Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Graduação em
Engenharia Mecatrônica

Memorial de cálculo
Trabalho Final ASL e LASL

Luiza Gomes de Castro e Sá
Thiago José da Silva

Professores: Valter Leite e Lucas Oliveira

Fevereiro 2022

1 Questão 1

Calculando os polos do sistema:

$$\begin{aligned} p_1 &= s + 1,23 = 0 \\ p_1 &= -1,23 \end{aligned} \tag{1}$$

$$p = s^2 + 0,226s + 0,0169 = 0$$
$$p_2 = -0,113 + 0,0643j \tag{2}$$
$$p_3 = -0,113 - 0,0643j \tag{3}$$

em que p_1 é o polo real da função de transferência e p_2 e p_3 são os polos imaginários.

Calculando o zero do sistema:

$$\begin{aligned} z &= -0,125(s + 0,435) \\ z &= -0,435 \end{aligned} \tag{4}$$

em que z representa o zero do sistema.

Encontrando os parâmetros do sistema:

- Sobressinal Máximo:

$$\begin{aligned} M_p &= exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \\ M_p &= exp\left(\frac{-0.8692\pi}{\sqrt{1-0.8692^2}}\right) \\ M_p &= 0.00399 \\ M_p(\%) &= 0.399\% \end{aligned} \tag{5}$$

- Tempo de pico:

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ t_p &= \frac{\pi}{0.13\sqrt{1-0.8692^2}} \\ t_p &= 48.87\ s \end{aligned} \tag{6}$$

- Tempo de subida:

$$\begin{aligned} t_r &= \frac{\pi - arccos(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\ t_r &= \frac{\pi - arccos(0.8692)}{0.13\sqrt{1-0.8692^2}} \\ t_r &= 40.87\ s \end{aligned} \tag{7}$$

- Tempo de acomodação, pelo método dos 2%:

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{4}{\zeta\omega_n} \\ t_s &= \frac{4}{0.8692 \cdot 0.13} \\ t_s &= 35.39\ s \end{aligned} \tag{8}$$

2 Questão 6

$$G(s) = \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} \tag{9}$$

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \tag{10}$$

O ganho de malha pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L(s) &= G(s)C(s) \\ L(s) &= \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \\ L(s) &= \frac{-0.125K_p s(s+0.435) - (-0.125K_i(s+0.435))}{s(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} \end{aligned} \tag{11}$$

Já para o cálculo da sensitividade:

$$\begin{aligned} S(s) &= \frac{1}{1+L(s)} \\ S(s) &= \frac{1}{1+\frac{-0,125K_p(s+0,435)-0,125K_i(s+0,435)}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)}} \\ S(s) &= \frac{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)-(K_i+K_{ps})(0,125s+0,054375)} \end{aligned} \tag{12}$$

Considerando uma entrada em degrau unitário ($R(s) = \frac{1}{s}$), e trabalhando em uma situação onde não há perturbação nem ruídos, ou seja $T_d = 0$ e $N_s = 0$, tem-se:

$$\begin{gathered} \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = \\ = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)-(K_i+K_{ps})(0,125s+0,054375)} = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

Cálculo da rejeição para um impulso ($T_d(s) = A$), e considerando $R(s) = 0$ e $N(s) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} sE_i(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)G(s)T_d(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)G(s)A = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)-(K_i+K_{ps})(0,125s+0,054375)} \\ &\cdot \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} sA = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Cálculo da rejeição para uma entrada degrau ($T_d(s) = \frac{A}{s}$), e considerando $R(s) = 0$ e $N(s) = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 0} sE_d(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)G(s)T_d(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)G(s)\frac{A}{s} = \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)}{s(s+1,23)(s^2+0,226s+0,0169)-(K_i+K_{ps})(0,125s+0,054375)} \\ &\cdot \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} A = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

3 Questão 7

A função de transferência completa para a malha interna fechada é dada por:

$$T_1(s) = \frac{A(s)G(s)}{1 + A(s)G(s)M(s)} \tag{16}$$

Além disso, a função de transferência para malha fechada total do sistema é:

$$T(s) = \frac{C(s)T_1(s)}{1 + C(s)T_1(s)} \tag{17}$$

em que C(s) é a sensitividade complementar, A(s) é o atuador do elevador de deflexão, G(s) é a tem função de transferência do sistema e M(s) é a realimentação. Sendo assim, uma vez que essas funções são conhecidas:

$$G(s) = \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} \qquad A = \frac{2}{s+2} \qquad M = \frac{-s}{0,01s+1} \qquad C = -K_1 \tag{18}$$

