Análise e Modelagem de Sistemas Dinâmicos - 2023/2

Nome: Thiago Felippe Neitzke Lahass

Data limite para entrega: 27/11/2023

A entrega deverá ser feita pelo Google ClassRoom

Trabalho 3 - Resposta no Tempo, Estabilidade e Sistemas Discretos

```
I = 10;         % Seu número I
init_t3(I);     % Define as variaveis do modelo 1
datetime('now')
```

```
ans = datetime
   27-Nov-2023 21:10:02
```

Funções úteis do Matlab: tf, tfdata, step, RespConfig, minreal, figure, plot, hold, grid, stairs, title, xlabel, ylabel, legend, sprintf, fprintf, ss, d2c, roots, sort, real, imag, abs, sqrt, poly, length, feedback, initial, tf2ss, cart2pol, eig, vpa, eval.

Análise da Resposta no Tempo Contínuo

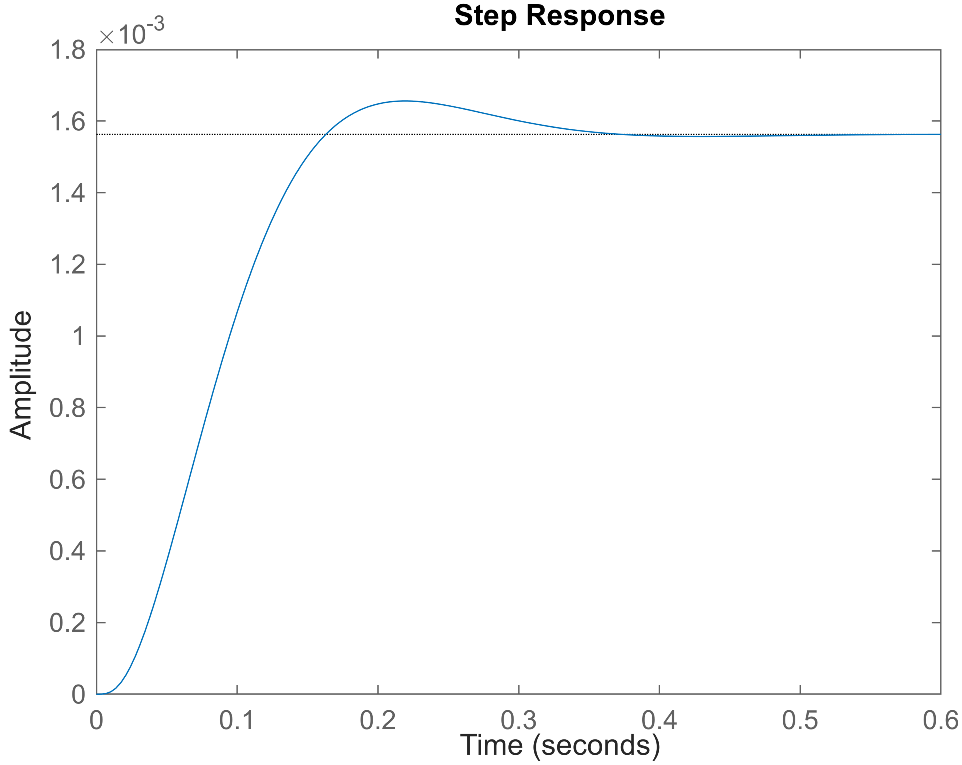
A Função de Transferência baixo foi designada em função do seu valor de I.

```
G
```

```
G =

                             4000
  -----------------------------------------------------
  s^4 + 546.7 s^3 + 7.827e04 s^2 + 1.915e06 s + 2.56e07

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

1.1 Plote a resposta ao degrau de $G(s)$ para um degrau de amplitude U.

