

# Trabalho Final de Laboratório e Teoria de Análise de Sistemas Lineares

Luiza Gomes de Castro e Sá\* Thiago José da Silva\*\*

\* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
CEFET-MG, Campus Divinópolis, MG,  
(e-mail:luizacastro18@outlook.com).

\*\* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais,  
CEFET-MG, Campus Divinópolis, MG,  
(e-mail:thiagojsilva07@gmail.com).

---

**Abstract:** This report seeks to analyze the model of an Independent Unmanned Submersible Vehicle and its response characteristic in both open and closed loop system under predetermined conditions input, output, disturbance and noise. For this purpose, the dominance of the poles and zeros of the model was analyzed and it was seen that the third-order transfer function could be rewritten as a second-order function. In addition, the PI controller, the steady-state error and the disturbance rejection were determined, thus, it was concluded that the system can reject the disturbances suffered. Finally, the range of values of  $k_p$  and  $k_i$  was found that guarantees the smallest error.

**Resumo:** O presente relatório busca analisar o modelo de um Veículo Submersível Não Tripulado Independente e sua resposta característica tanto em malha aberta quanto malha fechada diante à condições pré determinadas de entrada, saída, perturbação e ruído. Com essa finalidade, analisou-se a dominância dos polos e zeros do modelo e viu-se que a função de transferência de terceira ordem pôde ser reescrita como uma função de segunda ordem. Ademais, determinou-se o controlador PI, o erro em regime permanente e a rejeição a perturbação, assim, concluiu-se que o sistema consegue rejeitar as perturbações sofridas. Por fim, encontrou-se a faixa de valores de  $k_p$  e  $k_i$  que garanta o menor erro.

**Keywords:** Independent Unmanned Submersible Vehicle; Open loop system; Closed loop system; PI controller; Disturbances; Steady state error.

**Palavras-chaves:** Veículo Submersível Não Tripulado Independente; Malha aberta; Malha fechada; Controlador PI; Perturbações; Erro em regime permanente.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Qualquer processo, representado pela função  $G(s)$ , está sujeito a mudanças de qualquer natureza que afetam um procedimento de controle. Em um sistema em malha aberta todas essas alterações resultam em modificações e inexactidão na saída. Um sistema malha fechada sente a modificação na saída e tenta corrigi-la (Dorf and Bishop (2009)).

Sendo assim, o trabalho em questão visa analisar o modelo de um Veículo Submersível Não Tripulado Independente(UFSS) bem como sua resposta característica tanto em malha aberta quanto malha fechada diante à condições pré determinadas de entrada, saída, perturbação e ruído. Durante o movimento desse modelo à frente a superfície de um leme de profundidade no veículo é defletida por um valor escolhido. Essa deflexão faz com que o veículo gire em torno do eixo de arfagem. A arfagem do veículo cria uma força vertical que faz com que o veículo afunde ou suba (Nise (2012)).

Neste sentido, esse relatório é composto por Introdução, que expõe o assunto e os objetivos almejados; Revisão dos

métodos, que discorre a respeito dos métodos utilizados; Sistema UFSS, que apresenta o desenvolvimento, discussões e resultados da prática; E, por fim, Conclusão, a qual sintetiza os desfechos do trabalho.

## 2. REVISÃO DOS MÉTODOS

### 2.1 Sistemas de Segunda Ordem

A forma padrão do sistema de segunda ordem é dada por:

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

em que  $K$  é o ganho estático do sistema,  $\omega_n$  é a frequência natural do sistema e  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento.

O comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros  $\zeta$  e  $\omega_n$ . Se  $\zeta > 1$ , o sistema é chamado superamortecido. Por outro lado, se  $0 < \zeta < 1$ , os polos de malha fechada são complexos conjugados e situam-se no semiplano esquerdo do plano  $s$  e o sistema é chamado de subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória (Ogata (2011)). E, na especificação das características das respostas transitórias

de um sistema de controle a uma entrada em degrau unitário, é comum especificar o seguinte:

- (1) Tempo de subida,  $t_r$ : Para sistemas de segunda ordem subamortecidos, o tempo de subida de 0% a 100% é o normalmente utilizado.

