Probabilidad Condicional

PROBABILIDAD CONDICIONAL.

- Cuando sabemos que un evento A ocurrió y queremos saber la probabilidad de que ocurra un evento B, se dice entonces que queremos calcular la **probabilidad de B condicionada por A**. Simbólicamente:

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}$$

Siendo P(A) > 0

- Coloquialmente se lee como "**la probabilidad de B dado A**" y se define como el cociente entre la probabilidad conjunta de A con B, y la probabilidad de A (siempre que A no sea el evento imposible)

Probabilidad Condicional

<u>EJEMPLO 1</u>: De un cierto grupo de personas se sabe que el 80% son morochos, que el 25% son fumadores y entre los que son morochos o fumadores constituyen el 85% del grupo. Calcular la probabilidad de elegir un fumador y que este resulte ser morocho.

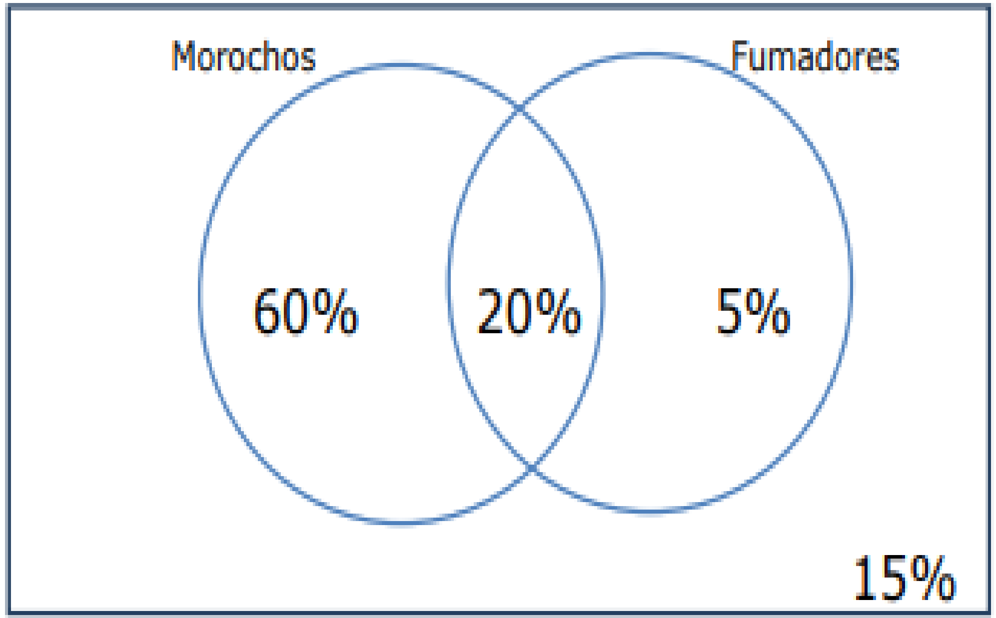
Datos: { M = 80%; F = 25%; M∪F = 85% }

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

$$0{,}85 = 0{,}8 + 0{,}25 - P(M \cap F)$$

$$\Rightarrow P(M \cap F) = 0{,}20$$

Representamos el diagrama de Venn….



Probabilidad Condicional

Finalmente, utilizando la definición de probabilidad condicional obtenemos:

$P\ (M/F) = P(M \cap F)/P(F) = 0{,}2/0{,}25 = 0{,}8$

Esto mismo lo podemos analizar y/o verificar con la ayuda de una tabla de doble entrada:

	F	NF	SUBT
M	***20***	*60*	***80***
NM	*5*	*15*	*20*
SUBT	***25***	*75*	***100%***

Probabilidad Condicional

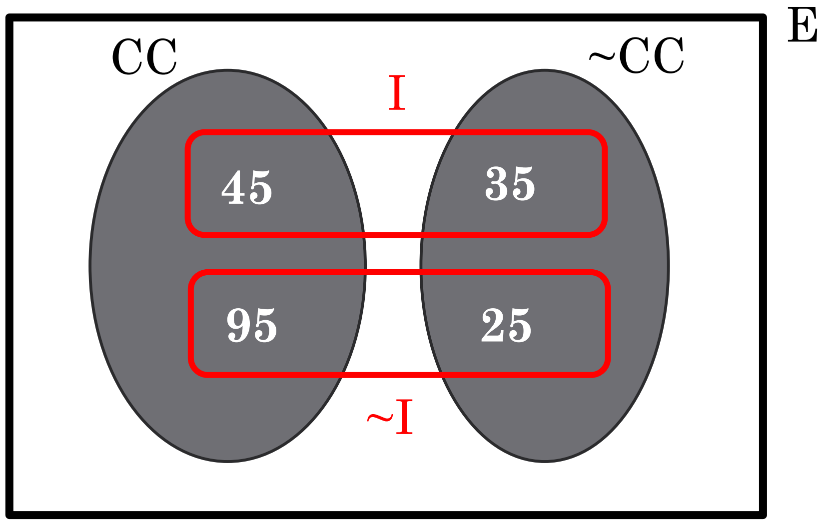
EJEMPLO 2: En un estudio se intenta asociar el consumo de café con el insomnio. Para ello se considera una muestra de 200 personas y se analiza si consumen café o no y si presentan problemas de insomnio o no. Del total de la muestra el 40% refirieron problemas de insomnio, el 70% consume café y 35 personas tienen insomnio pero no consumen café.

Veamos cómo construimos la tabla de doble entrada para nuestro ejemplo:

	consume café	no consume café	totales
duerme bien	95	25	120
insomnio	45	35	80
totales	140	60	200

Probabilidad Condicional

Cuál es la probabilidad de que una persona:



(a) tenga insomnio y consuma café?
$P(CC \cap I) = 45/200$

(b) consuma café.
$P(CC) = 140/200$

(c) tenga insomnio o consuma café.
$P(CC \cup I) = P(CC) + P(I) - P(CC \cap I) = 140/200 + 80/200 - 45/200 = 175/200$

(d) tenga insomnio sabiendo que consume café.
$P(I / CC) = P(I \cap CC)/P(CC) = 45/140$

(e) tenga insomnio sabiendo que no consume café.
$P(I / \sim CC) = P(I \cap \sim CC)/P(\sim CC) = 35/60$

Probabilidad Condicional

PROBABILIDAD CONJUNTA

De la definición de probabilidad condicional, se desprende la llamada probabilidad conjunta o teorema del producto cuando **los eventos dados A y B son dependientes.**

Si $P(B/A) = P(B \cap A) / P(A)$ entonces……

$$\boxed{P(B \cap A) = P(B/A)\ .\ P(A)}$$

¿Cómo sería la expresión de esta regla para tres conjuntos?

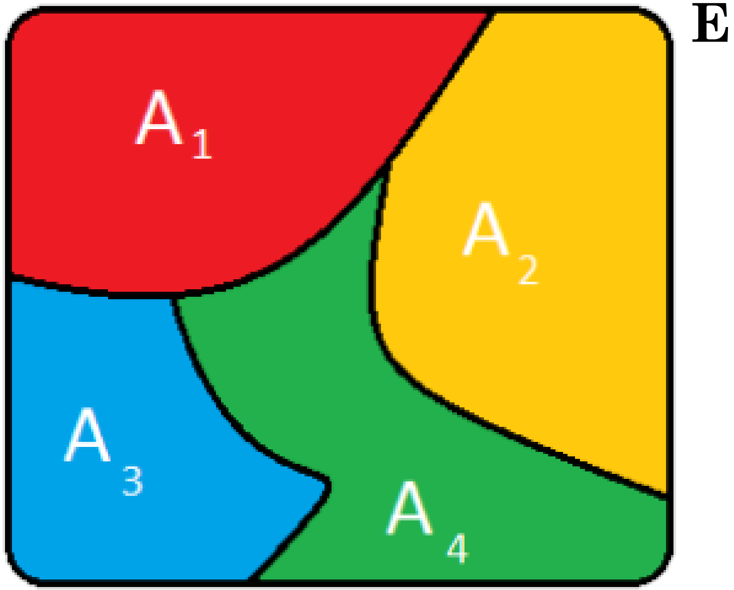
$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A/B \cap C)\ .\ P(B \cap C) = P(A/B \cap C)\ .\ P(B/C)\ .\ P(C)}$$