```
% Simulando a resposta de G(s) ao degrau U
step(U * G);
```



1.2 Encontre a função $Q(s)$ de 1ª ou de 2ª ordem (conforme o caso), cuja resposta ao degrau se aproxime a resposta ao degrau de $G(s)$.

Como há um sobreimpulso claro na resposta de $G(s)$ ao degrau, temos que $Q(s)$ deve ser de segunda ordem. Logo, analizando a forma padrão de um sistema de segunda ordem, temos:

$$G(s) = K\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n},$$

onde:

ω_n é denominada a frequência natural do sistema, e

ζ é denominado o fator de amortecimento do sistema.

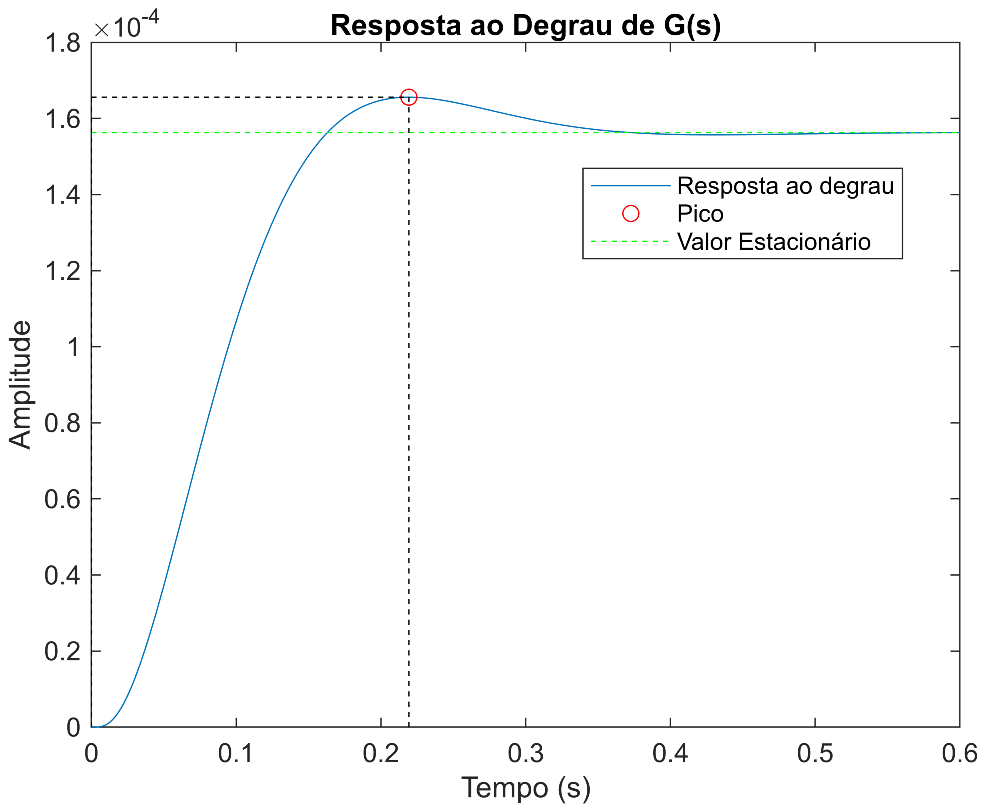
Como o sistema é subamortecido (0 < ζ < 1), então podemos obter ζ e ω_n a partir dos valores de máximo sobreimpulso M_p, e tempo de pico t_p, a partir do seguinte:

$\zeta = \dfrac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}}$ e $\omega_n = \dfrac{\pi}{t_p\sqrt{1-\zeta^2}}$, onde $M_p = \dfrac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$.

Como conseguimos aferir os valores de K, t_p, $y(t_p)$ e $y(\infty)$, conseguimos obter todos os parâmetros necessários para representar nossa FT de segunda ordem.

Fazendo todo o procedimento de obteção e calculo dos coeficientes, temos:

```
% Simulando a resposta de G(s) ao degrau
time_span = linspace(0, 0.6, 10000);
[y1, t] = step(G, time_span);

% Encontrando os picos da resposta ao degrau
[peaks, peak_times] = findpeaks(y1, t);

% Encontrando o valor máximo (magnitude do pico) e o instante (tp) em que ocorre
[max_peak, max_peak_index] = max(peaks);
tp = peak_times(max_peak_index);

% Calculando o valor Estacionário
final_value = y1(end);

% Plotando a resposta ao degrau com o pico destacado
figure;
plot(t, y1, tp, max_peak, 'ro');
hold on;

% Adicionando a linha tracejada indicando o valor estacionário
line([time_span(1), time_span(end)], [final_value, final_value], 'Color', 'g',
'LineStyle', '--');

% Adicionando linhas perpendiculares aos eixos no ponto de pico
plot([tp, tp], [0, max_peak], 'k--');           % Linha vertical até o pico
plot([0, tp], [max_peak, max_peak], 'k--');     % Linha horizontal até o tempo do
pico
plot([tp, tp], [0, 0], 'k--');                  % Linha vertical até o eixo x
plot([0, 0], [0, max_peak], 'k--');             % Linha horizontal até o eixo y

title('Resposta ao Degrau de G(s)');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');

% Posicionando a legenda abaixo do gráfico para não atrapalhar visualização
legend('Resposta ao degrau', 'Pico', 'Valor Estacionário', 'Location','best');

hold off;
```




```
fprintf('Valor máximo (magnitude do pico): %.10f\n', max_peak);
```

```
Valor máximo (magnitude do pico): 0.0001655872
```

```
fprintf('Instante do pico: %.10f segundos\n', tp);
```

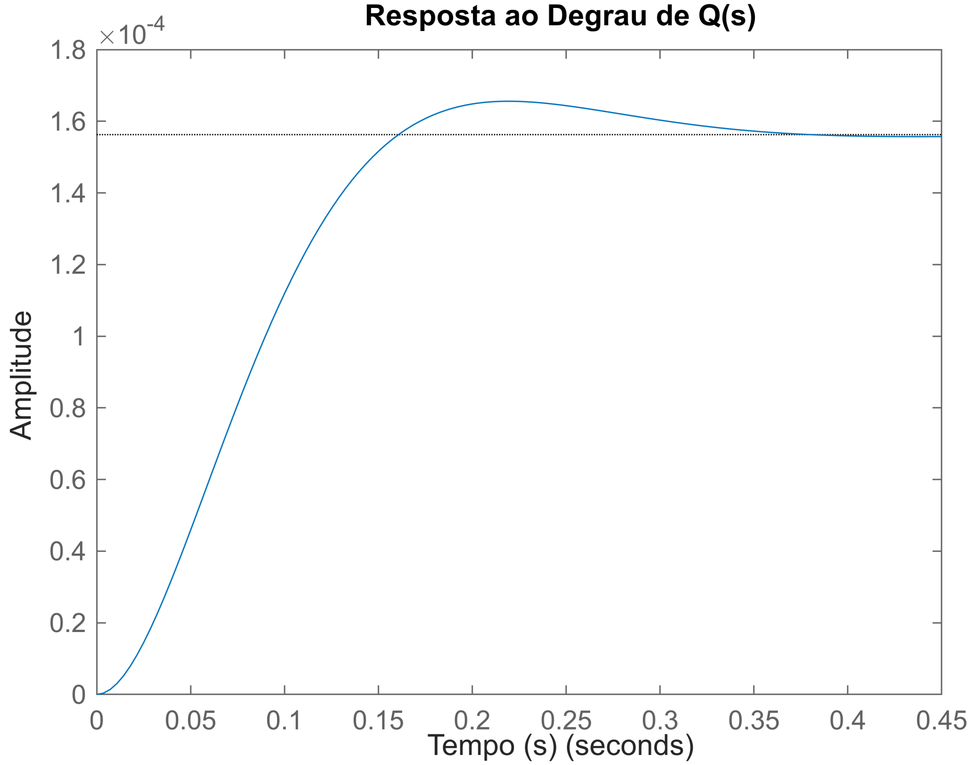
```
Instante do pico: 0.2193219322 segundos
```