$$t_r = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2)$$

- (2) Tempo de pico,  $t_p$ : é o tempo para que a resposta atinja o primeiro pico de sobressinal. Dado por:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3)$$

- (3) Máximo sobressinal (ou apenas sobressinal),  $M_p$ : é o valor máximo de pico da curva de resposta, medido a partir da unidade.

$$M_p = 100e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (4)$$

- (4) Tempo de acomodação,  $t_s$ : é o tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (geralmente de 2% ou 5%) em torno do valor final, aí permanecendo indefinidamente. Dessa forma, o  $t_s$  correspondente à essa faixa de tolerância pode ser medido por em termos da constante de tempo  $T = 1/\zeta\omega_n$ . Para  $0 < \zeta < 0,9$ .

Assim, por conveniência, definimos  $t_s$  como:

$$t_s = 4T = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (\text{critério de 2\%}) \quad (5)$$

## 2.2 Análise de Erro de Rastreamento

A dinâmica da função do erro de rastreamento,  $E(s)$ , é definida a partir da análise do diagrama de blocos, e é dada por (Dorf and Bishop (2009)):

$$E(s) = R(s) - Y(s). \quad (6)$$

Que pode ser expressa, após algumas manipulações do diagrama de blocos, como:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s) + G(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} T_d(s). \quad (7)$$

Dessa forma, através do produto entre as funções do controlador e do sistema presente no denominador da Equação (7), tem-se a função **ganho de malha** Dorf and Bishop (2009):

$$L(s) = G_c(s)G(s). \quad (8)$$

Essa função tem papel fundamental na análise de sistemas de controle, partindo dela, é possível estabelecer a **função sensibilidade**, dada por:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}. \quad (9)$$

Da mesma forma, pode-se definir a **função sensibilidade complementar**,  $C(s)$ :

$$C(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}. \quad (10)$$

Assim, com as Equações (9) e (10), e a presença de ruído de medição,  $N(s)$ , a Equação (7), pode ser reescrita como:

$$E(s) = S(s)R(s) - S(s)G(s)T_d(s) + C(s)N(s). \quad (11)$$

Analisando a Equação (7), verifica-se que, quando  $T_d(s) = 0$ , o erro de rastreamento tende a zero, uma vez que se tenha a seguinte relação  $G_c(s)G(s) \gg 1$ . mesmo levá-lo a instabilidade. Porém, uma maior magnitude de  $L(s)$  se traduz em menores variações no erro de rastreamento, isto é, uma menor sensibilidade da malha de controle a variações em  $G(s)$  (Dorf and Bishop (2009)).

## 3. SISTEMA UFSS

### 3.1 Descrição

Considera-se a função de transferência:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{-0,125(s + 0,435)}{(s + 1,23)(s^2 + 0,226s + 0,0169)}, \quad (12)$$

em que  $\theta(s)$  representa o ângulo de inclinação (pitch angle) de um veículo autônomo submersível (UFSS, do inglês Unmanned Free-Swimming Submersible Vehicle) e  $\delta_e(s)$  é a variação do ângulo de elevação para a superfície.

### 3.2 Resultados e discussões

Para questionar a dominância dos polos no sistema e a interferência dos zeros no mesmo, deve-se ter em mente o conceito de ambos. Os polos de uma função de transferência são os valores de  $s$ , que fazem com que a função de transferência se torne infinita, ou quaisquer raízes do denominador da função de transferência que são comuns às raízes do numerador. Os zeros de uma função de transferência são os valores de  $s$ , que fazem com que a função de transferência se torne zero, ou quaisquer raízes do numerador da função de transferência que são comuns às raízes do denominador (Nise (2012)).

Diante do exposto, pode-se afirmar que a Equação (12), que dita o sistema, apresenta 3 polos, sendo um polo real e dois polos conjugados, todos localizados a esquerda do eixo  $j\omega$ . Os valores destes polos são:

$$p_1 = -1,23, \quad (13)$$

$$p_{2,3} = -0,113 \pm 0,0643j.$$

Observando ainda a Equação (12), infere-se que a mesma apresenta um zero, cujo o valor é  $z = -0,435$ .

