

Número I: 10

## Análise e Modelagem de Sistemas Dinâmicos - 2023/2

Nome: Thiago Felipe Neitzke Lahass

Data limite para entrega: 18/10/2023

A entrega deverá ser feita pelo Google Classroom

### Trabalho 2 - Sistemas no Espaço de Estados e Linearização

```
I = 10;           % Seu número I
init_t2(I);       % Define as variáveis dos modelos
datetime('now')
```

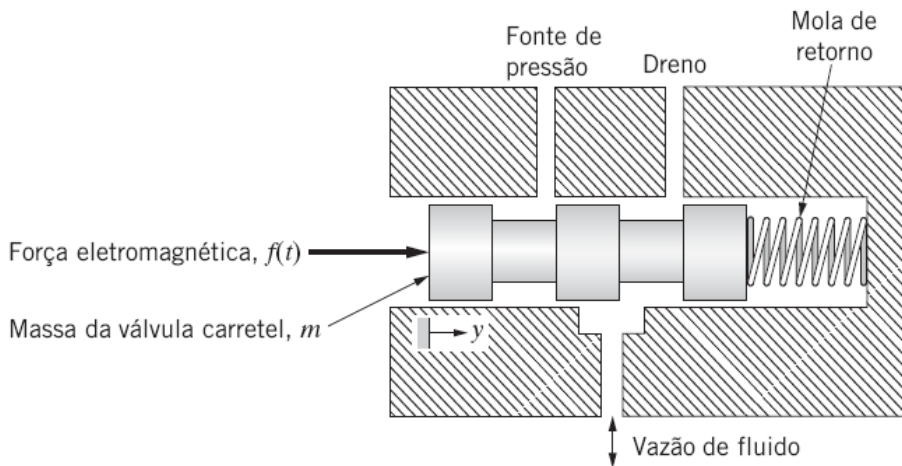
```
ans = datetime
      26-Oct-2023 22:38:25
```

#### Linearização do Modelo de Válvula Carretel (Spool Valve)

O vídeo abaixo mostra o funcionamento de uma válvula carretel de 4 vias.

```
% ShowVideo; % Este código pode ser comentado (o vídeo é apenas para ilustrar o
funcionamento da válvula)
```

A Figura abaixo mostra o esquemático de uma válvula carretel de três vias empregada para controlar a vazão em um sistema hidráulico, cujo funcionamento é semelhante à válvula carretel mostrada no vídeo acima.



O modelo matemático da válvula carretel consiste em uma única massa ( $m$  [kg]), uma força de atrito linear ( $b$  [N.s/m]) e uma força de mola linear ( $k$  [N/m]). A variável  $y(t)$  é de deslocamento da válvula carretel (em [m]) e  $f(t)$  é a força de um atuador eletromagnético que empurra a válvula (em [N]). Assume-se que não existe desequilíbrio na pressão do fluido hidráulico sobre a massa da válvula, e que as forças de fluxo

são desprezadas; assim, a força do atuador  $f(t)$  é a única aplicada sobre a massa da válvula. O sistema inicialmente está em repouso ( $\dot{y}_0 = y_0 = 0$ ) no instante  $t = 0$  [s].

**Funções úteis do Matlab:** tf, step, stepDataOptions, lsim, figure, plot, grid, yyaxis, title, xlabel, ylabel, sprintf, linspace.

**1.1 Usando o simulink, elabore um diagrama de blocos do modelo dinâmico da válvula (Equação Diferencial) e simule para uma força que varia de  $f_{\text{inicial}}$  [N] a  $f_{\text{final}}$  [N] no instante  $t_{\text{inicial}}$  [s].**

**OBS:**

**1) A saída do modelo deve ser um conector do tipo "Out1" disponível na biblioteca "Sinks".**

**2) Escolha um tempo de simulação de aproximadamente 0,1[s] de operação em regime permanente.**

Temos pelo enunciado que a única força aplicada sobre a massa da válvula é  $f(t)$ , então, Pela Segunda Lei de Newton, temos que:

$$m\ddot{y}(t) = f(t) - b\dot{y}(t) - k y(t) \quad (1).$$

Dado que as condições iniciais são nulas, aplicando Laplace obtemos:

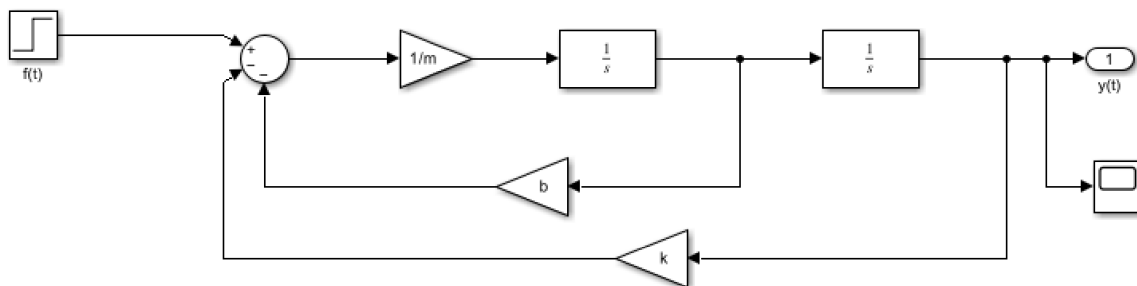
$$m.s^2 Y(s) = F(s) - b.s Y(s) - k Y(s) \quad (2).$$