```
fprintf('Valor final (Estacionário): %.10f\n', final_value);
```

```
Valor final (Estacionário): 0.0001562680
```

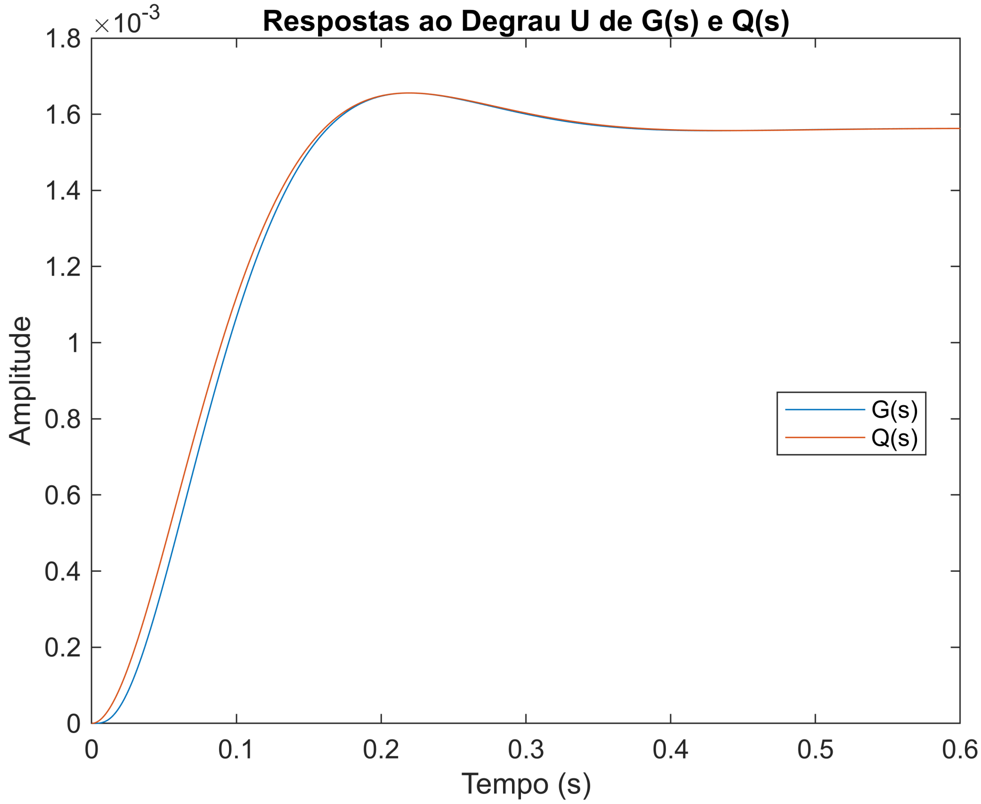
```
% Encontrando os valores das constantes da fórmula padrão
K = final_value;
Mp = (max_peak - final_value)/final_value;
zeta = -log(Mp)/sqrt(pi^2 + log(Mp)^2);
wn = pi/(tp*sqrt(1 - zeta^2));
% Criando a função de transferência Q(s),  a partir da forma padrão G(s) = (K *
wn^2) / (s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2)
numerator = K * wn^2;
denominator = [1, 2 * zeta * wn, wn^2];

Q = tf(numerator, denominator);

% Simulando a resposta de Q(s) ao degrau
step(Q);
hold on;
```

```
title('Resposta ao Degrau de Q(s)');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
hold off;
```



1.3 Compare, no mesmo gráfico, a resposta ao degrau de $Q(s)$ com a resposta ao degrau de $G(s)$ para um degrau de amplitude U. Explique a resposta.

```
% Simulando a resposta de G(s) ao degrau U
[y2, ~] = step(U * G, time_span);

% Simulando a resposta de Q(s) ao degrau U
[y3, t] = step(U * Q, time_span);

% Plotar os gráficos de G(s) e Q(s) em um único gráfico
plot(t, y2);
hold on;
plot(t, y3);
hold off;

title('Respostas ao Degrau U de G(s) e Q(s)');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
legend('G(s)', 'Q(s)', 'Location','best');
```



Vemos através dos gráficos plotados que os valores de pico e os valores estacionários de ambas funções de transferêcia são iguais. Além disso, é notável que a FT de segunda ordem $Q(s)$ começa a "subir" (responder) um pouco antes que $G(s)$, enquanto que a FT $G(s)$ tem um pequeno delay am relação a $Q(s)$ antes de começar a responder de forma significativa. Podemos ver a causa disso analisando os polos de $G(s)$ e $Q(s)$:

```
pole(G)
```

```
ans = 4×1 complex
10^2 ×
  -3.2000 + 0.0000i
  -2.0000 + 0.0000i
  -0.1333 + 0.1491i
  -0.1333 - 0.1491i
```