Com os valores obtidos dos polos e zeros do sistema, pode-se realizar algumas análises sobre os polos dominantes e o zero. Observa-se que o polo  $-1,23$  encontra-se mais distante do eixo imaginário que os outros polos, sendo assim, este influência menos na resposta do sistema, caso este esteja a uma distância da ordem de  $10x$ , sua interferência é quase nula na resposta. Desse modo, os polos conjugados são considerados dominantes, uma vez que influenciam diretamente na funcionalidade do sistema. Já o zero do sistema possivelmente interfere na resposta, uma vez que o mesmo está próximo aos polos dominantes.

Observa-se que a Equação (12), apresenta em seu denominador um polinômio de segunda ordem, que quando equacionado à equação característica da Equação (1) permite determinar os valores do coeficiente de amortecimento  $\zeta$  e a frequência natural  $\omega_n$ .

$$s^2 + 0,226s + 0,0169 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \quad (14)$$

Sendo assim, pode-se determinar os valores de  $\omega_n$  e  $\zeta$ :

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= 0,0169, \\ \omega_n &= 0,13,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}2\zeta\omega_n &= 0,226, \\ \zeta &= 0,8692.\end{aligned}\quad (16)$$

Utilizando os valores obtidos de  $\omega_n$  e  $\zeta$  é possível estimar o sobressinal máximo ( $M_p$ ), o instante de pico ( $t_p$ ), o tempo de subida do sistema ( $t_r$ ) e o tempo de acomodação ( $t_s$ ).

- Sobressinal máximo (%): 0,399%,
- Tempo de pico: 48,87 s,
- Tempo de Subida: 40,87 s,
- Tempo de acomodação (2%): 35,39 s.

A fim de realizar uma comparação entre os valores dos parâmetros obtidos listados e os valores reais para a Equação (12), fez-se a simulação do sistema para uma entrada degrau unitário e negativo, para compensar o sinal negativo da função de transferência. A Imagem 1 representa a resposta temporal para o modelo de terceira ordem, e a partir da análise gráfica resultados para os parâmetros de segunda ordem podem ser obtidos.

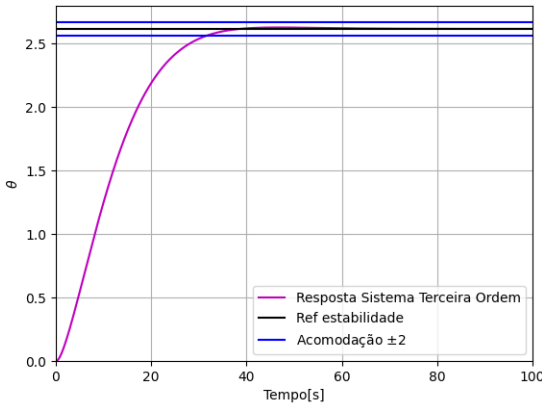


Figura 1. Resposta temporal do modelo de 3ª ordem

- Sobressinal máximo: 0,42%,
- Tempo de pico: 46,66s,
- Tempo de subida: 37,78s,
- Tempo de acomodação: 31,74s.

Observa-se que ocorreram discordância entre os valores obtidos algebricamente e os valores alcançados por simulação para os parâmetros. Tais discordâncias são em decorrência da interferência do polo e do zero no sistema, os quais haviam sido desconsiderados para o cálculo algébricos.

Agora, para que uma função de transferência de terceira ordem possa ser reescrita como uma função de segunda ordem, deve-se analisar o coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ ) e a frequência natural do sistema ( $\omega_n$ ). Sabe-se que para que essa reformulação seja possível, é necessário que  $|p_1| \gg |p_2|$ , em pelo menos 5 vezes.

Sendo assim, de acordo com (13), tem-se que  $p_1 = -1,23$ . Além disso, a parte real dos polos complexos conjugados do sistema equivale a  $-\omega_n\zeta = -0,1130$ . Dessa forma, vê-

se que  $|-1,23| \gg |-0,1130|$  e, assim, o polo  $p_1$  pode ser desprezado.