é possível definir as equações $T_1(s)$ e $T(s)$ substituindo esses valores em 16 e 17. Assim:

$$\begin{aligned}
T_1(s) &= \frac{\frac{2}{s+2} \cdot \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}}{1 + \frac{2}{s+2}\frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}\frac{-s}{0{,}01s+1}} \qquad (19)\\
T_1(s) &= \frac{-(0,0025s^2 + 0,2510875s + 0,10875)}{0,01s^5 + 1,03456s^4 + 3,4880688s^3 + 3,46298547s^2 + 0,71971274s + 0,041574}\\
T(s) &= \frac{-K_1\left(\frac{-(0{,}0025s^2+0{,}2510875s+0{,}10875)}{0{,}01s^5+1{,}03456s^4+3{,}4880688s^3+3{,}46298547s^2+0{,}71971274s+0{,}041574}\right)}{1 + \left[-K_1\left(\frac{-(0{,}0025s^2+0{,}2510875s+0{,}10875)}{0{,}01s^5+1{,}03456s^4+3{,}4880688s^3+3{,}46298547s^2+0{,}71971274s+0{,}041574}\right)\right]}\\
T(s) &= \frac{K_1(0,0025s^2 + 0,2510875s + 0,10875)}{0,01s^5 + 1,03456s^4 + 3,488s^3 + (0,0025K_1 + 3,463)s^2 + (0,2510K_1 + 0,7198)s + (0,041574 + 0,10875K_1)}
\end{aligned}$$

Encontrada a Equação de transferência, T(s), determinou-se a sua Equação característica:

$$0,01s^5 + 1,03456s^4 + 3,488s^3 + (0,0025K_1 + 3,463)s^2 + (0,2510K_1 + 0,7198)s + (0,041574 + 0,10875K_1) \tag{20}$$

Com isso, é possível montar a tabela de Routh-Hurwitz:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1,03456 \cdot 3,48807 - (0,01(0,0025K_1 + 3,46298))}{1,03456} = 3,45459697310934 - 2,4164862356944 \cdot 10^-5K_1\\
b_2 &= \frac{1,03456(0,2510875K_1 + 0,71971274) - (0,01(0,10875K_1 + 0,41574))}{1,03456} = 0,250036328487473K_1 + 0,719310888004949\\
b_3 &= 0\\
c_1 &= \frac{b_1(0,0025K_1 + 3,46298547) - b_2(1,03456)}{b_1} = \frac{6,041215589236 10^{-8}K_1^2 + 0,250124774134453K_1 - 11,2190488502892}{2,416486235694410 \cdot 10^{-5}K_1 - 3,45459697310934}\\
c_2 &= \frac{b_1(0,10875K_1 + 0,41574) - b_3(1,03456)}{b_1} = 0,10875K_1 + 0,041574\\
c_3 &= 0\\
d_1 &= \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{c_1} = \frac{1,5168737192623 \cdot 10^{-8}K_1^3 + 0,0625221667981084K_1^2 - 1,32741062461715K_1 - 7,57382988705962}{6,041215589236 \cdot 10^{-8}K_1^2 + 0,250124774134453K_1 - 11,2190488502892}\\
d_2 &= \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1} = 0\\
d_3 &= 0\\
e_1 &= \frac{d_1c_2 - c_1d_2}{d_1} = 0,10875K_1 + 0,041574\\
e_2 &= 0\\
e_3 &= 0
\end{aligned}$$

s^5	0,01	3,48807	(0,2510875k+0,71971274)
s^4	1,0456	(0,0025l+3,46298547)	(0,10875K$_1 + 0,41574$
s^3	b_1	b_2	b_3
s^2	c_1	$0,10875K_1 + 0,041574$	0
s^1	d_1	0	0
s^0	$0,10875K_1 + 0,041574$	0	0

Tabela 1: Tabela de Routh-Hurwitz

Para garantir a estabilidade do sistema em malha fecha, todos os termos da primeira coluna devem ser maiores que 0, dessa forma:

$$\begin{cases} 3,45459697310934 - 2,4164862356944 \cdot 10^{-5} K_1 > 0 \\ \frac{6,041215589236 \cdot 10^{-8} K_1^2 + 0,250124774134453 K_1 - 11.2190488502892}{2,4164862356944 \cdot 10^{-5} K_1 - 3.45459697310934} > 0 \\ \frac{1,5168737192623 \cdot 10^{-8} K_1^3 + 0,0625221667981084 K_1^2 - 1,32741062461715 K_1 - 7,57382988705962}{6,041215589236 \cdot 10^{-8} K_1^2 + 0,250124774134453 K_1 - 11,2190488502892} > 0 \\ 0,10875 K_1 + 0,041574 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_1 < 1,4296 \cdot 10^5 \\ -4,1404 \cdot 10^6 < K_1 < 44,8533 \\ -4,6759 < K_1 < 25,9068 \\ K_1 > -0,3823 \end{cases}$$

Portanto, tem-se que, para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada, $-0,3823 < K_1 < 25{,}9068$.

