrita como:

$$\dot{m} = Q_1 - \rho A_2 v_2 \quad (6)$$

# Dependência de $v_2$ por $H$

A partir da equação de Bernoulli, têm-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + P_1 + \rho gH = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + P_2 \quad (7)$$

em que:  $v_1$  é velocidade do fluido no reservatório,  $P_1$  e  $P_2$  são as pressões na entrada e saída do tanque,  $g$  é a aceleração gravitacional.

A partir de uma análise detalhada do sistema pode-se assumir que:

1.  $A_2 \ll A_1$ , portanto a velocidade do fluido no reservatório é desprezível.
2.  $P_1 = P_2$ , a vazão de entrada e saída possuem o mesmo valor, pressão atmosférica.

$$v_2 = \sqrt{2gH} \quad (8)$$

# Obtenção da Equação Diferencial

Ao substituir (8) em (6) obtêm-se:

$$\dot{m} = Q_1 - \rho A_2 \sqrt{2gH} \quad (9)$$

Ao igualar (4) com (9), têm-se a equação diferencial da dinâmica do fluido, dado por:

$$\dot{H} = \frac{Q_1 - \rho A_2 \sqrt{2gH}}{\rho A_1} \quad (10)$$