Ademais, nota-se a presença de um zero no sistema ( $z = 0,435$ ), para que o modelo de terceira ordem possa ser aproximado para uma função de segunda ordem, é preciso cancelar o zero com algum polo. Para realizar esta análise, faz-se uma expansão em frações parcial para a Equação (12) e, posteriormente, deve-se realizar a Transforma Inversa de Laplace. Após estes passos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= 2,616 + 0,0645e^{-1,23t} \\ &\quad - 4,39e^{-0,113t}\cos(0,0643t + 52,38).\end{aligned}\quad (17)$$

Observando a Equação (17) e analisando as amplitudes relativas entre o coeficiente do termo  $e^{-1,23t}$  e do termo do cosseno, verifica-se um cancelamento entre o polo em  $-1,23$  e o zero em  $-0,435$ .

Com as afirmativas acima, pode-se concluir que o modelo de terceira ordem, pode ser reduzido para o modelo de segunda ordem, exposto na Equação (1). Para determinar o novo ganho do sistema, deve-se considerar  $s = 0$  na Equação (12), sendo assim, o novo valor de K é  $-2,6158$ . Portanto, a equação aproximada de segunda ordem é escrita como:

$$G(s) = \frac{-0,0442}{s^2 + 0,226s + 0,0169}; \quad (18)$$

Utilizando uma entrada degrau, unitária e negativa (para compensar o sinal negativo das funções de transferência), plotou-se o gráfico gerado pelas Equações (12) e (18), o resultado pode ser observado na Figura 2.

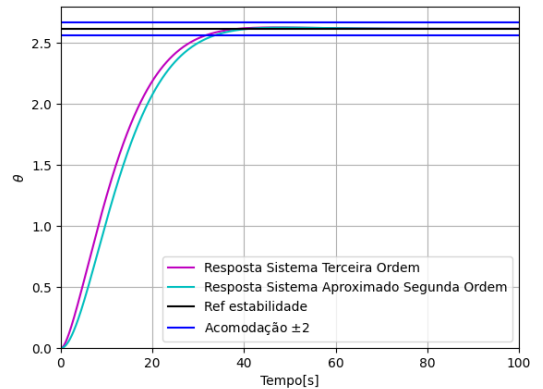


Figura 2. Resposta temporal do modelo de 2ª e 3ª ordem

Realizando a análise gráfica das curvas apresentadas na Figura 2, pode-se afirmar que ambos os modelos se estabilizam no mesmo ponto de operação. Observa-se também que o modelo de terceira ordem apresenta uma resposta mais rápida que o modelo de segunda ordem, no entanto, o modelo de segunda ordem apresenta um *overshoot* menor.

Para selecionar o melhor controlador para atuar junto ao sistema, deve-se analisar o local onde o veículo autônomo irá atuar. Por se tratar de um veículo submersível, o mesmo está propenso a sofrer diversas perturbações provocadas por ondas, por exemplo. Sendo assim, o melhor controlador a ser escolhido é o controlador PI - Proporcional-Integral, uma vez que este é capaz garantir o erro estacionário

nulo e também rejeitar a perturbação. O controlador PI é capaz de direcionar o veículo a um estado de menor erro, eliminando o *offset* que existe no erro, fazendo-o oscilar ao redor de 0.

Definido o controlador a ser utilizado, pode-se realizar a análise do sinal de erro, determinando os erros em regime permanente e rejeição à perturbação, com a finalidade de validar o que foi afirmado sobre o controlador PI. Desse modo, considerando a função de transferência do controlador como  $C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$  e a Equação (12) que representa o sistema, pode-se calcular o ganho em malha e a sensibilidade.

A equação do ganho de malha é obtida através da Equação (8):

$$L(s) = \frac{-0,125K_p s(s+0,435) - (-0,125K_i(s+0,435))}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)} \quad (19)$$

Já a equação da sensibilidade, obtida a partir da Equação (9) é:

$$S(s) = \frac{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169) - 1} \cdot \frac{1}{-(K_i + K_{ps})(0,125s+0,054375)} \quad (20)$$

Obtida a equação da sensibilidade, Equação (20), utilizando o Teorema do Valor Final para a Equação (11), pode-se calcular o erro em regime permanente. Considerando uma entrada em degrau unitário ( $R(s) = \frac{1}{s}$ ), e trabalhando em uma situação onde não há perturbação nem ruídos, ou seja  $T_d(s) = 0$  e  $N(s) = 0$ , tem-se:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{1}{s} = 0 \quad (21)$$

