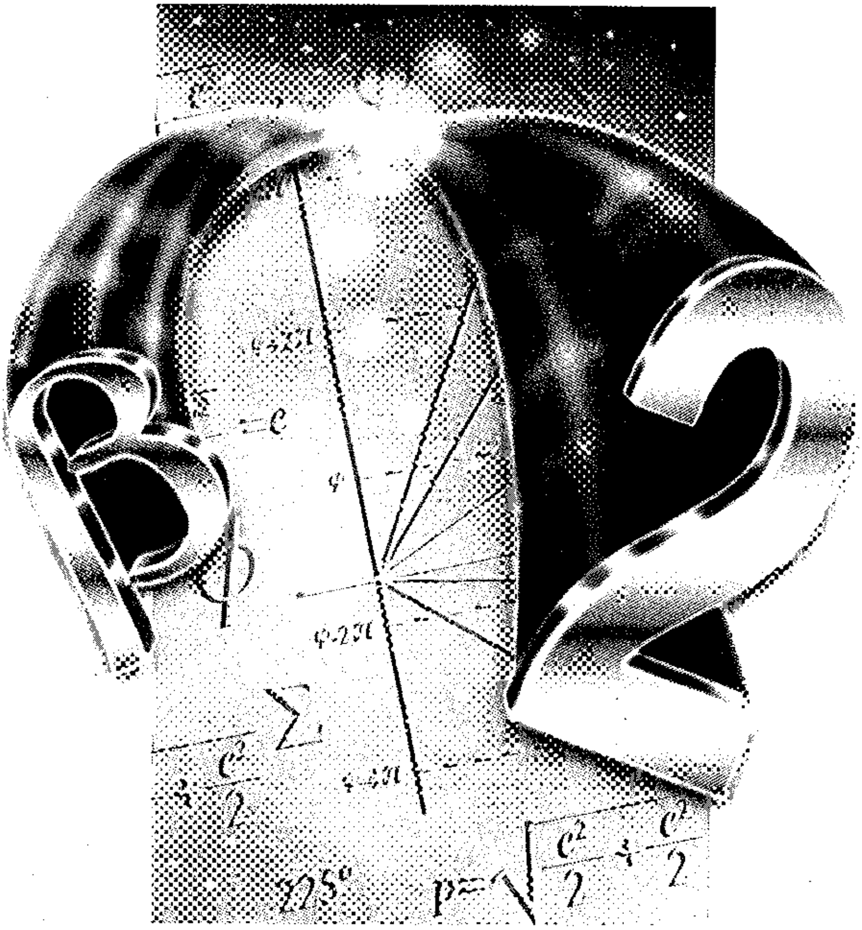
ALGEBRA II

ARMANDO O. ROJO



EL ATENEO

4-60. Determinar los rangos de A y de AA^t por Gauss Jordan.

4-61. Demostrar primero que $S_C(A+B) \subset S_C(A) + S_C(B)$. Al pasar a la relación entre sus dimensiones, tener en cuenta 2.8.1.

4-62. i) considerar el elemento genérico de la diagonal de AB y de la diagonal de BA.

ii) asociar y aplicar i).

iii) aplicar ii).

4-63. Premultiplicar por A la relación $A\,X = a\,X$, y tener en cuenta que $A^2 = A$.

4-64. Realizar la misma multiplicación que en el ejercicio anterior y considerar que $A^2 = I$.

4-65. i) Expresar $\overline{X}$ como producto de matrices, calcular su cuadrado y tener en cuenta que $X^t\,\vec{1}$ donde $\vec{1}$ es la matriz $n \times 1$ formada por unos, es un escalar, y por lo tanto igual a su traspuesta.

Resulta $A = \dfrac{1}{n^2}\,\vec{1}\,\vec{1}^{\,t}$, o sea, una matriz $n \times m$ cuyos elementos son iguales a $\dfrac{1}{n^2}$

ii) Se obtiene $A = \dfrac{1}{n}\,\vec{1}\,\vec{1}^{\,t}$.

iii) Después de desarrollar la sumatoria y reducir términos, se llega a que

$A = I - \dfrac{1}{n}\,\vec{1}\,\vec{1}^{\,t}$. El lector puede comprobar que esta matriz es idempotente.

4-66. Efectuar el producto entre I − T y la suma indicada. Considerar que $T^n = N$.

4-67. Particionar A en dos bloques del tipo 4×2, y efectuar el producto.

4-68. Trasponiendo términos se prueba que A admite inversa.

4-69. Por Gauss Jordan se obtiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p^3 \\ 0 & 1 & p & p^2 \\ 0 & 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-70. Para la condición necesaria, efectuar los productos AB y BA, e igualarlos para obtener α y β. Para la condición suficiente, efectuar ambos productos sustituyendo B por su expresión.

4-71. Aplicar inducción completa.

4-72. i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

512 (075) ROJ
Rojo, Armando O.
Algebra II. - 13a. ed. - Buenos Aires: El Ateneo, 1995.
XII, 396 p.; 23 x 16 cm.

ISBN 950-02-5205-8

I. Título - 1. Matemática - Enseñanza Secundaria

Impreso en T. G. COLOR EFE,
Paso 192, Avellaneda, Bs. As.,
el 6 de marzo de 1995.
Tirada: 2.000 ejemplares.

IMPRESO EN LA ARGENTINA

PROLOGO

Este libro responde a los contenidos de la asignatura ALGEBRA LINEAL, que figura en los planes de estudios del ciclo básico de Matemática de las facultades e institutos de profesorado. Se supone adquirido el conocimiento de los temas relativos al álgebra de conjuntos, relaciones, y funciones, y de las estructuras de grupo, anillo y cuerpo. Esencialmente se desarrolla aquí la estructura de espacio vectorial y se estudian los modelos particulares indispensables en la formación actual de profesionales y en las aplicaciones a disciplinas de uso cotidiano, entre las que citamos, por ejemplo, la Estadística y la Investigación operativa.

El esquema seguido es análogo al expuesto en Algebra I, editado por EL ATENEO en 1972. La teoría es ilustrada con el desarrollo de ejemplos en los que el alumno puede apoyarse. En cada capítulo se propone un trabajo práctico cuyas respuestas se sugieren en el texto.

Agradezco a la editorial EL ATENEO y a su personal la colaboración que me han brindado en todo lo concerniente a esta publicación.

ARMANDO O. ROJO

Buenos Aires, mayo de 1973.

CONTENIDO

Capítulo 1

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL SUBESPACIOS

1.1. INTRODUCCION

La estructura de espacio vectorial, que tratamos en este capítulo, es el concepto básico del Algebra Lineal. Confiere unidad y precisión a temas esenciales de la matemática que tienen vastas aplicaciones en la ciencia y en la tecnología actuales. Después de introducir el sistema axiomático y de dar las propiedades fundamentales, proponemos los espacios vectoriales de funciones, de los que se derivan los modelos de los espacios de matrices, n–uplas y sucesiones de elementos de un cuerpo. Se da, finalmente, el concepto de subespacio.

1.2. CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

Sean: V un conjunto no vacío, K un cuerpo, + y . dos funciones, que llamaremos suma y producto, respectivamente.

Definición

El objeto $(V, +, K, .)$ es un espacio vectorial si y sólo si se verifican los siguientes:

A_1 . La suma es una ley de composición interna en V.

$$+ : V^2 \to V$$

O sea

$$x \in V \wedge y \in V \Rightarrow x + y \in V$$

Esto significa que la suma de dos elementos cualesquiera de V es un único elemento de V.

A_2 . La suma es asociativa en V.

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

cualesquiera que sean x, y, z en V.

A_3 . Existe un neutro para la suma en V.
El elemento neutro se denota con $\mathbf{0}$.

$$\exists\, \mathbf{0} \in V \,/\, \forall\, x \in V : x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$$

A_4 . Todo elemento de V admite inverso aditivo u opuesto en V.

$$\forall\, x \in V, \exists\, y \in V \,/\, x + y = y + x = \mathbf{0}$$

Al opuesto de x lo denotamos con $-x$, o sea, $y = -x$.

A_5 . La suma es conmutativa en V.

$$x + y = y + x$$

cualesquiera que sean x, y en V.

A_6 . El producto es una ley de composición externa en V con escalares u operadores en K.

$$. : K \times V \to V$$

De acuerdo con 5.6, *Algebra I*, del mismo autor, la imagen del par (α, x), donde $\alpha \in K$ y $x \in V$, se escribe $\alpha\, x$ y se llama producto del escalar α por x.
O sea

$$\alpha \in K \wedge x \in V \Rightarrow \alpha\, x \in V$$

A_7 . El producto satisface la asociatividad mixta.

$$\forall\, \alpha \in K, \forall\, \beta \in K, \forall\, x \in V : \alpha\,(\beta\, x) = (\alpha\, \beta)\, x$$

Observamos aquí que los dos productos que figuran en el primer miembro corresponden a la ley de composición externa. Pero el producto $\alpha\,\beta$ del segundo miembro se efectúa en K.

A_8 . El producto es distributivo respecto de la suma en K.

$$\forall\, \alpha \in K, \forall\, \beta \in K, \forall\, x \in V : (\alpha + \beta)\, x = \alpha\, x + \beta\, x$$

La suma $\alpha + \beta$ se efectúa en K, pero la suma que figura en el segundo miembro corresponde a la ley de composición interna en V.

A_9 . El producto es distributivo respecto de la suma en V.

$$\forall\, \alpha \in K, \forall\, x \in V, \forall\, y \in V : \alpha\,.(x + y) = \alpha\, x + \alpha\, y$$

Las dos sumas se realizan en V.

A_{10}. La unidad del cuerpo es neutro para el producto.

$$\forall\, x \in V : 1x = x$$

donde 1 denota la identidad en K.

Los axiomas A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 caracterizan a $(V\,,+)$ como grupo abeliano. Los últimos cinco axiomas son relativos a la ley de composición externa.

Los elementos de V se llaman vectores; en particular, el elemento neutro para la suma recibe el nombre de vector nulo. A menudo hablaremos del espacio vectorial V, sobrentendiendo que nos referimos a la cuaterna (V, + , K, .). La simplificación de las notaciones hace conveniente el uso de los mismos símbolos para nombrar las leyes de composición interna en K, la suma en V y el producto de escalares por vectores. O sea, al decir K nos estamos refiriendo al cuerpo (K, +, .), donde los signos "+" y "." denotan las dos leyes de composición interna en K, que no tienen el mismo significado que las que figuran en (V, +, K, .). Distinguiendo adecuadamente los elementos de K y los de V, no hay lugar a confusión.

Así

$\alpha + \beta$ es una suma en K	$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es una suma en V
$\alpha\beta$ es un producto en K	$\alpha\,\mathbf{x}$ es el producto de un escalar por un vector

Ejemplo 1-1.

Sean: $V = \mathbf{R}^2$, $K = \mathbf{R}$, la adición definida en $\mathbf{R}^2$ por

$$(a\,,\,b) + (c\,,\,d) = (a + c\,,\,b + d) \qquad (1)$$

y el producto de números reales por elementos de $\mathbf{R}^2$ definido mediante

$$\alpha\,(a\,,\,b) = (\alpha\,a,\,\alpha\,b) \qquad (2)$$

Resulta $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}\,, .)$ el espacio vectorial de los pares ordenados de números reales sobre el cuerpo de los números reales.

En efecto, de acuerdo con los ejemplos 5-2 y 5-5 iv) del texto nombrado, es $(\mathbf{R}^2\,, +)$ un grupo abeliano.

Por otra parte se verifican:

A_6 . Por la definición (2).

A_7 . $\alpha\left(\beta\,(a\,,\,b)\right) = \alpha\,(\beta\,a\,,\,\beta\,b) = \left(\alpha\,(\beta\,a)\,,\,\alpha\,(\beta\,b)\right) = \left((\alpha\beta)\,a\,,\,(\alpha\beta)\,b\right) =$
$= (\alpha\beta)\,(a\,,\,b)$

Hemos aplicado la definición (2), la asociatividad del producto en $\mathbf{R}$ y la definición (2).

A_8 . $(\alpha + \beta)\,(a\,,\,b) = \left((\alpha + \beta)\,a,\,(\alpha+\beta)\,b\right) = (\alpha\,a + \beta\,a\,,\,\alpha\,b + \beta\,b) =$
$= (\alpha\,a\,,\,\alpha\,b) + (\beta\,a\,,\,\beta\,b) = \alpha\,(a\,,\,b) + \beta\,(a\,,\,b)$

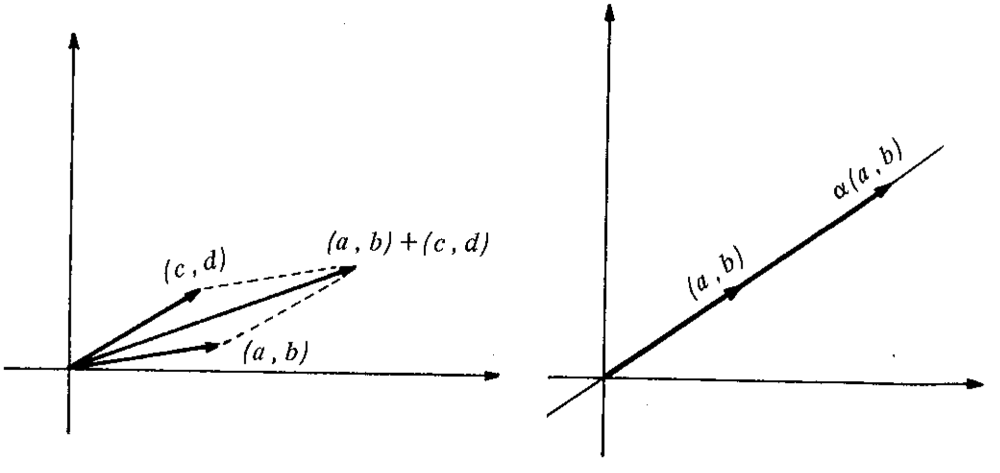
De acuerdo con (2), la distributividad del producto respecto de la suma en $\mathbf{R}$, y las definiciones (1) y (2).

A_9 . $\alpha\left((a\,,\,b) + (c\,,\,d)\right) = \alpha\,(a + c\,,\,b + d) = \left(\alpha\,(a + c)\,,\,\alpha\,(b + d)\right) =$
$= (\alpha\,a + \alpha\,c\,,\,\alpha\,b + \alpha\,d) = (\alpha\,a\,,\,\alpha\,b) + (\alpha\,c\,,\,\alpha\,d) = \alpha\,(a\,,\,b) + \alpha\,(c\,,\,d)$

Según (1), (2), distributividad de la multiplicación respecto de la adición en **R**, y las definiciones (1) y (2).

A_{10}. $1\,(a\,,\,b) = (1a\,,\,1b) = (a\,,\,b)$

El significado geométrico de las operaciones de este espacio vectorial es el siguiente: la suma de dos vectores no colineales del plano queda representada por la diagonal del paralelogramo que forman. El producto de un número real α por un vector no nulo $\mathbf{x} = (a\,,\,b)$, es el vector $\alpha\,\mathbf{x}$ que tiene la misma dirección que $\mathbf{x}$; el mismo sentido si $\alpha > 0$, y sentido opuesto si $\alpha < 0$. Corresponde a una dilatación si $|\alpha| > 1$ y a una contracción si $|\alpha| < 1$. Si $\alpha = 0$, entonces se obtiene el vector nulo.

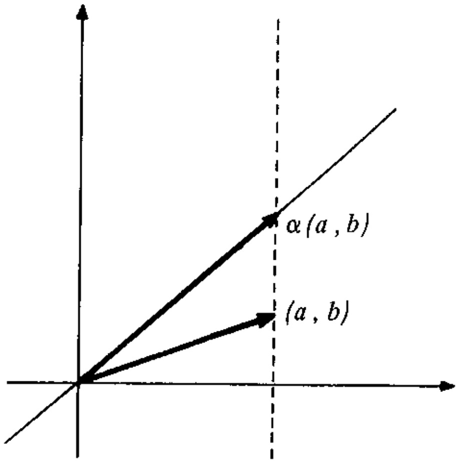


Ejemplo 1-2.

En $\mathbf{R}^2$ se definen: la suma, como en el ejemplo anterior, y la ley de composición externa mediante

$$\alpha\,(a\,,\,b) = (a\,,\,a) \qquad (2')$$

Se verifica, como antes, que $(\mathbf{R}^2\,,\,+)$ es un grupo abeliano.
En cuanto a (2'), satisface A_6. Su significado geométrico es el siguiente: todos los pares ordenados que tienen la misma absisa, al ser multiplicados por cualquier número real, se proyectan sobre la primera bisectriz paralelamente al eje de ordenadas.



También se satisface A_7, pues

$$\alpha\left(\beta(a, b)\right) = \alpha(a, a) = (a, a) = (\alpha\beta)(a, b)$$

No se verifica A_8, ya que

$$(\alpha + \beta)(a, b) = (a, a)$$

pero

$$\alpha(a, b) + \beta(a, b) = (a, a) + (a, a) = (2a, 2a)$$

Este hecho es suficiente para afirmar que no se trata de un espacio vectorial.
El lector puede comprobar que esta interpretación cumple A_9 pero no A_{10}.
Observamos aquí que la estructura de espacio vectorial no es inherente exclusivamente al conjunto V, sino que, además, depende de K y de las leyes de composición que se definan. Aclaramos que toda vez que se mencione al espacio vectorial $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ se sobrentenderá que la suma y el producto son los definidos en (1) y en (2) del ejemplo 1-1.

Ejemplo 1-3.

La estructura de espacio vectorial no es un sistema axiomático independiente, pues A_5 puede deducirse sobre la base de los restantes axiomas.
En efecto

$$x + x + y + y = 1x + 1x + 1y + 1y = (1 + 1)x + (1 + 1)y = (1 + 1)(x + y) =$$
$$= 1(x + y) + 1(x + y) = 1x + 1y + 1x + 1y = x + y + x + y$$

en virtud de A_{10} , A_8 , A_9 , A_8 , A_9 y A_{10} .

O sea

$$\cancel{x} + x + y + \cancel{y} = \cancel{x} + y + x + \cancel{y}$$

Por ley cancelativa en el grupo (V , +) resulta

$$x + y = y + x$$

1.3. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

Sea (V, +, K, .) un espacio vectorial.

1.3.1. El producto del escalar 0 por cualquier vector es el vector nulo.

En efecto, por neutro para la suma en K y A_8 es

$$\alpha x = (\alpha + 0)x = \alpha x + 0x$$

Por A_3 se tiene

$$\cancel{\alpha x} + \mathbf{0} = \cancel{\alpha x} + 0\,x$$

Y por ley cancelativa resulta

$$0\,x = \mathbf{0}$$

1.3.2. El producto de cualquier escalar por el vector nulo es el vector nulo.

Por A_3 y A_9 es

$$\alpha x = \alpha(x + \mathbf{0}) = \alpha x + \alpha \mathbf{0}$$

Entonces

$$\alpha x + \alpha \mathbf{0} = \alpha x$$

Por A_3

$$\cancel{\alpha x} + \alpha \mathbf{0} = \cancel{\alpha x} + \mathbf{0}$$

Y por regularidad en (V, +), resulta

$$\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

1.3.3. Si el producto de un escalar por un vector es el vector nulo, entonces el escalar es 0 o el vector es nulo.

$$\alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Se presentan dos posibilidades: $\alpha = 0$, o bien, $\alpha \neq 0$

En el primer caso es verdadera la primera proposición de la disyunción que figura en la tesis, y por consiguiente ésta es verdadera.

En el segundo caso es necesario probar que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En efecto, siendo $\alpha \neq 0$, existe el inverso multiplicativo en K, α^{-1}. Partiendo de la hipótesis, premultiplicando por α^{-1}, usando A_7, 1.3.2., el producto de inversos en K y A_{10} se tiene

$$\alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha^{-1}\,\mathbf{0} \Rightarrow (\alpha^{-1}\,\alpha)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow 1\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

1.3.4. El opuesto de cualquier escalar por un vector es igual al opuesto de su producto.

$$(-\alpha)\,\mathbf{x} = -(\alpha\,\mathbf{x})$$

Teniendo en cuenta A_4, 1.3.1., la suma de opuestos en K y A_8, es

$$-(\alpha\,\mathbf{x}) + \alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{x} = (-\alpha + \alpha)\,\mathbf{x} = (-\alpha)\,\mathbf{x} + \alpha\,\mathbf{x}$$

De

$$(-\alpha)\,\mathbf{x} + \cancel{\alpha\,\mathbf{x}} = -(\alpha\,\mathbf{x}) + \cancel{\alpha\,\mathbf{x}}$$

después de cancelar, resulta

$$(-\alpha)\,\mathbf{x} = -(\alpha\,\mathbf{x})$$

En particular se tiene

$$(-1)\,\mathbf{x} = -(1\,\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$$

1.4. ESPACIO VECTORIAL DE FUNCIONES

El símbolo K^X denota el conjunto de todas las funciones con dominio un conjunto $X \neq \phi$ y codominio un cuerpo K, o sea

$$K^X = \{\mathbf{f} \,/\, \mathbf{f} : X \to K\}$$

En K^X definimos la suma de funciones y el producto de escalares por funciones mediante

i) Si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son dos elementos cualesquiera de K^X, entonces $\mathbf{f} + \mathbf{g} : X \to K$ es tal que

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \quad \forall x \in X$$

ii) Si α es cualquier elemento de K y $\mathbf{f}$ es cualquier elemento de K^X, entonces $\alpha\,\mathbf{f} : X \to K$ es tal que

$$(\alpha\,\mathbf{f})(x) = \alpha\,\mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X$$

Tanto la suma de funciones con dominio $X \neq \phi$ y codominio K, como el producto de escalares por funciones, se llaman leyes de composición punto a punto.

Resulta $(K^X, +, K, .)$ un espacio vectorial. Para ello, veamos que se verifican los axiomas.

A_1 . $f \in K^X \wedge g \in K^X \Rightarrow f + g \in K^X$ por la definición i)

A_2 . Sean f, g y h en K^X. Cualquiera que sea $x \in X$ se verifica, teniendo en cuenta la definición i) y la asociatividad de la suma en K:

$$\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x) + h(x) = \big(f(x)+g(x)\big) + h(x) =$$

$$= f(x) + \big(g(x)+h(x)\big) = f(x) + (g+h)(x) = \big(f+(g+h)\big)(x)$$

Y por definición de funciones iguales resulta

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

A_3 . El vector nulo es la función nula

$$e: X \to K \text{ definida por } e(x) = 0 \quad \text{cualquiera que sea } x \in X.$$

Sea $f \in K^X$. Teniendo en cuenta i), la definición de e y la suma en K, es

$$(f+e)(x) = f(x) + e(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

Luego

$$f + e = f$$

Análogamente se verifica que $e + f = f$.

A_4 . Inverso aditivo de $f \in K^X$ es la función $-f : X \to K$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$
En efecto, para todo $x \in X$ se verifica

$$(-f+f)(x) = (-f)(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 = e(x)$$

O sea

$$(-f) + f = e$$

Análogamente se prueba que

$$f + (-f) = e$$

A_5 . La suma en K^X es conmutativa, ya que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$$

Luego

$$f + g = g + f \text{ cualesquiera que sean f y g en } K^X.$$

A_6 . $\alpha \in K \wedge f \in K^X \Rightarrow \alpha f \in K^X$ por la definición ii).

A_7 . Sean $\alpha \in K$, $\beta \in K$ y $f \in K^X$.

Entonces

$$\Big(\alpha\,(\beta\,\mathbf{f})\Big)\;(x)=\alpha\;\Big((\beta\,\mathbf{f})\,(x)\Big)\;=\alpha\;\Big(\beta\,\mathbf{f}\,(x)\Big)\;=\;(\alpha\,\beta)\,\mathbf{f}\,(x)=\;\Big((\alpha\,\beta)\,\mathbf{f}\Big)\;(x)$$

Luego

$$\alpha\,(\beta\,\mathbf{f})=(\alpha\,\beta)\,\mathbf{f}$$

A_8 . Considerando

$$\alpha\in K,\beta\in K \text{ y } \mathbf{f}\in K^X \text{ es}$$

$$\Big((\alpha+\beta)\,\mathbf{f}\;\Big)\,(x)=(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}\,(x)=\alpha\,\mathbf{f}\,(x)+\beta\,\mathbf{f}\,(x)=$$
$$=(\alpha\,\mathbf{f})\,(x)+(\beta\,\mathbf{f})\,(x)=(\alpha\,\mathbf{f}+\beta\,\mathbf{f})\,(x)$$

lo que se justifica teniendo en cuenta ii), la distributividad y la asociatividad del producto en K, ii) e i).

Entonces es

$$(\alpha+\beta)\,\mathbf{f}=\alpha\,\mathbf{f}+\beta\,\mathbf{f}$$

A_9 . Sean $\alpha\in K$, $\mathbf{f}\in K^X$ y $\mathbf{g}\in K^X$.

Por ii), i), distributividad del producto respecto de la suma en K y por las definiciones ii) y i) se tiene

$$\Big(\alpha\,(\mathbf{f}+\mathbf{g})\Big)\;(x)=\alpha\;\Big((\mathbf{f}+\mathbf{g})\,(x)\Big)\;=\alpha\;\Big(\mathbf{f}\,(x)+\mathbf{g}\,(x)\Big)\;=$$
$$=\alpha\,\mathbf{f}\,(x)+\alpha\,\mathbf{g}\,(x)=(\alpha\,\mathbf{f})\,(x)+(\alpha\,\mathbf{g})\,(x)=(\alpha\,\mathbf{f}+\alpha\,\mathbf{g})\,(x)$$

O sea

$$\alpha\,(\mathbf{f}+\mathbf{g})=\alpha\,\mathbf{f}+\alpha\,\mathbf{g}$$

A_{10} . Cualquiera que sea **f** en K^X se verifica

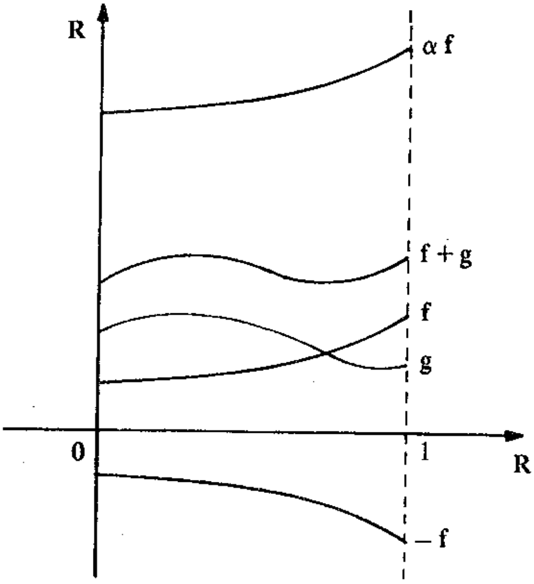
$$(1\mathbf{f})\,(x)=1\;\mathbf{f}\,(x)=\mathbf{f}\,(x)$$

Luego

$$1\;\mathbf{f}=\mathbf{f}$$

La cuaterna $(K^X, +, K, .)$ es el espacio vectorial de las funciones definidas en el conjunto no vacío X y con valores en K, con las leyes de composición punto a punto. Los vectores de este espacio son funciones.

La figura siguiente explica la situación en el caso particular en que K = **R** y X = [0,1]



1.5. ESPACIO VECTORIAL DE *n*-UPLAS DE ELEMENTOS DE K

Con relación al espacio vectorial de funciones $(K^X, +, K, .)$ consideremos el caso particular en que X es el intervalo natural inicial I_n. Toda función $\mathbf{f}: I_n \to K$ es una n-upla de elementos de K, y escribiendo $K^{I_n} = K^n$ es $(K^n, +, K, .)$ el espacio vectorial de las n-uplas de elementos de K.

Las definiciones i) y ii) dadas en 1.4. se traducen aquí de la siguiente manera:

i) Si f y g denotan elementos de K^n, entonces f + g es la función de I_n en K definida por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(i) = \mathbf{f}(i) + \mathbf{g}(i) \text{ cualquiera que sea } i \in I_n$$

Es decir

$$c_i = (\mathbf{f} + \mathbf{g})(i) = \mathbf{f}(i) + \mathbf{g}(i) = a_i + b_i$$

donde a_i, b_i y c_i son las imágenes de i dadas por **f**, **g** y **f** + **g**, respectivamente.

En consecuencia, dos n-uplas de elementos de K se suman componente a componente.

ii) Si $\alpha \in K$ y $\mathbf{f} \in K^n$, entonces α f es la función de I_n en K definida por

$$(\alpha\, \mathbf{f})(i) = \alpha\, \mathbf{f}(i) \text{ cualquiera que sea } i \in I_n.$$

Denotando mediante c_i la imagen de i dada por α **f** es

$$c_i = (\alpha\, \mathbf{f})(i) = \alpha\, \mathbf{f}(i) = \alpha\, a_i$$

Es decir, el producto de un elemento de K por una n-upla se realiza multiplicando en K a dicho elemento por cada componente de la n-upla.

En particular (K, +, K, .) es el espacio vectorial donde los vectores se identifican con los elementos del cuerpo K. En este caso, la ley de composición externa es interna.

En consecuencia, (**R**, +, **R**, .) es el espacio vectorial de los números reales sobre el cuerpo de los reales. Este es un caso particular del espacio vectorial de las n-uplas de números reales sobre el cuerpo de los reales, que denotamos mediante ($\mathbf{R}^n$, +, **R**, .).

($\mathbf{C}^n$, +, **C**, .) es el espacio vectorial de las n-uplas de números complejos sobre el cuerpo de los complejos.

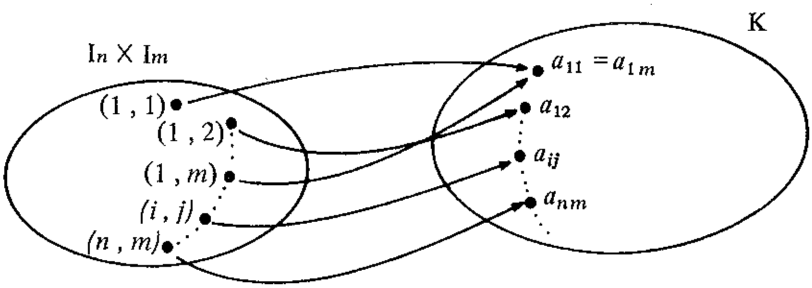
1.6. ESPACIO VECTORIAL DE MATRICES n × m

Particularizando nuevamente con relación al espacio vectorial tratado en 1.4., consideremos $X = I_n \times I_m$, o sea, el producto cartesiano de los dos intervalos naturales iniciales: I_n e I_m.

Llamamos matriz $n \times m$ con elementos en K a toda función

$$f : I_n \times I_m \to K$$

La imagen del elemento $(i\,,j)$ perteneciente al dominio se denota por a_{ij}.



La matriz f queda caracterizada por el conjunto de las imágenes

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix}$$

y suele escribirse como un cuadro de n.m elementos de K dispuestos en n filas y m columnas.

En cada fila o renglón se escriben las imágenes de todos los pares ordenados que tienen la misma primera componente, y en cada columna se anotan las imágenes de todos los pares ordenados que tienen la misma segunda componente. El elemento de la matriz que figura en la fila i y en la columna j se denota por a_{ij}, y es la imagen dada por f, del par (i, j). Llamando A a la matriz cuyo elemento genérico es a_{ij}, escribiremos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Tanto las filas como las columnas de A se llaman líneas de la matriz.

Abreviando, puede escribirse

$$A = (a_{ij}) \text{ donde } i = 1, 2, \dots, n \text{ y } j = 1, 2, \dots, m$$

El conjunto de todas las matrices $n \times m$ con elementos en K es $K^{I_n \times I_m}$ y se denota mediante $K^{n \times m}$.

Las definiciones i) y ii) dadas en 1.4. se traducen aquí de la siguiente manera: si A y B son dos matrices de $K^{n \times m}$, su suma es $C \in K^{n \times m}$, tal que

$$c_{ij} = (f + g)(i, j) = f(i,j) + g(i, j) = a_{ij} + b_{ij}$$

y el producto del escalar $\alpha \in K$ por la matriz A es la matriz de $K^{n \times m}$ cuyo elemento genérico c_{ij} es tal que

$$c_{ij} = (\alpha f)(i, j) = \alpha f(i, j) = \alpha a_{ij}$$

O sea, dos matrices del tipo $n \times m$ se suman elemento a elemento; y para multiplicar un escalar por una matriz $n \times m$ se multiplica dicho escalar por todos los elementos de la matriz.

La cuaterna $(K^{n \times m}, +, K, .)$ denota el espacio vectorial de las matrices $n \times m$ con elementos en K. En este espacio, los vectores son matrices.

En particular $(K^{n \times n}, +, K, .)$ es el espacio vectorial de las matrices cuadradas, es decir, de n filas y n columnas.

El vector nulo del espacio $K^{n \times m}$ se llama matriz nula; la denotaremos mediante N, y está definida por $n_{ij} = 0 \ \forall i \ \forall j$.

La matriz inversa aditiva u opuesta de $A = (a_{ij})$ es B, cuyo elemento genérico satisface la relación $b_{ij} = -a_{ij}$. Escribiremos $B = -A$.

Por definición de funciones iguales resulta $A = B$ si y sólo si $a_{ij} = b_{ij} \ \forall i \ \forall j$.

Ejemplo 1-4.

En $\mathbf{R}^{2\times 3}$ se consideran las matrices A y B cuyos elementos genéricos son $a_{ij} = 2i - j$ y $b_{ij} = 1 - i^2$. Obtenemos $C = A - 2B$.
La expresión de C es $C = A + (-2)B$, y como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

resulta

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

1.7. ESPACIO VECTORIAL DE SUCESIONES

Sean: $X = \mathbf{N}$ y $K^{\mathbf{N}}$ el conjunto de todas las funciones de $\mathbf{N}$ en K. Los elementos de $K^{\mathbf{N}}$ son todas las sucesiones de elementos de K, y retomando lo expuesto en 1.4. resulta $(K^{\mathbf{N}}, +, K, .)$ un espacio vectorial.

Las definiciones i) y ii) de 1.4. se interpretan ahora de la siguiente manera:

$$c_i = (\mathbf{f} + \mathbf{g})(i) = \mathbf{f}(i) + \mathbf{g}(i) = a_i + b_i \;\; \forall i \in \mathbf{N}$$

$$c_i = (\alpha\, \mathbf{f})(i) = \alpha\, \mathbf{f}(i) = \alpha\, a_i \;\; \forall i \in \mathbf{N}$$

O sea

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

$$\alpha\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = (\alpha\, a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha\, a_n, \ldots)$$

El vector nulo es la sucesión

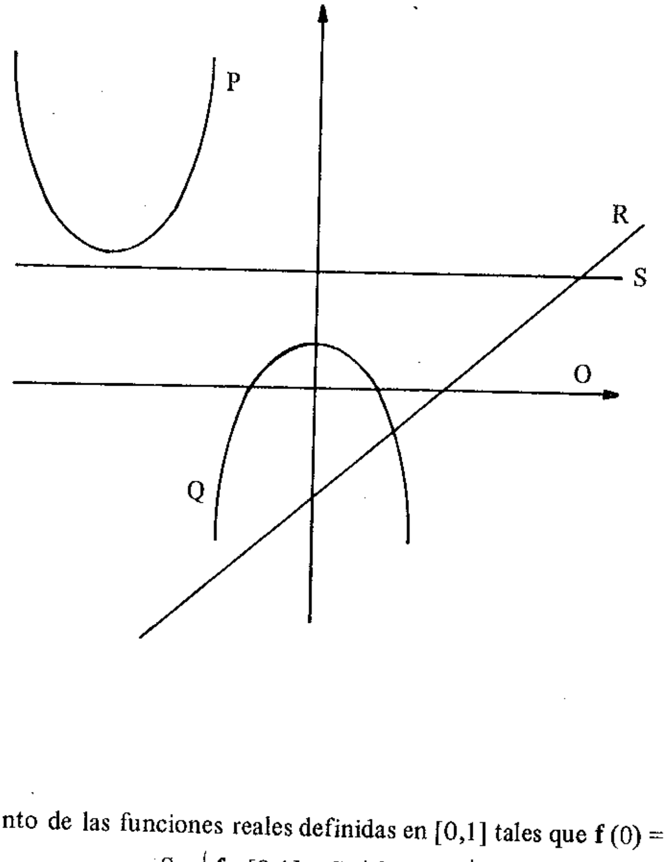
$$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

Ejemplo 1-5

Sea $\mathbf{R}[X]$ el conjunto de los polinomios reales en la indeterminada X. La suma en $\mathbf{R}[X]$ se define como en 12.2.2., *Algebra I*, del mismo autor. El producto de escalares reales por polinomios es el habitual, o sea si $\alpha \in K$ y $P \in \mathbf{R}[X]$, entonces αP es la función de $\mathbf{N}_0$ en $\mathbf{R}$ definida por $(\alpha P)(i) = \alpha P(i)$, cualquiera que sea $i \in \mathbf{N}_0$.

Resulta $(\mathbf{R}[X], +, \mathbf{R}, .)$ el espacio vectorial de los polinomios reales en la indeterminada X sobre el cuerpo de los números reales.

El conjunto de los polinomios reales de grado 2 no es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, porque la suma no es una ley de composición interna en dicho conjunto. Pero el conjunto de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y el polinomio nulo constituye un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.



Ejemplo 1-6

Sea S el conjunto de las funciones reales definidas en $[0,1]$ tales que $\mathbf{f}(0) = 0$, es decir

$$S = \{ \mathbf{f} : [0,1] \to \mathbf{R} \ / \ \mathbf{f}(0) = 0 \}$$

Como todo elemento de S pertenece a $\mathbf{R}^{[0,1]}$, es $S \subset \mathbf{R}^{[0,1]}$.

Considerando las leyes de composición definidas en 1.4., se verifican

A_1 . $\mathbf{f} \in S \wedge \mathbf{g} \in S \Rightarrow \mathbf{f}(0) = 0 \wedge \mathbf{g}(0) = 0 \Rightarrow \mathbf{f}(0) + \mathbf{g}(0) = 0 \Rightarrow (\mathbf{f} + \mathbf{g})(0) = 0 \Rightarrow \mathbf{f} + \mathbf{g} \in S$

A_2 . Como la suma de funciones es asociativa en $\mathbf{R}^{[0,1]}$, también lo es en S.

A_3 . La función nula es el vector nulo de S.

A_4 . Todo elemento de S admite un opuesto en S.

$$\text{Si } f \in S, \text{ entonces } -f \in S, \text{ pues } (-f)(0) = -f(0) = 0.$$

A_5 . Cualesquiera que sean f y g en S, se tiene

$$f + g = g + f$$

pues $S \subset \mathbf{R}^{[0,1]}$

A_6 . $\alpha \in \mathbf{R} \wedge f \in S \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \wedge f(0) = 0 \Rightarrow \alpha f(0) = 0 \Rightarrow (\alpha f)(0) = 0 \Rightarrow \alpha f \in S$

Los restantes axiomas, lo mismo que A_2 y A_5, por ser identidades en $\mathbf{R}^{[0,1]}$ se cumplen en S ya que $S \subset \mathbf{R}^{[0,1]}$.
En consecuencia, $(S, +, \mathbf{R}, .)$ es un espacio vectorial.

1.8. SUBESPACIOS

1.8.1. Concepto

Dados el espacio vectorial $(V, +, K, .)$ y el conjunto no vacío $S \subset V$, si S es un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo K y con las mismas leyes de composición que en V, diremos que $(S, +, K, .)$ es un subespacio de $(V, +, K, .)$, o simplemente, que S es un subespacio de V.

Definición

S es un subespacio de $(V, +, K, .)$ si y sólo si $(S, +, K, .)$ es un espacio vectorial.

Cualquiera que sea $(V, +, K, .)$, tanto V como $\{0\}$ son subespacios de V, llamados triviales.

Ejemplo 1-7

Consideremos el espacio vectorial $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ y los subconjuntos

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = x + 1\} \qquad S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y = 2x\}$$

T no es un subespacio, pues el vector nulo $(0,0) \notin T$.
En cambio, S es un subespacio de $\mathbf{R}^2$, ya que

1° $(S, +)$ es un subgrupo de $(\mathbf{R}^2, +)$. En efecto, de acuerdo con la condición suficiente demostrada en 8.4.2., *Algebra I*, del mismo autor, se verifica

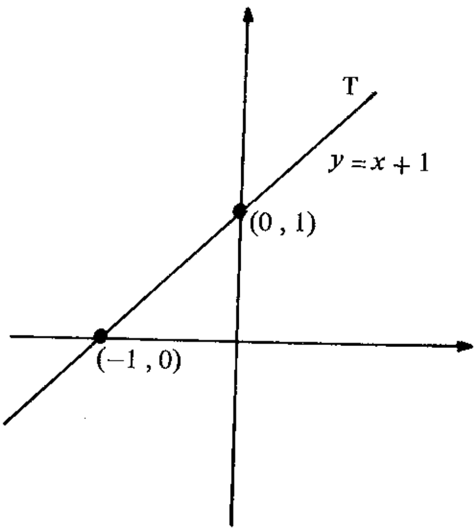
$$(x, y) \in S \wedge (x', y') \in S \Rightarrow y = 2x \wedge y' = 2x' \Rightarrow y - y' = 2(x - x') \Rightarrow$$

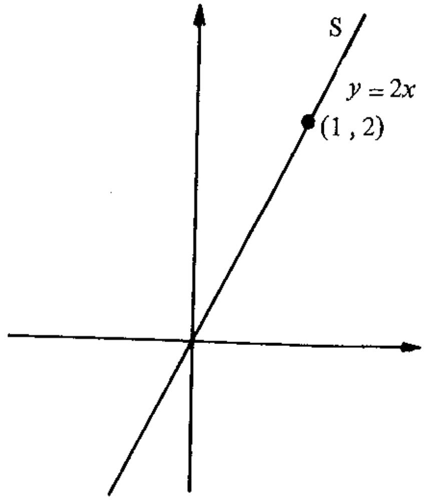
$$\Rightarrow (x - x', y - y') \in S \Rightarrow (x, y) + (-x', -y') \in S$$

2° Respecto de la ley de composición externa consideramos

A_6 . $\alpha \in \mathbf{R} \wedge (x, y) \in S \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \wedge y = 2x \Rightarrow \alpha y = 2\alpha x \Rightarrow (\alpha x, \alpha y) \in S \Rightarrow \alpha (x, y) \in S$

Los axiomas A_7, A_8, A_9 y A_{10}, por ser igualdades en $\mathbf{R}^2$, se cumplen en S ya que $S \subset \mathbf{R}^2$





De la definición se deduce que (S, +, K, .) es un subespacio de (V, +, K, .) si y sólo si (S, +) es un subgrupo de (V, +) y S es cerrado para el producto por escalares.

1.8.2. Condición suficiente

Si el conjunto no vacío $S \subset V$ es cerrado para la suma y para el producto por escalares, entonces (S, +, K, .) es un subespacio de (V, +, K, .).

Hipótesis) (V, +, K, .) es un espacio vectorial

$\phi \neq S \subset V$

1. $\mathbf{x} \in S \wedge \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$
2. $\alpha \in K \wedge \mathbf{x} \in S \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in S$

Tesis) (S, +, K, .) es un subespacio de (V, +, K, .)

Demostración)

1° Consideremos dos vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en S. De acuerdo con la condición 2. de la hipótesis, por 1.3.4. y por la condición 1. de la hipótesis,se tiene

$$\mathbf{x} \in S \wedge \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} \in S \wedge (-1)\,\mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} \in S \wedge -\mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} + (-y) \in S$$

En consecuencia,(S, +) es un subgrupo de (V, +).

2° S es cerrado para el producto por escalares, de acuerdo con la condición 2. de la hipótesis.

La aplicación del teorema demostrado es esencial para determinar si un conjunto S es un subespacio de (V, +, K, .). Para que lo sea, deben verificarse las condiciones que figuran en la hipótesis del mismo, a saber:

1. $S \neq \phi$
2. $S \subset V$
3. $\mathbf{x} \in S \wedge \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$
4. $\alpha \in K \wedge \mathbf{x} \in S \Rightarrow \alpha\,\mathbf{x} \in S$

Estas condiciones son, además, necesarias. Es decir, sabiendo que S es un subespacio, son proposiciones verdaderas.

Ejemplo 1-8

Sean: el espacio vectorial $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$, y el conjunto S de las ternas ordenadas de **R** tales que la tercera componente es igual a la suma de las dos primeras.
O sea

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x_3 = x_1 + x_2 \right\}$$

Afirmamos que S es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, pues

1. $(1, 2, 3) \in S \Rightarrow S \neq \phi$
2. $S \subset \mathbf{R}^3$ por la definición de S.
3. $(x_1, x_2, x_3) \in S \wedge (y_1, y_2, y_3) \in S \Rightarrow x_3 = x_1 + x_2 \wedge y_3 = y_1 + y_2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow x_3 + y_3 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in S \Rightarrow$
   $\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \in S$

Hemos aplicado sucesivamente: la definición de S, la adición en **R**, la definición de S y la definición de suma de ternas.

4. $\alpha \in \mathbf{R} \wedge (x_1, x_2, x_3) \in S \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \wedge x_3 = x_1 + x_2 \Rightarrow$
   $\Rightarrow \alpha x_3 = \alpha x_1 + \alpha x_2 \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in S \Rightarrow \alpha\,(x_1, x_2, x_3) \in S$

Por definición de S, multiplicación en **R**, definición de S y la definición de producto de escalares por ternas.
Al subespacio S pertenecen las ternas $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ que satisfacen la condición

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Esta ecuación define un plano que pasa por el origen.

Ejemplo 1-9

Considerando el espacio vectorial de las funciones reales definidas en [0,1], que denotamos mediante $(\mathbf{R}^{\mathbf{I}}, +, R, .)$, sean los subconjuntos

$$1.\ \ S = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbf{R}^{\mathbf{I}} / f(0) = 0 \right\}$$

$$2.\ \ S = \left\{ \mathbf{f} \in \mathbf{R}^{\mathbf{I}} / f(0) = 1 \right\}$$

En el caso 1. se tiene un subespacio de $\mathbf{R}^{\mathbf{I}}$, como fue tratado en detalle en el ejemplo 1-6. Independientemente del análisis realizado en el ejemplo citado, se llega a la misma conclusión aplicando el teorema demostrado, pero en forma más simple.
En cuanto al caso 2., S no es un subespacio, pues no es cerrado para la suma. En efecto, las funciones **f** y **g** de I en **R** definidas por

$$\mathrm{f}(x) = x + 1 \qquad\qquad \mathrm{g}(x) = x^2 + 1$$

satisfacen las condiciones

$$\mathrm{f}(0) = 1 \qquad\qquad \mathrm{g}(0) = 1$$

o sea, son elementos de S. Pero la suma f + g está definida por

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x) = x^2 + x + 2$$

y no pertenece a S, ya que

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(0) = 2$$

Ejemplo 1-10

Dado el espacio vectorial $(\mathbf{R}^4, +, \mathbf{R}, .)$ consideramos

$$S = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \right\}$$

Se verifica que

1. $S \neq \phi$, pues $(1, 0, 0, 0) \in S$
2. $S \subset \mathbf{R}^4$ por la definición de S
3. S no es cerrado para la suma ya que

$(1, 1, -1, 0) \in S \ \wedge\ (1, 1, -1, 0) \in S$ pero

$(1, 1, -1, 0) + (1, 1, -1, 0) = (2, 2, -2, 0) \notin S$

En consecuencia, S no es un subespacio. Por otra parte, el vector nulo no pertenece a S, y esto basta para que no sea un subespacio.

Ejemplo 1-11.

Sea $(\mathbf{R}^{n \times n}, +, \mathbf{R}, .)$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de n filas y n columnas.

Si $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ escribimos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por definición, traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal. La notación es

$$tr\ A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

El conjunto

$$S = \{ A \in \mathbf{R}^{n \times n} \,/\, tr\ A = 0 \}$$

es el conjunto de las matrices de traza nula de $\mathbf{R}^{n \times n}$, y constituye un subespacio, pues se verifica:

1. $S \neq \phi$, pues la matriz nula N es de traza nula, y en consecuencia es un elemento de S.
2. $S \in \mathbf{R}^{n \times n}$ por definición de S.
3. S es cerrado para la adición.

Sean A y B dos matrices cualesquiera de S. Entonces

$$A \in S \wedge B \in S \Rightarrow tr\ A = 0 \wedge tr\ B = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \wedge \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tr\,(A + B) = 0 \Rightarrow A + B \in S$$

4. S es cerrado para el producto por escalares. En efecto

$$\alpha \in \mathbf{R} \wedge A \in S \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \wedge tr\ A = 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \wedge \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha\, a_{ii} = 0 \Rightarrow tr\,(\alpha\ A) = 0 \Rightarrow \alpha\ A \in S$$

Ejemplo 1-12.

Consideremos $S = \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 / x_1 \geqslant x_2 \}$ e investiguemos si S es un subespacio de $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$.

Se ve de inmediato que no se verifica A_4, pues no todo elemento de S admite opuesto en S. Así

$$(0, -1) \in S \text{ pero } (0, 1) \notin S$$

Analizando la situación en términos de la condición suficiente demostrada, se verifica:

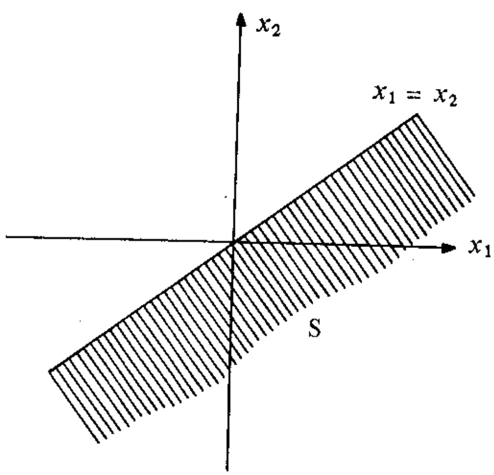
1. $S \neq \phi$
2. $S \subset \mathbf{R}^2$
3. S es cerrado para la suma.

$$(x_1, x_2) \in S \wedge (y_1, y_2) \in S \Rightarrow x_1 \geqslant x_2 \wedge y_1 \geqslant y_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + y_1 \geqslant x_2 + y_2 \Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in S \Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in S$$

Pero S no es cerrado para el producto por escalares, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

$$(2,1) \in S \wedge (-2)(2,1) = (-4, -2) \notin S$$

En consecuencia, S no es un subespacio de $\mathbf{R}^2$.



1.9. OPERACIONES CON SUBESPACIOS

1.9.1. Intersección de subespacios

Sea $\{S_i\}$ con $i \in I$ una familia de subespacios de (V, +, K, .). Denotaremos con S la intersección de dicha familia, o sea, $S = \bigcap_{i \in I} S_i$. Resulta S un subespacio de V.

Teorema. La intersección de toda familia de subespacios de V, es un subespacio de V.
Hipótesis) (V, +, K, .) es un espacio vectorial

$\{S_i\}$ con $i \in I$ es una familia de subespacios de V

Tesis) $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ es un subespacio de V.

Demostración) De acuerdo con la condición suficiente 1.8.2. se verifica

1. S no es vacío, pues

$$\mathbf{0} \in S_i \ , \forall i \in I \Rightarrow \mathbf{0} \in \bigcap_{i \in I} S_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} S_i \neq \phi \Rightarrow S \neq \phi$$

Por ser cada S_i un subespacio y por definición de intersección.

2. S está incluido en V, ya que

$$S_i \subset V \ , \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} S_i \subset V \Rightarrow S \subset V$$

Por ser cada S_i un subespacio de V y porque la intersección de toda familia de subconjuntos de V es una parte de éste.

3. S es cerrado para la suma. En efecto

$$\mathbf{x} \in S \wedge \mathbf{y} \in S \Rightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_{i \in I} S_i \wedge \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} S_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in S_i \wedge \mathbf{y} \in S_i, \forall i \in I \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S_i, \forall i \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \bigcap_{i \in I} S_i \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$$

Por definición de intersección, y porque todo S_i es un subespacio.

4. S es cerrado para el producto por escalares.
Consideremos $\alpha \in K$ y $\mathbf{x} \in S$. Ahora bien

$$\alpha \in K \wedge \mathbf{x} \in S \Rightarrow \alpha \in K \wedge \mathbf{x} \in \bigcap_{i \in I} S_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \in K \wedge \mathbf{x} \in S_i \ , \forall i \in I \Rightarrow \alpha \, \mathbf{x} \in S_i \ , \forall i \in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \, \mathbf{x} \in \bigcap_{i \in I} S_i \Rightarrow \alpha \, \mathbf{x} \in S$$

Ejemplo 1-13

En $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ consideramos los subespacios

$$S_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_3 = 0 \right\} \quad S_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 = 0 \right\}$$

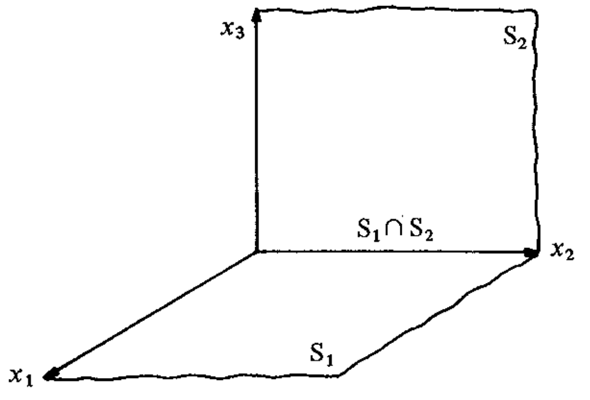
La intersección de estos es

$$S = S_1 \cap S_2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 = 0 \wedge x_3 = 0 \right\}$$

Esto significa que un vector genérico de S es una terna del tipo $(0, x_2, 0)$ que puede expresarse mediante $(0, \alpha, 0)$ para algún α en $\mathbf{R}$.
Entonces

$$S = \left\{ (0, \alpha, 0) \in \mathbf{R}^3 / \alpha \in \mathbf{R} \right\}$$

O sea, S es el eje x_2

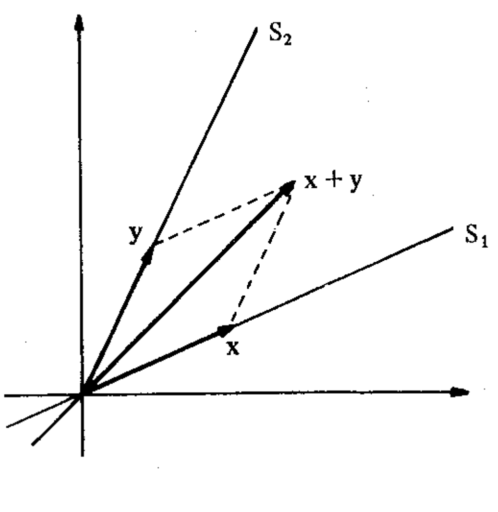


Subespacios de $\mathbf{R}^3$ son: $\mathbf{R}^3$, $\{\mathbf{0}\}$, todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por dicho punto. Dos rectas distintas que pasan por el origen son subespacios cuya intersección es el vector nulo, y se llaman disjuntos.

1.9.2. Unión de subespacios

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de $(V, +, K, .)$, entonces $S_1 \cup S_2$, no es necesariamente un subespacio de V, como lo prueba el siguiente ejemplo:

Consideremos en $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ los subespacios S_1 y S_2 de la figura



La unión de ambos es el par de rectas, y eligiendo $x \in S_1$, $y \in S_2$, distintos del vector nulo, se tiene

$$x \in S_1 \Rightarrow x \in S_1 \cup S_2$$
$$y \in S_2 \Rightarrow y \in S_1 \cup S_2$$

pero

$$x + y \notin S_1 \cup S_2$$

1.9.3. Suma de subespacios

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de $(V, +, K, .)$. Definimos el conjunto

$$S = \{ x \in V / x = x_1 + x_2 \wedge x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2 \}$$

O sea

$$S = \{ x \in V / \exists\, x_1 \in S_1 \wedge \exists\, x_2 \in S_2 \wedge x = x_1 + x_2 \}$$

El conjunto S se llama suma de los subespacios S_1 y S_2 y se indica

$$S = S_1 + S_2$$

Teorema. La suma de dos subespacios de V es un subespacio de V.

Hipótesis) S_1 y S_2 son dos subespacios de $(V, +, K, .)$
$S = S_1 + S_2$

Tesis) $(S, +, K, .)$ es un subespacio de $(V, +, K, .)$

Demostración) Se verifican las condiciones expuestas en 1.8.2., a saber

1. S es no vacío, pues

$$\mathbf{0} \in S_1 \wedge \mathbf{0} \in S_2 \Rightarrow \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in S_1 + S_2 \Rightarrow \mathbf{0} \in S \Rightarrow S \neq \phi$$

2. S es una parte de V, por la definición de S.
3. S es cerrado para la suma, ya que

$$x \in S \wedge y \in S \Rightarrow x = x_1 + x_2 \wedge y = y_1 + y_2 \wedge x_1, y_1 \in S_1 \wedge x_2, y_2 \in S_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \wedge x_1 + y_1 \in S_1 \wedge x_2 + y_2 \in S_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y \in S$$

4. S es cerrado para el producto por escalares, porque

$$\alpha \in K \wedge x \in S \Rightarrow \alpha \in K \wedge x = x_1 + x_2 \wedge x_1 \in S_1 \wedge x_2 \in S_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2 \wedge \alpha x_1 \in S_1 \wedge \alpha x_2 \in S_2 \Rightarrow \alpha x \in S$$

Por consiguiente, la suma de subespacios es un subespacio.

Un caso particular importante se presenta cuando los subespacios S_1 y S_2 son disjuntos, es decir, si $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$. En esta situación, el subespacio $S = S_1 + S_2$ recibe el nombre de suma directa de S_1 y S_2, y se utiliza la notación

$$S = S_1 \oplus S_2$$

Sintetizamos esto en la siguiente definición

$$S = S_1 \oplus S_2 \Leftrightarrow S = S_1 + S_2 \wedge S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$$

Ejemplo 1-14

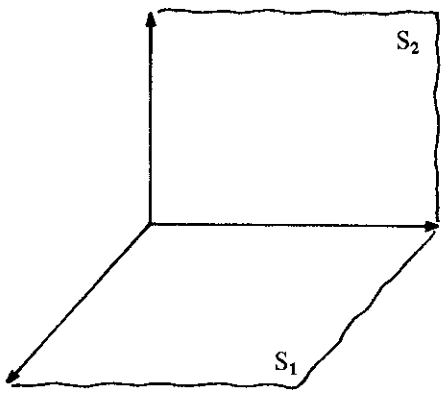
Consideremos primero los subespacios de $\mathbf{R}^3$

$$S_1 = \{(\alpha, \beta', 0)/\alpha \in \mathbf{R} \wedge \beta' \in \mathbf{R}\} \quad S_2 = \{(0, \beta'', \gamma)/\beta'' \in \mathbf{R} \wedge \gamma \in \mathbf{R}\}$$

El subespacio suma $S = S_1 + S_2$ está formado por todas las ternas del tipo

$$(\alpha, \beta' + \beta'', \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

y es $\mathbf{R}^3$. Ambos subespacios son los planos indicados en la figura, y como su intersección es el eje x_2, la suma $S = S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$ no es directa.



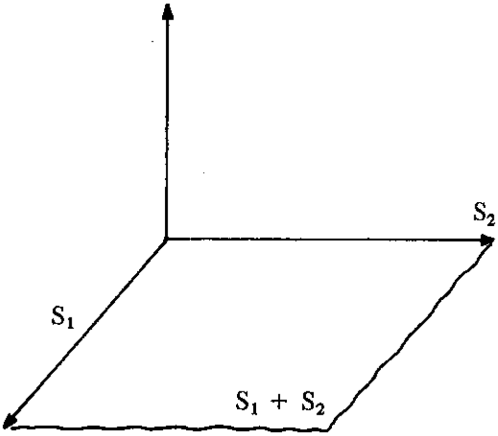
En cambio, si

$$S_1 = \{(\alpha, 0, 0)/\alpha \in \mathbf{R}\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{(0, \beta, 0)/\beta \in \mathbf{R}\}$$

se tiene

$$S = S_1 + S_2 = \{(\alpha, \beta, 0)/\alpha \in \mathbf{R} \wedge \beta \in \mathbf{R}\}$$

O sea, la suma es directa y se identifica con el plano horizontal



Extendemos la definición de suma de subespacios al caso en que $n > 2$.

Definición

Suma de los subespacios $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de $(V, +, K, .)$ es el conjunto

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \left\{ x \in V / x = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge x_i \in S_i \, , \, \forall i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Resulta $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ un subespacio de $(V, +, K, .)$.

Además, si tales subespacios son disjuntos dos a dos, o sea

$$i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \{ \mathbf{0} \}$$

entonces diremos que S es la suma directa de ellos, y escribiremos

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_n$$

Ejemplo 1-15

Sean S, T y U subespacios de $(V, +, K, .)$, tales que $T \subset S$. Entonces se verifica que

$$S \cap (T + U) = T + (S \cap U)$$

1°. $x \in S \cap (T + U) \Rightarrow x \in S \wedge x \in T + U \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \in S \wedge x = x_1 + x_2 \wedge x_1 \in T \wedge x_2 \in U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x_1 + x_2 \in S \wedge x_1 \in S) \wedge x_2 \in U \wedge x_1 \in T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 \in T \wedge x_2 \in S \wedge x_2 \in U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 \in T \wedge x_2 \in S \cap U \Rightarrow x_1 + x_2 \in T + (S \cap U) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in T + (S \cap U)$$

O sea

$$S \cap (T + U) \subset T + (S \cap U) \qquad (1)$$

2°. $x \in T + (S \cap U) \Rightarrow x = x_1 + x_2 \wedge x_1 \in T \wedge x_2 \in S \cap U \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 \in T \wedge x_2 \in S \wedge x_2 \in U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 \in T \wedge x_1 \in S \wedge x_2 \in S \wedge x_2 \in U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in S \wedge x_1 + x_2 \in T + U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 \in S \cap (T + U) \Rightarrow x \in S \cap (T + U)$$

Luego

$$T + (S \cap U) \subset S \cap (T + U) \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta la igualdad.

TRABAJO PRACTICO I

1-16. Determinar si las cuaternas que se indican denotan espacios vectoriales con las operaciones que se indican

i) $(\mathbf{R}, +, \mathbf{Q}, .)$
ii) $(\mathbf{Q}, +, \mathbf{Q}, .)$
iii) $(\mathbf{Q}, +, \mathbf{R}, .)$
iv) $(\mathbf{R}, +, \mathbf{Z}, .)$

1-17. Sea $(V, +, K, .)$ un espacio vectorial. Demostrar

i) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y} = -\mathbf{x}$
ii) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$
iii) $\mathbf{x} + a\mathbf{y} = \mathbf{x} + a\mathbf{z}$ y $a \neq 0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z}$
iv) $a\mathbf{x} = b\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow a = b$

1-18. Determinar α sabiendo que $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ y que

$$(1 - \alpha)\,\mathbf{x} + \alpha\,(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$$

1-19. Considerando $V = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$, o sea, el conjunto de las funciones reales con una variable real, y $K = \mathbf{R}$, investigar si son espacios vectoriales sobre $\mathbf{R}$:

i) El conjunto de las funciones continuas.
ii) El conjunto de las funciones derivables.
iii) El conjunto de las funciones pares, o sea, las funciones $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ tales que $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(-x)$.
iv) El conjunto de las funciones impares, es decir, las aplicaciones $\mathbf{f} \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ que verifican $\mathbf{f}(x) = -\mathbf{f}(-x)$.
v) El conjunto de las funciones constantes.
vi) El conjunto de las funciones no negativas.

1-20. Sean $V = \mathbf{R}^2$ y $K = \mathbf{R}$. Determinar si las siguientes operaciones definen sobre V una estructura de espacio vectorial.

$$(a, b) + (a', b') = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a', \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b'\right)$$

$$\alpha\,(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

1-21. Determinar si $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{C}, .)$ es un espacio vectorial, definiendo

$$(z_1, z_2) + (z'_1, z'_2) = (z_1 + z'_1, z_2 + z'_2)$$

$$z\,(z_1, z_2) = (z\,z_1, z\,z_2)$$

1-22. Considerando el espacio vectorial $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$, investigar si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbf{R}^3$

i) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_1 + x_3 = 0\}$

ii) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / |x_1| = |x_2|\}$

iii) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_3 = x_1 + 2\}$

1-23. Sea el espacio vectorial $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, .)$. Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbf{R}^n$

i) $S = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbf{R}^n / x_n \in \mathbf{Z}\}$

ii) $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n / \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \wedge a_i \in \mathbf{R}\}$

1-24. Demostrar que $S = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 / z = iw\}$ es un subespacio de $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{C}, .)$.

1-25. Sean $\mathbf{C}^2$ y $S = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 / z - \overline{z} + w = 0\}$. Determinar si son subespacios $(S, +, \mathbf{C}, .)$ y $(S, +, \mathbf{R}, .)$.

1-26. Sean S y T subespacios de $(V, +, K, .)$. En el producto cartesiano $S \times T$ se definen

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Demostrar que $(S \times T, +, K, .)$ es un espacio vectorial. El espacio $S \times T$ se llama producto directo de S por T.

1-27. $(\mathbf{R}^{n \times n}, +, \mathbf{R}, .)$ denota el espacio vectorial de las matrices reales $n \times n$.
Por definición, la matriz $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ se llama triangular superior si y sólo si

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Demostrar que $(S, +, \mathbf{R}, .)$ es un subespacio de $\mathbf{R}^{n \times n}$, siendo S el conjunto de las matrices triangulares superiores.

1-28. Dado $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$, determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios

i) $S = \{(x, y) / (x - y)^2 = (x + y)^2\}$

ii) $T = \{(x, y) / \frac{1}{2}x + y = x - \frac{1}{2}y\}$

1-29. Considerando $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{R}, .)$ el espacio vectorial de los pares ordenados de números complejos sobre el cuerpo de los reales, investigar si los siguientes conjuntos son subespacios del mismo.

i) $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 / z^2 + u^2 = 0\}$

ii) $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 / z + 2u \in \mathbf{R}\}$

iii) $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 / Re(z) = Re(u)\}$

iv) $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 / Im(z) = 0 \wedge Re(z - u) = Im(z)\}$

v) $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 / z = u\}$

vi) $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 \ / \ Im(z) - Im(u) = 0\}$

1-30. Sean S, T y U subespacios de (V, +, K, .). Demostrar

i) $S + T = T + S$.

ii) $S + (T + U) = (S + T) + U$.

iii) $S \subset S + T$.

1-31. Demostrar que si el subespacio S de (V, +, K, .) es la suma directa de los subespacios S_1 y S_2, entonces todo vector de S puede expresarse de modo único como la suma de un vector de S_1 y uno de S_2.

1-32. Sean $(\mathbf{R}^{n\times n}, +, \mathbf{R}, .)$ y los subconjuntos

$$S = \{ A \in \mathbf{R}^{n\times n} \ / \ a_{ij} = a_{ji} \ \ \forall i \ \forall j \}$$

$$T = \{ A \in \mathbf{R}^{n\times n} \ / \ a_{ij} = -a_{ji} \ \ \forall i \ \forall j \}$$

Por definición, los elementos de S se llaman matrices simétricas, y los de T se llaman matrices antisimétricas.
Demostrar

1°. S y T son subespacios de $\mathbf{R}^{n\times n}$

2°. $\mathbf{R}^{n\times n} = S \oplus T$

Capítulo 2

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL, BASE Y DIMENSION

2.1. INTRODUCCION

En esta unidad introducimos las definiciones de combinación lineal de un conjunto no vacío de un espacio vectorial y de subespacio generado por el mismo. Se estudian la dependencia e independencia lineal y los sistemas de generadores, a fin de caracterizar los conceptos de base y de dimensión en el caso finito.

2.2. COMBINACIONES LINEALES

2.2.1. Concepto

Sea $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una familia o conjunto de vectores del espacio $(V, +, K, .)$. Entenderemos por combinación lineal de la familia A toda suma de productos de escalares arbitrarios de K, por los vectores de A.

Definición

Combinación lineal de la familia $A \subset V$ es todo vector del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i = \alpha_1 \, v_1 + \alpha_2 \, v_2 + \ldots + \alpha_n \, v_n \; / \; \alpha_i \in K \wedge v_i \in A$$

En particular, si todos los escalares son nulos, la combinación lineal se llama trivial y se obtiene el vector nulo.

Definición

El vector $v \in V$ es combinación lineal de la familia $A \subset V$, si y sólo si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, v_i$$

Ejemplo 2-1.

Sean los vectores $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, 4)$ en $\mathbf{R}^3$. Determinamos si los vectores $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$ y $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$ son combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

1. Para que $\mathbf{v}$ sea combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ deben existir escalares α_1 y α_2 tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

O sea

$$\alpha_1 (-1, 0, 2) + \alpha_2 (-1, 2, 4) = (-1, 1, 3)$$

Por definición de ley externa es

$$(-\alpha_1, 0, 2\alpha_1) + (-\alpha_2, 2\alpha_2, 4\alpha_2) = (-1, 1, 3)$$

Por suma de ternas

$$(-\alpha_1 - \alpha_2, 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2) = (-1, 1, 3)$$

Por igualdad de ternas resulta

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \\ 2\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación, se tiene

$$\alpha_1 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}$$

Como ambos valores $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ satisfacen la tercera relación es $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$.

O sea, $\mathbf{v}$ puede expresarse como combinación lineal única de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

2. Si $\mathbf{u} = (1, 2, 2)$, entonces procediendo análogamente se llega a

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ 2\,\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2 \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

De donde

$$\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 + 1 = -1 \Rightarrow \alpha_1 = -2$$

Al sustituir en la tercera ecuación

$$-2 + 2 \,.\, 1 = 0 \neq 1$$

Entonces $\mathbf{u}$ no es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Ejemplo 2-2.

En el espacio vectorial de las funciones reales de una variable real $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}}, +, \mathbf{R}, .)$ sean las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ definidas por

$$\mathbf{f}(t) = e^t \quad \text{y} \quad \mathbf{g}(t) = e^{3t}$$

Determinar todas las combinaciones lineales, es decir, los escalares a y b, tales que

$$a\mathbf{f} + b\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{0}$ denota la función nula, definida por $\mathbf{0}(t) = 0$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$.
Por definición de funciones iguales, suma de funciones y producto de escalares por funciones (véase 1.4.) se tiene

$$a\,\mathbf{f}(t) + b\,\mathbf{g}(t) = 0 \ \text{ cualquiera que sea } t \in \mathbf{R}$$

O sea

$$ae^t + b\,e^{3t} = 0 \qquad (1)$$

El propósito es obtener los escalares a y b que satisfagan a (1) para todo $t \in \mathbf{R}$.
Derivando (1) se tiene

$$a\,e^t + 3b\,e^{3t} = 0 \qquad (2)$$

Restando (2) y (1) es

$$2b\,e^{3t} = 0$$

Y como e^{3t} nunca es cero, resulta $b = 0$, que sustituido en (1) nos da

$$a\,e^t = 0$$

En consecuencia es $a = 0$.
Luego, la única combinación lineal de $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ que da la función nula es la trivial. Toda vez que esto ocurra, diremos que los vectores, en este caso $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, son linealmente independientes.

Ejemplo 2-3-1.

Decidimos si el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ es combinación lineal de la familia cuyos elementos son los vectores de $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1) \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1) \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, -2)$$

Investigamos si existen escalares reales a, b y c, tales que

$$a\,\mathbf{v}_1 + b\,\mathbf{v}_2 + c\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

Entonces, debe ser

$$a\,(1, 0, -1) + b\,(0, 1, -1) + c\,(1, 1, -2) = (1, 2, 3)$$

Efectuando operaciones

$$(a, 0, -a) + (0, b, -b) + (c, c, -2c) = (1, 2, 3)$$
$$(a + c, b + c, -a - b - 2c) = (1, 2, 3)$$

Por igualdad de ternas es

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 2 \\ -a - b - 2c = 3 \end{cases}$$

Sumando las tres relaciones se tiene

$$0 = 6$$

lo que es imposible.
En consecuencia, $\mathbf{v}$ no es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$.

Ejemplo 2-3-2.

En el espacio vectorial $(\mathbf{R}^{2\times 2}, +, \mathbf{R}, .)$ se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar todas las combinaciones lineales de A, B y C que den la matriz nula N.
Hay que obtener α, β y γ en $\mathbf{R}$, tales que

$$\alpha\,A + \beta\,B + \gamma\,C = N$$

O sea

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por producto de escalares por matrices es

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por suma en $\mathbf{R}^{2\times 2}$ se tiene

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \beta+\gamma & \alpha+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices resulta

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

De las dos primeras se deduce

$$\alpha = -\beta \quad \text{y} \quad \gamma = -\beta$$

Sustituyendo en la tercera es

$$-2\beta = 0$$

O sea

$$\beta = 0$$

Luego $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y la única combinación lineal que satisface la relación propuesta es la trivial.

2.3. SUBESPACIO GENERADO

2.3.1. Conjunto de combinaciones lineales

Sea A un conjunto no vacío de vectores del espacio $(V, +, K, .)$. A expensas de A podemos formar el subconjunto de V cuyos elementos sean todas las combinaciones lineales de los vectores de A. A este conjunto lo denotaremos con el símbolo $\overline{A}$, que se lee "A raya".

Si $A = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$, entonces escribiremos

$$\overline{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \,/\, \alpha_i \in K \wedge \mathbf{v}_i \in A \right\}$$

Ejemplo 2-4.

El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1) \text{ de } \mathbf{R}^3$$

es

$$\overline{A} = \{ \alpha_1 (1,0,1) + \alpha_2 (0,1,1) / \alpha_1 \in \mathbf{R} \wedge \alpha_2 \in \mathbf{R} \}$$

O sea

$$\overline{A} = \{ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) / \alpha_1 \in \mathbf{R} \wedge \alpha_2 \in \mathbf{R} \}$$

En consecuencia, a $\overline{A}$ pertenecen todas las ternas cuya tercera componente es la suma de las dos primeras.
Podemos escribir

$$\overline{A} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_3 = x_1 + x_2 \}$$

2.3.2. Subespacio generado por una familia de vectores

Teorema. El conjunto de las combinaciones lineales de toda familia no vacía de un espacio vectorial es un subespacio del mismo.

Hipótesis) (V, +, K, .) es un espacio vectorial

$$A = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \} \subset V$$

Tesis) $(\overline{A}, +, K, .)$ es un subespacio de V

Demostración)

1. Siendo $\mathbf{v}_1 = 1\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\,\mathbf{v}_n$ se deduce que $\mathbf{v}_1 \in \overline{A}$, o sea, $\overline{A} \neq \phi$

2. Por definición, se tiene

$$\mathbf{v} \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K / \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{v}_i \in A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \wedge \alpha_i \in K \wedge \mathbf{v}_i \in V, \text{ pues } A \subset V$$

Luego

$$\mathbf{v} \in \overline{A} \Rightarrow \mathbf{v} \in V$$

O sea

$$\overline{A} \subset V$$

3. $\overline{A}$ es cerrado para la suma.
   Sean v y u en $\overline{A}$.

$$\mathbf{v} \in \overline{A} \wedge \mathbf{u} \in \overline{A} \Rightarrow \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad \wedge \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \mathbf{v}_i + \beta_i \mathbf{v}_i) \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \mathbf{v}_i \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{u} \in \overline{A}$$

4. $\overline{\mathrm{A}}$ es cerrado para el producto por escalares.
   Sean $\alpha \in \mathrm{K}$ y $\mathbf{v} \in \overline{\mathrm{A}}$.

$$\alpha \in \mathrm{K} \wedge \mathbf{v} \in \overline{\mathrm{A}} \Rightarrow \alpha \in \mathrm{K} \wedge \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \mathbf{v} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha (\alpha_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \alpha \mathbf{v} \in \overline{\mathrm{A}}$$

Como se cumplen las hipótesis del teorema 1.8.2., resulta $(\overline{\mathrm{A}}, +, \mathrm{K}, .)$, un subespacio de $(\mathrm{V}, +, \mathrm{K}, .)$.

Definición

El subespacio de las combinaciones lineales de la familia no vacía $\mathrm{A} \subset \mathrm{V}$ se llama subespacio generado por A.

Ejemplo 2-5.