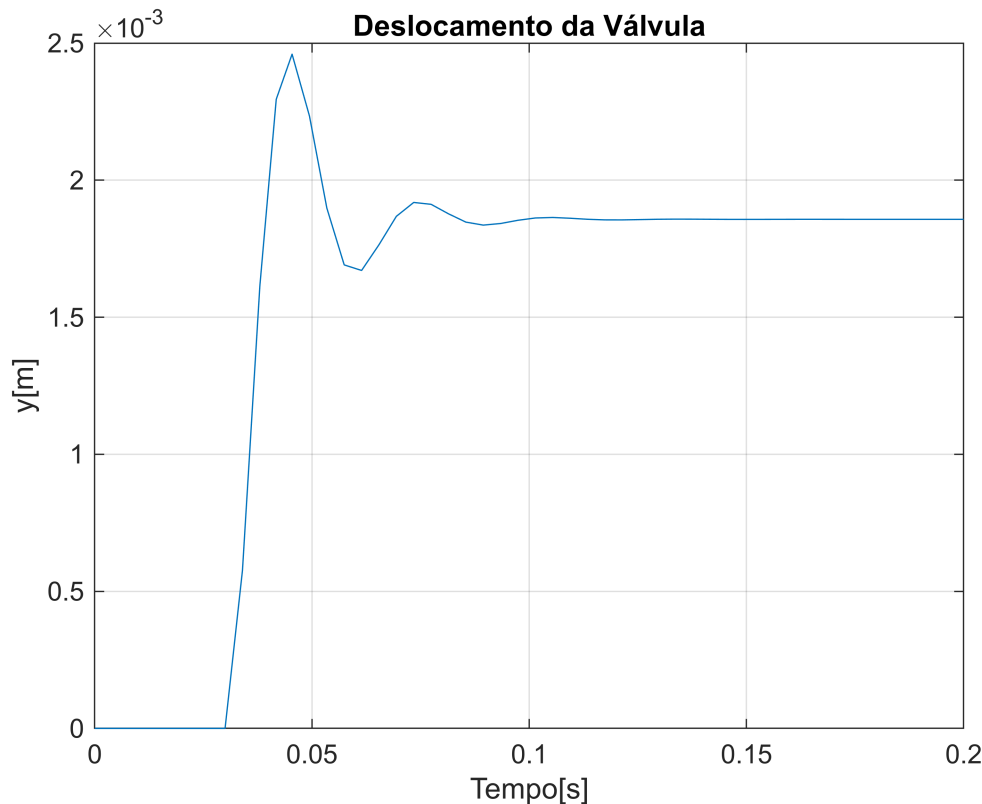
Logo, a função de transferência  $G_1(s)$  entre a entrada  $f(t)$  e a saída  $y(t)$ , é:

$$G_1(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{m.s^2 + b.s + k} \quad (3).$$

```
% modelo = 'Nome'; % Coloque o nome do arquivo feito no Simulink sem a extensão .slx
modelo1 = 'G1';

[y1,t1] = snapshotModel(modelo1);
```





**1.2 Considere que, por desgaste, uma força de atrito seco  $f_s(t)$  passe a compor o atrito da válvula juntamente com o atrito viscoso pré existente. A equação do atrito seco possui uma componente  $f_a(t)$  que atua em sentido contrário ao movimento, como mostrado abaixo.**

$$f_s(t) = f_a(t) \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{y}(t)|} [N]$$

**a) É possível simular (no simulink) o modelo com a não linearidade acima? Explique.**

Não, pois a não linearidade vista é uma não linearidade dura do tipo on-off, causando problemas na simulação por causa da descontinuidade na velocidade ( $\dot{y}(t)$ ) zero, e portanto não sendo possível realizar a simulação do sistema.