Probabilidad Condicional

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

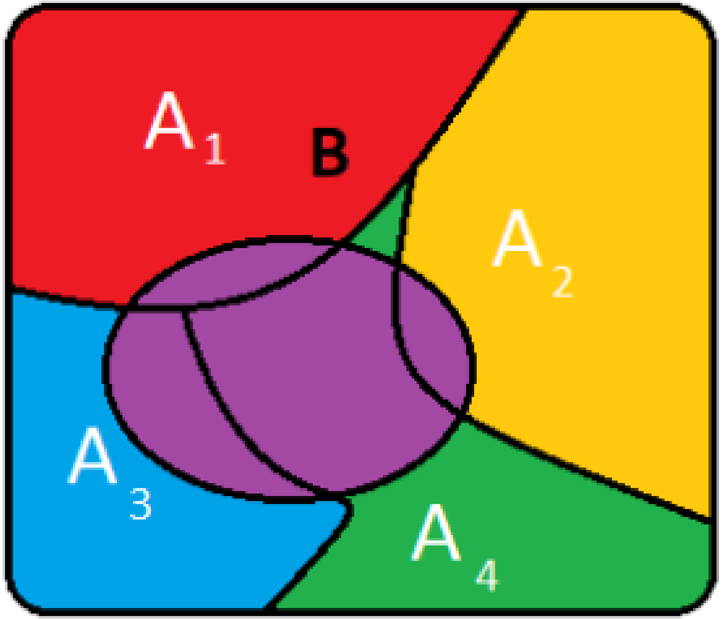
Decimos que una familia de subconjuntos $\{Ai\}_{1 \leq i \leq n}$ del espacio muestral E es una partición de este, cuando satisface las siguientes tres condiciones:

- ✓ *Ninguna parte es vacía:* $Ai \neq \emptyset$
- ✓ *Las partes son disjuntas:* $Ai \cap Aj = \emptyset$
- ✓ *Las partes son exhaustivas:* $\sum Ai = E$



TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

Dado un espacio muestral E, un evento o suceso B asociado a este espacio muestral y una serie de particiones A_i tal que $1 \leq i \leq n$:



Decimos que..... $\boxed{\mathbf{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\ .\ P(A_i)}}$

Probabilidad Condicional

<u>EJEMPLO 3</u>: Tres máquinas A, B, C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son 3%, 4% y 5% respectivamente. Si se selecciona al azar un artículo, hallar la probabilidad de que el artículo sea defectuoso (D).

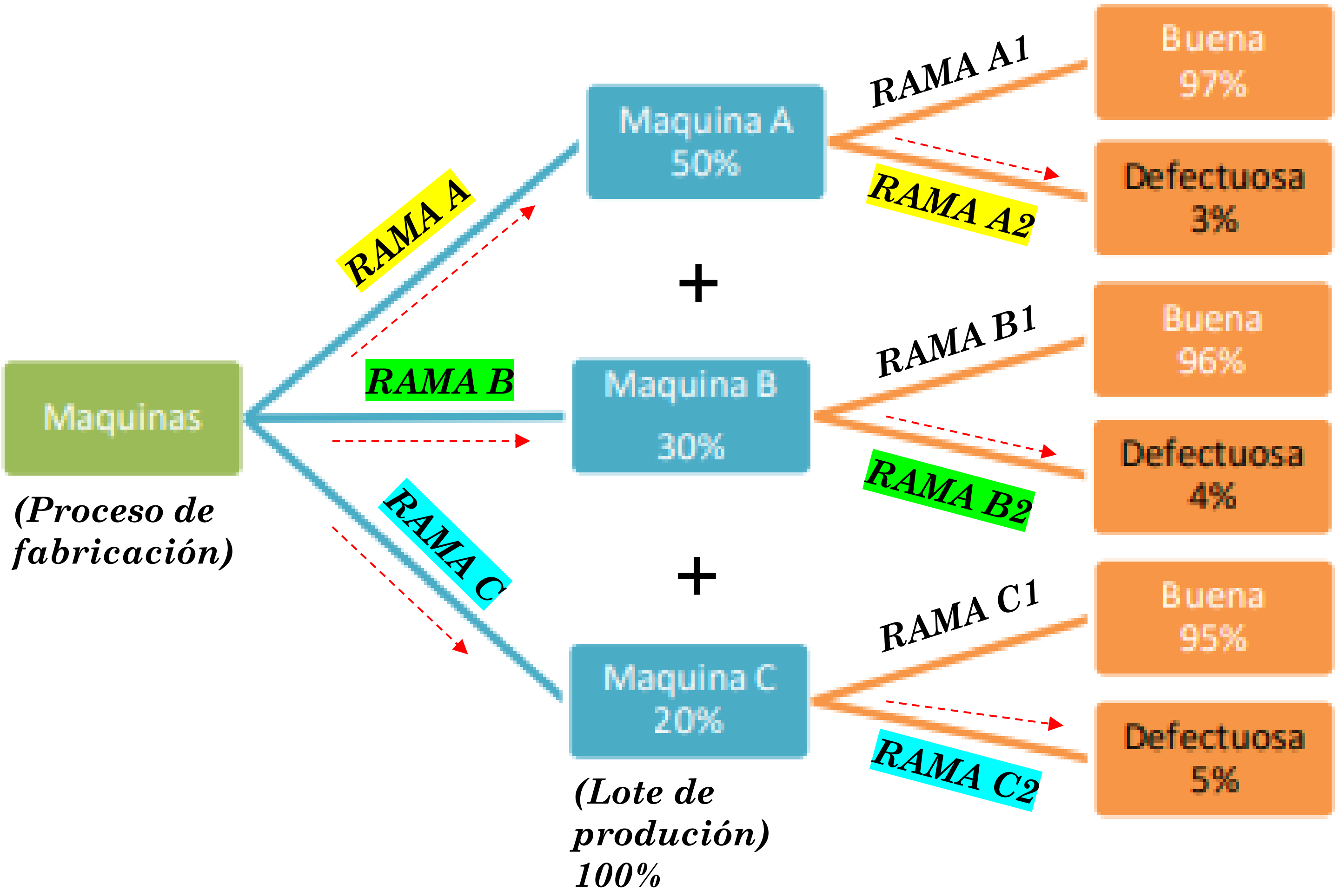
<u>Datos</u>:

Probabilidad de obtener 1 artículo al azar dentro del lote de fabricación (E):

- $P(A) = 0{,}5$; siendo A: "Artículo fabricado por la máquina A"
- $P(B) = 0{,}3$; siendo B: "Artículo fabricado por la máquina B"
- $P(C) = 0{,}2$; siendo C: "Artículo fabricado por la máquina C"

Probabilidad Condicional

Si utilizamos el diagrama de árbol como figura de análisis…



= 0,03*0,5

+

= 0,04*0,3

+

= 0,05*0,2

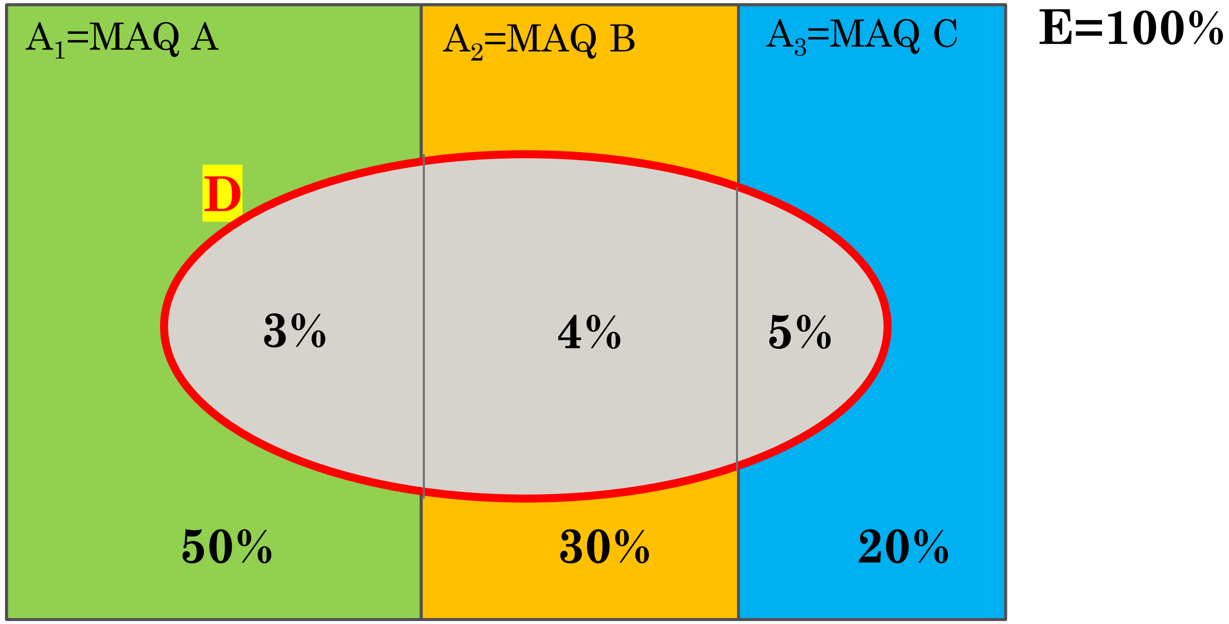
Probabilidad Condicional

Finalmente operamos con la probabilidad total:

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) = P(D/A).P(A) + P(D/B).P(B) + P(D/C).P(C)$

$P(D) = 0,03*0,5 + 0,04*0,3 + 0,05*0,2$

$P(D) = 0,037$; siendo D: “Obtener un artículo defectuoso al azar”



TEOREMA DE BAYES.