Determinar el subespacio de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ generado por la familia A cuyos elementos son los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$$

Por definición, el subespacio $\overline{\mathrm{A}}$ es el conjunto de las ternas $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ tales que

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) &= \alpha_1 (2, 1, 2) + \alpha_2 (1, 2, 1)\\ &= (2\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_2)\\ &= (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2)\end{aligned}$$

Por igualdad de ternas es

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = x_2 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = x_3 \end{cases}$$

De la primera y tercera relación se deduce

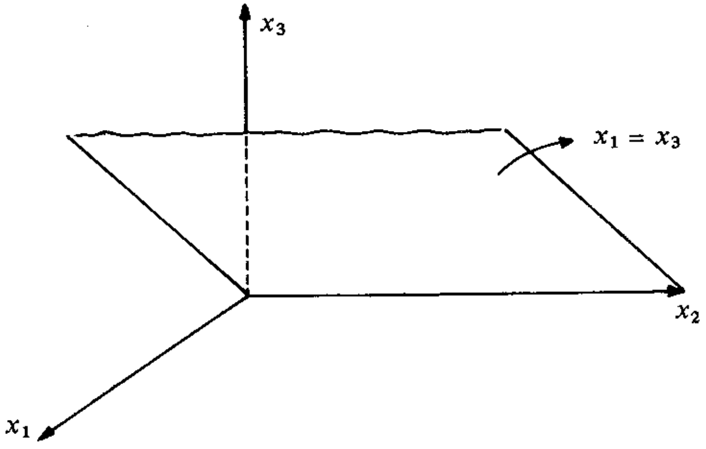
$$x_1 = x_3$$

y x_2 es cualquier número real.
En consecuencia

$$\overline{\mathrm{A}} = \{ (x_1, x_2, x_1) \,/\, x_1 \in \mathbf{R} \wedge x_2 \in \mathbf{R} \}$$

$\overline{\mathrm{A}}$ es el plano de ecuación

$$x_1 - x_3 = 0$$



Ejemplo 2-6.

Obtener el subespacio de $(\mathbf{R}^{2\times 2}, +, \mathbf{R}, .)$ generado por las matrices

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i V_i \,/\, \alpha_i \in K \wedge V_i \in A \right\}$$

Todo vector de $\overline{A}$ es una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Realizando operaciones en $\mathbf{R}^{2\times 2}$ es

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$\alpha_1 = a\,,\ \alpha_2 = b\,,\ \alpha_3 = c\,,\ -\alpha_1 = d$$

Luego

$$d = -a \ \text{y}\ b\ \text{y}\ c$$

son números reales cualesquiera.

Los vectores de $\overline{\mathrm{A}}$ son matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Es decir, $\overline{\mathrm{A}}$ es el subespacio de matrices de traza nula.

2.3.3. Propiedad

El subespacio generado por una familia no vacía de un espacio vectorial es la intersección de todos los subespacios que incluyen dicha familia.

Hipótesis) $(\mathrm{V}, +, \mathrm{K}, .)$ es un espacio vectorial.

$\phi \neq \mathrm{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathrm{V}$

$\{\mathrm{S}_i\}$ con $i \in \mathrm{I}$ es la familia de todos los subespacios que incluyen A.

Tesis) $\overline{\mathrm{A}} = \bigcap\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$

Demostración)

Probaremos las dos inclusiones que conducen a la igualdad.

1. $\overline{\mathrm{A}} \subset \bigcap\limits_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$

En efecto

$$\mathbf{x} \in \overline{\mathrm{A}} \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mathbf{v}_j \quad \wedge \quad \alpha_j \in \mathrm{K} \wedge \mathbf{v}_j \in \mathrm{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \mathbf{v}_j \wedge \alpha_j \in \mathrm{K} \wedge \mathbf{v}_j \in \mathrm{S}_i\,,\ \forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in \mathrm{S}_i\,,\ \forall i \in \mathrm{I} \Rightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{S}_i$$

2. $\bigcap\limits_{i \in I} \mathrm{S}_i \subset \overline{\mathrm{A}}$

Como todo $\mathbf{v}_i$ de A es combinación lineal de los elementos de A, pues

$$\mathbf{v}_i = 0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \ldots + 1\mathbf{v}_i + \ldots + 0\,\mathbf{v}_n,$$

se tiene que,

$$A \subset \overline{A}$$

Y siendo $\overline{A}$ un subespacio que incluye a A, se identifica con algún S_j, es decir, existe j en I tal que $S_j = \overline{A}$.

Por otra parte, como la intersección está incluida en cualquiera de los conjuntos que se intersecan, es

$$\bigcap_{i \in I} S_i \subset S_j \quad \forall j \in I$$

En consecuencia

$$\bigcap_{i \in I} S_i \subset \overline{A}$$

Por lo tanto

$$\overline{A} = \bigcap_{i \in I} S_i$$

En virtud del teorema demostrado, observamos que el subespacio generado por una familia no vacía de vectores de V es el "mínimo" subespacio, en el sentido de inclusión, que incluye a A.

Ejemplo 2-7.

Demostrar que los siguientes conjuntos de vectores generan el mismo subespacio de $\mathbf{R}^3$.

$$A = \{(1, -1, 1), (3, 0, 1)\} \qquad B = \{(-2, -1, 0), (5, -2, 3)\}$$

Determinaremos $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

1. A $\overline{A}$ pertenecen las ternas (x, y, z), tales que

$$(x, y, z) = t\,(1, -1, 1) + u\,(3, 0, 1)$$

Entonces

$$(x, y, z) = (t, -t, t) + (3u, 0, u)$$

$$(x, y, z) = (t + 3u, -t, t + u)$$

Luego

$$\begin{cases} x = t + 3u \\ y = -t \\ z = t + u \end{cases}$$

Como $t = -y$, se tiene

$$\begin{cases} x = -y + 3u \\ z = -y + u \end{cases}$$

O sea

$$\begin{cases} x & = -y + 3u \\ 3\,z & = -3y + 3u \end{cases}$$

Restando

$$x - 3z = 2y$$

Resulta

$$\overline{\mathrm{A}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x - 2y - 3\,z = 0 \right\}$$

2. Procediendo análogamente para obtener $\overline{\mathrm{B}}$ es

$$(x, y, z) = t\,(-2, -1, 0) + u\,(5, -2, 3)$$

$$(x, y, z) = (-2t, -t, 0) + (5u, -2u, 3u)$$

$$(x, y, z) = (-2t + 5u, -t - 2u, 3u)$$

O sea

$$\begin{cases} x = -2t + 5u \\ y = -t - 2u \\ z = 3u \end{cases}$$

Como $u = \dfrac{1}{3}\,z$, se tiene

$$\begin{cases} x = -\,2\,t + \dfrac{5}{3}\,z \\ \\ y = -\,t - \dfrac{2}{3}\,z \end{cases}$$

O bien

$$\begin{cases} x & = -2\,t + \dfrac{5}{3}\,z \\ \\ 2y & = -2\,t - \dfrac{4}{3}\,z \end{cases}$$

Restando

$$x - 2y = 3z$$

Luego

$$\overline{\mathrm{B}} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x - 2y - 3z = 0 \right\}$$

Resulta

$$\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{B}}$$

La ecuación $x - 2y - 3z = 0$ corresponde a un plano que pasa por el origen.

Ejemplo 2-8.

El subespacio de (V, +, K, .) generado por un vector **v** es, en particular, el conjunto de todos los múltiplos escalares de **v**, o sea

$$\{k\mathbf{v} \,/\, k \in \mathrm{K}\}$$

Determinamos el subespacio de $\mathbf{R}^2$ generado por $\mathbf{v} = (1,2)$.
Llamando S a tal subespacio, se tiene

$$\mathrm{S} = \{(x_1, x_2) \,/\, (x_1, x_2) = k\,(1, 2)\}$$

En consecuencia

$$(x_1, x_2) = (k, 2k)$$

O sea

$$x_1 = k \quad \text{y} \quad x_2 = 2k$$

Eliminando el parámetro k entre ambas relaciones, resulta

$$x_2 = 2x_1$$

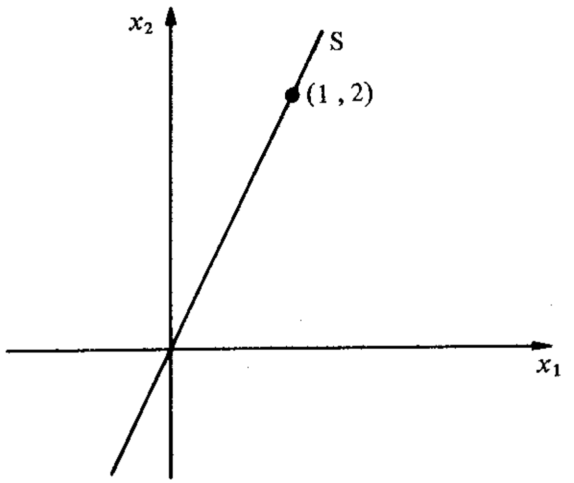
O lo que es lo mismo

$$2x_1 - x_2 = 0$$

Entonces

$$\mathrm{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,/\, 2x_1 - x_2 = 0\}$$

S es la recta que pasa por el origen representada en la figura



2.4. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

2.4.1. Conjunto linealmente independiente

En el ejemplo 2-2 hemos demostrado que la única combinación lineal de los vectores **f** y **g**, cuyo resultado es el vector nulo, es la trivial. O sea

$$a\,\mathbf{f} + b\,\mathbf{g} = \mathbf{0} \Rightarrow a = b = 0$$

En este caso, los vectores son las funciones de **R** en **R** definidas por

$$\mathbf{f}(t) = e^{t} \quad \text{y} \quad \mathbf{g}(t) = e^{3t}$$

y la función que asigna a todo número real t, el valor 0, es el vector nulo. Este hecho se traduce diciendo que los vectores **f** y **g** son linealmente independientes, o bien que el conjunto $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ es linealmente independiente.

Sea $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una familia de vectores del espacio (V, +, K, .).

Definición

La familia $A \subset V$ es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de dicha familia, cuyo resultado sea el vector nulo, es la trivial.

En símbolos

$$A \text{ es linealmente independiente} \Leftrightarrow \forall i : \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,\mathbf{v}_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0.$$

La independencia lineal de un conjunto finito y no vacío de vectores significa que no puede darse una combinación lineal de dicho conjunto que dé el vector nulo, con algún escalar distinto de cero.

Para investigar la independencia lineal de un conjunto de vectores, se propone una combinación lineal de éstos, con escalares a determinar, que sea igual al vector nulo. Si los escalares son necesariamente nulos, entonces el conjunto es linealmente independiente.

Convenimos en que el conjunto vacío es linealmente independiente.

Definición

El conjunto $A \subset V$ es linealmente independiente si y sólo si todo subconjunto finito de A es linealmente independiente.

Esta definición extiende el concepto de independencia lineal a toda familia de vectores de un espacio V.

Ejemplo 2-9.

Dado el espacio vectorial $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

i) $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

ii) $B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 2), (1, 0, 1)\}$

i) Sea

$$\alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$
$$(\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) + (0, 0, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Por igualdad de ternas resulta

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Luego

A es linealmente independiente

ii) Procediendo análogamente

$$\alpha_1 (1, -1, 0) + \alpha_2 (1, 1, 2) + \alpha_3 (1, 0, 1) = (0, 0, 0)$$
$$(\alpha_1, -\alpha_1, 0) + (\alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 0, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

Entonces

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_2 \end{cases}$$

Las infinitas soluciones de este sistema de ecuaciones son

$$\alpha_1 = k$$
$$\alpha_2 = k$$
$$\alpha_3 = -2k \quad \text{con } k \in \mathbf{R}$$

En consecuencia, B no es linealmente independiente, ya que los escalares no son necesariamente nulos. Más aún, existen infinitas combinaciones lineales no triviales cuyos resultados son el vector nulo.

Ejemplo 2-10.

En $(\mathbf{R}^I, +, \mathbf{R}, .)$, donde $I = [0, 1]$, los vectores $\mathbf{v}_1 = sen$ y $\mathbf{v}_2 = cos$ son linealmente independientes.

Sea

$$\alpha_1\ sen + \alpha_2\ cos = \mathbf{0}$$

$\forall\, t \in [0,1]$ es

$$(\alpha_1\ sen + \alpha_2\ cos)\,(t) = \mathbf{0}\,(t)$$

Por definición de suma de funciones y de función nula

$$(\alpha_1 sen)\,(t) + (\alpha_2\ cos)\,(t) = 0$$

Por definición de producto de escalares por funciones

$$\alpha_1\ sen\ t + \alpha_2\ cos\ t = 0 \qquad (1)\ \ \forall\, t \in \mathrm{I}$$

Derivando

$$\alpha_1\ cos\ t - \alpha_2\ sen\ t = 0 \qquad (2)$$

Resolvemos el sistema respecto de α_1 y α_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} sen\ t & cos\ t \\ cos\ t & -sen\ t \end{vmatrix} = -sen^2\ t - cos^2\ t = -1$$

$$\Delta\,\alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & cos\ t \\ 0 & -sen\ t \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta\alpha_2 = \begin{vmatrix} sen\ t & 0 \\ cos\ t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Y la única solución es

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

O sea

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\ \text{ es linealmente independiente}$$

Ejemplo 2-11.

Sabiendo que dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes en (V, +, K, .) demostrar que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes.

Consideremos una combinación lineal de la familia $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\}$ que sea igual al vector nulo, con escalares a y b, que determinaremos:

$$a\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + b\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Por distributividad respecto de la suma en V

$$a\,\mathbf{v}_1 + a\,\mathbf{v}_2 + b\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Por distributividad respecto de la suma en K

$$a\,\mathbf{v}_1 + (a+b)\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Como, por hipótesis, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes, se deduce

$$a = 0 \quad \text{y} \quad a + b = 0$$

En consecuencia

$$a = b = 0$$

Por consiguiente, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes.

2.4.2. Propiedad.

Si un vector es combinación lineal de una familia linealmente independiente, entonces dicha combinación lineal es única.

Sea $\mathbf{v} \in V$ combinación lineal de la familia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, y ésta linealmente independiente. Entonces existen escalares α_i tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,\mathbf{v}_i$$

Suponemos que existen escalares β_i tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\,\mathbf{v}_i$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i\,\mathbf{v}_i$$

O sea

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i\,\mathbf{v}_i - \sum_{i=1}^{r} \beta_i\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{r} (\alpha_i - \beta_i)\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Y como la familia es linealmente independiente, se deduce que

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$$

En consecuencia, la combinación lineal es única.

2.4.3. Conjunto linealmente dependiente

En el ejemplo 2-9 ii) hemos probado que existen escalares no simultáneamente nulos α_1, α_2, α_3 tales que

$$\alpha_1\,(1,-1,0)+\alpha_2\,(1,1,2)+\alpha_3\,(1,0,1)=(0,0,0)$$

Diremos que los vectores $(1,-1,0)$, $(1,1,2)$ y $(1,0,1)$ son linealmente dependientes.

Definición

La familia $A \subset V$ es linealmente dependiente si y sólo si no es linealmente independiente.

La familia $A=\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es un conjunto linealmente dependiente de vectores de V si y sólo si existe una combinación lineal no trivial de dicha familia cuyo resultado sea el vector nulo.

Negando las dos proposiciones que figuran en la definición de independencia lineal, se tiene

$$\text{A es linealmente dependiente} \Leftrightarrow \exists\, i \,/ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge \alpha_i \neq 0.$$

La dependencia lineal de un conjunto finito de vectores significa que tiene que existir, al menos, una combinación lineal de éstos que dé el vector nulo y que no sea trivial.

Para investigar la dependencia lineal de una familia de vectores, se propone una combinación lineal de dicha familia, con escalares a determinar, que sea igual al vector nulo. Si algún escalar es distinto de 0, entonces la familia es linealmente dependiente.

Ejemplo 2-12.

Los vectores $(-2,4)$ y $(1,-2)$ son linealmente dependientes en $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$.
En efecto, sea

$$\alpha_1\,(-2,4)+\alpha_2\,(1,-2)=(0,0)$$

Por definición de producto de escalares por pares y por suma de pares es

$$(-2\,\alpha_1+\alpha_2, 4\,\alpha_1-2\,\alpha_2)=(0,0)$$

Por igualdad de pares resulta

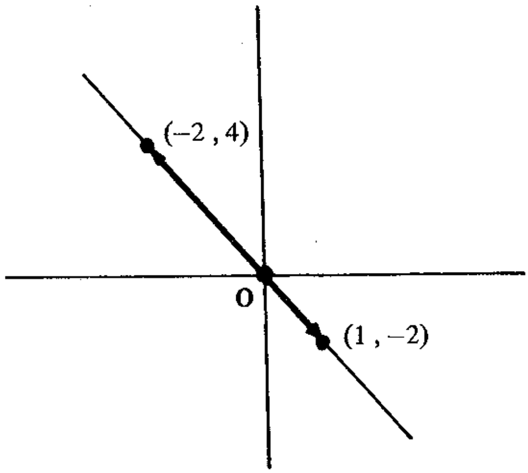
$$\begin{cases} -2\,\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 4\,\alpha_1 - 2\,\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Dividiendo la segunda relación por -2, el sistema se reduce a la única ecuación

$$-2\,\alpha_1+\alpha_2=0$$

Esta admite infinitas soluciones, dadas por

$$\begin{cases} \alpha_1 = k \\ \alpha_2 = 2\,k \quad \text{y} \quad k \in \mathbf{R} \end{cases}$$



Ejemplo 2-13.

Las matrices

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son vectores linealmente independientes del espacio vectorial $(K^{2\times 2}, +, K, .)$, pues cualquiera que sea la combinación lineal de los mismos con escalares en K, cuyo resultado sea la matriz nula, es la trivial. En efecto

$$\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{21} + \alpha_4 E_{22} = N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

En cambio, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes, pues

$$\alpha_1 \; A + \alpha_2 \; B = N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sea

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = k \quad \forall\, k \in K$$

Por consiguiente, existen escalares no simultáneamente nulos que satisfacen la relación anterior, lo que prueba la dependencia lineal.

2.4.3. Propiedades

i) Todo vector no nulo de un espacio vectorial constituye un conjunto linealmente independiente.

Sea $v \neq \mathbf{0}$ en $(V, +, K, .)$. Consideremos

$$\alpha\, v = \mathbf{0}$$

De acuerdo con 1.3.3., como $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, se deduce que $\alpha = 0$, y en consecuencia $\{ \mathbf{v} \}$ es linealmente independiente.

ii) El vector nulo de cualquier espacio vectorial constituye un conjunto linealmente dependiente.

En efecto, cualquier escalar, nulo o no, satisface la relación $\alpha\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$, según lo demostrado en 1.3.2.

iii) Todo conjunto al que pertenezca el vector nulo es linealmente dependiente.

Sea $A = \{ v_1 , v_2 , \ldots, v_r \}$ con $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$. Se verifica que

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots + \alpha_j\, v_j + \ldots + 0v_r = \mathbf{0}$$

O sea

$$\alpha_j\, v_j = \alpha_j\, \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

con α_j no necesariamente nulo.

iv) Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los demás.

Sea $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ una familia de vectores de $(V, +, K, .)$. Demostramos las dos condiciones en que se desdobla el enunciado: necesaria y suficiente.

1°. A es linealmente dependiente $\Rightarrow \exists\, j \,/\, \mathbf{v}_j = \sum\limits_{i \neq j}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i$.

Por definición de dependencia lineal

$$\begin{aligned} &A \text{ es linealmente dependiente} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge \alpha_j \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \wedge \alpha_j \neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_j \mathbf{v}_j = -\sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \wedge \alpha_j \neq 0 \end{aligned}$$

Premultiplicando por α_j^{-1}, inverso multiplicativo en K, de $\alpha_j \neq 0$, se tiene

$$\alpha_j^{-1} (\alpha_j \mathbf{v}_j) = (-\alpha_j^{-1}) \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Por A_7 y propiedad de la sumatoria

$$(\alpha_j^{-1} \alpha_j) \mathbf{v}_j = \sum_{i \neq j}^{n} (-\alpha_j^{-1}) (\alpha_i \mathbf{v}_i)$$

Por inversos en K y A_7 es

$$1\, \mathbf{v}_j = \sum_{i \neq j}^{n} (-\alpha_j^{-1} \alpha_i) \mathbf{v}_i$$

Teniendo en cuenta A_{10}, y llamando β_i a $-\alpha_j^{-1} \alpha_i$ se deduce

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i \neq j}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i$$

En consecuencia, existe $\mathbf{v}_j \in A$, que es combinación lineal de los restantes vectores de A.

2°. $\mathbf{v}_j = \sum\limits_{i \neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \Rightarrow$ A es linealmente dependiente.

Por hipótesis y trasposición de términos se tiene

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \text{ con } \alpha_j = -1$$

Como $\alpha_j \neq 0$, el conjunto A es linealmente dependiente.

v) Un conjunto finito y no vacío de vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector es combinación lineal de los demás.

Nada hay que demostrar, pues basta negar las dos proposiciones de la condición necesaria y suficiente anterior.

En símbolos

$$\text{A es linealmente independiente} \Leftrightarrow \forall_j : \mathbf{v}_j \neq \sum_{i \neq j}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i$$

En lo sucesivo, y en algunas ocasiones, abreviaremos las expresiones: "linealmente independiente" y "linealmente dependiente" mediante "L.I." y "L.D.", respectivamente.

vi) Un conjunto finito y ordenado de vectores al que no pertenece el vector nulo es linealmente dependiente si y sólo si algún vector es combinación lineal de los precedentes.

$$1^\circ.\ A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} \text{ es LD} \wedge \mathbf{0} \notin A \Rightarrow \exists\, k \,/\, 2 \leqslant k \leqslant r \wedge \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

Demostración) Sea k el primer entero positivo tal que

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \quad \text{es L.D.}$$

k existe por el principio de buena ordenación.

Por definición se tiene

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \;\text{ y algún }\; \beta_j \neq 0$$

Si $\beta_k = 0$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ sería LD, contra lo supuesto.

Luego $\beta_k \neq 0$, y procediendo como en iv) 1º se deduce que

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

O sea, $\mathbf{v}_k$ es combinación lineal de los precedentes, y k es tal que $2 \leqslant k \leqslant r$.

2º. El recíproco es obvio y puede ser demostrado como ejercicio.

De acuerdo con los conceptos anteriores podemos afirmar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) A es L.I.

b) Toda combinación lineal de la familia A, cuyo resultado sea el vector nulo, es la trivial.

c) Ningún vector de A es combinación lineal de los demás.

Análogamente son equivalentes:

a') A es L.D.

b') Existe una combinación lineal de la familia A con escalares no todos nulos, cuyo resultado es el vector nulo.

c') Algún vector de A es combinación lineal de los demás.

Ejemplo 2-14.

En el espacio vectorial de los polinomios reales sobre el cuerpo de los reales, P y Q definidos por

$$P(x) = x^2 + x \qquad Q(x) = -2x$$

son linealmente independientes.

Sea

$$a\mathrm{P} + b\mathrm{Q} = \mathbf{0} \quad \text{donde } \mathbf{0} \text{ denota el polinomio nulo}$$

Cualquiera que sea $x \in \mathbf{R}$ se verifica

$$(a\mathrm{P} + b\mathrm{Q})(x) = \mathbf{0}(x)$$

Por definición de suma de funciones y de polinomio nulo es

$$(a\mathrm{P})(x) + (b\mathrm{Q})(x) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

Por definición de producto de escalares por polinomios, se tiene

$$a\mathrm{P}(x) + b\mathrm{Q}(x) = 0$$

O sea

$$a(x^2 + x) + b(-2x) = 0$$

Luego

$$ax^2 + (a - 2b)x = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

Si $x = -1$, se verifica $a - a + 2b = 0$, y en consecuencia $b = 0$.
Entonces es $ax^2 + ax = 0$, y haciendo $x = 1$, resulta $2a = 0$, o sea, $a = 0$.

2.5. SISTEMA DE GENERADORES

2.5.1. Concepto

Si un conjunto no vacío de vectores de un espacio (V, +, K, .) es tal que todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de dicho conjunto, entonces se dice que éste es un sistema de generadores de V. Esto equivale a decir que el subespacio de V generado por tal conjunto es el mismo V. El concepto de sistema de generadores de un espacio vectorial es independiente de la dependencia o independencia lineal del sistema. O sea, un sistema de generadores puede ser linealmente independiente o no.

Definición

La familia $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un sistema de generadores de V si y sólo si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A. O bien, A es un sistema de generadores de V si y sólo si el subespacio generado por A es V.

Las notaciones "S.G." y "C.L." son abreviaturas de "sistema de generadores" y "combinación lineal", respectivamente.

La traducción simbólica de la definición anterior es

$$\text{A es un S.G. de V} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i$$

O bien

$$\text{A es un S.G. de V} \Leftrightarrow \bar{A} = V$$

Ejemplo 2-15.

El conjunto $A = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ es un sistema de generadores de $\mathbf{R}^2$.

En efecto, si (a, b) es cualquier vector de $\mathbf{R}^2$, deben existir escalares α, β y γ tales que

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) + \gamma(1, 1) = (a, b)$$

O sea

$$(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) = (a, b)$$

Luego

$$\alpha + \gamma = a \quad \wedge \quad \beta + \gamma = b$$

En consecuencia

$$\alpha = a - k \quad , \quad \beta = b - k \quad , \quad \gamma = k \qquad \forall\, k \in \mathbf{R}$$

Este resultado nos dice que, efectivamente, A es un S.G. de $\mathbf{R}^2$, y además, que cualquier vector del espacio puede expresarse de infinitas maneras como C.L. de los vectores de A. Por otra parte, es fácil verificar que A constituye una familia L.D.
En el ejemplo 2-6 está demostrado que las matrices V_1, V_2 y V_3 constituyen un sistema de generadores del espacio vectorial de las matrices reales de traza nula del tipo 2×2. Además, tales matrices son linealmente independientes.

2.5.2. Propiedad

Si la familia $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un S.G. L.D. de V, entonces existe $\mathbf{v}_j \in A$, tal que $A - \{\mathbf{v}_j\}$ es un S.G. de V.

Demostración) Por ser A un sistema de generadores de V, se verifica

$$\mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (1)$$

Como A es linealmente dependiente, por 2.4.3. iv), algún vector de A, digamos $\mathbf{v}_j$, es combinación lineal de los restantes, o sea

$$\exists\, \mathbf{v}_j \text{ tal que } \mathbf{v}_j = \sum_{i \neq j}^{r} \beta_i \mathbf{v}_i \quad (2)$$

Teniendo en cuenta (1) y (2) podemos escribir

$$\mathbf{v} = \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{i \neq j}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_j \sum_{i \neq j}^{r} \beta_i \mathbf{v}_i + \sum_{i \neq j}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i =$$

$$= \sum_{i \neq j}^{r} (\alpha_j \beta_i + \alpha_i) \mathbf{v}_i = \sum_{i \neq j}^{r} \gamma_i \mathbf{v}_i$$

En consecuencia, $A - \{ \mathbf{v}_j \}$ es un sistema de generadores de V.

Ejemplo 2-17.

Determinamos si los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$ de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ constituyen un sistema de generadores de $\mathbf{R}^3$.
El problema se reduce a investigar si existen escalares reales α, β y γ, tales que cualquiera que sea $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ se verifique

$$\alpha (1, 1, 1) + \beta (1, 1, 0) + \gamma (1, 0, 0) = (a, b, c)$$
$$(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta, \alpha) = (a, b, c)$$

Luego

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ \alpha + \beta \qquad = b \\ \alpha \qquad\qquad = c \end{cases}$$

De donde resulta

$$\alpha = c \;,\; \beta = b - c \;,\; \gamma = a - b$$

En consecuencia, todo vector de $\mathbf{R}^3$ puede expresarse como C.L. de los vectores propuestos. Observamos, además, que tal C.L. es única para cada $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$.
En el caso en que (a, b, c) sea el vector nulo, los escalares son nulos, y en consecuencia los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, además de constituir un S.G., son L.I.
Por este motivo se dice que tales vectores son una base de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$.

2.6. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

2.6.1. Concepto de base

Sea $A = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ una familia de vectores de (V, +, K, .).

Definición

La familia $A \subset V$ es una base de (V, +, K,.) si y sólo si es un conjunto linealmente independiente y sistema de generadores de V.

$$A \subset V \text{ es una base de } V \Leftrightarrow A \text{ es L.I. y } \overline{A} = V$$

Ejemplo 2-18.

Una base de $(K^n, +, K, .)$ es el conjunto de vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

El lector puede comprobar que la familia $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente y un sistema de generadores de K^n. Tal familia recibe el nombre de base canónica.

Ejemplo 2-19.

En el ejemplo 2-13 se demostró que las matrices E_{11}, E_{12}, E_{21} y E_{22} constituyen una familia linealmente independiente del espacio $(K^{2\times2}, +, K, .)$.
Además, tal conjunto es un sistema de generadores de dicho espacio, y en consecuencia es una base del mismo. La llamaremos también base canónica de $K^{2\times2}$.

Ejemplo 2-20.

Determinar una base del subespacio de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ estudiado en el ejemplo 1-8.
Tal subespacio es

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ / \ x_3 = x_1 + x_2 \}$$

Si (a, b, c) es un vector genérico de S, entonces se tiene $c = a + b$, y en consecuencia podemos escribir, en virtud de las leyes de composición en S:

$$(a, b, c) = (a, b, a + b) = (a, 0, a) + (0, b, b) = a\,(1, 0, 1) + b\,(0, 1, 1)$$

Este resultado nos dice que los vectores de $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1, 0, 1) \text{ y } v_2 = (0, 1, 1)$$

constituyen un sistema de generadores de S. Además, son linealmente independientes, pues

$$a\,(1, 0, 1) + b\,(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow a = b = 0$$

Por consiguiente, v_1 y v_2 constituyen una base de S.

2.6.2. Coordenadas o componentes de un vector

En este texto consideraremos únicamente espacios vectoriales de bases finitas. En algunas ocasiones, para indicar que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base del espacio vectorial $(V, +, K, .)$, utilizaremos el símbolo [v] para hacer referencia a ella.

Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $(V, +, K, .)$, entonces cada vector de V puede expresarse de modo único como combinación lineal de la base, ya que los vectores de ésta son linealmente independientes y sistema de generadores, de acuerdo con 2.4.2.

O sea, si $\mathbf{x} \in V$, entonces existen y son únicos los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\,\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{v}_i$$

Respecto de la base dada, el vector $x \in V$ queda caracterizado por los coeficientes de la combinación lineal, o sea, por la n–upla de elementos de K: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los escalares x_i se llaman coordenadas o componentes del vector $\mathbf{x} \in V$, respecto de la base dada. Si se elige otra base en el espacio V, entonces el mismo vector $\mathbf{x}$ admite otras coordenadas o componentes: $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

Demostraremos más adelante que dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial son coordinables, es decir, tienen el mismo número de vectores.

Dada la base $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ del espacio $(V, +, K, .)$, podemos expresar a cada vector $\mathbf{x} \in V$ como una matriz columna, cuyos elementos sean las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de $[\mathbf{v}]$; en tal caso escribiremos

$$\mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2-21.

Determinar las coordenadas de $\mathbf{x} = (-2, 3)$ perteneciente a $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$, respecto de las bases:

i) $[\mathbf{v}] = \{(1, 1), (1, 0)\}$

ii) $[\mathbf{w}] = \{(-2, 3), (1, 2)\}$

iii) canónica

En el primer caso, planteamos la relación lineal

$$a(1, 1) + b(1, 0) = (-2, 3)$$

Efectuando las operaciones, y resolviendo respecto de a y b, se tiene

$$(a + b, a) = (-2, 3) \Rightarrow a + b = -2 \text{ y } a = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = 3 \text{ y } b = -5$$

En consecuencia, las coordenadas de $\mathbf{x}$, respecto de la base $[\mathbf{v}]$, son: 3 y -5

Y puede escribirse

$$\mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

En el segundo caso, procediendo análogamente, se llega a que las coordenadas de $\mathbf{x}$ son 1 y 0, y por lo tanto

$$\mathbf{X}_{[\mathbf{w}]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, respecto de la base canónica, es

$$(-2, 3) = (-2, 0) + (0, 3) = -2\,(1, 0) + 3\,(0, 1)$$

O sea, las coordenadas de $\mathbf{x}$ son precisamente los elementos del par ordenado, y escribiremos simplemente

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.6.3. Teorema de extensión a una base

Si $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base del espacio vectorial V, y $[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero no de generadores de V, entonces existen vectores $\mathbf{w}_{m+1}, \mathbf{w}_{m+2}, \ldots, \mathbf{w}_{m+p}$, tales que $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_{m+p}\}$ es una base de V.

Si $[\mathrm{w}] \cap [\mathrm{v}] = \phi$, consideramos el conjunto

$$A = [\mathbf{w}] \cup [\mathbf{v}] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

Como cada $\mathbf{w}_i$ es combinación lineal de los vectores de la base $[\mathbf{v}]$, A es un conjunto linealmente dependiente por 2.4.3. iv). De acuerdo con 2.4.3. vi), siendo A un conjunto finito y linealmente dependiente al que no pertenece el vector nulo, algún vector es combinación lineal de los precedentes. Tal vector es un elemento de $[\mathbf{v}]$, ya que $[\mathbf{w}]$ es linealmente independiente. Por otra parte, como A es un sistema de generadores linealmente dependiente de V, y $\mathbf{v}_i$ es combinación lineal de los precedentes, resulta

$$A_i = A - \{\mathbf{v}_i\} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

un sistema de generadores de V, según 2.5.2.

Si A_i es linealmente independiente, el teorema está demostrado. Si A_i es linealmente dependiente, se reitera el proceso, y a lo sumo, al cabo de $(n-1)$ etapas se obtiene un conjunto linealmente independiente que es sistema de generadores de V, o sea, una base.

2.6.4. Coordinabilidad de las bases

Dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial son coordinables.

Hipótesis) $(V, +, K, .)$ es un espacio vectorial.

$[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ y $[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ son bases de V.

Tesis) $[\mathbf{v}] \sim [\mathbf{w}]$, o sea, $n = m$.

Demostración) Consideremos

$$A = \{ \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$$

Este conjunto, al que no pertenece el vector nulo, es un sistema de generadores (pues $[\mathbf{v}]$ es una base), y linealmente dependiente (ya que $\mathbf{w}_m$ es C.L. de la familia $[\mathbf{v}]$). La propiedad 2.4.3. nos dice que algún $\mathbf{v}_i$ es C.L. de los precedentes, y, de acuerdo con 2.5.2., es $A - \{ \mathbf{v}_i \}$ un sistema de generadores de V.

Sea

$$A_1 = \{ \mathbf{w}_{m-1}, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \}$$

Este conjunto es un sistema de generadores linealmente dependiente, y en consecuencia, algún $\mathbf{v}_j$ es combinación lineal de los precedentes. Lo mismo que en la etapa anterior, se lo extrae y se agrega $\mathbf{w}_{m-2}$, obteniéndose

$$A_2 = \{ \mathbf{w}_{m-2}, \mathbf{w}_{m-1}, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \}$$

que es un sistema de generadores y linealmente dependiente.

Reiterando el procedimiento, afirmamos que no es posible que los $\mathbf{v}_h$ se "agoten antes" que los $\mathbf{w}_k$, ya que en este caso los $\mathbf{w}_k$ sobrantes serían combinación lineal de los considerados. En consecuencia es

$$m \leqslant n \quad (1)$$

Análogamente, a partir de

$$B = \{ \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m \}$$

se prueba que

$$n \leqslant m \quad (2)$$

De (1) y (2), por la antisimetría de la relación de menor o igual, resulta

$$n = m$$

2.7. DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

2.7.1. Concepto

En 2.6.4. hemos demostrado que si $[\mathbf{v}]$ es una base finita del espacio vectorial $(V, +, K, .)$, entonces toda otra base de V es coordinable a $[\mathbf{v}]$. Esto significa que dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial tienen el mismo número de vectores. Tal número se llama la dimensión del espacio.

Definición

Dimensión de un espacio vectorial V es el número cardinal de cualquiera de sus bases.

Si V consiste únicamente en el vector nulo, diremos que su dimensión es 0.

En ambos casos, V es un espacio de dimensión finita.

Si $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ es una base de (V, +, K, .), escribiremos

$$\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{V} = n$$

Ejemplo 2-22.

Analizando ejemplos propuestos anteriormente se tiene que

$\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{K}^n = n$ $\quad$ $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{K}^{2\times 2} = 4$

$\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{R}^n = n$ $\quad$ $\dim_{\mathbf{R}} \mathrm{S} = 2$ $\quad$ siendo S el subespacio del ejemplo 2-20

El lector puede verificar que $\{ \mathbf{1}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^2 \}$ constituye una base del espacio vectorial de los polinomios reales en la indeterminada X, de grado menor o igual que 2 y el polinomio nulo, sobre el cuerpo de los reales. En consecuencia, su dimensión es 3.

2.7.2. Propiedad

Un conjunto de n vectores de un espacio vectorial n-dimensional es una base si y sólo si es linealmente independiente o sistema de generadores.

1°. Si $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ es una base de V y $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{V} = n$, entonces $[\mathbf{v}]$ es linealmente independiente y sistema de generadores.

2° • Si $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{V} = n$ y $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ es L.I., entonces $[\mathbf{v}]$ es S.G.

En efecto, si $[\mathbf{v}]$ no fuera un sistema de generadores, por el teorema de extensión, podría completarse hasta formar una base de V, en cuyo caso sería $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{V} > n$, lo que es absurdo.

• Si $\dim_{\mathbf{K}} \mathrm{V} = n$ y $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ es S.G., entonces $[\mathbf{v}]$ es L.I.

Si $[\mathbf{v}]$, que es S.G., fuera L.D., entonces existiría $\mathbf{v}_j$ tal que $[\mathbf{v}] - \{ \mathbf{v}_j \}$ es S.G. de V, según 2.5.2. Si este conjunto de $n-1$ vectores fuera L.I. constituiría una base de V. Si $[\mathbf{v}] - \{ \mathbf{v}_j \}$ no fuera L.I. se reitera el procedimiento, y en todo caso se llega a una base de V cuyo cardinal es menor que n, lo que también es absurdo.

En consecuencia afirmamos que:

1 . n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial n-dimensional constituyen una base del mismo.

2. Todo sistema de generadores de n vectores de un espacio vectorial n-dimensional es una base del mismo.

3 . Todo conjunto de más de n vectores de un espacio vectorial n-dimensional es linealmente dependiente.

La dimensión de un espacio vectorial (V, +, K, .) depende no sólo de V, sino también del cuerpo K. Seguidamente aclaramos esta observación.

Ejemplo 2-23.

Sean (V, +, **R**, .) y (V, +, **C**, .) dos espacios vectoriales, donde el conjunto de vectores es el mismo en ambos casos y **C** es el cuerpo de los complejos.

Supongamos que $\dim_{\mathbf{C}} V = n$. Entonces es $\dim_{\mathbf{R}} V = 2n$.
En efecto, si $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $(V, +, \mathbf{C}, .)$, entonces $[\mathbf{w}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, i\mathbf{v}_1, i\mathbf{v}_2, \ldots, i\mathbf{v}_n\}$ es una base de $(V, +, \mathbf{R}, .)$.
Para ello probaremos que

1 . $[\mathbf{w}]$ es L.I.
Sea

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, i \, \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\,\beta_j) \ \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_j + i\beta_j = 0 \ , \ \forall j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_j = \beta_j = 0 \ , \ \forall j$$

2 . $[\mathbf{w}]$ es S.G.
Por ser $[\mathbf{v}]$ una base de $(V, +, \mathbf{C}, .)$, para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $\alpha_j + i\,\beta_j \in \mathbf{C}$ tales que

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\,\beta_j)\, \mathbf{v}_j \Rightarrow \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j \,(i\,\mathbf{v}_j)$$

Luego $[\mathbf{w}]$ es una base de $(V, +, \mathbf{R}, .)$, y en consecuencia

$$\dim_{\mathbf{R}} V = 2 \dim_{\mathbf{C}} V$$

En particular, es

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}^n = 2 \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}^n = 2\,n$$

y

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2 \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 2$$

2.7.3. Propiedad

Sea S un subespacio de V. Se verifica que:

$$\dim S = \dim V \Leftrightarrow S = V$$

1. Si el subespacio S es el mismo V, entonces es obvio que $\dim S = \dim V$.

2. Supongamos ahora que S es un subespacio de V que verifica $\dim S = \dim V$.
Si la dimensión común es 0, entonces tanto S como V tienen como único elemento al vector nulo y son idénticos.
Sea $\dim S = \dim V = n > 0$. Consideremos una base de S:

$$[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$$

Los n vectores de $[\mathbf{w}]$ son L.I. en V, y de acuerdo con 2.6.3. constituyen una base de V. Entonces son un S.G. de V, lo que nos dice que todo vector de V pertenece a S, o sea, $V \subset S$, y, como por definición de subespacio es $S \subset V$, resulta $S = V$.

2.8. DIMENSION DE LA SUMA

2.8.1. Propiedad

Si S_1 y S_2 son dos subespacios de $(V, +, K, .)$ y la dimensión de V es finita, entonces se verifica que

$$\dim (S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim (S_1 \cap S_2)$$

Sean:

$$\dim V = n \quad \dim S_1 = n' \quad \dim S_2 = n''$$

$$\dim (S_1 \cap S_2) = p \quad \text{y} \quad \dim S_1 + S_2 = q$$

Se trata de probar que

$$q = n' + n'' - p$$

Consideremos $S_1 \cap S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ y $[\mathbf{x}] = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ una base de $S_1 \cap S_2$.

Teniendo en cuenta que $S_1 \cap S_2$ es un subespacio de S_1 y de S_2, completamos la base $[\mathbf{x}]$ a una base en cada uno de éstos.

Sean

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{n'-p}\} \quad \text{y}$$
$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_{n''-p}\} \quad \text{bases en}$$

S_1 y en S_2, respectivamente.

El conjunto

$$A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n'-p}, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_{n''-p}\}$$

es una base de $S_1 + S_2$, pues:

1°. A es S.G. de $S_1 + S_2$.

En efecto, sea $\mathbf{v} \in S_1 + S_2$. Por definición de subespacio suma es

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \;\wedge\; \mathbf{x} \in S_1 \;\wedge\; \mathbf{y} \in S_2$$

Entonces

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n'-p} \beta_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n''-p} \beta'_i \mathbf{z}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \alpha'_i) \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n'-p} \beta_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^{n''-p} \beta'_i \mathbf{z}_i$$

2°. A es L.I.

Consideremos

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n'-p} \beta_i \mathbf{y}_i + \sum_{i=1}^{n''-p} \gamma_i \mathbf{z}_i = \mathbf{0} \quad (1)$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n''-p} \gamma_i \mathbf{z}_i = -\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^{n'-p} \beta_i \mathbf{y}_i$$

y

$\sum_{i=1}^{n''-p} \gamma_i \mathbf{z}_i$, que pertenece a S_2, también pertence a S_1, o sea

$$\sum_{i=1}^{n''-p} \gamma_i \mathbf{z}_i \in S_1 \cap S_2$$

En consecuencia es

$$\sum_{i=1}^{n''-p} \gamma_i \mathbf{z}_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha'_i \mathbf{x}_i$$

O sea

$\sum_{i=1}^{p} \alpha'_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^{n''-p} \gamma_i \mathbf{z}_i = \mathbf{0}$, y por la independencia lineal de la base de S_2, se tiene:

$$\alpha'_i = 0 \quad , \quad \gamma_i = 0$$

Teniendo en cuenta (1) es

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^{n'-p} \beta_i \mathbf{y}_i = \mathbf{0}$$

Luego

$$\alpha_i = 0 \quad , \quad \beta_i = 0$$

Siendo A una base de $S_1 + S_2$, resulta

$$\cancel{p} + (n' - \cancel{p}) + (n'' - p) = q$$

Es decir

$$q = n' + n'' - p$$

Lo que se traduce en

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$$

2.8.2. Dimensión de la suma directa

Si S_1 y S_2 son dos subespacios disjuntos de (V, +, K, .), entonces la dimensión de la suma directa es igual a la suma de las dimensiones de S_1 y S_2.

En este caso es $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}\}$, y en consecuencia, $\dim(S_1 \cap S_2) = 0$.

El teorema anterior es válido también en esta situación, y por consiguiente resulta

$$\dim(S_1 \oplus S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$$

Ejemplo 2-24.

Determinar la dimensión de la suma de los siguientes subespacios de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$.

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x + y - z = 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,/\, x - z = 0\}$$

S_1 y S_2 son planos y la dimensión de cada uno de ellos es 2.

$$S_1 \cap S_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ / x = z \ \wedge \ y = 0 \}$$

Todo vector de $S_1 \cap S_2$ es del tipo

$$(a, 0, a) = a\,(1, 0, 1) \quad \forall\, a \in \mathbf{R}$$

Luego

$$\dim S_1 \cap S_2 = 1$$

En consecuencia

$$\dim (S_1 + S_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

O sea

$$S_1 + S_2 = \mathbf{R}^3$$

TRABAJO PRACTICO II

2-25. Expresar en cada caso, si es posible, al vector $\mathbf{v}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. El espacio vectorial es $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$.

i) $\mathbf{v}=(\sqrt{2}, -1)$, $\mathbf{v}_1=(\sqrt{3}, 2)$, $\mathbf{v}_2=(-\sqrt{6}, 2)$

ii) $\mathbf{v}=(2, 4)$, $\mathbf{v}_1=(-1, 3)$, $\mathbf{v}_2=(2, -6)$

2-26. Comprobar que los vectores de $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{v}_1=(-1, 3, 1) \quad \mathbf{v}_2=(3, -1, 1) \text{ y } \mathbf{v}_3=(4, 0, 2)$$

son linealmente dependientes, y expresar a $\mathbf{v}_3$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

2-27. En $(\mathbf{R}^{2\times 3}, +, \mathbf{R}, .)$ se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que son linealmente independientes.

2-28. Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores

$$\mathbf{v}_1=2^{1/2} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2=3^{1/2}$$

en cada uno de los espacios vectoriales $(\mathbf{R}, +, \mathbf{R}, .)$ y $(\mathbf{R}, +, \mathbf{Q}, .)$.

2-29. Dados los vectores $(1, -4, 6)$, $(1, 4, 4)$ y $(0, -4, x)$, del espacio $\mathbf{R}^3$ sobre el cuerpo de los reales, determinar x para que sean linealmente dependientes.

2-30. Demostrar que si a, b y c son tres números reales distintos, entonces los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ de $(\mathbf{R}^3, +, \mathrm{R}, .)$ son linealmente independientes.

2-31. En el espacio vectorial de las funciones reales definidas en $\mathbf{R}$, se consideran las funciones $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ y $\mathbf{h}$, definidas por

$$\mathbf{f}(t)=t^2+2t-1\ , \ \mathbf{g}(t)=t^2+1\ , \ \mathbf{h}(t)=t^2+t$$

Demostrar que son linealmente dependientes.

2-32. En el espacio vectorial $(\mathbf{R}^{\mathbf{R}^+}, +, \mathbf{R}, .)$ se dan las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ definidas por

$$\mathbf{f}(t)=t\ , \ \mathbf{g}(t)=\frac{1}{t}$$

Probar que son linealmente independientes.

2-33. En $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$, los vectores (a, b) y (c, d) verifican la condición $ad - bc \neq 0$. Demostrar que son linealmente independientes.

2-34. Determinar si los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, -1)$ son linealmente independientes en $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ y en $(\mathbf{C}^3, +, \mathbf{C}, .)$.

2-35. Sabiendo que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son vectores linealmente independientes del espacio $(V, +, K, .)$, investigar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

i) $\{ \mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_3 \}$

ii) $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_3 , \mathbf{v}_3 + b\mathbf{v}_2 \}$

donde *a, b* y *c* son elementos de K.

2-36. Sean: $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \}$ un conjunto L.I. de $(V, +, K, .)$ y $k \in K$.
Demostrar

$$\{ k\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \} \text{ es L.I.} \Leftrightarrow k \neq 0$$

2-37. Demostrar que si el conjunto $A = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \}$ es L.I. y $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{u} \}$ es L.D., entonces $\mathbf{u}$ es combinación lineal de la familia A.

2-38. Sabiendo que el conjunto A, a que se refiere el ejercicio anterior, es L.I. en $(V, +, K, .)$, y que $\mathbf{x}$ no es combinación lineal de dicho conjunto, entonces $A \cup \{ \mathbf{x} \}$ es L.I.

2-39. Demostrar que si el conjunto $A = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \}$ es L.I. en $(V, +, K, .)$, entonces se verifica que el vector $\sum_{i=1}^{n} i\mathbf{x}_i \neq 0$.

2-40. Demostrar la independencia lineal de los vectores $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, y $\mathbf{f}_3$ del espacio $(\mathbf{R}^I, +, \mathbf{R}, .)$, donde I es el intervalo cerrado de extremos 0 y 1, sabiendo que

$$\mathbf{f}_1(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3} \\ 0 \text{ si } \frac{1}{3} < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \mathbf{f}_2(x) = \begin{cases} 2 \text{ si } x \in [0, \frac{2}{3}] \\ 0 \text{ si } x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$$\mathbf{f}_3(x) = 2 - x \text{ si } x \in [0, 1]$$

2-41. Proponer una base en cada uno de los siguientes espacios vectoriales:

i) $(\mathbf{R}, +, \mathbf{R}, .)$
ii) $(\mathbf{R}^4, +, \mathbf{R}, .)$
iii) $(\mathbf{R}^{2\times 3}, +, \mathbf{R}, .)$
iv) $(\mathbf{C}, +, \mathbf{C}, .)$
v) $(\mathbf{C}, +, \mathbf{R}, .)$

2-42. Determinar el subespacio de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$. Obtener una base de dicho subespacio.

2-43. Demostrar que los siguientes conjuntos de vectores de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ generan el mismo subespacio

$$A = \{(1, 0, -1), (0, -2, 1)\} \qquad B = \{(1, -2, 0), (2, -2, -1)\}$$

2-44. Determinar una base y la dimensión del subespacio de matrices de traza nula de $(\mathbf{R}^{2\times 2}, +, \mathbf{R}, .)$.

2-45. En $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{R}, .)$ se considera el subespacio $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 \, / \, z - 2u = 0\}$
Obtener una base y la dimensión de S.

2-46. En $(\mathbf{R}^{2\times 2}, +, \mathbf{R}, .)$ se considera $S = \{A \in \mathbf{R}^{2\times 2} \, / \, a_{12}\,(a_{11} + a_{22}) = 0\}$
Investigar si S es un subespacio, y en caso afirmativo obtener una base del mismo.

2-47. Investigar si $S = \{(z, u) \in \mathbf{C}^2 \, / \, z - \overline{z} + u = 0\}$ es un subespacio en $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{C}, .)$ y $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{R}, .)$. Si lo es, determinar una base y la dimensión.

2-48. Determinar el subespacio S de $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ generado por los vectores $(2, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1)$. Hallar una base de S y su dimensión. Proponer un subespacio T que no contenga a los vectores dados.

2-49. Dados los subespacios de $(\mathbf{R}^4, +, \mathbf{R}, .)$

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \, / \, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$$
$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \, / \, x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

Obtener la dimensión de $S_1 + S_2$.

2-50. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una familia de vectores de $(V, +, K, .)$ y $r \leqslant n$. Por definición, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un subconjunto maximal de vectores L.I. si y sólo si $i > r \Rightarrow \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_i\}$ es L.D.
Demostrar que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un S.G. de V y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un subconjunto maximal de vectores L.I., entonces éste es una base de V.

2-51. Demostrar que si V es un espacio de dimensión finita y $V = S_1 \oplus S_2$, entonces se verifica que $\dim V = \dim S_1 + \dim S_2$.

Capítulo 3

TRASFORMACIONES LINEALES

3.1. INTRODUCCION

Exponemos en este capítulo el concepto de trasformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, las propiedades generales y los tipos especiales de trasformaciones lineales. Se introducen las estructuras de núcleo y de imagen de una trasformación lineal y se da la relación entre sus dimensiones. Fijada una base en cada espacio, siempre en el caso finito, se determina la matriz asociada a una trasformación lineal. Después del estudio de la composición de trasformaciones lineales, se conecta este concepto con el producto de matrices. Finalmente, se mencionan los espacios vectoriales de trasformaciones lineales y el espacio dual de un espacio vectorial.

3.2. TRASFORMACION LINEAL ENTRE DOS ESPACIOS VECTORIALES SOBRE UN MISMO CUERPO

Sean $(V, +, K, .)$ y $(W, +, K, .)$ dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

3.2.1. Concepto

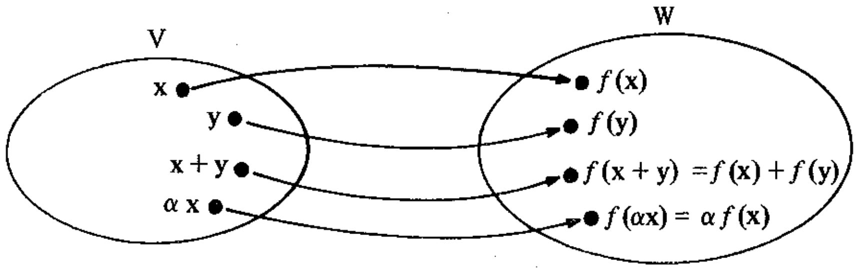
La función $f : V \to W$ es una trasformación lineal u homomorfismo si y sólo si

i) la imagen de la suma de dos vectores cualesquiera de V es igual a la suma de sus imágenes en W

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

ii) la imagen del producto de cualquier escalar por todo vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector.

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$



Las condiciones i) y ii) se pueden reducir a la única siguiente:
$f : V \to W$ es una trasformación lineal si y sólo si

$$f(\alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$$

cualesquiera que sean α y β en K, y $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en V.

El lector puede demostrar por inducción completa que si $f : V \to W$ es una trasformación lineal, entonces se verifica que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{x}_i)$$

cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$.

Esto nos permite afirmar que las trasformaciones lineales preservan las combinaciones lineales.

Ejemplo 3-1

Sean los espacios vectoriales $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ y $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$.
La función $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3,\ x_2 - x_3)$$

es una trasformación lineal, ya que se verifican las condiciones:

i) $f[(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$
$= (x_1 + y_1 - x_3 - y_3, x_2 + y_2 - x_3 - y_3)$ (1)

por suma en $\mathbf{R}^3$ y definición de f. Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de f y la suma en $\mathbf{R}^2$, es

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3) + (y_1 - y_3, y_2 - y_3) =$$
$$= (x_1 - x_3 + y_1 - y_3, x_2 - x_3 + y_2 - y_3) \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que la imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes.

ii) Por definición de producto de escalares por ternas, definición de f, propiedad distributiva del producto en **R**, producto de escalares por pares, y por definición de f, es

$$f[\alpha(x_1, x_2, x_3)] = f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 - \alpha x_3, \alpha x_2 - \alpha x_3) =$$
$$= \alpha(x_1 - x_3, x_2 - x_3) = \alpha f(x_1, x_2, x_3)$$

O sea, la imagen del producto de cualquier escalar por todo vector es igual al producto del escalar por la imagen del vector.

Ejemplo 3-2.

La función $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3 + 1)$ no es una trasformación lineal, pues

$$f[(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)] = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) =$$
$$= (x_1 + y_1 - x_3 - y_3, x_2 + y_2 - x_3 - y_3 + 1)$$

pero

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3 + 1) + (y_1 - y_3, y_2 - y_3 + 1) =$$
$$= (x_1 - x_3 + y_1 - y_3, x_2 - x_3 + y_2 - y_3 + 2)$$

Ejemplo 3-3.

Supongamos que $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ es una trasformación lineal que verifica

$$f(1, 0) = (1, 2, 3) \quad \text{y} \quad f(0, 1) = (0, -1, 2)$$

Podemos obtener la imagen de $(2, -3)$ de la siguiente manera

$$f(2, -3) = f\,[(2, 0) + (0, -3)] = f[2(1, 0) + (-3)(0, 1)] =$$
$$= 2f(1, 0) + (-3)f(0, 1) = 2(1, 2, 3) + (-3)(0, -1, 2) =$$
$$= (2, 4, 6) + (0, 3, -6) = (2, 7, 0)$$

3.2.2. Propiedades y clasificación de las trasformaciones lineales

Sea $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una trasformación lineal. Denotaremos mediante $\mathbf{0}_\mathrm{V}$ y $\mathbf{0}_\mathrm{W}$ a los vectores nulos en V y en W, respectivamente.

I . La imagen del vector nulo del primer espacio por toda trasformación lineal es el vector nulo del segundo espacio.

Teniendo en cuenta que el producto del escalar 0 por cualquier vector es el vector nulo, y la condición ii) de la definición de trasformación lineal, se tiene

$$f(\mathbf{0}_\mathrm{V}) = f(0\mathrm{x}) = 0f(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_\mathrm{W}$$

II. La imagen del opuesto de todo vector del primer espacio es igual al opuesto de su imagen.

Considerando la propiedad 1.3.4., y la definición de trasformación lineal, es

$$f(-\mathbf{x})=f[(-1)\mathbf{x}]=(-1)f(\mathbf{x})=-f(\mathbf{x})$$

De acuerdo con la definición, una función $f: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$ es una trasformación lineal si y sólo si satisface las condiciones i) y ii), pero nada se exige a f, salvo que sea una aplicación. En particular diremos que

f es un monomorfismo $\Leftrightarrow f$ es inyectiva

f es un epimorfismo $\Leftrightarrow f$ es sobreyectiva

f es un isomorfismo $\Leftrightarrow f$ es biyectiva

Si $\mathrm{W}=\mathrm{V}$, entonces la trasformación lineal f se llama un endomorfismo, y si éste es biyectivo recibe el nombre de automorfismo. O sea, un automorfismo es toda trasformación lineal biyectiva de un espacio vectorial en sí mismo.

Ejemplo 3-4.

La aplicación $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, -x_1, x_3)$$

es un automorfismo en $\mathbf{R}^3$.

Debemos probar que f es una trasformación lineal biyectiva.

1. f es una trasformación lineal, ya que verifica:

i) La imagen de la suma es igual a la suma de las imágenes

$$f[(x_1, x_2, x_3)+(y_1, y_2, y_3)]=f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)=$$
$$=(x_2+y_2, -x_1-y_1, x_3+y_3)=(x_2, -x_1, x_3)+(y_2, -y_1, y_3)=$$
$$=f(x_1, x_2, x_3)+f(y_1, y_2, y_3)$$

ii) La imagen del producto de cualquier escalar por todo vector es igual al producto del escalar por la imagen del vector.

$$f[\alpha(x_1, x_2, x_3)]=f(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)=(\alpha x_2, -\alpha x_1, \alpha x_3)=$$
$$=\alpha(x_2, -x_1, x_3)=\alpha f(x_1, x_2, x_3)$$

2. f es inyectiva.

Sean (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) en el dominio, tales que

$$f(x_1, x_2, x_3)=f(y_1, y_2, y_3)$$

O sea

$$(x_2, -x_1, x_3)=(y_2, -y_1, y_3)$$

Por lo tanto es

$$x_2=y_2\ ,\ x_1=y_1\ ,\ x_3=y_3$$

Luego

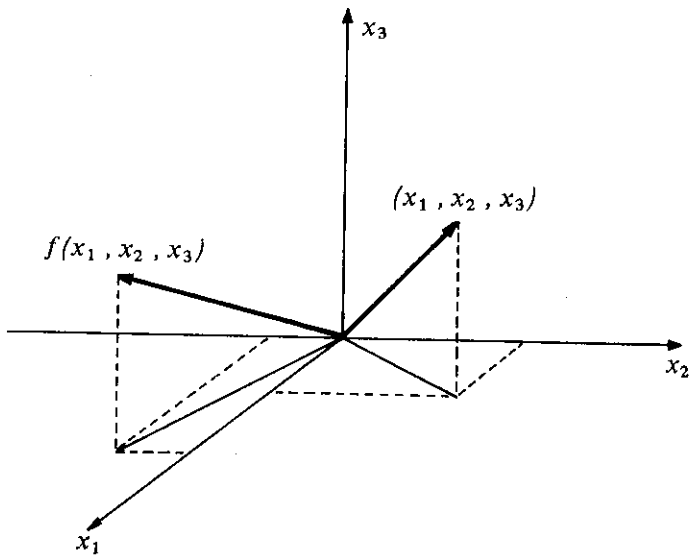
$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

3. f es sobreyectiva.

Cualquiera que sea (a, b, c) en el codominio, existe $(-b, a, c)$ en el dominio, tal que

$$f(-b, a, c) = (a, b, c)$$

Queda probado así que f es un automorfismo en $\mathbf{R}^3$. La trasformación lineal f puede interpretarse como una trasformación del espacio en sí mismo que corresponde a una rotación de 90° alrededor del eje x_3.



Ejemplo 3-5.

1. La función $f: V \to W$ que asigna a todo vector de V el vector nulo en W es una trasformación lineal, pues

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$
$$f(\alpha \mathbf{x}) = \mathbf{0}_W = \alpha\, \mathbf{0}_W = \alpha f(\mathbf{x})$$

f se llama trasformación lineal nula.

2. La función $f: V \to V$ tal que $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$ cualquiera que sea $\mathbf{x} \in V$, y a un escalar dado en K, es una trasformación lineal.

En efecto:

$$f(\mathrm{x}+\mathrm{y})=a(\mathrm{x}+\mathrm{y})=a\,\mathrm{x}+a\,\mathrm{y}=f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})$$
$$f(\alpha\,\mathrm{x})=a(\alpha\,\mathrm{x})=\alpha\,(a\,\mathrm{x})=\alpha f(\mathrm{x})$$

La trasformación lineal f así definida se llama homotecia de razón a.

Ejemplo 3-6.

Sea $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^{2\times 2}$ definida por

$$f(a,b)=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

f es una trasformación lineal, pues

$$f[(a,b)+(c,d)]=f(a+c,b+d)=\begin{pmatrix} a+c+b+d & 0 \\ 0 & a+b+c+d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c+d & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}=f(a,b)+f(c,d)$$

y

$$f[\alpha(a,b)]=f(\alpha a,\alpha b)=\begin{pmatrix} \alpha a+\alpha b & 0 \\ 0 & \alpha a+\alpha b \end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\alpha f(a,b)$$

f no es inyectiva ni sobreyectiva.

Ejemplo 3-7.

Si $(\mathrm{V},+,\mathbf{R},.)$ denota el espacio vectorial de los polinomios reales en la indeterminada X, entonces la función

$$f:\mathrm{V}\to\mathrm{V},$$

que asigna a cada elemento de V el correspondiente polinomio derivado, es una trasformación lineal, pues

$$f(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = (\mathrm{P} + \mathrm{Q})' = \mathrm{P}' + \mathrm{Q}' = f(\mathrm{P}) + f(\mathrm{Q})$$
$$f(a\,\mathrm{P}) = (a\,\mathrm{P})' = a\,\mathrm{P}' = af(\mathrm{P})$$

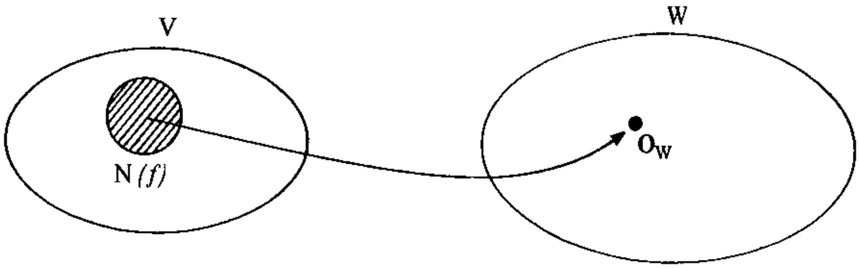
El endomorfismo f no es inyectivo.

3.3. NUCLEO E IMAGEN DE UNA TRASFORMACION LINEAL

Consideremos una trasformación lineal $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$.

3.3.1. Concepto de núcleo

Núcleo de una trasformación lineal f, entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, es el conjunto de los vectores del dominio cuyas imágenes por f son el vector nulo del codominio.



El símbolo N (f) se lee *núcleo de f.* Por definición es

$$\mathrm{N}(f) = \{\, \mathrm{x} \in \mathrm{V} \,/\, f(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}} \,\}$$

El núcleo de toda trasformación lineal es la preimagen del vector nulo del segundo espacio. O sea

$$\mathrm{N}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}_{\mathrm{W}}\})$$

Por definición, un vector perteneciente a V es un elemento del núcleo si y sólo si su imagen es el vector nulo de W.

$$\mathrm{x} \in \mathrm{N}(f) \Leftrightarrow f(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}}$$

Ejemplo 3-8.

Determinamos el núcleo de la trasformación lineal definida en el ejemplo 3-1.

$$\mathrm{N}(f) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0) \}$$

Se tiene

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{N}(f) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_3, x_2 - x_3) = (0, 0) \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0 \wedge x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = a$$

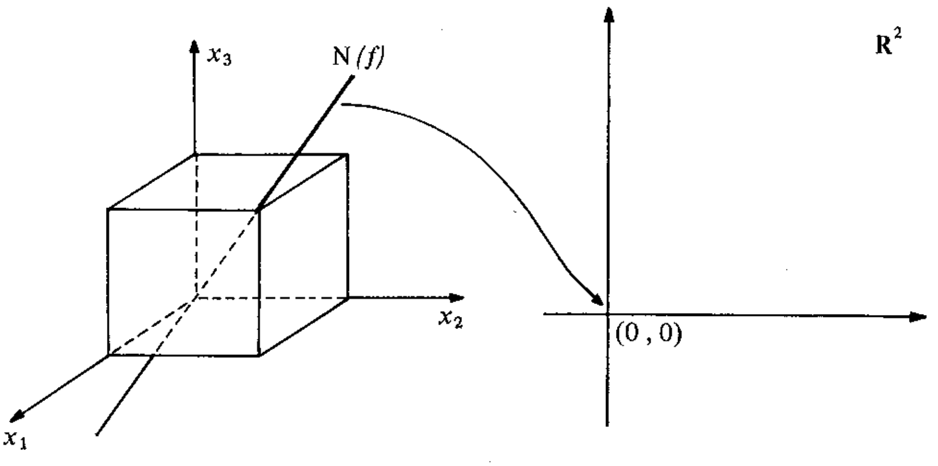
Luego

$$\mathrm{N}(f) = \{ (a, a, a) \,/\, a \in \mathbf{R} \}$$

Por definición de ley de composición externa en $\mathbf{R}^3$ se tiene

$$\mathrm{N}(f) = \{ a\,(1, 1, 1) \,/\, a \in \mathbf{R} \}$$

Esto nos dice que el núcleo de f es el conjunto de todos los múltiplos escalares del vector (1, 1, 1). La representación del N (f) está dada en el gráfico siguiente



Volviendo a la definición de núcleo de una trasformación lineal f V → W, observamos que

$$\mathrm{N}(f) \subset \mathrm{V}$$

Por otra parte, de acuerdo con 3.2.2. I., es

$$f(\mathbf{0}_\mathrm{V}) = \mathbf{0}_\mathrm{W}$$

En consecuencia

$$\mathbf{0}_\mathrm{V} \in \mathrm{N}(f)$$

Luego, el núcleo de toda trasformación lineal f es no vacío.

3.3.2. Propiedad del núcleo

El núcleo de toda trasformación lineal entre dos espacios vectoriales es un subespacio del primero.

Hipótesis) $f: V \to W$ es una trasformación lineal.

Tesis) $\left(N(f), +, K, . \right)$ es un subespacio de $(V, +, K, .)$.

Demostración) Ya hemos visto que el núcleo de toda trasformación lineal entre dos espacios vectoriales es una parte no vacía del dominio. De acuerdo con la condición suficiente, demostrada en 1.8.2., falta demostrar:

1. $N(f)$ es cerrado para la suma.

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores cualesquiera de $N(f)$.

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \in N(f) \wedge \mathbf{y} \in N(f) \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_W} \wedge f(\mathbf{y}) = \mathbf{0_W} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{0_W} \Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0_W} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in N(f) \end{aligned}$$

Por definición de núcleo, suma en W, definición de trasformación lineal y definición de núcleo.

2. $N(f)$ es cerrado para el producto por escalares.

Sean $\alpha \in K$ y $\mathbf{x} \in V$

$$\begin{aligned} &\alpha \in K \wedge \mathbf{x} \in V \Rightarrow \alpha \in K \wedge f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_W} \Rightarrow \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha)\mathbf{0_W} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\alpha\, \mathbf{x}) = \mathbf{0_W} \Rightarrow \alpha\, \mathbf{x} \in N(f) \end{aligned}$$

Por definición de núcleo, producto de escalares por elementos de W, definición de trasformación lineal, propiedad 1.3.2. y definición de núcleo.

3.3.3. Concepto de imagen

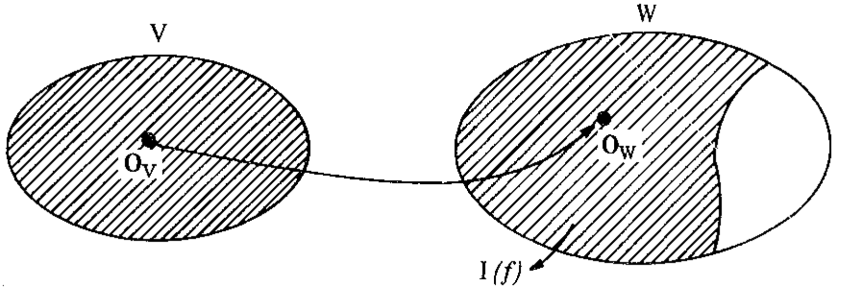
Imagen de una trasformación lineal $f: V \to W$ es el conjunto imagen del dominio, o sea, es la totalidad de las imágenes de los vectores del primer espacio.

El símbolo $I(f)$ se lee: *imagen de f.*

$$I(f) = \left\{ f(\mathbf{x}) \,/\, \mathbf{x} \in V \right\}$$

También

$$I(f) = \left\{ \mathbf{y} \in W \,/\, \exists\, \mathbf{x} \in V \wedge f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \right\}$$



Sabemos que $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. En consecuencia, $\mathbf{0}_W \in \mathrm{I}(f)$, lo que significa que

$$\mathrm{I}(f) \neq \phi$$

Además, de acuerdo con la definición, es

$$\mathrm{I}(f) \subset \mathrm{W}$$

3.3.4. Propiedad de la imagen

La imagen de toda trasformación lineal entre dos espacios vectoriales es un subespacio del codominio.

Hipótesis) $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una trasformación lineal.

Tesis) $\left(\mathrm{I}(f), +, \mathrm{K}, .\right)$ es un subespacio de $(\mathrm{W}, +, \mathrm{K}, .)$.

Demostración) Sabemos que la imagen de toda trasformación lineal entre dos espacios vectoriales es una parte no vacía del segundo. Teniendo en cuenta la condición suficiente para la existencia de subespacio, probaremos:

1. I (f) es cerrado para la suma.

Sean **u** y **v** dos vectores de I (f).

$$\mathbf{u} \in \mathrm{I}(f) \wedge \mathbf{v} \in \mathrm{I}(f) \Rightarrow \exists\, \mathbf{x}\ \exists\, \mathbf{y} \text{ en } \mathrm{V} \,/\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \wedge f(\mathbf{y}) = \mathbf{v} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{x} \in \mathrm{V} \wedge \mathbf{y} \in \mathrm{V} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{V} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathrm{I}(f)$$

Hemos aplicado la definición de imagen, de trasformación lineal y de imagen.

2. I (f) es cerrado para el producto por escalares.

Consideremos $\alpha \in \mathrm{K}$ y $\mathbf{u} \in \mathrm{I}(f)$

$$\alpha \in \mathrm{K} \wedge \mathbf{u} \in \mathrm{I}(f) \Rightarrow \alpha \in \mathrm{K} \wedge f(\mathbf{x}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} \in \mathrm{V} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha\, \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} \in \mathrm{V} \Rightarrow f(\alpha\, \mathbf{x}) = \alpha\, \mathbf{u} \wedge \alpha\, \mathbf{x} \in \mathrm{V} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha\, \mathbf{u} \in \mathrm{I}(f)$$

De acuerdo con la definición de imagen, producto en W, definición de trasformación lineal y definición de imagen.

Ejemplo 3-9.

Determinamos el núcleo y la imagen de la trasformación lineal $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^{2\times 2}$ definida en el ejemplo 3-6.

1.

$$N(f) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = N \}$$

$$(x_1, x_2) \in N(f) \Leftrightarrow f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Luego

$$N(f) = \{ (-\alpha, \alpha) \,/\, \alpha \in \mathbf{R} \}$$

O sea, el núcleo de f es el conjunto de los pares ordenados de componentes opuestas.

2.

$$I(f) = \{ A \in \mathbf{R}^{2\times 2} \,/\, f(x_1, x_2) = A \}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I(f) \Leftrightarrow \exists\, (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,/\, f(x_1, x_2) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = a = d \wedge b = c = 0$$

Luego a $I(f)$ pertenecen las matrices del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3-10.

Dada la trasformación lineal del ejemplo 3-9, determinamos las dimensiones de $N(f)$ e $I(f)$.

1. Hemos visto que

$$N(f) = \{ (-\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbf{R} \}$$

Teniendo en cuenta la definición de ley de composición externa en $\mathbf{R}^2$, es

$$N(f) = \{ \alpha(-1, 1) / \alpha \in \mathbf{R} \}$$

Esto significa que $N(f)$ está generado por el vector $(-1, 1)$, es decir, este vector constituye un sistema de generadores del núcleo. Además es linealmente independiente según 2.4.3. i). Por consiguiente, $\{ (-1, 1) \}$ es una base del núcleo.
Entonces

$$\dim N(f) = 1$$

2. Como

$$I(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} / a \in \mathbf{R} \right\}$$

podemos escribir, por definición de producto de escalares por matrices:

$$I(f) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / a \in \mathbf{R} \right\}$$

O sea, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema de generadores de $I(f)$, y además linealmente independiente. En consecuencia, constituye una base.
Luego

$$\dim I(f) = 1$$

3.3.5. Núcleo de un monomorfismo

Una trasformación lineal $f: V \to W$ es inyectiva si y sólo si el único elemento del núcleo es el vector nulo del dominio.

1. Sea $f: V \to W$ un monomorfismo. Debemos probar que $N(f) = \{ \mathbf{0}_V \}$.

$$\mathbf{0}_V \in N(f) \Rightarrow \{ \mathbf{0}_V \} \subset N(f) \quad (1)$$

Sea $x \in N(f)$. Se tiene

$$x \in N(f) \Rightarrow f(x) = 0_W = f(0_V) \Rightarrow x = 0_V \Rightarrow x \in \{0_V\}$$

Por definición de núcleo, 3.2.2. 1. y por ser f inyectiva.
Entonces

$$N(f) \subset \{0_V\} \qquad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$N(f) = \{0_V\}$$

2. Sean $f: V \to W$ una trasformación lineal y $N(f) = \{0_V\}$

Para demostrar que f es inyectiva consideremos dos vectores cualesquiera x e y en V, tales que $f(x) = f(y)$.

Ahora bien, por suma en W, definiciones de trasformación lineal y de núcleo, por hipótesis y suma en V, se tiene

$$f(x) = f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) = 0_W \Rightarrow f(x - y) = 0_W \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - y \in N(f) \Rightarrow x - y = 0_V \Rightarrow x = y$$

O sea, basta que el núcleo tenga un único elemento para que la trasformación sea inyectiva.

Ejemplo 3-11.

La imagen de cualquier conjunto linealmente dependiente, por toda trasformación lineal, es linealmente dependiente.

Sea $f: V \to W$ una trasformación lineal, y $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ un conjunto linealmente dependiente en V. Debemos probar que $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)\}$ es linealmente dependiente en W.

En efecto, por definición de dependencia lineal se verifica que

$$\exists\, i \,/\, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = 0_V \wedge \alpha_i \neq 0$$

Aplicando f es

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right) = f(0_V) \wedge \alpha_i \neq 0$$

Por ser f una trasformación lineal y por imagen del vector nulo se tiene

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(v_i) = 0_W \wedge \alpha_i \neq 0$$

En consecuencia

$$\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r)\}$$

es linealmente dependiente.

Ejemplo 3-12.

Si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una trasformación lineal y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son vectores de V tales que sus imágenes constituyen un conjunto linealmente independiente en W, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ son linealmente independientes.

En efecto, consideremos una combinación lineal, con escalares a determinar, de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, que sea el vector nulo de V

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_\mathrm{V}$$

Entonces, por definición de función, es

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = f(\mathbf{0}_\mathrm{V})$$

Por ser f una trasformación lineal y por imagen del vector nulo, se tiene

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_\mathrm{W}$$

Como los vectores $f(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ son linealmente independientes en W, resulta

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$$

Luego

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$$

son linealmente independientes en V.

Ejemplo 3-13.

La imagen de todo conjunto linealmente independiente, dada por cualquier trasformación lineal inyectiva, es un conjunto linealmente independiente.

Hipótesis) $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una trasformación lineal 1-1.

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es L.I. en V.

Tesis) $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r)\}$ es L.I. en W.

Demostración) Sea

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}_\mathrm{W}$$

Por ser f una trasformación lineal es

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}_\mathrm{W}$$

Por definición de núcleo se tiene

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i \in \mathrm{N}(f)$$

Y como f es inyectiva, el núcleo se reduce al vector nulo de V, o sea

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}_V$$

Aplicando la definición de independencia lineal a los vectores de la hipótesis es

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$$

En consecuencia

$$\{ f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_r) \}$$

es un conjunto linealmente independiente.

3.4. DIMENSIONES DEL NUCLEO Y DE LA IMAGEN

La trasformación lineal $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^{2\times 2}$, estudiada en los ejemplos 3-9 y 3-10, verifica

$$\dim \mathrm{N}(f) = 1 \quad \text{y} \quad \dim \mathrm{I}(f) = 1$$

O sea

$$\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{I}(f) = 2 = \dim \mathbf{R}^2$$

Este hecho se verifica cualquiera que sea la trasformación lineal definida en un espacio vectorial de dimensión finita.