Para o estudo e análise da rejeição à perturbação, utiliza-se novamente a Equação (11), considerando porém  $R(s) = N(s) = 0$ . A perturbação será analisada para duas entradas distintas, a primeira sendo um impulso ( $T_d(s) = A$ ), e a segunda sendo um degrau ( $T_d(s) = \frac{A}{s}$ ), ambas com amplitude  $A$ . Sendo assim, o cálculo de rejeição a perturbação é dado por:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE_i(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G(s)T_d(s) \quad (22)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G(s)A = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sE_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G(s)T_d(s) \quad (23)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sS(s)G(s) \frac{A}{s} = 0$$

Os valores obtidos para o erro em regime permanente e a rejeição à perturbação, reafirmam que a melhor escolha para o processo é a adesão do controlador PI.

Este sistema em malha fechada pode ser descrito pelo diagrama em bloco na Figura 3.

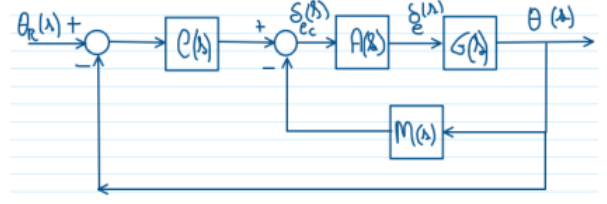


Figura 3. Topologia usada para o controle do ângulo de inclinação

É fornecido que o atuador do elevador de deflexão é modelado por  $A(s) = \frac{\delta e(s)}{\delta e_c(s)} = \frac{2}{s+2}$ , além disso, sabe-se que  $M(s) = \frac{-s}{0,01s+1}$  e  $C(s) = -K_1$ .

Para determinar a faixa de valores para  $K_1$  que mantenha o sistema estável faz-se necessário utilizar o critério de Routh-Hurwitz. Para tanto, deve-se, inicialmente, obter a função de transferência do sistema em malha fechada  $T(s)$ .

Para determinar a função de transferência da malha fechada é preciso determinar inicialmente a malha fechada interna, uma vez que o sistema é composto por duas malhas. A primeira malha é formada pelas funções  $A(s)$ ,  $G(s)$  e  $M(s)$ . Após obtido o resultado da primeira malha, obtêm-se a malha fechada total do sistema, composta por  $C(s)$  e  $T_1(s)$  - Equação da malha fechada interna. Sendo assim a malha fechada do sistema pode ser expressa por:

$$T(s) = \frac{K_1(0,0025s^2 + 0,2510875s + 0,10875)}{0,01s^5 + 1,03456s^4 + 3,488s^3 + as^2 + bs + c} \quad (24)$$

em que  $a = 0,0025K_1 + 3,463$ ,  $b = 0,2510K_1 + 0,7198$  e  $c = 0,041574 + 0,10875K_1$ . Optou-se por demonstrar a equação desta forma, de maneira a simplificá-la.

Com a equação de transferência obtida, pode-se determinar a equação característica do sistema, e com ela montar a tabela de Routh-Hurwitz. Após a montagem, deve-se analisar a primeira coluna da tabela, de maneira que todos os seus elementos sejam maiores que 0.

Realizado tais passos, obteve-se para o sistema descrito a faixa de valores  $K_1$  que mantém o sistema estável, tal intervalo é dado por  $-0,3823 < K_1 < 25,9068$ . Para determinar o valor de  $K_1$  que resulta em um menor erro para o sistema, foi desenvolvido um código em Python que realiza uma série de iterações na função de transferência com valores iniciando em  $-0,38229$ , terminando em  $25,9068$  e com períodos de 0,1. Como resposta obtida pela simulação, obteve-se que o menor erro apresentado foi utilizando o valor  $K_1 = 25,81$ , cujo o erro é  $e = 0,01459$ .