**b) Se a afirmativa anterior for verdadeira, simule, no simulink, para uma força que varia de  $f_{\text{inicial}} [N]$  a  $f_{\text{final}} [N]$  no instante  $t_{\text{inicial}} [s]$ . Senão, estabeleça uma forma de modelar a não linearidade e simule para as mesmas condições.**

**OBS:**

**1) A saída do modelo deve ser um conector do tipo "Out1" disponível na biblioteca "Sinks".**

**2) Escolha um tempo de simulação de aproximadamente 0,1[s] de operação em regime permanente.**

Como o sistema com a linearidade dura vista não pode ser simulado, é necessário estabelecer uma forma de modelá-lo para que a função de atrito seco se torne contínua, para que assim o sistema possa ser simulado. Podemos aproximar a força de atrito seco para:

$$f_s(t) = f_a(t) \left( \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{y}(t)^2 + \mu^2}} \right) [N], \text{ onde } \mu \text{ é um valor pequeno } (\mu \cong 10^{-4} [m/s]).$$

Portanto, a nova equação que rege o sistema passa a ser:

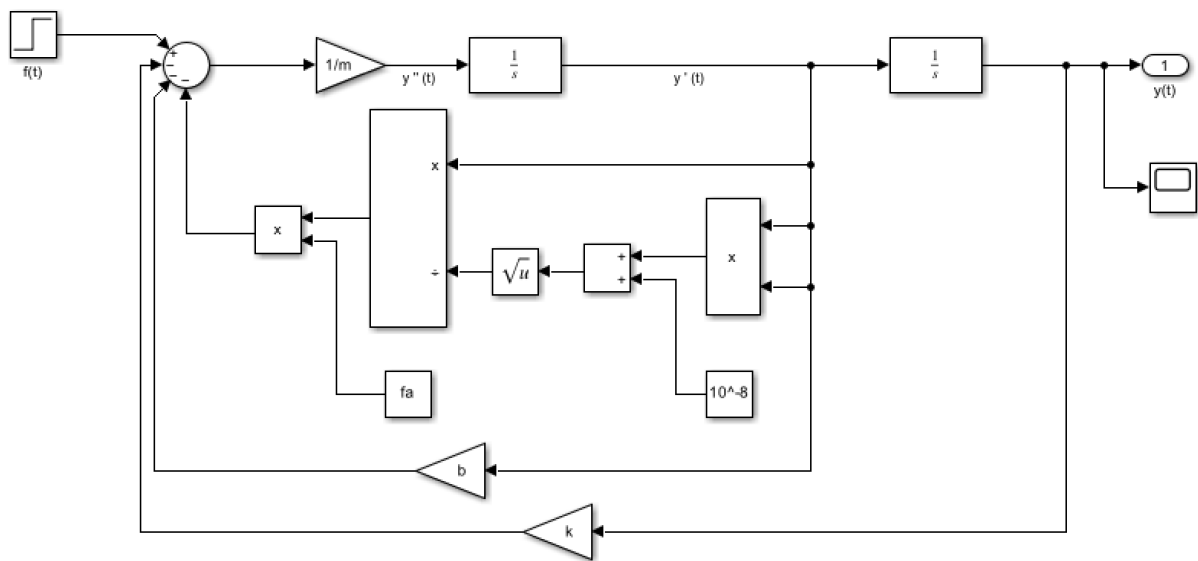
$$m\ddot{y}(t) = f(t) - b\dot{y}(t) - ky(t) - f_s(t),$$

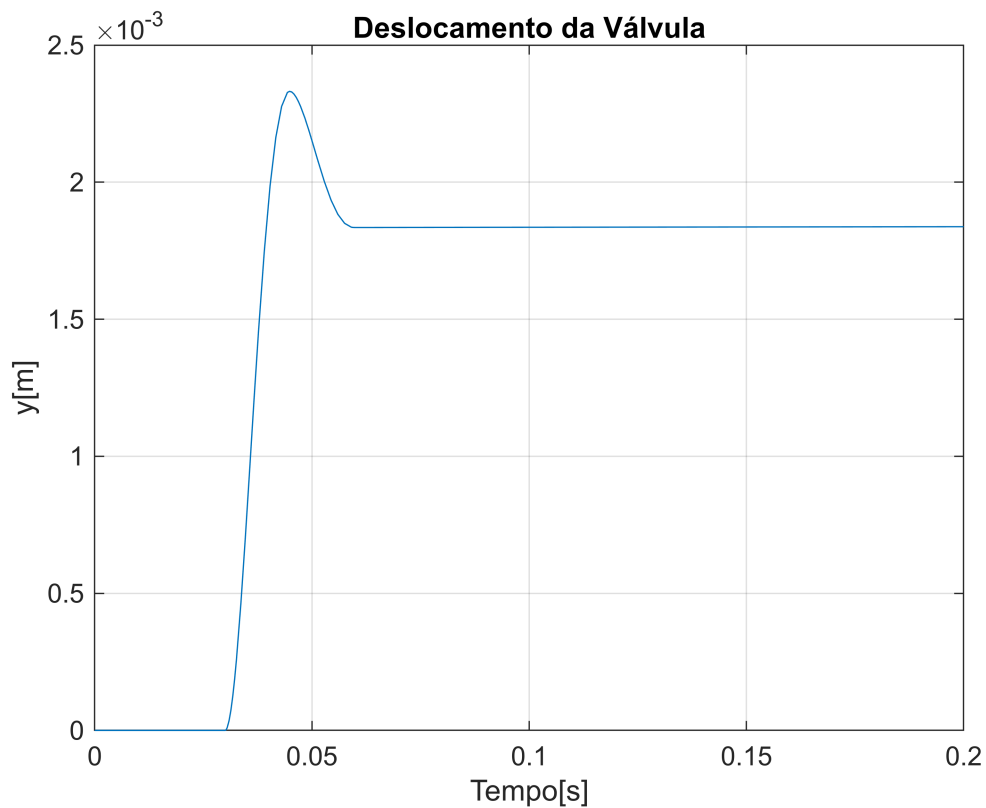
ou, substituindo:

$$m\ddot{y}(t) = f(t) - b\dot{y}(t) - ky(t) - f_a(t) \left( \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{y}(t)^2 + \mu^2}} \right).$$