Propiedad

Si $(V, +, K, .)$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to W$ es una trasformación lineal, entonces la suma de las dimensiones del núcleo y de la imagen es igual a la dimensión del primer espacio.

Hipótesis) $f : V \to W$ es una trasformación lineal

$\dim V = n$

Tesis) $\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{I}(f) = \dim V$

Demostración)

1. $\mathrm{I}(f)$ tiene dimensión finita

Sabiendo que cualquier base de V es finita, se deduce que $\mathrm{I}(f)$ tiene dimensión finita. En efecto, si $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r \}$ es un conjunto L.I. en $\mathrm{I}(f)$, entonces existe un conjunto L.I. en V: $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r \}$ tal que

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

de acuerdo con el ejemplo 3-12. Esto significa que si $\mathrm{I}(f)$ no tuviera dimensión finita, entonces V no tendría dimensión finita.

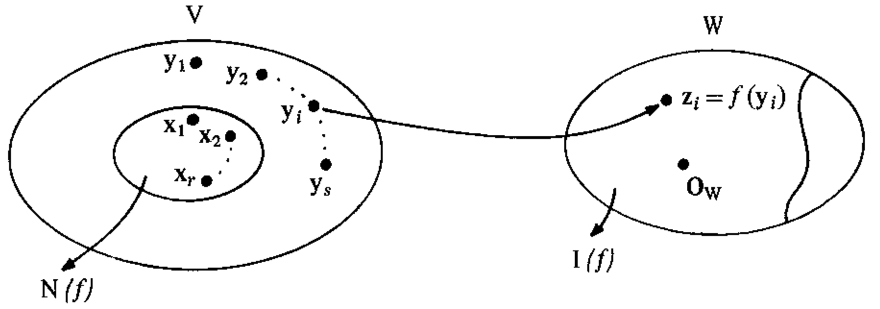
2. Sea $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p \}$ una base de $\mathrm{N}(f)$.

Si $n = p$, entonces $\mathrm{N}(f) = V$ y $\dim \mathrm{I}(f) = 0$, pues en este caso es $\mathrm{I}(f) = \{ \mathbf{0}_W \}$.

Si $p < n$, entonces, por el teorema de extensión, existen $y_1, y_2, \ldots, y_s$ en V, tales que

$$A = \{ x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_s \}$$

es una base de V.



Se tiene $p + s = n$, y el teorema se reduce a probar que $\dim I(f) = s$.
Consideremos las imágenes de los vectores $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Sean éstas

$$z_i = f(y_i) \quad \text{con } i = 1, 2, \ldots, s \qquad (1)$$

Demostraremos que $\{ z_1, z_2, \ldots, z_s \}$ es una base de I (f). En efecto:

i) $\{ z_1, z_2, \ldots, z_s \}$ es L.I.

Sea

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i z_i = 0_W$$

Por (1)

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i f(y_i) = 0_W \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i\right) = 0_W \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i \in N(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i = \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i y_i = 0_V \Rightarrow \beta_j = 0 \wedge \alpha_i = 0 \ \forall i \ \forall j$$

ii) $\{ z_1, z_2, \ldots, z_s \}$ es S.G. de I (f)

Sea z cualquier vector de I (f). Por definición de conjunto imagen se verifica

$$z \in I(f) \Rightarrow \exists\, x \in V \,/\, f(x) = z \Rightarrow z = f(x) \wedge x = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{s} \beta_i y_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = f\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{s} \beta_i y_i\right) \Rightarrow z = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(x_j) + \sum_{i=1}^{s} \beta_i f(y_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j 0_W + \sum_{i=1}^{s} \beta_i z_i \Rightarrow z = \sum_{i=1}^{s} \beta_i z_i$$

En i) hemos tenido en cuenta que f es una trasformación lineal, la definición de núcleo, la base de éste, suma en V, y el hecho de que A es una base de V.

En ii) hemos expresado a $\mathbf{x}$ como combinación lineal de la base de V, se ha tenido en cuenta que f es una trasformación lineal, que todo $\mathbf{x}_j$ es un elemento del núcleo, y que el producto de cualquier escalar por el vector nulo es el vector nulo.

Queda demostrado entonces que

$$\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{I}(f) = \dim \mathrm{V}$$

Ejemplo 3-14.

Consideremos la trasformación lineal $f\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4, 0)$$

Determinamos:

1. El $\mathrm{N}(f)$, una base del mismo y su dimensión

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{N}(f) \Leftrightarrow f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 - x_3 + x_4\ , 0) = (0, 0) \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 + x_3 - x_4$$

En consecuencia, los vectores del núcleo son del tipo $(a + b - c, a, b, c)$, y por definición de suma en $\mathbf{R}^4$ y producto de escalares por cuaternas, se tiene

$$(a + b - c, a, b, c) = (a, a, 0, 0) + (b, 0, b, 0) + (-c, 0, 0, c) =$$
$$= a\,(1, 1, 0, 0) + b\,(1, 0, 1, 0) + c\,(-1, 0, 0, 1)$$

O sea, los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0) \qquad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1, 0) \qquad \mathbf{v}_3 = (-1, 0, 0, 1)$$

son un sistema de generadores de $\mathrm{N}(f)$. Además, son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base del mismo. Luego

$$\dim \mathrm{N}(f) = 3$$

2. Una base de $\mathrm{I}(f)$.

De acuerdo con el teorema anterior es

$$\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{I}(f) = 4$$

O sea

$$\dim \mathrm{I}(f) = 1$$

Entonces, toda base de $\mathrm{I}(f)$ tiene un único vector.
Como

$$\mathrm{I}(f) = \{\, (a - b - c + d\,, 0) \,/\, a\,, b\,, c \text{ y } d \in \mathbf{R} \,\}$$

se verifica que

$$(y_1, y_2) \in \mathrm{I}(f) \Leftrightarrow (y_1, y_2) = (a - b - c + d\,,\, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y_1, y_2) = (a\,,\, 0) + (-b, 0) + (-c\,,\, 0) + (d\,,\, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y_1, y_2) = a\,(1\,,\, 0) - b\,(1, 0) - c\,(1, 0) + d\,(1, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y_1, y_2) = (a - b - c + d)\,(1, 0) \Leftrightarrow (y_1, y_2) = \alpha\,(1, 0)$$

Luego

$$(1, 0) \text{ es una base de } \mathrm{I}(f).$$

En consecuencia

$$\dim \mathrm{I}(f) = 1$$

3.5. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRASFORMACIONES LINEALES

Sean $(V, +, K, .)$ y $(W, +, K, .)$ dos espacios vectoriales y $[v] = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ una base de V. Si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son n vectores cualesquiera de W, entonces existe una única trasformación lineal $f : V \to W$ tal que $f(v_i) = w_i \; \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Hipótesis) $(V, +, K, .)$ y $(W, +, K, .)$ son espacios vectoriales

$$[v] = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \} \text{ es una base de V}$$
$$\{ w_1, w_2, \ldots, w_n \} \subset W$$

Tesis) Existe $f : V \to W$ trasformación lineal única, tal que $f(v_i) = w_i,\; \forall i = 1, 2, \ldots, n$

Demostración) Sea cualquier vector $x \in V$. Entonces existen y son únicos los escalares α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

ya que todo vector del espacio puede expresarse de modo único como combinación lineal de los vectores de la base, según 2.4.2.

Definimos

$$f : V \to W \quad \text{mediante} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$$

La asignación (1) caracteriza a f como una función de V en W.

Necesitamos probar las siguientes afirmaciones:

1. f es una trasformación lineal

Si x e y son dos vectores cualesquiera de V, y $\alpha \in K$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \wedge \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$$

y se verifica

i) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i) = f(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i+\beta_i)\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i+\beta_i)\mathbf{w}_i =$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{w}_i = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

ii) $f(\alpha \mathbf{x}) = f(\alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha\,\alpha_i)\mathbf{v}_i\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\,\alpha_i)\mathbf{w}_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i = \alpha f(\mathbf{x})$

2. $i = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$

En efecto

$$\mathbf{v}_i = 0\,\mathbf{v}_1 + \ldots + 0\,\mathbf{v}_{i-1} + 1\,\mathbf{v}_i + \ldots + 0\,\mathbf{v}_n$$

Luego

$$f(\mathbf{v}_i) = 0\,\mathbf{w}_1 + \ldots + 0\,\mathbf{w}_{i-1} + 1\,\mathbf{w}_i + \ldots + 0\,\mathbf{w}_n = $$
$$= 1\,\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_i$$

3. Bajo la condición $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, f es única.

Si $g : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una trasformación lineal tal que $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$g(\mathbf{x}) = g(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i) = f(\mathbf{x})$$

cualquiera que sea $\mathbf{x} \in \mathrm{V}$.

Luego

$$g = f$$

El teorema demostrado asegura que toda trasformación lineal entre dos espacios vectoriales queda unívocamente determinada por los valores que toma sobre cualquier base del primero.

Ejemplo 3-15.

Definimos la trasformación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ que asigna a los vectores de la base $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)$ en $\mathbf{R}^3$, los vectores $(1, 2), (1, 2)$ y $(-1, 1)$ en $\mathbf{R}^2$, respectivamente.

Necesitamos determinar la imagen de un vector genérico $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Expresamos a éste como combinación lineal de la base dada

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= \alpha_1 (1, 1, 1) + \alpha_2 (1, 1, 0) + \alpha_3 (1, 0, 0) = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 , \alpha_1 + \alpha_2 , \alpha_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 &= \mathrm{c} , \alpha_2 = \mathrm{b} - \mathrm{c} , \alpha_3 = a - b\end{aligned}$$

Entonces

$$(a, b, c) = c (1, 1, 1) + (b - c) (1, 1, 0) + (a - b) (1, 0, 0)$$

y

$$\begin{aligned}f (a, b, c) &= c (1, 2) + (b - c) (1, 2) + (a - b) (-1, 1) = \\ &= (c, 2c) + (b - c, 2b - 2c) + (-a + b, a - b) = \\ &= (2 b - a , b + a)\end{aligned}$$

3.6. PRODUCTO DE MATRICES

Sean las matrices $A \in K^{m \times p}$ y $B \in K^{p \times n}$. Llamaremos producto de las matrices A y B, en ese orden, a la matriz C cuyo elemento genérico c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A, por los correspondientes elementos de la columna j de B.

Escribiremos

$$C = AB$$

donde

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$$

O sea

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

cualesquiera que sean $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

De acuerdo con la definición, para que dos matrices se puedan multiplicar, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Si A es la misma que en el caso anterior y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

En ninguno de los dos casos existe BA

En particular, si $m = n$, los elementos de $K^{n \times n}$ se llaman matrices cuadradas y se verifica que $(K^{n \times n}, +, .)$ es un anillo no conmutativo, con divisores de cero y con identidad. El tema está tratado en el capítulo 9 del texto *Algebra I* ya citado, y se estudiará en detalle en el capítulo siguiente.

El elemento unidad o identidad en $K^{n \times n}$ es la matriz I definida por

$$a_{ij} = 1 \text{ si } i = j \quad \text{y} \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

y verifica

$$AI = IA \quad \text{cualquiera que sea} \quad A \in K^{n \times n}.$$

3.7. MATRIZ ASOCIADA A UNA TRASFORMACION LINEAL

Consideremos una trasformación lineal $f : V \to W$, entre los espacios V y W de dimensiones finitas n y m, respectivamente. Probaremos que si se fija una base en cada espacio, entonces la trasformación lineal f queda caracterizada por una matriz del tipo $m \times n$, que llamaremos matriz de la trasformación lineal respecto del par de bases dado.

Sean entonces

$$[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \} \text{ una base de V}$$

y

$$[\mathbf{w}] = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m \} \text{ una base de W}$$

Si $\mathbf{x}$ es cualquier vector de V, por ser $[\mathbf{v}]$ una base, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, únicos, tales que

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{v}_j \quad (1)$$

Tales escalares caracterizan a $\mathbf{x}$ respecto de la base de V, y según vimos en 2.6.2. se llaman las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de dicha base. Podemos escribir

$$\mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Si la imagen de $\mathbf{x} \in V$ es $\mathbf{y} \in W$, se tiene

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$$

Como $\mathbf{y}$ es un vector de W, puede expresarse de modo único como combinación lineal de la base [w], o sea

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i \, \mathbf{w}_i \quad (2)$$

donde $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_m$ son las coordenadas de la imagen de $\mathbf{x}$, respecto de la base [w]. En consecuencia

$$\mathbf{Y}_{[\mathbf{w}]} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{pmatrix}$$

Por el teorema fundamental de las trasformaciones lineales, f queda caracterizada unívocamente por los valores que toma sobre cualquier base de V. O sea, es suficiente obtener las imágenes, por f, de cada vector de la base [v]. Ahora bien, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, $f(\mathbf{v}_j) \in W$, y por consiguiente puede expresarse como combinación lineal de la base [w].

O sea

$$f(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \, \mathbf{w}_i \quad (3) \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

Asignamos a cada escalar a_{ij} un doble subíndice; el primero, asociado a cada vector de la base $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m \}$, y el segundo, en correspondencia con el vector de la base [v].

Así

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\, \mathbf{w}_1 + a_{21}\, \mathbf{w}_2 + \ldots + a_{m1}\, \mathbf{w}_m \\ f(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\, \mathbf{w}_1 + a_{22}\, \mathbf{w}_2 + \ldots + a_{m1}\, \mathbf{w}_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\, \mathbf{w}_1 + a_{2n}\, \mathbf{w}_2 + \ldots + a_{mn}\, \mathbf{w}_m \end{aligned}$$

Los $n.m$ escalares a_{ij}, que figuran en las combinaciones de los vectores que son imágenes de los elementos de la base de V, constituyen una matriz cuya traspuesta, que denotamos con A, recibe el nombre de matriz de la trasformación lineal f respecto de las bases [v] y [w].

O sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz de la trasformación lineal es del tipo $m \times n$, donde m es la dimensión del segundo espacio y n la del primero.

Por consiguiente, para hallar la matriz de una trasformación lineal f respecto de una base en cada espacio, se determinan las imágenes dadas por f de los vectores de la base del primer espacio. Se expresan estas imágenes en términos de la base del segundo espacio, o sea, como combinaciones lineales de los vectores de la segunda base. La traspuesta de la matriz de coeficientes es la matriz de la trasformación lineal respecto de las bases dadas en ambos espacios.

Probaremos ahora si A es la matriz de la trasformación lineal f, respecto de las bases [v] y [w], y si $X_{[v]}$ denota la matriz columna correspondiente al vector $x \in V$, cuyos elementos son las coordenadas de éste respecto de la base de V, entonces la imagen de x, expresada en términos de la base de W, se obtiene premultiplicando por A al vector columna $X_{[v]}$, o sea

$$f(x) = A\, X_{[v]} = Y_{[w]}$$

En efecto, dado $x \in V$, es

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j \quad (1) \quad y \quad f(x) = y = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i\, w_i \quad (2)$$

En consecuencia, teniendo en cuenta (1) y la definición de trasformación lineal, es

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, f(v_j)$$

Por (3) resulta

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$$

Introduciendo α_j en la segunda sumatoria, por ser constante respecto del índice i, y permutando las dos sumatorias, se tiene

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \alpha_j\, a_{ij}\, w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_j\right) w_i \quad (4)$$

De (2) y (4), por la unicidad de la combinación lineal que expresa a $f(x)$ en términos de la base [w], es

$$\alpha'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_j$$

Se deduce de esto que la i-sima fila o componente de $Y_{[w]}$, o sea α'_i, es igual a la suma de los productos de los elementos de la fila i de A por los correspondientes elementos de la única columna de $X_{[v]}$, y por la definición de producto de matrices resulta

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_i \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{pmatrix}$$

O bien

$$\mathrm{A}\, \mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \mathbf{Y}_{[\mathbf{w}]}.$$

Reiterando lo enunciado, afirmamos que la imagen de cualquier vector del primer espacio es igual al producto de la matriz de la trasformación lineal por la matriz de coordenadas de dicho vector, respecto de la base [v]. Tal imagen resulta expresada en términos de la base del segundo espacio.

Ejemplo 3-16.

Consideremos la trasformación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tal que

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 - x_3) \quad (1)$$

1. Determinamos la matriz de f respecto de las bases

$$[\mathrm{v}] = \{ (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0\ 0) \} \quad \text{en } \mathbf{R}^3$$
$$[\mathrm{w}] = \{ (2, 0), (0, 1) \} \quad \text{en } \mathbf{R}^2$$

Mediante (1) obtenemos las imágenes de los vectores de la base [v], y expresamos dichas imágenes como combinaciones lineales de los vectores de la segunda base

$$f(1, 1, 1) = (2, 0) = 1\,(2, 0) + 0\,(0, 1)$$

$$f(1, 1, 0) = (1, 1) = \frac{1}{2}(2, 0) + 1\,(0, 1)$$

$$f(1, 0, 0) = (1, 0) = \frac{1}{2}(2, 0) + 0\,(0, 1)$$

Se tiene

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A es la matriz de la trasformación lineal f, respecto de las bases [v] y [w].

2. Utilizando la matriz A, obtenemos la imagen de $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$.

Para ello es necesario determinar las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base en $\mathbf{R}^3$, o sea, α_1, α_2 y α_3 tales que

$$(1, 2, 3) = \alpha_1\ (1, 1, 1) + \alpha_2\ (1, 1, 0) + \alpha_3\ (1, 0, 0) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1)$$

Resulta

$$\alpha_1 = 3\ ,\ \alpha_2 = -1\ ,\ \alpha_3 = -1$$

Entonces

$$\mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Su imagen es

$$\mathbf{Y}_{[\mathbf{w}]} = \mathrm{A}\ \mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Los escalares 2 y 1 son las componentes de $f(\mathbf{x})$ respecto de la base $[\mathbf{w}]$.

Si aplicamos directamente f a la terna $(1, 2, 3)$, se tiene

$$f(1, 2, 3) = (4, -1)$$

Expresando esta imagen como combinación lineal de la base $[\mathbf{w}]$ es

$$(4, -1) = 2\ (2, 0) + (-1)\ (0, 1)$$

Ejemplo 3-17.

Obtenemos la matriz de la trasformación lineal $f: \mathbf{R}^{2\times 2} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = (x_1 + x_4\ ,\ x_2 - x_3)$$

respecto de la base canónica en ambos espacios.
Las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^{2\times 2}$ son

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, 0) = 1\ (1, 0) + 0\ (0, 1)$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1) = 0\ (1, 0) + 1\ (0, 1)$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, -1) = 0\,(1, 0) + (-1)\,(0, 1)$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0) = 1\,(1, 0) + 0\,(0, 1)$$

Resulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que, en el caso de la base canónica, los coeficientes de la combinación lineal son los elementos de la matriz, o las componentes del par.
Así, la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es un vector de $\mathbf{R}^{2\times 2}$ cuyas coordenadas, respecto de la base canónica $[v] = \{ E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \}$, son 2, –3, 1 y –1. De modo tal que la matriz puede expresarse así

$$P_{[v]} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Su imagen por f, utilizando A, es

$$f(P) = A\,P_{[v]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Tal imagen resulta expresada en la base canónica de $\mathbf{R}^2$ y se identifica con la que se obtiene al aplicar directamente la definición de f. Así

$$f\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2 - 1\ ,\ -3 - 1) = (1, -4)$$

3.8. COMPOSICION DE TRASFORMACIONES LINEALES

Sean $f: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{U}$ y $g: \mathrm{U} \rightarrow \mathrm{W}$ dos trasformaciones o aplicaciones lineales. La función compuesta

$$g \circ f: \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$$

se define como en 4.6., *Algebra I*, o sea

$$(g \circ f)(\mathrm{x}) = g[f(\mathrm{x})]$$

Demostramos que la composición de dos trasformaciones lineales en las condiciones dadas, es una trasformación lineal.

En efecto:

1. $(g \circ f)(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = g[f(\mathrm{x}+\mathrm{y})] = g[f(\mathrm{x})+f(\mathrm{y})] =$
$= g[f(\mathrm{x})] + g[f(\mathrm{y})] = (g \circ f)(\mathrm{x}) + (g \circ f)(\mathrm{y})$

2. $(g \circ f)(\alpha \mathrm{x}) = g[f(\alpha \mathrm{x})] = g[\alpha f(\mathrm{x})] = \alpha g[f(\mathrm{x})] =$
$= \alpha (g \circ f)(\mathrm{x})$

Hemos aplicado sucesivamente la definición de composición, las hipótesis (f y g son trasformaciones lineales) y la definición de composición.

Ejemplo 3-18.

Consideremos las trasformaciones lineales

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{y} \quad g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

definidas por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3 \quad \text{y} \quad g(y) = (y, 0)$$

Determinamos el núcleo de $g \circ f$. Para ello caracterizamos primero la ley de asignación, utilizando la definición de composición

$$(g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = g[f(x_1, x_2, x_3)] = g(x_1 - x_2 + x_3) =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3, 0)$$

Por definición de núcleo, se tiene

$$(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{N}(g \circ f) \Leftrightarrow (g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2 + x_3, 0) = (0, 0) \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 - x_3$$

Entonces

$$\mathrm{N}(g \circ f) = \{(b-c, b, c) \,/\, b \in \mathrm{R} \wedge c \in \mathbf{R}\}$$

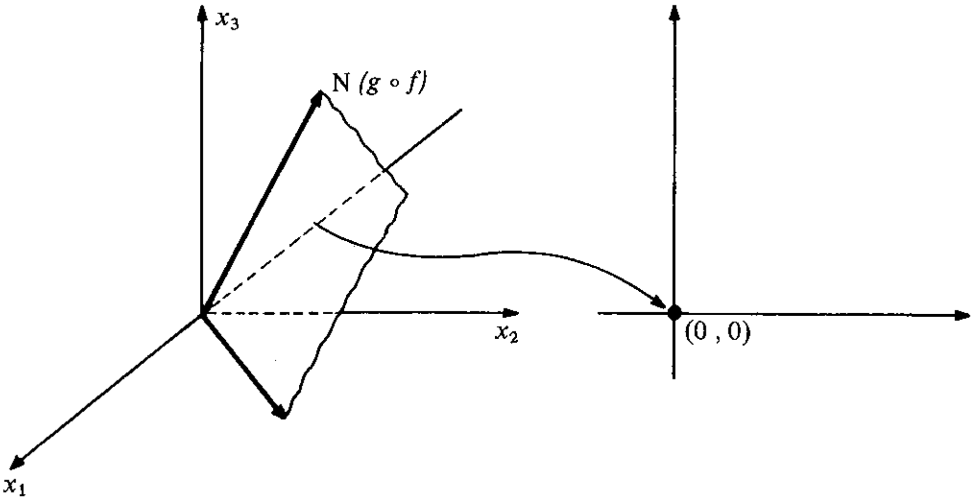
Como

$$(b-c, b, c) = (b, b, 0) + (-c, 0, c) = b(1, 1, 0) + c(-1, 0, 1)$$

es

$$\{(1,1,0)\,,(-1,0,1)\}$$

un S.G. del núcleo de $g \circ f$. Como además es L.I., tal conjunto es una base del núcleo, y por consiguiente su dimensión es 2.



3.9. TRASFORMACION LINEAL NO SINGULAR

3.9.1. Concepto

La trasformación lineal $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es no singular, regular o inversible si y sólo si es biyectiva.

En símbolos

$$f: \mathrm{V} \to \mathrm{W} \text{ es no singular} \Leftrightarrow f \text{ es un isomorfismo.}$$

O bien

$$f: \mathrm{V} \to \mathrm{W} \text{ es trasformación lineal no singular} \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

Sabemos que una función $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es biyectiva si y sólo si admite inversa. En consecuencia, podemos escribir

Una trasformación lineal $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es no singular $\Leftrightarrow$ Existe f^{-1}.

3.9.2. Propiedad

La inversa de una trasformación lineal no singular es una trasformación lineal.

Sea $f: \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ una trasformación lineal no singular, es decir, un isomorfismo de V en W. Probaremos que $f^{-1}: \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ es una trasformación lineal.

Consideremos $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$ en W. Por ser f biyectiva, existen y son únicos los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en V, tales que

$$f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1 \quad \text{y} \quad f(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_2$$

Se verifica que

1. $f^{-1}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = f^{-1}[f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)] = f^{-1}[f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)] = (f^{-1} \circ f)(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) =$

   $= i_V(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = f^{-1}(\mathbf{y}_1) + f^{-1}(\mathbf{y}_2)$

2. Sean $\alpha \in K$ y $\mathbf{y}_1 \in W$
Entonces

$$f^{-1}(\alpha \mathbf{y}_1) = f^{-1}[\alpha f(\mathbf{x}_1)] = f^{-1}[f(\alpha \mathbf{x}_1)] =$$
$$= (f^{-1} \circ f)(\alpha \mathbf{x}_1) = i_V(\alpha \mathbf{x}_1) = \alpha \mathbf{x}_1 = \alpha f^{-1}(\mathbf{y}_1)$$

f y f^{-1} se llaman trasformaciones lineales inversas, y se verifica que

$$f^{-1} \circ f = i_V \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = i_W$$

donde i_V e i_W denotan las identidades en V y en W, respectivamente.

Ejemplo 3-19.

La trasformación lineal $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por

$$f(a, b) = (a, -b)$$

es no singular, por ser biyectiva.
En efecto
1. Sean (a, b) y (a', b') en el dominio, tales que $f(a, b) = f(a', b')$.
Entonces es

$$(a, -b) = (a', -b')$$

En consecuencia

$$a = a' \quad \text{y} \quad b = b'$$

O sea, f es inyectiva.

2. Sea (a, b) cualquier vector del codominio.
Existe $(a, -b)$ en el dominio, tal que

$$f(a, -b) = (a, b)$$

Y, por consiguiente, f es sobreyectiva.
El significado geométrico de esta trasformación lineal es una simetría respecto del eje de abscisas

1. Hipótesis) $f: V \to V$ es una trasformación lineal inyectiva
$\dim V = n$

Tesis) f es sobreyectiva.

Demostración) Por hipótesis, f es inyectiva. En consecuencia, por 3.3.5., es

$$N(f) = \{ \mathbf{0}_V \}$$

y

$$\dim N(f) = 0$$

Como

$$\dim N(f) + \dim I(f) = \dim V$$

resulta

$$\dim I(f) = n = \dim V$$

En consecuencia, $I(f) = V$, o sea, f es sobreyectiva.

2. Hipótesis) $f: V \to V$ es una trasformación lineal sobreyectiva
$\dim V = n$

Tesis) f es inyectiva.

Demostración) Sea $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \}$ una base del codominio V. Por ser f sobreyectiva, existen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V, tales que

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i \quad \forall_i = 1, 2, \ldots, n$$

Los n vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes en V, y de acuerdo con 2.7.2. constituyen una base de V.

Consideremos ahora un vector $\mathbf{x}$ cualquiera perteneciente al núcleo de f. Se verifica que

$$\mathbf{x} \in N(f) \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i \wedge f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \ , \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Siendo $N(f) = \mathbf{0}_V$, resulta f inyectiva.

3.10. COMPOSICION DE TRASFORMACIONES LINEALES Y PRODUCTO DE MATRICES

Consideremos las trasformaciones lineales

$$f: V \to U \quad \text{y} \quad g: U \to W$$

y sean

$$[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \} \ , [\mathbf{u}] = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p \} \text{ y } [\mathbf{w}] = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m \}$$

bases de U, V y W, respectivamente.

Las trasformaciones lineales f y g quedan caracterizadas por las matrices

$$A \in K^{p\times n} \text{ y } B \in K^{m\times p}$$

respecto de las bases dadas en cada espacio.

Se verifica que la trasformación lineal compuesta

$$g \circ f : V \to W$$

está asociada a la matriz

$$C = BA \in K^{m\times n}$$

respecto de las bases [v] y [w].

En efecto, sabemos que para determinar C se necesita obtener las imágenes de los vectores de la base [v] y expresarlas en función de los vectores de [w], o sea

$$(g \circ f)(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}\, \mathbf{w}_i \quad (1)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de composición de funciones, que f y g son trasformaciones lineales de matrices A y B, respectivamente, y propiedades de la sumatoria, se deduce

$$(g \circ f)(\mathbf{v}_j) = g[f(\mathbf{v}_j)] = g\left(\sum_{k=1}^{p} a_{kj}\, \mathbf{u}_k\right) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\, g(\mathbf{u}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{kj} \sum_{i=1}^{m} b_{ik}\, \mathbf{w}_i = \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} a_{kj}\, b_{ik}\, \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, a_{kj}\right) \mathbf{w}_i \quad (2)$$

De (1) y (2), por unicidad de la imagen, se deduce que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, a_{kj}$$

En consecuencia, por definición de producto de matrices, resulta

$$C = BA$$

Ejemplo 3-20.

Sean $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ trasformaciones lineales definidas por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$$
$$g(y) = (y, 2y)$$

Se consideran las bases

$$[\mathbf{v}] = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \text{ en } \mathbf{R}^3$$
$$[\mathbf{u}] = \{1\} \text{ en } \mathbf{R}$$
$$[\mathbf{w}] = \{(2,0), (0,2)\} \text{ en } \mathbf{R}^2$$

Determinamos las matrices asociadas a f, g y $g \circ f$, y verificamos el teorema anterior

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = \ \ 1 = 1 \,.\, 1 \\ f(0,1,0) = \ \ 1 = 1 \,.\, 1 \\ f(0,0,1) = -1 = (-1)\, 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g(1) = (1,2) = \frac{1}{2}\,(2,0) + 1\,(0,2) \Rightarrow \mathrm{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$\mathrm{C} = \mathrm{B}\ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Definimos ahora

$$g \circ f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$$

$$(g \circ f)\,(x_1, x_2, x_3) = g\,[f\,(x_1, x_2, x_3)] =$$

$$= g\,(x_1 + x_2 - x_3) = (x_1 + x_2 - x_3,\, 2\,x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3)$$

Luego

$$(g \circ f)\,(1,0,0) = (\ \ 1,\ \ \ 2) = \frac{1}{2}\,(2,0) + 1\,(0,2)$$

$$(g \circ f)\,(0,1,0) = (\ \ 1,\ \ \ 2) = \frac{1}{2}\,(2,0) + 1\,(0,2)$$

$$(g \circ f)\,(0,0,1) = (-1,-2) = -\frac{1}{2}(2,0) + (-1)\,(0,2)$$

O sea

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.11. ESPACIO VECTORIAL DE TRASFORMACIONES LINEALES

3.11.1. Concepto

Con el símbolo L (V, W) denotaremos el conjunto de todas las trasformaciones lineales entre los espacios vectoriales V y W, sobre el cuerpo K, o sea

$$L(\mathrm{V}, \mathrm{W}) = \{ f : \mathrm{V} \to \mathrm{W} \,/\, f \text{ es trasformación lineal} \}$$

En $\boldsymbol{L}$ (V, W) definimos la suma de funciones y el producto de escalares por funciones mediante las asignaciones

$$(f+g)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x}) \qquad (1)$$

$$(\alpha f)(\mathrm{x}) = \alpha f(\mathrm{x}) \qquad (2)$$

Demostraremos las siguientes afirmaciones:

1. La suma de dos trasformaciones lineales de V en W es una trasformación lineal de V en W.

En efecto:

i) $(f+g)(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) + g(\mathrm{x}+\mathrm{y}) =$
$= f(\mathrm{x}) + f(\mathrm{y}) + g(\mathrm{x}) + g(\mathrm{y}) = (f+g)(\mathrm{x}) + (f+g)(\mathrm{y})$

ii) $(f+g)(\alpha\,\mathrm{x}) = f(\alpha\,\mathrm{x}) + g(\alpha\,\mathrm{x}) =$
$= \alpha f(\mathrm{x}) + \alpha\, g(\mathrm{x}) = \alpha\,[f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x})] =$
$= \alpha\,(f+g)(\mathrm{x})$

2. El producto de cualquier escalar por cualquier trasformación lineal de V en W es una trasformación lineal de V en W.

Utilizando la definición (2), y con procedimiento análogo al utilizado en 1., el lector puede probar que

$$(\alpha f)(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = (\alpha f)(\mathrm{x}) + (\alpha f)(\mathrm{y})$$
$$(\alpha f)\ (\beta\,\mathrm{x}) = \beta\,(\alpha f)(\mathrm{x})$$

Además, las definiciones (1) y (2) permiten comprobar que el conjunto $\boldsymbol{L}$ (V, W) tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K.

La cuaterna $\{\boldsymbol{L}(\mathrm{V}, \mathrm{W}), +\, \mathrm{K}, .\}$ denota el espacio vectorial de las trasformaciones lineales de V en W, sobre el cuerpo K.

El vector nulo de este espacio es la trasformación lineal nula

$$e : \mathrm{V} \to \mathrm{W} \ \text{ definida por } e(\mathrm{x}) = \mathbf{0}_{\mathrm{W}} \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathrm{V}$$

3.11.2. Isomorfismo de L (V, W) en $\mathrm{K}^{m \times n}$

Sean (V, +, K, .) y (W, +, K, .) dos espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m, respectivamente, y las bases

$$[\mathrm{v}] = \{ \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \} \qquad \text{en V}$$
$$[\mathrm{w}] = \{ \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_m \} \qquad \text{en W}$$

Entonces, $\boldsymbol{L}$ (V, W) es isomorfo a $\mathrm{K}^{m \times n}$

En efecto, definimos

$$F : L\,(V, W) \to K^{m \times n}$$

mediante

$$F\,(f) = A$$

donde A es la matriz de f respecto de las bases [v] y [w].

De acuerdo con el teorema fundamental de las trasformaciones lineales, A queda unívocamente determinada para cada $f \in L\,(V, W)$, respecto de las bases [v] y [w]. O sea, la definición dada satisface las condiciones de existencia y unicidad de toda función. Además, se verifica que:

1. F es inyectiva, pues si f y g son dos vectores de $L\,(V, W)$ que satisfacen

$$F\,(f) = F\,(g)$$

entonces sus matrices respecto de las bases [v] y [w] son iguales, lo que significa

$$f\,(v_i) = g\,(v_i) \quad \forall_i = 1, 2, \ldots, n$$

En consecuencia

$$f\,(x) = f\,(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f\,(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, g\,(v_i) = g\,(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, v_i) = g\,(x)$$

O sea

$$f = g$$

2. F es sobreyectiva, ya que, cualquiera que sea $A \in K^{m \times n}$, existe $f : V \to W$ definida por

$$f\,(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$$

tal que

$$F\,(f) = A$$

3. F es una trasformación lineal.

En efecto:

$$F\,(f + g) = A + B = F\,(f) + F\,(g)$$

$$F\,(\alpha f) = \alpha\, A = \alpha\, F\,(f)$$

donde A y B son las matrices de f y g respecto de las bases [v] y [w].

En consecuencia

$$F : L\,(V, W) \to K^{m \times n}$$

es un isomorfismo para cada elección de una base en V y una en W.

Resulta entonces que

$$\dim L\,(V\,, W) = \dim K^{m \times n} = mn$$

3.12. ESPACIO DUAL DE UN ESPACIO VECTORIAL

Llamaremos espacio dual de un espacio vectorial (V, +, K, .), al espacio vectorial de las trasformaciones lineales de V en K.

V* denota al espacio dual de (V, +, K, .), o sea

$$V^* = \mathbf{L}\,(V, K) = \{\, f : V \to K \,/\, f \text{ es trasformación lineal} \,\}$$

Los espacios dominio y codominio son, respectivamente

$$(V, +, K, .) \quad y \quad (K, +, K, .)$$

Los elementos de V*, es decir, las trasformaciones lineales de V en K, se llaman formas lineales o funcionales.

De acuerdo con el teorema fundamental de las trasformaciones lineales, toda forma lineal queda unívocamente determinada por los valores que toma sobre cualquier base de V. Es decir, si $[\mathbf{v}] = \{\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \,\}$ es una base de V, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n elementos cualesquiera de K, entonces la función

$$f : V \to K \text{ definida por}$$

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

es un elemento de $V^* = \mathbf{L}\,(V, K)$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base $[\mathbf{v}]$.

TRABAJO PRACTICO III

3-21. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ son trasformaciones lineales, donde K $= \mathbf{R}$.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_3)$
2. $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2 + 2, 0)$
3. $T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1 + x_2, 0)$
4. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_3, x_1)$

3-22. Investigar cuáles de las siguientes aplicaciones f son lineales.

1. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (y, x)$
2. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 0) + (-1, 0, 0)$
3. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1)$
4. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

3-23. Sea $f: V \to W$ una trasformación lineal y sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en V tales que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$. Sabiendo que $f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_W$, demostrar que $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z}$.

3-24. Sea la función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. Demostrar que es lineal, clasificarla e interpretarla geométricamente.

3-25. La función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ es lineal, y verifica

$$f(1, 2) = (-1, 0, 2) \qquad f(2, 1) = (0, 2, -1)$$

Determinar las imágenes de los vectores $(3, 3)$ y $(0, -1)$.

3-26. Consideremos un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, y dos trasformaciones lineales

$$f: V \to K \quad \text{y} \quad g: V \to K$$

Sea $F: V \to K^2$ tal que $F(\mathbf{v}) = \big(f(\mathbf{v}), g(\mathbf{v})\big)$

Demostrar que F es una trasformación lineal.

3-27. Sea T una aplicación lineal de $\mathbf{R}^2$ en sí mismo, tal que

$$T(1, 0) = (1, 1) \quad \text{y} \quad T(0, 1) = (-1, 2)$$

Determinar la imagen del cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$.

3-28. Investigar si existe una trasformación lineal $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tal que

$$f(1,2)=3\ ,\ f(2,2)=-1 \quad \text{y} \quad f(2,5)=\frac{19}{2}$$

3-29. Sean $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definidas por

$$f(a\,,b)=(a\,,a+b\,,b) \quad \text{y} \quad g(a\,,b\,,c)=(a+b\,,c)$$

1. Probar que f y g son trasformaciones lineales.
2. Clasificar f y g.
3. Definir $g \circ f$ y $f \circ g$.

3-30. Demostrar que si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es un epimorfismo, entonces f trasforma sistemas de generadores de V, en sistemas de generadores de W.

3-31. Consideremos $(\mathbf{C}, +, \mathbf{R}, .)$ y $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definida por $f(z)=\bar{z}+Im\,(z)$.
Determinar si f es una trasformación lineal, y en caso afirmativo clasificarla.

3.32. Sea $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^{3\times 3}$ definida por

$$f(x_1, x_2)=\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & 0 \\ -x_1 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_2 & x_1-x_2 \end{pmatrix}$$

Probar que f es lineal y determinar el conjunto de los vectores de $\mathbf{R}^2$ cuyas imágenes por f son la matriz nula.

3-33. Demostrar que si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ es una trasformación lineal y S es un subespacio de I (f), entonces f^{-1} (S) es un subespacio de V.

3-34. Determinar el núcleo, la imagen y las dimensiones de ambos en las siguientes trasformaciones lineales.

1. $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x_1\ , x_2\ ,x_3)=(x_1+x_2+x_3, x_2+x_3)$
2. $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $f(x_1, x_2)=x_1-2x_2$

3-35. Definir una trasformación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^n$ para un n conveniente, de modo que

$$\mathrm{N}(f)=\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4)\in \mathbf{R}^4 \,/\, x_1+x_2=0, x_1-x_4=0, x_2+x_3+x_4=0 \right\}$$

Obtener después una base y la dimensión del núcleo.

3-36. Una trasformación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ está definida por

$$f(x_1, x_2, x_3)=(x_1-2x_3, x_2+x_3)$$

1. Hallar la matriz A de f, respecto de las bases

$$\{(1,1,1)\,,(2,2,0)\,,(3,0,0)\} \text{ en } \mathbf{R}^3$$
$$\{(2,0)\,,(0,2)\} \text{ en } \mathbf{R}^2$$

2. Mediante A, obtener la imagen de $(-2, 2, -2) \in \mathbf{R}^3$.
3. Determinar la matriz B de f, respecto de las bases canónicas en ambos espacios.
4. Obtener la matriz C de la misma trasformación lineal, respecto de la base canónica en $\mathbf{R}^3$ y la base del punto 1. en $\mathbf{R}^2$.

3-37. Sea la trasformación lineal $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1 + 2x_2)$$

1. Determinar N (f), I (f), una base en cada uno y sus dimensiones.
2. Hallar la matriz de f respecto de las bases

$$\{(1, 2), (2, 0)\} \text{ en } \mathbf{R}^2$$

$$\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\} \text{ en } \mathbf{R}^3$$

3-38. La trasformación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ está caracterizada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

respecto de la base canónica. Determinar N (f), I (f) y sus dimensiones.

3-39. Determinar la matriz de la trasformación lineal del ejercicio 3-32, respecto de las bases canónicas en $\mathbf{R}^2$ y en $\mathbf{R}^{3\times 3}$

3-40. Dada la trasformación lineal $f : \mathbf{R}^{2\times 2} \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b - c, a + b + d, b + c + d)$$

1. Obtener la matriz de f respecto de las bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ en } \mathbf{R}^{2\times 2}$$

$$\{(0, 2, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ en } \mathbf{R}^3$$

2. Utilizando la matriz hallada, obtener la imagen de $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

3-41. Definir la trasformación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, tal que respecto de las bases

$$\{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \text{ en } \mathbf{R}^3$$

$$\{(1, 2), (2, 1)\} \text{ en } \mathbf{R}^2$$

su matriz sea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3-42. Hallar la matriz de la trasformación lineal $g \circ f$ del ejercicio 3-29, respecto de las bases

$$\{(1, 1), (0, -1)\} \quad \text{en el dominio}$$
$$\{(2, 0), (2, \ \ 2)\} \quad \text{en el codominio}$$

3-43. Determinar la matriz de la rotación del plano de ángulo θ, respecto de la base canónica, con centro en el origen.

3-44. Sea la trasformación lineal $f_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ representada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

respecto de la base canónica.
Demostrar que si θ y θ' son números reales cualesquiera, entonces

$$f_{\theta'} \circ f_\theta = f_{\theta+\theta'}$$
$$f_\theta^{-1} = f_{-\theta}$$

3-45. Demostrar que si $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de $(V, +, K, .)$, y si f_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ son las formas lineales definidas mediante

$$f_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$$

entonces $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es una base de $L(V, K)$, o sea, del espacio dual de V.

3-46. En $(V, +, K, .)$ sean los subespacios S_1 y S_2 tales que $V = S_1 \oplus S_2$. Se considera la función

$$P_1 : V \to V$$

definida por

$$P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1$$

Siendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_1 \in S_1$, $\mathbf{x}_2 \in S_2$.
La función P_1 se llama proyección sobre S_1, según S_2.
Demostrar:

1. P_1 es una trasformación lineal.
2. P_1 es idempotente, o sea $P_1^2 = P_1 \circ P_1 = P_1$
3. Si P_2 es la proyección sobre S_2, entonces $P_1 + P_2 = I$

Capítulo 4

MATRICES

4.1. INTRODUCCION

Hemos creído oportuno dedicar un capítulo al estudio de las matrices con elementos en un cuerpo K, dado el rol fundamental que este tema desempeña en todos los campos de la Matemática y en las aplicaciones. Conocido el espacio vectorial $(K^{m\times n}, +, K, .)$, se trata ahora el producto de matrices, anticipado en el capítulo anterior, y el anillo de matrices cuadradas. Sin pretender agotar el tema, se estudian la trasposición y algunos tipos de matrices especiales: simétricas, antisimétricas, triangulares, diagonales, idempotentes, involutivas, hermitianas, etcétera. Se trata, además, la inversión de matrices, el concepto de matrices particionadas, el rango de una matriz y su invarianza frente a operaciones elementales. Después de dar métodos para la determinación de la inversa de una matriz se estudian la equivalencia de matrices y los cambios de bases en espacios vectoriales.

4.2. PRODUCTO DE MATRICES

4.2.1. Concepto

Recordemos la definición de producto de matrices dada en 3.6. y su conexión con la composición de trasformaciones lineales estudiada en 3.10. Si V, U y W son tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, de dimensiones finitas, con bases $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, $[\mathbf{u}] = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ y $[\mathbf{w}] = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ respectivamente, y $B \in K^{p\times n}$ y $A \in K^{m\times p}$ son las matrices asociadas a las trasformaciones lineales

$$f : V \to U \qquad g : U \to W$$

entonces la trasformación lineal compuesta

$$g \circ f : V \to W$$

está caracterizada por la matriz producto $C = AB \in K^{m\times n}$ cuyo elemento genérico es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

Observamos que para que exista el producto de dos matrices, el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda.

Si $A \in K^{m \times n}$ y $B \in K^{n \times m}$, entonces coexisten los productos $AB \in K^{m \times m}$ y $BA \in K^{n \times n}$, pero son distintos si $m \neq n$.

En el caso en que $m = n$, tanto AB como BA son matrices del tipo $n \times n$, es decir, cuadradas y pertenecientes a $K^{n \times n}$, pero en general se verifica que

$$AB \neq BA$$

O sea, el producto de matrices no es conmutativo.

Ejemplo 4-1.

Verificamos la no conmutatividad del producto de matrices en el siguiente caso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este hecho es coherente con lo que sabemos: la composición de trasformaciones lineales, que son funciones, no es conmutativa.

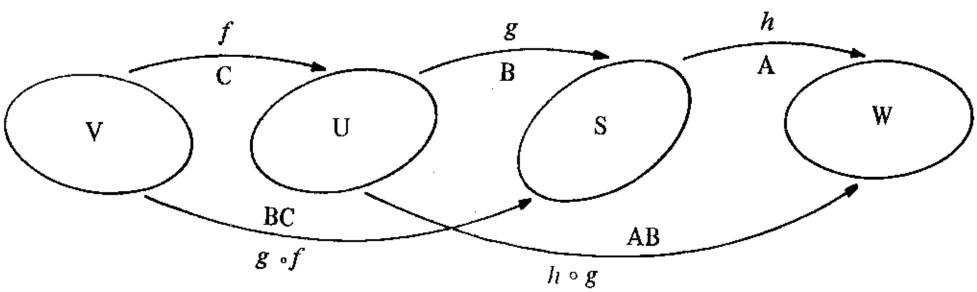
Si AB = BA entonces diremos que A y B son matrices permutables.

4.2.2. Asociatividad del producto de matrices

Sean V, U, S y W espacios vectoriales de dimensiones n, p, q, m respectivamente, y una base en cada uno. Si

$$f : V \to U \qquad g : U \to S \quad \text{y} \quad h : S \to W$$

son trasformaciones lineales, $C \in K^{p \times n}$, $B \in K^{q \times p}$ y $A \in K^{m \times q}$ son las correspondientes matrices,



entonces, teniendo en cuenta la asociatividad de la composición de funciones es

$$h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Denotando con D a la matriz $m \times n$, asociada a la composición, es

$$D = (AB)\,C = A\,(BC)$$

Escribiremos entonces D = ABC

Ejemplo 4-2.

Calculamos ABC, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ABC = \underset{2 \times 3}{\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3 \times 4}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} =$$

$$= \underset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}} \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -14 \end{pmatrix}}$$

4.2.3. Matriz identidad

En $K^{n \times n}$ la matriz I cuyo elemento genérico es δ_{ij}, o sea, es 1 si $i = j$ y es 0 si $i \neq j$, es neutro para el producto.

I se llama matriz identidad $n \times n$, y verifica

$$AI = IA = A$$

cualquiera que sea $A \in K^{n \times n}$.

En efecto, el elemento genérico de la matriz producto AI es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \delta_{kj} = a_{ij}\, \delta_{jj} = a_{ij}$$

En consecuencia, por definición de producto, es

$$AI = A$$

Análogamente se prueba que IA = A.

Si $A \in K^{m\times n}$, entonces la identidad $m\times m$ verifica

$$IA = A$$

y la identidad $n\times n$ satisface

$$AI = A$$

Ejemplo 4-3.

Calculamos $AB - I$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Luego

$$AB - I = N$$

donde N denota la matriz nula de $R^{3\times 3}$.

4.2.4. Distributividades del producto

Si A y B son elementos de $K^{n\times p}$ y $C \in K^{p\times m}$, entonces es

$$(A + B)\,C = AC + BC$$

Esto significa que el producto de matrices es distributivo a derecha, respecto de la suma.

Para demostrar esta afirmación, consideremos el elemento genérico d_{ij}, de la matriz $(A + B)\,C$. Por las definiciones de suma y producto y propiedades de la sumatoria es

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, c_{kj} + \sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, c_{kj}$$

O sea

$$(A + B)\,C = AC + BC$$

Si $C \in K^{m\times n}$ y A y B son las matrices anteriores, entonces se verifica la distributividad a izquierda.

$$C\,(A + B) = CA + CB$$

4.3. ANILLO DE MATRICES CUADRADAS

En $K^{n\times n}$ el producto es una ley de composición interna, asociativa, con elemento neutro igual a la identidad $n\times n$.

Por otra parte, sabemos que $(K^{n\times n}, +)$ es grupo abeliano, y de acuerdo con 4.2.4. el producto es doblemente distributivo respecto de la suma.

En consecuencia $(K^{n\times n}, +, .)$ es el anillo no conmutativo, con unidad, de las matrices cuadradas $n\times n$ con elementos en K.

Este anillo tiene divisores de cero; es decir, existen matrices no nulas cuyo producto es la matriz nula.

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq N \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq N$$

pero

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando en el espacio vectorial $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ la base canónica, la matriz B representa una trasformación del plano en sí mismo que asigna a cada vector (x, y) la imagen $(0, x+y)$, y A caracteriza la aplicación lineal que trasforma cada vector (x, y) en (x, x), ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

La trasformación lineal compuesta, asigna a todo vector el vector nulo. Es decir, es la trasformación lineal nula.

4.4. TRASPOSICION DE MATRICES

4.4.1. Concepto

Sean los espacios vectoriales $(K^{n\times m}, +, K, .)$ y $(K^{m\times n}, +, K, .)$. Por definición, la matriz $B \in K^{m\times n}$ es la traspuesta de $A \in K^{n\times m}$ si y sólo si $b_{ij} = a_{ji}$, y se escribe $B = A^t$.

El símbolo A^t se lee: "A traspuesta".

Si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{entonces es } A^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, para hallar la traspuesta de una matriz, se cambian filas por columnas. Observamos, además, que toda matriz 1×1 es igual a su traspuesta.

4.4.2. Traspuesta de la suma y del producto por escalares

La función $f: \mathrm{K}^{n\times m} \to \mathrm{K}^{m\times n}$ que asigna a cada matriz del dominio su traspuesta en el codominio, es decir, definida por

$$f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^t$$

es una trasformación lineal.

En efecto:

1. La traspuesta de una suma es la suma de las traspuestas.
   Si denotamos con C a $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^t$, entonces
   $$c_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$$
   Y resulta
   $$f(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = (\mathrm{A}+\mathrm{B})^t = \mathrm{A}^t + \mathrm{B}^t = f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B})$$
2. La traspuesta del producto de un escalar por cualquier matriz es igual al producto del escalar por la traspuesta de la matriz.
   Teniendo en cuenta que si $\mathrm{C} = (\alpha\,\mathrm{A})^t$ entonces $c_{ij} = \alpha\, a_{ji}$, resulta
   $$f(\alpha\,\mathrm{A}) = (\alpha\,\mathrm{A})^t = \alpha\,\mathrm{A}^t = \alpha\, f(\mathrm{A})$$

Ejemplo 4-4.

Dadas las matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

calculamos $(\mathrm{B}^t\,\mathrm{A})^t$.

Como $\mathrm{B}^t\,\mathrm{A} = (a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-a \quad c \quad b)$, resulta

$$(\mathrm{B}^t\,\mathrm{A})^t = \begin{pmatrix} -a \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

4.4.3. Traspuesta del producto

La traspuesta de un producto de matrices es igual al producto de las traspuestas en orden permutado.

Sean $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n\times p}$ y $\mathrm{B} \in \mathrm{K}^{p\times m}$. Demostraremos que

$$(\mathrm{AB})^t = \mathrm{B}^t\,\mathrm{A}^t$$

Si C = AB, entonces

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{ip}\, b_{pj}$$

es el elemento de la fila j y de la columna i de $C^t = (AB)^t$.

Los elementos $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{pj}$ de la columna j-sima de B, son los de la fila j de B^t.
Análogamente, $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}$ son los elementos de la columna i-sima de A^t.
Entonces, el elemento de la fila j y de la columna i de B^tA^t es

$$b_{1j}\, a_{i1} + b_{2j}\, a_{i2} + \ldots + b_{pj}\, a_{ip} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

En consecuencia.

$$(AB)^t = B^tA^t$$

Ejemplo 4-5.

La trasposición verifica $(A^t)^t = A$. Teniendo en cuenta este resultado y el teorema anterior, calculamos $(B^tA)^t$, en el caso del ejemplo 4-4.

$$(B^tA)^t = A^t\,(B^t)^t = A^tB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

4.5. MATRICES SIMETRICAS Y ANTISIMETRICAS

4.5.1. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada es simétrica si y sólo si es igual a su traspuesta.

$$A \in K^{n\times n} \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i\ \forall j$$

En $\mathbf{R}^{3\times 3}$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es simétrica}$$

4.5.2. Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada es antisimétrica si y sólo si es igual a la opuesta de su traspuesta.

$$A \in K^{n\times n} \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow A = -A^t \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i\ \forall j$$

Los elementos de la diagonal de toda matriz antisimétrica son nulos, pues

$$A \text{ es antisimétrica} \Rightarrow a_{ii} = -a_{ii}\ ,\ \forall i \Rightarrow 2a_{ii} = 0\ ,\ \forall i \Rightarrow a_{ii} = 0\ ,\ \forall i$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ es antisimétrica}$$

Ejemplo 4-5.

Demostraremos las siguientes propiedades:

i) El producto de toda matriz por su traspuesta es una matriz simétrica.
En efecto:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

Luego, por ser igual a su traspuesta,

$$AA^t \text{ es simétrica}$$

Observamos que no es necesario que A sea cuadrada para que existan AA^t y A^tA, las que son, en todos los casos, matrices cuadradas.

ii) La suma de toda matriz cuadrada y de su traspuesta es simétrica.
Sea $A \in K^{n\times n}$. Se verifica que

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

Es decir, $A + A^t$ es simétrica.

iii) La diferencia de toda matriz cuadrada con su traspuesta es antisimétrica.
Si $A \in K^{n\times n}$, entonces, aplicando propiedades anteriores, se verifica

$$(A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A - A^t)$$

En consecuencia, $A - A^t$ es antisimétrica.

iv) Toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.
$A \in K^{n\times n} \Rightarrow A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica $\Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica y $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$ es la suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica.

Ejemplo 4-6.

Sean $A \in K^{n\times n}$ una matriz simétrica, $X \in K^{n\times 1}$ y $Y \in K^{n\times 1}$. Desarrollaremos el producto $(X - Y)^t A (X - Y)$.

Teniendo en cuenta que la trasposición es una trasformación lineal, la distributividad del producto respecto de la suma y que X^tAY es del tipo 1×1, o sea, simétrica, tenemos

$$
\begin{aligned}
(X - Y)^t A (X - Y) &= (X^t - Y^t)(AX - AY) = X^tAX - X^tAY - Y^tAX + Y^tAY = \\
&= X^tAX - (X^tAY)^t - Y^tAX + Y^tAY = \\
&= X^tAX - Y^tA^t(X^t)^t - Y^tAX + Y^tAY = \\
&= X^tAX - Y^tAX - Y^tAX + Y^tAY = \\
&= X^tAX - 2Y^tAX + Y^tAY
\end{aligned}
$$

4.6. MATRICES TRIANGULARES

La matriz $A \in K^{n\times n}$ es triangular superior si y sólo si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
En $\mathbf{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ es una matriz triangular superior.}$$

Análogamente

$A \in K^{n\times n}$ es triangular inferior si y sólo si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

El lector puede demostrar que el conjunto S de las matrices triangulares superiores o inferiores de $(K^{n\times n}, +, K, .)$ es un subespacio de $K^{n\times n}$.

Ejemplo 4-7.

Efectuamos el producto de las matrices triangulares A y B pertenecientes a $\mathbf{R}^{3\times 3}$, tales que $a_{ij} = 0$ si $i > j$, $a_{ij} = i + j$ si $i \leqslant j$, $b_{ij} = 0$ si $i > j$, $b_{ij} = i - 2j$ si $i \leqslant j$.

$$A\,B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 & -34 \\ 0 & -8 & -31 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

Observamos que el producto de matrices triangulares es una matriz triangular.

4.7. MATRICES DIAGONALES

4.7.1. Concepto

La matriz $A \in K^{n\times n}$ es diagonal si y sólo si $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
Toda matriz diagonal tiene nulos los elementos que no figuran en la diagonal.
Para denotar que A es una matriz diagonal, escribiremos

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \text{diag}\,(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

En particular, en $K^{n \times n}$, I y N son matrices diagonales.

Si todos los elementos de la diagonal son iguales, o sea, si $a_i = a, \quad \forall i$, entonces la matriz diagonal se llama escalar. Siendo A una matriz escalar, se verifica

$$A = aI$$

4.7.2. Propiedad

El conjunto S de las matrices diagonales de $(K^{n \times n}, +, K, .)$ es un subespacio de $K^{n \times n}$, y su dimensión es n.

La demostración se propone como ejercicio.

4.7.3. Propiedad

El conjunto S de las matrices diagonales de $K^{n \times n}$ es un subanillo de $(K^{n \times n}, +, .)$.

Para demostrar esta afirmación es suficiente probar que el producto de matrices diagonales es una ley de composición interna en S.

4.8. MATRICES IDEMPOTENTES E INVOLUTIVAS

4.8.1. Concepto

Una matriz cuadrada es idempotente si y sólo si es igual a su cuadrado.

$$A \in K^{n \times n} \text{ es idempotente} \Leftrightarrow A^2 = A$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{verifica } A^2 = A, \text{ es decir, es idempotente.}$$

Una matriz cuadrada es involutiva si y sólo si su cuadrado es la identidad.

$$A \in K^{n \times n} \text{ es involutiva} \Leftrightarrow A^2 = I$$

$$\text{La matriz } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ es involutiva, pues } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4.10.3. Propiedad

El producto de dos matrices ortogonales es ortogonal.

$$A \text{ y } B \text{ son ortogonales} \Rightarrow AB \text{ es ortogonal}$$

En efecto:

$$(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AIA^t = AA^t = I$$

por traspuesta del producto y 4.10.2.

Análogamente es

$$(AB)^t(AB) = I$$

En consecuencia, por 4.10.2. resulta AB ortogonal.

Ejemplo 4-10.

Toda matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donde } a \in \mathbf{R}$$

es ortogonal.

En efecto:

$$AA^t = \begin{pmatrix} \cos a & -\operatorname{sen} a & 0 \\ \operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a & 0 \\ -\operatorname{sen} a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

4.11. MATRICES HERMITIANAS

4.11.1. Matrices complejas

$(\mathbf{C}^{n\times m}, +, \mathbf{R}, .)$ y $(\mathbf{C}^{n\times m}, +, \mathbf{C}, .)$ denotan los espacios cuyos elementos son las matrices complejas del tipo $n\times m$, sobre el cuerpo de los reales y de los complejos, respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1+i & 2 \\ i & -2 & 3-2i \end{pmatrix} \text{ es una matriz compleja del tipo } 2 \times 3.$$

Matriz compleja conjugada de $A \in \mathbf{C}^{n\times m}$ es la matriz $B \in \mathbf{C}^{n\times m}$ tal que $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$

O sea, dada una matriz, su conjugada se obtiene sustituyendo cada elemento por el complejo conjugado.

Para denotar la matriz conjugada de A, escribiremos $\overline{\mathrm{A}}$.
Si A es la matriz anterior, entonces

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} i & 1-i & 2 \\ -i & -2 & 3+2i \end{pmatrix}$$

Diremos que A y $\overline{\mathrm{A}}$ son matrices conjugadas, una de la otra, pues $\overline{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{A}$.
Dado el espacio vectorial $(\mathbf{C}^{n\times m}, +, \mathbf{R}, .)$, la función $f: \mathbf{C}^{n\times m} \to \mathbf{C}^{n\times m}$ definida por $f(\mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A}}$ es una trasformación lineal, puesto que se verifica

i) la conjugada de la suma es igual a la suma de las conjugadas,

ii) la conjugada del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar por la conjugada de la matriz.

El lector puede demostrar que f es un automorfismo.
Se verifica que la traspuesta de la conjugada de cualquier matriz es igual a la conjugada de su traspuesta, o sea

$$\overline{\mathrm{A}}^t = \overline{\mathrm{A}^t}$$

Para designar esta matriz, escribiremos A*.
En el caso ya tratado es

$$\mathrm{A}^* = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1-i & -2 \\ 2 & 3+2i \end{pmatrix}$$

El operador * satisface las siguientes propiedades:

1. $(\mathrm{A}^*)^* = \mathrm{A}$
2. $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^* = \overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}^{\,t} = (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}})^t = \overline{\mathrm{A}}^t + \overline{\mathrm{B}}^t = \mathrm{A}^* + \mathrm{B}^*$
3. $(\mathrm{A\,B})^* = \mathrm{B}^*\,\mathrm{A}^*$

Para demostrar esta afirmación es necesario probar que la matriz conjugada de un producto es igual al producto de las conjugadas.
Sean $\mathrm{A} \in \mathbf{C}^{n\times p}$ y $\mathrm{B} \in \mathbf{C}^{p\times m}$. Si C = AB, entonces el elemento genérico de C es

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

y teniendo en cuenta que el conjugado de una suma es la suma de los conjugados y que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados, se tiene

$$\overline{c_{ij}} = \sum_{k=1}^{p} \overline{a_{ik}}\; \overline{b_{kj}}$$

O sea

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A}}\;\overline{\mathrm{B}}$$

Retomando nuestro propósito

$$(AB)^* = \overline{AB}^t = (\overline{A}\,\overline{B})^t = \overline{B}^t\,\overline{A}^t = B^*\,A^*$$

4.11.2. Matriz hermitiana

La matriz $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ es hermitiana si y sólo si es igual a la traspuesta de su conjugada.

$$A \text{ es hermitiana} \Leftrightarrow A = \overline{A}^t \Leftrightarrow A = A^* \Leftrightarrow a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \forall i\ \forall j.$$

Los elementos de la diagonal de toda matriz hermitiana son números reales, pues

$$A \text{ es hermitiana} \Rightarrow a_{ii} = \overline{a_{ii}} \Rightarrow a_{ii} \in \mathbf{R}.$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2+i \\ i & -2 & -3-2i \\ 2-i & -3+2i & 3 \end{pmatrix} \text{ es hermitiana}$$

Toda matriz simétrica y real es hermitiana, ya que verifica $a_{ij} = a_{ji} = \overline{a_{ji}}$.

Ejemplo 4-11.

Si $\alpha \in \mathbf{C}$ y $A \in \mathbf{C}^{n\times m}$, entonces $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}\,A^*$.
En efecto:

$$(\alpha A^*) = \overline{\alpha A}^t = (\overline{\alpha}\,\overline{A})^t = \overline{\alpha}\,\overline{A}^t = \overline{\alpha}\,A^*$$

Ejemplo 4-12.

Dadas las matrices $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$, calculamos

i) $X^*X = (1 \quad 1-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = 1 + (1-i)(1+i) = 1 + 1 - i^2 = 3$

ii) $X^*AX = (1 \quad 1-i)\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = (1-2i \quad 3-i)\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = 5$

Ejemplo 4-13.

Si $H = \{ A \in \mathbf{C}^{3\times 3} \,/\, A \text{ es hermitiana} \}$, entonces H no es un subespacio de $(\mathbf{C}^{3\times 3}, +, \mathbf{C}, .)$, ya que H no es cerrado para el producto por escalares.
En efecto:

$$i \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 0 & -2 \\ 1-i & -2 & 3 \end{pmatrix} \in H, \text{ pero}$$

$$iA = \begin{pmatrix} i & 1 & -1+i \\ -1 & 0 & -2i \\ 1-i & -2i & 3i \end{pmatrix} \notin H, \text{ pues la diagonal no es real.}$$

El lector puede comprobar que H es un subespacio de $(\mathbf{C}^{3\times 3}, +, \mathbf{R}, .)$.

4.12. MATRICES PARTICIONADAS

4.12.1. Submatrices de $A \in K^{n\times m}$

Eliminando r filas y s columnas de la matriz $A \in K^{n\times m}$ se obtiene una submatriz de A, que denotaremos así:

$$A\,(i_1, i_2, \ldots, i_r \mid j_1, j_2, \ldots, j_s)$$

donde i_1 es el número de la primera fila eliminada, j_1 es el número de la primera columna eliminada, etcétera.

Si eliminamos las filas indicadas en

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

entonces

$$A\,(2, 4 \mid 2, 4, 5) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si se mencionan las filas y columnas que se conservan, la notación es

$$A\,[1, 3 \mid 1, 3] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

4.12.2. Partición de una matriz

Sean $A \in K^{n\times m}$, $n = \nu_1 + \nu_2$ y $m = \mu_1 + \mu_2$, y consideremos las submatrices

$$A_{11} = A\,[1, 2, \ldots, \nu_1 \mid 1, 2, \ldots, \mu_1]$$

$$A_{12} = A\,[1, 2, \ldots, \nu_1 \mid \mu_1 + 1, \mu_1 + 2, \ldots, m]$$

$$A_{21} = A\,[\nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \ldots, n \mid 1, 2, \ldots, \mu_1]$$

$$A_{22} = A\,[\nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \ldots, n \mid \mu_1 + 1, \mu_1 + 2, \ldots, m]$$

Escribiremos $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ y diremos que A está particionada en cuatro submatrices o bloques. Las descomposiciones $n = \nu_1 + \nu_2$ y $m = \mu_1 + \mu_2$ se denominan esquemas de la partición para filas y columnas, respectivamente.

Por ejemplo, la partición de A que se indica a continuación

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

corresponde al esquema

$$n = \nu_1 + \nu_2 = 2 + 3$$

$$m = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2 + 3 + 2$$

y se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

donde cada bloque A_{ij} es un elemento de la matriz particionada.

En general, si $A \in K^{n \times m}$, $n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$ y $m = \mu_1 + \mu_2 + \ldots, + \mu_s$, entonces las submatrices A_{ij} con $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ son los elementos de A particionada en bloques, y se escribe

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \ldots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

4.12.2. Operaciones con matrices particionadas

I. Adición

Sean A y B matrices en $K^{n \times m}$ y los esquemas de partición $n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r$, $m = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s$. Si $A = (A_{ij})$ y $B = (B_{ij})$ son las notaciones de A y B particionadas, entonces es

$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})$$

con $i = 1, 2, \ldots, r$ y $j = 1, 2, \ldots, s$.

II. Producto por escalares

Se define de la siguiente manera:

$$\alpha \mathrm{A} = (\alpha \mathrm{A}_{ij})$$

III. Multiplicación

Sean las matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times p}$, $\mathrm{B} \in \mathrm{K}^{p \times m}$ y los esquemas de partición

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r, \quad p = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_t, \; m = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s$$

o sea, $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ik})$ y $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{kj})$ donde $i = 1, 2, \ldots, r$, $j = 1, 2, \ldots, s$ y $k = 1, 2, \ldots, t$.

El producto en forma particionada es

$$\mathrm{AB} = \left(\sum_{k=1}^{t} \mathrm{A}_{ik} \, \mathrm{B}_{kj} \right)$$

Ejemplo 4-14.

Consideremos las matrices A y B particionadas como se indica

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{rr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{pmatrix}$$

El producto en forma particionada es

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12} \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} \mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{12} \mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{11} \mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{12} \mathrm{B}_{22} \\ \mathrm{A}_{21} \mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{22} \mathrm{B}_{21} & \mathrm{A}_{21} \mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{22} \mathrm{B}_{22} \end{pmatrix}$$

Así:

$$\mathrm{C}_{11} = \mathrm{A}_{11} \mathrm{B}_{11} + \mathrm{A}_{12} \mathrm{B}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Análogamente se calculan C_{12}, C_{22} y C_{21}, que son los restantes bloques del producto.

4.13. ESPACIOS FILA Y COLUMNA DE UNA MATRIZ

Sea $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times m}$ y sean los esquemas de partición $n = \nu_1$, $m = 1 + 1 + \ldots + 1$.

Entonces A queda particionada en matrices columnas y se escribe

$$A = (A_{11} \;\; A_{12} \; \ldots \; A_{1m}) = (A_1 \;\; A_2 \; \ldots \; A_m)$$

donde $A_j \in K^n$ y $j = 1, 2, \ldots, m$.

Definición

Espacio columna de la matriz $A \in K^{n \times m}$ es el subespacio de K^n generado por las m columnas de A.

Denotamos el espacio columna de la matriz A mediante $S_C(A)$. Los elementos de $S_C(A)$ son todas las combinaciones lineales de las m columnas de A.

O sea

$$S_C(A) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, A_j \; / \; \alpha_j \in K \right\}$$

Definición

Rango columna de una matriz es la dimensión del espacio columna de dicha matriz.

$\rho_C(A)$ se lee: rango columna de A, y es

$$\rho_C(A) = \dim S_C(A)$$

Si A es una matriz nula, el espacio columna es un vector nulo y el rango columna es 0. Si $A \neq N$, entonces el rango columna de A es el máximo número de vectores columnas linealmente independientes.

Análogamente se definen el espacio fila y el rango fila de una matriz A, y se indican mediante $S_F(A)$ y $\rho_F(A)$, respectivamente.

$S_F(A)$ es el subespacio de K^m generado por las n filas de A y $\dim S_F(A)$ es el máximo número de vectores filas linealmente independientes de A.

La partición de $A \in K^{n \times m}$ en vectores filas se indica así:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}, \text{ donde } A_i \in K^m \;\; ; i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Si es necesario, para referirnos a la submatriz columna de lugar r escribiremos $A_{.r}$, y para indicar la submatriz fila de lugar k, pondremos $A_{k.}$. El punto en $A_{.r}$ significa que el primer índice varía desde 1 hasta n. En el segundo caso, el punto indica que el segundo índice es variable desde 1 hasta m.

Ejemplo 4-15.

Determinamos los rangos fila y columna de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que las dos primeras filas son linealmente independientes y que la tercera es combinación lineal de aquéllas: $A_{3.} = \frac{1}{2} A_{1.} + \frac{1}{2} A_{2.}$. En consecuencia, el rango fila de A es 2. El lector puede comprobar que el máximo número de vectores columnas linealmente independientes de A también es 2.
Ambos rangos, fila y columna, coinciden.

4.13.2. Propiedad

Los rangos fila y columna de toda matriz son iguales

Hipótesis) $A \in K^{n \times m}$
Tesis) $\rho_C(A) = \rho_F(A)$
Demostración)

Si $A = N$, entonces $\rho_C(A) = 0 = \rho_F(A)$.
Sea $A \neq N$ y $\rho_C(A) = r$. Probaremos que $\rho_F(A) = r$.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las r primeras columnas de A son L.I.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1,r+k} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{i,r+1} & \dots & a_{i,r+k} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} & a_{n,r+1} & \dots & a_{n,r+k} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Particionando A en vectores columnas es

$$A = (A_{.1} \ A_{.2} \ \dots \ A_{.r} \ \dots \ A_{.r+h} \ \dots \ A_{.m})$$

Por lo supuesto, las r primeras columnas de A constituyen una base de $S_C(A)$. En consecuencia

$$A_{.r+k} = \alpha_{1k} A_{.1} + \alpha_{2k} A_{.2} + \dots + \alpha_{rk} A_{.r} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jk} A_{.j} \ (1) \quad \forall k = 1, 2, \dots, m\text{-}r$$

Sea $\{ e_1, e_2, \dots, e_m \}$ la base canónica de K^m. Como las filas de A son vectores de K^m, se verifica que

$$A_{i.} = a_{i1} e_1 + a_{i2} e_2 + \dots + a_{ir} e_r + a_{i,r+1} e_{r+1} + \dots + a_{im} e_m = \sum_{h=1}^{m} a_{ih} e_h \quad (2)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$

De (1) y (2) resulta

$$\begin{aligned}
A_{i.} &= a_{i1}\, e_1 + a_{i2}\, e_2 + \ldots + a_{ir}\, e_r + \\
&+ (\alpha_{11}\, a_{i1} + \alpha_{21}\, a_{i2} + \ldots + \alpha_{r1}\, a_{ir})\, e_{r+1} + \\
&+ (\alpha_{12}\, a_{i1} + \alpha_{22}\, a_{i2} + \ldots + \alpha_{r2}\, a_{ir})\, e_{r+2} + \\
&+ \ldots + \\
&+ (\alpha_{1,m-r}\, a_{i1} + \alpha_{2,m-r}\, a_{i2} + \ldots + \alpha_{r,m-r}\, a_{ir})\, e_m = \\
&= a_{i1}\,(e_1 + \alpha_{11}\, e_{r+1} + \alpha_{12}\, e_{r+2} + \ldots + \alpha_{1,m-r}\, e_m) + \\
&+ a_{i2}\,(e_2 + \alpha_{21}\, e_{r+1} + \alpha_{22}\, e_{r+2} + \ldots + \alpha_{2,m-r}\, e_m) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_{ir}\,(e_r + \alpha_{r1}\, e_{r+1} + \alpha_{r2}\, e_{r+2} + \ldots + \alpha_{r,m-r}\, e_m) = \\
&= a_{i1}\, e'_1 + a_{i2}\, e'_2 + \ldots + a_{ir}\, e'_r
\end{aligned}$$

En consecuencia $\{ e'_1, e'_2, \ldots, e'_r \}$ es un sistema de generadores de las filas de A.

Si $\rho_F(A) = r'$, entonces es

$$r' \leqslant r \quad (3)$$

ya que el máximo número de filas L.I. de A es menor o igual que el cardinal de todo sistema de generadores de las filas de A.

Análogamente, razonando a partir del rango fila de A, se prueba que

$$r \leqslant r' \quad (4)$$

De (3) y (4) resulta

$$r = r'$$

O sea

$$\rho_C(A) = \rho_F(A)$$

4.13.3. Rango de una matriz

Hemos demostrado que los rangos fila y columna de toda matriz son iguales. Este número se llama rango de la matriz. Para denotar el rango de una matriz A, escribiremos $\rho(A)$

Definición

Rango de una matriz es su rango fila o su rango columna.

$$\rho(A) = \rho_C(A) = \rho_F(A)$$

Dos matrices traspuestas tienen igual rango, pues

$$\rho(A) = \rho_C(A) = \rho_F(A^t) = \rho(A^t)$$

Si $I \in K^{n \times n}$, entonces es $\rho(I) = n$, ya que los n vectores columna de I son linealmente independientes.

4.13.4. Rango del producto

Propiedad

El rango del producto de dos matrices es menor o igual que el mínimo de los rangos.

Hipótesis) $A \in K^{n \times p}$, $B \in K^{p \times m}$

Tesis) $\rho(AB) \leqslant \text{mín}\,\{\rho(A), \rho(B)\}$

Para probar esta afirmación, demostraremos que el rango del producto es menor o igual que los rangos de cada una de las dos matrices, es decir

$$\rho(A\,B) \leqslant \rho(A) \quad \text{y} \quad \rho(A\,B) \leqslant \rho(B)$$

Consideremos B particionada en los p vectores filas, y efectuemos el producto en forma particionada

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_i \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{p} a_{1j}\ B_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{ij}\ B_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{p} a_{nj}\ B_j \end{pmatrix}$$

Este resultado nos indica que las filas de AB son combinaciones lineales de las filas de B con coeficientes en A. En consecuencia, todo vector del espacio fila de AB pertenece al espacio fila de B, y por consiguiente

$$S_F(AB) \subset S_F(B)$$

Entonces, resulta

$$\dim S_F(AB) \leqslant \dim S_F(B)$$

Luego

$$\rho(AB) \leqslant \rho(B) \quad (1)$$

Esta relación nos dice que el rango del producto de dos matrices es menor o igual que el rango de la segunda matriz.

Además, teniendo en cuenta que la trasposición no modifica el rango y (1), es

$$\rho(AB) = \rho(AB)^t = \rho(B^t\,A^t) \leqslant \rho(A^t) = \rho(A)$$

Luego

$$\rho(AB) \leqslant \rho(A) \quad (2)$$

Es decir, el rango del producto de dos matrices es menor o igual que el rango de la primera matriz.

De (1) y (2) resulta

$$\rho(AB) \leqslant \text{mín}\ \{\rho(A), \rho(B)\}$$

4.13.4. Invarianza del rango

Propiedad

Si en un producto de dos matrices una de ellas es no singular, entonces el rango del producto es igual al rango de la otra matriz.

Hipótesis) $A \in K^{n\times m}$

$B \in K^{n\times n}$ es no singular

Tesis) $\rho(B\,A) = \rho(A)$

Demostración) Sabemos que

$$\rho(B\,A) \leqslant \rho(A) \quad (1)$$

pues el rango del producto es menor o igual que el rango de cada factor.

