Lista06_Thiago_Poppe

July 22, 2021

1 Lista 06 - Fundamentos Estatísticos para Ciência dos Dados A

- Aluno: Thiago Martin Poppe
- Matrícula: 2017014324

[1]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy.stats as ss
import matplotlib.pyplot as plt
```

- **Nota:** para as questões relacionadas com o teste qui-quadrado, utilizei a função `stats.chisquare` do scipy para o cálculo da estatística. Nela, podemos passar o parâmetro `ddof`, que é o valor referente ao número de parâmetros estimados no modelo. Esse valor é usado no cálculo do p-valor através de uma distribuição χ^2 com $k - 1 - ddof$ graus de liberdade, onde k é o número de valores observados (número de categorias).

2 Questão 10)

- Para verificar sua compreensão do problema, obtenha os números esperados que estão na Tabela 3.1.

- **Resposta:** eles representam a linha denotada por ESP, com os seguintes valores:

$$\text{ESP}: \{165.22, 1401.69, 5202.65, 11034.65, 14627.60, 12409.87, 6580.24, 1993.78, 264.30\}$$

- Calcule a estatística qui-quadrado neste problema (você deve obter um valor de $\chi^2 = 91.87$).

[2]:
```
observed_values = np.array([215, 1485, 5331, 10649, 14959, 11929, 6678, 2092,␣
↪342])
expected_values = np.array([165.22, 1401.69, 5202.65, 11034.65, 14627.60, 12409.
↪87, 6580.24, 1993.78, 264.30])

# No caso, como estamos utilizando uma binomial, iremos estimar 2 parâmetros
chi_square_test = ss.chisquare(observed_values, expected_values, ddof=2)
print('Estatística qui-quadrado = {:.2f}'.format(chi_square_test.statistic))
```

```
Estatística qui-quadrado = 91.87
```

- Qual a distribuição de referência desta estatística?

- **Resposta:** a estatística qui-quadrado possui como referência a distribuição χ^2.
- Qual o p-valor associado com esta estatística?
  - DICA: use `pchisq` para obter o p-valor igual a 0.0 (numa aproximação até 15 casas decimais).

[3]:
```
print('p-valor associado = {}'.format(chi_square_test.pvalue))
```

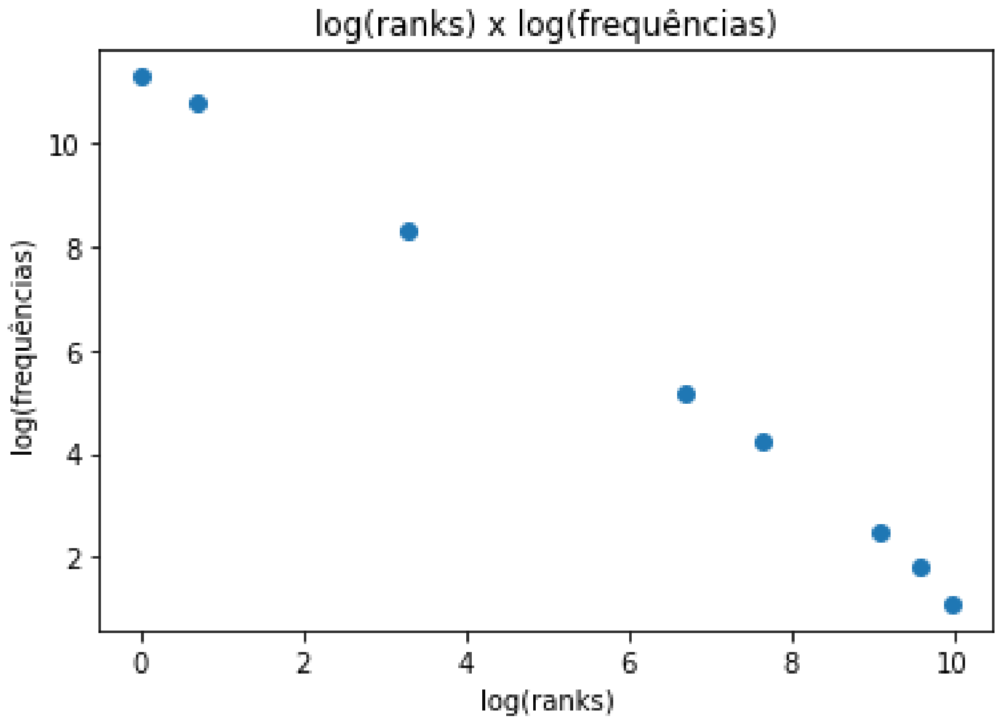
```
p-valor associado = 1.238663081002473e-17
```

3 Questão 19)

- Explique como a equação (3.2) $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{c}{k^\theta}$ implicaria que *the frequency of any word is inversely proportional to its rank*.
- **Resposta:** Como mencionado no texto da questão, probabilidades são aproximadamente frequências relativas, onde nesse caso $\mathbb{P}(Y = k) \approx \frac{n_k}{10^6}$. Com a leitura do texto, definimos k (valor de *rank*) como os possíveis valores da variável aleatória Y. Com isso, através da equação (3.2), teremos que a frequência de qualquer palavra será inversamente proporcional ao seu rank: $\mathbb{P}(Y = k) = \mathit{frequency} \propto \frac{1}{k}$, note que c e θ são constantes!

[4]:
```
ranks = np.array([1, 2, 27, 802, 2087, 8901, 14343, 21531])
frequencies = np.array([79607, 48238, 4033, 174, 70, 12, 6, 3])

plt.title('log(ranks) x log(frequências)')
plt.xlabel('log(ranks)')
plt.ylabel('log(frequências)')
plt.scatter(np.log(ranks), np.log(frequencies))
plt.show()
```



[5]:
```
linear_regression = ss.linregress(np.log(ranks), np.log(frequencies))
print('Inclinação = {:.3f}'.format(linear_regression.slope))
```