Finalmente, basta montar o diagrama de blocos correspondente para adicionar o atrito seco ao sistema:

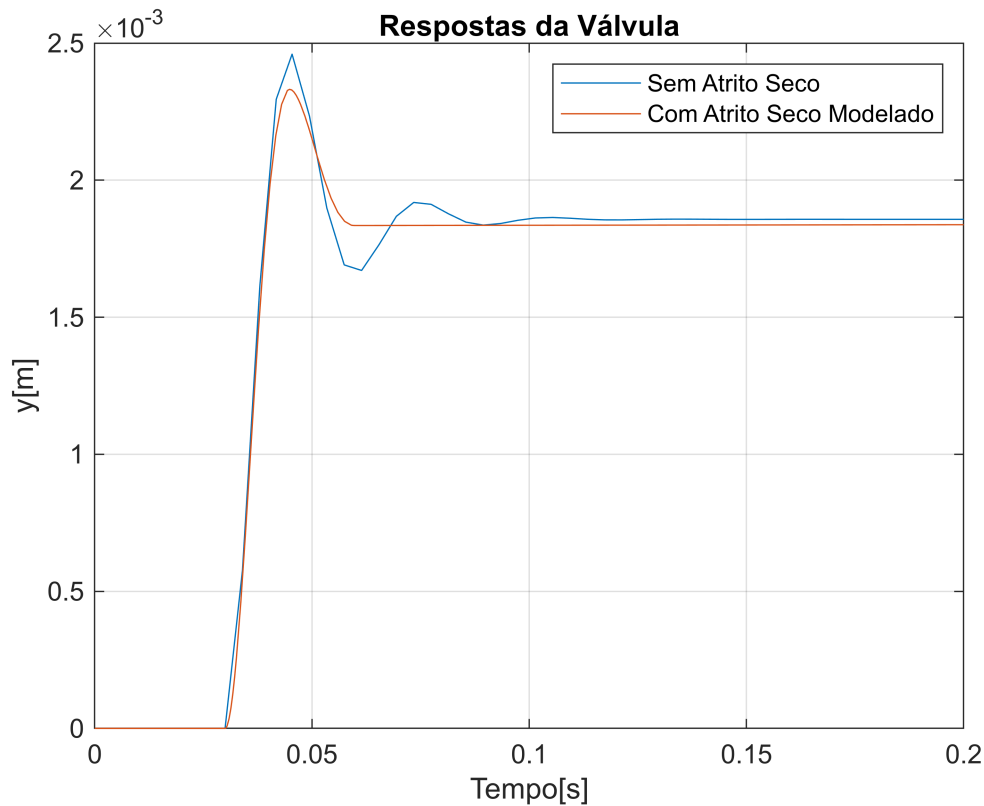
```
% modelo = 'Nome'; % Coloque o nome do arquivo feito no Simulink sem a extensão .slx
modelo2 = 'G2';
[y2,t2] = snapshotModel(modelo2);
```





**c) Compare a resposta da válvula sem o atrito seco com a resposta com o atrito seco linearizado.**

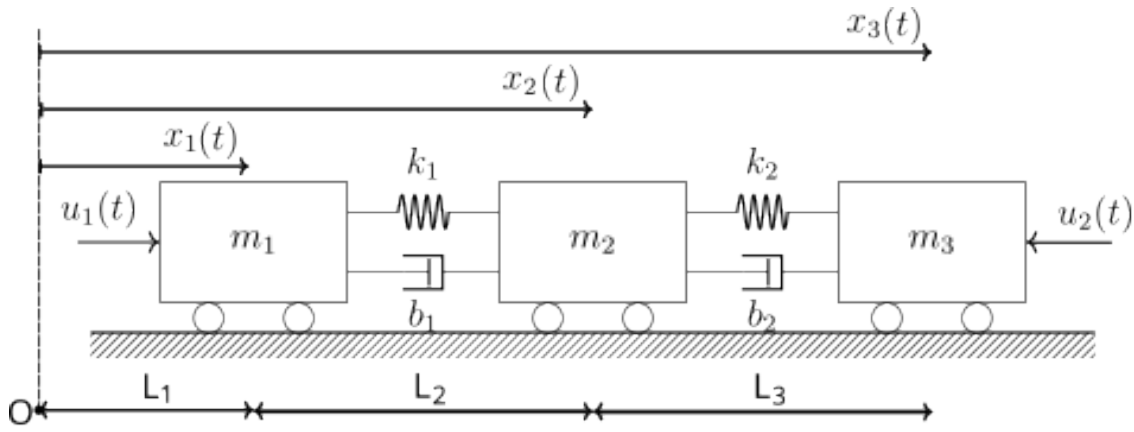
```
% Gráficos para comparação
figure;
plot(t1,y1)
hold on
plot(t2,y2)
grid on
legend('Sem Atrito Seco','Com Atrito Seco Modelado')
xlabel('Tempo[s]')
ylabel('y[m]')
title('Respostas da Válvula')
hold off
```