Como B es no singular, existe B^{-1} tal que $BB^{-1} = B^{-1}B = I$

Ahora bien

$$A = IA = (B^{-1}B)A = B^{-1}(BA)$$

Por consiguiente

$$\rho(A) = \rho\,[B^{-1}\,(B\,A)]$$

Y por rango del producto, es

$$\rho(A) \leqslant \rho(B\,A) \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que

$$\rho(B\,A) = \rho(A)$$

Análogamente se demuestra que si $B \in K^{m\times m}$ es no singular, entonces

$$\rho(A\,B) = \rho(A)$$

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente: si $A \in K^{n\times m}$, $P \in K^{n\times n}$ y $Q \in K^{m\times m}$ son dos matrices no singulares, entonces

$$\rho(P\,A\,Q) = \rho(P\,A) = \rho(A)$$

4.13.5. Propiedad

Una matriz $A \in K^{n\times n}$ es no singular si y sólo si su rango es n.

$$A \in K^{n\times n} \text{ es no singular} \Leftrightarrow \rho(A) = n$$

1°. $A \in K^{n\times n}$ es no singular $\Rightarrow \exists\ A^{-1}\ /\ A\,A^{-1} = I \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(A\,A^{-1}) = \rho(I) \Rightarrow \rho(A) = n$

Hemos utilizado la propiedad 4.13.4., teniendo en cuenta que A^{-1} es no singular, y $\rho(\mathrm{I}) = n$.

2°. Sea $A \in K^{n \times n}$ tal que $\rho(A) = n$. Entones las n columnas de A son linealmente independientes, y constituyen una base del espacio columna de A.

Sea la trasformación lineal $f : K^n \to K^n$, definida por la matriz A respecto de la base canónica en K^n.

Si $x \in K^n$, entonces es $f(x) = Ax$.

Como el espacio columna de A es el subespacio de K^n generado por las n columnas de A, y éstas son linealmente independientes, se verifica que

$$\dim S_C(A) = n$$

Por otra parte, $\mathrm{I}(f) = S_C(A)$, es decir, la imagen de la trasformación lineal es igual al espacio columna de A. Luego

$$\dim \mathrm{I}(f) = n$$

y, en consecuencia, f es sobreyectiva.

De acuerdo con 3.9.4. f es biyectiva, y por lo tanto A es no singular.

4.14. OPERACIONES Y MATRICES ELEMENTALES

4.14.1. Operaciones elementales

Operaciones elementales sobre una matriz $A \in K^{n \times m}$ son las siguientes:

1. Permutación de dos filas entre sí, o de dos columnas entre sí.
2. Adición de una fila a otra, o adición de una columna a otra.
3. Multiplicación de una fila o de una columna por un escalar no nulo.

Si se efectúan operaciones elementales sobre las filas o columnas de una matriz, se obtiene otra matriz; pero demostraremos que su rango no varía.

4.14.2. Propiedad

Toda operación elemental sobre las filas de una matriz $A \in K^{n \times m}$ puede realizarse premultiplicando A por una matriz no singular del tipo $n \times n$.

Antes de probar esta afirmación definimos $E_{hk} \in K^{n \times n}$ mediante

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = h \wedge j = k \\ 0 & \text{si } i \neq h \vee j \neq k \end{cases}$$

Por ejemplo, en $K^{4 \times 4}$ es

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. La permutación de las filas i y j puede obtenerse premultiplicando A por la matriz no singular

$$P_{ij} = I - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \quad \text{en } K^{n\times n}$$

En $K^{4\times 4}$ es

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P_{ij} se deduce de la matriz identidad permutando las filas o columnas i y j.

Particionando A en vectores filas, se tiene

$$P_{ij}A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} & & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & \cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la premultiplicación de A por P_{ij} permuta las filas i y j.

Además, como en P_{ij} se tienen exactamente n vectores columna linealmente independientes, es $\rho(P_{ij}) = n$, y en consecuencia

$$P_{ij} \text{ es no singular}$$

2. La adición de la fila i a la fila j puede obtenerse premultiplicando A por la matriz no singular

$$A_{ij} = I + E_{ji}$$

En $K^{4\times 4}$ es

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_{ij} se deduce de la matriz identidad al sustituir 0 por 1 en el lugar (j, i).

Se verifica

$$A_{ij}A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & i & j & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \vdots & \vdots & \cdot \\ 0 & 0 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i + A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

O sea, la premultiplicación de A por A_{ij} suma a la fila j la fila i.

Se sabe que las filas de la matriz identidad: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, \mathbf{e}_n$ constituyen un conjunto linealmente independiente. En consecuencia

$$\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n \}$$

es un conjunto linealmente independiente, o sea

$$\rho(A_{ij}) = n$$

Luego

$$A_{ij} \text{ es no singular}$$

3. El producto de la fila i de A por el escalar $\alpha \neq 0$ puede obtenerse premultiplicando A por la matriz no singular

$$M_i(\alpha) = I + (\alpha - 1)\, E_{ii}$$

En $K^{4 \times 4}$ es

$$M_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_i(\alpha)$ se obtiene multiplicando por α el elemento de lugar (i,i) de la matriz identidad.

Se verifica

$$M_i(\alpha).\ A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & i & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \alpha A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

Como $\rho(M_i(\alpha)) = n$, es $M_i(\alpha)$ no singular.

Análogamente, se demuestra que toda operación elemental sobre las columnas de una matriz $A \in K^{n \times m}$ puede obtenerse posmultiplicando A por una matriz no singular del tipo $m \times m$.

Definición

Las matrices que realizan las operaciones elementales sobre las líneas de una matriz se llaman elementales.

Como las matrices elementales son no singulares, de acuerdo con 4.13.4., se deduce que el rango de una matriz no varía frente a las operaciones elementales.

Ejemplo 4-16.

Mediante operaciones elementales determinamos el rango de A, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectuamos, sucesivamente, las operaciones elementales que trasforman las primeras filas y columnas de A en vectores canónicos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

A la segunda columna de A se le sumó la primera multiplicada por -2.
A la tercera columna de A se le sumó la primera multiplicada por -1.
A la cuarta columna se le sumó la primera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

A la segunda fila de la matriz anterior se le sumó la primera multiplicada por -1.
A la cuarta fila se le sumó la primera multiplicada por -2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Se multiplicó la segunda fila de la matriz anterior por -1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A la tercera columna se le restó la segunda, o sea, se le sumó la segunda multiplicando por -1.
A la cuarta columna se le sumó el triplo de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A la tercera fila se le restó la segunda.
A la cuarta fila se le sumó el duplo de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ A la cuarta columna se le restó el duplo de la tercera.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ A la cuarta fila se le sumó la tercera.

Esta matriz tiene tres columnas linealmente independientes, o sea, su rango es 3, y como es igual al de A, resulta

$$\rho(A) = 3$$

4.15. EQUIVALENCIA DE MATRICES

4.15.1. Concepto

Sean A y B dos matrices pertenecientes a $K^{n\times m}$. Diremos que B es equivalente a A si y sólo si B puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre A.

El símbolo $B \sim A$ se lee: "B es equivalente a A".

La equivalencia de matrices es reflexiva, simétrica y transitiva, o sea, es una relación de equivalencia en $K^{n\times m}$.

La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obtenida a partir de A, en el ejemplo 4-16, mediante un número finito de operaciones elementales, es equivalente a A y recibe el nombre de forma canónica de A. La forma canónica de la matriz nula en $K^{n\times m}$ es dicha matriz.

4.15.2. Propiedad

Toda matriz no nula $A \in K^{n\times m}$ de rango r es equivalente a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} I_r & N_{r\times(n-r)} \\ N_{(m-r)\times r} & N_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

donde B es la forma canónica de A.

La demostración es sencilla, y el lector puede hacerla basándose en la definición de matrices equivalentes y teniendo en cuenta lo realizado en el ejemplo 4-16.

Si A es una matriz no singular en $K^{n \times n}$, entonces su forma canónica es la matriz identidad.

$$A \in K^{n \times n} \text{ es no singular} \Leftrightarrow \text{F.C.}(A) = I$$

El símbolo F.C.(A) se lee: "forma canónica de A".

4.15.3. Propiedad

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) $A \sim B$

ii) $\rho(A) = \rho(B)$

iii) $\text{F.C.}(A) = \text{F.C.}(B)$

1. $A \sim B \Rightarrow \rho(A) = \rho(B)$

Si $A \sim B$, entonces B puede obtenerse efectuando un número finito de operaciones elementales sobre A, y de acuerdo con lo afirmado en 4.14.2. el rango se conserva. En consecuencia es $\rho(A) = \rho(B)$.

2. $\rho(A) = \rho(B) \Rightarrow \text{F.C.}(A) = \text{F.C.}(B)$

Es inmediato por la propiedad 4.15.2.

3. $\text{F.C.}(A) = \text{F.C.}(B) \Rightarrow A \sim B$

Por la propiedad 4.15.2. es $\text{F.C.}(A) \sim A$ y $\text{F.C.}(B) \sim B$. Como A y B son equivalentes a una misma matriz, resulta $A \sim B$.

4.15.4. Propiedad

Si $A \in K^{n \times m}$, entonces existen matrices no singulares $P \in K^{n \times n}$ y $Q \in K^{m \times m}$ tales que $\text{F.C.}(A) = PAQ$.

En efecto, la forma canónica de A se obtiene premultiplicando A por un número finito de matrices elementales del tipo $n \times n$ y posmultiplicándola por un número finito de matrices elementales pertenecientes a $K^{m \times m}$. Como tales matrices elementales son no singulares, sus productos P y Q, respectivamente, también lo son, ya que las matrices no singulares forman grupo multiplicativo.

4.15.5. Propiedad

Toda matriz no singular es un producto de matrices elementales.

En efecto, si $A \in K^{n \times n}$ es no singular, entonces su forma canónica es la identidad, y de acuerdo con 4.15.4. existen P y Q no singulares (ambas son productos de matrices elementales) tales que

$$P\,A\,Q = I$$

En consecuencia

$$P^{-1} PAQQ^{-1} = P^{-1} Q^{-1}$$

Luego

$$A = P^{-1} Q^{-1}$$

El segundo miembro es un producto de matrices elementales, ya que la inversa de toda matriz elemental es una matriz elemental o un producto de éstas.

4.15.6. Propiedad

Las matrices A y B pertenecientes a $K^{n \times m}$ son equivalentes si y sólo si existen matrices no singulares $P \in K^{n \times n}$ y $Q \in K^{m \times m}$ tales que $B = PAQ$.

1. $A \sim B \Rightarrow F.C.(A) = F.C.(B) \Rightarrow \exists\, K, L, M, R$ no singulares / $KAL = MBR \Rightarrow$

$\Rightarrow B = M^{-1} K A L R^{-1} \Rightarrow B = P A Q$ donde $P = M^{-1} K$ y $Q = L R^{-1}$

Hemos aplicado 4.15.3., 4.15.4., premultiplicado por M^{-1} y posmultiplicado por R^{-1}.

2. Supongamos que A y B son matrices $n \times m$, y que existen P y Q no singulares tales que $B = P A Q$. Por 4.15.5., P y Q son productos de matrices elementales, lo que significa que B se obtiene efectuando un número finito de operaciones elementales sobre A. En consecuencia, $A \sim B$.

4.16. METODO DE GAUSS JORDAN PARA DETERMINAR EL RANGO

El método que exponemos a continuación nos permite determinar el rango de una matriz mediante un número finito de operaciones elementales del tipo: multiplicación de una fila por un escalar no nulo y adición de una fila a otra. Señalamos que se opera exclusivamente sobre las filas de la matriz, y que además el método se hace extensivo a la determinación de la inversa de una matriz no singular y a la resolución de sistemas lineales.

Esencialmente, mediante las operaciones elementales indicadas, se trata de formar el máximo número posible de vectores canónicos linealmente independientes. Tal número es, precisamente, el rango de la matriz.

Sea A una matriz no nula. Se elige cualquier elemento distinto de cero, al cual se lo llama *pivote*. Para fijar ideas, sin pérdida de generalidad, supongamos que el pivote es $a_{11} = a$, y sea la matriz

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & b & c & \cdots \\ d & e & f & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}}$$

de la que se han indicado sólo algunos elementos.

Dividiendo la primera fila por $a \neq 0$, o sea, multiplicándola por el recíproco del pivote, se obtiene

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & \dfrac{b}{a} & \dfrac{c}{a} & \dots \\ d & e & f & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}}$$

En la etapa siguiente, se reducen a cero los restantes elementos que figuran en la columna del pivote. Entonces, a la segunda fila se le suma la primera multiplicada por $-\dfrac{d}{a}$. De este modo, d se trasforma en 0, e se trasforma en $e-\dfrac{db}{a}$, y f se trasforma en $f-\dfrac{dc}{a}$. Se obtiene

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & \dfrac{b}{a} & \dfrac{c}{a} & \dots \\ 0 & e-\dfrac{db}{a} & f-\dfrac{dc}{a} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}}$$

Si $a_{31} = g$, en la misma etapa, al sumarle a la tercera fila la primera multiplicada por $-\dfrac{g}{a}$, g se trasforma en 0. Y si $a_{32} = h$, entonces h se trasforma en $h-\dfrac{g \cdot b}{a}$

En las dos etapas descritas se ha obtenido un vector canónico en la columna del pivote.

Observamos en la matriz dada que todo elemento que no figure en la fila, ni en la columna del pivote, forma con éste una diagonal de un "rectángulo". Los otros dos vértices determinan lo que llamaremos la "contradiagonal". Por ejemplo, asociado al elemento e se tiene

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & b & c & \dots \\ d & e & f & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}}$$

Como el trasformado de e es $e-\dfrac{db}{a}$, operaremos así: el trasformado de cada elemento que no figure en la fila y columna del pivote es igual a la diferencia entre dicho elemento y el producto contradiagonal dividido por el pivote.

En las etapas siguientes se reitera el procedimiento eligiendo un pivote que no figure ni en las filas ni en las columnas de los pivotes anteriores. De este modo las operaciones elementales indicadas preservan los vectores canónicos.

El procedimiento se termina cuando no es posible obtener ningún pivote (distinto de cero) en las condiciones ya señaladas.

Ejemplo 4-17.

Mediante el método de Gauss Jordan, obtener el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El pivote puede ser cualquier elemento no nulo. Si algún elemento es la unidad, se lo elegirá como pivote para evitar cálculos.

Procedemos de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{array}$$

El trasformado de $a_{23} = 0$ es

$$0 - \frac{1\,.\,1}{1} =$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{array}$$

El trasformado de $a_{43} = -3$ es

$$-3 - \frac{(-2)\,.\,2}{1} = 1$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

El trasformado de $a_{44} = 2$ es

$$2 - \frac{1\,.\,2}{1} = 0$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

El procedimiento ha terminado, ya que no es posible elegir un nuevo pivote.

El rango de A es el número de vectores canónicos, o sea, 3. El cuarto vector columna

es combinación lineal de los tres primeros, pues es la suma de los productos de ellos por 7, –5 y 2, respectivamente.
Si en alguna etapa intermedia se eligiera como pivote un elemento no nulo que figure en la fila de algún pivote ya seleccionado, la columna que entonces se trasformó en un vector canónico dejaría de serlo.

Resumimos la mecánica del procedimiento:

1. Se elige como pivote cualquier elemento no nulo de la matriz dada, y se divide por él la fila correspondiente.
2. Los restantes elementos de la columna del pivote se trasforman en ceros.
3. El trasformado de todo elemento que no figure en la fila ni en la columna del pivote se determina siguiendo la regla del "rectángulo", es decir, es igual a su diferencia con el producto contradiagonal dividido por el pivote.
4. Se reitera el mecanismo eligiendo como pivote un elemento no nulo que no pertenezca ni a las filas ni a las columnas de los pivotes anteriores.
5. El número de vectores canónicos linealmente independientes es el rango de la matriz.

4.17. INVERSION DE MATRICES POR GAUSS JORDAN

El método explicado en 4.16. permite determinar la inversa de una matriz no singular. Sea $A \in K^{n \times n}$ no singular; a su derecha se escribe la identidad en $K^{n \times n}$.

A	I

La matriz así indicada es del tipo $n \times 2n$, y a ella se le aplica el método de Gauss Jordan hasta lograr que A se trasforme en la identidad. La identidad que figura en el esquema anterior queda trasformada en una matriz $B \in K^{n \times n}$.

A	I
I	B

La trasformación de A en la identidad siempre es posible, ya que, siendo A no singular, su rango es n, y en consecuencia es posible obtener n vectores canónicos linealmente independientes mediante las operaciones elementales indicadas en 4.16. Si los vectores canónicos obtenidos no resultan ordenados de modo que constituyan una matriz diagonal, la identidad se logra mediante una adecuada permutación de filas de la matriz completa. La matriz resultante a la derecha es la inversa pedida.

Las operaciones elementales realizadas sobre las filas de A, que la convierten en la identidad, son las mismas que las efectuadas sobre las filas de I y que la trasforman en B. Si E es el producto de las matrices elementales correspondientes a las sucesivas operaciones elementales, entonces se verifica que

$$E\,A = I \quad (1) \quad y \quad E\,I = B \quad (2)$$

De (2) resulta E = B, y considerando (1) es

$$B\,A = I$$

Luego

$$B = A^{-1}$$

Como en general no se sabe a priori si A es inversible, igualmente el método puede ser utilizado. En el caso en que A no tenga inversa no será posible formar la identidad, por ser su rango menor que n. Es decir, con el método de Gauss Jordan se determina la existencia de la inversa o no, y en caso afirmativo se la obtiene.

Ejemplo 4-18.

Utilizando el método de Gauss Jordan, obtenemos la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el procedimiento mencionado a la matriz del tipo 3×6 que se forma escribiendo la identidad 3×3 a la derecha de A, y convertimos a ésta en la identidad

1	0	−1	1	0	0
1	2	−2	0	1	0
2	−1	1	0	0	1
1	0	−1	1	0	0
0	2	−1	−1	1	0
0	−1	3	−2	0	1
1	0	−1	1	0	0
0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
0	1	0	−1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
0	0	1	−1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

Los pivotes han sido señalados en cada etapa.
El trasformado de 3 es:

$$3 - \frac{(-1)(-1)}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

El trasformado de $a_{25} = \frac{1}{2}$ es:

$$\frac{1}{2} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4-19.

Determinamos la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}$

Para trasformar A en la identidad, es necesario aún permutar las dos últimas filas de toda la matriz. Resulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.18. INVERSION DE MATRICES POR PARTICION

Consideremos una matriz no singular $M \in K^{n \times n}$. La particionamos en cuatro bloques según la descomposición

$$n = p + q \text{ para filas y para columnas}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

En consecuencia $A \in K^{p \times p}$, $D \in K^{q \times q}$, $B \in K^{p \times q}$ y $C \in K^{q \times p}$.

Supongamos que D sea no singular. Proponemos el mismo esquema de partición para la inversa de M:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix}$$

donde X, Y, Z y U son matrices a determinar y del mismo tipo que A, B, C y D, respectivamente.

La matriz D, que hemos supuesto no es singular, se elegirá de modo tal que su inversa pueda obtenerse con facilidad.

Siendo M^{-1} la inversa de M, debe verificarse que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & N \\ N & I_q \end{pmatrix}$$

O sea

$$A\,X + B\,Z = I_p \quad (1) \qquad\qquad A\,Y + B\,U = N \quad (3)$$

$$C\,X + D\,Z = N \quad (2) \qquad\qquad C\,Y + D\,U = I_q \quad (4)$$

De (2) se deduce

$$D\,Z = -\,C\,X$$

Y premultiplicando por D^{-1}

$$Z = -\,D^{-1}\,C\,X \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (1)

$$A\,X - B\,D^{-1}\,C\,X = I_p$$

Por distributividad

$$(A - B\,D^{-1}\,C)\,X = I_p$$

Luego

$$X = (A - B\,D^{-1}\,C)^{-1} \quad (6)$$

De (4)

$$D\,U = I_q - C\,Y$$

En consecuencia

$$U = D^{-1} - D^{-1}\,C\,Y \quad (7)$$

Sustituyendo en (3)

$$A\,Y + B\,D^{-1} - B\,D^{-1}\,C\,Y = N$$

Por distributividad y trasposición

$$(A - B\,D^{-1}\,C)\,Y = -\,B\,D^{-1}$$

Premultiplicando por $(A - B\,D^{-1}\,C)^{-1} = X$, resulta

$$Y = -\,X\,B\,D^{-1} \quad (8)$$

Las relaciones (6), (5), (7) y (8) permiten la determinación de X, Z, U e Y, respectivamente, en función de los datos y de la inversa de D.

Ejemplo 4-20.

Utilizando el método de particiones, invertir la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Particionamos en cuatro bloques del tipo 2×2, y consideramos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = D^{-1}$$

Resulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. $X = (A - B\,D^{-1}\,C)^{-1} = (A - B\,C)^{-1}$

Calculamos

$$A - B\,C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la inversa de ésta por Gauss Jordan

1	−1	1	0
−1	0	0	1
1	−1	1	0
0	−1	1	1
1	0	0	−1
0	1	−1	−1

Luego

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $Y = -X\,B\,D^{-1} = -X\,B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $Z = -D^{-1}\,C\,X = -C\,X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $U = D^{-1} - D^{-1}\,C\,Y = I - C\,Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con los cuatro bloques obtenidos formamos la matriz inversa

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.19. CAMBIO DE BASE Y SEMEJANZA DE MATRICES

4.19.1. Matrices de pasaje

En el espacio vectorial $(V, +, K, .)$, de dimensión finita, consideramos las bases $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ y $[\mathbf{v}'] = \{ \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n \}$

Definimos dos endomorfismos:

1. $g : V \to V$ tal que $g(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}'_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$

Expresando cada imagen como combinación lineal de la base $[\mathbf{v}]$, se tiene

$$\mathbf{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, \mathbf{v}_i \quad (1)$$

La matriz P de esta trasformación lineal respecto de la base $[\mathbf{v}]$ en cada espacio es

$$P = (p_{ij})^t$$

P recibe el nombre de matriz de pasaje de la base $[\mathbf{v}]$ a la base $[\mathbf{v}']$.

2. $h : V \to V$ tal que $h(\mathbf{v}'_j) = \mathbf{v}_j \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$

Procediendo como en el caso anterior es

$$\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} p'_{ij}\, \mathbf{v}'_i \quad (2)$$

$P' = (p'_{ij})^t$ es la matriz de h respecto de la base $[\mathbf{v}']$ en cada espacio, y diremos que es la matriz de pasaje de la base $[\mathbf{v}']$ a la base $[\mathbf{v}]$.

4.19.2. Propiedad

Las matrices de pasaje P y P' son inversas entre sí.

Demostraremos que $P\,P' = P'\,P = I$.

Teniendo en cuenta (1) y (2) escribimos

$$\mathbf{v}_j = \sum_{k=1}^{n} p'_{kj}\, \mathbf{v}'_k = \sum_{k=1}^{n} p'_{kj} \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\, \mathbf{v}_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p'_{kj}\, p_{ik}\, \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, p'_{kj} \right) \mathbf{v}_i$$

Como

$$\mathbf{v}_j = 0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \ldots + 1\,\mathbf{v}_j + \ldots + 0\,\mathbf{v}_n$$

resulta que el único término no nulo de la sumatoria anterior se obtiene para $i = j$, y vale 1. Luego

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, p'_{kj} = \delta_{ij}$$

Por definición de producto de matrices y de matriz identidad resulta

$$\mathrm{P\,P'} = \mathrm{I}$$

Análogamente se deduce que

$$\mathrm{P'\,P} = \mathrm{I}$$

En consecuencia, ambas matrices de pasaje son inversibles, y cada una es la inversa de la otra.

4.19.3. Trasformación de coordenadas

Sea P la matriz de pasaje de la base [**v**] a la base [**v**'], y sea $\mathbf{x} \in \mathrm{V}$.

Demostraremos que

$$\mathbf{X}_{[\mathbf{v}]} = \mathrm{P}\,\mathbf{X}_{[\mathbf{v}']}$$

donde $\mathbf{X}_{[\mathbf{v}]}$ y $\mathbf{X}_{[\mathbf{v}']}$ son las matrices de las coordenadas de $\mathbf{x} \in \mathrm{V}$ en las bases [**v**] y [**v**'] respectivamente.

En efecto, expresando a **x** como combinación lineal de cada base y teniendo en cuenta (1) de 4.19.1., escribimos

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j\, \mathbf{v}'_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha'_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, \mathbf{v}_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha'_j\, p_{ij}\, \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, \alpha'_j \right) \mathbf{v}_i$$

Pero

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathbf{v}_i$$

Por la unicidad de la C.L. es

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, \alpha'_j \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Por definición de producto de matrices, de las relaciones anteriores se deduce

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$$

O sea

$$X_{[v]} = P\,X_{[v']} \quad (3)$$

Y como P es no singular, premultiplicando por P^{-1} resulta

$$X_{[v']} = P^{-1}\,X_{[v]} \quad (4)$$

(3) y (4) se llaman fórmulas de trasformación de coordenadas.

4.19.4. Matrices de una trasformación lineal y cambio de bases.

Sea $f: V \to W$ una trasformación lineal de matriz $A \in K^{m\times n}$ respecto de las bases $[v] = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ en V y $[w] = \{ w_1, w_2, \ldots, w_m \}$ en W.

Si se efectúa un cambio de base en cada espacio, entonces la misma trasformación lineal f está caracterizada por una matriz $B \in K^{m\times n}$ respecto del nuevo par de bases [v'] y [w'].

Sean $P \in K^{n\times n}$ y $Q \in K^{m\times m}$ las matrices de pasaje de [v] a [v'] y de [w] a [w'].

Demostraremos que las matrices A y B de la trasformación lineal f respecto de los dos pares de bases verifican

$$B = Q^{-1}\,A\,P$$

es decir, son equivalentes.

Para ello consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V, [v] \arrow[r, "A"] & W, [w] \\
V, [v'] \arrow[u, "P"] \arrow[r, "B"] & W, [w'] \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

Se verifica que

1. $X_{[v]} = P\,X_{[v']}$ por 4.19.4. (3)

2. $Y_{[w]} = Q\,Y_{[w']}$ por 4.19.4. (3)

3. $Y_{[w]} = A\,X_{[v]}$ por ser f trasformación lineal de matriz A respecto de las bases [v] y [w].

4. $Y_{[w']} = B\,X_{[v']}$ pues f es trasformación lineal de matriz B respecto de las bases [v'] y [w'].

De 2., 3. y 1. se deduce

$$Y_{[w']} = Q^{-1}\,Y_{[w]} = Q^{-1}\,A\,X_{[v]} = Q^{-1}\,A\,P\,X_{[v']}$$

De esta relación y de 4 resulta

$$B = Q^{-1}\ A\ P$$

O sea, B ~ A.

Recíprocamente, si A y B son matrices equivalentes en $K^{m \times n}$, y V y W son espacios vectoriales sobre K, de dimensiones n y m, respectivamente, entonces A y B caracterizan a una misma trasformación lineal $f: V \rightarrow W$ respecto de dos pares de bases.

4.19.5. Matrices semejantes

Consideremos el caso particular del endomorfismo

$$f: V \rightarrow V$$

siendo dim V = n y A la matriz de f respecto de la base [v] = [w] en cada espacio.

Si se efectúa un cambio a la nueva base [v'] = [w'] con matriz de pasaje P = Q, entonces se tiene

$$B = P^{-1}\ A\ P$$

donde B es la matriz de f respecto de la nueva base [v'].

Las matrices A y B de $K^{n \times n}$, que representan el mismo endomorfismo respecto de las bases [v] y [w], se llaman semejantes.

Diremos que

A es semejante a B $\Leftrightarrow \exists$ P no singular / $B = P^{-1}\ A\ P$

La semejanza de matrices es una relación de equivalencia.

Ejemplo 4-21.

Sea la trasformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida por

$$f(a, b, c) = (a + b, a - b + c, a - c)$$

i) Determinamos la matriz A de f, respecto de la base canónica [v] en cada espacio

$$f(1,0,0) = (1, 1, 1) \quad = 1\,e_1 + 1\,e_2 + 1\,e_3$$

$$f(0,1,0) = (1, -1, 0) = 1\,e_1 - 1\,e_2 + 0\,e_3$$

$$f(0,0,1) = (0, 1, -1) = 0\,e_1 + 1\,e_2 - 1\,e_3$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Obtenemos la matriz P de pasaje de la base canónica [v] a la base [v'] = { (1, 1, 1) , (1, 1, 0) , (1, 0, 0) }

$$(1, 1, 1) = 1\,e_1 + 1\,e_2 + 1\,e_3$$

$$(1, 1, 0) = 1\ e_1 + 1\ e_2 + 0\ e_3$$

$$(1, 0, 0) = 1\ e_1 + 0\ e_2 + 0\ e_3$$

Luego

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) Utilizando los resultados anteriores calculamos la matriz B de f, respecto de la base [v'] en cada espacio.
Se sabe que

$$B = P^{-1}\ A\ P$$

Empleando Gauss Jordan resulta

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El lector puede verificar este resultado obteniendo directamente B, como en i).

TRABAJO PRACTICO IV

4-22. Calcular la matriz $\frac{2}{3}$ A $-$ 2 B, sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2} & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4-23. Determinar la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ sabiendo que $X + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = I$

4-24. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Obtener: A^2, A B C y $B^t A^t$.

4-25. Desarrollar

i) (A + I) (A $-$ I)

ii) (A + B) (A $-$ B)

Sabiendo que A, I y B son matrices cuadradas $n \times n$.

4-26. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} pq & q^2 \\ -p^2 & -pq \end{pmatrix}$$

Calcular A^2.

4-27. Obtener A^2 sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-28. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

calcular A^2, A^3, A^4, etcétera, y vincular los elementos resultantes con los términos de la sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... donde, a partir del tercero, cada uno es igual a la suma de los dos anteriores.

4-29. Demostrar que $A\,(B\,C) = (A\,B)\,C$, sabiendo que los productos indicados existen.

4-30. Demostrar por inducción completa que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-31. Sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

demostrar

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n\,(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-32. Resolver la ecuación $A^2 + X^2 = I$, donde A, X, I son matrices 2×2 y

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

4-33. Siendo $B \in K^{n\times n}$, $C \in K^{n\times n}$, $C^2 = N$ y $B\,C = C\,B$, demostrar

$$A = B + C \Rightarrow A^{k+1} = B^k\left(B + (k+1)\,C\right)$$

4-34. Sabiendo que en $K^{n\times n}$ se verifica $X\,A = I$ y $A\,Y = I$, demostrar que $X = Y$.

4-35. Determinar las matrices $X \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ tales que $X^2 = N$.

4-36. Demostrar que si A y B son matrices diagonales en $K^{n\times n}$, entonces AB es diagonal y $AB = BA$.

4-37. Demostrar

$$A\,A^t = N \Rightarrow A = N$$

4-38. Demostrar que si A y B son matrices idempotentes y permutables en $K^{n\times n}$, entonces A B es idempotente.

4-39. Demostrar que si una matriz es simétrica, idempotente y con algún elemento nulo en la diagonal, entonces la fila y la columna de dicho elemento son el vector nulo.

4-40. Demostrar que si A es idempotente y B es ortogonal, entonces $B^t\,A\,B$ es idempotente.

4-41. Demostrar

$$A^2 = A \wedge A + B = I \Rightarrow B^2 = B \wedge AB = BA = N$$

4-42. Demostrar

$$A + B = I \wedge A\,B = N \Rightarrow A \text{ y } B \text{ son idempotentes}$$

4-43. Demostrar

$$A\,B = A \wedge B\,A = B \Rightarrow A,\, B,\, A^t,\, B^t \text{ son idempotentes}$$

4-44. Demostrar que si A es simétrica, entonces $B^t\,A\,B$ es simétrica cualquiera que sea $B \in K^{n\times n}$.

4-45. Sean A y B dos matrices simétricas en $K^{n\times n}$. Demostrar

$$A\,B \text{ es simétrica} \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son permutables}$$

4-46. Demostrar que la matriz $A \in K^{n\times n}$ es involutiva si y sólo si $(I - A)\,(I + A) = N$.

4-47. Demostrar que A y B son permutables si y sólo si $A - aI$ y $B - aI$ son permutables, cualquiera que sea el escalar a.

4-48. En $K^{3\times 3}$ se consideran una matriz cualquiera B y A tal que $a_{ij} = 1 \quad \forall i\ \forall j$.
Analizar las filas de AB y las columnas de BA.

4-49. Demostrar que si A y B son no singulares y permutables, entonces sus inversas son permutables y sus traspuestas también lo son.

4-50. Demostrar que si A es una matriz diagonal y todos los elementos de la diagonal son no nulos, entonces A es no singular y su inversa es la matriz diagonal formada por los inversos de tales elementos no nulos en la diagonal.

4-51. Demostrar que si A es no singular e idempotente, entonces $A = I$.

4-52. Verificar que las siguientes matrices forman grupo multiplicativo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

4-53. Mediante una partición adecuada efectuar el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4-54. Determinar una base del espacio fila de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4-55. Demostrar que si A es no singular y B A = N, entonces B = N.

4-56. Siendo $A \in K^{n \times n}$ no singular y X e Y matrices en $K^{n \times 1}$ tales que A X = Y, entonces e $X = A^{-1}\,Y$.

4-57. Demostrar que si A y B son matrices de $K^{n \times n}$ tales que AB = N, entonces A = N B = N o A y B son singulares.

4-58. Determinar los rangos de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4-59. Obtener, si existen, las inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4-60. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

Verificar que $\rho\,(A) = \rho\,(A\,A^t)$

4-61. Demostrar que el rango de la suma de dos matrices es menor o igual que la suma de su rangos.

4-62. Demostrar las siguientes propiedades relativas a la traza de matrices en $K^{n \times n}$:

i) $tr\,(AB) = tr\,(BA)$.

ii) $tr\,(ABC) = tr\,(CAB) = tr\,(BCA)$, o sea, la traza no varía frente a permutacione cíclicas.

iii) Si C es ortogonal, entonces $tr\,(C^t AC) = tr\,A$.

4-63. Sea A una matriz idempotente en $\mathbf{R}^{n\times n}$, y sea X un vector no nulo de $\mathbf{R}^n$ que verifica $AX = aX$, con $a \in \mathbf{R}$. Demostrar que $a = 0$ o $a = 1$.

4-64. Si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es involutiva y $X \in \mathbf{R}^n$ es no nulo y verifica $AX = aX$, entonces $a = 1$ o $a = -1$.

4-65. Sea $X \in \mathbf{R}^{n\times 1}$. Se define el escalar $\overline{X}$ (X raya) mediante

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Determinar las matrices $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ que verifican

i) $X^t\,A\,X = \overline{X}^2$

ii) $X^t\,A\,X = n\,\overline{X}^2$

iii) $X^t\,A\,X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$

4-66. Sea $T \in K^{n\times n}$ estrictamente triangular superior. Demostrar que

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1}$$

4-67. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} C \\ \\ D \end{pmatrix}$$

donde C y D son matrices 2×4. Verificar que $A\,B = \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$

4-68. Sea f una trasformación lineal de V en V caracterizada por la matriz A.
Sabiendo que A verifica la relación $A^3 + A^2 - A + I = N$, demostrar que f es no singular.

4-69. Determinar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-70. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbf{R}^{2\times 2}$. Demostrar: A y B son permutables $\Leftrightarrow B = \alpha\,A + \beta\,I$

4-71. Las matrices A y B de $K^{m \times m}$ son tales que A y (A B – B A) son permutables. Demostrar que

$$A^n B - B A^n = n A^{n-1} (A B - B A) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

4-72. Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ una trasformación lineal definida por

$$f(a, b, c) = (a + b - c, a - b)$$

i) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas en $\mathbf{R}^3$ y en $\mathbf{R}^2$.

ii) Obtener las matrices de pasaje de las bases anteriores a las bases

$[v'] = \{(0, 1, 1), (1, -1, -2), (1, -1, -1)\}$

$[w'] = \{(1, 3), (0, -2)\}$

iii) Calcular la matriz B de f, respecto del nuevo par de bases.

Capítulo 5

DETERMINANTES

5.1. INTRODUCCION

En esta sección se define axiomáticamente la función determinante de orden n y se demuestran las propiedades que se derivan de tales axiomas. Se encara después el problema de la existencia del determinante y se llega al desarrollo por los elementos de una fila. A continuación, y sobre la base del concepto de inversiones de una permutación, se da el desarrollo del determinante en función de los elementos de la matriz, y se demuestra la igualdad de los determinantes de dos matrices cuadradas y traspuestas. Se encara el desarrollo de los determinantes por los elementos de una línea cualquiera, y se demuestra el teorema relativo al determinante del producto de dos matrices. Después de exponer el concepto de matriz adjunta de una matriz cuadrada, se da un método para invertir matrices no singulares.

5.2. DETERMINANTES

En lo que sigue, supondremos que K es tal que $1 + 1 \neq 0$, y si $A \in K^{n \times n}$, escribiremos $A = (A_1\ A_2\ \ldots\ A_n)$, donde A_i con $1 \leqslant i \leqslant n$ denota la columna de lugar i de la matriz cuadrada.

Definición

Determinante de orden n es toda función

$$D : K^{n \times n} \to K$$

que verifica

1. $D\,(A_1 \ldots A_j' + A_j'' \ldots A_n) = D\,(A_1 \ldots A_j' \ldots A_n) + D\,(A_1 \ldots A_j'' \ldots A_n)$
   cualquiera que sea $j = 1, 2, \ldots, n$.

2. $D\,(A_1 \ldots \alpha\, A_j \ldots A_n) = \alpha\, D\,(A_1 \ldots A_j \ldots A_n)$
   para todo $j = 1, 2, \ldots, n$.

3. $A_j = A_{j+1} \Rightarrow D(A_1 \ldots A_j \;\; A_{j+1} \ldots A_n) = 0$

   cualquiera que sea $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

4. $D(I) = 1$.

Haremos algunas aclaraciones acerca de la notación usada y de los axiomas propuestos en la definición. La función D asigna a cada matriz $n \times n$ un escalar llamado determinante de la matriz. Así, el símbolo D (A) se lee "determinante de A", y es un elemento de K.

Los axiomas 1. y 2. caracterizan a D como una función lineal respecto de cada columna de la matriz.

El axioma 3. establece que si dos columnas consecutivas de una matriz son idénticas, entonces su determinante es nulo.

El axioma 4. expresa que el determinante de la identidad vale 1.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

escribiremos

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 5-1.

La función $D : K^{2\times 2} \to K$ definida por

$$D(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

es un determinante.

En efecto:

1. $$\begin{vmatrix} a & b' + b'' \\ c & d' + d'' \end{vmatrix} = a(d' + d'') - (b' + b'')c = (a d' - b'c) + (a d'' - b''c) =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b'' \\ c & d'' \end{vmatrix}$$

2. $$\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha a d - b \alpha c = \alpha (a d - b c) = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

3. $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = a\,c - a\,c = 0$

4. $D(I) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 0.0 = 1$

Análogamente lo es la función $D : K^{1 \times 1} \to K$ definida por

$$D(A) = |a| = a$$

5.3. PROPIEDADES DE LA FUNCION DETERMINANTE

5.3.1. Teorema

Si se permutan dos columnas de una matriz, entonces los correspondientes determinantes son opuestos.

Razonamos inductivamente:

i) Las columnas que se permutan son consecutivas.

Sea $A = (A_1 \ldots A_j\, A_{j+1} \ldots A_n)$

Por 3. es

$$D(A_1 \ldots A_j + A_{j+1} \quad A_{j+1} + A_j \ldots A_n) = 0$$

Aplicando 2. se tiene

$$D(A_1 \ldots A_j \quad A_{j+1} \ldots A_n) + \cancel{D(A_1 \ldots A_j \; A_j \ldots A_n)} +$$

$$+ \cancel{D(A_1 \ldots A_{j+1} \; A_{j+1} \ldots A_n)} + D(A_1 \ldots A_{j+1} \quad A_j \ldots A_n) = 0$$

Los dos términos centrales son nulos por 3.
Luego

$$D(A_1 \ldots A_j \quad A_{j+1} \ldots A_n) = - D(A_1 \ldots A_{j+1} \quad A_j \ldots A_n)$$

ii) Suponemos válida la propiedad para $h - j = k$ y la demostramos para $h - j = k + 1$

$$D(A_1 \ldots A_j\, A_{j+1} \ldots A_h \ldots A_n) =$$

$$= - D(A_1 \ldots A_{j+1} \quad A_j \ldots A_h \ldots A_n) \qquad \text{Por i)}$$

$$= D(A_1 \ldots A_{j+1} \quad A_h \ldots A_j \ldots A_n) \qquad \text{Por hipótesis}$$

$$= - D(A_1 \ldots A_h \quad A_{j+1} \ldots A_j \ldots A_n) \qquad \text{Por i)}$$

5.3.2. Teorema

El determinante de toda matriz que tenga dos columnas idénticas es nulo.

$$i \neq j \wedge A_i = A_j \Rightarrow D(A_1 \quad A_2 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n) = 0$$

En efecto, permutando tales columnas idénticas por 5.3.1. es

$$D(A_1 \ldots A_i \ldots A_j \ldots A_n) = -D(A_1 \ldots A_j \ldots A_i \ldots A_n)$$

O sea

$$D(A) = -D(A) \quad \text{pues} \quad A_i = A_j$$

Luego

$$1\,D(A) + 1\,D(A) = 0$$

En consecuencia

$$(1+1)\,D(A) = 0$$

Y como $1 + 1 \neq 0$, resulta

$$D(A) = 0$$

5.3.3. Teorema

Si una columna de una matriz es el vector nulo, entonces su determinante es nulo.

Sean $A \in K^{n \times n}$ y $A_j = \mathbf{0}$. Entonces

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A_1 \; A_2 \ldots \mathbf{0} \ldots A_n) = D(A_1 \; A_2 \ldots 0A_j \ldots A_n) = \\ &= 0\,D(A_1 \; A_2 \; \ldots \; A_j \; \ldots \; A_n) = 0 \end{aligned}$$

Hemos aplicado 1.3.1. y el axioma 2. de la función determinante.

5.3.4. Teorema

El determinante de una matriz no varía si a una columna se le suma una combinación lineal de otras.

$$j \neq k \Rightarrow D(A_1 \ldots A_j \ldots A_k \ldots A_n) = D(A_1 \ldots A_j \ldots A_k + \alpha A_j \ldots A_n)$$

Aplicando los axiomas 1. y 2., y teniendo en cuenta 5.3.2., resulta

$$\begin{aligned} & D(A_1 \ldots A_j \ldots A_k + \alpha A_j \ldots A_n) = \\ & = D(A_1 \ldots A_j \ldots A_k \ldots A_n) + \alpha\,D(A_1 \ldots A_j \ldots A_j \ldots A_n) = \\ & = D(A_1 \ldots A_j \ldots A_k \ldots A_n) + \alpha \,.\, 0 = \\ & = D(A_1 \ldots A_j \ldots A_k \ldots A_n) \end{aligned}$$

Ejemplo 5-2.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$$

Calculamos D (A) de la siguiente manera:

i) A la tercera columna le sumamos la primera multiplicada por -1.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

ii) A la primera columna le sumamos la segunda.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

iii) A la tercera columna le sumamos la segunda multiplicada por -1.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

iv) De la tercera columna extraemos el factor -4.

$$D(A) = (-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

v) A la primera columna le restamos el triplo de la tercera.

$$D(A) = (-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

vi) A la segunda columna le restamos la tercera.

$$D(A) = (-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Por 4. resulta

$$D(A) = (-4) \,.\, 1 = -4$$

Ejemplo 5-3.

Si $\alpha \in K$ y $A \in K^{n \times n}$, entonces

$$D(\alpha A) = \alpha^n D(A)$$

En efecto:

$$D(\alpha A) = D[\alpha(A_1 \ A_2 \ldots A_n)] =$$
$$= D(\alpha A_1 \ \alpha A_2 \ldots \alpha A_n) =$$
$$= \alpha^n D(A)$$

Ejemplo 5-4.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son vectores columnas de K^n tales que $D(A_1 \ A_2 \ldots A_n) \neq 0$, y $B \in K^{n \times 1}$ es combinación lineal de aquéllos, o sea

$$B = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \quad \text{con} \quad x_i \in K, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

entonces

$$x_j = \frac{D(A_1 \ldots B \ldots A_n)}{D(A)}$$

donde B es la columna de lugar j.
En efecto:

$$D(A_1 \ldots B \ldots A_n) = D(A_1 \ldots \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \ldots A_n) =$$
$$= x_1 D(A_1 \ldots A_1 \ldots A_n) + x_2 D(A_1 \ A_2 \ldots A_2 \ldots A_n) +$$
$$+ x_j D(A_1 \ldots A_j \ldots A_n) + \ldots + x_n D(A_1 \ldots A_n \ldots A_n) =$$
$$= x_j D(A)$$

Luego

$$x_j = \frac{D(A_1 \ldots B \ldots A_n)}{D(A)}$$

5.3.5. Teorema

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son linealmente dependientes en K^n, entonces es $D(A_1 \ A_2 \ldots A_n) = 0$.

Siendo por hipótesis $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un conjunto linealmente dependiente, algún vector, digamos A_j, es combinación lineal de los restantes, o sea

$$A_j = \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i A_i$$

En consecuencia resulta

$$D(A) = D(A_1 \ A_2 \ldots \sum_{i \neq j}^{n} \alpha_i A_i \ldots A_n) = 0$$

El teorema contrarrecíproco expresa

$$D(A) \neq 0 \Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ son L.I.}$$

Por consiguiente

$$D(A) \neq 0 \Rightarrow \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \quad \text{es una base de } K^n$$

5.4. EXISTENCIA DE D

Definiremos los determinantes por inducción sobre n. Sea $A \in K^{n\times n}$. Para cada $(i, j) \in I_n \times I_n$ consideramos la matriz $A(i \mid j)$ del tipo $(n-1) \times (n-1)$, que se deduce de A al suprimir la fila i y la columna j.

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & \vert & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vert & & \vdots \\
\hline & & & a_{ij} & & \\
\vdots & \vdots & & \vert & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \vert & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix} & i
\end{array}$$

Denotaremos con A_{ij} al producto de $(-1)^{i+j}$ por el determinante de $A(i \mid j)$, o sea

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, D\left(A(i \mid j)\right)$$

El determinante A_{ij} recibe el nombre de cofactor del elemento (i, j) de la matriz A.

$$\text{Por ejemplo, si } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

entonces los cofactores de los nueve elementos de A, son

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1, \text{ etcétera.}$$

Probaremos la existencia de D procediendo inductivamente.

i) Sean $n = 1$ y $A = (a) \in K^{1\times 1}$. Definiendo

$$D : K^{1\times 1} \to K \text{ mediante}$$

$$D(A) = a$$

se satisfacen los axiomas propuestos en 5.2.

ii) Supongamos definido $D : K^{(n-1)\times(n-1)} \to K$.

Esto significa que se satisfacen los axiomas 1., 2., 3. y 4.

Daremos ahora una expresión para la función determinante de orden n a expensas del determinante de orden $n-1$. Para ello definimos, para cada fila $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$D : K^{n\times n} \to K$$

mediante la asignación

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (1)$$

donde $A_{ij} = (-1)^{i+j} D\left(A(i|j)\right)$.

O sea

$$D(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in} \quad \forall i \in I_n.$$

Probaremos que la definición (1) satisface los axiomas nombrados.

1. $D(A_1 A_2 \ldots A'_k + A''_k \ldots A_n) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{ik} A_{ik} + \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij} A_{ij} =$$

$$= (a'_{ik} + a''_{ik}) A_{ik} + \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij} A_{ij} =$$

$$= D(A_1 A_2 \ldots A'_k \ldots A_n) + D(A_1 A_2 \ldots A''_k \ldots A_n)$$

Después de distribuir en el primer término y considerando que cada determinante de orden $(n-1)$, para $j \neq k$, es la suma de dos determinantes cuyas columnas de lugar k son A'_k y A''_k.

2. $D(A_1 A_2 \ldots \alpha A_k \ldots A_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \alpha a_{ik} A_{ik} + \sum_{j\neq k}^{n} a_{ij} A_{ij}.$

En cada determinante A_{ij}, con $j \neq k$, figura en la columna de lugar k el factor α, que puede extraerse en virtud de la hipótesis inductiva, y resulta

$$D(A_1 A_2 \ldots \alpha A_k \ldots A_n) = \alpha D(A_1 A_2 \ldots A_k \ldots A_n)$$

3. $A_k = A_{k+1} \Rightarrow D(A_1 \ldots A_k \quad A_{k+1} \ldots A_n) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{ik} A_{ik} + a_{i,\,k+1} A_{i,\,k+1} =$$

$$= (-1)^{i+k} a_{ik} D\left(A(i\,|\,k)\right) + (-1)^{i+k+1} a_{i,\,k+1} D\left(A(i\,|\,k+1)\right) =$$

$$= (-1)^{i+k} a_{ik} D\left(A(i\,|\,k)\right) + (-1)^{i+k+1} a_{ik} D\left(A(i\,|\,k)\right) = 0$$

4. $D(I) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \delta_{ij} D\left(I(i\,|\,j)\right) =$

$$= (-1)^{i+i} \delta_{ii} D\left(I(i\,|\,i)\right) = 1$$

Entonces, $\forall n \in N$, $\forall i \in I_n$, la función

$$D : K^{n\times n} \to K$$

definida por

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

es un determinante de orden n.

La fórmula anterior corresponde al desarrollo del determinante por la i-sima fila y expresa que todo determinante es la suma de los productos de los elementos de la fila i por sus correspondientes cofactores.

5.5. UNICIDAD DEL DETERMINANTE

Expondremos primero algunos conceptos relativos a permutaciones e inversiones de una permutación, sin entrar en detalles de demostraciones. Después hallaremos una expresión del determinante en términos de los elementos de la matriz, de modo tal que se satisfagan los cuatro axiomas de la definición.

5.5.1. Permutaciones

Sea el intervalo natural inicial $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición

Permutaciones de I_n son todas las funciones biyectivas de I_n en sí mismo.

Si $\sigma : I_n \to I_n$ es una permutación, entonces σ queda caracterizada por el conjunto ordenado de las imágenes

$$\sigma = \left(\sigma(1) \quad \sigma(2) \ldots \sigma(n)\right)$$

Como σ es biyectiva, existe la permutación inversa de σ, $\sigma^{-1} : I_n \to I_n$ definida por

$$\sigma^{-1}(i) = j \quad \text{si} \quad \sigma(j) = i$$

Como la composición de funciones biyectivas de I_n en I_n es también una función biyectiva, resulta que la composición de dos permutaciones de I_n es una permutación de I_n.

Permutación idéntica es la función identidad en I_n.

5.5.2. Trasposiciones

Sea $j \in I_{n-1}$. Trasposición j-sima de la permutación σ es la permutación

$$j_\sigma : I_n \to I_n$$

definida por

$$j_\sigma(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{si } i \neq j \wedge i \neq j+1 \\ \sigma(i+1) & \text{si } i = j \\ \sigma(i) & \text{si } i = j+1 \end{cases}$$

Por ejemplo, dada la permutación de I_5

$$\sigma = (2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)$$

entonces es

$$2_\sigma = (2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5)$$

Toda trasposición de una permutación intercambia dos imágenes consecutivas y deja fijas a las restantes.

Se verifica que la permutación inversa de una trasposición es una trasposición. Por ejemplo, la permutación inversa de la trasposición

$$2_\sigma = (2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5)$$

es la trasposición

$$2_\sigma^{-1} = (3 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 5)$$

Se demuestra que si σ es una permutación de I_n y $n > 1$, entonces existe un número finito de trasposiciones cuya composición es la identidad.

Por ejemplo, si

$$\sigma = (2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 5)$$

entonces

$$2_\sigma = (2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5)$$

y

$$1_{2_\sigma} = (1 \circ 2)_\sigma = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5) = I$$

5.5.3. Signo de una permutación

Sea σ una permutación de I_n. El símbolo $\epsilon(\sigma)$ denota el mínimo número de trasposiciones que trasforman a σ en la identidad. Convenimos en que $\epsilon(I) = 0$.

Diremos que σ es par si $\epsilon(\sigma)$ es par. Si $\epsilon(\sigma)$ es impar, entonces σ es impar.

A cada permutación σ de I_n se le puede asignar el signo + si σ es par, y el signo menos si es impar. Tal signo queda caracterizado por $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$

Se verifica que dos permutaciones inversas tienen la misma paridad. O sea

$$(-1)^{\epsilon(\sigma)} = (-1)^{\epsilon(\sigma^{-1})}$$

5.5.4. Teorema

Los determinantes están unívocamente determinados por los axiomas 1., 2., 3. y 4. El determinante satisface la expresión

$$D(A) = \sum_\sigma (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1} \, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

donde la suma se realiza sobre todas las permutaciones de I_n.

Consideremos $A = (A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) \in K^{n\times n}$. Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son los vectores columnas de la base canónica de K^n, entonces

$$A_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\ E_i$$
$$A_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\ E_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in}\ E_i$$

O sea

$$D(A) = D(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) = D\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\ E_i\ \ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\ E_i \ldots \sum_{i=1}^{n} a_{in}\ E_i\right)$$

Mediante 1. podemos expresarlo como una suma de términos del tipo

$$D\left(a_{\sigma(1),1}\ E_{\sigma(1)}\ \ a_{\sigma(2),2}\ E_{\sigma(2)} \ldots a_{\sigma(n),n}\ E_{\sigma(n)}\right)$$

donde $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ denota una elección de n enteros entre 1 y n.

Por 2. se tienen términos de la forma

$$a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\ D\left(E_{\sigma(1)}\ E_{\sigma(2)} \ldots E_{\sigma(n)}\right)$$

Si algún σ asigna el mismo entero a valores distintos i y j, el determinante es nulo en virtud de 5.3.2. Esto significa que debemos considerar sólo las permutaciones de I_n.

Luego

$$D(A) = \sum_{\sigma} a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}\ D\left(E_{\sigma(1)}\ E_{\sigma(2)} \ldots E_{\sigma(n)}\right)$$

Los vectores canónicos $E_{\sigma(1)}, E_{\sigma(2)}, \ldots, E_{\sigma(n)}$ constituyen en cada término una permutación de $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Si $\epsilon(\sigma)$ denota el número mínimo de trasposiciones necesarias para obtener la permutación identidad es

$$D\left(E_{\sigma(1)}\ E_{\sigma(2)} \ldots E_{\sigma(n)}\right) = (-1)^{\epsilon(\sigma)}\ D(E_1\ E_2\ \ldots\ E_n)$$

donde $(-1)^{\epsilon(\sigma)}$ es el signo de la permutación.

Por 4. resulta

$$D\left(E_{\sigma(1)}\ E_{\sigma(2)} \ldots E_{\sigma(n)}\right) = (-1)^{\epsilon(\sigma)}\ D(I) = (-1)^{\epsilon(\sigma)}$$

Por consiguiente es

$$D(A) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)}\ a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

Este desarrollo del determinante no es útil para el cálculo, pero sí lo es desde el punto de vista teórico.

5.6. DETERMINANTE DE LA TRASPUESTA

Demostraremos que dos matrices traspuestas en $K^{n\times n}$ tienen igual determinante. O sea, si $A \in K^{n\times n}$, entonces $D(A) = D(A^t)$.
Sabemos que

$$D(A) = \sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma)} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(1),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

Sea una permutación de I_n. Si $\sigma(j) = k$, entonces $\sigma^{-1}(k) = j$.
Luego

$$a_{\sigma(j),j} = a_{k,\sigma^{-1}(k)}$$

En todo producto del tipo

$$a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

cada entero $k \in I_n$ figura una sola vez entre los enteros $\sigma(i)$. Por consiguiente, tal producto puede escribirse así:

$$a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \ldots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

y la suma es

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\epsilon(\sigma^{-1})} a_{1,\sigma^{-1}(1)}\, a_{2,\sigma^{-1}(2)} \ldots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

ya que

$$(-1)^{\epsilon(\sigma)} = (-1)^{\epsilon(\sigma^{-1})}$$

En esta suma, cada término está asociado a una permutación de I_n, digamos σ, y cuando σ recorre todas las permutaciones de I_n, lo mismo ocurre respecto de σ^{-1}, ya que cada permutación caracteriza unívocamente a su inversa.

Por consiguiente, la suma es igual a

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)} = D(A^t)$$

Ejemplo 5-5.

Calculamos, según 5.5.4., el determinante de $C = (A\,B)^t$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuamos primero

$$A\,B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$C = (A\,B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Para obtener los seis términos del desarrollo 5.5.4. podemos aplicar la conocida regla de Sarrus, repitiendo debajo del determinante las dos primeras filas de la matriz, y efectuando los productos indicados

$$D\,(C) = \begin{array}{|ccc|} 3 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \\ \end{array} \begin{array}{l} = 3\,.\,2\,.\,(-2) + (-2)\,.\,(-5)\,.\,(-4) + 5\,.\,(-3)\,.\,0 - \\ \quad -5\,.\,2\,.\,(-4) - 3\,.\,(-5)\,.\,0 - (-2)\,.\,(-3)\,.\,(-2) = \\ = -12 - 40 + 40 + 12 = 0 \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} 3 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}$$

En el caso de un determinante de orden 4, esta regla no es aplicable, y la obtención de los 24 términos del desarrollo es muy penosa. En todos los casos de cálculo es preferible el desarrollo del determinante por los elementos de una fila o columna, como se indica en 5.3.5.

En este sentido, primero extraemos el factor 2 de la segunda fila, y después sumamos a la segunda columna la primera:

$$D\,(C) = 2 \begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ por tener una columna de ceros.}$$

El lector puede verificar que

$$D\,(C) = D\,(A\,B)$$

Ejemplo 5-6.

Calculamos el siguiente determinante:

$$D\,(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

A la primera fila le sumamos las dos últimas y extraemos el factor 9

$$D\,(A) = \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

A la segunda y tercera columnas les restamos la primera

$$D\,(A) = 9 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos por la primera fila, según 5.3.5.

$$D(A) = 9 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 9(-4-8) = -108$$

Teniendo en cuenta que los determinantes de dos matrices traspuestas son iguales, los axiomas y propiedades relativos a las columnas son válidos para las filas.

En consecuencia, el desarrollo de un determinante por los elementos de una fila, propuesto en 5.3.5., se hace extensivo a los elementos de una columna. Podemos decir, entonces, que todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea (fila o columna) por sus respectivos cofactores.

Ejemplo 5-7.

Desarrollamos por los elementos de la primera columna.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Antes de efectuar el desarrollo pedido reduciremos a 0 los tres últimos elementos de la primera columna, para lo cual restaremos a cada fila la anterior multiplicada por a.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna y factoreando

$$D(A) = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$$

Extrayendo factores en cada columna

$$D(A) = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

El determinante de orden 3 que resulta es del mismo tipo que el primero. Ahora restamos a cada fila la anterior por b

$$D(A) = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-bd \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera columna y extrayendo factores se obtiene

$$D(A) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix}$$

O sea

$$D(A) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)\ (d-b)(d-c)$$

El determinante propuesto recibe el nombre de determinante de Vandermonde, y considerando la fila de elementos a, b, c y d, su desarrollo es igual al producto de los binomios que se obtienen restando cada elemento de la misma de todos los que le siguen.

5.7. DETERMINANTE DEL PRODUCTO DE DOS MATRICES

Demostraremos que si A y B son matrices $n\ n$, entonces se verifica que

$$D(A\ B) = D(A)\ D(B)$$

O sea, el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de sus determinantes.

Considerando la matriz A particionada en vectores columnas, se tiene

$$C = A\ B = (A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} b_{j1} A_j \quad \sum_{j=1}^{n} b_{j2} A_j \ \ldots \ \sum_{j=1}^{n} b_{jn} A_j \right)$$

Luego

$$D(A\ B) = D\left(\sum_{j=1}^{n} b_{j1} A_j \quad \sum_{j=1}^{n} b_{j2} A_j \ldots \sum_{j=1}^{n} b_{jn} A_j\right) =$$

$$= \sum_{\sigma} D\left(b_{\sigma(1),1} A_{\sigma(1)} \quad b_{\sigma(2),2} A_{\sigma(2)} \ldots b_{\sigma(n),n} A_{\sigma(n)}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma} b_{\sigma(1),1}\, b_{\sigma(2),2} \ldots b_{\sigma(n),n}\, D\left(A_{\sigma(1)}\, A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(n)}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{e(\sigma)}\, b_{\sigma(1),1}\, b_{\sigma(2),2} \ldots b_{\sigma(n),n}\, D(A_1\ A_2\ \ldots\ A_n) =$$

$$= D(A) \sum_{\sigma} (-1)^{e(\sigma)}\, b_{\sigma(1),1}\, b_{\sigma(2),2} \ldots b_{\sigma(n),n} =$$

$$= D(A)\ D(B)$$

5.8. ADJUNTA DE UNA MATRIZ CUADRADA

5.8.1. Definición

Adjunta de una matriz cuadrada es la traspuesta de la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su cofactor.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces la matriz adjunta de A se denota mediante el símbolo Adj A, y es

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la matriz adjunta de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

es

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 9 & 1 & 7 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

5.8.2. Propiedad

La suma de los productos de los elementos de una fila de una matriz cuadrada por los cofactores de los elementos correspondientes de otra fila es cero.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{donde } h \neq i$$

Sumando a la fila h la fila i, el determinante de esta matriz no varía, es decir

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{h1}+a_{i1} & a_{h2}+a_{i2} & & a_{hn}+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desarrollando el segundo miembro por los elementos de la fila h, se tiene

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} (a_{hj} + a_{ij})\, A_{hj}$$

Entonces

$$D(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{hj}\, A_{hj} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{hj}$$

La primera sumatoria es D (A), y en consecuencia

$$D(A) = D(A) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{hj}$$

Luego

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{hj} = 0$$

Esta propiedad también es válida para columnas. A continuación demostraremos que el producto de toda matriz cuadrada a izquierda y a derecha por su adjunta es igual al determinante de dicha matriz por la identidad.

5.8.3. Teorema

Cualquiera que sea $A \in K^{n \times n}$ se verifica que

$$A \,.\, \mathrm{Adj}\, A = \mathrm{Adj}\, A \,.\, A = D(A) \,.\, I$$

En efecto, aplicando la definición de adjunta de una matriz cuadrada, el producto de matrices, 5.4. y 5.8.2. se tiene

$$A \,\mathrm{Adj}\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, A_{nj} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\, A_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, A_{1j} & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, A_{2j} & \dots & \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, A_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D(A) \end{pmatrix} =$$

$$= D(A) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = D(A)\,.\,I$$

En forma análoga se prueba que

$$\operatorname{Adj} A\,.\,A = D(A)\, I$$

5.9. INVERSION DE MATRICES NO SINGULARES

Demostraremos que una matriz cuadrada es inversible si y sólo si su determinante es distinto de cero.

Sea $A \in K^{n \times n}$.

1. Supongamos que A es inversible. Entonces existe $B \in K^{n \times n}$ tal que

$$A\, B = B\, A = I$$

Luego

$$D(A\, B) = D(B\, A) = D(I)$$

Por determinante del producto y de la identidad es

$$D(A)\, D(B) = D(B)\, D(A) = 1$$

Resulta $D(A) \neq 0$, pues en caso contrario su producto por $D(B)$ sería 0, y no 1.

2. Sea $A \in K^{n \times n}$ tal que $D(A) \neq 0$. Demostraremos que A es inversible.

Por 5.8.3. sabemos que el producto de toda matriz cuadrada por su adjunta es igual al determinante de dicha matriz por la identidad, o sea

$$A\,.\,\operatorname{Adj} A = \operatorname{Adj} A\,.\,A = D(A)\,.\,I$$

Por hipótesis, el escalar D (A) es distinto de cero, y dividiendo por él resulta

$$A \cdot \frac{\text{Adj } A}{D(A)} = \frac{\text{Adj } A}{D(A)} \cdot A = I$$

Entonces, por definición, existe A^{-1} y es

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{D(A)}$$

Se obtiene de este modo otro método efectivo para el cálculo de la inversa de una matriz no singular.

Ejemplo 5-8.

Obtenemos la inversa de la matriz del ejemplo 5-6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $D(A) = -108$, existe A^{-1}.
Primero obtenemos la adjunta de A.

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -22 \\ -4 & -22 & 14 \\ -22 & 14 & -4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -22 \\ -4 & -22 & 14 \\ -22 & 14 & -4 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A^{-1} = -\frac{1}{108} \begin{pmatrix} 14 & -4 & -22 \\ -4 & -22 & 14 \\ -22 & 14 & -4 \end{pmatrix}$$

O sea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{54} & \frac{2}{54} & \frac{11}{54} \\ \frac{2}{54} & \frac{11}{54} & -\frac{7}{54} \\ \frac{11}{54} & -\frac{7}{54} & \frac{2}{54} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5-9.

Demostramos que los determinantes de dos matrices inversas son escalares recíprocos.
Sea $A \in K^{n \times n}$ no singular, es decir, tal que existe A^{-1}.
Entonces se tiene

$$A\,A^{-1} = I$$

y

$$D(A\,A^{-1}) = D(I)$$

Por determinante del producto y de la identidad es

$$D(A)\,D(A^{-1}) = 1$$

O sea

$$D(A^{-1}) = [D(A)]^{-1}$$

Ejemplo 5-10.

Demostramos que dos matrices semejantes tienen determinantes iguales.
Sea $A \in K^{n\times n}$. Si $B \in K^{n\times n}$ es semejante a A, entonces existe P no singular tal que

$$B = P^{-1}\,A\,P$$

Entonces

$$D(B) = D(P^{-1})\,D(A)\,D(P)$$

Como K es conmutativo

$$D(B) = D(P^{-1})\,D(P)\,D(A)$$

Por determinante del producto

$$D(B) = D(P^{-1}\,P)\,D(A)$$

O sea

$$D(B) = D(I)\,D(A)$$

Y resulta

$$D(B) = D(A)$$

5.10. REGLA DE CHIO

Deduciremos un método, conocido bajo el nombre de regla de Chio, para reducir un determinante de orden n a otro de orden $n-1$, a los efectos de facilitar el cálculo del mismo. El procedimiento puede reiterarse hasta lograr un determinante de orden 2 o 1. El mecanismo es similar al que proporciona el método de Gauss Jordan para la determinación del rango de una matriz.

Sea

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Elegimos como pivote un elemento no nulo, digamos a_{ij}. Después de extraerlo como factor de la fila i, reduciremos a cero los demás elementos de la columna del pivote.

$$D(A) = a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{a_{i1}}{a_{ij}} & \dfrac{a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 1 & \dots & \dfrac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

A cada fila h, con $h \neq i$, le restamos la fila i multiplicada por a_{hj}, y resulta

$$D(A) = a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} - \dfrac{a_{1j}\,a_{i1}}{a_{ij}} & a_{12} - \dfrac{a_{1j}\,a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} - \dfrac{a_{1j}\,a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{a_{i1}}{a_{ij}} & \dfrac{a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 1 & \dots & \dfrac{a_{in}}{a_{ij}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - \dfrac{a_{nj}\,a_{i1}}{a_{ij}} & a_{n2} - \dfrac{a_{nj}\,a_{i2}}{a_{ij}} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} - \dfrac{a_{nj}\,a_{in}}{a_{ij}} \end{vmatrix}$$

Al desarrollar por los elementos de la columna j resulta un determinante de orden $n-1$ multiplicado por $(-1)^{i+j}\,a_{ij}$.

Es indistinto dividir la fila o la columna del pivote por él. En el segundo caso se reducen a cero los demás elementos de la fila del pivote. En ambas situaciones el procedimiento mecánico consiste en aplicar el método de Gauss Jordan teniendo en cuenta, además, el factor $(-1)^{i+j}\,a_{ij}$.

Ejemplo 5-11.

Calcular, usando la regla de Chio.

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Consideramos como pivote a $a_{33} = -2$ y dividimos la tercera fila por -2, con lo que el determinante queda multiplicado por este valor. Los restantes elementos de la columna del pivote se anulan, y a los elementos del determinante que no figuran ni en la fila ni en la columna del pivote se los trasforma de acuerdo con la regla del "rectángulo". Se tiene

$$D(A) = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la tercera columna resulta

$$D(A) = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Tomando como pivote $a_{12} = 1$, y reiterando el procedimiento se obtiene

$$D(A) = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -9 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la tercera columna resulta

$$D(A) = 2 \begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = 2\,(20 - 36) = -32$$

TRABAJO PRACTICO V

5-12. Calcular los siguientes determinantes desarrollando por los elementos de una línea, reduciendo a ceros todos los elementos de la misma, salvo uno:

$$D(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad D(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad D(E) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

5-13. Demostrar que el determinante de toda matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal.

5-14. Demostrar que si un determinante tiene dos líneas proporcionales, entonces es nulo.

5-15. Resolver las siguientes ecuaciones:

i) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ ii) $\begin{vmatrix} 2-x & -3 & 6 \\ 4 & 1+x & -2 \\ 2 & -1 & 2+x \end{vmatrix} = 0$

5.16. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación $D(A - \lambda I) = 0$

5-17. Resolver la ecuación $D(A - \lambda I) = 0$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5-18. Demostrar que el determinante de toda matriz ortogonal vale 1 o −1.

5-19. Sea $A \in K^{n \times n}$. Demostrar que

$$D(\mathrm{Adj}\ A) = [D(A)]^{n-1}$$

5-20. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

5-21. Sean f y g funciones reales de una variable real con derivadas primeras y segundas. Demostrar que si

$$\varphi = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$$

entonces

$$\varphi' = \begin{vmatrix} f & g \\ f'' & g'' \end{vmatrix}$$

5-22. Demostrar que si n vectores columnas de K^n son linealmente independientes, entonces el determinante de la matriz cuyas columnas son tales vectores es no nulo.

5-23. Determinar los signos de las permutaciones de I_3, y la inversa de cada una.

5-24. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ escalares distintos. Demostrar que las n funciones $f_1, f_2, \dots, f_n$ definidas por

$$f_i(t) = e^{a_i t}$$

son linealmente independientes sobre el cuerpo de los complejos.

5-25. Obtener las matrices inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (a \text{ y } b \text{ son no nulos})$$

5-26. Determinar, si existen, las inversas de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

5-27. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallar X sabiendo que AX = B.

5-28. Verificar las siguientes identidades en K

i) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

ii) $$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ y & z & t & x \\ z & t & x & y \\ t & x & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z+t)(x+z-y-t)(x+t-y-z)(x+y-z-t)$$

iii) $$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 1 & y & z & x+t \\ 1 & z & t & x+y \\ 1 & t & x & y+z \end{vmatrix} = 0$$

iv) $$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

5-29. Efectuar, mediante el determinante del producto de dos matrices,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

5-30. Calcular

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

5-31. Dadas las fórmulas de trasformación de coordenadas esféricas a cartesianas

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ z = \rho \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

obtener el jacobiano de la trasformación, es decir, el determinante cuyas filas son las derivadas parciales de x, y y z, respecto de ρ, φ y θ, respectivamente.

5-32. Obtener el jacobiano de la trasformación

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = \dfrac{X}{Y} \end{cases} \qquad \text{donde } X > 0\,,\ Y > 0.$$

5-33. Demostrar que el determinante de toda matriz antisimétrica de orden impar es nulo.

5-34. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} A & C \\ B & D \end{vmatrix} = |A|\,|D - B\,A^{-1}\,C|$$

donde A y D son cuadradas y A es no singular.

5-35. Si A y D son simétricas e inversibles, entonces

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + F\,E^{-1}\,F^t & -F\,E^{-1} \\ -E^{-1}\,F^t & E^{-1} \end{pmatrix}$$

donde $E = D - B^t\,A^{-1}\,B$ y $F = A^{-1}\,B$.

5-36. Sean $A \in K^{n\times n}$ no singular. U y V en $K^{n\times 1}$. Demostrar

$$(A + U\,V^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\,U\,V^t\,A^{-1}}{1 + V^t\,A\,U}$$

Capítulo 6

SISTEMAS LINEALES

6.1. INTRODUCCION

En este capítulo se estudian los sistemas de ecuaciones lineales sobre la base de su estrecha relación con las trasformaciones lineales, y se analizan los espacios soluciones de los sistemas lineales y homogéneos. Después de la demostración del teorema de Cramer, se trata la compatibilidad de los sistemas lineales generales. Se dan, finalmente, los siguientes métodos directos de resolución: de Gauss Jordan, de la raíz cuadrada y del orlado.

6.2. SISTEMAS LINEALES

6.2.1. Concepto

Consideremos $A \in K^{n \times m}$ y la función

$$f : K^m \to K^n$$

definida por

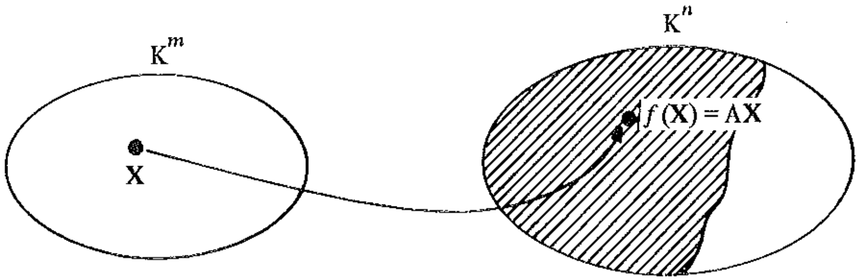
$$f(X) = AX \quad (1)$$

donde X denota cualquier vector columna de K^m.

Afirmamos que la asignación (1) caracteriza a f como una trasformación lineal de K^m en K^n. En efecto:

1. $f(X + Y) = A\,(X + Y) = A\,X + A\,Y = f(X) + f(Y)$.
2. $f(\alpha X) = A\,(\alpha X) = \alpha\,A\,X = \alpha f(X)$.

Por consiguiente, toda matriz $A \in K^{n \times m}$ determina una trasformación lineal $f : K^m \to K^n$ definida por $f(X) = A\,X$.



Sea $B \in K^n$. La igualdad

$$f(X) = B$$

o lo que es lo mismo

$$A\,X = B$$

recibe el nombre de sistema de ecuaciones lineales.

La traducción de tal igualdad es

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto y aplicando la definición de matrices iguales se obtiene la forma escalar del sistema de n ecuaciones lineales con m variables:

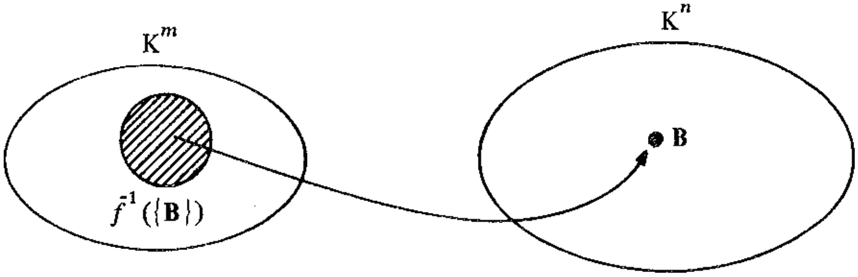
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

La matriz A, cuyos elementos son los coeficientes de las variables del sistema, recibe el nombre de matriz del sistema. Los escalares que figuran en el segundo miembro se llaman términos independientes. La matriz de coeficientes ampliada con los términos independientes se denota mediante

$$A' = (A \;\; B)$$

y es un elemento de $K^{n\times(m+1)}$.

Conjunto solución del sistema lineal es la preimagen por f, de $\{\mathbf{B}\} \subset \mathrm{K}^n$.



O sea, cada m-upla de elementos de K que satisface a todas las ecuaciones del sistema es una solución del mismo.

Entonces

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \text{ es una solución} \Leftrightarrow \alpha \in f^{-1}(\{\mathrm{B}\})$$

Si la preimagen de $\mathrm{B} \in \mathrm{K}^n$ es el conjunto vacío diremos que el sistema lineal

$$\mathrm{A\,X} = \mathrm{B} \quad (\mathrm{I})$$

es incompatible. Si el conjunto solución es no vacío, entonces se dice que el sistema es compatible.

Afirmamos que

$$\mathrm{A\,X} = \mathrm{B} \text{ tiene solución} \Leftrightarrow \mathrm{B} \in \mathrm{I}(f)$$

y

$$\mathrm{A\,X} = \mathrm{B} \text{ es incompatible} \Leftrightarrow \mathrm{B} \notin \mathrm{I}(f)$$

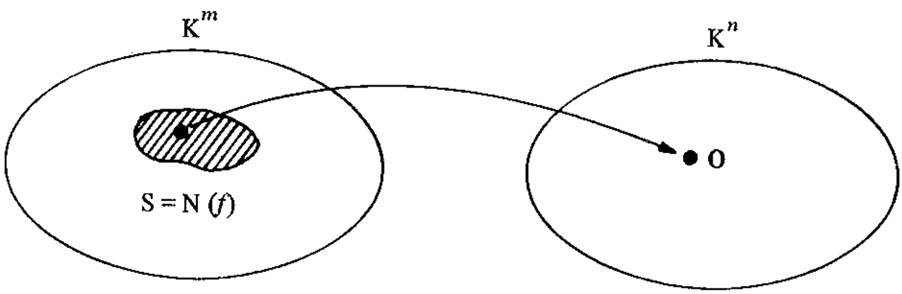
En particular, si B es el vector nulo de K^n, entonces

$$\mathrm{A\,X} = \mathbf{0} \quad (\mathrm{II})$$

recibe el nombre de sistema lineal y homogéneo. En la forma escalar, los términos independientes son nulos.

Como $\mathbf{0} \in \mathrm{K}^m$ satisface a (II), todo sistema lineal y homogéneo es compatible. El vector nulo de K^m se llama solución trivial del sistema lineal y homogéneo.