```
Inclinação = -0.999
```

Questão 30)

- Estime $\mathbb{E}(Y)$ usando a média aritmética $\bar{X} + 1$ e obtenha assim uma estimativa de θ.
- **Resposta:** Ao estimarmos o valor da esperança através da média aritmética +1, teremos que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) + 1 = \frac{537}{576} + 1 \approx 0.9323 + 1$. Tendo em mãos o valor da esperança da variável aleatória Y, nós conseguimos estimar o valor de θ resolvendo a equação não linear $\mathbb{E}(Y) = \frac{-1}{\log(1-\theta)} * \frac{\theta}{1-\theta}$. Para resolver esse problema, optei por variar o valor de θ no intervalo $(0, 1)$ e guardar o valor que faz com que a esperança teórica se aproxime mais do valor computado anteriormente com os dados.

[6]:
```
E_y = lambda theta: (-1 / (np.log(1-theta)) * (theta / (1-theta)))

diff = np.inf
best_theta = 0.01

for theta in np.arange(0.01, 1, 0.0001):
    expected_value = E_y(theta)
    new_diff = np.abs(1.9323 - expected_value)
```

```
    if new_diff < diff:
        diff = new_diff
        best_theta = theta

print('O melhor valor de theta encontrado foi {:.5f}'.format(best_theta))
print('Gerando o valor E(Y) = {:.5f}'.format(E_y(best_theta)))
```

```
O melhor valor de theta encontrado foi 0.69850
Gerando o valor E(Y) = 1.93226
```

- Calcule os valores esperados do número de quadrados com k bombas. Por exemplo, o número esperado com 0 bombas é dado por

$$576 * \mathbb{P}(X = 0) = 576 * \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{-1}{log(1 - \hat{\theta})} \frac{\hat{\theta}^1}{1} = 576 * 0.585 = 336.96$$

[7]:
```
def P_y(k):
    return (-1 / np.log(1 - best_theta)) * ((best_theta**k) / k)

expected_values = np.zeros(6)

expected_values[0] = 576 * P_y(1)
expected_values[1] = 576 * (P_y(1) + P_y(2))
expected_values[2] = 576 * (P_y(1) + P_y(2) + P_y(3))
expected_values[3] = 576 * (P_y(1) + P_y(2) + P_y(3) + P_y(4))
expected_values[4] = 576 * (P_y(1) + P_y(2) + P_y(3) + P_y(4) + P_y(5))
expected_values[5] = 576 * (1 - (P_y(1) + P_y(2) + P_y(3) + P_y(4) + P_y(5)))

print('Valores esperados usando theta = {:.5f}:'.format(best_theta))
print(expected_values)
```

```
Valores esperados usando theta = 0.69850:
[335.56375752 452.75939983 507.33350394 535.92351272 551.89960963
  24.10039037]
```

- Embora seja óbvio que a distribuição logarítimica não se ajusta a estes dados, calcule a estatística qui-quadrado a partir das diferenças entre os valores observados e esperados.

[8]:
```
observed_values = np.array([229, 211, 93, 35, 7, 1])

# No caso, como estamos utilizando uma distribuição logarítmica, iremos estimar␣
 ↪1 parâmetro
chi_square_test = ss.chisquare(observed_values, expected_values, ddof=1)
print('Estatística qui-quadrado = {:.2f}'.format(chi_square_test.statistic))
```

```
Estatística qui-quadrado = 1529.65
```

- Obtenha o p-valor associado com a estatística.

[9]:
```python
print('p-valor associado = {}'.format(chi_square_test.pvalue))
```

```
p-valor associado = 0.0
```

4 Questão 33)

- Vamos usar a desigualdade de Tchebychev abaixo para gerar um intervalo de predição para X.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{\delta^2}$$

- Suponha que X possua uma distribuição de probabilidade arbitrária com $\mathbb{E}(X) = \mu = 120$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2 = 10^2$. Usando a desiguadade de Tchebychev, mostre que o intervalo $(120 \pm 45) = (75, 165)$ deverá conter pelo menos 95% dos dados gerados de X, qualquer que seja a distribuição de X.

- **Resposta:** Note que o intervalo $(75, 165)$ corresponde à um desvio de 4.5σ do valor da esperança, fazendo com que o valor de δ seja 4.5, nesse caso. Aplicando a desigualdade de Tchebychev, podemos observar que a probabilidade de um valor estar em um intervalo maior do que 4.5σ, com relação ao valor esperado, será menor que $\frac{1}{4.5^2} = \frac{1}{20.25} \approx 0.04938$. Sendo assim, o intervalo $(75, 165)$ deverá conter **pelo menos** 95% dos dados gerados de X (para qualquer que seja a distribuição de X).

- Suponha agora que sabemos algo mais sobre a distribuição de X. Este conhecimento adicional reduz substancialmente a incerteza acerca dos valores gerados da distribuição. Agora, usando o comando `qnorm` do R, mostre que o intervalo que conterá 95% dos valores de uma amostra de X é $(120 \pm 1.96{*}10) = (100.4, 139.6)$.

[10]:
```python
# Para obtermos a probabilidade de um valor cair no intervalo
# (a, b), basta realizarmos F(b) - F(a)

Fx = ss.norm(120, 10).cdf
print('Probabilidade de um valor cair no intervalo = {:.5f}'.format(Fx(139.6) -
 ↪Fx(100.4)))
```

```
Probabilidade de um valor cair no intervalo = 0.95000
```