Vemos, portanto, que o atrito seco não é proporcional à velocidade da massa, mas sim uma componente de força constante cujo sinal depende da velocidade, logo se opõe ao movimento de forma diferente do atrito viscoso. É visto que a consideração do atrito seco faz com que o sistema oscile menos, permitindo que ele se estabilize mais rapidamente.

## Análise dos Estados de um Conjunto de Vagões Interligados

A Figura abaixo mostra um conjunto de três vagões interligados. A ligação entre eles pode ser modelada como um par mola-amortecedor. A motorização do comboio é feita no vagão de trás, gerando uma força  $u_1(t)$ , enquanto a frenagem é feita no vagão da frente, gerando uma força  $u_2(t)$ . A posição dos vagões é obtida a partir de um ponto de referência O, sendo que o vagão 1 inicia a uma distancia  $L_1$  de O. As distâncias  $L_2$  e  $L_3$  são tais que os conjuntos mola-amortecedor encontram-se em repouso.



**2.1 Considere as posições  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ , e as velocidades  $\dot{x}_1(t)$ ,  $\dot{x}_2(t)$ ,  $\dot{x}_3(t)$ , como estados. O modelo em espaço de estados será linear? Justifique sua resposta.**

Não, pois as condições iniciais ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ) deslocam o sistema da origem, tornando-o um sistema não linear, mas sim afim.

**2.2 Represente o modelo do sistema no Espaço de Estados (linearize o sistema, caso seja necessário), sendo  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  as entradas e, as posições de cada vagão, as saídas.**

Seja  $\delta x_1 = x_1(t) - L_1$ ,  $\delta x_2 = x_2(t) - L_1 - L_2$  e  $\delta x_3 = x_3(t) - L_1 - L_2 - L_3$ , supondo  $\delta x_1 > \delta x_2 > \delta x_3$ , temos:

Para o vagão de massa  $m_1$ :

$$m_1 \delta \ddot{x}_1 = u_1 - k_1(\delta x_1 - \delta x_2) - b_1(\delta \dot{x}_1 - \delta \dot{x}_2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = u_1 - k_1(x_1 - x_2 + L_2) - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (1).$$

Para o vagão de massa  $m_2$ :

$$m_2 \delta \ddot{x}_2 = k_1(\delta x_1 - \delta x_2) + b_1(\delta \dot{x}_1 - \delta \dot{x}_2) - k_2(\delta x_2 - \delta x_3) - b_2(\delta \dot{x}_2 - \delta \dot{x}_3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_1(x_1 - x_2 + L_2) + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_2(x_2 - x_3 + L_3) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \quad (2).$$

Finalmente, para o vagão de massa  $m_3$ :

$$m_3 \delta \ddot{x}_3 = -u_2 + k_2(\delta x_2 - \delta x_3) + b_2(\delta \dot{x}_2 - \delta \dot{x}_3)$$

$$m_3 \ddot{x}_3 = -u_2 + k_2(x_2 - x_3 + L_3) + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \quad (3).$$

Podemos definir os estados como:

$$q_1 = x_1$$

$$q_2 = \dot{x}_1$$

$$q_3 = x_2$$

$$q_4 = \dot{x}_2$$

$$q_5 = x_3$$

$$q_6 = \dot{x}_3$$

logo, obtemos:

$$\dot{q}_1 = \dot{x}_1 = q_2$$

$$\dot{q}_2 = \ddot{x}_1 = \frac{u_1}{m_1} - \frac{k_1}{m_1} q_1 - \frac{b_1}{m_1} q_2 + \frac{k_1}{m_1} q_3 + \frac{b_1}{m_1} q_4 - \frac{k_1}{m_1} L_2$$

$$\dot{q}_3 = \dot{x}_2 = q_4$$

$$\dot{q}_4 = \ddot{x}_2 = \frac{k_1}{m_2} q_1 + \frac{b_1}{m_2} q_2 - \frac{k_1 + k_2}{m_2} q_3 - \frac{b_1 + b_2}{m_2} q_4 + \frac{k_2}{m_2} q_5 + \frac{b_2}{m_2} q_6 + \frac{k_1}{m_2} L_2 - \frac{k_2}{m_2} L_3$$

$$\dot{q}_5 = \dot{x}_3 = q_6$$

$$\dot{q}_6 = \ddot{x}_3 = \frac{-u_2}{m_3} + \frac{k_2}{m_3} q_3 + \frac{b_2}{m_3} q_4 - \frac{k_2}{m_3} q_5 - \frac{b_2}{m_3} q_6 + \frac{k_2}{m_3} L_3$$

