Taxas e Proporções

Thiago Tavares Lopes

14 abril 2025

Sumário

1 Introdução

2 Distribuição Gompertz Unitária

A distribuição Gompertz Unitária (UGo), foi proposta em 2019 por Josmar Mazucheli, através como uma transformação do tipo $X = \exp(-Y)$ em que Y é da distribuição Gompertz. Já a distribuição Gompertz proposta pelo matemático e atuário Benjamin Gompertz em 1865.

Seja **X**, uma variável aleatória com suporte duplamente limitado $X \in (0,1)$. Sua Função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x|\mu;\sigma) = \mu\sigma x^{-(\sigma+1)} \exp\left[-\mu(x^{-\sigma} - 1)\right] \tag{1}$$

```
dUGo<-function(x, mu=.5, sigma=1.2){

  fx<-mu*sigma * (x^-(sigma+1)) * exp(-mu*(x^(-sigma)-1))

  return(fx)

}
```

Seja, Fx seja uma função de densidade, a mesma deve seguir as seguintes propriedades:

Para testar

```
integrate(dUGo,0,1)
```

```
## 1 with absolute error < 1.3e-05
```

Função Acumulada

$$f(x|\mu;\sigma) = exp[-\mu(x^{-\sigma} - 1)] \tag{2}$$

```
pUGo<-function(q, mu=.5, sigma=1.2){

  cdf<-exp(-mu*(q^(-sigma)-1))

  return(cdf)

}
```

```r
pUGo(.25)
```

```
## [1] 0.1177707
```

```r
integrate(dUGo, 0, .25)
```

```
## 0.1177707 with absolute error < 1.3e-05
```

Função Quantílica

$$Q(p|\mu;\sigma) = \exp\left[-\frac{1}{\sigma}\log\left(\mu - \log p\right) - \log\mu\right] \tag{3}$$

```r
qUGo<-function(u, mu=.5, sigma=1.2)
{
   q<-((-log(u)/mu)+1)^(-1/sigma)

  return(q)
}

u=pUGo(.82)
qUGo(u)
```

```
## [1] 0.82
```

Log-Verossimilhança

$$\ell(\mu;\sigma|X) = \sum_{i=1}^{n}\left[\log(\mu) + \log(\sigma) - (\sigma+1)\log(x) - \mu(x^{-\sigma} - 1)\right] \tag{4}$$

```r
log_lik <- function(theta, x) {

  n <- length(x)
  mu<-theta[1]
  sigma<-theta[2]

  term1 <- n * log(mu)
  term2 <- n * log(sigma)
  term3 <- -(sigma + 1) * sum(log(x))
  term4 <- -mu * sum(x^(-sigma) - 1)

  ll <- term1 + term2 + term3 + term4
  return(ll)
}
```

```r
set.seed(123)
x_sample <- runif(100, min = 0.01, max = 0.99)

theta<-c(2,3)


log_lik(theta, x_sample)
```

```
## [1] -1777935
```