Considerando, desta vez, a topologia da Figura 3, porém com  $M(s)$  nulo, observa-se que a malha interna deixa de ser realimentada. Sendo assim, o sistema passa a possuir apenas uma malha, composta por  $C(s)$ ,  $A(s)$  e  $G(s)$ , que pode ser determinada facilmente:

$$FT_{mf}(s) = \frac{K_1 \left( \frac{-2}{s+2} \frac{-0,125(s+0,435)}{(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)} \right)}{1 + K_1 \left( \frac{-2}{s+2} \frac{-0,125(s+0,435)}{(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)} \right)} \quad (25)$$

Para plotar o local geométrico das raízes, utiliza-se novamente a linguagem Python, unido à biblioteca *control* e à função *root\_locus*. Para tanto, esta função utiliza a equação de transferência em malha aberta do sistema, sendo assim faz-se necessário a obtenção da mesma, que pode ser dada por:

$$FT_{ma}(s) = K_1 \left( \frac{-2}{s+2} \frac{-0,125(s+0,435)}{(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)} \right). \quad (26)$$

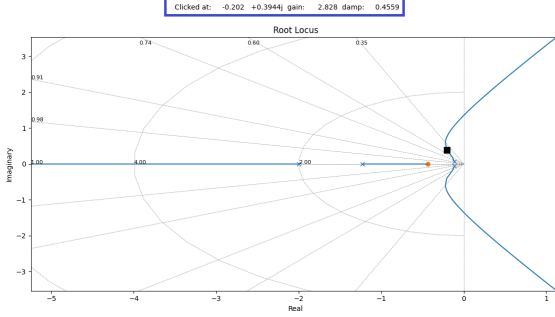


Figura 4. Lugar Geométrico das Raízes

A Figura 4 representa o Lugar Geométrico das Raízes obtido para a Equação (26).

Deseja-se obter um ganho que produza um sobressinal máximo de 20%, desse modo é preciso determinar o coeficiente de amortecimento que provoque tal sobressinal. Utilizando a Equação (4) obtêm-se que  $\zeta = 0,4559$ . Com este valor, e com o gráfico gerado em Python é possível determinar o ganho  $K_1 = 2,828$ . Além disso é possível obter os polos complexos que geram tal ganho,  $p_1 = -0,202 + 0,3944j$  e  $p_2 = -0,202 - 0,3944j$ .

Sabe-se que o módulo dos polos reais é igual a  $\omega_n \zeta$ , sendo assim:

$$\omega_n = 0,4392 \quad (27)$$

Com os valores de  $\omega_n$  e  $\zeta$  torna-se possível determinar os instantes de pico e de acomodação para malha fechada. Utilizando as Equações (3) e (5) obtêm-se:  $t_p = 8,05$  segundos e  $t_s = 19,80$  segundos.

Para o valor de  $K_1$  obtido, plotou-se um gráfico para realizar a análise em sua resposta temporal. Tal imagem por ser observada na Figura 5.

Através do código, determinou-se também o tempo de subida, tempo de acomodação e o sobressinal máximo para a curva da Figura 5. Desse modo, obteve-se  $t_p = 7,30$  segundos,  $t_s = 18,81$  segundos e um overshoot de 29%. Os valores gerados pela simulação se diferem dos valores calculados algebricamente devido a influência do zero presente no sistema.

Realizando uma outra análise para a Figura 3, considerando desta vez  $M(s) = K_1 s$ . Para esta análise, novamente o sistema passa a ser composto por duas malhas. Sendo assim, deve-se determinar a expressão para malha fechada interna,  $FT_{mf-int}$ , e após isso deve-se novamente fechar a malha dos componentes  $C(s)$  e  $FT_{mf-int}$ . Obteve-se a equação que representa a malha fechada do sistema todo:

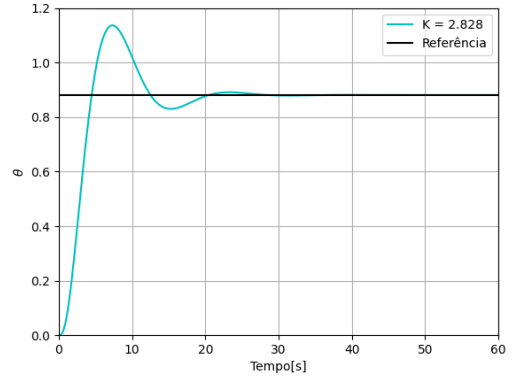


Figura 5. Resposta temporal do modelo para  $K_1 = 2,828$

$$FT_{mf-ext} = \frac{K_1 (0,25s+0,10875)}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574} \cdot \frac{-0,25s^2+0,14125s+0,10875}{K_1 \frac{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}{1} + 1}. \quad (28)$$