```
pole(Q)
```

```
ans = 2×1 complex
 -12.8555 +14.3241i
 -12.8555 -14.3241i
```

Sabemos que, quanto mais distante os polos estiverem do eixo imaginário, mais veloz é a resposta gerada. É fácil notar que os polos de $G(s)$ estão mais próximos ao eixo imaginário do que os polos de $Q(s)$, logo são mias lentos, e portanto isso gera o resultado visto no gráfico acima.

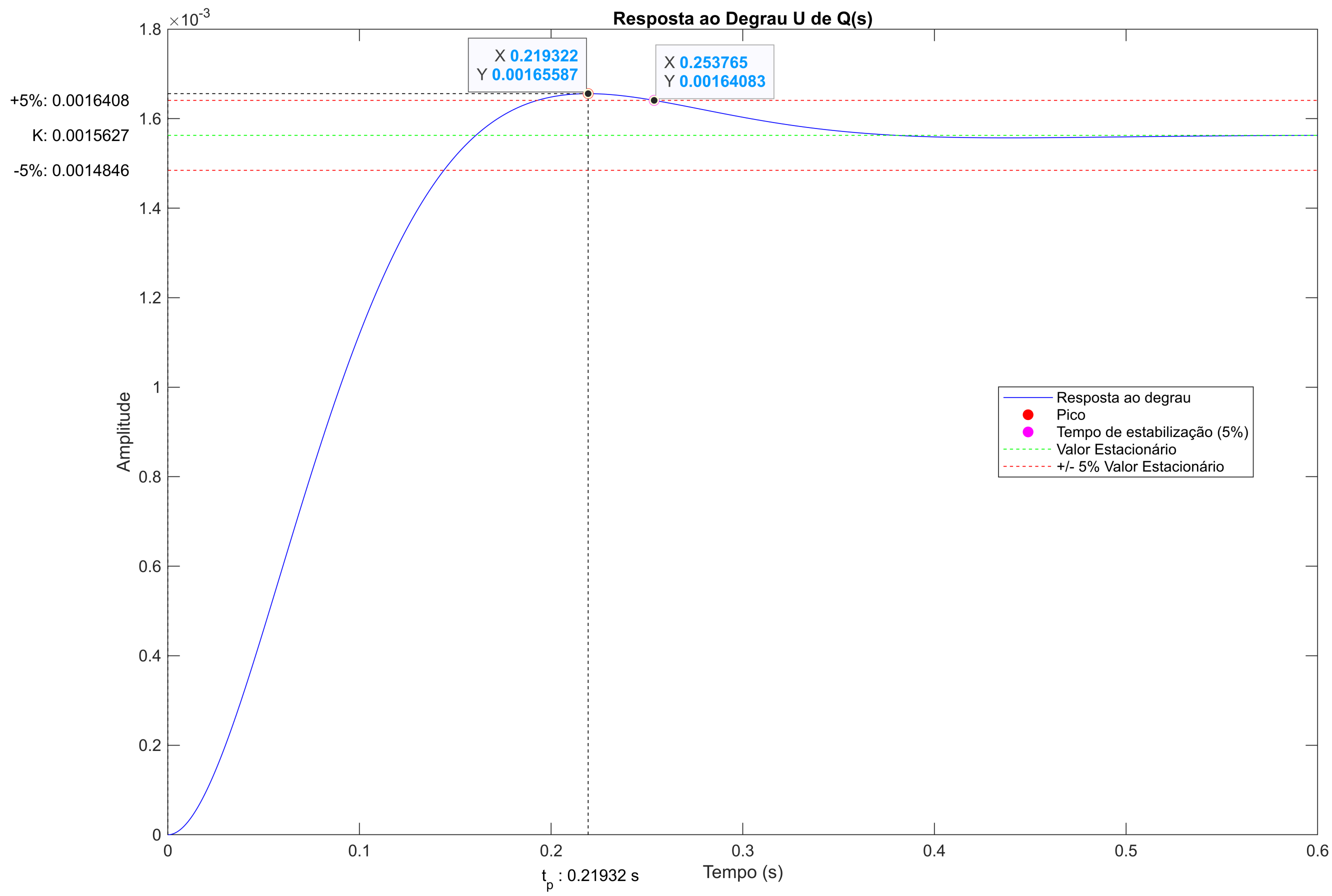
1.4 A partir da equação de $Q(s)$ e de medições feitas diretamente no gráfico da resposta ao degrau de $Q(s)$, para um degrau de amplitude U, informe os valores de

ζ , ω_n, MP, t_p, t_r **e** $t_s(5\%)$. **(Mostre com *Data Tips* sempre que for possível marcar os valores no gráfico)**

```
% Simulando a resposta de Q(s) ao degrau U
[yq, t] = step(U * Q, time_span);

% Encontrando os picos da resposta ao degrau U
[peaks, peak_times] = findpeaks(yq, t);

% Encontrando o valor máximo (magnitude do pico) e o instante (tp) em que ocorre
[max_peak, max_peak_index] = max(peaks);
tp = peak_times(max_peak_index);

% Calculando o valor Estacionário
final_value = yq(end);

%Além disso, podemos calcular os valores de tr e ts5 a partir da resposta
%que obtemos para a simulação de Q(s) para o degrau U, que esta em y3.
%Assim:

% Encontrando o índice correspondente a 10% e 90% do valor final
y_10 = 0.1 * final_value;
y_90 = 0.9 * final_value;

% Encontrando os tempos correspondentes a 10% e 90%
t_10 = interp1(y3, t, y_10);
t_90 = interp1(y3, t, y_90);

% Calculando o tempo de subida
t_r = t_90 - t_10;

% Encontrando os limites de +/-5% do valor estacionário
limite_superior = final_value * 1.05;
limite_inferior = final_value * 0.95;