Denotaremos con S al conjunto solución de (II). S es la preimagen por f de $\mathbf{0} \in \mathrm{K}^n$. En consecuencia, el conjunto solución del sistema homogéneo es el núcleo de f. Resolver el sistema (II) es determinar el $\mathrm{N}(f)$. Por lo tanto, S es un subespacio de K^m, llamado espacio solución del sistema lineal y homogéneo.



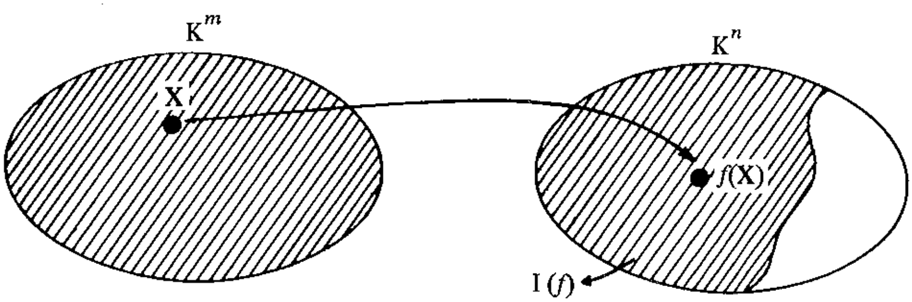
6.2.2. Rango de la matriz de coeficientes

Sea $A \in K^{n \times m}$ la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Consideremos la trasformación lineal

$$f : K^m \to K^n$$

definida por

$$f(X) = A\,X$$



Afirmamos que el rango de A es igual a la dimensión de la imagen de f. En efecto: la imagen de f es el espacio columna de A, pues

$$I(f) = \{ f(X) / X \in K^m \} = \{ A\,X / X \in K^m \} =$$

$$= \left\{ (A_1\ A_2\ \ldots\ A_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} / x_i \in K \text{ con } i = 1, 2, \ldots, m \right\} =$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_i A_i / x_i \in K \right\} = S_C(A)$$

Por consiguiente es

$$\dim I(f) = \dim S_C(A) = \rho\,(A)$$

6.2.3. Dimensión del espacio solución de un sistema homogéneo

Consideremos el sistema lineal y homogéneo

$$\mathrm{A\,X} = \mathbf{0}$$

y sea S el espacio solución, es decir

$$\mathrm{S} = \mathrm{N}(f)$$

donde f es la trasformación lineal a que nos hemos referido.

De acuerdo con 3.4. se verifica que

$$\dim \mathrm{N}(f) + \dim \mathrm{I}(f) = \dim \mathrm{K}^m$$

En consecuencia

$$\dim \mathrm{S} + \rho(\mathrm{A}) = m$$

O sea

$$\dim \mathrm{S} = m - \rho(\mathrm{A})$$

Luego, la dimensión del espacio solución de todo sistema lineal y homogéneo es igual al número de variables menos el rango de la matriz de coeficientes.

En particular, si $\rho(\mathrm{A}) = m$, entonces es $\dim \mathrm{S} = \dim \mathrm{N}(f) = 0$. En consecuencia

$$\mathrm{S} = \{\mathbf{0}\}$$

Es decir, si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema lineal y homogéneo es igual al número de variables, entonces dicho sistema admite como única solución la trivial.

Ejemplo 6-1

Interpretamos el siguiente sistema lineal en términos de una trasformación lineal y determinamos la dimensión de su imagen

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 \phantom{{}-x_3} + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

La matriz del sistema lineal es

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El vector de los términos independientes es

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

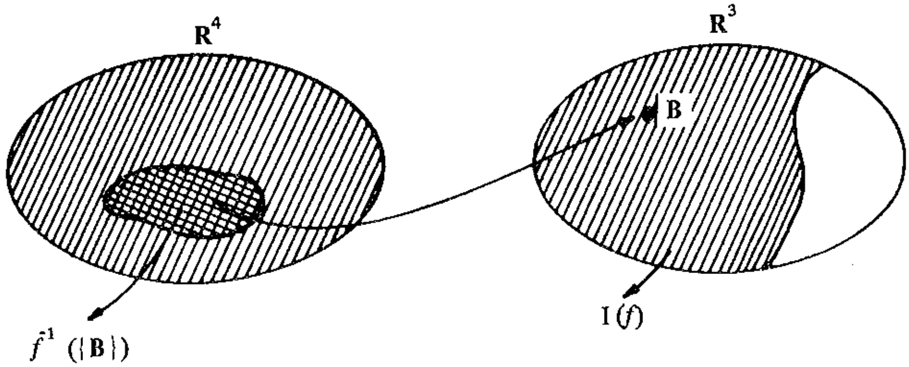
Definiendo la trasformación lineal

$$f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$$

mediante

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{A}\,\mathrm{X}$$

el sistema lineal propuesto nos conduce a la determinación de la preimagen de B



Para hallar dim $\mathrm{I}(f)$ obtenemos el ρ (A) por el método de Gauss Jordan

2	−1	1	1
1	−1	−1	2
3	−2	0	3
0	1	3	−3
1	−1	−1	2
0	1	3	−3
0	1	3	−3
1	0	2	−1
0	0	0	0

Resulta dim $\mathrm{I}(f) = \rho(\mathrm{A}) = 2$

Ejemplo 6-2

Si consideramos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

entonces la trasformación lineal asociada es la misma del ejemplo anterior. Resolver el sistema homogéneo significa determinar el núcleo de f, cuya dimensión es

$$\dim S = m - \rho(A) = 3 - 2 = 1$$

6.3. TEOREMA DE CRAMER

Si $A \in K^{n \times n}$ es no singular y $B \in K^n$, entonces el sistema lineal $A\,X = B$ admite solución única, y el valor de cada variable es el cociente entre el determinante que se obtiene al sustituir, en el determinante del sistema, la columna de coeficientes de la variable por la columna de los términos independientes, y el determinante del sistema.

Sea el sistema lineal

$$A\,X = B$$

Como A es no singular, premultiplicamos por su inversa

$$A^{-1}(A\,X) = A^{-1}\,B$$

Asociando

$$(A^{-1}\,A)\,X = A^{-1}\,B$$

Luego

$$I\,X = A^{-1}\,B$$

En consecuencia

$$X = A^{-1}\,B$$

es la única solución del sistema.

De acuerdo con 5.3.5., como $D(A) \neq 0$, las n columnas de A son linealmente independientes y constituyen una base de K^n. Por consiguiente, cualquiera que sea $B \in K^n$, existen escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, únicos, tales que

$$B = \sum_{i=1}^{n} x_i\,A_i$$

y por lo demostrado en el ejemplo 5-4 resulta

$$x_j = \frac{D(A_1\ A_2 \ldots B \ldots A_n)}{D(A)}$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, donde B es la columna de lugar j.

Los sistemas de n ecuaciones con n variables se llaman cuadrados, y si el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, entonces reciben el nombre de cramerianos.

Ejemplo 6-3

Resolvemos mediante el teorema de Cramer el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su inversa, determinada en el ejemplo 4-18, es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Como la solución es $X = A^{-1}\,B$, se tiene

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.4. COMPATIBILIDAD DE SISTEMAS LINEALES

6.4.1. Teorema de Rouche Frobenius o de Kronecker

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes tienen igual rango.

Sea el sistema lineal $A\,X = B$, donde $A \in K^{n \times m}$, $X \in K^{m \times 1}$ y $B \in K^{n \times 1}$, y sea A' la matriz de coeficientes ampliada con la columna de los términos independientes.

El teorema afirma que

$$A\,X = B \text{ es compatible} \Leftrightarrow \rho(A) = \rho(A')$$

En efecto:

$$\text{A X} = \text{B es compatible} \Leftrightarrow \exists\ \alpha \in \text{K}^{m\times 1}\ /\ \text{A}\,\alpha = \text{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \text{K}\ /\ (\text{A}_1\ \text{A}_2\ \ldots\ \text{A}_m)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix} = \text{B} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \text{K}\ /\ \text{B} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,\text{A}_i \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ B es combinación lineal de las m columnas de A $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{B} \in \text{S}_\text{C}(\text{A}) \Leftrightarrow \rho(\text{A'}) = \rho(\text{A})$

Por definición de sistema compatible, producto de matrices en forma particionada, definición de combinación lineal, definición de espacio columna de una matriz y de rango de una matriz.

Denotando con T el conjunto solución del sistema lineal A X = B, el teorema demostrado puede expresarse así:

$$\text{T} \neq \phi \Leftrightarrow \rho(\text{A}) = \rho(\text{A'})$$

En consecuencia

$$\text{T} = \phi \Leftrightarrow \rho(\text{A}) \neq \rho(\text{A'})$$

O sea, un sistema de ecuaciones lineales es incompatible si y sólo si los rangos de la matriz de coeficientes, y de la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, son distintos.

6.4.2. Conjunto solución de un sistema lineal compatible

Sea A X = B un sistema lineal compatible, es decir, tal que $\rho(\text{A}) = \rho(\text{A'})$, donde $\text{A} \in \text{K}^{n\times m}$, $\text{X} \in \text{K}^{m\times 1}$ y $\text{B} \in \text{K}^{n\times 1}$. Se presentan las siguientes situaciones:

1. El rango de ambas matrices es igual al número de variables.

Si $\rho(\text{A}) = \rho(\text{A'}) = m$, entonces las m columnas de A son linealmente independientes y, en consecuencia, B es combinación lineal única de tales columnas. Esto significa que existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \text{K}$, únicos, tales que

$$\text{B} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,\text{A}_i$$

O sea, $\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$ es la única solución del sistema.

2. El rango de ambas matrices es menor que el número de variables.

Supongamos que $\rho(A) = \rho(A') = r < m$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las filas y columnas linealmente independientes de A son las r primeras. Las r variables asociadas a las columnas linealmente independientes se llaman principales, y las m-r restantes se llaman secundarias. Las m-r ecuaciones no principales son combinaciones lineales de las r primeras, y el sistema es equivalente a un sistema lineal de r ecuaciones con m variables. Trasponiendo al segundo miembro de cada ecuación las m-r incógnitas secundarias, para cada sistema de valores asignados a éstas, se tiene un sistema lineal crameriano de r ecuaciones con r variables con solución única, ya que la matriz de coeficientes es no singular.

En este caso se dice que el sistema es indeterminado.

6.5. RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

El método de Gauss Jordan permite no sólo la discusión del sistema en el sentido de decidir si es compatible o no, sino también la resolución efectiva de él en el caso de compatibilidad. Esto significa determinar el conjunto solución.

Esencialmente se basa en la determinación de los rangos de A y de A', para lo cual se escribe a la derecha de la matriz A la columna formada con los términos independientes, y se opera de acuerdo con lo expuesto oportunamente.

Ejemplo 6-4

Discutimos y resolvemos por el método de Gauss Jordan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$$

1	1	1	2
2	−1	−1	1
1	2	−1	−3
1	1	1	2
0	−3	−3	−3
0	1	−2	−5
1	0	3	7
0	0	−9	−18
0	1	−2	−5
1	0	0	1
0	0	1	2
0	1	0	−1

$\rho(A) = \rho(A') = 3$

La solución es

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 2$$

O sea, el vector

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Desde el punto de vista geométrico, cada ecuación es la representación analítica de un plano, y la solución única caracteriza al vértice del triedro que forman dichos planos.

Ejemplo 6-5

Verificamos que el siguiente sistema es incompatible:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 \qquad + x_3 = 1 \end{cases}$$

Investigamos para ello, los rangos de A y de A':

1	1	−1	1
1	−1	3	−3
1	0	1	1
1	1	−1	1
0	−2	4	−4
0	−1	2	0
1	0	1	1
0	0	0	−4
0	1	−2	0
1	0	1	0
0	0	0	1
0	1	−2	0

El único elemento que puede ser tomado como pivote es −4. Esto significa que el rango de A' es 3, pero el rango de A es 2, y en consecuencia el sistema es incompatible. La última etapa es innecesaria y ha sido realizada para poner en evidencia los vectores canónicos.

Ejemplo 6-6

Determinamos una base del espacio solución del sistema lineal y homogéneo

$$(A - \lambda I) X = 0$$

para cada λ tal que

$$D(A - \lambda I) = 0$$

siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $X \in R^{3\times 1}$.

Resolvemos primero la ecuación $D(A - \lambda I) = 0$, o sea

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Como la matriz es triangular, el determinante de la misma es el producto de los elementos de su diagonal

$$(1-\lambda)^2 (2-\lambda) = 0$$

Las raíces son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = 2$$

1. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se obtiene el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} = \\ = \\ = \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\begin{cases} 0x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\forall x_1 \in \mathbf{R} \text{ se verifica}$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

O sea

$$x_2 = -x_3$$

Las infinitas soluciones son las ternas del tipo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta \\ \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base del espacio solución está formada por los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al mismo resultado se llega utilizando el método de Gauss Jordan

0	1	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Como $\rho(A) = \rho(A') = 1$ y este valor es menor que el número de variables, el sistema tiene infinitas soluciones. La dimensión del espacio solución es

$$3 - \rho(A) = 2$$

Las dos primeras ecuaciones caracterizan un plano que pasa por el origen y que contiene al eje x_1. La tercera ecuación se satisface para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, o sea, representa a $\mathbf{R}^3$. La intersección de estos dos subespacios es el plano de ecuación $x_2 + x_3 = 0$.

Ejemplo 6-7

Considerando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resolvemos el sistema lineal

$$\begin{cases} X^t A = X^t \\ \vec{1}^t X = 1 \end{cases}$$

Efectuamos primero las operaciones matriciales

$$1.\ (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3)$$

$$\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \quad \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) = (x_1\ x_2\ x_3)$$

Por igualdad de matrices

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_2 \\ \qquad\quad \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = x_3 \end{cases}$$

Eliminamos los denominadores

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12x_1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12x_2 \\ \qquad\ 3x_2 + 2x_3 = \ 6x_3 \end{cases}$$

Reduciendo términos

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ \qquad\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2.\ \vec{1}^t\,X = 1 \Rightarrow (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Teniendo en cuenta 1. y 2., el sistema a resolver es

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0 \\ \qquad\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 1 \end{cases}$$

Aplicamos Gauss Jordan

6	-3	-4	0
6	-9	4	0
0	3	-4	0
1	1	1	1
0	-9	-10	-6
0	-15	-2	-6
0	3	-4	0
1	1	1	1
0	0	-22	-6
0	0	-22	-6
0	1	$-\frac{4}{3}$	0
1	0	$\frac{7}{3}$	1
0	0	1	$\frac{3}{11}$
0	0	0	0
0	1	0	$\frac{4}{11}$
1	0	0	$\frac{4}{11}$

Se tiene: $\rho(A) = \rho(A') = 3$ y la única solución es

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{11} \\ x_2 = \dfrac{4}{11} \\ x_3 = \dfrac{3}{11} \end{cases}$$

La matriz A de este ejemplo es tal que sus elementos son no negativos y la suma de los elementos de cada fila vale 1. Esto significa que los vectores filas caracterizan una distribución discreta de probabilidades, y por tal motivo la matriz se llama estocástica.

El vector solución define también una distribución de probabilidades, llamada estacionaria. Este tipo de distribuciones se estudia en las cadenas finitas de Markov.

6.6. SISTEMAS HOMOGENEOS

6.6.1. Espacio solución de un sistema lineal y homogéneo

Dado el sistema lineal y homogéneo

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \mathbf{0}$$

donde $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times m}$, $\mathrm{X} \in \mathrm{K}^{m \times 1}$ y $\mathbf{0} \in \mathrm{K}^{n \times 1}$, como $\rho(\mathrm{A}) = \rho(\mathrm{A'}) = r$, ocurre que tal sistema siempre es compatible, de acuerdo con 6.4.1.

En cuanto al espacio solución del mismo, son válidas las conclusiones obtenidas en 6.4.2., o sea

1. $r = m \Rightarrow$ existe solución única $\Rightarrow \mathrm{S} = \{\mathbf{0}\}$

En este caso la única solución del sistema es la trivial.

2. $r < m \Rightarrow$ el sistema es indeterminado.

6.6.2. Sistemas homogéneos cuadrados

Sea el sistema lineal y homogéneo

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \mathbf{0}$$

donde $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times n}$, $\mathrm{X} \in \mathrm{K}^{n \times 1}$ y $\mathbf{0} \in \mathrm{K}^{n \times 1}$.

Propiedad

Un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n variables tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo.

1. Si $\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \mathbf{0}$, con $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times n}$, tiene solución única, entonces es $\rho(\mathrm{A}) = n$. En consecuencia, las n columnas de A son linealmente independientes, y de acuerdo con el ejercicio 5-22 resulta $\mathrm{D}(\mathrm{A}) \neq 0$.

2. Supongamos que $\mathrm{D}(\mathrm{A}) \neq 0$. Según 5.3.5., las n columnas de A constituyen una base de K^n. Por lo tanto, $\mathbf{0}$ es combinación lineal única y trivial de tales vectores columnas.

Los teoremas contrarrecíprocos de 1. y 2. nos permiten afirmar que un sistema lineal y homogéneo de n ecuaciones con n variables es indeterminado si y sólo si el determinante de los coeficientes es nulo.

Ejemplo 6-8

Determinamos los espacios soluciones de los siguientes sistemas homogéneos y cuadrados:

i) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Luego la única solución es

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

y

$$S = \{ \mathbf{0} \}$$

Los tres planos forman un triedro cuyo vértice es el origen.

ii) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 \quad + x_3 = 0 \end{cases}$

Como

$$D(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ el sistema es indeterminado.}$$

Lo resolvemos según Gauss Jordan

1	−1	3	0
1	1	−1	0
1	0	1	0
1	−1	3	0
0	2	−4	0
0	1	−2	0
1	0	1	0
0	0	0	0
0	1	−2	0

Se tiene:

$$\begin{cases} x_1 \quad + \; x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Despejando las variables principales

$$x_1 = -x_3$$
$$x_2 = \;\; 2x_3$$

Las infinitas soluciones están dadas por

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \;\; 2\alpha \\ x_3 = \;\;\;\; \alpha \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbf{R}$$

El espacio solución es la recta de ecuaciones

$$\frac{x_1}{-1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{1}$$

O sea

$$S = \{ (-\alpha, 2\alpha, \alpha) \,/\, \alpha \in \mathbf{R} \}$$

Geométricamente, este sistema admite la siguiente interpretación: las ecuaciones corresponden a tres planos que pasan por el origen y forman un haz cuyo eje es el espacio solución, o sea, la recta mencionada.

6.7. CONJUNTO SOLUCION DE UN SISTEMA LINEAL

Sea T el conjunto solución del sistema lineal $A\,X = B$, y sea S el espacio solución del sistema lineal y homogéneo asociado. Si t es una solución particular del sistema $A\,X = B$, y $t + S$ denota la suma de esa solución particular y todas las soluciones del sistema homogéneo asociado, entonces se verifica que

$$T = t + S$$

En efecto:

1. Consideremos cualquier solución u de $A\,X = B$, y sea t una solución particular de este sistema.

$$u \in T \wedge t \in T \Rightarrow A(u - t) = Au - At = B - B = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u - t \in S \Rightarrow u - t = s \wedge s \in S \Rightarrow u = t + s \wedge s \in S \Rightarrow u \in t + S$$

O sea

$$T \subset t + S \quad (1)$$

2. Sean: t, una solución particular de $AX = B$, y s cualquier solución de $A\,X = \mathbf{0}$.

$$u = t + s \in t + S \Rightarrow Au = A(t + s) = At + As = B + \mathbf{0} = B \Rightarrow u \in T.$$

Luego

$$t + S \subset T \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$T = t + S$$

En consecuencia, toda solución de un sistema lineal es igual a una solución particular de dicho sistema, más una solución del sistema homogéneo asociado. En otras palabras, el conjunto solución de un sistema lineal es igual a la suma de una solución particular con todas las soluciones del sistema lineal y homogéneo correspondiente.

Ejemplo 6-9

Interpretamos geométricamente el significado del teorema anterior considerando el sistema lineal de una ecuación con dos variables

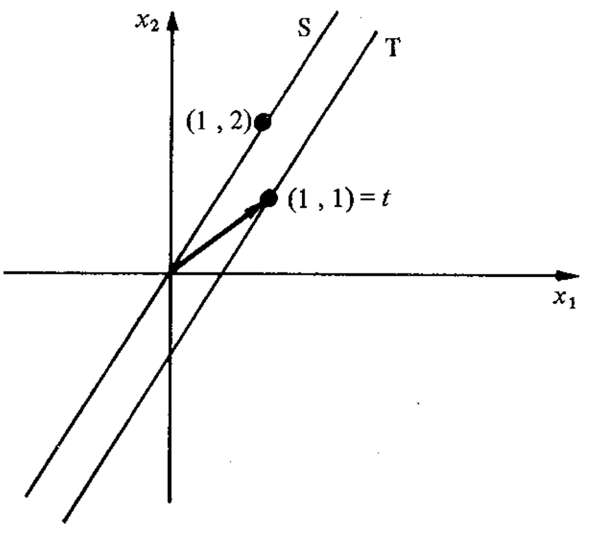
$$2x_1 - x_2 = 1$$

En este caso es $A = (2 \quad -1)$ y $A' = (2 \quad -1 \quad 1)$. Ambas matrices tienen rango 1 y el sistema tiene infinitas soluciones.

El sistema homogéneo asociado es

$$2x_1 - x_2 = 0$$

y corresponde a una recta que pasa por el origen. Una solución particular del sistema dado es $(1\ ,\ 1) = t$. Sumando a t los vectores correspondientes a todos los puntos de la recta de ecuación $2x_1 - x_2 = 0$, se obtiene la recta T, paralela a S.



Ejemplo 6-10

Dado el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

determinamos: el espacio solución del sistema homogéneo correspondiente, una base y la dimensión de éste, una solución particular y el conjunto solución de aquél.

1	1	1	1	1	0	7
3	2	1	1	−3	0	−2
0	1	2	2	6	0	23
5	4	3	3	−1	0	12
1	1	1	1	1	0	7
0	−1	−2	−2	−6	0	−23
0	1	2	2	6	0	23
0	−1	−2	−2	−6	0	−23
1	0	−1	−1	−5	0	−16
0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	2	6	0	23
0	0	0	0	0	0	0

$\rho(A) = \rho(A') = 2 \Rightarrow$ el sistema dado tiene infinitas soluciones.

Resolvemos el sistema homogéneo, cuyo espacio solución tiene dimensión 3.

$$5 - \rho(A) = 5 - 2 = 3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

Trasponiendo las variables secundarias

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$$

El espacio solución está dado por

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta + 5\gamma \\ x_2 = -2\alpha - 2\beta - 6\gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

cualesquiera que sean α, β y $\gamma \in \mathbf{R}$.
Luego

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base de S está formada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos una solución particular del sistema dado haciendo $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$$t = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución general es

$$u = \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O sea

$$\begin{cases} x_1 = -16 + \alpha + \beta + 5\gamma \\ x_2 = 23 - 2\alpha - 2\beta - 6\gamma \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$$

6.8. RESOLUCION DE SISTEMAS SIMETRICOS POR EL METODO DE LA RAIZ CUADRADA

No expondremos en este texto los métodos iterativos para la resolución de sistemas lineales o la inversión de matrices. Estos métodos requieren el análisis de cuestiones de convergencia, y mediante iteraciones sucesivas se obtienen soluciones con la aproximación que se desee. A diferencia de éstos, los métodos directos o exactos se realizan mediante un número finito de operaciones aritméticas elementales. Tal es el caso del método de Gauss Jordan.

Analizaremos aquí el método directo de la raíz cuadrada para la resolución de sistemas lineales cuadrados con matriz de coeficientes simétrica y primer elemento no nulo.

Sea entonces

$$A\,X = B \quad (1)$$

tal que $A = A^t$ en $K^{n\times n}$, $X \in K^{n\times 1}$, $B \in K^{n\times 1}$ y $a_{11} \neq 0$.

Probaremos que existe una matriz triangular T tal que

$$A = T^t\,T \quad (2)$$

Proponiendo la forma escalar de (2), debe ser

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices, después de efectuar el producto indicado, resulta:

1. Considerando la primera fila:

$$t_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow t_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

Si $j > 1$, entonces

$$t_{11}\,t_{1j} = a_{1j}$$

Luego

$$t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \Rightarrow t_{1j} = \frac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}$$

O sea, la primera fila de T se deduce de la de A de la siguiente manera: el primer elemento es la raíz cuadrada del primero de A, y los restantes se obtienen dividiéndolos por esta raíz cuadrada.

2. Considerando cualquier fila distinta de la primera, es decir, tal que $i > 1$, se tiene:

$$j = i \Rightarrow a_{ii} = \sum_{h=1}^{n} t_{hi}^2 = \sum_{h=1}^{i} t_{hi}^2 = t_{ii}^2 + \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}^2 \Rightarrow t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}^2}$$

$$j > i \Rightarrow a_{ij} = \sum_{h=1}^{n} t_{hi}\, t_{hj} = \sum_{h=1}^{i} t_{hi}\, t_{hj} = t_{ii}\, t_{ij} + \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}\, t_{hj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}\, t_{hj}}{t_{ii}}$$

La determinación de los elementos de la matriz triangular se realiza en una sola etapa y por filas sucesivas.

La traducción de las fórmulas obtenidas es la siguiente: todo elemento diagonal, a partir de la segunda fila, es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el elemento a_{ii} correspondiente y la suma de los cuadrados de los elementos de la misma columna de la matriz triangular. Todo elemento no diagonal t_{ij} es igual a la diferencia entre a_{ij} y la suma de los productos, fila por fila, de los elementos de las columnas correspondientes, dividida por el elemento t_{ii} de la diagonal.

Retomando el propósito original, de (1) y (2) se deduce

$$T^t\, T\, X = B$$

Haciendo

$$T^t\, K = B \quad (3)$$

se determina el vector K, y considerando

$$T\, X = K \quad (4)$$

conocido K, se obtiene X.

La determinación de las componentes del vector K se efectúa de la misma manera que las columnas de la matriz T. En efecto, considerando (3), es

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

de donde resulta, por producto e igualdad de matrices:

1. $t_{11}\,k_1 = b_1$, o sea

$$k_1 = \frac{b_1}{t_{11}}$$

2. $$i > 1 \Rightarrow b_i = \sum_{h=1}^{n} t_{hi}\,k_h = \sum_{h=1}^{i} t_{hi}\,k_h =$$

$$= t_{ii}\,k_i + \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}\,k_h \Rightarrow k_i = \frac{b_i - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}\,k_h}{t_{ii}}$$

Finalmente, obtenidos T y K en una única etapa, se resuelve fácilmente el sistema triangular

$$\mathrm{T\,X = K}$$

Ejemplo 6-11

Resolvemos el siguiente sistema simétrico por el método de la raíz cuadrada:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = -8 \\ 2x_3 - x_2 + 33x_3 = 4 \end{cases}$$

Trasformamos, de acuerdo con el esquema propuesto, las filas de la matriz de coeficientes ampliada con la columna de los términos independientes:

1	2	2	0
2	5	– 1	– 8
2	– 1	33	4
1	2	2	0
0	1	– 5	– 8
0	0	2	– 18

$$t_{23} = \frac{a_{23} - t_{12}\,t_{13}}{t_{22}} = \frac{-1 - 2\,.\,2}{1} = -5$$

$$k_3 = \frac{b_3 - t_{13}k_1 - t_{23}\,k_2}{t_{33}} =$$

$$= \frac{4 - 2\,.\,0 - (-5)(-8)}{2} = -18$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - 5x_3 = -8 \\ \qquad\qquad 2x_3 = -18 \end{cases}$$

Luego

$$x_3 = -9 \qquad x_2 = -53 \qquad x_1 = 124$$

La solución es

$$X = \begin{pmatrix} 124 \\ -\ 53 \\ -\ \ 9 \end{pmatrix}$$

Las condiciones para que el método sea aplicable son: $t_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 6-12

Resolvemos por el mismo método

$$\begin{cases} -\ x_1 + \ x_2 - 2x_3 = \ \ 2 \\ \ \ x_1 \qquad + 3x_3 = -5 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

No es necesario multiplicar la primera ecuación por -1 para obtener elementos reales en T.

-1	1	-2	2
1	0	3	-5
-2	3	-2	-1
i	$-i$	$2i$	$-2i$
0	1	1	-3
0	0	1	-2

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{-1} = i$$

Entonces

$$x_3 = -2 \qquad x_2 = -1 \qquad x_1 = 1$$

6.9. METODO DEL ORLADO

Este método, que es directo, permite obtener la inversa de una matriz no singular $M \in K^{n \times n}$. Particionamos M de acuerdo con el esquema

$$n = (n-1) + 1$$

para filas y para columnas, y se tiene

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde $A \in K^{(n-1)\times(n-1)}$, $B \in K^{(n-1)\times 1}$, $C \in K^{1\times(n-1)}$ y $(a_{nn}) \in K^{1\times 1}$.

Suponemos conocida la inversa A^{-1} del primer bloque y proponemos, para la inversa de M, el mismo esquema de partición.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_n \in K - \{0\}$

Considerando que

$$M\,M^{-1} = I$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & N \\ N & 1 \end{pmatrix}$$

O sea

$$A\,X + BZ = I \qquad (1)$$

$$A\,Y + \frac{B}{\alpha_n} = N \qquad (2)$$

$$C\,X + a_{nn}\,Z = N \qquad (3)$$

$$C\,Y + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1 \qquad (4)$$

De (2)

$$Y = -\frac{A^{-1}\,B}{\alpha_n} \quad (5)$$

Sustituimos (5) en (4):

$$-\frac{C\,A^{-1}\,B}{\alpha_n} + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1 \Rightarrow -\,CA^{-1}\,B + a_{nn} = \alpha_n$$

Luego

$$\alpha_n = a_{nn} - C\,A^{-1}\,B \quad (6)$$

De (1)

$$A\,X = I - BZ \Rightarrow X = A^{-1} - A^{-1}\,B\,Z \quad (7)$$

Teniendo en cuenta esta relación, (6) y (3), es

$$C\,(A^{-1} - A^{-1}\,BZ) + a_{nn}\,Z = N$$

$$C\,A^{-1} - C\,A^{-1}\,B\,Z + a_{nn}\,Z = N$$

$$C\,A^{-1} - (a_{nn} - \alpha_n)\,Z + a_{nn}\,Z = N$$

$$C\,A^{-1} - a_{nn}\,Z + \alpha_n\,Z + a_{nn}\,Z = N$$

$$\alpha_n\,Z = -\,C\,A^{-1}$$

$$Z = \frac{-\mathrm{C}\,\mathrm{A}^{-1}}{\alpha_n} \quad (8)$$

De (7) y (8)

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} + \frac{\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B}\,\mathrm{C}\,\mathrm{A}^{-1}}{\alpha_n} \quad (9)$$

Entonces

$$\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}^{-1} + \dfrac{\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B}\,\mathrm{C}\,\mathrm{A}^{-1}}{\alpha_n} & -\dfrac{\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B}}{\alpha_n} \\ -\dfrac{\mathrm{C}\,\mathrm{A}^{-1}}{\alpha_n} & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Se trata de un caso particular de la inversión por partición estudiada en 4.18.

Este método se utiliza para invertir matrices por orlados sucesivos, construyendo las inversas de

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \text{ etcétera}$$

Conociendo la inversa de $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{(n-1)\times(n-1)}$, se calcula $\mathrm{M}^{-1} \in \mathrm{K}^{n\times n}$, para lo cual es preciso obtener:

1.
$$-\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

2.
$$-\mathrm{C}\,\mathrm{A}^{-1} = (c_{n1}\ c_{n2}\ \dots\ c_{n,n-1})$$

3.
$$\alpha_n = a_{nn} - \mathrm{C}\,\mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{B} = a_{nn} + \mathrm{C}\begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n-1,n} \end{pmatrix} = a_{nn} + (a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{n,n-1})\begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n-1,n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n = a_{nn} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\, b_{jn}$$

También:

$$\alpha_n = a_{nn} - \mathrm{C\,A^{-1}\,B} = a_{nn} + (c_{n,1}\ c_{n2}\ \ldots\ c_{n,n-1}) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_n = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\, c_{ni}$$

4. Los elementos x_{ij} de la submatriz $\mathrm{A^{-1}} + \dfrac{\mathrm{A^{-1}\,B\,C\,A^{-1}}}{\alpha_n}$ son, llamando x'_{ij} a los correspondientes elementos de $\mathrm{A^{-1}}$:

$$x_{ij} = x'_{ij} + \frac{b_{in}\, c_{nj}}{\alpha_n} \quad \text{si } i \leqslant n-1,\, j \leqslant n-1$$

Además

$$x_{in} = \frac{b_{in}}{\alpha_n} \qquad \text{si } i \leqslant n-1$$

$$x_{nj} = \frac{c_{nj}}{\alpha_n} \qquad \text{si } j \leqslant n-1$$

$$x_{nn} = \frac{1}{\alpha_n}$$

El siguiente esquema denota una etapa del proceso:

$\mathrm{A^{-1}}$	B	$-\mathrm{A^{-1}\,B}$
C	a_{nn}	
$-\mathrm{C\,A^{-1}}$		α_n

Ejemplo 6-12

Calculamos la inversa de A por el método del orlado, siendo

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el esquema anterior, y aplicando las fórmulas desarrolladas, resulta:

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & -1 & \\
2 & -1 & 1 & M \\
-1 & 1 & 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & -2 \\
2 & -1 & \\
-2 & & 5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc|l}
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -1 & -\frac{1}{5} & \\
\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & \frac{3}{5} & \rightarrow A^{-1} \rightarrow -A^{-1} B \\
-1 & 1 & 2 & & \\
 & & & & \rightarrow -C A^{-1} \\
-\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & & \frac{14}{5} & \rightarrow \alpha_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
\frac{3}{14} & \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \\
\frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & M^{-1} \\
-\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{5}{14} &
\end{array}
$$

Conocida M^{-1} es posible resolver sistemas del tipo

$$M X = K$$

donde M es no singular.

TRABAJO PRACTICO VI

6-13. Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ una trasformación lineal caracterizada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ respecto de la base canónica en cada espacio. Determinar la preimagen por f del vector $(-1, 1)$.

6.14. Resolver, por el método de Gauss reducido, los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y + z = 6 \\ 3x - 2y - 8z = 7 \\ 4x + 5y - 3z = 17 \end{cases}$

El método de Gauss reducido consiste en trasformar en ceros los elementos a_{ij} tales que $i > j$, y en unos los elementos a_{ii}.

6-15. Determinar la dimensión sobre **R** del espacio solución de cada uno de los siguientes sistemas homogéneos:

1. $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

6-16. Obtener una base del espacio solución en cada uno de los casos del ejercicio anterior, en los casos de dimensión positiva.

6-17. Hallar la dimensión y una base del espacio solución sobre **C** en cada uno de los siguientes casos:

1. $\begin{cases} ix + y - z = 0 \\ iy + z = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1+i)x - iy + 2z = 0 \\ ix + iy - z = 0 \end{cases}$

6-18. En el anillo de las clases de restos módulo 3, determinar una base del espacio solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \overline{0} \\ x_1 + \overline{2}x_2 = \overline{0} \end{cases}$$

6-19. Discutir y hallar el conjunto solución de

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -5 \\ 3x_1 + x_2 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 = -8 \end{cases}$$

6-20. Resolver por el método de Cramer el sistema del ejercicio 6-14. 1.

6-21. Resolver el sistema homogéneo $X^t (A - I) = 0$, donde $X \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

6-22. Obtener el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

6-23. Determinar si existe $X \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ tal que $X A = B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6-24. Discutir y hallar los conjuntos soluciones de los siguientes sistemas:

1. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

6-25. En el caso de compatibilidad, obtener el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = -6 \end{cases}$$

en términos de una solución particular y del espacio solución del sistema homogéneo asociado.

6-26. Siendo

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

obtener λ tal que $D(A - \lambda I) = 0$. Después resolver el sistema $(A - \lambda I)\, X = 0$ para cada valor de λ.

6-27 Determinar para qué valores de k el siguiente sistema tiene soluciones distintas de la trivial:

$$\begin{cases} x + (k+1)y + z = 0 \\ x + y + (k+1)z = 0 \\ (k+1)x + y + z = 0 \end{cases}$$

En cada caso, estudiar el espacio solución, e interpretar geométricamente.

6-28. Determinar la inversa de M por el método del orlado, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6-29. Resolver el sistema $\mathbf{X}^t \mathbf{A} = \mathbf{X}^t$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

6-30. Obtener todas las soluciones de

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$

sabiendo que

$$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

6-31. Discutir el siguiente sistema según los valores de α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + 2z = 1 + \alpha \\ x + \alpha y - z = -1 \\ 3x + y + z = \alpha \end{cases}$$

6-32. Estudiar el sistema

$$\begin{cases} 2x - \alpha y + z = -2\alpha + 5 \\ x + y - \alpha z = 1 \\ 4x + y - \alpha z = \alpha \end{cases}$$

para los distintos valores de α

6-33. Discutir la compatibilidad de

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + x_3 = a + b \\ bx_1 + ax_2 + \quad + x_4 = a - b \\ x_2 + bx_3 + ax_4 = a + 1 \\ x_1 + ax_3 + bx_4 = a - 1 \end{cases}$$

6-34. Determinar el sistema lineal cuyo espacio solución admita la base

$$\{(3, -2, 8) \quad , \quad (4, -11, 7)\}$$

6-35. Probar que el sistema

$$\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

tiene solución única si $abc \neq 0$. Hallar la solución.

6-36. Resolver por el método de la raíz cuadrada

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Capítulo 7

PRODUCTO INTERIOR EN ESPACIOS VECTORIALES GEOMETRIA VECTORIAL.

7.1. INTRODUCCION

En este capítulo introducimos, sobre la base de un producto interior, el concepto de métrica en un espacio vectorial real. Se estudian temas relativos a distancias, longitudes, ortogonalidad y ángulos entre vectores. Se desarrolla el procedimiento de Gram-Schmidt para la construcción de bases ortonormales en espacios de dimensión finita. Después de dar una idea del espacio afín $\mathbf{R}^n$, se tratan algunos temas básicos de geometría: rectas, planos, superficies y curvas elementales.

7.2. ESPACIO VECTORIAL EUCLIDIANO

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.

7.2.1. Producto interior

El símbolo $\langle x , y \rangle$ se lee: *producto interior entre los vectores* x *e* y.

Definición

Producto interior en V, es toda función

$$\langle\, ,\rangle : V^2 \to \mathbf{R}$$

que satisface las condiciones de simetría, de linealidad respecto del primer argumento y de definida positiva:

i) $\langle x , y \rangle = \langle y , x \rangle$ cualesquiera que sean x e y en V.

ii) $\langle x + y , z \rangle = \langle x , z \rangle + \langle y , z \rangle$ cualesquiera que sean x, y y z en V.

iii) $\langle \alpha x , y \rangle = \alpha \langle x , y \rangle \quad \forall\, x \in V , \forall\, y \in V , \forall\, \alpha \in \mathbf{R}$.

iv) $\langle x , x \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, x \in V$

$\langle x , x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Todo producto interior en un espacio vectorial real asigna a cada par de vectores un único escalar real.

Espacio euclidiano es todo espacio vectorial real con producto interior.

La adjunción de un producto interior a un espacio vectorial permite establecer una métrica en él; o sea, los conceptos de distancia entre pares de vectores, módulo de un vector, ortogonalidad y ángulo entre dos vectores. Estas nociones no son intrínsecas al espacio vectorial, sino que dependen del producto interior que en él se considere. O sea, dos vectores de un espacio, ortogonales con un producto interior, pueden perder este carácter si se define otro producto interior.

Ejemplo 7-1

En $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, .)$, la función

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

definida por

$$\langle X , Y \rangle = X^t\, Y \quad (1)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

es un producto interior. Para probar esta afirmación verificamos los axiomas de la definición.

i) $\langle X , Y \rangle = X^t\, Y = (X^t\, Y)^t = Y^t\, X = \langle Y , X \rangle$

Por (1), por ser X^tY un escalar, por traspuesta de un producto y por (1).

ii) $\langle X + Y , Z \rangle = (X + Y)^t\, Z = (X^t + Y^t)\, Z = X^t\, Z + Y^t\, Z = \langle X , Z \rangle + \langle Y , Z \rangle$

Por (1), traspuesta de la suma, distributividad y (1).

iii) $\langle \alpha\, X , Y \rangle = (\alpha\, X)^t\, Y = \alpha\, X^t\, Y = \alpha \langle X , Y \rangle$

Por (1), traspuesta de un escalar por una matriz y (1).

iv) $\langle X , X \rangle = X^t\, X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant O$

Por (1), producto de matrices y suma de números reales no negativos.
Además

$$\langle X , X \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \ , \forall i \Leftrightarrow X = O$$

La definición (1) caracteriza un producto interior en $\mathbf{R}^n$, llamado también producto interior usual. Efectuando la operación indicada en (1) es

$$\langle X , Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

O sea, el producto interior de dos n-uplas de números reales es igual a la suma de los productos de las componentes correspondientes.
En el caso $n = 2$ esta definición se traduce en

$$\langle X , Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Ejemplo 7-2.

Consideremos $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

La función

$$\langle , \rangle : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

tal que

$$\langle X , Y \rangle = X^t A Y \quad (1)$$

es un producto interior. En efecto

i) $\langle X , Y \rangle = X^t A Y = (X^t A Y)^t = Y^t A^t X = Y^t A X = \langle Y , X \rangle$

Por (1), por ser $X^t A Y$ un escalar, por traspuesta de un producto, por ser $A^t = A$ y por (1).

ii) $\langle X + Y , Z \rangle = (X + Y)^t A Z = (X^t + Y^t) A Z = X^t A Z + Y^t A Z = \langle X , Z \rangle + \langle Y , Z \rangle$

iii) $\langle \alpha X , Y \rangle = (\alpha X)^t A Y = \alpha X^t A Y = \alpha \langle X , Y \rangle$

iv) $\langle X , X \rangle = X^t A X = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 - 2x_2 \;\; -2x_1 + 5x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$$= (x_1 - 2x_2) x_1 + (-2x_1 + 5x_2) x_2 = x_1^2 - 4 x_1 x_2 + 5x_2^2 =$$

$$= x_1^2 - 4 x_1 x_2 + 4 x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geqslant 0$$

Además

$$\langle X , X \rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2 x_2)^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \wedge x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

Ejemplo 7-3.

Sea $\mathbf{C} [-1 , 1]$ el conjunto de las funciones reales continuas definidas en el intervalo cerrado de extremos -1 y 1.
El lector puede verificar, considerando el espacio vectorial

$$(\mathbf{C} [-1 , 1] , + , \mathbf{R}, .)$$

que la función definida por

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}(x)\, dx$$

caracteriza un producto interior en dicho espacio. Para ello es suficiente probar que se cumplen los axiomas de la definición teniendo en cuenta propiedades elementales de la integral definida.

7.2.2. Producto interior de dos combinaciones lineales

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio con producto interior, y sean las combinaciones lineales

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathbf{x}_i \qquad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mathbf{y}_j$$

donde

$$\alpha_i\,, \beta_j \in K \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i\,, \mathbf{y}_j \in V$$

De acuerdo con los axiomas de la definición, se tiene

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \mathbf{x}_i\,, \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mathbf{y}_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i\, \mathbf{x}_i\,, \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mathbf{y}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{x}_i\,, \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mathbf{y}_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \sum_{j=1}^{m} \beta_j\, \mathbf{y}_j\,, \mathbf{x}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \beta_j \langle \mathbf{y}_j\,, \mathbf{x}_i \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i\, \beta_j \langle \mathbf{x}_i\,, \mathbf{y}_j \rangle$$

Hemos aplicado sucesivamente: ii), iii), i), ii), iii), propiedades de la sumatoria e i).
En particular es

$$\langle \alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}\,, \alpha\mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \alpha^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \alpha \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle +$$
$$+ \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \alpha^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\,\alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$$

7.2.3. Propiedad

En todo espacio con producto interior, el producto interior de cualquier vector y el vector nulo es cero.

En efecto, por ser 0 neutro para la suma en $\mathbf{R}$, por el axioma A_3 de espacio vectorial y por el axioma de linealidad del producto interior, se tiene

$$0 + \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle =$$
$$= \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle$$

Por ley cancelativa en $(\mathbf{R}, +)$ resulta

$$0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle$$

Luego

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{0} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

7.2.4. Módulo o longitud de un vector

Definición

Módulo de un vector en un espacio con producto interior es la raíz cuadrada no negativa del producto interior de dicho vector por sí mismo.

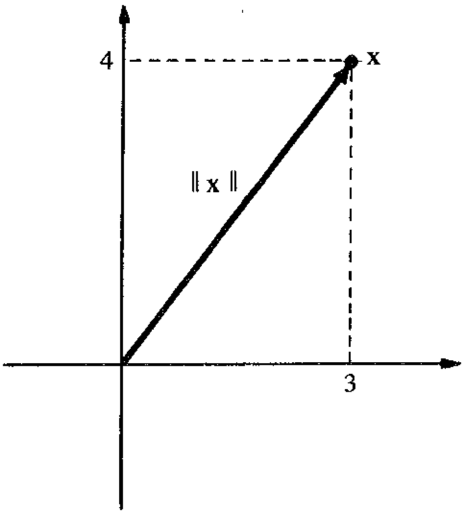
El símbolo $\|\mathbf{x}\|$ se lee: *módulo o longitud de* $\mathbf{x}$.

De acuerdo con la definición es

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

En $\mathbf{R}^2$, con la definición dada en el ejemplo 7-1, si $\mathbf{x} = (3,4)$, entonces

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



Al módulo de $\mathbf{x}$ se lo llama también norma de $\mathbf{x}$.

Se verifica que el cuadrado del módulo de todo vector es igual al producto interior de dicho vector consigo mismo, es decir

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

Definición

Distancia entre dos vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, en un espacio con producto interior, es el módulo de su diferencia.

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

El lector puede comprobar que esta definición satisface los axiomas de la función distancia.

7.2.5. Módulo del producto entre un escalar y un vector

En todo espacio con producto interior, el módulo del producto entre un escalar y un vector es igual al valor absoluto del escalar por el módulo del vector.

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$$

En efecto:

$$\|\alpha \mathbf{x}\|^2 = \langle \alpha \mathbf{x} , \alpha \mathbf{x} \rangle = \alpha^2 \langle \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle =$$
$$= |\alpha|^2 \, \|\mathbf{x}\|^2 = (|\alpha| \, \|\mathbf{x}\|)^2$$

O sea

$$\|\alpha \mathbf{x}\|^2 = (|\alpha| \, \|\mathbf{x}\|)^2$$

Y como las bases son no negativas resulta

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$$

El producto de un vector no nulo por el recíproco de su módulo, o lo que es lo mismo, el cociente entre un vector no nulo y su módulo, es un vector de módulo 1.

En efecto, sea $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Considerando $\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ se verifica

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \right| \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{x}\| = 1$$

Si $\mathbf{x} = (1, -1, \sqrt{2})$, entonces es, con el producto interior usual,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

y resulta

$$\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

un vector de módulo 1, llamado *vector unitario*

7.3. ORTOGONALIDAD

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio vectorial con producto interior.

Definición

Dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto interior es nulo.

El símbolo $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ se lee: $\mathbf{x}$ *es ortogonal a* $\mathbf{y}$.

Entonces

$$\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = 0$$

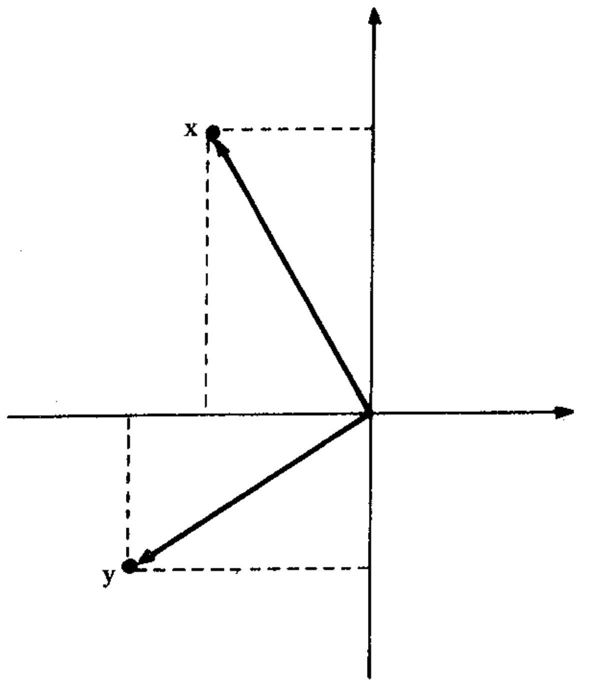
Ejemplo 7-4.

1. En $\mathbf{R}^2$, con el producto interior usual, los vectores

$$\mathbf{x} = (-2\,,3) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (-3\,,-2)$$

son ortogonales, pues

$$\langle \mathbf{x}\,,\mathbf{y}\,\rangle = (-2)(-3) + 3\,(-2) = 0$$



2. Determinamos $a \in \mathbf{R}$ para que los vectores

$$\mathbf{x} = (-3a, -4, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (-a, a, 1)$$

sean ortogonales, con el producto interior habitual.
De acuerdo con la condición de ortogonalidad, hay que determinar a de modo que

$$\langle \mathbf{x}\,,\mathbf{y}\,\rangle = 0$$

O sea

$$(-3\,a)\,(-a) + (-4)\,a + 1.1 = 0$$

$$3\,a^2 - 4\,a + 1 = 0$$

Las raíces son:

$$a' = 1 \quad \text{y} \quad a'' = \frac{1}{3}$$

Los pares de vectores de $\mathbf{R}^3$ que satisfacen la condición son

$$\mathbf{x}' = (-3, -4, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}' = (-1, 1, 1)$$

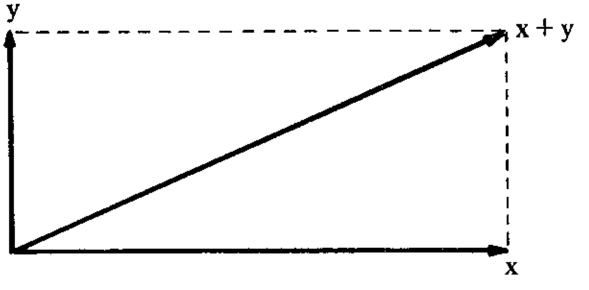
y

$$\mathbf{x}'' = (-1, -4, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}'' = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$$

Ejemplo 7-5

Demostramos el teorema de Pitágoras: si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos vectores ortogonales, entonces

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$



En efecto:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle +$$
$$+ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 0 + 0 + \|\mathbf{y}\|^2 =$$
$$= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

Ejemplo 7-6.

En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y el polinomio nulo, donde el producto interior se define como en el ejemplo 7-3, los polinomios

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$$

son ortogonales, pues

$$< \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x > = \int_{-1}^{1} \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{2}}} x \, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{1} x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{1} = 0$$

7.4. DESIGUALDAD DE SCHWARZ

En todo espacio vectorial euclidiano, el valor absoluto del producto interior de dos vectores cualesquiera es menor o igual que el producto de los módulos de dichos vectores.

Demostraremos que

$$| \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle | \leqslant \| \mathbf{x} \| \, \| \mathbf{y} \|$$

cualesquiera que sean **x** e **y** en V, donde está definido un producto interior.

Se presentan dos situaciones:

1. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

En este caso, de acuerdo con 7.2.3., se verifica que

$$\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \| \mathbf{y} \| = 0$$

Luego

$$| \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle | = \| \mathbf{x} \| \, \| \mathbf{y} \|$$

En consecuencia

$$| \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle | \leqslant \| \mathbf{x} \| \, \| \mathbf{y} \|$$

2. $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$.

Cualesquiera que sean t y u en **R**, por el axioma iv) de la definición de producto interior, es

$$\langle t \mathbf{x} + u \mathbf{y} , t \mathbf{x} + u \mathbf{y} \rangle \geqslant 0$$

Desarrollando el primer miembro

$$t^2 \langle \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle + 2 t u \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle + u^2 \langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle \geqslant 0$$

Haciendo

$$t = \langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle \quad \text{y} \quad u = - \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle$$

se tiene

$$(\langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle)^2 \langle \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle - 2 \langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle (\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle)^2 + (\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle)^2 \langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle \geqslant 0$$

Por definición de módulo y reducción de términos

$$\| \mathbf{y} \|^4 \, \| \mathbf{x} \|^2 - \| \mathbf{y} \|^2 (\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle)^2 \geqslant 0$$

Dividiendo por $\| \mathbf{y} \|^2$, que es no nulo, resulta

$$\| \mathbf{y} \|^2 \, \| \mathbf{x} \|^2 - (\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle)^2 \geqslant 0$$

Teniendo en cuenta que el cuadrado de un número real es igual al cuadrado de su valor absoluto, y trasponiendo términos

$$\| \mathbf{y} \|^2 \, \| \mathbf{x} \|^2 \geqslant | \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle |^2$$

O sea

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leqslant (\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|)^2$$

Y, como las bases son no negativas, resulta

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

7.5. DESIGUALDAD TRIANGULAR

En todo espacio con producto interior, el módulo de la suma de dos vectores cualesquiera es menor o igual que la suma de sus módulos.

Probaremos que

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

En efecto, por definición de módulo y de producto interior es

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \quad (1)$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Schwarz y propiedades del valor absoluto en **R**, se verifica

$$-\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

Luego

$$2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant 2 \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \quad (2)$$

De (1) y (2) resulta

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + 2 \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$$

O sea

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leqslant (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$$

En consecuencia

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

7.6. ANGULO DE DOS VECTORES

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores no nulos en un espacio con producto interior. De la desigualdad de Schwarz

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

se deduce que

$$-\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \leqslant \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

Dividiendo por el producto de los módulos de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, que es positivo, se tiene

$$-1 \leqslant \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|} \leqslant 1$$

Definición

Angulo de dos vectores no nulos **x** e **y** es el número real φ que satisface:

1. $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$

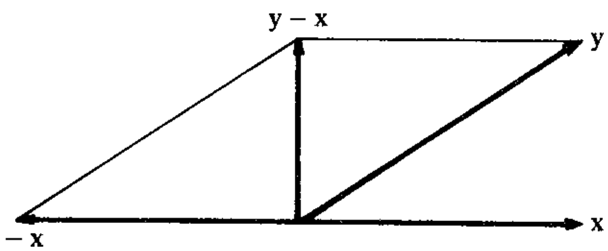
2. $\cos \varphi = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|}$

De la relación 2. se deduce la siguiente expresión del producto interior en función del ángulo de los vectores y de los módulos de éstos:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

Ejemplo 7-7.

Los vectores **x** e **y** forman un ángulo de 60° y el módulo de **x** es 3. Determinamos el módulo de **y** para que **y** − **x** sea ortogonal a **x**.



Hay que determinar $\|\mathbf{y}\|$ de modo que

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} \perp \mathbf{x}$$

O sea

$$\langle \mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

Luego

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$$

En consecuencia

$$\|\mathbf{y}\| \, \|\mathbf{x}\| \cos \varphi - \|\mathbf{x}\|^2 = 0$$

Por ley cancelativa del producto

$$\|\mathbf{y}\| \cos \varphi = \|\mathbf{x}\|$$

Resulta

$$\|\mathbf{y}\| \, . \frac{1}{2} = 3$$

De donde

$$\|\mathbf{y}\| = 6$$

7.7. CONJUNTO ORTOGONAL DE VECTORES

7.7.1. Definición

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ en un espacio con producto interior es ortogonal si y sólo si dos vectores cualesquiera y distintos son ortogonales.

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\} \text{ es un conjunto ortogonal} \Leftrightarrow i \neq j \Rightarrow \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$$

7.7.2. Propiedad

Todo conjunto ortogonal de vectores, al que no pertenece el vector nulo, es linealmente independiente.

Sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, r$, y sea la combinación lineal

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$$

Para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ consideramos

$$\langle \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mathbf{x}_j , \mathbf{x}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_i \rangle = 0$$

Entonces

$$\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \langle \mathbf{x}_j , \mathbf{x}_i \rangle = 0$$

Como $i \neq j \Rightarrow \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i \rangle = 0$, la sumatoria se reduce a un único término que se obtiene si $j = i$, o sea

$$\alpha_i \langle \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_i \rangle = 0$$

Siendo $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ resulta $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \neq 0$, y en consecuencia

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, r$$

Luego

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r\} \text{ es L.I.}$$

7.8. BASE ORTONORMAL

7.8.1. Concepto

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio con producto interior y sea $A = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ una base del mismo.

Definición

Diremos que A es una base ortonormal si y sólo si A es un conjunto ortogonal de vectores de módulo 1.

$$A \text{ es ortonormal} \Leftrightarrow A \text{ es ortogonal y } \|\mathbf{x}_i\| = 1\ ,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Una base ortonormal es tal que

$$i \neq j \Rightarrow \langle \mathbf{x}_i\ ,\ \mathbf{x}_j \rangle = 0$$

$$i \in I_n \Rightarrow \langle \mathbf{x}_i\ ,\ \mathbf{x}_i \rangle = 1$$

En consecuencia, integrando estas dos expresiones en una sola, se tiene

$$A \text{ es una base ortonormal} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}_i\ ,\ \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Ejemplo 7-8.

• En $\mathbf{R}^n$, con el producto interior usual, la base canónica $\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \}$ es ortonormal.

• En $\mathbf{R}^2$, con el mismo producto interior, la base formada por

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \quad \mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

es ortonormal, pues

$$\langle \mathbf{x}_1\ ,\ \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}_2\ ,\ \mathbf{x}_2 \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{x}_1\ ,\ \mathbf{x}_2 \rangle = 0$$

7.8.2. Ortonormalización de una base

Todo espacio euclidiano de dimensión finita admite una base ortonormal.

Nos proponemos obtener, a partir de una base cualquiera $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n \}$ una base ortonormal. En efecto:

1. $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ por ser un vector de la base dada. En consecuencia

$$\| \mathbf{x}_1 \| \neq 0$$

El vector

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}$$

de acuerdo con 7.2.5., es unitario.

2. Supongamos que $\{ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_k \}$ es un conjunto ortonormal. Se trata de obtener $\mathbf{y}_{k+1}$ tal que

$$\{ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{k+1} \}$$

sea ortonormal.

Consideramos el vector

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}_{k+1}\ ,\ \mathbf{y}_i \rangle \mathbf{y}_i$$

Se verifica que $\mathbf{z}_{k+1}$ es ortogonal a $\mathbf{y}_j$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$.
En efecto

$$\langle \mathbf{z}_{k+1}, \mathbf{y}_j \rangle = \langle \mathbf{x}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_i \rangle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_i \rangle \langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_i \rangle \delta_{ij} =$$

$$= \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_j \rangle - \langle \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_j \rangle \,.\, 1 = 0$$

Definiendo

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{\mathbf{z}_{k+1}}{\| \mathbf{z}_{k+1} \|}$$

Se deduce que $\| \mathbf{y}_{k+1} \| = 1$, y en consecuencia

$$\{ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{k+1} \}$$

es un conjunto ortonormal.

Este proceso, llamado de Gram-Schmidt, nos permite construir una base ortonormal a partir de una base dada.

Ejemplo 7-9

En $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ se considera la base formada por

$$\mathbf{x}_1 = (1, 1) \qquad \mathbf{x}_2 = (-1, 2)$$

Construimos una base ortonormal siguiendo el procedimiento desarrollado en el teorema anterior.

1. $$\| \mathbf{x}_1 \| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\| \mathbf{x}_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

2. $$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle \mathbf{y}_1 =$$

$$= (-1, 2) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= (-1, 2) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= (-1, 2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\| \mathbf{z}_2 \| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\| \mathbf{z}_2 \|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

La base $\{ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \}$ es ortonormal.

Ejemplo 7-10

Sea V el conjunto de los polinomios reales de menor grado o igual que 2 y el polinomio nulo. En (V, +, **R**, .) se define un producto interior mediante

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx$$

Dada la base $\{ \mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2 \}$, construimos una base ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt.

1. $$\| \mathbf{x}_1 \|^2 = \| \mathbf{1} \|^2 = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{1} \,.\, \mathbf{1}\, dx = x \Big]_{-1}^{1} = 2$$

$$\Rightarrow \| \mathbf{1} \| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\| \mathbf{x}_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. $$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle \mathbf{y}_1$$

Como $\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 \rangle = \langle \mathbf{x}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle =$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x \; dx = \frac{\sqrt{2}}{4} x^2 \Big]_{-1}^{1} = 0,$$

resulta

$$\mathbf{z}_2 = x$$

Además

$$\| \mathbf{z}_2 \|^2 = \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

Entonces

$$\| \mathbf{z}_2 \| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Luego

$$y_2 = \frac{z_2}{\| z_2 \|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x$$

3. $$z_3 = x_3 - \sum_{i=1}^{2} \langle x_3 , y_i \rangle y_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_3 = x_3 - \langle x_3 , y_1 \rangle y_1 - \langle x_3 , y_2 \rangle y_2 \quad (1)$$

$$\langle x_3 , y_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \, dx = \frac{\sqrt{2}}{6} x^3 \Big]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\langle x_3 , y_2 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x^3 = 0$$

De (1) resulta

$$z_3 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x^2 - \frac{1}{3}$$

Como

$$\| z_3 \|^2 = \langle z_3 , z_3 \rangle = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9}) \, dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2}{9} x^3 + \frac{1}{9} x \Big]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

resulta

$$\| z_3 \| = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$$

Y en consecuencia

$$y_3 = \frac{z_3}{\| z_3 \|} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

La base

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x , \frac{3\sqrt{10}}{4} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \right\}$$

es ortonormal.

7.9. COMPLEMENTO ORTOGONAL

7.9.1. Complemento ortogonal de un subespacio

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio con producto interior, y sea S un subespacio de V.

Definición

Complemento ortogonal del subespacio S de V, es el conjunto de los vectores de V que son ortogonales a todos los vectores de S.

El símbolo $S^{\perp}$ se lee: *complemento ortogonal* de S.

$$S^{\perp} = \{ \mathbf{x} \in V / \mathbf{x} \perp \mathbf{y} , \forall \mathbf{y} \in S \}$$

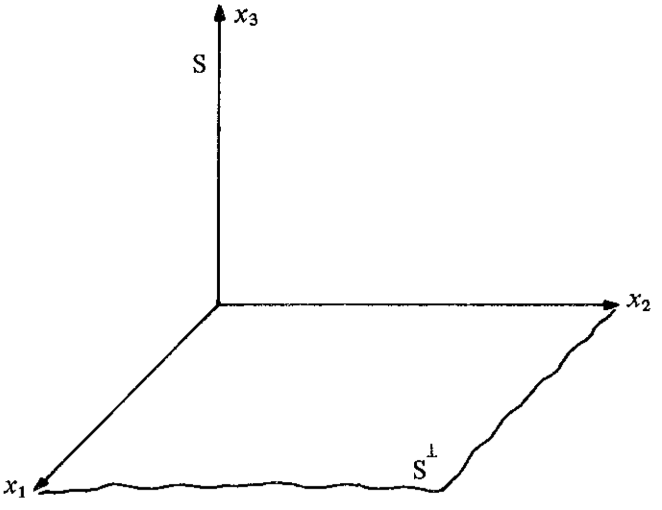
Ejemplo 7-11

En $\mathbf{R}^3$, con el producto interior ordinario, si

$$S = \{ (0, 0, x_3) / x_3 \in \mathbf{R} \}$$

entonces el complemento ortogonal de S es

$$S^{\perp} = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 / x_3 = 0 \}$$



7.9.2. Propiedad

El complemento ortogonal del subespacio S de (V, +, **R**, .) es un subespacio de V.

Debemos probar que $S^{\perp}$ es un subconjunto no vacío de V, cerrado para la suma y para el producto por escalares.

1. $S^{\perp} \subset V$ por definición de $S^{\perp}$.

2. $\mathbf{y} \in S \Rightarrow \langle \mathbf{0} , \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{0} \in S^{\perp} \Rightarrow S^{\perp} \neq \phi$

3. $\mathbf{x} \in S^{\perp} \wedge \mathbf{y} \in S^{\perp} \Rightarrow \langle \mathbf{x} , \mathbf{z} \rangle = 0 \wedge \langle \mathbf{y} , \mathbf{z} \rangle = 0, \forall \mathbf{z} \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathbf{x} , \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} , \mathbf{z} \rangle = 0 , \forall \mathbf{z} \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} , \mathbf{z} \rangle = 0 , \forall \mathbf{z} \in S \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S^{\perp}$

4. $\alpha \in \mathbf{R} \wedge \mathrm{x} \in S^{\perp} \Rightarrow \alpha \in \mathbf{R} \wedge \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0 \,, \forall \mathrm{y} \in S \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle \alpha \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = 0 \,, \forall \mathrm{y} \in S \Rightarrow \alpha \mathrm{x} \in S^{\perp}$

Por consiguiente

$$(S^{\perp}, +, \mathbf{R}, .) \text{ es un subespacio de } V.$$

9.7.3. Propiedad

Si V es un espacio euclidiano de dimensión finita y si S es un subespacio de dimensión r, entonces la dimensión del complemento ortogonal de S es $n-r$.

Se trata de probar que

$$\dim S + \dim S^{\perp} = \dim V$$

En efecto:

Si $S = \{\mathbf{0}\}$ o $S = V$, la propiedad es obvia. Consideremos, pues, el caso en que $S \neq \{\mathbf{0}\}$ y $S \neq V$, y sea

$$\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_r\}$$

una base ortonormal de S.

Entonces existen vectores $\mathrm{x}_{r+1}, \mathrm{x}_{r+2}, \ldots, \mathrm{x}_n$, tales que

$$\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_r, \mathrm{x}_{r+1}, \ldots, \mathrm{x}_n\}$$

es una base ortonormal de V.

Afirmamos que

$$\{\mathrm{x}_{r+1}, \mathrm{x}_{r+2}, \ldots, \mathrm{x}_n\}$$

es una base ortonormal de $S^{\perp}$.

Para ello es suficiente probar que este conjunto es un sistema de generadores de $S^{\perp}$. Sea entonces un vector cualquiera $\mathbf{u} \in S^{\perp}$.

$$\mathbf{u} \in S^{\perp} \Rightarrow \mathbf{u} \in V \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R} \,/\, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathrm{x}_i$$

Como $\mathbf{u}$ es ortogonal a todos los vectores de S, considerando el producto interior entre $\mathbf{u}$ y x_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, resulta

$$0 = \langle \mathbf{u}, \mathrm{x}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_j \mathrm{x}_j, \mathrm{x}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i$$

O sea

$$\mathbf{u} = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \mathrm{x}_i$$

Esto prueba que

$$\{\mathrm{x}_{r+1}, \mathrm{x}_{r+2}, \ldots, \mathrm{x}_n\}$$

es un sistema de generadores de $S^{\perp}$.

Como estos vectores son ortogonales y de módulo 1, constituyen una base ortonormal de $S^{\perp}$, y se tiene

$$\dim S^{\perp} = n - r$$

O sea

$$\dim S + \dim S^{\perp} = \dim V$$

El lector puede comprobar, como consecuencia de esta propiedad, que V es la suma directa de S y de su complemento ortogonal.

7.10. PROYECCION DE UN VECTOR SOBRE OTRO

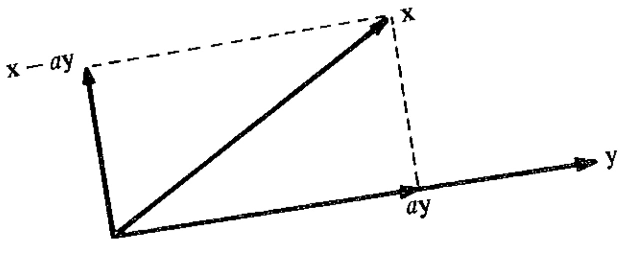
Sean **x** e **y** dos vectores de un espacio con producto interior, e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Entonces existe un escalar a, tal que

$$\mathbf{x} - a\,\mathbf{y} \perp \mathbf{y}$$

En efecto

$$\langle \mathbf{x} - a\mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle - a \langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle}$$



El vector

$$a\mathbf{y} = \frac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} , \mathbf{y} \rangle}\mathbf{y} = \frac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|}\,\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

se llama proyección ortogonal de **x** sobre **y**.

Identificaremos la proyección ortogonal de **x** sobre **y** con el número real

$$\frac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|}$$

y escribiremos

$$P_{\mathbf{y}}\,\mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{y}\|}$$

O sea, la proyección de un vector **x** sobre un vector **y** es igual al producto interior de ambos, dividido por el módulo del vector sobre el cual se proyecta.

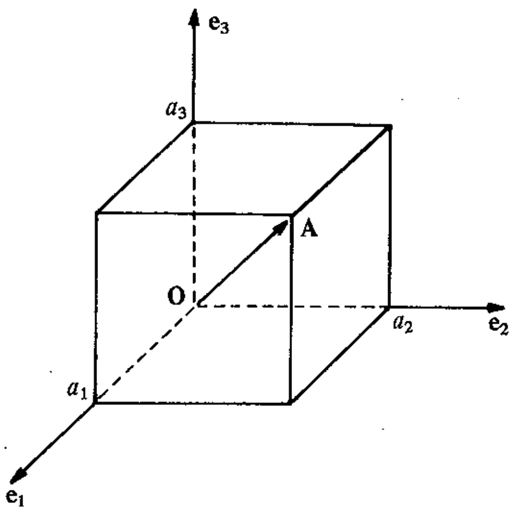
En particular, si **y** es un vector de módulo 1, se tiene

$$P_{\mathbf{y}}\,\mathbf{x} = \langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle$$

Por lo tanto, la proyección de un vector sobre un vector de módulo 1 es igual al producto interior de ambos.

Ejemplo 7-12

Comprobamos que las proyecciones de un vector de $\mathbf{R}^3$, con el producto interior usual, sobre los vectores de una base ortonormal, son las componentes de dicho vector respecto de la base.



$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\mathbf{e}_i \Rightarrow P_{\mathbf{e}_j}\mathbf{A} = \langle \sum_{i=1}^{3} a_i\,\mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_i \langle \mathbf{e}_i , \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\delta_{ij} = a_j$$

7.11. ESPACIO AFIN $\mathbf{R}^n$

7.11.1. Concepto

Sea $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, .)$ el espacio real n-dimensional.

Para cada $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^n$ definimos una suma en $\mathbf{R}^n$ y un producto de escalares por elementos de $\mathbf{R}^n$, mediante

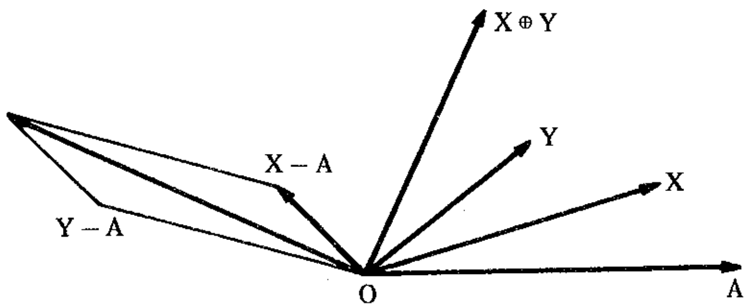
$$\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{A}$$

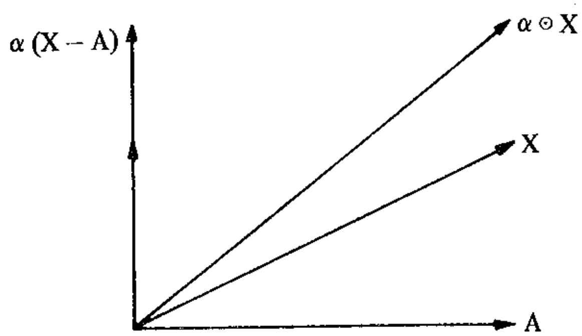
$$\alpha \odot \mathbf{X} = \alpha (\mathbf{X} - \mathbf{A}) + \mathbf{A}$$

Estas definiciones hacen de la cuaterna $(\mathbf{R}^n, \oplus, \mathbf{R}, \odot)$ un espacio vectorial con origen **A**.

El vector nulo de este espacio es **A**.

La suma y el producto de este espacio pueden obtenerse "llevando" las flechas $\overrightarrow{\mathbf{AX}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{AY}}$ al origen **0**, operando en $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, .)$, y desplazando el resultado al origen **A**. En $\mathbf{R}^2$ esta situación queda indicada por las figuras siguientes:





Definición

Espacio afín $\mathbf{R}^n$ es el conjunto de todas las n-uplas de números reales, y una estructura de espacio vectorial para cada $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^n$, con las operaciones definidas.

7.11.2. Vectores fijos

Consideremos $V = \mathbf{R}^n$, $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$. El par de puntos $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ se llama vector fijo de origen **X** y extremo **Y**. Se lo denota mediante $\overrightarrow{\mathbf{XY}}$.

Sean los elementos de $\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Entonces la suma de **X** e **Y**, en el espacio de origen **A**, es

$$\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} = \overrightarrow{\mathbf{AX}} + \overrightarrow{\mathbf{AY}} = \mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{A}$$

Siendo

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} - \mathbf{A} = (x_1 + y_1 - a_1, x_2 + y_2 - a_2, \ldots, x_n + y_n - a_n)$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}$, entonces

$$\alpha \odot \mathbf{X} = \alpha\, \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} = \alpha\,(\mathbf{X} - \mathbf{A}) + \mathbf{A} = \alpha\,\mathbf{X} - (\alpha - 1)\,\mathbf{A}$$

donde

$$\alpha\,\mathbf{A} - (\alpha - 1)\,\mathbf{A} = (\alpha x_1 - (\alpha - 1)\,a_1, \ldots, \alpha x_n - (\alpha - 1)\,a_n)$$

7.11.3. Espacio de los vectores libres

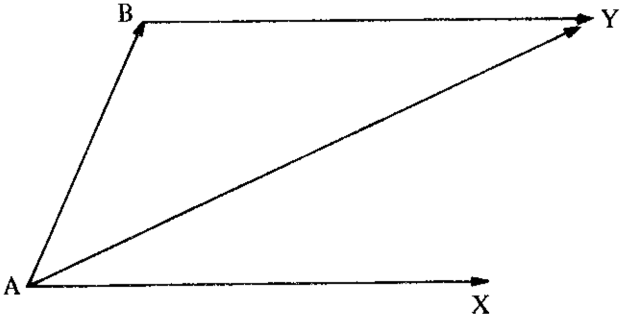
Consideremos el espacio afín $\mathbf{R}^n$, es decir, el conjunto de todas las n-uplas de números reales y las estructuras de espacios de los vectores aplicados en cada punto de $\mathbf{R}^n$.

En el espacio afín $\mathbf{R}^n$ definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} \sim \overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{B} = \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} \oplus \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$$

Escribiremos

$$\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} \oplus \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} = \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} + \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$$



Cada clase de equivalencia se llama un *vector libre*, y el conjunto cociente es el conjunto de los vectores libres de $\mathbf{R}^n$.

Un vector $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ se denota:

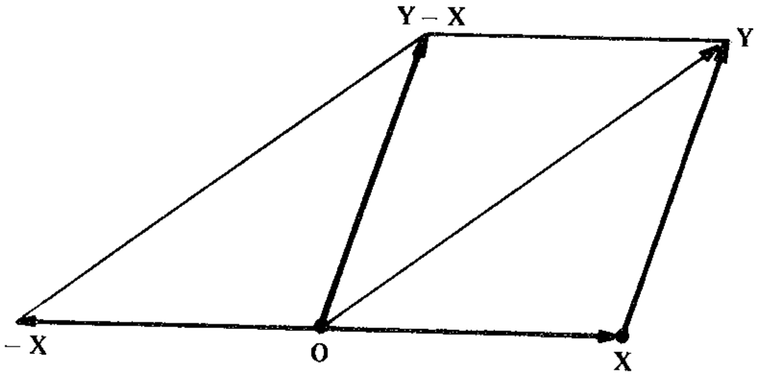
$\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}}$ si se lo considera como vector del espacio de origen **A**.

$\overrightarrow{\mathbf{O}\,\mathbf{X}}$ si pertenece al espacio de origen **0**.

En el último caso se escribe directamente **X**.

Para operar en el espacio de los vectores libres se considera como conjunto de índices una estructura de espacio vectorial fija, con origen $\mathbf{0}$. Entonces el vector fijo $\overrightarrow{\mathbf{XY}}$ es equivalente al vector $\mathbf{Y} - \mathbf{X}$, con origen $\mathbf{0}$, y se escribe

$$\overrightarrow{\mathbf{X}\,\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$$



Se demuestra que la relación de equivalencia es compatible con la suma y el producto por escalares, o sea

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} \sim \overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}} \\ \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}'} \sim \overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} + \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}'} \sim \overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}} + \overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}'}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} \sim \overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}} \wedge \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{X}} \sim \alpha\,\overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{Y}}$$

En consecuencia, existen en el conjunto cociente, de los vectores libres, dos leyes de composición inducidas que lo caracterizan como espacio vectorial.

Resulta así el espacio vectorial de los vectores libres de $\mathbf{R}^n$.