A fim de plotar o lugar geométrico das raízes, realiza-se a mesma análise feita para a situação anterior, necessitando obter a equação em malha aberta para o sistema geral.

$$FT = \frac{-0,25s^2+0,14125s+0,10875}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}. \quad (29)$$

Utilizando a linguagem Python, e as bibliotecas necessárias, plotou-se o LGR. Tal local pode ser observado na Figura 6.

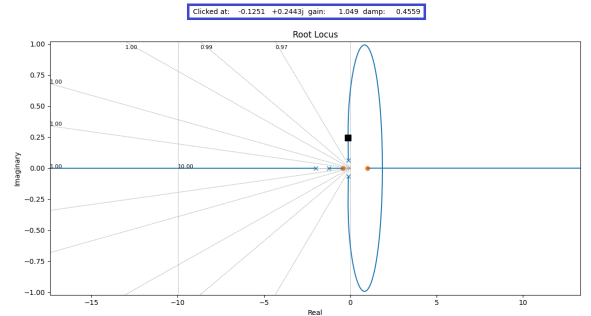


Figura 6. Lugar Geométrico das Raízes

Novamente, deseja-se obter um ganho que produza um sobressinal máximo de 20%, sendo assim, o coeficiente de amortecimento que provoca tal sobressinal é  $\zeta = 0,4559$ . Com este valor, e com o lugar geométrico das raízes é possível determinar o ganho  $K_1 = 1,049$ . Além disso é possível obter os polos complexos que geram tal ganho,  $p_1 = -0,1251 + 0,2443j$  e  $p_2 = -0,1251 - 0,2443j$ .

Para determinar a frequência natural, utiliza-se a definição que o módulo da parte real dos polos é igual a  $\zeta \omega_n$ . Sendo assim:

$$\omega_n = 0,2744 \quad (30)$$

Obtido os valores de  $\omega_n$  e  $\zeta$  torna-se possível determinar os instantes de pico e de acomodação para malha fechada. Utilizando as Equações (3) e (5) obtêm-se:  $t_p = 12,86$  segundos e  $t_s = 31,97$  segundos.

Para o valor de  $K_1$  obtido, plotou-se novamente um gráfico para realizar a análise em sua resposta temporal. Tal imagem por ser observada na Figura 7.

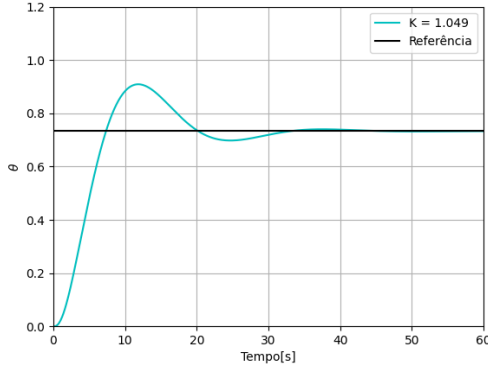


Figura 7. Resposta temporal do modelo para  $K_1 = 1.049$

Analisando a Imagem 7, determinou-se também o tempo de pico, tempo de acomodação e o sobressinal máximo para a curva. Desse modo, obteve-se  $t_p = 11,82$  segundos,  $t_s = 29,87$  segundos e um overshoot de 24%. Os valores gerados pela simulação se diferem dos valores calculados algebricamente devido a influência do zero presente no sistema.

Considerando, desta vez, um processo cujo a função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)(0,06s+1)}, \quad (31)$$

e que opera em malha fechada com um controlador PI em série com o processo.

