UFC - Departamento de Computação – Métodos Numéricos II – 2017.1

Avaliação Parcial I

Nome: Thiago de Sousa Garcia – 374204

Questão 1)

1.4) Solução: Considerando a função f(x) = x/tan(x), a ser integrada no intervalo (0,pi/2),para integrá-la devemos utilizar apenas as fórmulas de Newton Cotes aberta, pois a função não é calculável nas extremidades(0 e pi/2). Além de Newton Cotes também utilizaremos a quadratura de Gauss Legendre e os métodos de exponenciação.

Observações: ***A precisão utilizada é de 0.0001.
* O resultado exato é dado por (pi/2)*ln(2) = 1.088793045
* Consideramos (pi/2) = 1.57079632679

Métodos	Resultado	Erro
Newton Cotes Aberta grau 0	1.0888	6.955 * (10 ^ -6)
Newton Cotes Aberta grau 1	1.08882	2.6955 * (10 ^ -5)
Newton Cotes Aberta grau 2	1.08879	3.045 * (10 ^ -6)
Newton Cotes Aberta grau 3	1.08879	3.045 * (10 ^ -6)
Newton Cotes Aberta grau 4	1.08879	3.045 * (10 ^ -6)

Gauss Legendre 1 ponto	1.0888	6.955 * (10 ^ -6)
Gauss Legendre 2 pontos	1.08879	3.045 * (10 ^ -6)
Gauss Legendre 3 pontos	1.0888	6.955 * (10 ^ -6)
Gauss Legendre 4 pontos	1.08873	6.3045 * (10 ^ -5)
Exponenciação Simples	1.08878	1.3045 * (10 ^ - 5)

Questão 2)

Solução:

Temos que:

f(x,y) = $\sqrt{100-((x*x)+(y*y))}$

Onde, a parametrização de x e y em relação é tal que:

$$x = 2N_2(\alpha,\beta) + 3\ N_3(\alpha,\beta) + N_4(\alpha,\beta)$$
$$y = N_2(\alpha,\beta) + 3\ N_3(\alpha,\beta) + 2N_4(\alpha,\beta)$$

sendo:

$$N_2(\alpha,\beta) =-\tfrac{1}{4}(\alpha+1)(\beta-1)$$
$$N_3(\alpha,\beta) = \tfrac{1}{4}(\alpha+1)(\beta+1)$$
$$N_4(\alpha,\beta) =-\tfrac{1}{4}(\alpha-1)(\beta+1)$$

Derivamos os termos N_2 , N_3 e N_4 para facilitar a derivação dos termos x e y que são compostos pelos termos anteriores :

Derivando N_2 em relação a α temos:
$\frac{dN_2}{d\alpha} = -\frac{1}{4}(\beta - 1)$

Derivando N_3 em relação a α temos:
$\frac{dN_3}{d\alpha} = \frac{1}{4}(\beta + 1)$

Derivando N_4 em relação a α temos:
$\frac{dN_4}{d\alpha} = -\frac{1}{4}(\beta + 1)$

Agora, iremos derivar todos os termos anteriores, mas agora em relação a β:
$\frac{dN_2}{d\beta} = -\frac{1}{4}(\alpha + 1)$

$\frac{dN_3}{d\beta} = \frac{1}{4}(\alpha + 1)$

$\frac{dN_4}{d\beta} = -\frac{1}{4}(\alpha - 1)$

Como o termo x é composto pela soma dos termos N2,N3 e N4, e a derivada da soma, é a soma das derivadas,temos que:

A derivada de x em relação a α é:
$\frac{dx}{d\alpha} = -2\frac{1}{4}(\beta - 1) + 3\frac{1}{4}(\beta + 1) - \frac{1}{4}(\beta + 1) = -\frac{1}{2}(\beta - 1) + \frac{3}{4}(\beta + 1) - \frac{1}{4}(\beta + 1) =$
$-\frac{1}{2}(\beta - 1) + \frac{1}{2}(\beta + 1) = 1$

A derivada de x em relação a β é:
$\frac{dx}{d\beta} = -\frac{1}{2}(\alpha + 1) + \frac{3}{4}(\alpha + 1) - \frac{1}{4}(\alpha - 1) = \frac{1}{4}(\alpha + 1) - \frac{1}{4}(\alpha - 1) = \frac{1}{2}$

A derivada de y em relação a α é:
$\frac{dy}{d\alpha} = -\frac{1}{4}(\beta - 1) + \frac{3}{4}(\beta + 1) - \frac{1}{2}(\beta - 1) = \frac{1}{2}$

A derivada de y em relação a β é:

$$\frac{dy}{d\beta} = -\frac{1}{4}(\alpha+1)+\frac{3}{4}(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha-1) = \frac{1}{2}(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha-1) = 1$$

Logo, a matriz jacobiana é:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{d\alpha} & \frac{dx}{d\beta} \\ \frac{dy}{d\alpha} & \frac{dy}{d\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

E temos que o determinante de J é:

$$det(J) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Logo,:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta))\ det[J(\alpha,\beta)]\ d\alpha d\beta$$

Substituindo $det[J(\alpha,\beta)]$ por ¾, temos:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)) * \left(\frac{3}{4}\right)\ d\alpha d\beta$$

$$V = \left(\frac{3}{4}\right) * \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta))\ d\alpha d\beta$$

Iremos utilizar 3 pontos de Legendre para cada integral, os pontos e as raízes estão determinadas abaixo:

Pontos e raízes para α:

$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\alpha_2 = 0$

$\alpha_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$

$w_1 = \frac{5}{9}$

$w_2 = \frac{8}{9}$

$w_3 = \frac{5}{9}$

Pontos e raízes para β:

$$\beta_1 = -\sqrt{\tfrac{3}{5}}$$
$$\beta_2 = 0$$
$$\beta_3 = \sqrt{\tfrac{3}{5}}$$

$$w_1 = \tfrac{5}{9}$$
$$w_2 = \tfrac{8}{9}$$
$$w_3 = \tfrac{5}{9}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta} w_i w_j\, f(x(\alpha_i,\beta_j), y(\alpha_i,\beta_j))\; det[J(\alpha_i,\beta_j)]$$
$$V = (\tfrac{3}{4}) * \sum_{i=1}^{N_\alpha}\sum_{j=1}^{N_\beta} w_i w_j\, \sqrt{100 - ((x(\alpha_i,\beta_j)^2 + y(\alpha_i,\beta_j)^2)}$$

Daí, ao calcularmos as integrais temos que o volume é de aproximadamente:

$$V \simeq 29.5062$$