Dessa forma podemos escrever:

$$\dot{q} = f(q, u).$$

Além disso temos que as saídas são as posições dos vagões, ou seja:

$$y_1 = x_1 = L_1 + \delta x_1 = q_1;$$

$$y_2 = x_2 = L_1 + L_2 + \delta x_2 = q_3;$$

$$y_3 = x_3 = L_1 + L_2 + L_3 + \delta x_3 = q_5.$$

Dessa forma podemos escrever:

$$y = h(q, u).$$

Como o sistema é não linear, devemos lineariza-lo em torno do nosso ponto de interesse, que é,  $x_1^* = L_1$ ,

$x_2^* = L_1 + L_2$  e  $x_3^* = L_1 + L_2 + L_3$ . Nesse caso, como visto pelas equações acima:

$$y_1^* = x_1^* = L_1;$$

$$y_2^* = x_2^* = L_1 + L_2;$$



$$y_3^* = x_3^* = L_1 + L_2 + L_3.$$

Assim, como temos 3 saídas, 6 estados e 2 entradas, as matrizes  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  e  $[D]$  serão, 6 x 6, 6 x 2, 3 x 6 e 3 x 2, respectivamente.

Ainda, podemos escrever  $z = q - q^*$ ,  $v = u - u^*$  e  $w = y - y^*$ , e portanto obter as matrizes do sistema linearizado da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \nabla_q f(q^*, u^*);$$

$$\mathbf{B} = \nabla_u f(q^*, u^*);$$

$$\mathbf{C} = \nabla_q h(q^*, u^*);$$

$$\mathbf{D} = \nabla_u h(q^*, u^*).$$

Calculando, obtemos:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_3} & \frac{b_2}{m_3} & -\frac{k_2}{m_3} & -\frac{b_2}{m_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, o modelo em EE, linearizado, é:

$$\dot{z} = \mathbf{A}.z + \mathbf{B}.v, \text{ e}$$

$$w = \mathbf{C}.z + \mathbf{D}.v.$$

**% Modelo no Espaço de Estados**

```
A = [0      1      0      0      0      0;
      -k1/m1 -b1/m1 k1/m1 b1/m1 0      0;
      0      0      0      1      0      0;
      k1/m2 b1/m2 -(k1+k2)/m2 -(b1+b2)/m2 k2/m2 b2/m2;
      0      0      0      0      0      1;
      0      0      k2/m3 b2/m3 -k2/m3 -b2/m3];
```

```
B = [0      0;
      1/m1 0;
      0      0;
      0      0];
```

```

0      0;
0      -1/m3];

C = [1 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;
     0 0 0 0 1 0];

D = [0 0;
     0 0;
     0 0];

sys = ss(A,B,C,D);

```

### 2.3 Obtenha a resposta $y(t)$ do sistema para entradas tipo impulso unitário:

Como visto acima,  $w = y - y^*$ , ou seja:

$$w_1 = y_1 - y_1^* \Rightarrow y_1 = y_1^* + w_1;$$

$$w_2 = y_2 - y_2^* \Rightarrow y_2 = y_2^* + w_2;$$

$$w_3 = y_3 - y_3^* \Rightarrow y_3 = y_3^* + w_3.$$

(optei por plotar  $w$  pois a escala de  $y$  ficaria muito pequena para visualizar de forma nítida a dinâmica do sistema).