%além disso, para o tempo de estabilização de 5% (t_s5), temos:
indices_limite_superior = find(yq >= limite_superior);
tempos_limite_superior = t(indices_limite_superior);
t_s5 = max(tempos_limite_superior);
% Encontrando o índice correspondente ao instante t_s5
indice_t_s5 = find(t == t_s5);
% Obtendo o valor de yq no instante t_s5
yq_t_s5 = yq(indice_t_s5);

% Ajustando o tamanho da figura
figure('Position', [100, 100, 1200, 800]);  % [left, bottom, width, height]
plot(t, yq, 'b');
hold on;
```

```
% Plotando a resposta ao degrau com o pico destacado
plot(tp, max_peak, 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r');

% Destacando o instante que atinge tempo de estabilização de 5%
plot(t_s5, yq_t_s5, 'mo', 'MarkerFaceColor', 'm');

% Adicionando a linha tracejada indicando o valor estacionário
line([time_span(1), time_span(end)], [final_value, final_value], 'Color', 'g',
'LineStyle', '--');

% Adicionando linhas tracejadas indicando os limites de +/-5% do valor estacionário
line([time_span(1), time_span(end)], [limite_superior, limite_superior], 'Color',
'r', 'LineStyle', '--');
line([time_span(1), time_span(end)], [limite_inferior, limite_inferior], 'Color',
'r', 'LineStyle', '--');

% Adicionando linhas perpendiculares aos eixos no ponto de pico
plot([tp, tp], [0, max_peak], 'k--');          % Linha vertical até o pico
plot([0, tp], [max_peak, max_peak], 'k--');    % Linha horizontal até o tempo do
pico
plot([tp, tp], [0, 0], 'k--');                 % Linha vertical até o eixo x
plot([0, 0], [0, max_peak], 'k--');            % Linha horizontal até o eixo y

% Adicionando textos aos pontos relevantes
% text(tp, max_peak + 0.00001, [' y( t_p ): ' num2str(max_peak)],
'VerticalAlignment', 'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
% text(t_s5, max_peak + 0.00001, [' t_s5: ' num2str(t_s5)], 'VerticalAlignment',
'bottom', 'HorizontalAlignment', 'center');
text(tp, -0.00007, [' t_p : ' num2str(tp) ' s'], 'VerticalAlignment', 'top',
'HorizontalAlignment', 'center');
text(-0.02, final_value, [' K: ' num2str(final_value)], 'VerticalAlignment',
'middle', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(-0.02, limite_superior, [' +5%: ' num2str(limite_superior)],
'VerticalAlignment', 'middle', 'HorizontalAlignment', 'right');
text(-0.02, limite_inferior, [' -5%: ' num2str(limite_inferior)],
'VerticalAlignment', 'middle', 'HorizontalAlignment', 'right');

title('Resposta ao Degrau U de Q(s)');
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');

lgd = legend('Resposta ao degrau', 'Pico', 'Tempo de estabilização (5%)', 'Valor
Estacionário', '+/- 5% Valor Estacionário','Location','best');


ax = gca;
chart = ax.Children(7);
datatip(chart,0.2193,0.001656);
TempoDeEstabilizao5 = findobj(gcf, "DisplayName", "Tempo de estabilização (5%)");
datatip(TempoDeEstabilizao5,0.2538, 0.001641);
```

```
hold off;
```




```
% Os valores de zeta, w_n, MP, tp já foram calculados no item 1.2, sendo eles:
fprintf('zeta: %f\n', zeta)
```

```
zeta: 0.667926
```

$\zeta = 0.6679626.$

```
fprintf('wn: %f rad/s\n', wn)
```

```
wn: 19.246950 rad/s
```

$\omega_n = 19.246950 \frac{\text{rad}}{s}.$

```
fprintf('MP: %f\n', Mp)
```

```
MP: 0.059636
```

$M_p = 0.059636.$

```
fprintf('tp: %f\n', tp)
```

```
tp: 0.219322
```

$t_p = 0.219322\,s$.

```
fprintf('tr: %f s\n', t_r)
```

```
tr: 0.105575 s
```

$t_r = 0.105575\,s$.

```
fprintf('t_s5: %f s\n', t_s5)
```

```
t_s5: 0.253765 s
```

E por fim, $t_{s5} = 0.253765\,s$.

1.5 Feche a malha do processo $G(s)$ com uma realimentação de ganho K. Obtenha a faixa de valores de K em que o sistema é estável.

Fechando a malha com uma realimentação de ganho K obtemos a nova função de transferência:

```
G
```

```
G =

                          4000
  -----------------------------------------------------
  s^4 + 546.7 s^3 + 7.827e04 s^2 + 1.915e06 s + 2.56e07

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

$$G_k(s) = \frac{G(s)}{1 + K\,G(s)}$$

$$G_k(s) = \frac{4000}{s^4 + 546.7\,s^3 + 7.827\text{e}04\,s^2 + 1.915\text{e}06\,s + 2.56\text{e}07 + 4000\,K}$$

Para que possamos aplicar a Tabela de Routh é necessário que:

$2.56\text{e}07 + 4000\,K > 0$.

```
syms k;
cell2mat(G.Denominator)
```

```
ans = 1×5
10^7 ×
    0.0000    0.0001    0.0078    0.1915    2.5600
```

```
solve(2.5600*10^7 + 4000*k > 0)
```

ans = -6399

$\Rightarrow K > -6399$

Motando a tabela, temos:

s^4 |	1	$7.827e04$	$2.56e07 + 4000\,K$
s^3 |	546.7	$1.915e06$	0

----

s^2 |	74767.16	$2.56e07 + 4000\,K$	0
s^1 |	$\dfrac{1.292e11 - 2186800\,K}{74767.16}$	0	0
s^0 |	$2.56e07 + 4000\,K$	0	0