Dicho teorema parte de una situación en la que es posible conocer las probabilidades de que ocurran una serie de sucesos o particiones A_i.

A esta situación o planteo se le agrega un suceso B cuya ocurrencia proporciona cierta información. Las probabilidades de ocurrencia de B son distintas para cada uno de los sucesos A_i que hayan ocurrido.

Entonces, **conociendo que ha ocurrido un suceso B**, Bayes nos indica como modifica esta información las probabilidades de los sucesos A_i.

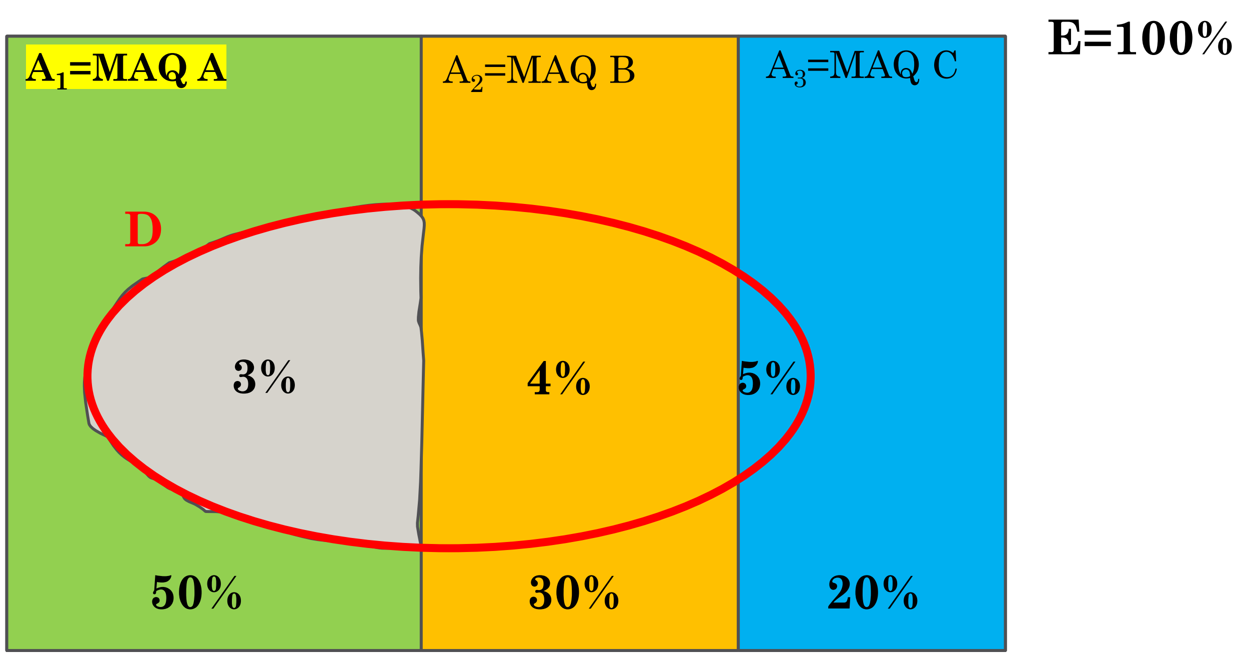
$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_i)\,.\,P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\,.\,P(A_i)}}$$

PROB. CONJUNTA

PROB. TOTAL

Siendo $A_1; A_2; \ldots\ldots; A_n$ particiones del espacio muestral E

EJEMPLO 4: Tres máquinas A, B, C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son 3%, 4% y 5% respectivamente. **Supongamos que se selecciona al azar un artículo y este resulta ser defectuoso**. ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo seleccionado fuera producido por la maquina A?



Probabilidad Condicional

Sabemos del ejemplo 3 que <u>P(D) = 0,037</u>

También conocemos la probabilidad condicional $P(D/A) = \dfrac{\mathbf{P(D\cap A)}}{P(A)} = 0{,}03$

$$\therefore P(A/D) = \frac{\mathbf{P(A\cap D)}}{P(D)} = \frac{P(D/A).P(A)}{[P(D/A).P(A) + P(D/B).P(B) + P(D/C).P(C)]}$$

$$P(A/D) = \frac{(0{,}03*0{,}5)}{(0{,}03*0{,}5+0{,}04*0{,}3+0{,}05*0{,}2)} = 15/37 = 0{,}4\widehat{05}$$