#### a) apenas para a entrada $u_1(t) = \delta(t)$ ;

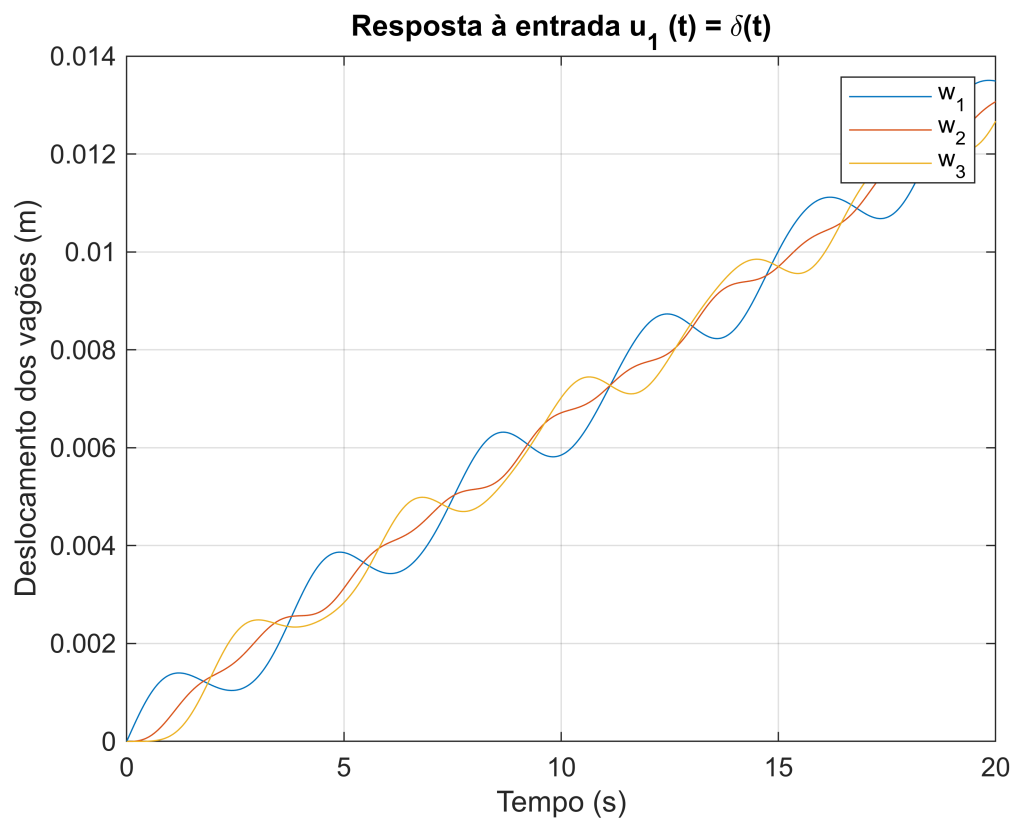
```

g = tf(sys);
G11 = g(1,1);
G21 = g(2,1);
G31 = g(3,1);
% função impulse para simular a resposta ao impulso
t = 0:0.01:20; % vetor de tempo para a simulação
[w11, t] = impulse(G11, t);
[w21, t] = impulse(G21, t);
[w31, t] = impulse(G31, t);

% Resposta ao impulso
figure;
plot(t,w11)
hold on
plot(t,w21)
plot(t,w31)
grid on
legend('w_1','w_2','w_3')
title('Resposta à entrada u_1 (t) = \delta(t)')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Deslocamento dos vagões (m)');