Portanto, necessitamos que os elementos da primeira coluna seja todos maiores que zero para o sistema ser estável. Assim, para ser estável precisamos que:

$$\frac{1.292e11 - 2186800\,K}{74767.16} > 0 \Rightarrow 1.292e11 - 2186800\,K > 0.$$

```
solve(1.292*10^11 - 2186800*k > 0)
```

```
ans =
```

$$\frac{322994533}{5467}$$

$\Rightarrow K < 59081.$

$2.57e07 + 4000\,K > 0 \Rightarrow K > -6399.$

Logo, fazendo a interseção dos valores de K, temos que o sistema é estável para $-6399 < K < 59081$. Podem haver pequenas diferenças entre os números vistos e os que são de fato devido às aproximações feitas durante os cálculos.

Análise da Resposta no Tempo Discreto

A Função de Transferência baixo foi designada em função do seu valor de I.

```
Dz
```

```
Dz =

  2.038e-05 z^2 + 4.076e-05 z + 2.038e-05
  ---------------------------------------
          z^2 - 0.7826 z + 0.3043

Sample time: 0.05 seconds
Discrete-time transfer function.
Model Properties
```

2.1 Obtenha o modelo equivalente contínuo $D_t(s)$ de $D(z)$ usando a transformação bilinear para $T_s = 50[\mathrm{ms}]$.

Para obter o equivalente contínuo de um sistema discreto usando a transformação bilinear, podemos usar a seguinte fórmula de mapeamento:

$z = 1 + T_s s$, onde T_s é o tempo de amostragem discreto ($50\ \mathrm{ms}$) no nosso caso.

Porém, com a disposição do matlab podemos utilizar simplesmente a função "d2c" na qual convertemos uma função de transferência no tempo discreto para tempo contínuo especificando o método de conversão.

```
% Convertendo Dz pro tempo continuo (Dt) pelo método de 'tustin'
Dt = d2c(Dz,'tustin')
```

```
Dt =
 
        0.0625
  -------------------
  s^2 + 26.67 s + 400
 
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

2.2 Obtenha o modelo equivalente contínuo $D_{\mathrm{zoh}}(s)$ de $D(z)$ usando ZOH para $T_s = 50[\mathrm{ms}]$.

Para obter a equivalencia entre um sistema contínuo e um sistema discreto usando a transformação ZOH, podemos usar a seguinte fórmula de mapeamento:

$$P_d(z) = (1 - z^{-1})\mathrm{Z}\left\{ L^{-1}\left[P(s)\frac{1}{s}\right]_{t=\mathrm{k}\mathrm{T}_s} \right\}.$$

Porém, com a disposição do matlab podemos utilizar simplesmente a função "d2c" na qual convertemos uma função de transferência discreto para contínua especificando o método de conversão.

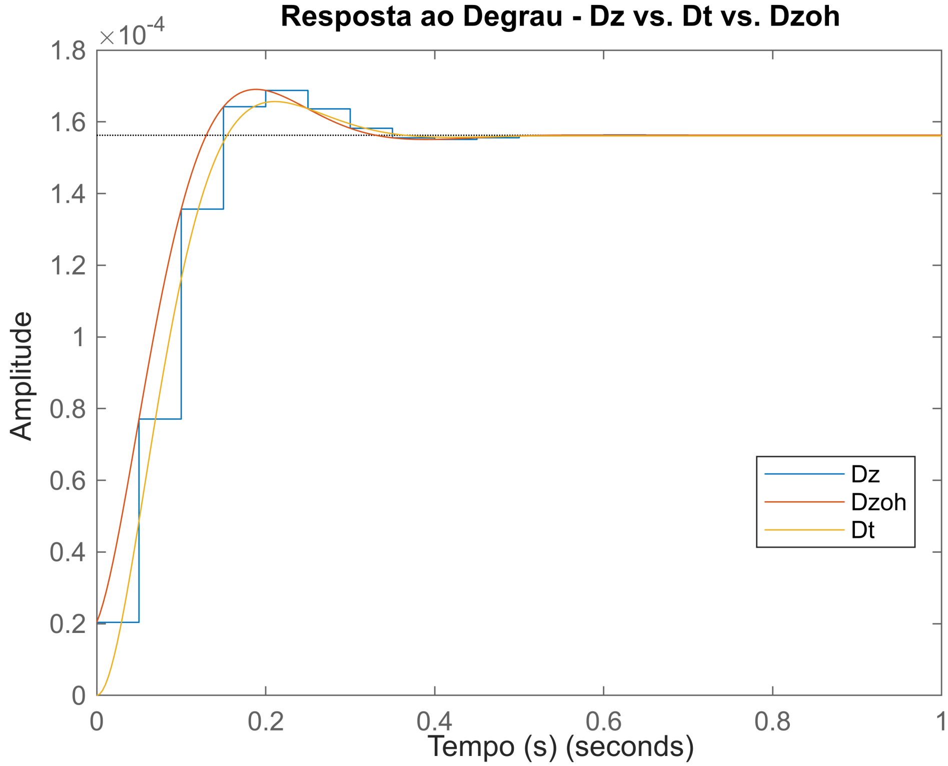
```
% Convertendo Dz pro tempo continuo (Dzoh) pelo método de 'zoh'
Dzoh = d2c(Dz,'zoh')
```

```
Dzoh =
 
  2.038e-05 s^2 + 0.001055 s + 0.06036
  ------------------------------------
         s^2 + 23.79 s + 386.3
 
Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

2.3 Compare a resposta ao degrau unitário de $D_z(z)$, $D_{\mathrm{zoh}}(s)$ e $D_t(s)$. Explique o resultado.

```
figure;
step(Dz, Dzoh, Dt);
```

```
xlabel('Tempo (s)');
ylabel('Amplitude');
title('Resposta ao Degrau - Dz vs. Dt vs. Dzoh');
legend('show', 'Location', 'best');
```



No gráfico, o método ZOH preserva exatamente a resposta ao degrau do sistema discreto, enquanto o método Tustin, sendo uma aproximação, apresenta pequenas diferenças.