Ademais, para determinar o valor de K_1 que resulta em um menor erro de posição para o sistema, foi desenvolvido um código em Python que realiza uma série de iterações na função de transferência com valores iniciando em $-0,38229$, terminando em $25,907$ e com períodos de 0,1. Como resposta obtida pela simulação, obteve-se que o menor erro apresentado foi utilizando o valor $K_1 = 25,89$, cujo o erro é $e = 0,01455$.

4 Questão 8

Nessa questão considera-se a mesma topologia da questão anterior porém, agora, M(s)=0. Dessa forma, a malha interna deixa de ser realimentada e, portanto, o sistema passa a ter apenas uma malha. Para obter a função de transferência dessa malha faz-se:

$$FT_{mf}(s) = \frac{C(s)A(s)G(s)}{1 + C(s)A(s)G(s)} \tag{21}$$

em que C(s) é a sensitividade complementar, A(s) é o atuador do elevador de deflexão, G(s) é a tem função de transferência do sistema. Essas funções, novamente, são conhecidas:

$$G(s) = \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} \qquad A = \frac{2}{s+2} \qquad M = 0 \qquad C = -K_1 \tag{22}$$

Substituindo-as em (21):

$$FT_{mf}(s) = \frac{-K_1 \frac{2}{s+2} \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}}{1 + \left(-K_1 \frac{2}{s+2} \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}\right)} = \frac{K_1 \left(-\frac{2}{s+2} \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}\right)}{1 + K_1 \left(\frac{2}{s+2} \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}\right)} \tag{23}$$

Para plotar o local geométrico das raízes, utiliza-se a equação de transferência em malha aberta do sistema, que corresponde ao numerador da função (23). Sendo assim:

$$FT_{ma}(s) = K1 \left(\frac{-2}{s+2} \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}\right) \tag{24}$$

É possível encontrar o valor do coeficiente de amortecimento (ζ) a partir do sobressinal de 20%:

$$
\begin{aligned}
M_p &= exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \\
\ln 0,2 &= \ln\left[exp\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\right] \\
-1,609437912^2 &= \left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 \\
2,590290394 &= \left(\frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2}\right) \\
2,590290394(1-\zeta^2) &= \zeta^2\pi^2 \\
\frac{2,590290394 - 2,590290394\zeta^2}{\pi^2} &= \zeta^2 \\
0,262451288 &= \zeta^2 + 0,262451288\zeta^2 \\
\zeta^2 &= \frac{0,262451288}{1,262451288} \\
\zeta &= \sqrt{0,207890231} \\
\zeta &= 0,4559
\end{aligned} \tag{25}
$$

E, para encontrar o valor de ω_n, tem-se:

$$
\begin{aligned}
|0,202| &= 0,4559\omega_n \\
\omega_n &= \frac{|0,202|}{0,4559} \\
\omega_n &= 0,4431
\end{aligned} \tag{26}
$$

5 Questão 9

Dessa vez, M(s)=$K_1 s$. Sendo assim, há realimentação e, portanto, duas malhas. Para determinar a função de transferência da malha interna fechada tem-se:

$$FT_{mf-int} = \frac{A(s)G(s)}{1 + A(s)G(s)M(s)} \tag{27}$$

E, a função de transferência da malha fechada do sistema todo é dada por:

$$FT_{mf-ext} = \frac{C(s)FT_{mf-int}}{1 + C(s)FT_{mf-int}} \tag{28}$$

em que C(s) é a sensitividade complementar, A(s) é o atuador do elevador de deflexão, G(s) é a tem função de transferência do sistema. Essas funções, novamente, são conhecidas:

$$G(s) = \frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)} \qquad A = \frac{2}{s+2} \qquad M = K_1 s \qquad C = -K_1 \tag{29}$$