7.12. ECUACIONES VECTORIAL Y CARTESIANAS DE LA RECTA

En lo que sigue nos referiremos a vectores libres del espacio euclidiano tridimensional. Consideraremos una estructura de espacio vectorial, con origen en $\mathbf{0}$, y la base ortonormal

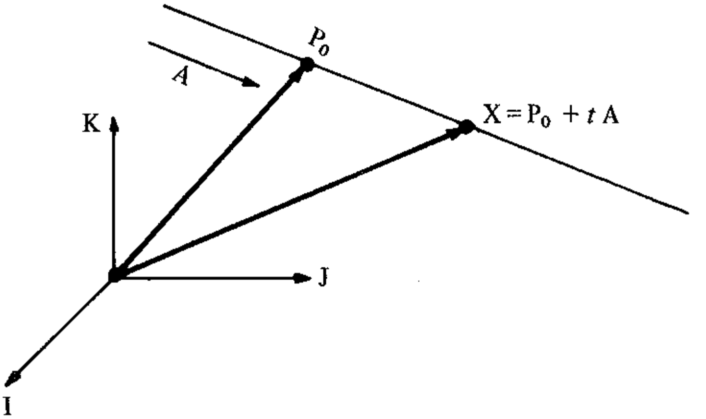
$$\mathbf{I} = (1, 0, 0) \quad \mathbf{J} = (0, 1, 0) \quad \mathbf{K} = (0, 0, 1)$$

Los subespacios correspondientes a los ejes coordenados serán denotados por x, y, z.

Sea $\mathbf{A}$ un vector no nulo de componentes l, m y n, es decir

$$\mathbf{A} = l\,\mathbf{I} + m\,\mathbf{J} + n\,\mathbf{K}$$

Si P_0 es un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0), entonces existe una única recta que pasa por P_0 y tiene la dirección de $\mathbf{A}$.



El vector $\overrightarrow{\mathbf{O}\,\mathbf{P}_0}$, de origen $\mathbf{0}$, será denotado por $\mathbf{P}_0$. Sea $\mathbf{X}$ un punto genérico de la recta, de coordenadas (x, y, z).

Se verifica que

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_0 + \overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{X}}$$

Y como $\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{X}}$ es equivalente a $t\,\mathbf{A}$, para algún $t \in \mathbf{R}$, resulta

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_0 + t\,\mathbf{A} \quad (1)$$

Para cada $t \in \mathbf{R}$ se tiene un punto perteneciente a la recta. La igualdad (1) es la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por P_0 y es paralela al vector $\mathbf{A}$. La variable $\mathbf{X}$ depende de t, que es el parámetro.

Expresando (1) en términos de coordenadas es

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\,(l, m, n)$$

Efectuando el producto por t, sumando e igualando las componentes, resulta

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

Las ecuaciones (2) reciben el nombre de ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta.

Las componentes l, m y n del vector $\mathbf{A}$ suelen llamarse coeficientes directores de la recta. Si son distintos de cero, eliminando t, se obtiene

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (3)$$

Las ecuaciones (3) reciben el nombre de ecuaciones cartesianas de la recta.

Considerando la recta en un plano, la forma de la ecuación vectorial no se modifica, pero las ecuaciones cartesianas quedan simplificadas, ya que la tercera componente no figura.

Ejemplo 7-13

Determinamos las ecuaciones vectorial y cartesianas de la recta que pasa por P_0 $(-1, 0, 2)$ y es paralela al vector **A**, siendo $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{I} - \mathbf{J} + 2\,\mathbf{K}$.

La ecuación vectorial es

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_0 + t\,\mathbf{A}$$

O sea

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} = -\mathbf{I} + 2\,\mathbf{K} + t\,(3\,\mathbf{I} - \mathbf{J} + 2\,\mathbf{K})$$

Efectuando las operaciones

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} = (-1 + 3\,t)\,\mathbf{I} - t\,\mathbf{J} + (2 + 2\,t)\,\mathbf{K}$$

Igualando componentes

$$\begin{cases} x = -1 + 3\,t \\ y = -t \\ z = 2 + 2\,t \end{cases}$$

Las relaciones anteriores constituyen el sistema de ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta, y eliminando el parámetro t resulta

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

Observamos que los sustraendos de los numeradores son las coordenadas del punto dado, y los denominadores son las componentes del vector **A**.

Ejemplo 7-14

Obtenemos las ecuaciones cartesianas de la recta r que pasa por P_0 $(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $A = 2\,\mathbf{I} + \mathbf{K}$.

Como

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_0 + t\,\mathbf{A}$$

se tiene

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} = \mathbf{I} + 2\,\mathbf{J} + 3\,\mathbf{K} + t\,(2\,\mathbf{I} + \mathbf{K})$$

O sea

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

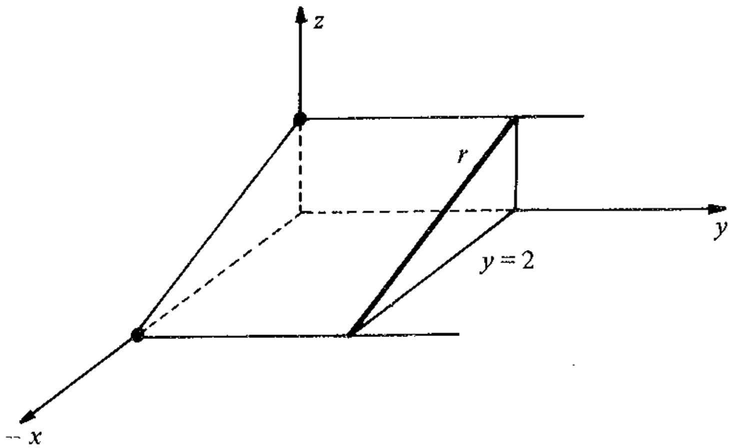
Eliminando el parámetro entre la primera y la tercera ecuación, resulta

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z-3}{1} \\ y = 2 \end{cases}$$

Efectuando operaciones en la primera de estas ecuaciones se tiene

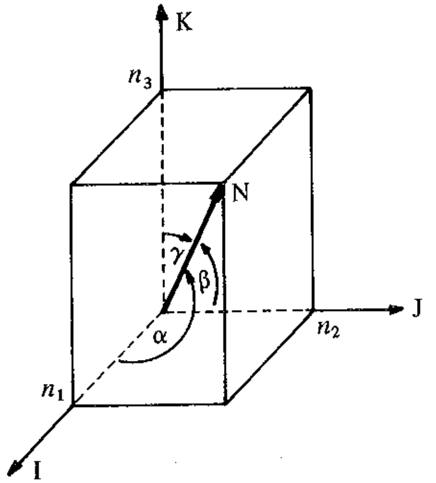
$$\begin{cases} x - 2z = -5 \\ \quad\; y = 2 \end{cases}$$

Este es el sistema de ecuaciones cartesianas no paramétricas de la recta, y se interpreta de la siguiente manera: r es la intersección de los planos cuyas ecuaciones son $x - 2z = -5$ (paralelo al eje y) e $y = 2$ (paralelo al plano xz, por el punto $(0, 2, 0)$).



7.13. ECUACION NORMAL VECTORIAL DEL PLANO

Consideremos un vector unitario $\mathbf{N} = n_1\mathbf{I} + n_2\mathbf{J} + n_3\mathbf{K}$



Sus proyecciones sobre los ejes son

$$n_1 = \langle \mathbf{N}, \mathbf{I} \rangle = \|\mathbf{N}\| \, \|\mathbf{I}\| \cos\alpha = 1 \, . \, 1 \cos\alpha = \cos\alpha$$

Análogamente

$$n_2 = \cos\beta \qquad n_3 = \cos\gamma$$

Los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ se llaman cosenos directores del vector **N**, y se identifican con sus coordenadas, o sea

$$\mathbf{N} = \cos\alpha\,\mathbf{I} + \cos\beta\,\mathbf{J} + \cos\gamma\,\mathbf{K}$$

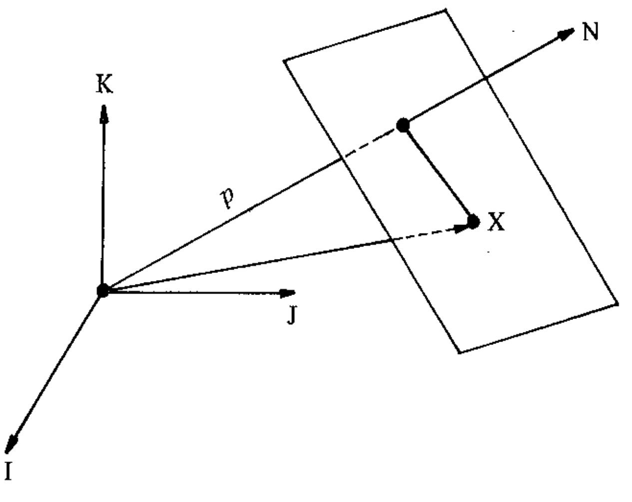
Como el módulo de **N** es 1, se verifica que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Esta propiedad es válida para todo vector del espacio. Es decir, la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es igual a 1.

Dados un vector unitario **N** y un número $p \in \mathbf{R}^+$, estamos interesados en determinar la ecuación del plano perpendicular a la dirección de **N** y tal que la distancia del origen al plano sea p.

El vector **N** y el número p se llaman parámetros normales del plano.



Sea π el plano en cuestión. Cualquiera que sea $\mathbf{X} \in \pi$ se verifica que

$$\mathbf{P_N X} = p \quad (1)$$

Es decir

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle - p = 0$$

Para denotar el producto interior o escalar $\langle \mathbf{X}, \mathbf{N} \rangle$ escribiremos $\mathbf{X} \, . \, \mathbf{N}$.

Entonces

$$\mathbf{X} \, . \, \mathbf{N} - p = 0 \quad (2)$$

Tanto (1) como (2) son la ecuación normal vectorial del plano.

En términos de coordenadas se tiene

$$(x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K})\,(\cos\alpha\,\mathbf{I} + \cos\beta\,\mathbf{J} + \cos\gamma\,\mathbf{K} - p) = 0$$

Efectuando el producto interior resulta

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \quad (3)$$

La relación (3) recibe el nombre de ecuación normal cartesiana del plano. Los coeficientes de las variables son los cosenos directores del vector normal al plano, y el término independiente cambiado de signo es la distancia del origen al plano.

Multiplicando la ecuación (3) por $k \neq 0$, resulta

$$ax + by + cz + d = 0$$

Esta relación recibe el nombre de ecuación general del plano.

Desarrollamos a continuación el método que nos permite pasar de la ecuación general del plano a la ecuación normal cartesiana.

Sea el plano π de ecuación

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (4)$$

El plano π admite la ecuación normal

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \mathrm{p} = 0 \quad (3)$$

cuyos coeficientes hay que determinar.

Como ambas ecuaciones corresponden al mismo plano, para algún $k \in \mathbf{R}$ se verifica que

$$(5) \quad \begin{cases} a = k\cos\alpha \\ b = k\cos\beta \\ c = k\cos\gamma \\ d = k\,(-p) \end{cases}$$

Sea $d \neq 0$; como p es positivo, $-p$ es negativo y, en consecuencia, el signo de k es distinto del de d.

Elevando al cuadrado las tres primeras relaciones y sumándolas, se tiene

$$a^2 + b^2 + c^2 = k^2\,(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

O sea

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

En consecuencia

$$k = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

donde el signo de k, por lo observado anteriormente, debe tomarse distinto del de d.

De (5) resulta

$$\cos\alpha = \frac{a}{k}, \cos\beta = \frac{b}{k}, \cos\gamma = \frac{c}{k}, -p = \frac{d}{k}$$

Sustituyendo en (3), la ecuación normal vectorial es

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

Luego, para trasformar la ecuación general del plano a la forma normal, se divide el primer miembro de aquella por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de las variables, la que se toma con signo distinto al del término independiente.

Ejemplo 7-16

Determinamos la ecuación normal cartesiana del plano cuya ecuación general es

$$x - y + z - 1 = 0$$

De acuerdo con la fórmula de pasaje, la ecuación normal cartesiana es

$$\frac{x - y + z - 1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = 0$$

O sea

$$\frac{x - y + z - 1}{\sqrt{3}} = 0$$

O bien

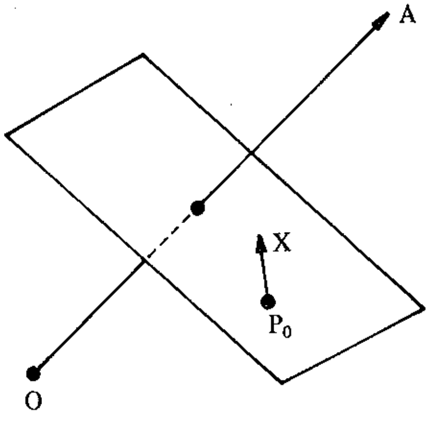
$$\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{\sqrt{3}}{3}z - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

Los tres cosenos directores son $\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$, y la distancia del origen al plano es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Observamos que el vector cuyas componentes son los coeficientes de las variables de la ecuación general del plano es normal al mismo, ya que se deduce del vector normal unitario multiplicándolo por k.

Ejemplo 7-17

Obtenemos la ecuación del plano que pasa por P_0 (1, 2, 2), sabiendo que es perpendicular al vector $\mathbf{A} = 3\,\mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}$.



Cualquiera que sea X perteneciente al plano pedido es

$$\overrightarrow{\mathbf{P_0X}} \perp \mathbf{A}$$

En consecuencia

$$\overrightarrow{\mathbf{P_0X}} \cdot \mathbf{A} = 0$$

es la ecuación vectorial del plano.
En términos de coordenadas se tiene

$$\overrightarrow{\mathbf{P_0X}} = (x-1)\,\mathbf{I} + (y-2)\,\mathbf{J} + (z-2)\,\mathbf{K}$$

Efectuando el producto interior

$$3\,(x-1) + (y-2) + (z-2) = 0$$

O sea

$$3\,x + y + z - 7 = 0$$

Ejemplo 7-18

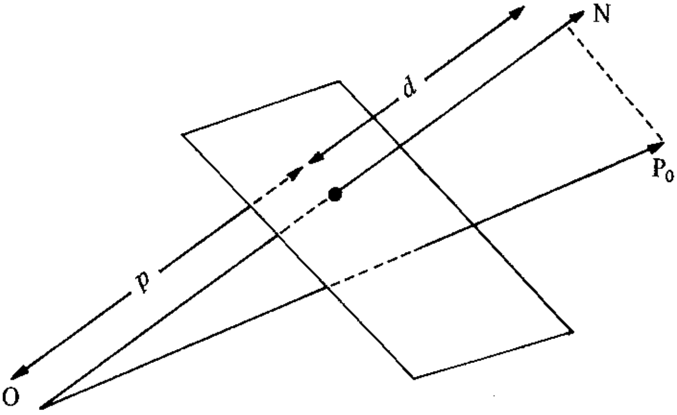
Determinamos la distancia entre el plano de ecuación

$$2\,x - y - 2\,z + 3 = 0$$

y el punto $P_0(1, 2, 3)$
Sea π el plano cuya ecuación normal es

$$P_{\mathbf{N}}\,\mathbf{X} - p = 0$$

y sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto dado.



La distancia entre el plano π y el punto P_0 es

$$d = |P_N P_0 - p|$$

O sea, la distancia entre un plano y un punto es el valor absoluto del primer miembro de la ecuación normal del plano, cuando se sustituye la variable por el punto cuya distancia al plano se busca.

Determinamos primero la ecuación normal del plano dado

$$\frac{2x - y - 2z + 3}{-\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 0$$

O sea

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 1 = 0$$

Sustituyendo x, y, z por las coordenadas de P_0 es

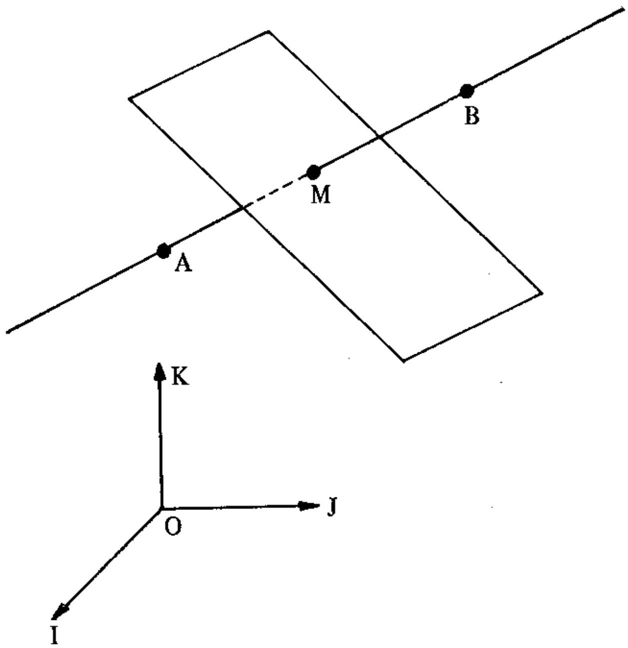
$$d = \left| -\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \quad \cdot 3 - 1 \right| = 1$$

Ejemplo 7-19

Dados los puntos A $(-1, 3, 2)$ y B $(-1, 1, 0)$ determinamos la distancia del origen al plano perpendicular a la recta AB, sabiendo que dicho plano pasa por el punto medio del segmento AB.

Las coordenadas del punto medio de un segmento son las semisumas de las coordenadas de los extremos de dicho segmento

En efecto:



$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \overrightarrow{\mathbf{AM}}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{M} + \overrightarrow{\mathbf{MB}}$$

Restando

$$\mathbf{M} - \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{M} \text{ pues } \overrightarrow{\mathbf{AM}} \text{ y } \overrightarrow{\mathbf{MB}} \text{ son equivalentes}$$

Entonces

$$2\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

O sea

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

En nuestro caso, las coordenadas de M son $(-1, 2, 1)$, y un vector normal al plano es

$$\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = -2\,\mathbf{J} - 2\,\mathbf{K}$$

La ecuación vectorial del plano es

$$\overrightarrow{\mathbf{M}\,\mathbf{X}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} = 0$$

Donde

$$\overrightarrow{\mathbf{M}\,\mathbf{X}} = (x+1)\,\mathbf{I} + (y-2)\,\mathbf{J} + (z-1)\,\mathbf{K}$$

Efectuando el producto

$$0 \cdot (x+1) - 2\,(y-2) - 2\,(z-1) = 0$$

O sea

$$2y + 2z - 6 = 0$$

es la ecuación del plano pedido. Este plano es ortogonal al vector $-2\mathbf{J} - 2\mathbf{K}$, es decir, al plano yz; en consecuencia, es paralelo al eje x.

Observamos que si el coeficiente de una variable de la ecuación de un plano es cero, entonces dicho plano es paralelo al eje correspondiente a esa variable.

La ecuación normal del plano hallado es

$$\frac{2y + 2z - 6}{2\sqrt{2}} = 0$$

O sea

$$\frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$$

Y la distancia pedida es

$$d = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} . 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} . 0 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

7.14. CURVAS EN EL ESPACIO

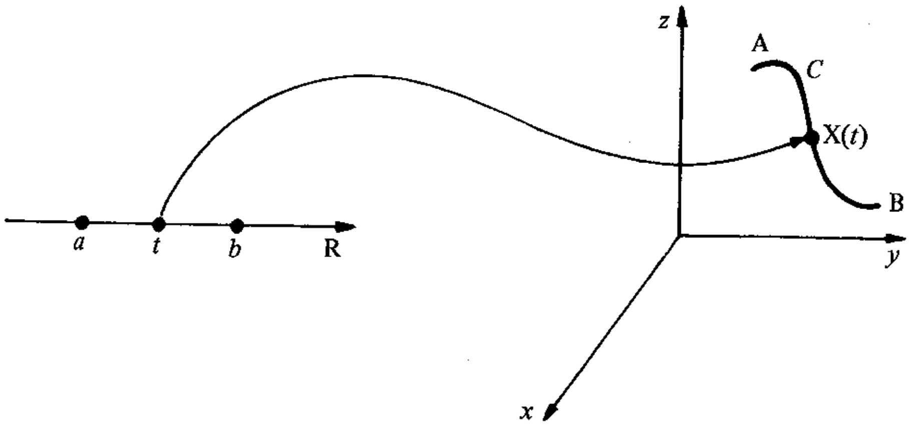
Sea I un intervalo real. Toda función

$$X : I \to \mathbf{R}^3$$

se llama curva paramétrica en el espacio.

Cualquiera que sea $t \in I$, $\mathbf{X}(t)$ es un vector cuyas coordenadas dependen de t. O sea, existen funciones x, y, z de I en $\mathbf{R}$, tales que

$$\mathbf{X}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$



La ecuación vectorial paramétrica de la curva C es

$$\mathbf{X} = x\,(t)\,\mathbf{I} + y\,(t)\,\mathbf{J} + z\,(t)\,\mathbf{K}$$

Las ecuaciones cartesianas paramétricas de C son

$$\begin{cases} x = x\,(t) \\ y = y\,(t) \\ z = z\,(t) \end{cases}$$

La curva cuya ecuación paramétrica es

$$\mathbf{X}\,(t) = \cos t\,\mathbf{I} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{J} + \mathbf{K}$$

es tal que sus ecuaciones cartesianas paramétricas son

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 1 \end{cases}$$

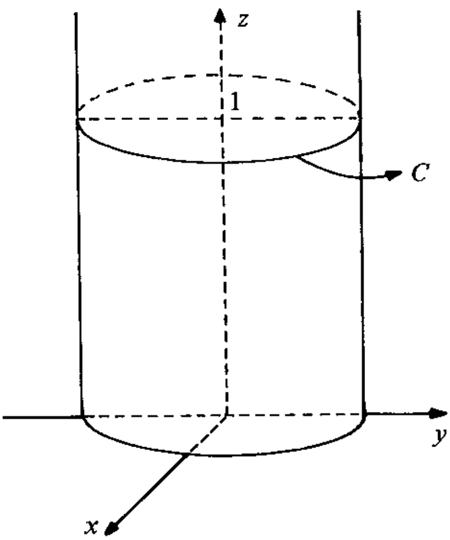
cualquiera que sea $t \in \mathbf{R}$.

Elevando al cuadrado las dos primeras y sumando eliminamos el parámetro

$$C \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \qquad\; z = 1 \end{cases}$$

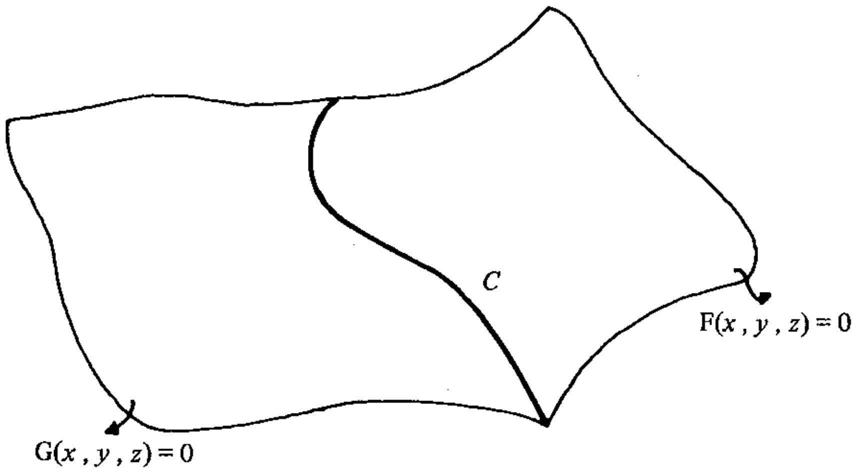
La representación de C está caracterizada por la intersección de dos superficies: la superficie cilíndrica cuya directriz es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen e incluida en el plano horizontal y cuyas generatrices son paralelas al eje z, y el plano de ecuación $z = 1$.

Se trata de la circunferencia indicada en el gráfico siguiente:



La representación de una curva como intersección de dos superficies se llama implícita, y en general se denota mediante

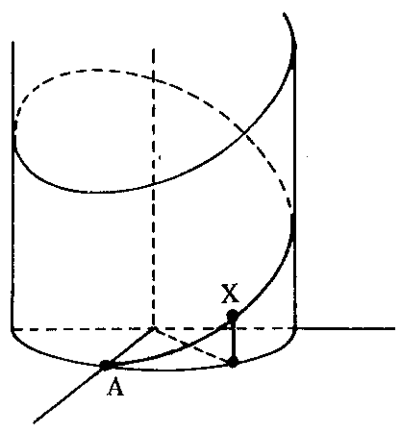
$$C \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



Donde el sistema anterior es tal que se cumplen las condiciones de regularidad dadas por el teorema de Cauchy Dini, relativo a la existencia de funciones definidas por sistemas de ecuaciones.

Ejemplo 7-20

Deducimos la ecuación vectorial de la hélice circular, definida como la trayectoria de un punto que gira alrededor de un eje y además se traslada paralelamente a él, siendo ambos movimientos uniformes.



Suponemos que en el instante $t = 0$ el punto móvil está en A $(a, 0, 0)$, y que al cabo del tiempo t está en X (x, y, z).
Se verifica que

$$\varphi = w\,t \qquad \text{y} \qquad z = v\,t$$

Siendo w la velocidad angular del movimiento circular uniforme, y v la velocidad (en módulo) del movimiento rectilíneo y uniforme.
Las ecuaciones paramétricas en coordenadas cilíndricas de la hélice circular son

$$\begin{cases} \rho = a \\ \varphi = w\,t \\ z = v\,t \end{cases}$$

Se tiene así el sistema de ecuaciones horarias de la curva.
Haciendo

$$\varphi = w\,t = u$$

Resulta

$$z = v\,t = \frac{v}{w}\,w\,t = b\,u$$

Las ecuaciones cartesianas paramétricas son

$$\begin{cases} x = a \cos u \\ y = a \operatorname{sen} u \\ z = b\,u \end{cases}$$

La ecuación vectorial paramétrica de la hélice es

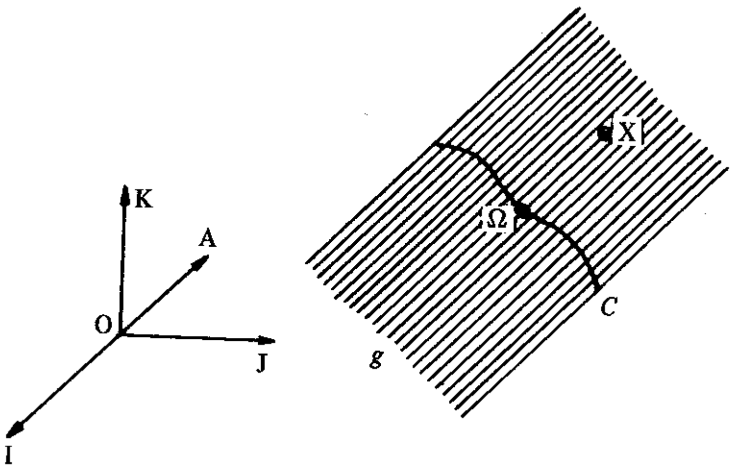
$$\mathbf{X} = a \cos u\, \mathbf{I} + b \operatorname{sen} u\, \mathbf{J} + b\,u\, \mathbf{K}$$

7.15. SUPERFICIE CILINDRICA

Sean: una curva C y una dirección del espacio caracterizada por un vector no nulo $\mathbf{A} = l\,\mathbf{I} + m\,\mathbf{J} + n\,\mathbf{K}$.

Definición

Superficie cilíndrica de directriz C y dirección **A**, es el conjunto de puntos de las paralelas a **A**, que pasan por todos los puntos de C.



Las paralelas a **A** se llaman generatrices.

Para obtener la ecuación vectorial de la superficie cilíndrica consideramos un p cualquiera de la misma; tal punto pertenece a una generatriz, que corta a la directriz e punto Ω.

La ecuación vectorial es, entonces

$$\mathbf{X} = \Omega + \lambda \mathbf{A}$$

Ejemplo 7-21

Determinamos la ecuación de la superficie cilíndrica de directriz

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 0 \end{cases}$$

y cuyas generatrices son paralelas

1. Al eje z, o sea, al vector $\mathbf{A} = \mathbf{K}$.

$$\mathbf{X} = \Omega + \lambda \mathbf{A} \quad (1)$$

Como Ω $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, de (1) resulta

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} = \cos t\,\mathbf{I} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{J} + \lambda\,\mathbf{K}$$

Luego

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \lambda \end{cases}$$

es el sistema de ecuaciones paramétricas de la superficie, siendo t y λ los parámetros.
De las dos primeras ecuaciones resulta

$$x^2 + y^2 = 1$$

siendo z cualquier número real.

2. Al vector $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}$
De (1)

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} = \cos t\,\mathbf{I} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{J} + \lambda(\mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K})$$

Luego

$$\begin{cases} x = \lambda + \cos t \\ y = \lambda + \operatorname{sen} t \\ z = \lambda \end{cases}$$

Eliminamos los parámetros

$$x - z = \cos t$$

$$y - z = \operatorname{sen} t$$

Y resulta

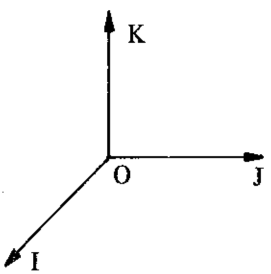
$$(x - z)^2 + (y - z)^2 = 1$$

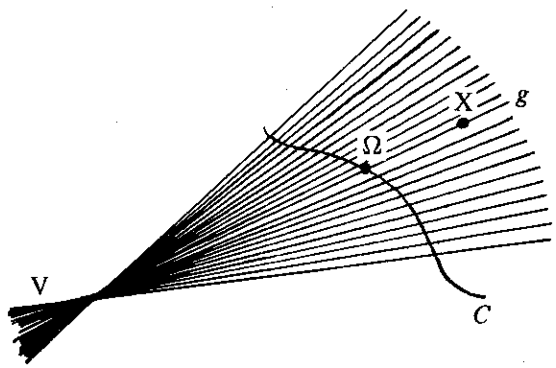
7.16. SUPERFICIE CONICA

Consideremos una curva C, llamada directriz, y un punto V no perteneciente a C, llamado vértice.

Definición

Superficie cónica de directriz C y vértice V es el conjunto de puntos de las rectas determinadas por V y todos los puntos de la directriz.





Las rectas consideradas se llaman generatrices.

Sea X un punto genérico de la superficie cónica; X pertenece a una generatriz, la c corta a la directriz en un punto Ω.

Entonces la ecuación vectorial de la superficie cónica es

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{V}\,\Omega}$$

O bien

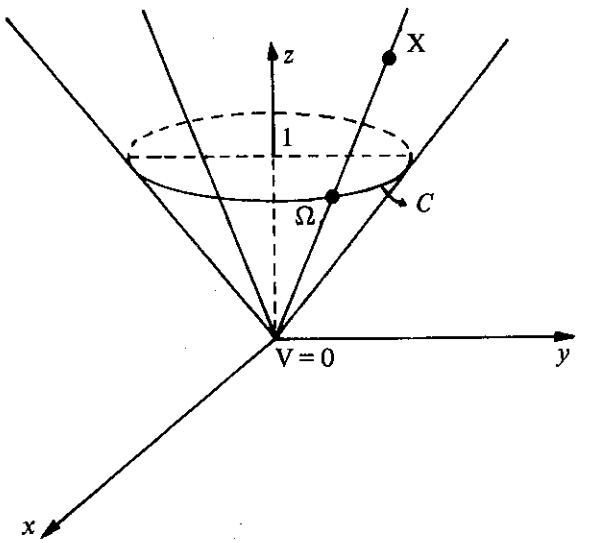
$$\mathbf{X} = \Omega + \lambda \overrightarrow{\mathbf{V}\,\Omega}$$

Ejemplo 7-22

Obtenemos la ecuación de la superficie cónica de directriz

$$C \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

y vértice V (0, 0, 0)



$$\Omega(\alpha, \beta, 1) \in C \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Como

$$\overrightarrow{\mathbf{V}\,\Omega} = (\alpha - 0)\,\mathbf{I} + (\beta - 0)\,\mathbf{J} = \alpha\,\mathbf{I} + \beta\,\mathbf{J}$$

y

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{V}\,\Omega},$$

resulta

$$x\,\mathbf{I} + y\,\mathbf{J} + z\,\mathbf{K} = \lambda(\alpha\,\mathbf{I} + \beta\,\mathbf{J} + \mathbf{K})$$

Luego

$$\begin{cases} x = \lambda\alpha \\ y = \lambda\beta \\ z = \lambda \end{cases}$$

De donde

$$\alpha = \frac{x}{z} \quad \wedge \quad \beta = \frac{y}{z}$$

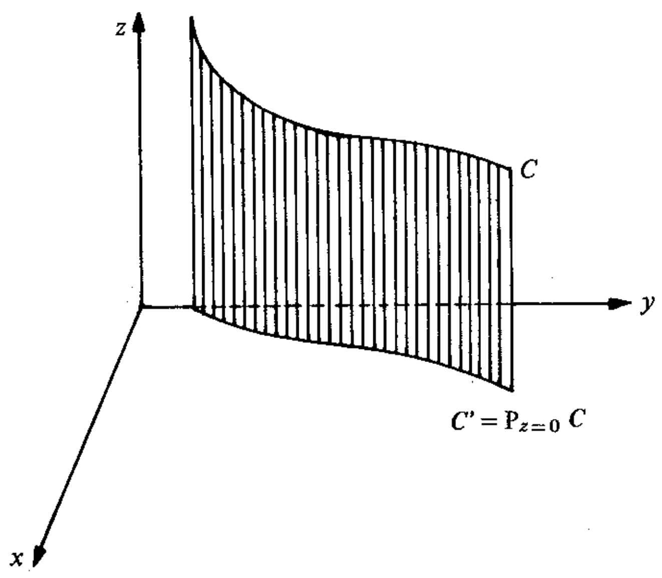
Sustituyendo en (1)

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0\,,$$

se obtiene la ecuación cartesiana implícita de la superficie cónica.

7.17. PROYECCION DE UNA CURVA SOBRE UN PLANO COORDENADO

En el cálculo de integrales múltiples suelen utilizarse a menudo las ecuaciones de la proyección de una curva sobre uno de los planos coordenados.



Sea la curva *C*, definida por el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 & (1) \\ G(x, y, z) = 0 & (2) \end{cases}$$

La superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje z, y de directriz C, se llama *cilindro proyectante* de C sobre el plano horizontal. Su ecuación es del tipo

$$f(x, y) = 0$$

y se obtiene eliminando z entre (1) y (2).

La intersección del cilindro proyectante con el plano de ecuación $z = 0$, es la proyección de C sobre el plano horizontal.

O sea-

$$C' = P_{z=0}\, C \quad \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para obtener la proyección de C sobre el plano $y\,z$ hay que eliminar x entre (1) y (2) y cortar el cilindro proyectante con el plano de ecuación $x = 0$.

Ejemplo 7-23

Determinamos las proyecciones, sobre los planos $x\,y$ y $x\,z$, de la curva

$$C \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = z & (2) \end{cases}$$

1. Eliminamos z entre (1) y (2)

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 1$$

Pasando a coordenadas polares

$$\rho^2 + \rho^4 = 1$$

Entonces

$$\rho^4 + \rho^2 - 1 = 0$$

Resolviendo respecto de ρ^2

$$\rho^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La única solución es

$$\rho^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

O sea

$$x^2 + y^2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

La proyección sobre el plano horizontal es la circunferencia de ecuaciones .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Su radio es

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

2. Si proyectamos sobre el plano $y\,z$, se elimina x entre (1) y (2) restándolas

$$z^2 = 1 - z$$

Se obtiene

$$z^2 + z - 1 = 0$$

O sea

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Y como $z \geqslant 0$, se tiene

$$z = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Resulta

$$P_{x=0}\, C \begin{cases} z = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7-24

Obtenemos la proyección de C sobre los planos $x\,y$ y $x\,z$, siendo

$$C \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 - x \;\; = 0 & (2) \end{cases}$$

1. La ecuación del cilindro proyectante de C sobre el plano horizontal es

$$x^2 + y^2 - x = 0 \quad (2)$$

ya que z no figura.
Luego

$$P_{z=0}\, C \begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

es la circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ y centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ del plano horizontal.

2. Restando (1) y (2)

$$z^2 + x = 1$$

Luego

$$\mathbf{P}_{y=0}\, C \begin{cases} z^2 = -x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

es la parábola de vértice $(1, 0)$ y eje $-x$ del plano $x\,z$.

TRABAJO PRACTICO VII

7-25. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Verificar que la función $\langle \, , \rangle : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $\langle X , Y \rangle =$
$= X^t \, A \, Y$ no es un producto interior en $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$.

7-26. Considerar la misma cuestión siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7-27. En $(V, +, \mathbf{R}, .)$ se sabe que $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Demostrar que $\mathbf{v}$ es ortogonal al subespacio generado por ellos.

7-28. En un espacio con producto interior el ángulo de los vectores $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ es α. Sabiendo que $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$, demostrar que

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 - 2 \, \|\mathbf{y}\| \, . \, \|\mathbf{z}\| \cos \alpha$$

7-29. Demostrar

$$|\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \Leftrightarrow \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ son L.D.}$$

7-30. En $\mathbf{R}^n$ se considera el producto interior definido por

$$\langle X , Y \rangle = X^t \, Y$$

Demostrar

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

7-31. En un espacio euclidiano n-dimensional los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son tales que $\langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij}$. Demostrar que tales vectores forman una base.

7-32. En un espacio euclidiano se considera la función

$$d : V^2 \to \mathbf{R}$$

definida por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Demostrar que (V, d) es un espacio métrico.

7-33. Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio vectorial con producto interior, y sea $\mathbf{y} \in V$. Demostrar que la función

$$f : V \to \mathbf{R}$$

definida por

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

es una forma lineal.

7-34. Sea $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interior en $(V, +, \mathbf{R}, .)$, y sea $f : V \to V$ una T. L. Demostrar que

$$\varphi : V^2 \to \mathbf{R}$$

tal que $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle$ es un producto interior en V, si f es $1 - 1$.

7-35. Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio euclidiano. Demostrar que la función

$$N : V \to \mathbf{R}$$

definida por

$$N(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle,$$

verifica:

1. $N(\alpha\, \mathbf{x}) = \alpha^2\, N(\mathbf{x})$
2. $N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - N(\mathbf{x}) - N(\mathbf{y}) = 2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
3. $\frac{1}{4} N(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \frac{1}{4} N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

7-36. Demostrar que en todo espacio euclidiano las diagonales de un *rombo* son perpendiculares.

7-37. Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio vectorial con producto interior.
Demostrar

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geqslant \big|\, \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \,\big|$
2. $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$
4. $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x} + \alpha\, \mathbf{y}\| \geqslant \|\mathbf{x}\|, \ \forall\, \alpha \in \mathbf{R}$

7-38. Sean: V un espacio vectorial euclidiano y $A \subset V$. Por definición, $\mathbf{x} \in V$ es ortogonal a A si y solo si

$$\mathbf{y} \in A \Rightarrow \mathbf{x} \perp \mathbf{y}$$

Demostrar que si $\mathbf{x}$ es ortogonal a A, entonces $\mathbf{x}$ es ortogonal a $\overline{A}$.

7-39. Demostrar que si V es un espacio euclidiano n-dimensional y S es un subespacio de dimensión m, tal que $m < n$, entonces existe un vector $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{x} \notin S$ tal que $\mathbf{x}$ es ortogonal a S.

7-40. Sean V y S como en el ejercicio anterior. Demostrar que existe un único subespacio T tal que

1. $\mathbf{x} \in T \Rightarrow \mathbf{x} \perp S$

2. $\dim T = n - m$

3. $V = S \oplus T$

7-41. En $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, .)$ se considera el producto interior habitual.

1. Obtener un vector unitario ortogonal a

$$\mathbf{v}_1 = (1, -1, 3) \text{ y } \mathbf{v}_2 = (2, 4, 3)$$

2. Obtener dos vectores unitarios ortogonales entre sí y ortogonales a

$$\mathbf{v} = (1, -1, 3)$$

3. Sea la base

$$[\mathbf{v}] = \left\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\right\}$$

Construir una base ortonormal a partir de $[\mathbf{v}]$ mediante el proceso de Gram Schmidt

7-42. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto ortogonal en $(V, +, \mathbf{R}, .)$ y sea

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$$

Demostrar que

$$a_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2}$$

7-43. Sean $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio euclidiano y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V tal que

$$\mathbf{x} \in V \wedge \mathbf{y} \in V \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

donde $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$ y $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mathbf{v}_i$

Demostrar que la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es ortonormal.

7-44. Sean: V un espacio euclidiano y $A \subset V$. Si $\Omega(A)$ denota el conjunto de todos los vectores ortogonales a A, entonces

$$\Omega\left(\Omega(A)\right) = \overline{A}$$

7-45. Demostrar que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal de $(V, +, \mathbf{R}, .)$, entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

7-46. En $(V, +, \mathbf{C}, .)$, la función

$$\langle\, , \rangle : V^2 \to \mathbf{C}$$

es un producto interior o hermitiano si y sólo si

i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$

ii) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$

iii) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

iv) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geqslant 0$

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial sobre **C**, con producto interior, se llama *unitario.*
Definiendo

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle},$$

demostrar que

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leqslant \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

7-47. Sean $P_1(1, -1, 1)$ y $P_2(-1, 1, 0)$. Obtener:

1. Las ecuaciones vectorial y cartesiana del plano perpendicular a la recta $P_1 \, P_2$ en P_1.
2. Las ecuaciones vectorial y cartesianas de la recta perpendicular al plano anterior, sabiendo que dicha recta pasa por $P_0(0, 2, -3)$.

7-48. Determinar el conjunto de los puntos del espacio que equidistan del plano

$$x + y = 1$$

y del punto F $(2, 2, 1)$.

7-49. Obtener las ecuaciones vectorial y cartesiana del plano paralelo al plano

$$a x + y - a = 0$$

que pasa por $P_0(a, a, 3)$.

7-50. Hallar la distancia entre el plano que contiene a las rectas

$$x = y = z$$

$$x - 1 = y + 2 = z$$

y el punto $P_0(-1, 0, 1)$.

7-51. Obtener las ecuaciones de la recta determinada por los planos

$$2x - y + z - 2 = 0$$

y

$$x + 2y - z + 1 = 0$$

7-52. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen y es paralela a la intersección de los planos

$$2x + y - z = 0$$

y

$$x - 2y + z = 5$$

7-53. Obtener la ecuación de la superficie cilíndrica de directriz

$$C \begin{cases} x^2 + \dfrac{z^2}{2} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

y cuyas generatrices son paralelas al vector $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}$.

7-54. Determinar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la curva del ejercicio *7-53*, y cuyo vértice es V (0, −1, 1).

7-55. Obtener las proyecciones de la curva

$$C \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

sobre los tres planos coordenados.

7-56. Por cada punto de la recta

$$r \begin{cases} x + z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Se considera la perpendicular a la recta

$$e \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Obtener la ecuación del conjunto de puntos de tales perpendiculares.

7-57. Hallar las ecuaciones vectorial y cartesiana del helicoide recto, que se define como el conjunto de puntos de las rectas que pasan por todos los puntos de una hélice circular y que son perpendiculares al eje de ésta.

7-58. Sea $(V, +, \mathbf{C}, .)$ un espacio unitario, y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ortonormal del mismo.
Demostrar que

$$\langle X, Y \rangle = X^t \, \overline{Y}$$

siendo $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$ y $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{v}_i$

7-59. Sea $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz ortogonal. Demostrar que las líneas de P constituyen una base ortonormal de R^n, considerando el producto interior habitual.

7-60. Sea $P \in R^{n \times n}$ una matriz ortogonal tal que $p_{nj} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall_j = 1, 2, \ldots, n$. Demostrar que

$$i < j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$$

7-61. Sea $\dim_{\mathbf{K}} V = n \geqslant 1$ y sea $\langle \, , \rangle$ un producto interior en V.
Demostrar que si $f \in V^*$, entonces existe un único vector $\mathbf{x} \in V$, tal que $f(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\forall \mathbf{y} \in V$.

7-62. Sean: un espacio unitario V de dimensión finita y $[\nu] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ una base ortonormal del mismo.

Demostrar que

$$\mathbf{x} \in V \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$$

Capítulo 8

VALORES Y VECTORES PROPIOS. DIAGONALIZACION

8.1. INTRODUCCION

Desarrollamos en este capítulo los conceptos de valores y vectores propios de un endomorfismo en un espacio vectorial y de la matriz asociada en el caso de dimensión finita. Demostramos las propiedades fundamentales de los mismos y su determinación a partir del polinomio característico. Encaramos después el problema de la diagonalización de trasformaciones lineales y matrices, así como también el de la triangulación. Por último, demostramos el teorema de Hamilton-Cayley.

8.2. VALORES Y VECTORES PROPIOS

8.2.1. Concepto

Consideremos un espacio vectorial $(V, +, K, .)$ y un endomorfismo

$$f : V \to V$$

Definición

El escalar $\lambda \in K$ es un valor propio de f si y sólo si existe un vector no nulo $\mathbf{x} \in V$, tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda\, \mathbf{x}$.

Todo vector no nulo que satisfaga la condición anterior se llama vector propio de f, asociado al valor propio λ.

En consecuencia, un vector propio de un endomorfismo es un vector no nulo cuya imagen es un múltiplo escalar del mismo.

Las expresiones "valor propio", "valor característico" y "autovalor" son sinónimas. También lo son "vector propio", "vector característico" y "autovector".

Ejemplo 8-1

Considerando $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ y la trasformación lineal

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

definida por

$$f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_1 - 2x_2) \ ,$$

el escalar $\lambda = 2$ es un valor propio de f, ya que el vector no nulo (2, 1) es tal que

$$f(2, 1) = (4, 2) = 2\,(2, 1)$$

(2, 1) es un vector propio asociado al valor propio 2.

8.2.2. Propiedad

Si λ es un valor propio de una trasformación lineal $f : V \to V$, y si S'_λ es el conjunto de los vectores propios asociados a λ, entonces $S_\lambda = S'_\lambda \cup \{\mathbf{0}\}$ es un subespacio de V.

En efecto:

1. $\mathbf{0} \in S_\lambda \Rightarrow S_\lambda \neq \phi$.
2. $S_\lambda \subset V$ por definición de S_λ.
3. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecientes a S_λ.

   Si $\mathbf{x} = \mathbf{0} \vee \mathbf{y} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S_\lambda$.
   Supongamos que $\mathbf{x} \neq 0$ e $\mathbf{y} \neq 0$

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \ \wedge \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \in S'_\lambda \wedge \mathbf{y} \in S'_\lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x} \wedge f(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S'_\lambda \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S_\lambda$$

4. Sean $\alpha \in K$ y $\mathbf{x} \in S_\lambda$.

Si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\alpha = 0$, entonces $\alpha\,\mathbf{x} \in S_\lambda$.

Consideremos el caso en que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\alpha \neq 0$:

$$\alpha \in K \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \in \ K \wedge \mathbf{x} \in S'_\lambda \Rightarrow \alpha \in K \wedge f(\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha\,(\lambda\,\mathbf{x}) \Rightarrow f(\alpha\,\mathbf{x}) = \lambda\,(\alpha\,\mathbf{x}) \Rightarrow \alpha\,\mathbf{x} \in S'_\lambda \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha\,\mathbf{x} \in S_\lambda$$

En consecuencia, $(S_\lambda, +, K, .)$ es un subespacio de $(V, +, K, .)$.

De acuerdo con lo demostrado en 4., afirmamos que si $\mathbf{x}$ es un vector propio de f asociado a λ, y $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha\,\mathbf{x}$ es un vector propio asociado al mismo valor propio.

Observamos también que la restricción de f a S_λ es una homotecia de razón λ.

8.2.3. Valores y vectores propios de una matriz

Definición

El escalar λ es un valor propio de la matriz $A \in K^{n \times n}$ si y solo si existe un vector no nulo $\mathbf{X} \in K^{n \times 1}$ tal que $\mathbf{AX} = \lambda\,\mathbf{X}$

Un vector no nulo que satisfaga la relación $\mathbf{AX} = \lambda\,\mathbf{X}$ se llama vector propio de A asociado al valor propio λ.

Afirmamos entonces que un vector propio de una matriz $A \in K^{n \times n}$ es un vector propio de la trasformación lineal de K^n en K^n representada por A en la base canónica.

Ejemplo 8-2.

Si V es el espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales, de las funciones $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ infinitamente derivables y

$$D : V \to V$$

es el endomorfismo definido por

$$D(\mathbf{f}) = \frac{d\,\mathbf{f}}{d\,x} \;,$$

entonces la función $\mathbf{f} \in V$, tal que $\mathbf{f}(x) = e^{\lambda x}$ es un vector propio de la trasformación lineal D, pues

$$D(\mathbf{f}) = \frac{d\,\mathbf{f}}{d\,x} = \lambda\, e^{\lambda x} \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R}$$

Ejemplo 8-3

Si $A \in K^{n \times n}$ es una matriz diagonal, entonces cualquier vector canónico $E_i \in K^{n \times 1}$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$, es un vector propio de A.

En efecto, sea

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A\,\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = d_i\,\mathbf{E}_i$$

Los valores propios de A son los elementos de la diagonal.

8.2.4. Propiedad

Los vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

Sean

$$f : V \to V$$

una trasformación lineal y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tales que

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$$

Demostraremos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes.

1. $n = 1 \Rightarrow \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_1$ es L.I.

2. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h\}$ es L.I. $\Rightarrow \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h, \mathbf{x}_{h+1}\}$ es L.I.

En efecto, consideremos

$$\sum_{i=1}^{h+1} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (1)$$

Multiplicamos por λ_{h+1}

$$\alpha_1 \lambda_{h+1} \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_h \lambda_{h+1} \mathbf{x}_h + \alpha_{h+1} \lambda_{h+1} \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{0}$$

Aplicando f a (1)

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_h \lambda_h \mathbf{x}_h + \alpha_{h+1} \lambda_{h+1} \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{0}$$

Restamos estas dos igualdades

$$\alpha_1 (\lambda_{h+1} - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_h (\lambda_{h+1} - \lambda_h) \mathbf{x}_h = \mathbf{0}$$

Por la hipótesis inductiva resulta

$$\alpha_i (\lambda_{h+1} - \lambda_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, h$$

Y como $\lambda_{h+1} - \lambda_i \neq 0$, resulta

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, h$$

Sustituyendo en (1), se tiene

$$\alpha_{h+1} \mathbf{x}_{h+1} = \mathbf{0}$$

O sea $\alpha_{h+1} = 0$, ya que $\mathbf{x}_{h+1} \neq \mathbf{0}$

En consecuencia

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_h = \alpha_{h+1} = 0$$

Y por lo tanto

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\} \text{ es L.I.}$$

8.2.5. Propiedad

Si f es una trasformación lineal del espacio vectorial V, de dimensión finita, en sí mismo, entonces $\lambda \in K$ es un valor propio de f si y sólo si $f - \lambda i$ es singular.

i denota la trasformación identidad en V.

1. Sea λ un valor propio de f. Entonces existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en V, tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$

Ahora bien

$$f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow f(\mathbf{x}) - \lambda i(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\mathbf{x}) - (\lambda i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow (f - \lambda i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

En consecuencia, $N(f - \lambda i) \neq \{\mathbf{0}\}$, o sea, $f - \lambda i$ es singular.

2. Supongamos ahora que $f - \lambda i$ es singular, o sea, no inversible. Esto significa que $f - \lambda i : V \to V$ es tal que $N(f - \lambda i) \neq \{\mathbf{0}\}$. En consecuencia, existe $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $(f - \lambda i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. De acuerdo con el álgebra de las trasformaciones lineales, se tiene

$$f(\mathbf{x}) - (\lambda i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Es decir

$$f(\mathbf{x}) = \lambda i(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

y por consiguiente λ es un valor propio de f.

En términos de matrices esta propiedad se traduce de la siguiente manera:
Si $A \in K^{n \times n}$, entonces $\lambda \in K$ es un valor propio de A si y sólo si $A - \lambda I$ es singular.
Equivalentemente

$$\lambda \text{ es un valor propio de } A \in K^{n \times n} \Leftrightarrow D(A - \lambda I) = 0$$

Ejemplo 8-4

El lector podrá demostrar, al realizar el trabajo práctico, que todo endomorfismo en V, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y mayor o igual que 1 sobre el cuerpo de los complejos, admite un vector propio.
Pero si el cuerpo no es $\mathbf{C}$, entonces pueden no existir vectores propios. En efecto, sea $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{R}, .)$ y sea

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

tal que

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta,\ x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta)$$

Si existiera $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, tal que para algún $\lambda \in \mathbf{R}$

$$f(x_1, x_2) = \lambda (x_1, x_2),$$

entonces

$$\begin{cases} x_1 \cos\theta - x_2 \operatorname{sen}\theta = \lambda x_1 \\ x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta = \lambda x_2 \end{cases}$$

O sea

$$\begin{cases} (\lambda - \cos\theta) x_1 + x_2 \operatorname{sen}\theta = 0 \\ - x_1 \operatorname{sen}\theta + (\lambda - \cos\theta) x_2 = 0 \end{cases}$$

Si el sistema admite soluciones no triviales debe ser

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \lambda - \cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

Luego

$$(\lambda - \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 0$$
$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$$
$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$$

Si $\theta = 60°$, entonces

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \notin \mathbf{R}$$

Sólo existen vectores propios si $\theta = n\,\pi$.
Considerando $(\mathbf{R}^2, +, \mathbf{C}, .)$ existen valores y vectores propios. El endomorfismo f representa una rotación del plano de ángulo θ alrededor del origen.

8.2.6. Propiedad

Si $f : V \to V$ es una trasformación lineal, y si además existe una base $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ formada por los vectores propios de f correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces la matriz de f respecto de esta base es la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En efecto, la matriz de f respecto de $[\mathbf{v}]$ se obtiene determinando las imágenes de los vectores de dicha base, y teniendo en cuenta la definición de vector propio es

$$\begin{cases} f(\mathbf{v}_1) = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 = \lambda_1\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\,\mathbf{v}_n \\ f(\mathbf{v}_2) = \lambda_2\,\mathbf{v}_2 = 0\,\mathbf{v}_1 + \lambda_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\,\mathbf{v}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(\mathbf{v}_n) = \lambda_n\,\mathbf{v}_n = 0\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n\,\mathbf{v}_n \end{cases}$$

En consecuencia, resulta

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

En este caso diremos que la trasformación lineal f es *diagonalizable.*

Una consecuencia del teorema demostrado es la siguiente:

Si $\dim V = n$ y $f : V \to V$ es un endomorfismo que admite n valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.

Esta afirmación es obvia en virtud del teorema anterior y de 8.2.4.

En términos de matrices diremos que si $A \in K^{n\times n}$ admite n valores propios distintos, entonces existe $P \in K^{n\times n}$ no singular, tal que

$$P^{-1}\, A\, P \text{ es diagonal}$$

Ejemplo 8-5

Determinamos los valores y vectores propios de A, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con 8.2.5., consideremos

$$D(A - \lambda I) = 0$$

O sea

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolvemos respecto de λ

$$(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Las raíces son:

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 4$$

Para cada λ resolvemos el sistema

$$(A - \lambda I)\, \mathbf{X} = 0$$

1. $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

El sistema es equivalente a

$$x_1 - x_2 = 0$$

De donde

$$x_1 = x_2$$

Luego

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}_1$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$.

2. $\lambda_2 = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2 \Rightarrow \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{X}_2$ es un vector propio asociado a λ_2.
Los vectores $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son L.I. y forman una base de $\mathbf{R}^2$.
A es diagonalizable, y su forma diagonal es

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si P es la matriz cuyas columnas son los vectores propios, entonces es

$$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{D}$$

8.3. POLINOMIO CARACTERISTICO DE UNA MATRIZ

8.3.1. Nota sobre polinomios

Sea K [X] el anillo de polinomios del cuerpo K (véase capítulo 12 de *Algebra I*, del mismo autor).

Si $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$, escribimos

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{X}^i$$

donde $a_i \in \mathrm{K}$ y $a_n \neq 0$, o sea $g\,\mathrm{P} = n$.

Dada la matriz cuadrada A, definimos

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{A}^i$$

Haciendo $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}$, se tiene

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = a_n \mathrm{A}^n + a_{n-1} \mathrm{A}^{n-1} + \ldots + a_1 \mathrm{A} + a_0 \mathrm{I}$$

La matriz P (A) es la especialización de X por A.

Ejemplo 8-6

En R [X] consideremos

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\,\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$$

y sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$P(A) = 2A^2 - A - I =$$

$$= 2\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se verifica que

1. $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$
2. $(P \,.\, Q)(A) = P(A) \,.\, Q(A)$
3. $(\alpha P)(A) = \alpha P(A)$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son elementos de K y

$$P(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n),$$

entonces es

$$P(A) = (A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \ldots (A - \alpha_n I)$$

Ejemplo 8-7

Si $A \in K^{n \times n}$, entonces existe un polinomio no nulo $P \in K[X]$ tal que $P(A) = N$, donde N denota la matriz nula del tipo $n \times n$.

En efecto, la dimensión de $(K^{n\times n}, +, K, .)$ es n^2. Esto significa que las matrices

$$I, A, A^2, \ldots, A^m$$

son linealmente dependientes si $m > n^2$.

En consecuencia, existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, no todos nulos, tales que

$$a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I = N$$

O sea, existe

$$P(X) = a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots + a_1 X + a_0$$

en K [X], que satisface

$$P(A) = N$$

8.3.2. Polinomio característico

Definición

Polinomio característico de una matriz $A \in K^{n \times n}$ es el determinante de la matriz $\lambda I - A$.

O sea

$$P(\lambda) = D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna y reiterando el procedimiento en los sucesivos cofactores, se obtiene una suma del tipo

$$(\lambda - a_{11}) \dots (\lambda - a_{nn}) + \dots$$

donde los términos, a partir del primero, son de grado menor que n.

Resulta

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$$

Ejemplo 8-8

Determinamos el polinomio característico de A, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ 3 & 6 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ 6 & \lambda + 6 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 6 & \lambda + 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ \lambda - 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda) + 2(-2\lambda) + 3 \cdot 2\lambda$$

$$= \lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 4\lambda + 6\lambda = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda$$

Una raíz es $\lambda_1 = 0$. Las otras dos lo son de

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6$$

O sea

$$\lambda = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

Resulta

$$\lambda_2 = -3 \qquad \lambda_3 = -2$$

8.3.3. Propiedad

El escalar λ es un valor propio de $A \in K^{n \times n}$ si y sólo si λ es raíz del polinomio característico de A.

1. Sea λ un valor propio de A. Entonces, de acuerdo con 8.2.5., $A - \lambda I$ es singular, y por consiguiente también lo es $\lambda I - A$, o sea, $D(\lambda I - A) = 0$.
   En consecuencia, λ es una raíz del polinomio característico.
2. Supongamos que λ sea una raíz del polinomio característico de A. Entonces es
   $$D(\lambda I - A) = 0$$
   O sea, $\lambda I - A$ y $A - \lambda I$ son singulares. Esto significa que λ es un valor propio de A, por 8.2.5.

Usualmente, la determinación de los valores propios de una matriz, es decir, de las raíces de su polinomio característico, no es simple. Los métodos adecuados a este fin son temas de Cálculo Numérico, que no trataremos en este texto.

Ejemplo 8-9

Determinamos los valores y vectores propios de $A \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$P(\lambda) = D \quad (\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 + 4$$

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda - 2 = \pm 2i \Rightarrow \lambda = 2 \pm 2i$$

Los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 2 + 2i \qquad \lambda_2 = 2 - 2i$$

Para determinar un vector propio asociado a λ resolvemos el sistema lineal

$$(\lambda I - A)\,\mathbf{X} = 0$$

En efecto, si $\mathbf{X}$ es un vector propio asociado a λ, por 8.2.3. se tiene

$$A\,\mathbf{X} = \lambda\,\mathbf{X}$$

De donde

$$\lambda\,\mathbf{X} - A\,\mathbf{X} = 0$$

O sea

$$\lambda I\,\mathbf{X} - A\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Por distributividad es

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\, \mathbf{X} = 0$$

1. $\lambda_1 = 2 + 2i \Rightarrow \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2i\, x_1 - 2\, x_2 = 0 \\ 2\, x_1 + 2i\, x_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow i x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = i x_1$

Un vector propio es $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

2. $\lambda_2 = 2 - 2i \Rightarrow \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\; 2x_1 - 2i\, x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = i\, x_2$

Un vector propio asociado a λ_2 es

$$\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, entonces es

$$\mathrm{P}^{-1}\, \mathrm{A}\, \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 + 2i & 0 \\ 0 & 2 - 2i \end{pmatrix}$$

La matriz A ha sido diagonalizada.

Ejemplo 8-10

Probaremos ahora que los valores propios de toda matriz involutiva son 1 o –1.
Sea $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times n}$, tal que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}$.
Si $\mathbf{X} \in \mathrm{K}^{n \times 1}$ es un vector propio asociado al valor propio λ, entonces

$$\mathrm{A}\, \mathbf{X} = \lambda\, \mathbf{X} \quad (1)$$

Premultiplicando por A

$$\mathrm{A}^2\, \mathbf{X} = \lambda\, \mathrm{A}\, \mathbf{X}$$

Como $\mathrm{A}^2 = \mathrm{I}$, se tiene

$$\mathrm{I}\, \mathbf{X} = \lambda\, \mathbf{A}\, \mathbf{X}$$

O sea

$$\mathbf{X} = \lambda\, \mathbf{A}\, \mathbf{X} \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce

$$\mathbf{X} = \lambda\, \lambda\, \mathbf{X}$$

Es decir

$$(1 - \lambda^2)\, \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, resulta $1 - \lambda^2 = 0$, y en consecuencia $\lambda = \pm 1$.

Con procedimiento análogo el lector podrá comprobar que los valores propios de toda matriz idempotente son 0 o 1, es decir

$$A^2 = A \Rightarrow \lambda = 1 \;.\; \lambda = 0$$

8.3.4. Propiedad

Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, y en consecuencia los mismos valores propios.

Hipótesis) $A \sim B$ en $K^{n \times n}$

Tesis) $D(\lambda I - A) = D(\lambda I - B)$

Demostración)

$$A \sim B \Rightarrow \exists\, P \text{ no singular} \,/\, B = P^{-1} A P \quad \text{Por 4.19.5.}$$

Entonces es

$$\begin{aligned} D(\lambda I - B) &= D(\lambda P^{-1} I P - P^{-1} A P) = \\ &= D[P^{-1}(\lambda I - A) P] = D(P^{-1}) D(\lambda I - A) D(P) = \\ &= D(P^{-1}) D(P) D(\lambda I - A) = D(P^{-1} P) D(\lambda I - A) = \\ &= D(I) D(\lambda I - A) = 1 \,.\, D(\lambda I - A) = D(\lambda I - A) \end{aligned}$$

La recíproca no es cierta, ya que dos matrices pueden tener los mismos valores propios y no ser semejantes.

Un contraejemplo se presenta considerando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.3.5. Polinomio característico de una trasformación lineal

Sea $f: V \to V$ una trasformación lineal y sea $[v] = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ una base de V. Entonces f está caracterizada por una matriz $A \in K^{n \times n}$ respecto de $[v]$.

Si $[v'] = \{ v'_1, v'_2, \ldots, v'_n \}$ es otra base de V, entonces existe una matriz no singular $P \in K^{n \times n}$ tal que la matriz de f, respecto de la base $[v']$, verifica

$$B = P^{-1} A P$$

Las matrices A y B admiten el mismo polinomio característico, de acuerdo con 8.3.4. El polinomio característico de cualquiera de las matrices que caracterizan a f se llama polinomio característico de la trasformación lineal.

8.4. DIAGONALIZACION DE MATRICES

8.4.1. Definición

Una matriz $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable si y sólo si es semejante a una matriz diagonal. O sea

$$A \in K^{n \times n} \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow \exists\, P \text{ no singular} / P^{-1}\, A\, P = D$$

donde D es diagonal.

8.4.2. Propiedad

Si $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable, entonces su forma diagonal es $D = (\lambda_i\, \delta_{ij})$, donde λ_i con $i = 1, 2, \ldots, n$ son los valores propios de A.

En efecto:

$$A \text{ es diagonalizable} \Rightarrow A \sim D \Rightarrow D\,(\lambda I - D) = \begin{vmatrix} \lambda - d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda - d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - d_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\lambda - d_i)$$

El polinomio característico de A es

$$P(\lambda) = (\lambda - d_1)\,(\lambda - d_2) \ldots (\lambda - d_n)$$

En consecuencia, los elementos de la matriz diagonal son los valores propios de A.

8.4.2. Propiedad

Una matriz $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable si y sólo si A admite n vectores propios linealmente independientes.

1. Sea A diagonalizable.

$$A \text{ es diagonalizable} \Rightarrow A \sim D \Rightarrow \exists\, P \text{ no singular} / P^{-1}\, A\, P = D \Rightarrow A\, P = P\, D \quad (1)$$

Particionando P en vectores columna, o sea

$$P = (\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathbf{X}_n),$$

es

$$P\, D = (\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathbf{X}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \mathbf{X}_1\ \ \lambda_2 \mathbf{X}_2\ \cdots\ \lambda_n \mathbf{X}_n) \quad (2)$$

Además

$$\mathrm{A\,P} = \mathrm{A}\,(\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathbf{X}_n) = (\mathrm{A}\,\mathbf{X}_1\ \mathrm{A}\,\mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathrm{A}\,\mathbf{X}_n) \quad (3)$$

De (1), (2), y (3) resulta

$$\mathrm{A}\,\mathbf{X}_i = \lambda_i\,\mathbf{X}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Luego las columnas de P son n vectores propios de A, y como P es no singular, tales columnas son L.I.

En consecuencia, A admite n vectores propios L.I.

2. A admite n vectores propios L.I.
   Sean tales vectores propios: $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$.
   Por definición es

$$\mathrm{A}\,\mathbf{X}_i = \lambda_i\,\mathbf{X}_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Sean

$$\mathrm{P} = (\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathbf{X}_n) \text{ y } \mathrm{D} = (\lambda_i\,\delta_{ij})$$

Se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{A\,P} &= (\mathrm{A}\,\mathbf{X}_1\ \ \mathrm{A}\,\mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathrm{A}\,\mathbf{X}_n) = (\lambda_1\,\mathbf{X}_1\ \ \lambda_2\,\mathbf{X}_2\ \ldots\ \lambda_n\,\mathbf{X}_n) = \\ &= (\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2\ \ldots\ \mathbf{X}_n)\,(\lambda_i\,\delta_{ij}) = \mathrm{P\,D}\end{aligned}$$

Como P es no singular resulta

$$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A\,P} = \mathrm{D}$$

O sea, A es diagonalizable.

8.4.3. Raíces del polinomio característico y diagonalización

De acuerdo con 8.2.4., si los valores propios del polinomio característico de $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n\times n}$ son elementos distintos de K, entonces los vectores propios asociados son linealmente independientes, y, por 8.4.2.2., A es diagonalizable.

En general, si el polinomio característico de A tiene raíces múltiples, la matriz no es diagonalizable. Para que lo sea, debe cumplirse la condición suficiente demostrada en 8.4.2., lo que significa que a toda raíz múltiple de orden p debe corresponderle un sistema lineal y homogéneo cuyo espacio solución tenga dimensión p.

Ejemplo 8-11

La matriz

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

Determinamos los valores propios

$$P(\lambda) = D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Los vectores propios asociados a esta raíz triple satisfacen a

$$(\lambda I - A) X = 0$$

O sea

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{cases} 0 x_1 - x_2 + 0 x_3 = 0 \\ 0 x_1 + 0 x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

El rango de la matriz de coeficiente es 2, y en consecuencia es

$$\dim S = 3 - 2 = 1$$

O sea, hay un solo vector propio linealmente independiente de la matriz A. Por consiguiente, A no es diagonalizable.

Ejemplo 8-12

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y sus valores propios no son todos distintos.
En efecto:

$$P(\lambda) = D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 0 & 4 \\ -4 & \lambda - 1 & -4 \\ -2 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 4 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \ , \ \lambda_3 = -1$$

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La matriz del sistema tiene rango 1, o sea

$$\dim S = 3 - 1 = 2$$

2. A $\lambda_3 = -1$ le corresponde un vector propio linealmente independiente. Luego A es diagonalizable y su forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8.5. TRIANGULACION DE ENDOMORFISMOS Y DE MATRICES

Hemos visto que no siempre es posible diagonalizar una trasformación lineal o una matriz cuadrada. Cabe preguntarse si es posible determinar una base tal que, respecto de ella, la matriz de una trasformación lineal de un espacio de dimensión finita en sí mismo sea triangular. La respuesta es afirmativa si el cuerpo es el de los números complejos.

Consideremos un endomorfismo

$$f : V \to V$$

donde $\dim_K V = n \geqslant 1$.

En lo que sigue, introduciremos el vocablo *fan*, cuya traducción es *abanico*, para denotar una familia de subespacios de V que satisface ciertas condiciones.

8.5.1. Concepto

Un fan de f en V es una n-upla de subespacios de V: $S_1, S_2, \ldots, S_n$, tales que

i) Son crecientes en el sentido de inclusión:

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots \subset S_n$$

ii) $\dim S_i = i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$

iii) Son invariantes, o sea

$$x \in S_i \Rightarrow f(x) \in S_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Esta condición equivale a

$$f(S_i) \subset S_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Es obvio que $S_n = V$.

Definición

Si $\{ S_1, S_2, \ldots, S_n \}$ es un fan de f en V, entonces la familia $[v] = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$

es una base fan de V si y sólo si $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i \}$ es una base de S_i para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

El teorema de extensión 2.6.3. nos permite afirmar que existe una base fan.

8.5.2. Propiedad

Si $[\mathbf{v}]$ es una base fan de V, entonces la matriz asociada a todo endomorfismo $f : V \to V$ es triangular superior.

Sabemos que para obtener la matriz de f respecto de una base, hay que determinar las imágenes de los vectores de la misma y expresarlos como combinaciones lineales de tales vectores. Teniendo en cuenta además la definición de subespacio invariante, resulta

$$\mathbf{v}_1 \in S_1 \Rightarrow f(\mathbf{v}_1) \in S_1 \Rightarrow f(\mathbf{v}_1) = a_{11}\, \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_2 \in S_2 \Rightarrow f(\mathbf{v}_2) \in S_2 \Rightarrow f(\mathbf{v}_2) = a_{12}\, \mathbf{v}_1 + a_{22}\, \mathbf{v}_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{v}_n \in S_n \Rightarrow f(\mathbf{v}_n) \in S_n \Rightarrow f(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\, \mathbf{v}_1 + a_{2n}\, \mathbf{v}_2 + \ldots + a_{nn}\, \mathbf{v}_n$$

Por consiguiente, la matriz de f respecto de la base fan es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si $f : V \to V$ es una trasformación lineal y si existe una base respecto de la cual la matriz de f es triangular, entonces diremos que f es triangulable.

En términos de matrices, diremos que $A \in K^{n \times n}$ es triangulable si y sólo si existe $P \in K^{n \times n}$ no singular, tal que $P^{-1}\, A\, P$ es triangular. Demostraremos que toda matriz puede ser triangulada sobre el cuerpo **C**.

8.5.3. Propiedad

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita mayor o igual que 1, sobre el cuerpo de los complejos, y si $f : V \to V$ es una trasformación lineal, entonces existe un fan de f en V.

Demostramos esta afirmación inductivamente.

1. Si $\dim V = 1$, entonces nada hay que probar.

2. Supongamos que la propiedad es válida si $\dim V = n - 1$. Demostraremos que lo es si $\dim V = n$.

Sea $\mathbf{v}_1$ un vector propio de f, el cual existe de acuerdo con el ejercicio 8-46, y sea S_1 el subespacio generado por $\mathbf{v}_1$. Resulta $\dim S_1 = 1$.

Siendo S_1 un subespacio de V, existe un subespacio W cuya suma directa con S_1 es V (ejercicio 7-40), o sea

$$V = S_1 \oplus W$$

Consideremos las proyecciones p_1 y p_2 de V sobre S_1 y W, respectivamente.

La composición $p_2 \circ f$ es una trasformación lineal de V en V tal que si $\mathbf{x} \in W$, entonces $f(\mathbf{x}) \in W$. Restringiendo el dominio a W, podemos considerar a $p_2 \circ f$ como una trasformación lineal de W en W. De acuerdo con la hipótesis inductiva, existe un fan de $p_2 \circ f$ en W. Sea éste

$$\{ W_1, W_2, \ldots, W_{n-1} \}$$

Consideremos ahora los subespacios

$$S_i = S_1 + W_{i-1}$$

para $i = 2, 3, \ldots, n$.

Se verifica que $\dim S_i = i$, ya que si $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-1} \}$ es una base de W, entonces $\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{i-1} \}$ es una base de S_i, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Además, $S_i \subset S_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Para demostrar que $\{ S_1, S_2, \ldots, S_n \}$ es un fan de f en V, es suficiente probar que $f(V_i) \subset V_i$.

Observamos que

$$f = i_V \circ f = (p_1 + p_2) f = p_1 \circ f + p_2 \circ f \quad (1)$$

pues $p_1 + p_2 = i_V$ (ver 3-46)

Sea $\mathbf{x}$ un vector cualquiera de S_i :

$$\mathbf{x} \in S_i \Rightarrow \mathbf{x} = a\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_i \text{ , donde } a \in \mathbf{C} \text{ y } \mathbf{w}_i \in W_i$$

Teniendo en cuenta (1) es

$$f(\mathbf{x}) = (p_1 \circ f + p_2 \circ f)(\mathbf{x}) = (p_1 \circ f)(\mathbf{x}) + (p_2 \circ f)(\mathbf{x}) \quad (2)$$

Ahora bien

$$(p_1 \circ f)(\mathbf{x}) = p_1 \, [f(\mathbf{x})] \in S_1, \text{ y en consecuencia}$$

$$(p_1 \circ f)(\mathbf{x}) \in S_i \quad (3)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}(p_2 \circ f)(\mathbf{x}) &= (p_2 \circ f)(a\mathbf{v}_1) + (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i) = a\, p_2 \left(f(\mathbf{v}_1) \right) + (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i) = \\ &= a\, p_2 (\lambda_1 \mathbf{v}_1) + (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i) = a \lambda_1 p_2 (\mathbf{v}_1) + (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i) = \mathbf{0} + (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i) = \\ &= (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i)\end{aligned}$$

de acuerdo con la descomposición de $\mathbf{x}$, la definición de trasformación lineal, y considerando que $\mathbf{v}_1$ es un vector propio de f. Por la hipótesis inductiva se sabe que $(p_2 \circ f)(W_i) \subset W_i$, y por consiguiente

$$(p_2 \circ f)(\mathbf{x}) = (p_2 \circ f)(\mathbf{w}_i) \in W_i$$

O sea

$$(p_2 \circ f)(\mathbf{x}) \in S_i \quad (4)$$

Considerando (2), (3) y (4) resulta

$$f(\mathrm{x}) \in \mathrm{S}_i$$

Es decir

$$\mathrm{x} \in \mathrm{S}_i \Rightarrow f(\mathrm{x}) \in \mathrm{S}_i$$

Luego $\{ \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_n \}$ es un fan de f en V.

Son consecuencias inmediatas de este teorema de existencia y de 8.5.2., las siguientes:

I. Si $\dim_{\mathrm{C}} \mathrm{V} = n \geqslant 1$ y $f : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ es una trasformación lineal, entonces existe una base de V tal que la matriz de f respecto de dicha base es triangular superior.

II. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{C}^{n\times n}$, entonces existe $\mathrm{P} \in \mathrm{C}^{n\times n}$, no singular, tal que $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ es triangular superior.

8.6. TEOREMA DE HAMILTON–CAYLEY

El teorema de Hamilton-Cayley, fundamental en la teoría de la resolución de ecuaciones matriciales, afirma que toda matriz cuadrada es raíz de su polinomio característico, esto es, si $\mathrm{P}(\lambda)$ es el polinomio característico de $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n\times n}$, entonces $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{N}$.

Desarrollaremos primero una demostración en el caso particular que se presenta si la matriz A, del tipo $n \times n$, admite n vectores propios.

Para esto utilizaremos la siguiente propiedad que se propone como ejercicio del trabajo práctico: si $\mathbf{X}_i$ es un vector propio de la matriz A, asociado al valor propio λ_i, entonces $\mathbf{X}_i$ es un vector propio de la matriz A^n, correspondiente al valor propio λ_i^n.