2.4 Obtenha as matrizes do modelo no EE de $D_z(z)$.

Podemos obter as matrizes de modelo em EE de $D_z(z)$ a partir da função disponível no matlab 'tf2ss', que nos permite passar os coeficientes do numerador e do denominador da função de transferência e nos retorna as matrizes em EE do modelo.

```
% Obter os coeficientes do numerador e denominador
numerator= cell2mat(Dz.Numerator)
```

```
numerator = 1×3
10^-4 ×
    0.2038    0.4076    0.2038
```

```
denominator = cell2mat(Dz.Denominator)
```

```
denominator = 1×3
    1.0000   -0.7826    0.3043
```

```
[A,B,C,D] = tf2ss(numerator, denominator)
```

```
A = 2×2
    0.7826   -0.3043
    1.0000         0
B = 2×1
     1
     0
C = 1×2
10^-4 ×
    0.5671    0.1418
D = 2.0380e-05
```

2.5 Obtenha a matrix de transição de estados $\Phi[k] = A^k$ e use-a para obter a saída $y[k]$ do sistema para $\overrightarrow{q}_0$ com todos os elementos iguais a 1. Compare a resposta obtida com a produzida pela função "initial" do MATLAB. Considere $T_s = 50[\text{ms}]$ e apresente o gráfico com tempo até três segundos.

Temos a matriz A:

```
A
```

```
A = 2×2
    0.7826   -0.3043
    1.0000         0
```

Assim podemos calcular A^k através de Cayley Hamilton. Como a matriz A é 2x2, então sabemos que:

$A^k = p_o(k) + p_1(k)A$.

Para encontrar $p_0(k)$ e $p_1(k)$ precisamos determinar os autovalores da matriz A:

```
lambda = eig(A)
```

```
lambda = 2×1 complex
   0.3913 + 0.3889i
   0.3913 - 0.3889i
```

Logo $\lambda_1 = 0.3913 + 0.3889j$ e $\lambda_2 = 0.3913 + 0.3889j$. Podemos passar esses valores para a forma polar:

```
mod1 = sqrt( real(lambda(1,1))^2 + imag(lambda(1,1))^2)
```

```
mod1 = 0.5517
```

```
ang1 = atan(imag(lambda(1,1)) / real(lambda(1,1)))
```

```
ang1 = 0.7823
```

```
mod2 = sqrt( real(lambda(2,1))^2 + imag(lambda(2,1))^2)
```

```
mod2 = 0.5517
```

```
ang2 = atan(imag(lambda(2,1)) / real(lambda(2,1)))
```

```
ang2 = -0.7823
```

$\lambda_1 = 0.3913 + 0.3889j = 0.5517e^{0.7823j}$

$\lambda_2 = 0.3913 + 0.3889j = 0.5517e^{-0.7823j}$

Assim, podemos determinar $p_o(k)$ e $p_1(k)$:

$$\begin{cases} (0.5517e^{0.7823j})^k = p_0(k) + p_1(k)(0.3913 + 0.3889j) \\ (0.5517e^{-0.7823j})^k = p_0(k) + p_1(k)(0.3913 - 0.3889j) \end{cases}$$

Subtraindo as equações:

$$\frac{0.5517^k\,(e^{0.7823jk} - e^{-0.7823jk})}{2j} = 0.3889\,p_1(k) \Rightarrow p_1(k) = \frac{0.5517^k \cdot \mathrm{sen}(0.7823\,k)}{0.3889};$$

já somando as equações, temos:

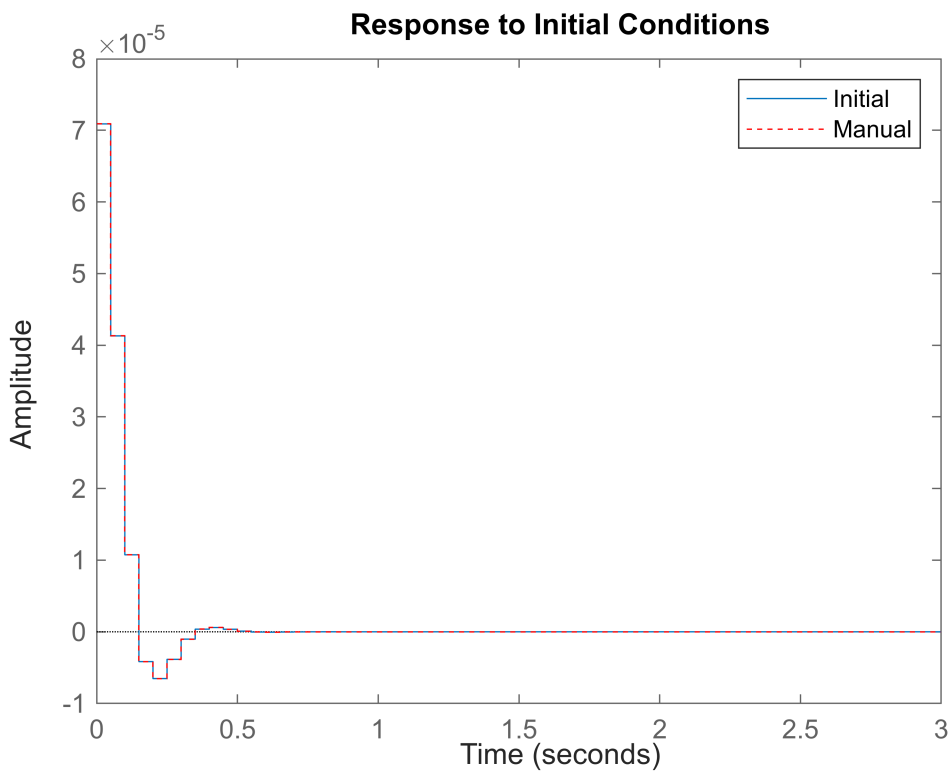
$$\frac{0.5517^k\,(e^{0.7823jk} + e^{-0.7823jk})}{2} = p_0(k) + 0.3913p_1(k) \Rightarrow p_0(k) = 0.5517^k \cdot \cos(0.7823\,k) - 0.3913p_1(k).$$