```

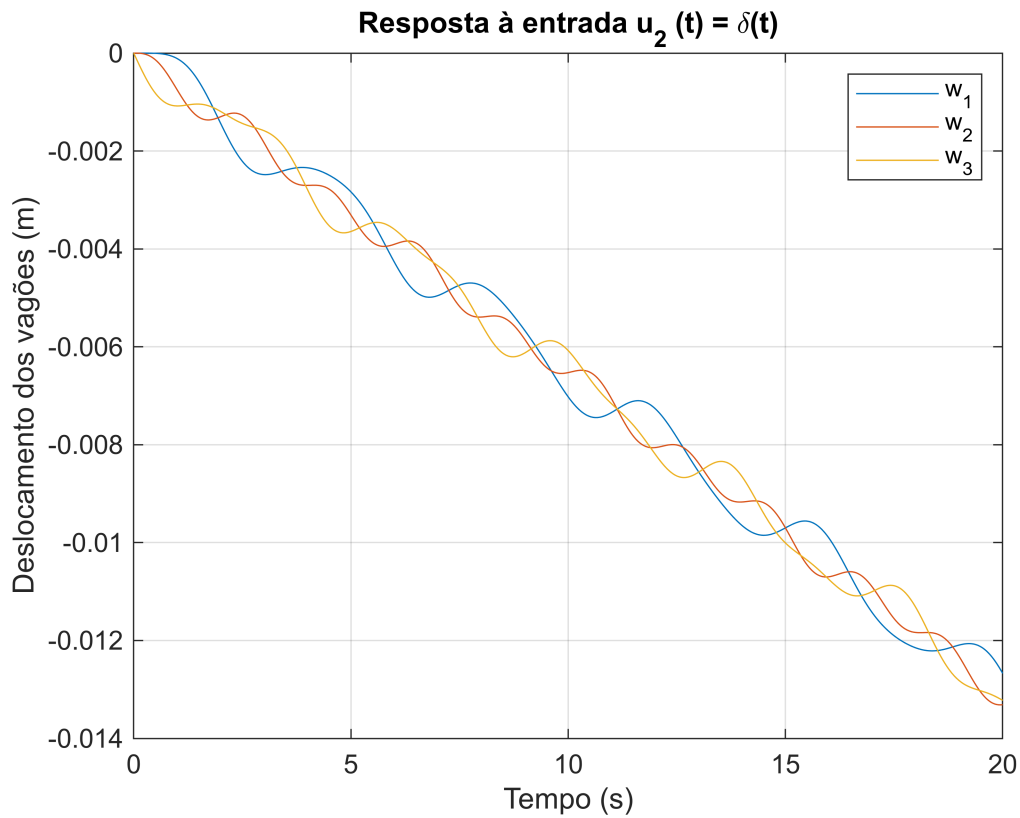
```
hold off;
```



**b) apenas para a entrada  $u_2(t) = \delta(t)$ ;**

```
G12 = g(1,2);
G22 = g(2,2);
G32 = g(3,2);
% função impulse para simular a resposta ao impulso
t = 0:0.01:20; % vetor de tempo para a simulação
[x12, t] = impulse(G12, t);
[x22, t] = impulse(G22, t);
[x32, t] = impulse(G32, t);

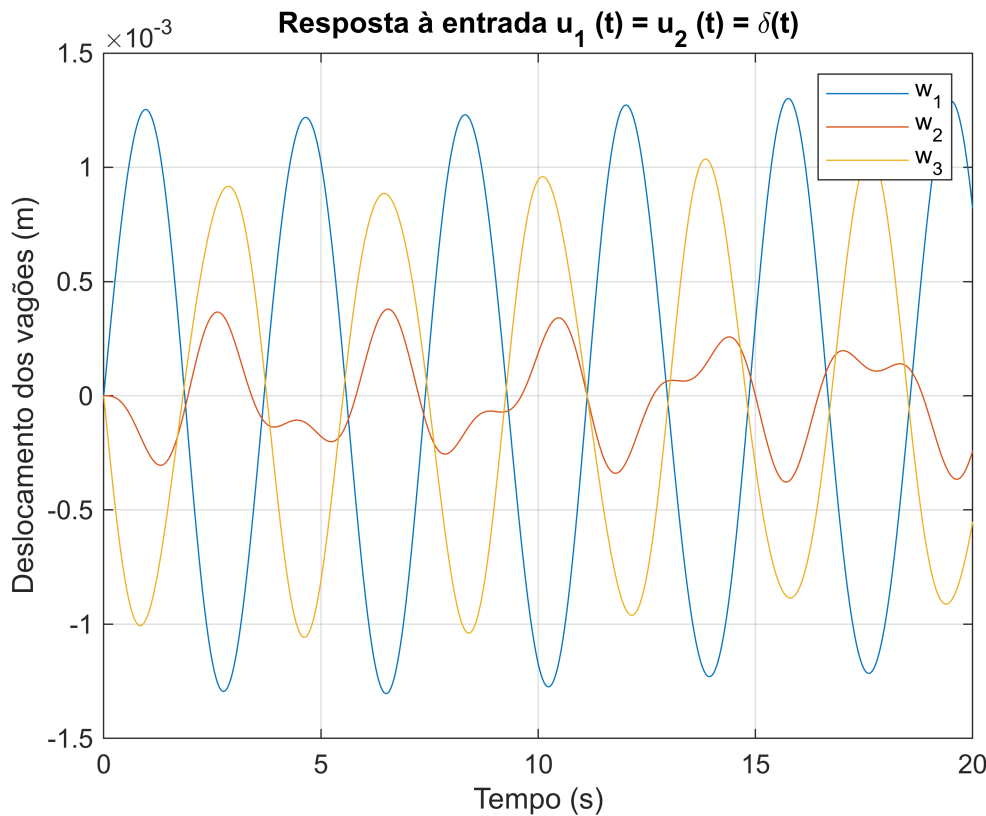
% Resposta ao impulso
figure;
plot(t,x12)
hold on
plot(t,x22)
plot(t,x32)
grid on
legend('w_1','w_2','w_3')
title('Resposta à entrada  $u_2(t) = \delta(t)$ ')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Deslocamento dos vagões (m)');
hold off;
```



**c) para entradas  $u_1(t) = u_2(t) = \delta(t)$ .**

```
% Resposta ao impulso
x13 = x11 + x12;
x23 = x21 + x22;
x33 = x31 + x32;

figure;
plot(t,x13)
hold on
plot(t,x23)
plot(t,x33)
grid on
legend('w_1','w_2','w_3')
title('Resposta à entrada  $u_1(t) = u_2(t) = \delta(t)$ ')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Deslocamento dos vagões (m)');
```



**Apresente a resposta até 20 segundos. Unidades em SI.**

### 2.3 Explique o comportamento visto para o caso $u_1(t) = u_2(t) = \delta(t)$ .

Vemos através do último gráfico que as massas  $m_1$  e  $m_3$  (onde  $w_1$  e  $w_3$  correspondem, respectivamente, a variação de seus deslocamentos em relação ao ponto  $y^*$ ), ficam oscilando de forma muito próxima a um movimento periódico em torno de seus pontos de equilíbrio ( $L_1, L_2$  e  $L_3$ ), e o vagão de massa  $m_2$  se movimenta de acordo com a "necessidade" para que os vagões dos extremos mantenham seu movimento próximo ao periódico. Além disso, é visto que a massa  $m_1$  se desloca uma distância maior do que  $m_3$ , isso ocorre porque a constante  $k_1$  da mola associada à  $m_1$  é menor do que a associada à  $m_3$  ( $k_2$ ).