Consideremos el polinomio característico de A

$$\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\,\lambda + c_0$$

Entonces

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n + c_{n-1}\,\mathrm{A}^{n-1} + \ldots + c_1\,\mathrm{A} + c_0\,\mathrm{I}$$

Multiplicando a derecha por el vector propio X_i asociado al valor propio λ_i, y teniendo en cuenta la propiedad mencionada, es

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathbf{X}_i &= \mathrm{A}^n\,\mathbf{X}_i + c_{n-1}\,\mathrm{A}^{n-1}\,\mathbf{X}_i + \ldots + c_1\,\mathrm{A}\,\mathbf{X}_i + c_0\,\mathbf{X}_i = \\
&= \lambda_i^n\,\mathrm{X}_i + c_{n-1}\,\lambda_i^{n-1}\,\mathrm{X}_i + \ldots + c_1\,\lambda_i\,\mathbf{X}_i + c_0\,\mathbf{X}_i = \\
&= (\lambda_i^n + c_{n-1}\,\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_1\,\lambda_i + c_0)\,\mathrm{X}_i = \\
&= 0\,\mathbf{X}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \quad (1)
\end{aligned}$$

Sea $\mathrm{P} = (\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2 \ldots \mathbf{X}_n)$ la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A. Considerando (1), se tiene

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) \,.\, \mathrm{P} = \Big(\mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathbf{X}_1 \;\; \mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathbf{X}_2 \;\; \ldots \;\; \mathrm{P}(\mathrm{A})\,\mathbf{X}_n\Big) = \mathrm{N}$$

Y como P es no singular, resulta

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) \,.\, \mathrm{P} \,.\, \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{N} \,.\, \mathrm{P}^{-1}$$

O sea

$$P(A) = N$$

Ejemplo 8-13

Utilizando el teorema de Hamilton-Cayley, determinamos la inversa de la matriz A del ejemplo 8-5.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A, es

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

Entonces es

$$P(A) = A^2 - 5A + 4I = N$$

O sea

$$I = -\frac{1}{4}(A^2 - 5A)$$

En consecuencia, multiplicando por A^{-1};

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A - 5I)$$

Como

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Demostraremos ahora que toda matriz $A \in C^{n \times n}$ satisface a su polinomio característico, o sea

$$A \in C^{n \times n} \Rightarrow P(A) = N$$

En efecto, sea el polinomio característico de A:

$$P(\lambda) = D(\lambda I - A) \quad (1)$$

Sabemos que el producto de toda matriz cuadrada por su adjunta es igual al determinante de aquella por la matriz identidad (5.8.3.). Entonces

$$(\lambda I - A)\ \mathrm{Adj}\,(\lambda I - A) = D(\lambda I - A)\,.\,I$$

Teniendo en cuenta (1) es

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) \operatorname{Adj} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{P}(\lambda) \,.\, \mathrm{I} \qquad (2)$$

Los elementos de Adj $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})$, por ser los cofactores de $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})$, son polinomios de grado menor o igual que $n-1$, y en consecuencia

$$\operatorname{Adj} (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{A}_{n-1} \lambda^{n-1} + \mathrm{A}_{n-2} \lambda^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_1 \lambda + \mathrm{A}_0 \qquad (3)$$

De (2) y (3) resulta

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}_{n-1} \lambda^n + (\mathrm{A}_{n-2} - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_{n-1}) \lambda^{n-1} + (\mathrm{A}_{n-3} - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_{n-2}) \lambda^{n-2} + \ldots + \\ &+ (\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_1) \lambda - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_0 = \lambda^n \mathrm{I} + c_{n-1} \lambda^{n-1} \mathrm{I} + \ldots + c_1 \lambda \mathrm{I} + c_0 \mathrm{I} \end{aligned}$$

O sea

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{n-1} &= \mathrm{I} \\ \mathrm{A}_{n-2} - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_{n-1} &= c_{n-1} \mathrm{I} \\ \mathrm{A}_{n-3} - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_{n-2} &= c_{n-2} \mathrm{I} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathrm{A}_0 - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_1 &= c_1 \mathrm{I} \\ - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_0 &= c_0 \mathrm{I} \end{aligned}$$

Luego de premultiplicar por $\mathrm{A}^n, \mathrm{A}^{n-1}, \ldots, \mathrm{A}$ e I, respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} \mathrm{A}^n \mathrm{A}_{n-1} &= \mathrm{A}^n \\ \mathrm{A}^{n-1} \mathrm{A}_{n-2} - \mathrm{A}^n \mathrm{A}_{n-1} &= c_{n-1} \mathrm{A}^{n-1} \\ \mathrm{A}^{n-2} \mathrm{A}_{n-3} - \mathrm{A}^{n-1} \mathrm{A}_{n-1} &= c_{n-2} \mathrm{A}^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \mathrm{A}\,\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}^2 \mathrm{A}_1 &= c_1 \mathrm{A} \\ - \mathrm{A}\,\mathrm{A}_0 &= c_0 \mathrm{I} \end{aligned}$$

Sumando, después de reducir, es

$$\mathrm{N} = \mathrm{A}^n + c_{n-1} \mathrm{A}^{n-1} + \ldots + c_1 \mathrm{A} + c_0 \mathrm{I}$$

O sea

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{N}$$

TRABAJO PRACTICO VIII

8-14. Determinar los valores y vectores propios de las siguientes trasformaciones lineales:

1. $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definida por $f(x_1, x_2) = (4x_1 + 3x_2, 3x_1 - 4x_2)$
2. $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (2y - z, 2x - z, 2x - y)$

8-15. Obtener los valores y vectores propios, si existen, de las matrices siguientes con elementos en R:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

8-16. Demostrar que si λ es un valor propio de $A \in K^{n\times n}$ y ésta es no singular, entonces λ es no nulo.

8-17. Demostrar que si λ es un valor propio de la matriz no singular A, entonces λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

8-18. Demostrar que si $\mathbf{X}_i$ es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio λ_i, entonces $\mathbf{X}_i$ es un vector propio de A^n correspondiente al valor propio λ_i^n.

8-19. Demostrar que si $\mathbf{X}_1$ es un vector propio de la matriz A, correspondiente al valor propio λ_1, entonces $Y = S^{-1}\,\mathbf{X}_1$ es un vector propio de la matriz $S^{-1}\,A\,S$, asociado a λ_1.

8-20. Determinar el polinomio característico, los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices complejas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -2i & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8-21. Demostrar que si $P(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ entonces c_{n-1} es el opuesto de la suma de los valores propios y el término independiente es igual al producto de $(-1)^n$ y el producto de los valores propios.

8-22. Demostrar que si $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$, entonces la traza de A es igual a la suma de los valores propios y el determinante de A es igual al producto de los valores propios.

8-23. Demostrar que los valores propios de toda matriz idempotente son 0 ó 1.

8-24. Demostrar que dos matrices traspuestas tienen el mismo polinomio característico.

8-25. Investigar si la siguiente matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8-26. Sea una matriz $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ tal que $A^k = I$. Demostrar que si λ es un valor propio de A, entonces $\lambda^k = 1$.

8-27. Demostrar que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal.

8-28. Por definición, una matriz cuadrada A es nilpotente si y sólo si existe un entero positivo k, tal que $A^k = N$. Demostrar que los valores propios de toda matriz nilpotente son nulos.

8-29. Demostrar las siguientes propiedades:

1. Dos matrices semejantes tienen sus trazas iguales.
2. Si k es un entero positivo, entonces $tr\ A^k = \sum_i \lambda_i^k$.
3. La traza de toda matriz idempotente es igual a su rango.
4. La traza de una suma es igual a la suma de las trazas.
5. Las trazas de dos matrices traspuestas son iguales.
6. Las matrices A B y B A tienen trazas iguales.
7. $tr\,(ABC) = tr\,(BCA) = tr\,(CAB)$
8. Si P es ortogonal, entonces $tr\,(P^t\, A\, P) = tr\ A$.

8-30. Considerando el producto interior habitual en $\mathbf{R}^2$, determinar una base ortonormal de vectores propios de A, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

8-31. Demostrar que si todos los valores propios de una matriz son no nulos, entonces dicha matriz es no singular.

8-32. Calcular P (A), siendo $P(X) = X^3 - X + 1$ y

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8-33. Demostrar que si A es una matriz simétrica y $P \in \mathbf{R}[X]$, entonces P (A) es una matriz simétrica.

8-34. Demostrar que si A es hermitiana y $P \in \mathbf{R}[X]$, entonces P (A) es hermitiana.

8-35. Sean A y P elementos de $K^{n \times n}$, tales que P es no singular. Demostrar que

$$(P^{-1}\ A\ P)^k = P^{-1}\ A^k\ P$$

8-36. Considerando dos matrices A y B como en el ejercicio anterior, demostrar que si $P \in K[X]$, entonces

$$P(B^{-1}\ A\ B) = B^{-1}\ P(A)\ B$$

8-37. Verificar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

admite un vector propio en $\mathbf{R}^2$, cualquiera que sea $\varphi \in \mathbf{R}$. Probar que existe un vector $\mathbf{X}$ tal que $A\,\mathbf{X} = \mathbf{X}$.

8-38. Con relación al ejercicio anterior, demostrar que si $\mathbf{Y}$ es un vector de $\mathbf{R}^2$ ortogonal a $\mathbf{X}$, entonces $\mathbf{A\,Y} = -\mathbf{Y}$. Interpretar geométricamente.

8-39. Demostrar que si P es una matriz ortogonal del tipo 2×2 y $D(P) = -1$, entonces existe un número real φ tal que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

8-40. Sean λ un valor propio de $A \in K^{n \times n}$ y f un polinomio de K [X]. Demostrar que $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(A)$.

8-41. Obtener una base fan de los endomorfismos de C^2 caracterizados por las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y } B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

8-42. Demostrar que si λ es un valor propio de $A \in K^{n \times n}$, entonces $\alpha + \lambda$ es un valor propio de $\alpha I + A$, $\forall\, \alpha\, K$.

8-43. Demostrar que una matriz $A \in \mathbf{C}^{n \times n}$ es singular si y sólo si admite algún valor propio igual a cero.

8-44. Diagonalizar, si es posible, las matrices

- $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$$

8-45. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $P(X) = X^2 - 1$.

Diagonalizar P (A), si es posible.

8-46. Sabiendo que $\dim_{\mathbf{C}} V \geqslant 1$ y que $f : V \to V$ es un endomorfismo, demostrar que existe un vector propio de f.

Capítulo 9

FORMAS BILINEALES Y CUADRATICAS

9.1. INTRODUCCION

Presentamos en este capítulo los conceptos de forma bilineal sobre un espacio vectorial, de forma cuadrática asociada, y sus conexiones con la matriz de cada una respecto de una base en el caso de dimensión finita. Se estudian los operadores adjuntos, traspuestos, hermitianos y simétricos, así como también algunas propiedades de sus valores propios. Esta situación se reitera en el caso de operadores unitarios y ortogonales. Después de la demostración del teorema de Sylvester, se trata el tema de la diagonalización de operadores simétricos y de las matrices correspondientes. Además de la descomposición espectral de una matriz diagonalizable, se estudia la congruencia de formas cuadráticas reales, la reducción a la forma canónica y el signo de una forma cuadrática.

9.2. FORMAS BILINEALES

9.2.1. Concepto

Sean: $(V, +, K, .)$ un espacio vectorial y f una función de V^2 en K.

Definición

La función $f : V^2 \rightarrow K$ es una forma bilineal sobre V si y sólo si es lineal respecto de los dos argumentos.

O sea

$f : V^2 \rightarrow K$ es una forma bilineal sobre V si y sólo si satisface:

1. Linealidad respecto del primer argumento

$$f(a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{x}', \mathbf{y}) = a\,f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b\,f(\mathbf{x}', \mathbf{y})$$

2. Linealidad respecto del segundo argumento

$$f(\mathbf{x}, c\,\mathbf{y} + d\,\mathbf{y}') = c\,f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d\,f(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$$

cualesquiera que sean $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}'$ en V y $a, b, c, d,$ en K.

Si f es una forma bilineal sobre V, entonces se verifica que

$$f(a\,\mathbf{x},\mathbf{y})=a\,f(\mathbf{x},\mathbf{y})=f(\mathbf{x},a\,\mathbf{y})$$

El lector puede demostrar que el conjunto de las formas bilineales sobre V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, comprobando que si f y g son dos formas bilineales cualesquiera y si $\alpha \in \mathrm{K}$, entonces $f+g$ y αf son formas bilineales.

Ejemplo 9-1

Considerando $(\mathrm{K}^n, +, \mathrm{K}, .)$, la función

$$f:\mathrm{K}^n \times \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}$$

definida por

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

es una forma bilineal sobre K^n, ya que verifica las condiciones 1. y 2. de la definición.

Ejemplo 9-2

Asociada a la matriz $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n\times n}$, la función

$$f:\mathrm{K}^n \times \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}$$

definida por

$$f(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{Y} \quad (1)$$

es una forma bilineal en K^n, donde la imagen $f(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathrm{K}^{1\times 1}$ se identifica con un escalar en virtud del isomorfismo entre $\mathrm{K}^{1\times 1}$ y K.
En efecto:

$$f(a\,\mathbf{X}+b\,\mathbf{Y},\mathbf{Z})=(a\,\mathbf{X}+b\,\mathbf{Y})^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{Z}=(a\,\mathbf{X}^t+b\,\mathbf{Y}^t)\,\mathrm{A}\,\mathbf{Z}=$$
$$=a\,\mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{Z}+b\,\mathbf{Y}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{Z}=af(\mathbf{X},\mathbf{Z})+bf(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$$

Análogamente se prueba la linealidad de f respecto del segundo argumento.
La expresión escalar de (1), efectuando el producto de matrices, es

$$f(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{Y}=(x_1\;x_2\;\dots\;x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i1}\;\sum_{i=1}^{n} x_i a_{i2}\;\dots\;\sum_{i=1}^{n} x_i a_{in}\right)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,y_j$$

9.2.2. Matriz de una forma bilineal

Sea V un espacio de dimensión $n \geqslant 1$. Consideremos una base $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ de V, y la forma bilineal $f : V^2 \to K$.

Entonces f está caracterizada por los valores

$$a_{ij} = f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$$

que son los elementos de la matriz $A \in K^{n \times n}$, llamada matriz de f respecto de la base $[\mathbf{v}]$.

En efecto, si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos vectores cualesquiera de V, expresándolos en términos de la base $[\mathbf{v}]$, es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) =$$

$$= \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = \mathbf{X}^t \, A \, \mathbf{Y}$$

donde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son las matrices columnas cuyos elementos son las coordenadas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respecto de la base $[\mathbf{v}]$.

9.2.3. Forma bilineal simétrica

Sea $f : V^2 \to K$ una forma bilineal.

Definición

La forma bilineal f es simétrica si y sólo si

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

cualesquiera que sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en V.

Si $K = \mathbf{R}$, y $\langle \, , \, \rangle$ es un producto interior en V, entonces $f : V^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (1)$$

es una forma bilineal simétrica.

Si $[\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \}$ es una base ortogonal de V, o sea

$$i \neq j \Rightarrow f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = a_{ij} = 0$$

entonces la matriz A de la forma bilineal (1) es diagonal

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

y la forma se dice diagonalizada.

Resulta

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$$

Si [v] es ortonormal resulta

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

9.2.4. Propiedad

La matriz $A \in K^{n \times n}$ representa una forma bilineal simétrica si y sólo si A es simétrica.

1. Sea f la forma bilineal simétrica asociada a A.

$$f \text{ es simétrica} \Leftrightarrow f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = f(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^t\, A\, \mathbf{X}$$

Como

$$\mathbf{Y}^t\, A\, \mathbf{X} = (\mathbf{Y}^t\, A\, \mathbf{X})^t = \mathbf{X}^t\, A^t\, \mathbf{Y}$$

por ser $Y^t\, A\, X$ un escalar y por traspuesta de un producto, resulta

$$\mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{Y} = \mathbf{X}^t\, A^t\, \mathbf{Y} \quad \forall\, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K^n$$

O sea

$$\mathbf{X}^t\, (A - A^t)\, \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad \forall\, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K^n$$

En consecuencia

$$A - A^t = N$$

Y por lo tanto

$$A = A^t$$

2. Sea A simétrica. Entonces

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{Y})^t = \mathbf{Y}^t\, A^t\, \mathbf{X} = \mathbf{Y}^t\, A\, \mathbf{X} = f(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$

Luego f es simétrica.

Ejemplo 9-3.

Desarrollamos la forma bilineal simétrica asociada a la matriz A, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Resulta

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{Y} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3 \quad -x_1 + 3x_2 + x_3 \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 y_1 - x_2 y_1 + 2x_3 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2 + x_3 y_2 + 2x_1 y_3 + x_2 y_3 - 2x_3 y_3$$

9.3. FORMAS HERMITIANAS

9.3.1. Concepto

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos.

Definición

La función $f: V^2 \to \mathbf{C}$ es una forma hermitiana sobre V si y sólo si f satisface las condiciones de linealidad respecto del primer argumento y de simetría conjugada.

O sea

i) $f(a\mathrm{x} + b\mathrm{x}', \mathrm{y}) = af(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + bf(\mathrm{x}', \mathrm{y})$

ii) $f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \overline{f(\mathrm{y}, \mathrm{x})}$

Ejemplo 9-4

En $(\mathbf{C}^n, +, \mathbf{C}, .)$ la función

$$f: \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$$

definida por

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t\, \overline{\mathbf{Y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \overline{y_i}$$

es una forma hermitiana definida positiva, ya que satisface los axiomas del producto interior usual en un espacio unitario (véase el ejercicio 7-46).

9.3.2. Matriz de una forma hermitiana

Sea $(V, +, \mathbf{C}, .)$ un espacio unitario, es decir, un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{C}$, donde está definido un producto interior como en el ejercicio 7-46.

La función

$$f: V^2 \to \mathbf{C}$$

tal que

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$$

es una forma hermitiana. Si V es de dimensión $n \geqslant 1$, y $[\mathrm{v}] = \{ \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \}$ es una base, entonces

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathrm{v}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, \mathrm{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, \overline{y}_j \langle \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, \overline{y}_j = \mathrm{X}^t\, \mathrm{A}\, \overline{\mathrm{Y}}$$

Respecto de la base elegida, la forma hermitiana está caracterizada por la matriz A, cuyo elemento genérico

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_j \rangle$$

es tal que

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}_j , \mathbf{v}_i \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

En consecuencia, la matriz A verifica

$$\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}}^t = \mathrm{A}^*$$

o sea, A es hermitiana.

9.4. FORMAS CUADRATICAS

9.4.1. Concepto

Sean: $(\mathrm{V}, +, \mathrm{K}, .)$ un espacio vectorial de dimensión finita y $g : \mathrm{V}^2 \to \mathrm{K}$ una forma bilineal simétrica sobre V.

Definición

Forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica g es la función

$$f : \mathrm{V} \to \mathrm{K}$$

definida por

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

Como la forma bilineal simétrica g verifica los axiomas i), ii) y iii) del producto interior definido en 7.2.1., es usual escribir

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

Si $\mathrm{V} = \mathrm{K}^n$ y si $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times n}$ es la matriz simétrica de la forma bilineal g, entonces la forma cuadrática asociada está definida por

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^t \, \mathrm{A} \, \mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \, x_j$$

Observamos que el desarrollo de una forma cuadrática, en términos de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, corresponde a un polinomio homogéneo de grado 2, donde los coeficientes de los términos cuadráticos son los elementos de la diagonal de la matriz simétrica correspondiente, y cada coeficiente de un término rectangular $x_i \, x_j$ es el duplo del elemento a_{ij} de la misma.

Definición

Una forma cuadrática $\mathbf{X}^t \, \mathrm{A} \, \mathbf{X}$ es no degenerada si y sólo si A es no singular.

Ejemplo 9-5

La matriz correspondiente a la forma cuadrática

$$f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

definida por

$$f(\mathrm{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3$$

es

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como

$$\mathrm{D}(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

resulta A no singular, y en consecuencia f es no degenerada.

9.4.2. Formas cuadráticas y cambio de base

Sea $f : \mathrm{V} \to \mathrm{K}$ una forma cuadrática caracterizada por la matriz $\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times n}$ respecto de la base $[\mathbf{v}]$.

Se tiene entonces

$$f(\mathrm{x}) = \mathbf{X}^t \, \mathrm{A} \, \mathbf{X}$$

donde $\mathbf{X}$ es la matriz columna cuyos elementos son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base $[\mathbf{v}]$.

Si en V se considera una base $[\mathbf{v}']$, respecto de ésta, el vector $\mathbf{x}$ se representa mediante $\mathbf{X}'$.

Se verifica que

$$\mathbf{X} = \mathrm{P}\,\mathbf{X}'$$

donde P es la matriz de pasaje definida en 4.19.

Sustituyendo en la primera igualdad

$$f(\mathrm{x}) = (\mathrm{P}\,\mathbf{X}')^t \, \mathrm{A} \, (\mathrm{P}\,\mathbf{X}') = \mathbf{X}'^t \, \mathrm{P}^t \, \mathrm{A} \, \mathrm{P} \, \mathbf{X}'$$

La matriz de f respecto de la nueva base es

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^t \, \mathrm{A} \, \mathrm{P}$$

Las matrices A y B se llaman *congruentes.*

Definición

$\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{n \times n}$ es congruente a $\mathrm{B} \in \mathrm{K}^{n \times n}$ si y sólo si existe P no singular tal que $\mathrm{B} = \mathrm{P}^t \, \mathrm{A} \, \mathrm{P}$.

Sabemos que el rango de una matriz no varía si se la multiplica por matrices no singulares. En consecuencia, si dos matrices son congruentes tienen el mismo rango.

Definición

Rango de una forma cuadrática es el rango de cualquiera de las matrices que la representan.

En consecuencia, una forma cuadrática es no degenerada si y sólo si su rango es igual a la dimensión del espacio. Una forma cuadrática es degenerada si y sólo si su rango es menor que la dimensión del espacio.

Ejemplo 9-6.

La forma cuadrática f está caracterizada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

respecto de la base canónica en $\mathbf{R}^3$.

Determinamos la matriz de f respecto de la base

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right), \ (0,1,0, \ ), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right]$$

La matriz de pasaje es

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz B de la forma cuadrática f respecto de la nueva base es

$$B = P^t \, A \, P = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática ha sido diagonalizada; su forma diagonal está dada por los valores propios de A, y la matriz de pasaje tiene por columnas a los vectores propios de A.

9.5. OPERADORES ADJUNTOS Y TRASPUESTOS

Una trasformación lineal $f: V \to V$ será llamada también operador lineal o simplemente operador en V.

Propiedad

Si $(V, +, C, .)$ es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior, y si f es un operador en V, entonces existe y es único un operador f^* que verifica

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle$$

Demostración)

Sea y cualquier elemento de V. Definimos la función

$$F : V \to \mathbf{C}$$

mediante

$$F(\mathbf{x}) = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle \quad (1)$$

La definición (1) caracteriza un funcional, es decir, un elemento de V*. De acuerdo con el enunciado del ejercicio 7-60, existe en V un elemento y', único, tal que

$$F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle \quad (2)$$

cualquiera que sea $\mathbf{x} \in V$.

De (1) y (2) resulta

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}' \rangle \quad (3)$$

En consecuencia, para cada $\mathbf{y} \in V$, existe $\mathbf{y}' \in V$, único, que satisface (3). Podemos definir entonces la función

$$f^* : V \to V$$

mediante

$$f^*(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'$$

La función f^* satisface la condición

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle \quad \forall \mathbf{x}\ \forall \mathbf{y} \in V$$

Además es lineal, pues

$$\langle \mathbf{x}, f^*(a\,\mathbf{y} + b\,\mathbf{y}') \rangle = \langle f(\mathbf{x}), a\,\mathbf{y} + b\,\mathbf{y}' \rangle = \overline{a} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle + \overline{b} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y}' \rangle =$$

$$= \overline{a} \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle + \overline{b} \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}') \rangle = \langle \mathbf{x}, a f^*(\mathbf{y}) \rangle + \langle \mathbf{x}, b f^*(\mathbf{y}') \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{x}, a f^*(\mathbf{y}) + b f^*(\mathbf{y}') \rangle$$

Esta relación se verifica cualquiera que sea $\mathbf{x} \in V$. En consecuencia

$$f^*(a\,\mathbf{y} + b\,\mathbf{y}') = a f^*(\mathbf{y}) + b f^*(\mathbf{y}')$$

O sea

f^* es un operador lineal.

La unicidad de f^* se justifica porque para cada $\mathbf{y} \in V$ existe $\mathbf{y}' = f^*(\mathbf{y})$, único, tal que

$$F(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle$$

El operador f^* a que se refiere el teorema anterior, se llama adjunto de f.

Definición

En un espacio de dimensión finita con producto interior, un operador f^* se llama adjunto de f si y sólo si

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f^*(\mathbf{y}) \rangle$$

cualesquiera que sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en V.

Si el cuerpo es R, el operador f^* se llama traspuesto de f y se denota

$$f^* = f^t$$

9.5.2. Matriz del operador adjunto

Si A es la matriz del operador f respecto de una base ortonormal, entonces $\mathrm{B} = \overline{\mathrm{A}}^t$ es la matriz del operador adjunto f^*.

En efecto, sea $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ortonormal de V. De acuerdo con el ejercicio 7-61, se verifica que

$$f(\mathbf{v}_j) = \langle f(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle f(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \ldots + \langle f(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

En consecuencia, el elemento genérico de la matriz A es

$$a_{ij} = \langle f(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_i \rangle$$

Si B es la matriz de f^* respecto de $[\mathbf{v}]$, entonces

$$b_{ij} = \langle f^*(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_i \rangle$$

Se verifica que

$$b_{ij} = \langle f^*(\mathbf{v}_j), \mathbf{v}_i \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}_i, f^*(\mathbf{v}_j) \rangle} = \overline{\langle f(\mathbf{v}_i), \mathbf{v}_j \rangle} = \overline{a_{ji}}$$

Luego

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}^* = \overline{\mathrm{A}}^t$$

Observamos que si f y g son dos operadores sobre V y $\alpha \in \mathbf{C}$, entonces

$$(f + g)^* = f^* + g^* \qquad (\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^*$$
$$(f^*)^* = f \qquad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$$

Los operadores f y f^* se llaman adjuntos entre sí.

Ejemplo 9-7

Determinamos el operador adjunto de

$$f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$$

tal que

$$f(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = (\mathbf{z} + 2i\mathbf{u}, (1 + i)\mathbf{z} + \mathbf{u})$$

La matriz de f respecto de la base canónica, que es ortonormal, es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, la matriz de f^* es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} = A^*$$

Resulta

$$f^*(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = (\mathbf{z} + (1-i)\,\mathbf{u}\,,\, -2i\mathbf{z} + \mathbf{u})$$

9.6. OPERADORES HERMITIANOS Y SIMETRICOS

9.6.1. Concepto

Sea f un operador lineal sobre V, de dimensión finita, con producto interior, y sea f^* el operador adjunto.

En el caso complejo, V es un espacio unitario, y en el caso real, V es euclidiano.

Definición

Un operador f sobre un espacio unitario se llama hermitiano si y sólo si es igual a su adjunto.

$$f \text{ es hermitiano } \Leftrightarrow \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle$$

La matriz asociada a un operador hermitiano respecto de una base ortonormal es hermitiana.

Definición

El operador f sobre un espacio euclidiano se llama simétrico si y sólo si es igual a su traspuesto.

La matriz asociada a un operador simétrico respecto de una base ortonormal es simétrica.

Los operadores simétricos y hermitianos suelen llamarse también autoadjuntos.

9.6.2. Propiedad

Un operador f es hermitiano si y sólo si $\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle \in \mathbf{R}$, $\forall\, \mathbf{x} \in V$.

1. Sea f un operador hermitiano. Entonces

$$\overline{\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle} = \overline{\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle} = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle$$

Luego

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle \in \mathbf{R}$$

2. Sea f tal que $\forall\, \mathbf{x} \in V : \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle \in \mathbf{R}$

Se tiene

$$\langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle = \langle f^*(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle f(\mathbf{x}) - f^*(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \langle (f - f^*)(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = 0, \ \forall \mathbf{x} \in V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f - f^* = e, \text{ donde } e \text{ denota el operador nulo.}$$

Luego

$$f = f^*$$

O sea, f es hermitiano

9.6.3. Propiedad

Los valores propios de todo operador hermitiano son reales.

Sea λ un valor propio asociado al vector propio $\mathbf{x}$. Se tiene:

$$\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, f(\mathbf{x}) \rangle =$$
$$= \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = \overline{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

Cancelando $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$ resulta $\lambda = \overline{\lambda}$

O sea

$$\lambda \in \mathbf{R}$$

Una consecuencia inmediata es la siguiente: los valores propios de toda matriz hermitiana son reales. En particular, los valores propios de toda matriz simétrica y real, por ser hermitiana, son reales.

9.7. OPERADORES UNITARIOS Y ORTOGONALES

9.7.1. Concepto

Sean $(V, +, \mathbf{C}, .)$ un espacio unitario de dimensión finita, y f un operador sobre V.

Definición

El operador $f : V \to V$ es unitario si y sólo si preserva el producto interior

$$f \text{ es unitario} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle$$

Sean $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio euclidiano de dimensión finita, y f un operador sobre V.

Definición

El operador $f : V \to V$ es ortogonal si y sólo si preserva el producto interior.

En este caso, en que $K = \mathbf{R}$, el operador se llama también real unitario.

Ejemplo 9-7'

El operador $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definido por

$$f(x\,,y) = (x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta,\, x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta)$$

es ortogonal, considerando el producto interior usual.
En efecto, el producto interior entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\langle (x_1, y_1)\,, (x_2, y_2)\rangle = x_1\, x_2 + y_1\, y_2$$

y el producto interior entre sus imágenes es

$$\begin{aligned}
&\langle f(x_1, y_1)\;,\; f(x_2, y_2)\rangle = \\
&= \langle (x_1 \cos\theta - y_1 \operatorname{sen}\theta,\, x_1 \operatorname{sen}\theta + y_1 \cos\theta), (x_2 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta,\, x_2 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta)\rangle = \\
&= x_1\, x_2 \cos^2\theta + y_1\, y_2 \operatorname{sen}^2\theta - x_1\, y_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - x_2\, y_1 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \\
&+ x_1\, x_2 \operatorname{sen}^2\theta + y_1\, y_2 \cos^2\theta + x_1\, y_2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + x_2\, y_1 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \\
&= x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle
\end{aligned}$$

f representa una rotación del plano de ángulo θ, con centro en el origen.

9.7.2. Propiedad

Si V es un espacio vectorial real con producto interior y f es un operador, entonces f es ortogonal si y sólo si preserva las longitudes de los vectores.

1. Supongamos que f es ortogonal. Entonces

$$f \text{ es ortogonal} \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})\rangle \Rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 = \|f(\mathbf{x})\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|\mathbf{x}\| = \|f(\mathbf{x})\|$$

2. Sea f un operador que conserva las longitudes de los vectores.
Entonces es

$$\langle f(\mathbf{x}+\mathbf{y}), f(\mathbf{x}+\mathbf{y})\rangle - \langle f(\mathbf{x}-\mathbf{y}), f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle$$

Desarrollando ambos miembros resulta

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$$

Luego f es ortogonal.

Una consecuencia inmediata es la siguiente: los operadores ortogonales trasforman vectores unitarios en vectores unitarios.

9.7.3. Propiedad

Los operadores ortogonales conservan la ortogonalidad.

En efecto, sea $f : V \to V$ un operador ortogonal, y sea $\mathbf{x}$ ortogonal a $\mathbf{y}$.

Resulta

$$\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$$

Luego $f(\mathbf{x})$ es ortogonal a $f(\mathbf{y})$.

Observamos que no toda trasformación lineal que preserve la ortogonalidad es operador ortogonal. En efecto, si

$$f: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$$

es tal que $f(x) = 3x$, entonces f conserva la ortogonalidad, pero no es un operador ortogo

9.7.4. Propiedad

Sea V un espacio euclidiano de dimensión finita. Un operador lineal $f: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ ortogonal si y sólo si $f^t \circ f = i_{\mathrm{V}}$.

En efecto:

$$\begin{aligned} &f \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, f^* [f(\mathbf{y})]\rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, (f^* \circ f)(\mathbf{y})\rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^* \circ f = i_{\mathrm{V}} \end{aligned}$$

f^* denota el operador adjunto de f, que en el caso real es su traspuesto.

Luego

$$f \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow f^t \circ f = i_{\mathrm{V}}$$

En términos de matrices se verifica que un operador es ortogonal si y sólo si la ma asociada respecto de una base ortonormal es ortogonal.

Sea A tal matriz. Entonces

$$f \text{ es ortogonal} \Leftrightarrow \mathrm{A}^t \mathrm{A} = \mathrm{I}$$

Observamos que todo operador ortogonal es inversible, y se verifica que

$$f^{-1} = f^t$$

O sea

$$\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^t$$

9.7.5. Propiedad

Sea V un espacio unitario, y sea f un operador sobre V.

Como en el caso real, se verifica que un operador es unitario si y sólo si preserva longitudes de los vectores.

Se demuestra análogamente que f es unitario si y sólo si $f^* \circ f = i_{\mathrm{V}}$.

Además, si $\mathrm{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ es la matriz de f respecto de una base ortonormal, entonces f es operador unitario si y sólo si $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{-1}$.

Una matriz compleja que satisface la condición anterior se llama unitaria.

Definición

$A \in C^{n\times n}$ es unitaria $\Leftrightarrow A^* A = I \Leftrightarrow A^* = A^{-1}$.

Toda matriz unitaria de elementos reales es ortogonal.

Observamos que los operadores y las matrices unitarias son una generalización de los operadores y matrices ortogonales de los espacios euclidianos.

9.7.6. Propiedad

Los valores propios de todo operador unitario tienen módulo 1.

En efecto, sea λ un valor propio del operador unitario f, y sea $\mathbf{x}$ un vector propio asociado a λ. Entonces

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle = $$
$$= \lambda \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

Como $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$ resulta

$$\lambda \bar{\lambda} = 1$$

O sea

$$|\lambda|^2 = 1$$

Luego

$$|\lambda| = 1$$

9.8. TEOREMA DE SYLVESTER

9.8.1. Ampliación del concepto de base ortogonal

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, y sea una forma bilineal simétrica que denotamos con $\langle\, , \rangle$ sobre V. Se demuestra que si $\dim V \geqslant 1$, entonces existe una base ortogonal respecto de $\langle\, , \rangle$ (ejercicio 9-41).

Ejemplo 9-8

En $\mathbf{R}^2$ definimos $\langle\, , \rangle$ mediante

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\, x_2 - y_1\, y_2$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

Esta forma no es definida positiva, pues, por ejemplo

$$\mathbf{x} = (1, 1) \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \ \ 0$$
$$\mathbf{x} = (1, 3) \Rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -8$$

Los vectores $v_1 = (1, 3)$ y $v_2 = (3, 1)$ forman una base ortogonal respecto de la forma dada.

La base formada por $\mathbf{x} = (1, 2)$ e $\mathbf{y} = (1, 3)$ no es ortogonal. Para ortogonalizarla, procedemos así:

Sea $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x} = (1, 2)$ y sea

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{y} - \langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{y} \rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 \rangle}$$

Es decir

$$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3} , -\frac{1}{3} \right)$$

Entonces $\{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 \}$ es una base ortogonal de V respecto de la forma dada.

9.8.2. Generalización del concepto de base ortonormal

Sea V un espacio de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales, y sea $\langle \, , \rangle$ una forma bilineal simétrica sobre V. De acuerdo con 9.8.1., siempre es posible obtener una base ortogonal. La forma no es necesariamente definida positiva, ya que pueden existir vectores $\mathbf{x} \in V$ tales que $\langle \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle = 0$ ó $\langle \mathbf{x} , \mathbf{x} \rangle < 0$.

Diremos que una base es ortonormal respecto de la forma $\langle \, , \rangle$ si y sólo si

$$\langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_i \rangle = 1 \quad \text{ó} \quad \langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_i \rangle = -1 \quad \text{ó} \quad \langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

donde $\mathbf{v}_i \in [\mathbf{v}] = \{ \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \ldots , \mathbf{v}_n \}$.

A partir de una base ortogonal $[\mathbf{v}'] = \{ \mathbf{v}'_1 , \mathbf{v}'_2 , \ldots , \mathbf{v}'_n \}$ es fácil construir una base ortonormal asociada.

En efecto, denotando $\langle \mathbf{v}'_i , \mathbf{v}'_i \rangle$ mediante a_i, se obtiene una base ortonormal haciendo

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i \qquad \text{si } a_i = 0$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}'_i}{\sqrt{a_i}} \qquad \text{si } a_i > 0$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}'_i}{\sqrt{-a_i}} \qquad \text{si } a_i < 0$$

La base $[\mathbf{v}]$ resulta ortonormal.

Sea $[\mathbf{v}]$ una base ortogonal ordenada de modo que

$$a_1, a_2, \ldots, a_p > 0$$

$$a_{p+1}, \ldots, a_r < 0$$

$$a_{r+1}, \ldots, a_n = 0$$

Si f es la forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica $\langle \, , \rangle$, entonces, respecto de esta base ortogonal, es

$$f(\mathbf{X}) = a_1 \, x_2^2 + \ldots + a_p \, x_p^2 + a_{p+1} \, x_{p+1}^2 + \ldots + a_r \, x_r^2$$

En este desarrollo figuran p términos positivos, $r-p$ negativos, y $n-r$ variables se han eliminado.

Si la base se ortonormaliza, entonces se tiene

$$f(X)=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_r^2$$

Los números p y r son independientes de la base ortogonal elegida. El entero p se llama índice de positividad de la forma. Indice de nulidad de la forma es el entero $n-r$. Signatura de la forma cuadrática es $s=p-(r-p)=2p-r$.

Ejemplo 9-9

Sea la forma bilineal simétrica sobre R^2 definida por la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

Los vectores $\mathbf{v}_1=(1,0)$ y $\mathbf{v}_2=(1,1)$ constituyen una base ortonormal y se verifica que

$$\langle \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1 \rangle = -2 \qquad \langle \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_2 \rangle = 0$$

9.8.3. Propiedad

Sea $\langle\ ,\ \rangle$ una forma bilineal simétrica en el espacio V, de dimensión finita, sobre el cuerpo **R**, y sea el subespacio

$$S_0=\{\mathbf{x}\in V/\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=0,\ \forall\,\mathbf{y}\in V\}$$

Si $[\mathbf{v}]=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, es una base ortogonal, entonces la dimensión de S_0 es igual al número de enteros i, tales que $a_i=0$.

Demostración)

Sea $[\mathbf{v}]$ ordenada de modo que

$$a_i\neq 0 \ \text{si}\ i=1,2,\ldots,r$$
$$a_i=0 \ \text{si}\ i>r$$

Por ser $[\mathbf{v}]$ ortogonal, se verifica que

$$i>r\Rightarrow\langle \mathbf{v}_i,\mathbf{y}\rangle=0\ ,\ \forall\,\mathbf{y}\in V$$

En consecuencia

$$\mathbf{v}_{r+1},\mathbf{v}_{r+2},\ldots,\mathbf{v}_n$$

son elementos de S_0.

Sea un elemento cualquiera $\mathbf{x}\in S_0$, y escribamos

$$\mathbf{x}=x_1\,\mathbf{v}_1+\ldots+x_r\,\mathbf{v}_r+\ldots+x_n\,\mathbf{v}_n$$

Entonces

$$j\leqslant r\Rightarrow 0=\langle \mathbf{x},\mathbf{v}_j\rangle=x_j\langle \mathbf{v}_j,\mathbf{v}_j\rangle=x_j\,a_j$$

Como $a_j \neq 0$, resulta $x_j = 0$ si $j \leqslant r$
Luego

$$\mathbf{x} = x_{r+1}\, \mathbf{v}_{r+1} + \ldots + x_n\, \mathbf{v}_n$$

O sea

$$\{ \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \}$$

es una base de S_0. Es decir, $\dim S_0 = n - r$.

9.8.4. Teorema de Sylvester

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio tal que $\dim V = n \geqslant 1$, y sea $\langle\ ,\ \rangle$ una forma bilineal simétri sobre V. Si $[\mathbf{v}]$ es una base ortogonal cualquiera de V, entonces existen exactamente enteros positivos tales que $\langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_i \rangle > 0$.

Demostración)

Sean $[\mathbf{v}]$ y $[\mathbf{w}]$ dos bases ortogonales de V ordenadas de modo que si $\langle \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_i \rangle = a_i$ $\langle \mathbf{w}_i , \mathbf{w}_i \rangle = b_i$, entonces

$$\begin{array}{llll} a_i > 0 & \text{si } i = 1, 2, \ldots, p & b_i > 0 & \text{si } i = 1, 2, \ldots, p' \\ a_i < 0 & \text{si } i = p+1, \ldots, r & b_i < 0 & \text{si } i = p'+1, \ldots, r' \\ a_i = 0 & \text{si } i = r+1, \ldots, n & b_i = 0 & \text{si } i = r'+1, \ldots, n \end{array}$$

Demostraremos que $p = p'$. Para ello observamos que los vectores

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p'+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$$

son linealmente independientes, pues considerando la relación lineal

$$\sum_{i=1}^{p} x_i\, \mathbf{v}_i + \sum_{j=p'+1}^{n} y_j\, \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{v}_i = - \sum_{j=p'+1}^{n} y_j\, \mathbf{w}_j$$

y efectuando

$$\langle \sum_{i=1}^{p} x_i\, \mathbf{v}_i , \sum_{i=1}^{p} x_i\, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \sum_{j=p'+1}^{p} y_j\, \mathbf{w}_j , \sum_{j=p'+1}^{p} y_j\, \mathbf{w}_j \rangle$$

se deduce

$$a_1 x_1^2 + \ldots + a_p x_p^2 = b_{p'+1}\, y_{p'+1}^2 + \ldots + b_r\, y_{r'}^2.$$

El primer miembro es mayor o igual que cero, y el segundo miembro es menor o igual qu cero, o sea, ambos son nulos. Entonces es

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$$

$$y_{r'+1} = \ldots = y_n = 0$$

Como dim $V = n$, de lo anterior se deduce que

$$p + (n - p') \leqslant n$$

o sea

$$p \leqslant p'$$

Análogamente se prueba que $p' \leqslant p$, y en consecuencia resulta $p = p'$.

Lo expuesto en 9.8.2., 9.8.3. y 9.8.4. nos permite afirmar que si f es la forma cuadrática asociada a una forma bilineal sobre $(V, +, \mathbf{R}, .)$ y dim $V = n \geqslant 1$, entonces f está representada por una matriz diagonal respecto de cualquier base ortogonal. Toda representación de este tipo admite exactamente p términos positivos y $r - p$ términos negativos.

9.9. DIAGONALIZACION DE OPERADORES SIMETRICOS

Sea $(V, +, \mathbf{R}, .)$ un espacio euclidiano de dimensión finita.

9.9.1. Propiedad

Sea $f : V \to V$ un operador simétrico y $\mathbf{x}$ un vector propio de f. Si $\mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x}$ es ortogonal a $f(\mathbf{y})$.

En efecto

$$\langle \mathbf{x}, f(\mathbf{y}) \rangle = \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

O sea

$$\mathbf{x} \perp f(\mathbf{y})$$

9.9.2. Propiedad

Sea $f : V \to V$ un operador simétrico y dim $V = n \geqslant 1$. Entonces existe una base ortogonal de vectores propios de f.

Demostración)

1. Si dim $V = 1$, entonces la propiedad se cumple obviamente.

2. Supongamos que dim $V > 1$, y sea $\mathbf{v}_1$ un vector propio de f. Consideremos el subespacio

$$S = \{ \mathbf{v}_1 \}^{\perp}$$

Se verifica que

$$\dim S = \dim V - 1 = n - 1$$

Por 9.9.1., f es un operador simétrico sobre S, donde el producto interior es el inducido por el producto definido en V.

Si $\{ v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ es una base ortogonal en S de vectores propios de f, entonces se verifica que

$$v_i \perp v_1 \text{ con } i = 2, 3, \ldots, n$$

En consecuencia, $\{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ es la base ortogonal en V, de vectores propios de f.

Ortonormalizando los vectores de la base ortogonal, se verifica bajo las condiciones del teorema, que existe una base ortonormal de vectores propios de f en V.

9.9.3. Consecuencia

Traduciendo la propiedad anterior en términos de matrices, se verifica que si A es una matriz simétrica y real, entonces existe una matriz P, ortogonal, que diagonaliza a A.

En símbolos:

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n} \wedge A = A^t \Rightarrow \exists \text{ P ortogonal} / P^t A P = D$$

Los elementos de D son los valores propios de A. Observamos, además, que toda matriz simétrica y real $n \times n$ admite n vectores propios ortogonales. Las columnas de P son los n vectores propios de A, ortonormalizados.

Ejemplo 9-10

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ determinamos una matriz ortogonal que diagonalice a A.

1. Calculamos los valores propios de A.

$$D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1) - 2 =$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda$$

Resulta

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 3$$

2. Determinamos los vectores propios ortonormales de A.

a) $\lambda_1 = 0$.

$$(\lambda_1 I - A)\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow A\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0 \\ \sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_2 = -\sqrt{2}x_1$$

Como $x_1^2 + x_2^2 = 1$, se tiene

$$x_1^2 + 2x_1^2 = 1$$

Luego

$$x_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \mp \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Entonces

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

b) $\lambda_2 = 3$. Con el mismo procedimiento se obtiene

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

3. Resulta

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{3} & \dfrac{\sqrt{6}}{3} \\[2ex] -\dfrac{\sqrt{6}}{3} & \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

tal que

$$\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9-11

Efectuamos una trasformación de coordenadas que diagonalice la forma cuadrática f, definida por

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

La matriz de esta forma cuadrática es

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son:

$$\lambda_1 = 8 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2$$

Resolviendo en cada caso el sistema homogéneo $(\lambda I - A)\,\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y normalizando los correspondientes vectores propios, se obtiene la matriz ortogonal

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

La trasformación ortogonal de coordenadas está dada por

$$\mathbf{X} = P\,\mathbf{X}'$$

O sea

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x'_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x'_2$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x'_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x'_2$$

Mediante este cambio, f se convierte en

$$f(x'_1 , x'_2) = 8\,x'^2_1 - 2\,x'^2_2$$

donde los coeficientes de las variables son los valores propios de la matriz de la forma cuadrática.

9.10. MATRICES SIMETRICAS REALES Y VALORES PROPIOS

9.10.1. Matriz definida positiva

Sea A una matriz simétrica y real del tipo $n \times n$.

Definición

Una matriz simétrica y real es definida positiva si y sólo si sus valores propios son positivos.

Tal es el caso de la matriz del ejemplo 9-6.

9.10.2. Propiedad

Una matriz real y simétrica es definida positiva si y sólo si existe una matriz Q, no singular, tal que $A = Q\,Q^t$.

Demostración)

1. Sea A simétrica real del tipo $n \times n$ y definida positiva. Por definición, sus valores propios son positivos. Por 9.9.3. existe P ortogonal tal que

$$P^{-1}\,A\,P = P^t\,A\,P = D \quad (1)$$

donde D es la matriz diagonal formada por los n valores propios de A, o sea

$$D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Consideremos la matriz diagonal

$$D_1 = \text{diag}\,(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

Se verifica que

$$D_1^2 = D \quad (2)$$

Teniendo en cuenta (1) y (2) es

$$A = P\,D\,P^{-1} = P\,D\,P^t = P\,D_1^2\,P^t = P\,D_1\,D_1^t\,P^t = (P\,D_1)\,(P\,D_1)^t \quad (3)$$

Haciendo

$$Q = (P\,D_1)$$

resulta

$$A = Q\,Q^t$$

donde Q es no singular por ser producto de dos matrices no singulares.

2. Sea A simétrica y real. Supongamos que existe Q no singular tal que $A = Q\,Q^t$.
Por 9.9.3., existe P ortogonal tal que

$$P^t\,A\,P = D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Entonces

$$P^t\,Q\,Q^t\,P = D$$

O sea

$$(P^t\,Q)\,(P^t\,Q)^t = D$$

Llamando $\mathbf{X}_i$ a la i-sima fila de $P^t\,Q$, y por lo tanto a la i-sima columna de $(P^t\,Q)^t$, se tiene, considerando el producto interior habitual en $\mathbf{R}^n$

$$\mathbf{X}_i\,\mathbf{X}_i^t = \lambda_i \geqslant 0$$

Si fuera $\lambda_i = 0$, resultaría $\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$, y en consecuencia $P^t\,Q$ sería singular, lo que es absurdo. Luego

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Por lo tanto, A es definida positiva

9.11. DESCOMPOSICION ESPECTRAL DE UNA MATRIZ

Teorema. Si $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ son los valores propios distintos de A con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_s$, entonces A puede expresarse en la forma

$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i A_i$$

de modo tal que se verifica

1. $A_i^2 = A_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, s$
2. $i \neq j \Rightarrow A_i A_j = N$
3. $\sum_{i=1}^{s} A_i = I$
4. $A A_i = A_i A \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, s$

Demostración)

Por ser A diagonalizable existe P no singular tal que

$$P^{-1} A P = D \qquad (1)$$

donde D es la matriz diagonal formada con los n valores propios de A, que suponemos ordenados según las multiplicidades.

O sea

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_1}^{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_s \ \cdots \ \lambda_s}^{m_s} \end{pmatrix}$$

donde los elementos no diagonales, que no figuran, son nulos.

Denotando con I_{m_i} la matriz identidad del tipo $m_i \times m_i$, la forma bloque-diagonal de D es

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{m_s} \end{pmatrix}$$

Considerando las matrices

$$E_i = \begin{pmatrix} N_{m_1} & & & & & \\ & N_{m_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & I_{m_i} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & N_{m_s} \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, s$$

Se verifica, por ser matrices diagonales,

a) $E_i^2 = E_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, s$

b) $i \neq j \Rightarrow E_i\, E_j = N$

c) $\sum_{i=1}^{s} E_i = I$, donde I es la identidad $n \times n$

Además

$$D = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, E_i \quad (2)$$

De (1) resulta

$$A = P\, D\, P^{-1}$$

Considerando esta relación y (2), se tiene

$$A = P \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, E_i \right) P^{-1}$$

O sea

$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, P\, E\, P^{-1}$$

Haciendo

$$A_i = P\, E_i\, P^{-1}$$

resulta

$$A = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, A_i$$

Se verifican las siguientes proposiciones

1. $A_i^2 = P\, E_i\, P^{-1}\, P\, E_i\, P^{-1} = P\, E_i^2\, P^{-1} = P\, E_i\, P^{-1} = A_i$

2. $i \neq j \Rightarrow A_i\, A_j = P\, E_i\, P^{-1}\, P\, E_j\, P^{-1} = P\, E_i\, E_j\, P^{-1} =$

$$= P\, N\, P^{-1} = N$$

3. $\sum_{i=1}^{s} A_i = \sum_{i=1}^{s} P\, E_i\, P^{-1} = P \left(\sum_{i=1}^{s} E_i \right) P^{-1} = P\, I\, P^{-1} = I$

4. $A\, A_i = A\, P\, E_i\, P^{-1} = P\, D\, E_i\, P^{-1} = P \left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j\, E_j \right) E_i\, P^{-1} = P \left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j\, E_j\, E_i \right) P^{-1} =$

$= P\, (\lambda_i\, E_i)\, P^{-1} = \lambda_i\, P\, E_i\, P^{-1} = \lambda_i\, A_i \quad (3)$

$A_i\, A = P\, E_i\, P^{-1}\, A = P\, E_i\, D\, P^{-1} = P\, E_i \left(\sum_{j=1}^{s} \lambda_j\, E_j \right) P^{-1} = P\, \lambda_i\, E_i\, P^{-1} =$

$= \lambda_i\, P\, E_i\, P^{-1} = \lambda_i\, A_i \quad (4)$

De (3) y (4) resulta

$$A\, A_i = A_i\, A \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

9.12. CONGRUENCIA DE FORMAS CUADRATICAS

9.12.1. Concepto

Sean f y g dos formas cuadráticas reales caracterizadas por las matrices simétricas A y B pertenecientes a $\mathbf{R}^{n\times n}$.

O sea

$$f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{X}$$

$$g(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}^t\,\mathrm{B}\,\mathrm{Y}$$

Definición

Las formas cuadráticas f y g son congruentes si y sólo si existe P no singular, tal que

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$$

Las formas cuadráticas f y g son ortogonalmente congruentes si y sólo si existe P ortogonal, tal que

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$$

Las matrices A y B se llaman, respectivamente, congruentes y ortogonalmente congruentes.

9.12.2. Propiedad

Dos formas cuadráticas reales f y g, de matrices A y B respectivamente, son ortogonalmente congruentes si y sólo si A y B admiten los mismos valores propios con las mismas multiplicidades.

Demostración)

1. Sean f y g ortogonalmente congruentes. Entonces existe P ortogonal, tal que

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$$

En consecuencia, A y B son semejantes y admiten el mismo polinomio característico.

2. Sean A y B con la misma forma diagonal. O sea, existen Q y R ortogonales tales que

$$\mathrm{Q}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{Q} = \mathrm{R}^{-1}\,\mathrm{B}\,\mathrm{R} = \mathrm{D} \quad (1)$$

donde D es la matriz diagonal formada por los valores propios.

De (1) resulta

$$\mathrm{A} = \mathrm{Q}\,\mathrm{R}^{-1}\,\mathrm{B}\,\mathrm{R}\,\mathrm{Q}^{-1}$$

Luego

$$\mathrm{A} = (\mathrm{Q}\,\mathrm{R}^t)\,\mathrm{B}\,(\mathrm{Q}\,\mathrm{R}^t)^t$$

La matriz $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\,\mathrm{R}^t$ es ortogonal, ya que Q y R son ortogonales. Premultiplicando por $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^t$, y posmultiplicando por P, resulta

$$B = P^t\, A\, P$$

O sea, f y g son ortogonalmente congruentes.

9.12.3. Propiedad

Si f es una forma cuadrática real, entonces es ortogonalmente congruente a la forma cuadrática g, tal que

$$g(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A.

En efecto, sean D la matriz diagonal formada por los valores propios de A, y $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$. Consideremos la forma cuadrática g definida por

$$g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t\, D\, \mathbf{Y}$$

Sabemos, por 9.9.3., que existe P ortogonal tal que

$$D = P^{-1}\, A\, P = P^t\, A\, P$$

Luego f y g son ortogonalmente congruentes.

9.12.4. Propiedad

Toda forma cuadrática real f es congruente con la forma cuadrática g, tal que $g(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$, siendo r el rango de A y p el índice de positividad de la forma.

Demostración)

La matriz simétrica y real A admite exactamente r valores propios no nulos, ya que $\rho(A) = r$. Ordenamos los valores propios de modo que

$$\begin{array}{ll} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p & \text{son positivos} \\ \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r & \text{son negativos} \\ \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n & \text{son nulos} \end{array}$$

Consideremos

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definimos la matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Como existe Q ortogonal, tal que

$$Q^t\, A\, Q = D$$

resulta

$$(Q\, P)^t\, A\, (Q\, P) = P^t\, (Q^t\, A\, Q)\, P = P^t\, D\, P$$

donde

$$P^t\, D\, P = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & N_{n-r} \end{pmatrix} = B$$

Sea ahora la trasformación de coordenadas de matriz Q P, es decir

$$\mathbf{X} = Q\, P\, \mathbf{Y}$$

Se verifica que

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{X} = (Q\, P\, \mathbf{Y})^t\, A\, (Q\, P\, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t\, (Q\, P)^t\, A\, (Q\, P)\, \mathbf{Y}$$

En consecuencia, f es congruente a la forma cuadrática g, definida por

$$g\,(Y) = \mathbf{Y}^t\, B\, \mathbf{Y}$$

donde

$$B = (Q\, P)^t\, A\, (Q\, P)$$

Por la definición de B es

$$g\,(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2$$

La forma cuadrática g se llama forma canónica de f. Se verifica que dos formas cuadráticas son congruentes si y sólo si tienen la misma forma canónica.

Ejemplo 9-12.

Reducimos a la forma canónica la forma cuadrática $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2$$

1. La matriz de la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$D(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda$$

Los valores propios son, entonces

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0$$

2. Como el número de valores propios positivos es 1, la forma canónica congruente es g, definida por

$$g(y_1, y_2) = y_1^2$$

Efectuamos el procedimiento indicado en el teorema anterior para obtenerla.

Calculando los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 se obtiene

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz ortogonal correspondiente es

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que

$$Q^t A Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática ortogonalmente congruente a f es h, tal que

$$h(z_1, z_2) = 2 z_1^2$$

Sea

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, haciendo X = Q P Y, se tiene

$$g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t\,(\mathrm{Q\,P})^t\,\mathrm{A}\,(\mathrm{Q\,P})\,\mathbf{Y} =$$
$$= \mathbf{Y}^t\,\mathrm{P}^t\,\mathrm{Q}^t\,\mathrm{A\,Q\,P}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^t\,\mathrm{P}^t\,\mathrm{D\,P}\,\mathbf{Y} =$$
$$= \mathbf{Y}^t\,\mathrm{B}\,\mathbf{Y}$$

donde

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^t\,\mathrm{D\,P} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sea

$$g(y_1, y_2) = y_1^2$$

9.13. SIGNO DE UNA FORMA CUADRATICA

Sea f una forma cuadrática real definida por

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{X}$$

donde A es una matriz simétrica real del tipo $n \times n$.

9.13.1. Definiciones

1. f es definida positiva si y sólo si

$$\mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{X} > 0 \quad \forall\, \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$$

2. f es semidefinida positiva si y sólo si

$$\mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{X} \geqslant 0 \wedge \exists\, \mathbf{X} \neq \mathbf{0} \,/\, \mathbf{X}^t\,\mathrm{A}\,\mathbf{X} = 0$$

3. f es definida negativa si y sólo si la forma cuadrática g definida por

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,(-\mathrm{A})\,\mathbf{X}$$

es definida positiva.

4. f es semidefinida negativa si y sólo si g tal que

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,(-\mathrm{A})\,\mathbf{X}$$

es semidefinida positiva.

Ejemplo 9-13.

Determinamos el signo de la forma cuadrática $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(\mathbf{X}) = 3x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2$$

Se verifica que

$$f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2$$

O sea

$$f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2$$

Como $f(\mathbf{X}) > 0$, $\forall\, \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, resulta f definida positiva.

9.13.2. Propiedad

La forma cuadrática real f, tal que $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\, \mathrm{A}\, \mathbf{X}$, es definida positiva si y sólo si los valores propios de A son positivos.

En efecto, sabemos que toda forma cuadrática real es ortogonalmente congruente a una forma cuadrática g tal que

$$g(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

siendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A. Como ejercicio del trabajo práctico se propone la demostración de que el signo de una forma cuadrática no varía frente a trasformaciones de coordenadas. Esto significa que el signo de f es igual al de g. Luego

$$f \text{ es definida positiva} \Leftrightarrow g \text{ es definida positiva} \Leftrightarrow \lambda_i > 0,\ \forall i$$

Diremos, entonces, que una forma cuadrática es definida positiva si y sólo si la correspondiente matriz es definida positiva.

Análogamente se demuestra que: f es definida negativa si y sólo si sus valores propios son negativos; f es semidefinida positiva si y sólo si sus valores propios son mayores o iguales que 0 y alguno de ellos es 0; f es semidefinida negativa si y sólo si sus valores propios son menores o iguales que cero, pero alguno de ellos es 0. Si existen valores propios positivos y negativos, diremos que la forma cuadrática es indefinida.

El lector podrá demostrar como ejercicio del trabajo práctico que una forma cuadrática real f, definida por $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\, \mathrm{A}\, \mathbf{X}$, es definida positiva si y sólo si los menores principales de la matriz A son positivos.

Ejemplo 9-14

Analizamos, utilizando el criterio de los menores principales, si la forma cuadrática f, definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

es definida positiva.

La matriz de la forma cuadrática dada es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sus menores principales son

$$a_{11} = 2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$D(A) = 1 > 0$$

Luego, f es definida positiva.

TRABAJO PRACTICO IX

9-15. Sea $(V, +, K, .)$ un espacio vectorial. Demostrar que el conjunto $B(V)$ de todas las formas bilineales $f: V^2 \to K$ es un espacio vectorial sobre K, como se indica en 9.2.1.

9-16. Sea $g: V^2 \to K$ una forma bilineal. Demostrar que $g_\mathbf{y}: V \to K$, definida por $g_\mathbf{y}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es una forma lineal.

9-17. Una forma bilineal f sobre $\mathbf{R}^3$ está caracterizada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Obtener $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

ii) Determinar la matriz de f respecto de la base

$$\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

9-18. Determinar la forma escalar de las formas cuadráticas asociadas a las formas bilineales $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^t \, A \, \mathbf{Y}$, en los siguientes casos:

i) $$A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ii) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9-19. Sea f la forma cuadrática real definida por

$$f(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{X}}^2$$

donde $\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \vec{1}^t \, \mathbf{X}$.

Obtener la matriz de f respecto de la base canónica en $\mathbf{R}^n$.

9-20. Determinar las matrices de las formas cuadráticas sobre $\mathbf{R}^n$ definidas por

$$\text{i) } f(\mathbf{X}) = n\, \overline{\mathbf{X}}^2 \qquad \text{ii) } f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{\mathbf{X}})^2$$

Investigar la idempotencia de tales matrices.

9-21. Sean g una forma bilineal simétrica sobre V, y f la forma cuadrática asociada. Demostrar que

i) $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{1}{4}\left(f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - f(\mathrm{x}-\mathrm{y})\right)$

ii) $g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\right)$

9-22. Determinar la matriz de la forma cuadrática sobre $\mathbf{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1 x_2 + 2x_2^2$$

9-23. Sea (V, +, K, .) un espacio vectorial de dimensión finita y sean las funciones $f: \mathrm{V} \to \mathrm{K}$ y $g: \mathrm{V}^2 \to \mathrm{K}$, tales que

$$g(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = f(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})$$

Suponiendo que g es bilineal, y que $f(a\,\mathrm{x}) = a^2 f(\mathrm{x})$, $\forall a \in \mathrm{K}$ y $\forall \mathrm{x} \in \mathrm{V}$, demostrar que f es una forma cuadrática y determinar la forma bilineal de la cual proviene.

9-24. Sea (V, +, **R**, .) un espacio vectorial de dimensión finita n, con producto interior y sean [v] y [w] bases ortonormales de V. Si $f: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ es un operador que verifica $f(\mathrm{v}_i) = \mathrm{w}_i$, entonces f es ortogonal.

9-25. Sea (V, +, R, .) un espacio de dimensión finita n, con producto interior. Demostrar que si [v] es una base ortonormal de V y si f es un operador ortogonal en V, entonces $\{f(\mathrm{v}_i)\}$ es una base ortonormal de V.

9-26. Sea P una matriz ortogonal diagonal. Demostrar que los elementos de la diagonal son 1 ó -1.

9-27. Sean las matrices

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Q} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Demostrar que existe una matriz unitaria U tal que $\mathrm{Q} = \mathrm{U}^{-1}\,\mathrm{P}\,\mathrm{U}$.

9-28. Demostrar que toda matriz simétrica y real admite un vector propio.

9-29. Obtener, en cada caso, una base ortogonal de $\mathbf{R}^2$ formada por los vectores propios de las siguientes matrices:

i) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ii) $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

9-30. Comprobar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

es definida positiva y obtener Q no singular, tal que $A = Q\,Q^t$.

9-31. Obtener una trasformación ortogonal que diagonalice a la forma cuadrática

$$f(X) = x_1^2 + 2\sqrt{6}\,x_1\,x_2 + 2x_2^2$$

9-32. Demostrar que el signo de una forma cuadrática real no varía si se efectúa un cambio de base.

9-33. Demostrar que si $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,A\,\mathbf{X}$ es definida positiva, entonces $g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t\,A^{-1}\,\mathbf{Y}$ es definida positiva.

9-34. Determinar el rango y la signatura de las formas cuadráticas definidas por

i) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

ii) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

9-35. Obtener la descomposición espectral de la matriz C del ejercicio 8-15.

9-36. Sea $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i\,A_i$ la descomposición espectral de la matriz A. Demostrar

i) A y B son permutables si y sólo si B permuta con cada A_i.

ii) Si A es no singular, entonces la descomposición espectral de A^{-1} es

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{-1}\,A_i$$

9-37. Demostrar que toda matriz cuadrada real no singular puede expresarse como producto de una matriz ortogonal y una matriz definida positiva.

9-38. Expresar la matriz

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

como producto entre una matriz ortogonal y una matriz definida positiva.

9-39. Demostrar que una forma cuadrática real $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,A\,\mathbf{X}$ es definida positiva si y sólo si los menores principales de A son positivos.

9-40. Sean dos formas cuadráticas f y g en R^n definidas por $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,A\,\mathbf{X}$ y $g(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\,B\,\mathbf{X}$. Sabiendo que f es definida positiva, demostrar que existe una trasformación de congruencia que las reduce a

$$(\mathbf{X}) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

y

$$g_1\ (\mathbf{Z}) = \lambda_1\ z_1^2 + \lambda_2\ z_2^2 + \ldots + \lambda_n\ z_n^2$$

9-41. Sean (V, +, K, .) un espacio vectorial de dimensión finita, y $\langle\ ,\ \rangle$ una forma bilineal simétrica sobre V. Una base [v] es ortogonal respecto de $\langle\ ,\rangle$ si y sólo si $i \neq j \Rightarrow \langle \mathbf{v}_i\ , \mathbf{v}_j \rangle = 0$.
Demostrar que si $\mathrm{V} \neq \{ \mathbf{0} \}$, entonces V admite una base ortogonal.

Capítulo 10

CONVENXIDAD. PROGRAMACION LINEAL

10.1. INTRODUCCION

A partir de la distancia definida sobre la base del producto interior habitual, se estudian y se clasifican puntos y subconjuntos de $\mathbf{R}^n$. Se generalizan las nociones de recta, plano, semiplano y semiespacio estudiadas en el capítulo 7. Se presenta una introducción a los conjuntos convexos en $\mathbf{R}^n$, y se estudian sus propiedades fundamentales. Después de relacionar la convexidad con las trasformaciones lineales, se desarrollan los conceptos de hiperplano soportante y de puntos extremos. Finalmente, y en conexión con lo anterior, se esboza una introducción al problema general de la Programación Lineal, y al método simplex.

10.2. CONJUNTOS DE PUNTOS EN $\mathbf{R}^n$

En lo que sigue consideraremos el espacio vectorial $(\mathbf{R}^n, +, \mathbf{R}, .)$ con el producto interior habitual, es decir, definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathrm{X}^t \, \mathrm{Y}$$

donde X e Y denotan las matrices columnas asociadas a los vectores **x** e **y**.

10.2.1. Esfera abierta en $\mathbf{R}^n$

Definición

Esfera abierta de centro $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^n$ cuyas distancias a **a** son menores que r.

El símbolo S $(\mathbf{a}, r)$ se lee: "esfera abierta de centro a y radio r".

$$S(\mathbf{a}, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,/\, d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r \}$$

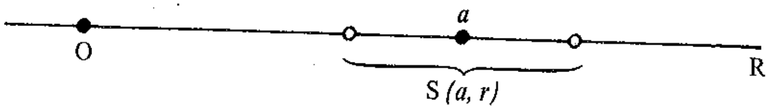
O sea

$$S(\mathbf{a}, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,/\, \| \mathbf{x} - \mathbf{a} \| < r \}$$

O bien

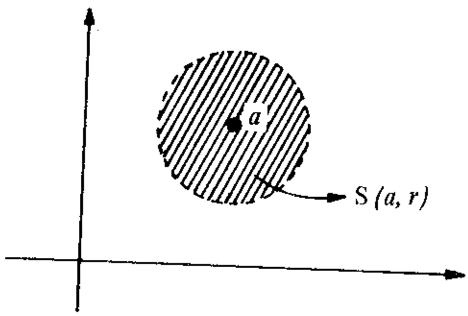
$$S(\mathbf{a}, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n / \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2 \}$$

En particular, si $n = 1$, se tiene el segmento abierto de longitud $2r$ cuyo punto medio es a.



$$S(\mathbf{a}, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R} / | \mathbf{x} - \mathbf{a} | < r \} = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R} / \mathbf{a} - r < \mathbf{x} < \mathbf{a} + r \}$$

En $\mathbf{R}^2$, $S(\mathbf{a}, r)$ es el interior del círculo de centro $\mathbf{a}$ y radio r.



$$S(\mathbf{a}, r) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 / \| \mathbf{x} - \mathbf{a} \| < r \} = \{ (x_1, x_2) / (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2 \}$$

10.2.2. Punto interior

Sea C un subconjunto de $\mathbf{R}^n$.

Definición

$\mathbf{a} \in C$ es un punto interior de C si y sólo si existe $r > 0$ tal que la esfera abierta de centro $\mathbf{a}$ y radio r está incluida en C.

$$\mathbf{a} \in C \text{ es interior de } C \Leftrightarrow \exists\, r > 0 / S(\mathbf{a}, r) \subset C$$

Los puntos de todo intervalo abierto en $\mathbf{R}$ son interiores. Si el intervalo es cerrado, todos sus puntos, salvo los extremos, son interiores.

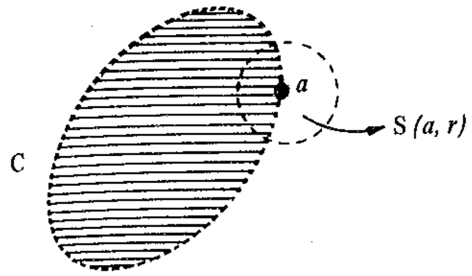
10.2.3. Punto frontera

Sea $C \subset \mathbf{R}^n$.

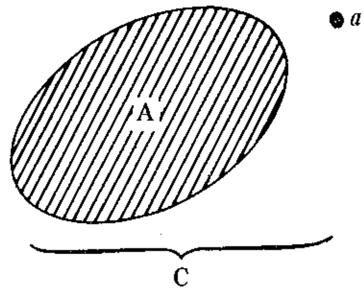
Definición

a $\in \mathbf{R}^n$ es un punto frontera de C si y sólo si toda esfera abierta de centro a tiene intersecciones no vacías con C y C^c.

$$a \in \mathbf{R}^n \text{ es frontera de } C \Leftrightarrow \forall r > 0: S(a, r) \cap C \neq \phi \wedge S(a, r) \cap C \neq \phi$$



El punto a $\notin$ C, pero es frontera de C.



Si $C = A \cup \{ a \}$, entonces el punto aislado a es frontera de C.

10.2.4. Punto de acumulación

Sea $C \subset \mathbf{R}^n$. El símbolo $S^*(a, r)$ se lee: "esfera reducida de centro a y radio r" e indica la diferencia entre $S(a, r)$ y $\{ a \}$. Es decir, $S^*(a, r)$ denota la esfera abierta de centro a y radio r, excluido el centro.

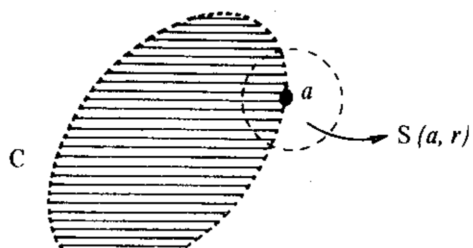
Definición

a $\in \mathbf{R}^n$ es un punto de acumulación de C si y sólo si la intersección entre C y cualquier esfera reducida de centro a es no vacía.

$$a \in \mathbf{R}^n \text{ es de acumulación de } C \Leftrightarrow \forall r > 0: S^*(a, r) \cap C \neq \phi$$

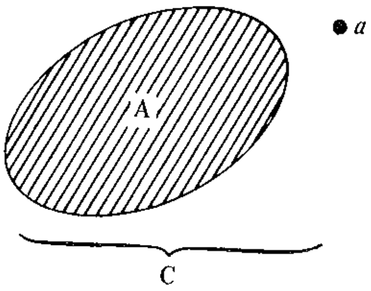
Los puntos de acumulación de un conjunto suelen llamarse puntos límites.

Observamos que un punto de acumulación de $C \subset \mathbf{R}^n$ no pertenece necesariamente a C. Tal es el caso de la figura siguiente:



$a \notin C$, es punto frontera y también de acumulación de C.

Si consideramos



$a \in C$ es punto frontera de C, pero no es de acumulación de C.

Se demuestra que toda esfera reducida, centrada en un punto de acumulación de C, contiene infinitos puntos de C.

10.2.5. Conjunto abierto

Sea $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

C es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores.

$$C \text{ es abierto} \Leftrightarrow \forall\, a \in C,\ \exists\, r > 0 \,/\, S(a, r) \cap C = S(a, r)$$

Se demuestra que la unión de toda familia de abiertos es un conjunto abierto, y que la intersección de toda familia finita de abiertos es abierto.

Las esferas $S(a, r)$ y $S^*(a, r)$ son conjuntos abiertos. Además, de la definición se deduce que un conjunto abierto no incluye a su frontera.

10.2.6. Conjunto cerrado

Consideremos $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

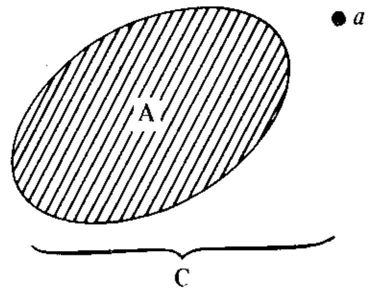
C es cerrado si y sólo si todo punto de acumulación de C pertenece a C.

Es decir, un conjunto es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.

El conjunto C' cuyos elementos son todos los puntos de acumulación de C, se llama derivado de C. Diremos entonces que

$$C \text{ es cerrado} \Leftrightarrow C' \subset C$$

La siguiente figura



representa un conjunto cerrado, donde C' = A. Los conceptos de abierto y cerrado no son excluyentes, ya que existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados.

Este es el caso de un conjunto formado por la unión de un disco abierto y un punto aislado. Observamos, además, que un segmento abierto es un conjunto abierto en **R**, pero no lo es en $\mathbf{R}^2$; o sea, el concepto de abierto es relativo al espacio métrico que se considere.

El lector podrá demostrar, como ejercicio del trabajo práctico, que un conjunto es cerrado si y sólo si su complementario es abierto.

Se verifica que la intersección de toda familia de cerrados es cerrada, y que la unión de toda familia finita de cerrados es un conjunto cerrado. Estas proposiciones son consecuencia de la propiedad anterior.

10.2.7. Clausura de un conjunto

Sea $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

Clausura de C es la unión entre C y su derivado.

El símbolo $\overline{C}$ se lee: "clausura de C".
Se tiene

$$\overline{C} = C \cup C'$$

O sea, la clausura de C es la unión entre C y el conjunto de sus puntos de acumulación. Se demuestra que la clausura de un conjunto cualquiera es cerrada. Más aún, que la clausura de un conjunto C es la intersección de todos los cerrados que inlcuyen a C. En este sentido, la clausura de C es el *mínimo* cerrado, en el sentido de inclusión, que contiene a C.

10.2.8. Conjunto acotado

Sea $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

C es acotado si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$a \in C \Rightarrow \|a\| \leqslant r$$

O sea, C es acotado si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$C \subset \bar{S}(\mathbf{0}, r)$$

Definición

C está *acotado por debajo* si y sólo si existe $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{a} \leqslant \mathbf{x}$$

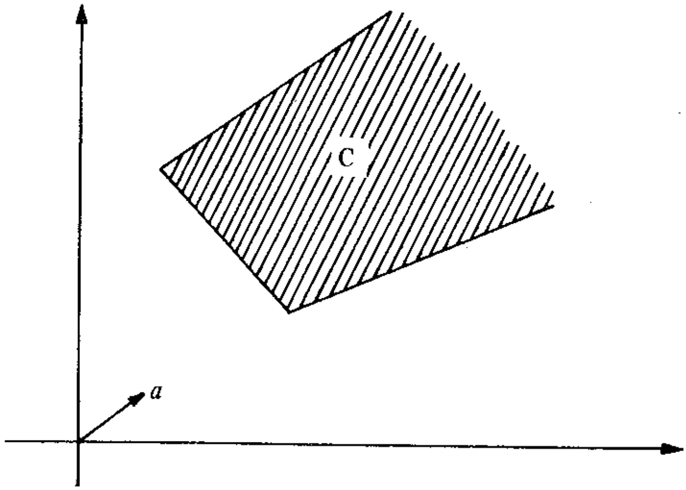
La notación vectorial $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{x}$ significa que $a_i \leqslant x_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición

C está *acotado por arriba* si y sólo si existe $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x} \in C \Rightarrow \mathbf{x} \leqslant \mathbf{a}$$

El conjunto $C \subset \mathbf{R}^2$ indicado en la siguiente figura está acotado por debajo, pero no por arriba

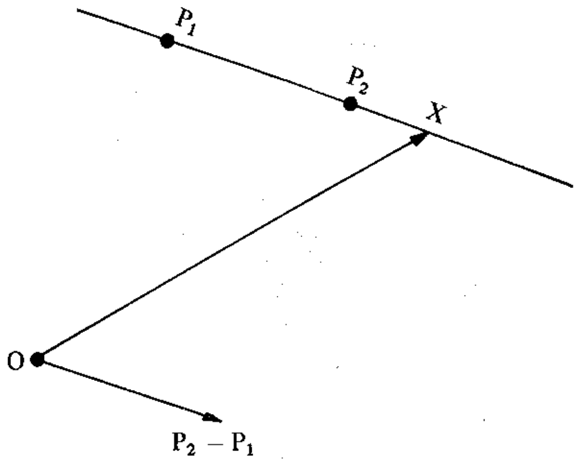


10.3. SEGMENTOS, HIPERPLANOS Y SEMIESPACIOS

10.3.1. Rectas y segmentos en $\mathbf{R}^n$

Sean P_1 y P_2 dos puntos distintos de $\mathbf{R}^n$. La ecuación vectorial de la recta $P_1 P_2$ es

$$X = P_1 + t(P_2 - P_1) \quad \text{donde } t \in \mathbf{R}$$



Por distributividad respecto de la suma en $\mathbf{R}^n$ y en $\mathbf{R}$, se tiene

$$X = t\,P_2 + (1-t)\,P_1 \quad \text{con } t \in \mathbf{R}$$

La recta determinada por P_1 y P_2 es el conjunto

$$P_1\,P_2 = \{\, X \in \mathbf{R}^n \,/\, X = t\,P_2 + (1-t)\,P_1 \,\}$$

El segmento $P_1\,P_2$ se obtiene haciendo variar el parámetro t entre 0 y 1, o sea

$$X \in \overline{P_1\,P_2} \Leftrightarrow X = t\,P_2 + (1-t)\,P_1 \wedge 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Observamos que cualquier punto del segmento determinado por P_1 y P_2 puede expresarse como combinación lineal de éstos, con escalares no negativos y cuya suma es 1.