Agora basta substituir $p_0(k)$, $p_1(k)$ e A em $A^k = p_o(k) + p_1(k)A$, que teremos a matriz de transição de estados A^k.

Finalmente, para encontrar a saída natural $y(k)$ para um condição inicial $\vec{q_0}$, podemos utilizar a seguinte forma:

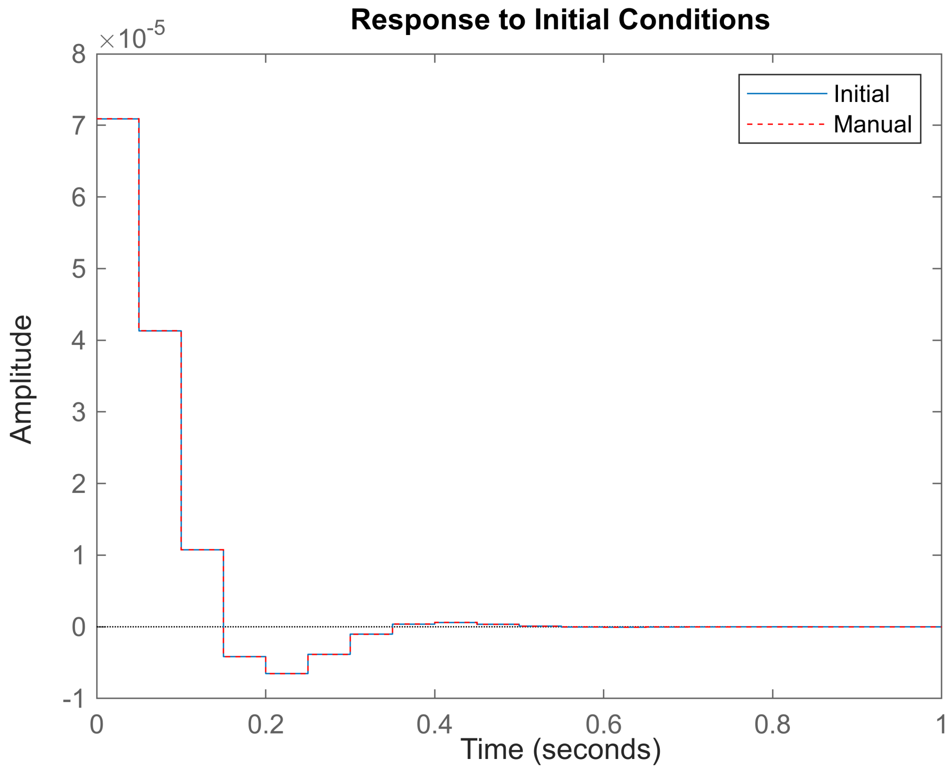
$y(k) = [C_d]\,A^k\,\vec{q_0}$, onde $[C_d] = [C]$ e pelo enunciado $\vec{q_0} = [1, 1]$.

```
Ts = 0.05;
k_values = (0:1:3/Ts); % k deve ser inteiro, 3 segundos equivale a 60 amostras na frequencia dada no enunciado (Ts = 50 ms)
vk = length(k_values);
yk = vk * 0;
q0 = [1;1];

for k = k_values
    p1 = (0.5517^k * sin(0.7823 * k)) / 0.3889;
    p0 = 0.5517^k * cos(0.7823 * k) - 0.3913 * p1;
    Ak = p0 * eye(2) + p1 * A;
    yk(k+1) = C * Ak * q0;
end

sys = ss(A,B,C,D, Ts);
figure;
initial(sys,q0,3);
hold on;
stairs(k_values*Ts, yk, '--r');
legend('Initial', 'Manual');
hold off;
```



Como no enunciado pede tempo com até 3 segundos ele está apresentado acima, porém, como a função se estabiliza logo no começo (em aproxidamente 0.6 segundos já está quase totalmente estabilizado), podemos plotar até apenas 1 segundo para uma melhor visualização e análise dos resultados:

```
figure;
initial(sys,q0,1);
hold on;
stairs(k_values*Ts, yk, '--r');
legend('Initial', 'Manual');
hold off;
```



Vemos portanto que a resposta obtida através dos valores calculados manualmente utilizando o método de Cayley-Hamilton, está extremamente próxima a gerada pela função *initial* do matlab, e portanto obtemos um resultado satisfatório.