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad (32)$$

Para determinar os valores restritivos de  $K_i$  e  $K_p$  faz-se necessário utilizar o critério de Routh-Hurwitz. Para tanto, inicialmente, necessita-se obter a equação de transferência geral para malha fechada  $T(s)$ .

$$T(s) = \frac{(K_p s + K_i)}{s(s+1)(0,2s+1)(0,06s+1) + (K_p s + K_i)}. \quad (33)$$

A equação característica da Equação (33) é:

$$E_c = 0,012s^4 + 0,272s^3 + 1,26s^2 + s(K_p + 1) + K_i. \quad (34)$$

Com a equação característica, é possível montar da Tabela 1: Realizando o critério de Routh-Hurwitz, delimita-se a

0,012	1,26	$K_i$
0,272	$K_p + 1$	0
$1,2158 - 0,0441K_p$	$K_i$	0
$\frac{(K_p+1)(1,2158-0,0441K_p)-0,272K_i}{1,2158-0,0441K_p}$	0	0
$K_i$	0	0

Tabela 1. Tabela de Rurth-Hurwitz

faixa de valores de  $K_i$  e  $K_p$  que garante o equilíbrio do sistema. Desse modo, pode se afirmar que para manter a

estabilidade,  $0 < K_i < -0,1621K_p^2 + 4,3077K_p + 4,4698$  e  $-1 < K_p < 27,57$ .

Com estes valores, torna-se possível determinar a região de  $K_p$  e  $K_i$  que mantém o sistema em estabilidade. Tal região pode ser observada na Figura 8.

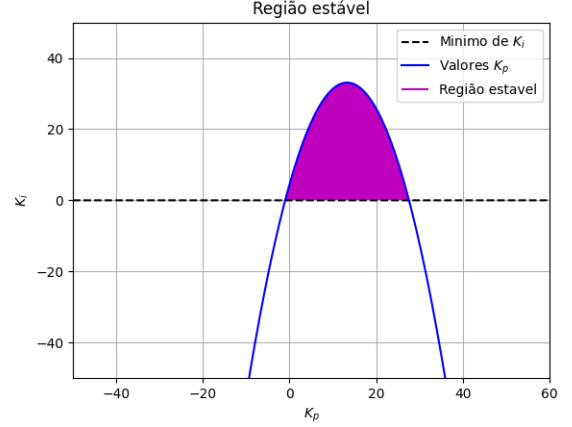


Figura 8. Região  $K_p \times K_i$  que garante estabilidade à malha

Foi desenvolvido um código em Python capaz de determinar o par  $(K_p, K_i)$  que fornece o menor índice de desempenho ITAE, realizando uma varredura dentro da região de estabilidade já definida. Para uma janela de tempo constante de 2s da resposta ao degrau foi encontrado  $ITAE_{menor} = 0,1916$  para  $k_p = 2,70$  e  $k_i = 2$ .

#### 4. CONCLUSÃO

Conclui-se, após discutir a dominância dos polos e zeros do modelo e avaliar condições matemáticas, que é possível reescrever a função de transferência de terceira ordem desse sistema como uma função de segunda ordem.

Ademais, conseguiu-se estabelecer que, uma vez que deseja-se que o sistema consiga rejeitar perturbações, o controlador PI apresenta um melhor desempenho comparado ao controlador P. Isso porque, analisou-se o comportamento do controlador PI com relação a erros em regime permanente e perturbações e, dessa forma, notou-se que, para cálculos em regime permanente, os erros foram nulos.

Ainda, pelo critério de Routh-Hurwitz, analisou-se a topologia de controle de inclinação para diferentes valores de  $M(s)$ , assim, obteve-se faixas de valores para  $K_1$  que mantém o sistema estável. Além disso, entendeu-se que pode-se encontrar uma faixa de valores de  $K_i$  e  $K_p$  que garante o menor erro. Dessa forma, através de um código em Python conseguiu-se determinar o par  $(K_p, K_i)$  que fornece o menor índice de desempenho ITAE, sendo  $ITAE_{menor} = 0,1916$  para  $k_p = 2,70$  e  $k_i = 2$ .

#### REFERÊNCIAS

- Dorf, R.C. and Bishop, R.H. (2009). *Sistemas de controle modernos*. LTC Editora, 8 edition.
- Nise, N.S. (2012). *Engenharia de sistema de controle*, 6a edição. Editora LTC, Rio de Janeiro.
- Ogata, K. (2011). *Engenharia de controle moderno*. Pearson, 5 edition.