MAT0236 - Funções Diferenciáveis e Séries
Lista 1 - 2019

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

   (a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b$, então $\dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n$.

   (b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $0 < n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$.

   (c) Use $a = 1 + 1/(n+1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte (b) para demonstrar que $(a_n)_n$ é crescente.

   (d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte (b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (e) Use as partes (c) e (d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua, usando também (c) que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe.

2. Mostre que:

   (a) $\left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{2n+3} \to e$; (b) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$;
   (c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} \to e^2$; (d) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n} \to \sqrt{e}$.

3. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

   1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$
   2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$
   3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots$
   4) $a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$
   5) $c_k = \frac{\sqrt{k+1}}{k-1}, k \geq 2$
   6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$
   7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
   9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$
   10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$
   11) $a_n = \frac{\operatorname{sen} n}{n}$
   12) $a_n = \operatorname{sen} n$; $b_n = \operatorname{sen}(n\pi)$; $c_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
   13) $a_n = \frac{2n+\operatorname{sen} n}{5n+1}$
   14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$
   15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$
   16) $a_n = \frac{n\operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$
   17) $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$
   18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$
   19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$
   20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$
   21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$
   22) $a_n = n - n^2\operatorname{sen}\frac{1}{n}$
   23) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$
   24) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ onde $0 < a < b$
   25) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
   26) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
   27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$
   28) $a_n = \sqrt[n]{n}$
   29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
   30) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}$, $a > 0$
   31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$
   32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$
   33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$
   34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
   35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$
   36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$
   37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$
   38) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

4. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas. Decida se cada afirmacão abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

   (a) Se $a_n \to a$ então $|a_n| \to |a|$.

   (b) Se $|a_n| \to |a|$ então $a_n \to a$.

   (c) Se $a_n \to a$ e $a_n \leq 0$ então $a \leq 0$.

   (d) Se $a_n \to a$ e $a_n > 0$ então $a > 0$.

   (e) Se $a_n \to a$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge então $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

(f) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não convergem então $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

(g) Se $a_n\cdot b_n\to d$ então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem.

(h) Se $a_n\cdot b_n\to 0$ então ou $a_n\to 0$ ou $b_n\to 0$

5. (a) Sejam $A\subset\mathbb{R}$ e $f:A\to A$ uma função contínua em A e $a\in A$. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência definida por: $a_0\in A$ e $a_{n+1}=f(a_n)$, para todo $n\geq 0$ e suponha que $(a_n)_n$ converge para a. Prove que $f(a)=a$.

   (b) Considere a sequência $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ... Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

   (c) Seja a sequência definida por recorrência da seguinte forma: $x_1=\sqrt{2}$ e $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, para $n\in\mathbb{N}$, com $n\geq 2$. Mostre que a sequência é crescente e limitada superiormente. Obtenha o seu limite.

   (d) Mostre que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}}\to 2$.

6. **Sequência de Fibonacci e Razão Áurea**

   (a) Diz-se que um ponto B de um segmento $\overline{OA}$ divide este segmento na **Razão Áurea** se $\frac{OA}{OB}=\frac{OB}{BA}$. Seja $\varphi=\frac{OB}{BA}$. Mostre que φ é a raiz positiva da equação $x^2-x-1=0$.

   (b) (**Sequência de Fibonacci**). Considere a sequência dada por $f_0=f_1=1$ e $f_n=f_{n-2}+f_{n-1}$, para $n\geq 2$. Prove que a sequência $x_n=\frac{f_{n+1}}{f_n}$ converge e que seu limite é φ .

7. Considere a sequência $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $p_1=q_1=1$ e, para $n\geq 2$, $p_n=p_{n-1}+2q_{n-1}$ e $q_n=p_{n-1}+q_{n-1}$. Prove que a sequência é convergente e que $\lim\frac{p_n}{q_n}=\sqrt{2}$.

8. Mostre que
$$\left[\frac{n+1}{n^2}+\frac{(n+1)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]\to e-1.$$

RESPOSTAS

3.

1) converge para 1	2) diverge	3) diverge
4) converge para 2	5) converge para 0	6) converge para $\frac{1}{4}$
7) converge para 0	8) converge para 1	9) converge para $\frac{3}{2}$
10) converge para $\frac{1}{2}$	11) converge para 0	12) a_n e c_n divergem ; $b_n\to 0$
13) converge para $\frac{2}{5}$	14) converge para 0	15) converge para 1
16) converge para 0	17) converge para 0	18) converge para e
19) converge para 0	20) converge para 0 se $\|a\|<1$	21) converge para 0
22) converge para 0	23) diverge	24) converge para b
25) converge para 0	26) converge para $\frac{1}{2}$	27) converge para 0
28) converge para 1	29) converge para 0, $\alpha\in\mathbb{R}$	30) converge para 0
31) diverge	32) converge para 1	33) $1/e$
34) diverge	35) 1	36) 0
37) exp(22/15)	38) 1	

5. (b) 2; (c) 2.