Substituindo esses valores em (27) e (28) encontra-se:

$$
\begin{aligned}
FT_{mf-int} &= \frac{\frac{2}{s+2}\frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}}{1+\frac{2}{s+2}\frac{-0.125(s+0.435)}{(s+1.23)(s^2+0.226s+0.0169)}K_1 s} \\
FT_{mf-int} &= \frac{0,25s+0,10875}{2K_1 s(0,125s+0,054375)-(s+1,23)(s+2)(s^2+0,226s+0,0169)} \\
FT_{mf-ext} &= \frac{-K_1\frac{0,25s+0,10875}{2K_1 s(0,125s+0,054375)-(s+1,23)(s+2)(s^2+0,226s+0,0169)}}{1+\left(-K_1\frac{0,25s+0,10875}{2K_1 s(0,125s+0,054375)-(s+1,23)(s+2)(s^2+0,226s+0,0169)}\right)} \\
FT_{mf-ext} &= \frac{K_1(0,25s+0,10875)}{-0,25K_1 s^2+0,14125K_1 s+0,10875K_1+1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}
\end{aligned} \tag{30}
$$

Agora, dividindo o numerador e denominador por $1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574$:

$$FT_{mf-ext} = \frac{\frac{K_1(0,25s+0,10875)}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}}{\frac{-0,25K_1s^2+0,14125K_1s+0,10875K_1}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}+1} \tag{31}$$

Colocando K_1 em evidência tem-se que:

$$FT_{mf-ext} = \frac{\frac{K_1(0,25s+0,10875)}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}}{K_1\frac{-0,25s^2+0,14125s+0,10875}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574}+1} \tag{32}$$

Por fim, é possível plotar o lugar geométrico das raízes para o ganho K_1 através da equação de transferência em malha aberta do sistema, que corresponde ao numerador da função (32), assim:

$$FT = \frac{-0,25s^2+0,14125s+0,10875}{1,0s^4+3,456s^3+3,20688s^2+0,610547s+0,041574} \tag{33}$$

Agora, o valor de ω_n é dado por:

$$\begin{aligned}|0,202| &= 0,4559\omega_n\\ \omega_n &= \frac{|0,1251|}{0,4559}\\ \omega_n &= 0,2744\end{aligned} \tag{34}$$

6 Questão 10

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)} \tag{35}$$

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \tag{36}$$

Determinando a equação de transferência em malha fechada:

$$\begin{aligned}T(s) &= \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} \\ T(s) &= \frac{\frac{(K_p+\frac{K_i}{s})}{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)}}{1+\frac{(K_p+\frac{K_i}{s})}{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)}} \\ T(s) &= \frac{\frac{(K_p+\frac{K_i}{s})}{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)}}{\frac{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)+(K_p+\frac{K_i}{s})}{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)}} \\ T(s) &= \frac{(K_p+\frac{K_i}{s})}{(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)+(K_p+\frac{K_i}{s})} \\ T(s) &= \frac{(K_ps+K_i)}{s(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)+(K_ps+K_i)}\end{aligned} \tag{37}$$

A equação característica é dada por:

$$\begin{aligned}Eq_c &= s(s+1)(0.2s+1)(0.06s+1)+(K_ps+K_i) \\ Eq_c &= 0.012s^4+0.272s^3+1.26s^2+s+K_ps+K_i \\ Eq_c &= 0.012s^4+0.272s^3+1.26s^2+s(K_p+1)+K_i\end{aligned} \tag{38}$$

0.012	1.26	K_i
0.272	$K_p + 1$	0
1.2158 - 0.0441K_p	K_i	0
$\frac{(K_p+1)(1.2158-0.0441K_p)-0.272K_i}{1.2158-0.0441K_p}$	0	0
K_i	0	0

Tabela 2: Caption

Com a equação característica, monta-se a tabela de Routh Hurwitz:

Para garantir estabilidade, todos os termos da primeira coluna devem ser maiores que 0, portanto:

$$\begin{aligned} 1.2158 - 0.0441K_p &> 0 \\ 1.2158 &> 0.0441K_p \\ K_p &< 27.60 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \frac{(K_p+1)(1.2158-0.0441K_p)-0.272K_i}{1.2158-0.0441K_p} &> 0 \\ (K_p+1)(1.2158-0.0441K_p)-0.272K_i &> 0 \\ -0.0441K_p^2 + 1.1717K_p + 1.2158 - 0.272K_i &> 0 \\ -0.0441K_p^2 + 1.1717K_p + 1.2158 &> 0.272K_i \\ -0.1621K_p^2 + 4.3077K_p + 4.4698 &> K_i \end{aligned} \tag{40}$$

$$K_i > 0 \tag{41}$$

Raízes da equação de K_i em função de K_p:

$$\begin{aligned} K_p &> -1 \\ K_p &< 27.57 \end{aligned} \tag{42}$$