Ejemplo 10-1

La ecuación vectorial paramétrica de la recta determinada por $P_1(3, 0)$ y $P_2(0, 4)$ es

$$(x_1, x_2) = (3, 0) + t\,(-3, 4)$$

El sistema de ecuaciones cartesianas paramétricas es

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 3\,t \\ x_2 = 4\,t \end{cases}$$

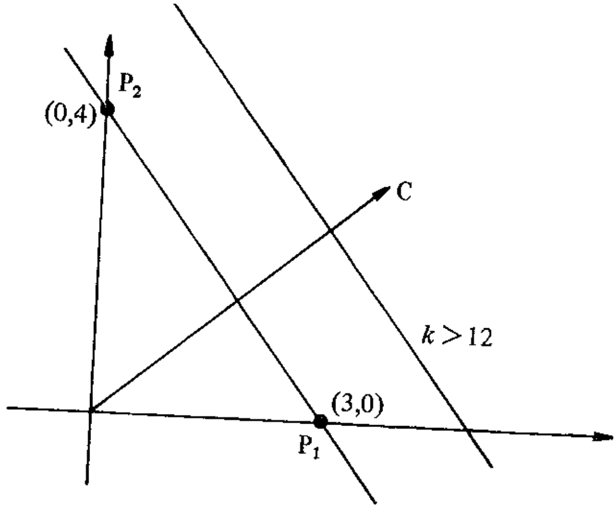
Eliminando el parámetro resulta la ecuación cartesiana

$$x_1 = 3 - 3\frac{x_2}{4}$$

O sea

$$4\,x_1 + 3\,x_2 = 12 \quad (1)$$

La representación es



El vector $c = 4I + 3J$ es normal a r. En notación matricial, la ecuación (1) se escribe

$$C^t X = 12$$

donde $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

La distancia entre $\mathbf{0}$ y r es

$$d(\mathbf{0}, r) = |P_C P_1| = \frac{|C^t P_1|}{\|C\|} = \frac{12}{5}$$

La igualdad

$$C^t X = k$$

denota una familia de rectas paralelas a r. Al trasladar r paralelamente a sí misma en la dirección de C, crece la distancia entre el origen y la recta.

Ejemplo 10-2

El segmento determinado por P_1 y P_2, con las coordenadas del ejemplo anterior, está dado por

$$(x_1, x_2) = t(0, 4) + (1 - t)(3, 0) \quad \text{con } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

El valor de t para el cual se obtiene el punto medio del segmento satisface a

$$\left(\frac{3}{2}, 2\right) = (0, 4t) + (3 - 3t, 0) = (3 - 3t, 4t)$$

de donde resulta $t = \dfrac{1}{2}$.

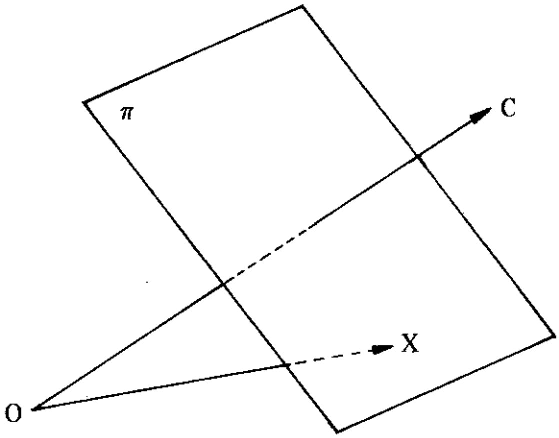
10.3.2. Hiperplanos en $\mathbf{R}^n$

Definición

Un hiperplano en $\mathbf{R}^n$ es un conjunto de puntos de $\mathbf{R}^n$ tales que

$$C^t X = k$$

donde C denota un vector columna de n componentes y k es un número real.



El vector C es ortogonal a π. En efecto, sean P_1 y P_2 pertenecientes a π. Entonces es

$$C^t P_1 = k \wedge C^t P_2 = k$$

Luego

$$C^t (P_2 - P_1) = 0$$

O sea, el producto interior entre C y cualquier vector de π es cero.
Luego

$$C \perp \pi$$

La ecuación de un hiperplano que pase por el origen es

$$C^t X = 0$$

La ecuación normal vectorial se obtiene dividiendo por $\| C \|$ y considerando k en valor absoluto, o sea

$$\frac{C^t}{\| C \|} X = \frac{|k|}{\| C \|}$$

Esta igualdad puede escribirse

$$N^t X = p$$

donde N es un vector unitario normal al plano. El número $\frac{k}{\| C \|}$ es, en valor absoluto, la distancia del origen al plano.

Los hiperplanos de ecuaciones $C_1^t X = k_1$ y $C_2^t X = k_2$ son paralelos si y sólo si $C_1 = \alpha C_2$.

En $\mathbf{R}^2$ un hiperplano es una recta. En $\mathbf{R}^3$ es un plano.

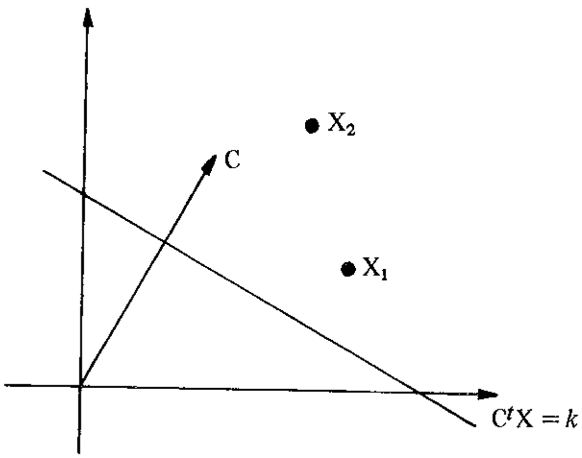
La ecuación cartesiana del hiperplano cuya ecuación vectorial es

$$C^t X = k,$$

se escribe

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = k$$

Consideremos el caso de un hiperplano cuyas intersecciones con los ejes sean positivas. La siguiente figura ilustra la situación en $\mathbf{R}^2$



La ecuación es

$$C^t X = k$$

donde $k > 0$. Mostraremos que si el hiperplano se traslada paralelamente a sí mismo en la dirección del vector normal, entonces el término independiente de la ecuación crece. En efecto, el hiperplano que pasa por X_1, de vector normal C, está definido por

$$C^t X = k_1$$

Si consideramos el hiperplano con el mismo vector normal, que pasa por

$$X_2 = X_1 + \alpha C, \text{ con } \alpha > 0,$$

se tiene

$$C^t X = k_2$$

Como

$$C^t X_2 = C^t (X_1 + \alpha C) = C^t X_1 + \alpha C^t C = k_1 + \alpha \| C \|^2$$

resulta

$$k_2 > k_1$$

Todos los puntos del hiperplano de ecuación $C^t X = k_2$ verifican $C^t X > k_1$.

Se propone como ejercicio del trabajo práctico la demostración de la siguiente propiedad: todo hiperplano es un conjunto cerrado.

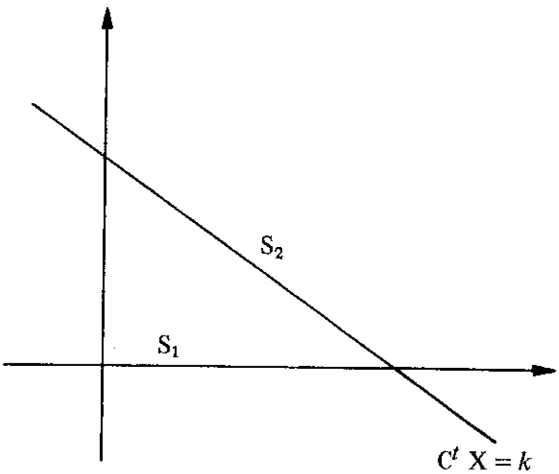
10.3.3. Semiespacios

Un hiperplano π de ecuación

$$C^t X = k$$

determina una partición de $\mathbf{R}^n$ en tres conjuntos: el hiperplano π y dos semiespacios abiertos de borde π.

Ilustramos esta situación en $\mathbf{R}^2$.



Definición

Semiespacios abiertos de borde π son los conjuntos

$$S_1 = \{ X \in \mathbf{R}^n \ / \ C^t X < k \}$$
$$S_2 = \{ X \in \mathbf{R}^n \ / \ C^t X > k \}$$

Definición

Semiespacios cerrados de borde π son los conjuntos

$$\bar{S}_1 = \{ X \in R^n \ / \ C^t X \leqslant k \}$$
$$\bar{S}_2 = \{ X \in R^n \ / \ C^t X \geqslant k \}$$

Se demuestra que los semiespacios abiertos son conjuntos abiertos, y que los semiespacios cerrados son conjuntos cerrados en $\mathbf{R}^n$.

10.4. CONVEXIDAD EN $\mathbf{R}^n$

10.4.1. Conjuntos convexos

Sea $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

El conjunto C es convexo si y sólo si el segmento determinado por cualquier par de puntos de C está incluido en C.

$$C \subset \mathbf{R}^n \text{ es convexo} \Leftrightarrow P_1 \in C \wedge P_2 \in C \Rightarrow \overline{P_1 P_2} \subset C$$

Sabemos que

$$\overline{P_1 P_2} = \{ X \in \mathbf{R}^n \ / \ X = t P_2 + (1 - t) P_1 \wedge 0 \leqslant t \leqslant 1 \}$$

La expresión $t P_2 + (1 - t) P_1$, donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, se llama combinación convexa de P_1 y P_2. En consecuencia, diremos que un conjunto C es convexo si y sólo si toda combinación convexa de dos puntos cualesquiera de C pertenece a C. El conjunto de todas las combinaciones convexas de P_1 y P_2 es el segmento cuyos extremos son estos puntos.

10.4.2. Propiedad

La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Sea $C = C_1 \cap C_2$, donde C_1 y C_2 son convexos. Consideremos dos puntos cualesquiera P_1 y P_2 pertenecientes a C. Se verifica que

$$P_1 \in C \wedge P_2 \in C \Rightarrow P_1 \in C_1 \wedge P_1 \in C_2 \wedge P_2 \in C_1 \wedge P_2 \in C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{P_1 P_2} \subset C_1 \wedge \overline{P_1 P_2} \subset C_2 \Rightarrow \overline{P_1 P_2} \subset C_1 \cap C_2 \Rightarrow \overline{P_1 P_2} \subset C$$

En consecuencia, C es convexo. Hemos aplicado la definición de intersección, de conjunto convexo y la siguiente propiedad: si un conjunto está incluido en dos conjuntos, entonces está incluido en la intersección de éstos.

10.4.3. Combinaciones convexas

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pertenecientes a $\mathbf{R}^n$.

Definición

Combinación convexa de los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_m$ es todo vector del tipo

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i$$

donde

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \text{ y } \alpha_i \geqslant 0, \ \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

Propiedad

El conjunto de las combinaciones convexas de los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_m$, es convexo.

Hipótesis) $\{ P_1, P_2, \ldots, P_m \} \subset \mathbf{R}^n$

Tesis) $C = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i \,/ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \wedge \alpha_i \geqslant 0 \right\}$ es convexo

Demostración)

Se trata de probar que toda combinación convexa de dos puntos cualesquiera de C, pertenece a C. Sean P' y P'' pertenecientes a C. Ahora bien

$$P' \in C \wedge P'' \in C \Rightarrow P' = \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i P_i \wedge P'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha''_i P_i$$

donde

$$0 \leqslant \alpha'_i, \ 0 \leqslant \alpha''_i \ \text{ y } \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha''_i = 1$$

Como

$$t P'' + (1-t) P' = t \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i P_i + (1-t) \sum_{i=1}^{m} \alpha''_i P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(t\, \alpha'_i + (1-t)\, \alpha''_i \right) P_i$$

resulta $t P'' + (1-t) P'$ una combinación convexa de los m puntos dados, pues

$$0 \leqslant \alpha'_i \Rightarrow 0 \leqslant t\, \alpha'_i$$

$$0 \leqslant \alpha''_i \Rightarrow 0 \leqslant (1-t)\, \alpha''_i$$

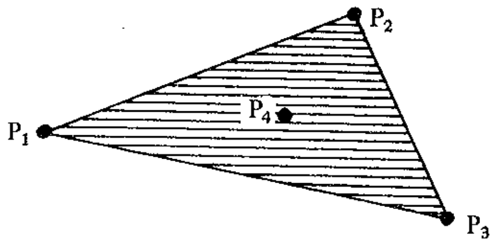
Luego

$$0 \leqslant t\, \alpha'_i + (1-t)\, \alpha''_i$$

Además

$$\sum_{i=1}^{m} t\, \alpha'_i + (1-t)\, \alpha''_i = t \sum_{i=1}^{m} \alpha'_i + (1-t) \sum_{i=1}^{m} \alpha''_i = 1$$

El conjunto C, representado en la figura siguiente, es el conjunto de las combinaciones convexas de los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 pertenecientes a $\mathbf{R}^2$



10.4.4. Casco convexo de un conjunto

Sea C un conjunto no vacío de $\mathbf{R}^n$.

Definición

Casco convexo de C es la intersección de todos los convexos que incluyen a C.

El casco convexo de $C \subset \mathbf{R}^n$ es el *mínimo* convexo (en el sentido de inclusión), que incluye a C.

Sea $\mathbb{C}$ el casco convexo de C. Entonces

$$\mathbb{C} = \cap\, C_i$$

donde $\{ C_i \,/\, i \in I \}$ es la familia de todos los convexos que incluyen a C.

Ejemplo 10-3

• En $\mathbf{R}^n$, el casco convexo del conjunto $C = \{ P_1, P_2 \}$, donde $P_1 \neq P_2$, es el segmento $\overline{P_1 P_2}$.

• En $\mathbf{R}^3$, si C es la superficie esférica de radio 2 con centro en el origen, entonces C es la esfera correspondiente. En términos analíticos, se tiene

$$C = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, \|X\| = 2 \}$$
$$\mathbb{C} = \{ X \in \mathbf{R}^3 \,/\, \|X\| \leqslant 2 \}$$

10.4.5. Propiedad

El casco convexo de un número finito de puntos de $\mathbf{R}^n$ es el conjunto de la combinaciones convexas de ellos.

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_m$ pertenecientes a $\mathbf{R}^n$. En 10.4.3. hemos demostrado que el conjunt de las combinaciones convexas de estos puntos es convexo.

Este conjunto, que denotamos mediante S, es un convexo que incluye $C = \{ P_1, P_2, \ldots, P_n \}$, ya que cualquiera de los elementos de éste es una combinació convexa de todos ellos.

Consideremos ahora la intersección de la familia de todos los convexos que incluyen a C o sea

$$\mathbb{C} = \cap\, C_i \,/\, C_i \supset C \wedge C_i \text{ es convexo}$$

Debemos probar que

$$C \subset A \text{ y } A \text{ es convexo} \Rightarrow S \subset A$$

Razonamos inductivamente sobre m.

1. Si $m = 1$, la proposición se verifica obviamente, ya que $S = C$.

2. Suponemos la validez para $m-1$. Se tiene

$$P \in S \Rightarrow P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i \wedge 0 \leqslant \alpha_i \wedge \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

Sea $\alpha_m \neq 1$; entonces

$$P = (1 - \alpha_m)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_m} P_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_m} P_2 + \ldots + \frac{\alpha_{m-1}}{1-\alpha_m} P_{m-1}\right) + \alpha_m P_m$$

El vector $\frac{\alpha_1}{1-\alpha_m} P_1 + \ldots + \frac{\alpha_{m-1}}{1-\alpha_m} P_{m-1}$ es una combinación convexa de $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}$, y por la hipótesis inductiva pertenece a A. Como éste es convexo, P, que es una combinación convexa de dos puntos de A, pertenece a A.

En consecuencia

$$S \subset A$$

O sea, $\mathbb{C} = S$.

Definición

Poliedro convexo generado por un número finito de puntos es el casco convexo que ellos determinan.

El triángulo representado en 10.4.3. es el poliedro convexo generado por P_1, P_2, P_3 y P_4.

10.5. CONVEXIDAD Y TRASFORMACIONES LINEALES

10.5.1. Imagen de un conjunto convexo

La imagen de un conjunto convexo, por toda trasformación lineal $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, es un conjunto convexo.

Hipótesis) $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es trasformación lineal

$C \subset \mathbf{R}^n$ es convexo

Tesis) $f(C)$ es convexo en $\mathbf{R}^m$

Demostración) Sean Q' y Q'' pertenecientes a $f(C)$. Por definición de imagen, existen P' y P'' en C, tales que

$$f(P') = Q' \quad \text{y} \quad f(P'') = Q''$$

Como C es convexo, se verifica que

$$t\,P'' + (1-t)\,P' \in C$$

Luego

$$t\,f(P'') + (1-t)\,f(P') \in f(C)$$

O sea

$$t\,Q'' + (1-t)\,Q' \in f(C)$$

En consecuencia, $f(C)$ es convexo.

10.5.2. Preimagen de un conjunto convexo

La preimagen de un conjunto convexo, por toda trasformación lineal $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, es un conjunto convexo.

Hipótesis) $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ es trasformación lineal

$C \subset \mathbf{R}^m$ es convexo

Tesis) $f^{-1}(C)$ es convexo en $\mathbf{R}^n$.

Demostración) Consideremos dos puntos cualesquiera P' y P'' en la preimagen de C. Por definición de preimagen, de trasformación lineal y de convexidad, se tiene

$$P' \in f^{-1}(C) \wedge P'' \in f^{-1}(C) \Rightarrow f(P') \in C \wedge f(P'') \in C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t\,f(P'') + (1-t)\,f(P') \in C \Rightarrow f(t\,P'' + (1-t)\,P') \in C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t\,P'' + (1-t)\,P' \in f^{-1}(C)$$

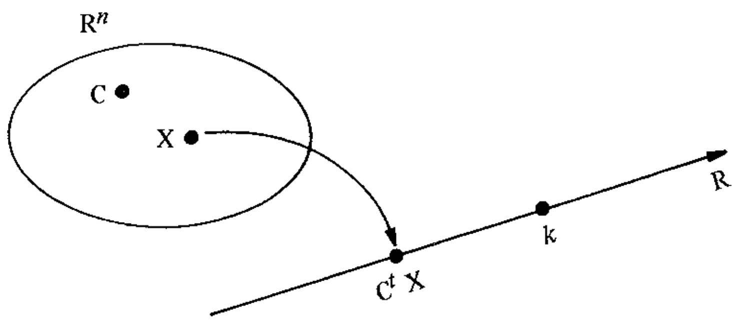
En consecuencia, $f^{-1}(C)$ es un conjunto convexo.

10.5.3. Convexidad de hiperplanos y de semiespacios

1. Todo hiperplano es un conjunto convexo.

Consideremos $C \in \mathbf{R}^n$ y la función $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(X) = C^t\,X$$

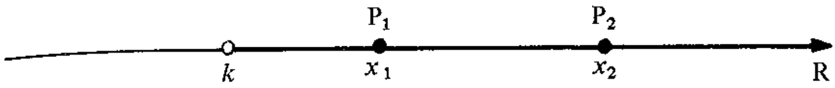


Esta definición caracteriza a f como trasformación lineal. El conjunto cuyo único elemento es $k \in \mathbf{R}$ es convexo. De acuerdo con 10.5.2., su preimagen por f, es un convexo en $\mathbf{R}^n$. Tal preimagen es el conjunto

$$\{ X \in \mathbf{R}^n \,/\, f(X) = C^t\, X = k \}$$

O sea, el hiperplano de ecuación $C^t\, X = k$.

II . El conjunto $C = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x > k \}$ es convexo.



En efecto:

$$P_1 \in C \wedge P_2 \in C \Rightarrow x_1 > k \wedge x_2 > k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t\, x_2 + (1-t)\, x_1 > t\, k + (1-t)\, k = k$$

III. Todo semiespacio abierto es un conjunto convexo.

Considerando la trasformación lineal $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(X) = C^t\, X,$$

y que el conjunto

$$\{ x \in \mathbf{R} \,/\, x > k \}$$

es convexo, entonces su preimagen, o sea

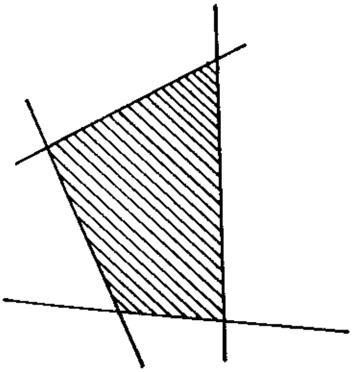
$$\{ X \in \mathbf{R}^n \,/\, f(X) = C^t\, X > k \},$$

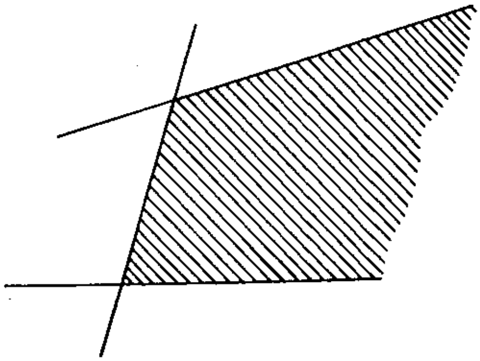
es un conjunto convexo, de acuerdo con 10.5.2.
Tal preimagen es el semiespacio de inecuación

$$C^t\, X > k$$

IV. Con criterio análogo se prueba que todo semiespacio cerrado es un conjunto convexo.

V . La intersección de un número finito de semiespacios, por ser éstos conjuntos convexos, es un conjunto convexo. Tal intersección, como lo muestran las siguientes figuras, puede ser acotada o no.





10.6. HIPERPLANOS SOPORTANTES

10.6.1. Propiedad

Si C es un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbf{R}^n$, entonces cualquier punto $P \in \mathbf{R}^n$ pertenece a C, o bien existe un hiperplano π al que pertenece P y es tal que C está incluid en uno de los dos semiespacios abiertos de borde π.

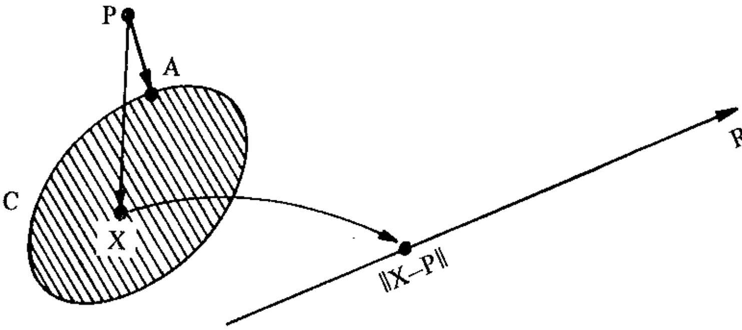
En efecto, si $P \in C$, nada hay que probar. Supongamos entonces que $P \notin C$; en este cas demostraremos que existe un hiperplano π que verifica lo afirmado en el enunciado.

Consideremos la función

$$f : C \to \mathbf{R}$$

definida por

$$f_p(X) = \| X - P \|$$



La función f_p es continua y alcanza el mínimo en C. O sea

$$\exists\, A \in C \,/\, X \in C \Rightarrow f_p(A) \leqslant f_p(X)$$

Es decir, existe $A \in C$ tal que

$$\| A - P \| \leqslant \| X - P \| \quad \forall X \in C$$

Sea $N = A - P$. Se verifica que $N \neq \mathbf{0}$, pues $A \in C$ y $P \notin C$. Afirmamos que el hiperplan ortogonal a N que pasa por P es tal que C está incluido en uno de los dos semiespacio abiertos determinados por él.

La ecuación de tal hiperplano es

$$N^t (X - P) = 0$$

O sea

$$N^t X = N^t P$$

Si B es cualquier punto de C distinto de A, entonces para todo t perteneciente al interval semiabierto $(0, 1]$ se verifica que

$$\| A - P \| \leqslant \| A - t(B - A) - P \| = \| (A - P) + t(B - A) \|$$

Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta la expresión del cuadrado del módulo y la distributividad del producto interior, en notación matricial, resulta

$$\| A - P \|^2 \leqslant \| A - P \|^2 + 2\, t\, (A - P)^t\, (B - A) + t^2\, \| B - A \|^2$$

Después de cancelar y dividir por t:

$$0 \leqslant 2\, (A - P)^t\, (B - A) + t\, \| B - A \|^2$$

Para $t \to 0$ es

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (A - P)^t\, (B - A) = N^t\, (B - A) = N^t\, B - N^t\, A = \\ &= N^t\, B - N^t\, A + N^t\, P - N^t\, P = N^t\, (B - P) - N^t\, (A - P) \end{aligned}$$

O sea

$$0 \leqslant N^t\, (B - P) - N^t\, N$$

De donde

$$N^t\, N \leqslant N^t\, (B - P)$$

Y como $N^t\, N > 0$, pues $N \neq \mathbf{0}$, resulta

$$0 < N^t\, (B - P)$$

Es decir

$$N^t\, B > N^t\, P$$

En consecuencia, B pertenece al semiespacio de inecuación

$$N^t\, X > N^t\, P$$

O sea, C está incluido en el semiespacio abierto determinado por la inecuación

$$N^t\, X > N^t\, P$$

10.6.2. Hiperplano soportante

Sea P un punto frontera del subconjunto convexo $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

π es un hiperplano soportante del conjunto convexo C en el punto frontera P si y sólo si C está incluido en uno de los dos semiespacios cerrados de borde π.

Queda como ejercicio del trabajo práctico la demostración de la siguiente propiedad: si P es un punto frontera de un conjunto convexo C, entonces existe un hiperplano soportante de C en P.

Ejemplo 10-4

Consideremos un conjunto convexo C y el hiperplano de ecuación

$$N^t\, X = k$$

Sabiendo que

$$X \in C \Rightarrow N^t X \geqslant k \quad (1)$$

afirmamos que todo punto perteneciente a $C \cap \pi$ es un punto frontera de C.
En efecto, si P no fuera un punto frontera de C, existiría $\epsilon > 0$ tal que

$$P - \epsilon N \in C$$

Luego

$$N^t (P - \epsilon N) = N^t P - \epsilon N^t N = k - \epsilon N^t N < k$$

lo que es imposible, ya que todo punto de C satisface (1).
En consecuencia, P es un punto frontera de C, y π es un hiperplano soportante de C en P.

10.7. PUNTOS EXTREMOS

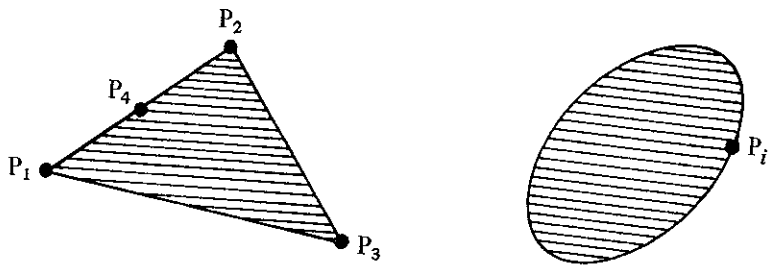
Sea P un punto del conjunto convexo $C \subset \mathbf{R}^n$.

Definición

P es un punto extremo de C si y sólo si no existen dos puntos distintos P_1 y P_2 pertenecientes a C tales que

$$P = t\,P_2 + (1 - t)\,P_1 \quad \text{donde} \quad 0 < t < 1$$

O sea, un punto extremo de un conjunto convexo no pertenece al segmento abierto determinado por dos puntos distintos de él.



Observamos que un punto extremo no puede pertenecer a un segmento incluido en C, a menos que sea un extremo de dicho segmento.
Se demuestra que todo punto extremo de un conjunto convexo es un punto frontera.

Propiedad

Todo hiperplano soportante de un conjunto convexo, cerrado y acotado por debajo, contiene un punto extremo.

Para probar esta afirmación consideremos un hiperplano soportante de C en un punto frontera P_0. Sea π tal hiperplano, y su ecuación

$$N^t X = N^t P_0$$

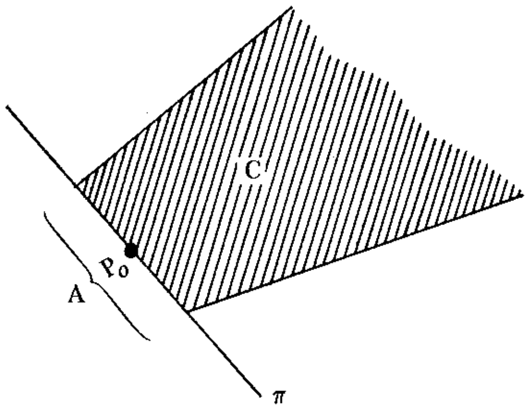
Consideremos el semiespacio cerrado definido por

$$N^t X \geqslant N^t P_0 \quad \forall X \in C$$

y sea

$$A = \pi \cap C$$

De acuerdo con las hipótesis y propiedades anteriores, A es convexo, cerrado y acotado por debajo.



Probaremos que todo punto extremo de A es un punto extremo de C. En consecuencia, el problema queda reducido a la determinación de los puntos extremos de A.

Supongamos que P sea un punto extremo de A no perteneciente a C; entonces existen Q_1 y Q_2 en C tales que

$$P = t\,Q_2 + (1-t)\,Q_1 \;\wedge\; 0 < t < 1 \quad (1)$$

Ahora bien

$$P \in \pi \Rightarrow N^t P = N^t P_0 \quad (2)$$

De (1) se deduce

$$N^t P = t\,N^t Q_2 + (1-t)\,N^t Q_1$$

De esta igualdad y de (2) resulta

$$N^t P_0 = t\,N^t Q_2 + (1-t)\,N^t Q_1 \quad (3)$$

Además

$$Q_1 \in C \wedge Q_2 \in C \Rightarrow N^t Q_1 \geqslant N^t P_0 \wedge N^t Q_2 \geqslant N^t P_0$$

Supongamos que se verifica alguna desigualdad estricta, por ejemplo, $N^t Q_2 > N^t P_0$.

Entonces, considerando (3) se tiene

$$N^t P_0 > t\, N^t P_0 + (1-t)\, N^t P_0 = N^t P_0$$

lo que es absurdo. En consecuencia, se verifica que

$$N^t Q_1 = N^t P_0 \;\wedge\; N^t Q_2 = N^t P_0$$

O sea

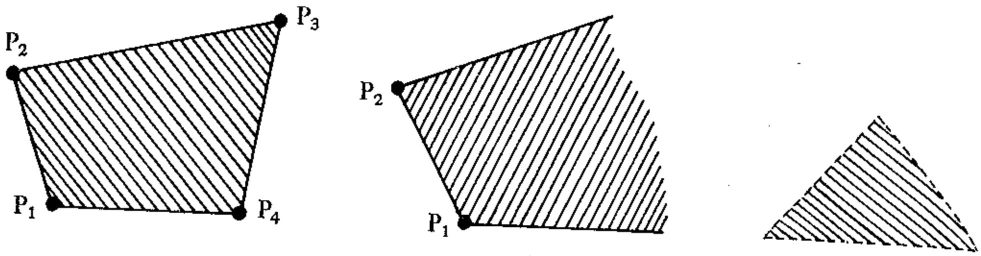
$$Q_1 \in \pi \;\wedge\; Q_2 \in \pi$$

y esto contradice la suposición de que P es un punto extremo de A.

Proponemos como ejercicio del trabajo práctico la determinación efectiva de un punto extremo de A.

Se demuestra que todo conjunto cerrado, acotado y convexo es el casco convexo de sus puntos extremos.

Las figuras ilustran esta situación y también el hecho de que un convexo no acotado o abierto no es el casco convexo de sus puntos extremos.



10.8. INTRODUCCION A LA PROGRAMACION LINEAL

10.8.1. Concepto

La Investigación Operativa, que nace en la segunda Guerra Mundial, es la ciencia que trata problemas que se presentan en la industria, comercio, educación, defensa, etcétera, y aplicable a sistemas complejos en los que intervienen personas, equipos, materia prima y dinero. Su objetivo es el asesoramiento, a fin de adoptar decisiones convenientes.

La Programación Lineal es un modelo particular que utiliza la Investigación Operativa. Los problemas que trata la Programación Lineal son aquellos que pueden ser expresados mediante relaciones lineales que vinculan las variables con los datos.

En lo que sigue, y sobre la base del concepto de convexidad, presentaremos el problema general de la Programación Lineal en lo que se refiere a su planteo, estructura lineal, soluciones posibles y optimización del objetivo.

Consideremos el siguiente caso: una industria produce dos tipos de productos A_1 y A_2. Existen restricciones de los recursos: mano de obra, materia prima y maquinaria. Se sabe que para producir una unidad del producto A_1, el dinero insumido por los recursos es, en pesos, 5, 10 y 4 respectivamente. En el caso del segundo producto las cantidades son 6, 20 y 4.

Esta situación queda indicada en la siguiente tabla o matriz

	A_1	A_2
Mano de obra	5	6
Materia prima	10	20
Equipos	4	4

El dinero disponible para cada uno de los tres recursos es, respectivamente, 15.000, 20.000 y 6.000 pesos.

La ganancia o beneficio neto por cada unidad del producto A_1 es 3 pesos, y por cada unidad del producto A_2 es 4 pesos. Se supone que el mercado puede absorber sin competencia estos productos.

Con esta información completamos el cuadro anterior:

Productos / Recursos	A_1	A_2	Disponibilidades
Mano de obra	5	6	15.000
Materia prima	10	20	20.000
Equipos	4	4	6.000
Beneficio	3	4	

El problema consiste en determinar las cantidades a producir, x_1 y x_2, de los productos A_1 y A_2, respectivamente, a fin de obtener el máximo beneficio. El objetivo es, entonces, maximizar el beneficio.

Las variables x_1 y x_2 deben satisfacer las siguientes restricciones:

1. Condiciones de vínculo

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leqslant 15.000 \\ 10x_1 + 20x_2 \leqslant 20.000 \\ 4x_1 + 3x_2 \leqslant 6.000 \end{cases}$$

2. Condiciones de no negatividad

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

El número de unidades producidas de cada producto no puede ser negativo.

El conjunto solución S del sistema formado por las inecuaciones anteriores es la intersección de los cinco semiespacios (en este caso semiplanos), que tales inecuaciones determinan.

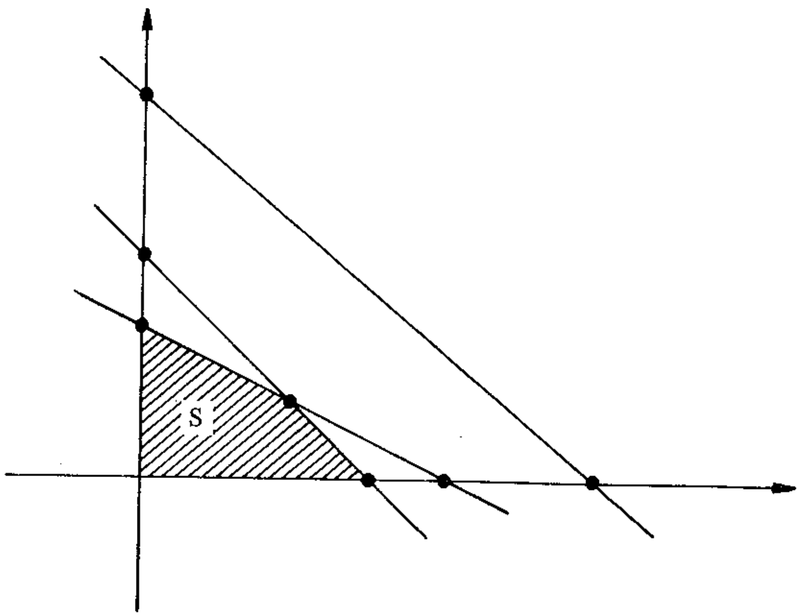
Para obtenerlo, representamos primero las rectas cuyas ecuaciones son:

$$5x_1 + 6x_2 = 15.000$$
$$10x_1 + 20x_2 = 20.000$$
$$4x_1 + 4x_2 = 6.000$$

Las condiciones de no negatividad restringen el problema al primer cuadrante. Obtenemos las intersecciones de las rectas con los ejes escribiendo las ecuaciones en la forma segmentaria, o sea, dividiendo por cada término independientemente:

$$\frac{x_1}{3.000} + \frac{x_2}{2.500} = 1$$
$$\frac{x_1}{2.000} + \frac{x_2}{1.000} = 1$$
$$\frac{x_1}{1.500} + \frac{x_2}{1.500} = 1$$

La representación de las tres rectas y del conjunto S, intersección de los cinco semiespacios, queda indicada en la siguiente figura



El conjunto solución S es el cuadrilátero cuyos puntos (x_1, x_2) satisfacen las condiciones de vínculo y de no negatividad. S recibe el nombre de conjunto de soluciones posibles o factibles. De él hay que elegir el subconjunto cuyos elementos maximicen la función objetivo

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

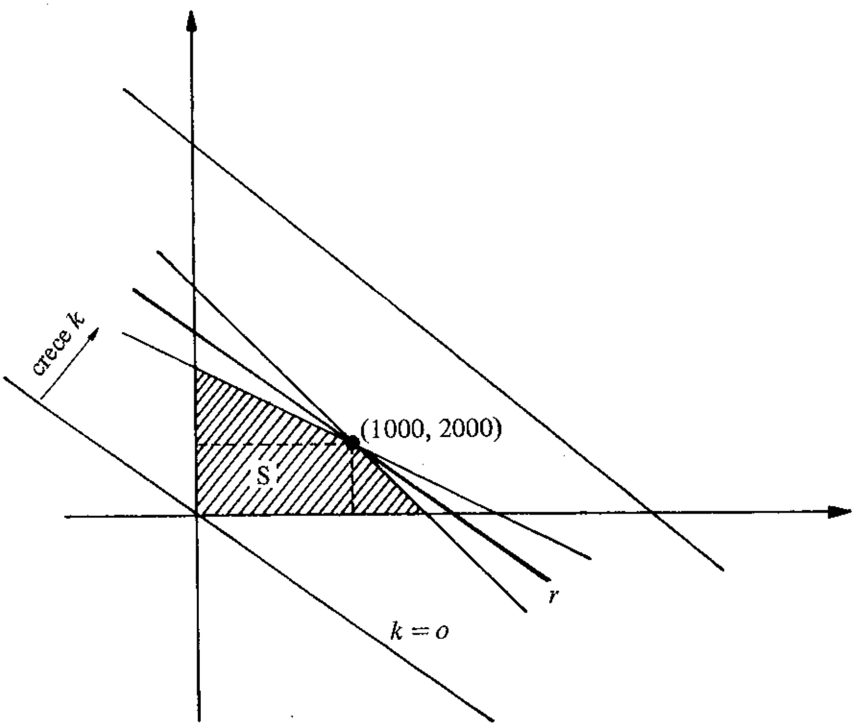
$f(x_1, x_2)$ representa el beneficio neto que se obtiene al vender x_1 unidades del producto A_1 y x_2 unidades del producto A_2.

La relación

$$3x_1 + 4x_2 = k$$

representa una familia de rectas paralelas, de pendiente $m = -\frac{3}{4}$, llamadas rectas de isobeneficio.

De éstas, interesa aquella cuya intersección con S sea no vacía y cuya distancia al origen, es decir, $\frac{k}{5}$, sea máxima. Esto es, hay que determinar la recta de la familia de mayor k y de intersección no vacía con S.



En la figura se ha representado la recta de la familia que pasa por el origen y cuya ecuación es

$$3x_1 + 4x_2 = 0$$

Desplazando esta recta en la dirección del vector normal $3\,I + 4\,J$ crece la distancia al origen.

El conjunto $S \cap r$ corresponde al punto (1.000, 500). Para estos valores de x_1 y x_2 el beneficio es máximo, y se obtiene

$$\text{máx} f(x_1, x_2) = 3 \,.\, 1000 + 4 \cdot 500 = 5000$$

O sea, el beneficio máximo, que es de 5.000 pesos, se obtiene produciendo 1.000 unidades del producto A_1 y 500 unidades de A_2. Cualquier otro punto de S tiene coordenadas asociadas a una producción con la que se obtiene una ganancia menor. Si el número de variables es mayor que 2, no es posible resolver el problema gráficamente. El método analítico más utilizado para resolver un problema de Programación Lineal es el Simplex.

Con relación al problema expuesto, utilizando notación matricial, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 20 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 15.000 \\ 20.000 \\ 6.000 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. *Condiciones de vínculo:*

$$A\,X \leqslant B$$

2. *Condiciones de no negatividad:*

$$X \geqslant \mathbf{0}$$

3. *Función objetivo* (a optimizar):

$$f(X) = C^t\,X$$

Ejemplo 10-5

Desarrollamos el siguiente problema expuesto por Tucker en el Seminario de Royaumont, cuyo enunciado figura en la publicación número 26, escrita por el Doctor Luis A. Santaló, de la colección La Escuela en el Tiempo, Editorial Eudeba, 1966.

Un chacarero tiene a su disposición 100 hectáreas de tierra, 160 días-hombre para cultivarlo y 1.100 pesos para invertir. Desea sembrar dos cultivos, uno de los cuales requiere un día-hombre por hectárea y produce un beneficio de 40 pesos por hectárea; el otro cultivo requiere 4 días-hombre por hectárea y produce un beneficio de 120 pesos por hectárea. El cultivo 1 requiere una inversión de 10 pesos por hectárea y el cultivo 2 requiere 20 pesos por hectárea. Se desea saber cuántas hectáreas de cada cultivo habrá de plantar para obtener el beneficio máximo.

En el siguiente esquema quedan especificados la matriz A, el vector B y los coeficientes de costos, o sea, el beneficio neto por hectárea para cada cultivo:

Recursos \ Cultivos	C_1	C_2	Disponibilidades
Hectáreas	1	1	100
Días-hombre	1	4	160
Inversión por ha.	40	20	1.100
Beneficio	40	120	

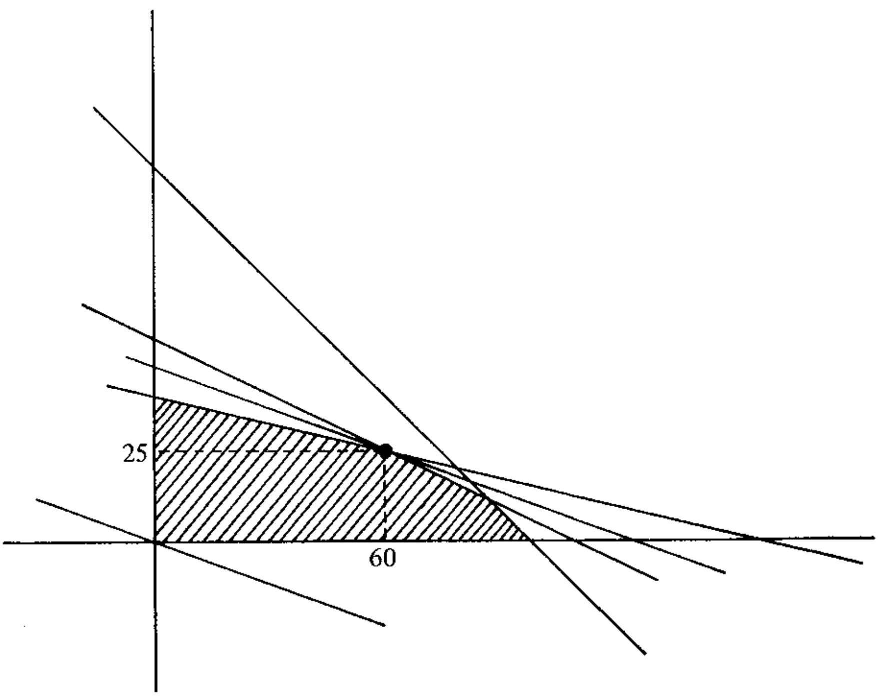
Si x_1 y x_2 son las hectáreas que deben destinarse a los cultivos C_1 y C_2, el problema consiste en maximizar la función objetivo

$$40x_1 + 120x_2$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 100 \\ x_1 + 4x_2 &\leqslant 160 \\ 10x_1 + 20x_2 &\leqslant 1.100 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

En el gráfico siguiente están representados el conjunto S de soluciones posibles, y el punto de coordenadas (60, 25) que optimiza la función objetivo:



El máximo beneficio se obtiene sembrando 60 hectáreas del cultivo 1 y 25 hectáreas del cultivo 2, o sea, dejando 15 hectáreas sin cultivar.

10.8.2. Problema general de Programación lineal

Un problema de programación lineal puede expresarse de la siguiente manera:

$$\text{minimizar} \quad f(X) = C^t X = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \qquad \text{(función objetivo)}$$

sujeta a las restricciones:

$$A X \leqslant B \qquad \text{(condiciones de vínculo)}$$

$$X \geqslant \mathbf{0} \qquad \text{(condiciones de no negatividad)}$$

donde $X \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{m \times 1}$.

Definición

Solución posible o factible de un problema de programación lineal es todo vector de $\mathbf{R}^n$ que satisfaga las restricciones.

El conjunto S, de las soluciones posibles, es convexo y cerrado por ser intersección de semiespacios cerrados. Si alguna condición de vínculo es una ecuación, en tal intersección interviene un hiperplano, que es convexo y cerrado.

Definición

Solución óptima es una solución posible que optimiza (minimiza en este caso) la función objetivo.

Propiedad

Si un hiperplano caracteriza el óptimo de la función objetivo, entonces tal hiperplano no tiene puntos interiores al conjunto de soluciones posibles.

En efecto, sea $C^t X = k$ la ecuación del hiperplano π asociado al mínimo de la función objetivo $f(X) = C^t X$, y supongamos que existe un punto P_0 en π, que es interior al conjunto S de soluciones posibles.

Por definición de punto interior, existe $\epsilon > 0$, tal que

$$S(P_0, \epsilon) \subset S$$

El punto

$$P_1 = P_0 - \frac{\epsilon}{3 \, \| C \|} C$$

pertenece a S, ya que es un elemento de la esfera abierta de centro P_0 y radio ϵ, pues

$$d(P_0, P_1) = \| P_1 - P_0 \| = \frac{\epsilon}{3}$$

El vector P_1 verifica, además

$$C^t P_1 = C^t P_0 - \frac{\epsilon C^t C}{3 \|C\|} = k - \frac{\epsilon \|C\|}{3} < k$$

lo que es contradictorio con la hipótesis de que la función objetivo alcanza el mínimo en P_0.

En consecuencia, podemos afirmar que un hiperplano correspondiente a una solución óptima es un hiperplano soportante de S en el punto de solución óptima.

10.8.3. Soluciones óptimas y puntos extremos

Propiedad

La función objetivo toma el valor óptimo en un punto extremo del conjunto de soluciones posibles. Si toma dicho valor en más de un punto extremo, entonces lo toma en toda combinación convexa de tales puntos.

Consideremos un problema genérico de Programación Lineal, consistente en maximizar la función objetivo

$$f(X) = C^t X$$

sujeta a un número finito de restricciones del tipo habitual. Entonces S admite un número finito de puntos extremos, y se identifica con el poliedro convexo generado por ellos. Es decir, S es el casco convexo de sus puntos extremos, y por consiguiente toda solución posible puede expresarse como combinación convexa de los mismos.

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_k$ los puntos extremos, y sea P_0 un punto de solución óptima, es decir, que maximiza la función objetivo.

Se verifica que

$$P \in S \Rightarrow f(P) \leqslant f(P_0)$$

Debemos probar que existe un punto extremo, en el que f toma el valor $f(P_0)$. Como $P_0 \in S$, se tiene

$$P_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i P_i \text{ con } 0 \leqslant \alpha_i \wedge \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

La función

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

definida por

$$f(X) = C^t X$$

es una trasformación lineal, y en consecuencia

$$f(P_0) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(P_i) \quad (1)$$

Consideremos

$$f(P^*) = \max_i \{ f(P_i) \,/\, i = 1, 2, \ldots, k \}$$

Como P^* es un punto extremo de S, y f toma el máximo en P_0, es

$$f(P^*) \leqslant f(P_0) \quad (2)$$

Por definición de máximo se tiene

$$f(P^*) \geqslant f(P_i) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k$$

Entonces

$$\alpha_i f(P^*) \geqslant \alpha_i f(P_i) \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Realizando la sumatoria respecto de i, es

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(P^*) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(P_i)$$

O sea

$$f(P^*) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(P_i)$$

Como $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, resulta

$$f(P^*) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(P_i) \quad (3)$$

De (1) y (3) se deduce

$$f(P^*) \geqslant f(P_0)$$

De esta relación y de (2), por la antisimetría, se verifica que

$$f(P_0) = f(P^*)$$

Es decir, existe un punto extremo, P^*, en el cual la función objetivo toma el valor máximo.

Supongamos ahora que f alcanza el óptimo en dos puntos extremos distintos y sean éstos P_i y P_j. Entonces

$$f(P_i) = f(P_j) = M$$

Consideremos una combinación convexa

$$P = t\,P_j + (1 - t)\,P_i$$

Como

$$f(P) = t\,f(P_j) + (1 - t)\,f(P_i) = t\,M + (1 - t)\,M = M$$

queda probado que el valor óptimo es alcanzado en el punto P, que es combinación convexa de P_i y P_j.

10.8.4. Observación

Sabemos, por 10.6.2., que todo conjunto convexo, cerrado y acotado por debajo tiene puntos extremos en cada hiperplano soportante. El conjunto de soluciones posibles de un problema de Programación Lineal es convexo, cerrado y acotado por debajo por el vector nulo, ya que $X \geqslant \mathbf{0}$. El teorema anterior asegura que si existe óptimo de la función objetivo, tal valor es alcanzado al menos en un punto extremo. En $\mathbf{R}^n$, S tiene un número finito de puntos extremos.

El problema se reduce entonces a examinar el valor de la función objetivo en los puntos extremos, a fin de hallar el óptimo. El método Simplex permite determinar analíticamente los puntos extremos y pasar de uno a otro analizando el valor de f, hasta obtener el óptimo.

TRABAJO PRACTICO X

10-6. Sea A $= \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \,/\, |x_1| < 1 \wedge |x_2| \leqslant 1\} \cup \{(2, 1)\}$
Determinar la frontera y el derivado de A.

10-7. Dados los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$

$$A = \{(x_1, x_2) \,/\, 2x_1^2 + 3x_2^2 \leqslant 6\}$$
$$B = \{(x_1, x_2) \,/\, x_1 \geqslant 1 \wedge x_2 \leqslant 2\}$$
$$C = \{(x_1, x_2) \,/\, x_1 x_2 \leqslant 2 \wedge x_1 \geqslant 0 \quad \wedge x_2 \geqslant 1\}$$

clasificar los puntos del plano respecto de ellos, determinar sus fronteras y derivados e investigar si son abiertos o cerrados.

10-8. Demostrar que un conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ es cerrado si y sólo si su complementario es abierto.

10-9. Demostrar que un hiperplano es un conjunto cerrado.

10-10. Investigar si los conjuntos de los ejercicios 10-6 y 10-7 son convexos o no.

10-11. Demostrar que la unión de una familia numerable de abiertos es un conjunto abierto.

10-12. Demostrar que la intersección de una familia finita de abiertos es un conjunto abierto.

10-13. Demostrar que la intersección de una familia numerable de cerrados es un conjunto cerrado, y que la unión de una familia finita de cerrados es un conjunto cerrado.

10-14. Determinar el casco convexo generado por los puntos $(1, 2)$, $(1, -1)$, $(1, 3)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(-1, -1)$, $(1, 0)$. Investigar si $(0, 0)$ es combinación convexa $(1, -1)$ y $(-1, 1)$.

10-15. Sea $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ la traslación definida por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, donde $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$.
Demostrar que

$$S \text{ es convexo} \Rightarrow f(S) \text{ es convexo}$$

10-16. Demostrar que el conjunto solución del sistema lineal $A\,X = B$, donde $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times 1}$ y $X \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, es convexo.

10-17. Sea $C \subset \mathbf{R}^n$. Por definición

$$C \text{ es un cono} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in C \Rightarrow \alpha\,\mathbf{x} \in C \wedge \alpha \geqslant 0$$

Demostrar que si $A \subset \mathbf{R}^n$, entonces el conjunto

$$C = \{ \alpha \mathbf{x} / \alpha \geqslant 0 \wedge \mathbf{x} \in A \}$$

es un cono. C recibe el nombre de cono generado por A.

10-18. Determinar el cono $C \subset \mathbf{R}^3$ generado por la intersección de

$$A_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) / x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2 \}$$

y el plano de ecuación $x_3 = 2$.

10-19. Sabiendo que C es un cono, demostrar que

$$C^- = \{ -\mathbf{x} / \mathbf{x} \in C \}$$

es un cono. C^- recibe el nombre de cono opuesto de C.

10-20. Demostrar que si C es un cono, entonces

$$C^\perp = \{ \mathbf{y} / \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = 0 , \ \forall \mathbf{x} \in C \}$$

es un cono. $C^\perp$ se llama cono ortogonal a C.

10-21. Demostrar que el cono ortogonal al cono $C \subset \mathbf{R}^n$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.

10-22. Sean los conos C_1 y C_2. Demostrar que

$$C = C_1 + C_2 = \{ \mathbf{x} + \mathbf{y} / \mathbf{x} \in C_1 \wedge \mathbf{y} \in C_2 \}$$

es un cono.

10-23. Plantear el siguiente problema de programación lineal:
Un mezclador de licores importa licores de tres grados: A, B y C. Mediante mezclas de éstos, ateniéndose a las indicaciones especificadas en la tabla siguiente, obtiene tres productos finales: L, M y N.

Mezcla	Especificación	Precio de venta por litro
L	No menos del 60 % de A No más del 20 % de C	68 $
M	No más del 60 % de C No menos del 15 % de A	57 $
N	No más del 50 % de C	45 $

Las disponibilidades de los tres licores básicos y sus costos son

Licor	Disponibilidad máxima mensual en litros	Costo por litro
A	6.000	63 $
B	7.500	45 $
C	3.600	36 $

El mezclador desea saber cuánto debe producir de los licores L, M y N, a fin de maximizar sus ganancias.

10-24. Una máquina de fabricar papel produce rollos de 82 cm de ancho. Se han recibido los siguientes pedidos:

60 rollos de 58 cm
85 rollos de 26 cm
85 rollos de 24 cm
50 rollos de 23 cm

Plantear el problema de cómo cortar los rollos de 82 cm, a fin de satisfacer los pedidos y minimizar el desperdicio.

BIBLIOGRAFIA

Bouteloup, J.: *Cálculo de Matrices*, EUDEBA, Buenos Aires, 1965.

Cotlar-Sadosky: *Introducción al Algebra*, EUDEBA, Buenos Aires, 1962.

Dieudonné J.: *Fundamentos de Análisis Moderno*. Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1966.

Faddeeva, N. A.: *Métodos de Cálculo de Algebra Lineal*, Editorial Paraninfo, Madrid, 1967.

Faure-Kaufman-Denis: *Matemática Moderna*. Editorial Paraninfo, Barcelona, 1966.

Gass S.: *Programación Lineal*. Editorial CECSA, México, 1961.

Gentile E. R.: *Espacios Vectoriales*. C.E.D.Q., Buenos Aires, 1965.

Graybill, F. A.: *An Introduction to Lineal Statistical Models*. Mac Graw-Hill, New York, 1961.

Hadley, G.: *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967.

Johnson R.: *Algebra Lineal*. CECSA, México, 1969.

Lang S.: *Linear Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1967.

Lentin-Rivaud: *Lecons d'Algebra Moderne*. Libraire Vuibert, París, 1961.

Lipschutz, S.: *Teoría y Problemas de Algebra Lineal*. Serie de Compendios Schaum, Colombia, 1963.

Lipschutz, S.: *Theory and Problems of Finite Mathematics*. Schaum, New York, 1966.

Marcus-Minc: *Introducción al Algebra Lineal*. CECSA, México, 1969.

Pettofrezzo A. J.: *Matrices and Transformations*. Prentice-Hall, Inc., New Yersey, 1966.

Rao C. R.: *Linear Satistical Inference and its Applications*. John Wesley and Sons, Inc., New York, 1968.

Rojo A.: *Algebra I*. Editorial El Ateneo, Buenos Aires, 1972.

Rudin W.: *Principles of Mathematical Analysis*. Mac Graw-Hill Book, 1963.

Simmons G. F.: *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Mac Graw-Hill, New York, 1963.

Tucker H.: *Introducción a la Teoría Matemática de las Probabilidades y a la Estadística*. Editorial Vicens-Vives, Barcelona, 1966.

Villamayor O.: *Notas de Geometría I*, Buenos Aires, 1966.

Villamayor O.: *Algebra Lineal*. Monografía Científica Número 5, O.E.A.

RESPUESTAS A LOS TRABAJOS PRACTICOS

TRABAJO PRACTICO I

1-16. i) sí ii) sí iii) no iv) no.

1-17. i) sumar el opuesto de y.

ii) sumar el opuesto de x.

iii) después de cancelar y de trasponer, aplicar A_9 y 1.3.3.

iv) trasponer y aplicar A_8 y 1.3.3.

1-18. Después de utilizar A_8 y A_9, y de cancelar, mediante 1.3.3. se obtiene $\alpha = 1$.

1-19. i) sí ii) sí iii) sí iv) sí v) sí vi) no.

1-20. No, ya que no existe neutro para la suma en V.

1-21. Sí. El lector debe probar que se verifican los axiomas.

1-22. i) sí

ii) no, pues $(1, 1, 2) \in S$ y $(1, -1, 3) \in S$ pero la suma $(2, 0, 5) \notin S$

iii) no, porque S no es cerrado para la suma.

1-23. i) no, pues no se verifica A_6

ii) sí. Verificar las condiciones suficientes.

1-24. Aplicar 1.8.2.

1-25. S no es subespacio de $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{C}, .)$ pues no es cerrado para el producto por escalares. Así, por ejemplo

$$(1 + i, -2) \in S \quad \text{pero} \quad i\,(1 + i, -2) \notin S.$$

En cambio S es un subespacio de $(\mathbf{C}^2, +, \mathbf{R}, .)$.

1-26. A_1 y A_6 se verifican por definición de cada ley de composición. Mostramos, a modo de ejemplo, la validez de A_2:

$$\left[(x, y) + (x', y')\right] + (x'', y'') = (x + x', y + y') + (x'', y'') =$$
$$= (x + x' + x'', y + y' + y'') = (x, y) + (x' + x'', y' + y'') =$$
$$= (x, y) + \left[(x', y') + (x'', y'')\right]$$

1-27. Aplicar 1.8.2.

1-28. i) $(x, y) \in S \Rightarrow (x - y)^2 = (x + y)^2 \Rightarrow -4xy = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

S es el conjunto unión de los dos ejes, o sea, no es un subespacio.

ii) T es el subespacio definido por la ecuación $x - 3y = 0$.

1-29. i) no, ya que no es cerrado para la suma; por ejemplo

$$(1, i) \in S \text{ y } (i, 1) \in S \quad \text{pero} \quad (1 + i, 1 + i) \notin S$$

ii) sí

iii) sí

iv) sí. $S = \{ (a, a + bi) / a \in \mathbf{R} \wedge b \in \mathbf{R} \}$.

v) sí

vi) sí.

1-30. Tener en cuenta las definiciones de suma de subespacios y de inclusión.

1-31. Suponer que $\mathbf{x} \in S$ admite dos descomposiciones del tipo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$, y tener en cuenta la definición de suma directa.

1-32. 1°. Aplicar 1.8.2.

2°. Tener en cuenta el ejemplo 4-5 iv), en el que se demuestra que toda matriz cuadrada es la suma de una matriz simétrica y de una antisimétrica.

TRABAJO PRACTICO II

2-25. i) se determinan a y b tales que

$$a\,(\sqrt{3}\,,2)+b\,(-\sqrt{6}\,,2)=(\sqrt{2}\,,1)$$

Aplicando las leyes de composición habituales se resuelve, después de igualar componentes, un sistema lineal de dos ecuaciones respecto de a y b.

ii) procediendo análogamente, el sistema resultante carece de soluciones y en consecuencia $\mathbf{v}$ no es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

2-26. Considerar la relación lineal

$$\alpha_1\,(-1,3,1)+\alpha_2\,(3,-1,1)+\alpha_3\,(4,0,2)=(0,0,0)$$

y después de aplicar las leyes de composición usuales y de igualar las componentes de las ternas se llega a un sistema lineal cuyas infinitas soluciones están dadas por

$$\alpha_1=k\,,\ \alpha_2=3\,k\,,\ \alpha_3=-2\,k$$

En la segunda parte, a partir de

$$(4,0,2)=\alpha\,(-1,3,1)+\beta\,(3,-1,1)$$

se llega a un sistema lineal cuya solución es $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$. Luego

$$(4,0,2)=\frac{1}{2}(-1,3,1)+\frac{3}{2}(3,-1,1)$$

2-27. Considerar $\alpha\,\mathrm{A}+\beta\,\mathrm{B}=\mathrm{N}$. Resulta $\alpha=\beta=0$.

2-28. En $(\mathbf{R},+,\mathbf{R},.)$ son L.D., pero en $(\mathbf{R},+,\mathbf{Q},.)$ son L.I.

2-29. $x=1$.

2-30. Considerar

$$\alpha\,(1,a,a^2)+\beta\,(1,b,b^2)+\gamma\,(1,c,c^2)=(0,0,0)$$

En el sistema resultante, restar a cada ecuación la anterior multiplicada por a, y después, a la tercera restar la segunda multiplicada por b.

2-31. A partir de la relación lineal

$$\alpha\,\mathbf{f}+\beta\,\mathbf{g}+\gamma\,\mathbf{h}=\mathbf{e}$$

donde e denota la función nula, se considera la imagen de cualquier $t \in \mathbf{R}$; derivando dos veces se obtiene $\alpha = \beta = k$, $\gamma = -2\,k$.

2-32. Se plantea una combinación lineal cuyo resultado sea la función nula, como en el ejercicio anterior, que se verifica para todo $t \in \mathbf{R}$. Dando a t dos valores distintos, por ejemplo 1 y 2, se llega a un sistema con la solución única $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

2-33. Considerar $\alpha\,(a, b) + \beta\,(c, d) = (0, 0)$.

2-34. Son L.I. en ambos espacios.

2-35. i) son L.I.

ii) son L.I. si $ab \neq 1$, y son L.D. si $ab = 1$.

2-36. Aplicar la definición de independencia lineal.

2-37. Considerar la relación lineal

$$\alpha_1\,\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\,\mathbf{x}_n + \beta\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

y probar que $\beta \neq 0$.

2-38. A partir de $\alpha_1\,\mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n\,\mathbf{x}_n + \alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se deduce que $\alpha = 0$, pues en caso contrario $\mathbf{x}$ sería C.L. de los vectores de A. Tener en cuenta después la hipótesis.

2-39. La demostración se puede hacer por inducción completa o por reducción al absurdo.

2-40. Considerar una combinación lineal de las tres funciones cuyo resultado sea la función nula, expresar la imagen de cualquier x, y dar a x tres valores, por ejemplo, $0, \frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

2-41. i) cualquier número real no nulo

ii) la base canónica

iii) la base canónica

iv) $\{\,1 + i\,\}$

v) $\{\,1 + i,\ 1 - i\,\}$.

2-42. El subespacio pedido es el plano de ecuación $x - y - z = 0$, y una base del mismo es $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, ya que

$$(x, y, z) \in \mathrm{S} \Rightarrow (y + z, y, z) \in \mathrm{S} \Rightarrow (y, y, 0) + (z, 0, z) \in \mathrm{S} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y\,(1, 1, 0) + z\,(1, 0, 1) \in \mathrm{S}$, o sea, los dos vectores son un S.G. de S, y además, L.I.

2-43. El subespacio generado por ambos conjuntos de vectores es el plano cuya ecuación es $2x + y + 2z = 0$.

2-44. Una base es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, la dimensión es 3.

2-45. Una base de S es $\{\,(2, 1)\,, (2i, i)\,\}$, y la dimensión es 2.

2-46. S no es un subespacio ya que no es cerrado para la suma.

2-47. Está propuesto en 1-25, y la respuesta es afirmativa si el cuerpo es **R**. Una base es $\{1+i, -2i\}$.

2-48. S es el plano de ecuación $y=0$. Una base de S está formada por los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$. T puede ser el plano de ecuación $z=0$.

2-49. La dimensión de $S_1 \cap S_2$ es 2; aplicando 2.8.1., y considerando que $\dim S_1 = \dim S_2 = 3$, resulta $\dim (S_1 + S_2) = 4$.

2-50. Primero, demostrar

$$i > r \Rightarrow \mathbf{v}_i \text{ es C.L. de } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r.$$

Luego, probar que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es un sistema de generadores de V.

2-51. Considerar dos bases: una en S_1 y otra en S_2, y tener en cuenta el ejercicio 1-31.

TRABAJO PRACTICO III

3-21. 1. sí. 2. no. 3. sí. 4. no.

3-22. 1. sí. 2. no. 3. sí. 4. no.

3-23. Aplicar la definición de T.L. a $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$.

3-24. Usar la definición de T.L. Probar que f es biyectiva. f caracteriza la simetría del plano respecto del origen.

3-25. Expresar los vectores $(3, 3)$ y $(0, -1)$ como C.L. de $(1, 2)$ y de $(2, 1)$. Aplicar después la definición de T.L. Resulta $f(3, 3) = (-1, 2, 1)$ y $f(0, -1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-5}{3}\right)$.

3-26. Considerar F $(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$ y F $(\alpha\, \mathbf{v})$.

3-27. Se obtiene el paralelogramo de vértices $(1, 1)$, $(0, 3)$, $(-1, 2)$ y $(0, 0)$.

3-28. Sí.

3-29. 1. Aplicar la definición de T.L.

2. f es inyectiva, pero no sobreyectiva; g es sobreyectiva, pero no inyectiva.

3. $(g \circ f)(a, b) = (2a + b, b)$ y $(f \circ g)(a, b) = (a + b, a + b + c, c)$.

3-30. Aplicar la definición de imagen, el hecho de que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es S.G. de V, y la definición de T.L.

3-31. f es trasformación lineal biyectiva.

3-32. Aplicar la definición de T.L. El único vector cuya imagen es la matriz nula, es $(0, 0)$.

3-33. Considerar 1.8.2., la definición de preimagen y de T.L.

3-34. 1. $N(f) = \{(0, k, -k) \,/\, k \in \mathbf{R}\}$. Una base de $N(f)$ es $\{(0, 1, -1)\}$ y su dimensión es 1. $I(f)$ es $\mathbf{R}^2$.

2. $N(f) = \{(2k, k) \,/\, k \in \mathbf{R}\}$. Una base de $N(f)$ es $\{(2, 1)\}$, y su dimensión es 1. $I(f) = \mathbf{R}$, y su dimensión es 1.

3-35. $n = 3$. Se define $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ mediante

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_1 - x_4, x_2 + x_3 + x_4).$$

Probar que f es T.L.

$$N(f) = \{ (k, -k, 0, k) \mid k \in \mathbf{R} \}.$$

Una base es $\{(1, -1, 0, 1)\}$ y $\dim N(f) = 1$.

3-36. 1. $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 2. $f(-2, 2, -2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 4. $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3-37. 1. $N(f) = \{ (0, 0) \}$; $\dim N(f) = 0$. $I(f) = \{ (x, y, z) \mid 3x - y - 2z = 0 \}$; una base de la imagen está formada por los vectores $(1, 3, 0)$ y $(0, -2, 1)$; su dimensión es 2.

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3-38. Multiplicando A por el vector columna de componentes genéricas x_1, x_2 y x_3, se deduce que $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 - 3x_2 - 3x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3)$.

$N(f) = \{ (k, 0, k) \mid k \in \mathbf{R} \}$; $N(f)$ es la bisectriz del plano xz; su dimensión es 1. $I(f)$ es el plano de ecuación $x - y - z = 0$, y su dimensión es 2.

3-39. La matriz es la traspuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3-40. 1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. La imagen de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ es el vector $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ expresado en términos de la base dada.

3-41. $f(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{3}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3, -\frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 2x_3)$.

3-42. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3-43. Hallar las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^2$; se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

3-44. Considerar que la matriz de la composición de dos trasformaciones lineales es el producto de las correspondientes matrices. En el segundo caso, comprobar que $f_\theta \circ f_{-\theta} = f_{-\theta} \circ f_\theta = i$, donde i denota la función identidad.

3-45. Probar que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un sistema de generadores de V considerando cualquier elemento $g \in V$ y definiendo $a_i = g(v_i)$; resulta entonces $g = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$. Probar después la independencia lineal a partir de la relación lineal $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = e$ donde e denota la función nula; obteniendo la imagen de cada v_i, se prueba que $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Ambos espacios, V y su dual, tienen la misma dimensión.

3-46. 1. Probar que se cumple la definición de trasformación lineal, y tener en cuenta el ejercicio 1-31.

2. Utilizar la definición de composición de funciones.

3. Aplicar las definiciones de suma de funciones y de proyecciones; I denota la función identidad en V.

TRABAJO PRACTICO IV

4.22. $\frac{2}{3}A - 2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \frac{5}{6} & -2 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

4-23. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4-24. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $ABC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B^t A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4-25. i) $A^2 - I$ ii) $A^2 - AB + BA - B^2$.

4-26. A^2 es la matriz nula.

4-27. $A^2 = I$.

4-28. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, etc.

4-29. Considerar, por ejemplo, que A, B y C son de los tipos $n \times p$, $p \times q$ y $q \times m$, respectivamente; expresar la fila i de A, y la columna j de BC, para formar el elemento (i, j) de A (BC). Proceder análogamente con el segundo miembro.

4-30. Demostrar que la propiedad se cumple para $n = 1$, y que si se verifica para $n = h$, entonces se verifica para $n = h + 1$.

4-31. Demostrarlo por inducción completa, como el ejercicio anterior.

4-32. $X = I$.

4-33. Demostrar por inducción sobre k.

4-34. Considerar $X = X\,I$.

4-35. Plantear el sistema de ecuaciones no lineales.

4-36. Aplicar la definición de producto de matrices y la conmutatividad del producto en K.

4-37. Utilizar la definición de trasposición y de producto de matrices.

4-38. Partir de $(A\,B)^2$.

4-39. $0 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \Rightarrow a_{ik} = 0,\ \forall\, k$. Análogamente se prueba que la columna de lugar i es el vector nulo.

4-40. Efectuar $(B^t\, A\, B)^2$.

4-41. Premultiplicar $A + B = I$ por A, y posmultiplicar por B.

4-42. Como en el ejercicio anterior.

4-43. Determinar el cuadrado de cada una de las cuatro matrices y aplicar las hipótesis y propiedades de la trasposición.

4-44. Verificar que se cumple la definición de matriz simétrica.

4-45. Para la condición necesaria, considerar $A\, B = (A\, B)^t$. Para la condición suficiente, partir de $(A\, B)^t$.

4-46. Desarrollar el producto indicado.

4-47. Desarrollar $(A - a\, I)\,(B - a\, I)$ y utilizar la hipótesis de que A y B son permutables. Para la condición suficiente, considerar que $A - aI$ y $B - aI$ son permutables; después cancelar.

4-48. Las filas de AB son iguales entre sí, y cada elemento es igual a la suma de los elementos de la correspondiente columna.

4-49. Tener en cuenta las propiedades relativas a la inversa de un producto y a la traspuesta de un producto.

4-50. Se considera la matriz diagonal B cuyos elementos diagonales son los inversos de los correspondientes de A, y se verifica que $A\, B = B\, A = I$.

4-51. Considerar $A^2 = A$ y multiplicar por A^{-1}.

4-52. Probar que se verifican los cuatro axiomas de grupo.

4-53. Utilizando el mismo esquema de partición en ambas matrices, en bloques de dos filas y dos columnas, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4-54. Las dos primeras filas constituyen una base del espacio fila de A.

4-55. Multiplicar a derecha $B\, A = N$ por la inversa de A.

4-56. Premultiplicar por la inversa de A.

4-57. Tener en cuenta que hay que probar la verdad de una disyunción.

4-58. $\rho\,(A) = 2;\ \rho\,(B) = 3$.

4-59. La inversa de A no existe. $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

álgebra II

Armando O. Rojo

Décima tercera edición

LIBRERIA-EDITORIAL
EL ATENEO

ii) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

iii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

TRABAJO PRACTICO V

5-12. D (A) = –20. D (B) = 10. D (C) = –135. D (E) = 57.

5-13. Desarrollar por los elementos de la primera columna.

5-14. Considerar que la fila h, con $h \neq i$, es el producto del escalar λ por la fila i.

5-15. i) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5$

ii) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

5-16, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 10$.

5-17. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{3}$.

5-18. Tener en cuenta la definición de matriz ortogonal y 5.7.

5-19. Considerar 5.8.3.

5-20. Tener en cuenta el ejemplo 5-7.

5-21. Desarrollar el determinante φ y derivar.

5-22. Expresar los vectores canónicos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de $K^{n \times 1}$, como combinaciones lineales de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, y aplicar los axiomas de la función determinante.

5-23. Aplicar 5.5.1. y 5.5.3.

5-24. Considerar una relación lineal que sea igual a la función nula, expresar la igualdad obtenida para cualquier t y derivar $n-1$ veces. Resulta un sistema lineal y homogéneo dando a t el valor 0. El determinante de los coeficientes es de Vandermonde.

5-25. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}$. $B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix}$.

5-26. En cada caso, examinar el valor del determinante, y si es distinto de cero, aplicar 5.9.

5-27. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5-28. i) Restar a cada una de las dos primeras columnas, la siguiente.

ii) Sumar a la primera columna las restantes; factorear; a la cuarta fila sumarle la segunda y restarle las otras dos; sacar factor común; a la segunda columna sumarle la tercera, y a ésta, sumarle la cuarta. Desarrollar.

iii) A la cuarta columna sumarle la segunda y la tercera.

iv) A la primera fila sumarle la segunda y la tercera; factorear; a la primera columna restarle la tercera.

5-29. Agregar el vector de componentes 0, 0, 1, como tercera fila y tercera columna del segundo determinante. El producto es -18.

5-30. El valor del determinante es 4.

5-31. El jacobiano es $\rho^2 \cos \theta$.

5-32. El jacobiano es $-\dfrac{(1+V)^2}{U}$.

5-33. Considerar $(-1)^n D(A)$, y multiplicar el escalar -1 por cada una de las n columnas.

5-34. Multiplicar el determinante de la matriz particionada por $1 = \begin{vmatrix} I & N \\ -BA^{-1} & I \end{vmatrix}$

El lector puede verificar que $\begin{vmatrix} P & Q \\ N & R \end{vmatrix} = |P|\,|R|$.

5-35. Multiplicar las dos matrices y verificar que se obtiene la identidad.

5-36. Proceder como en el ejercicio anterior.

TRABAJO PRACTICO VI

6-13. La preimagen del vector $(-1, 1)$ es $\{ (-2-k, 3+3k, k) / k \in \mathbf{R} \}$.

6-14. El sistema 1. admite la solución única $x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = -4$.

El sistema 2. tiene infinitas soluciones, dadas por $x = 3 + 2k, y = 1 - k, z = k$.

6-15. Las dimensiones de los espacios soluciones de los sistemas homogéneos, son, respectivamente: 2, 1, 0, 2, 0.

6-16. 1. $\{ (1, 0, 1), (0, 1, 1) \}$.

2. $\{ (1, -1, 1) \}$.

4. $\{ (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \}$.

6-17. 1. Una base de S es $\{ (-1-i, i, 1) \}$ y la dimensión es 1.

2. Una base de S es $\{ (1, -3+i, -1-2i) \}$ y la dimensión es 1.

6-18. Una base es $\{ (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}) \}$.

6-19. Como $\rho(A) = 2$, el sistema tiene solución única. El conjunto solución es $T = \{ (-1, -2) \}$.

6-20. Tener en cuenta que $X = A^{-1} B$.

6-21. $T = \{ k (2, 3) / k \in \mathbf{R} \}$.

6-22. El sistema tiene infinitas soluciones, dadas por

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 1 - \alpha - 2\beta \\ x_4 = -3\alpha - 2\beta \text{ con } \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

6-23. Posmultiplicar por la inversa de A. Se obtiene $X = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 4 & -4 & -12 \\ -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

6-24. 1. $\rho(A) = \rho(A') = 2 < 5$. El sistema tiene infinitas soluciones, dadas por

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3\,\alpha + 2\,\beta - \gamma \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \gamma \\ x_5 = 8 - 5\,\alpha + \ 3\,\beta - 2\,\gamma \text{ con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

2. Como $\rho\,(\mathrm{A}) = 3$ y $\rho\,(\mathrm{A'}) = 4$, el conjunto solución es vacío.

3. $\rho\,(\mathrm{A}) = \rho\,(\mathrm{A'}) = 3 < 5$. Existen infinitas soluciones, del tipo

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \beta \\ x_5 = 2\,\alpha + \beta \end{cases}$$

6-25. El sistema es compatible porque $\rho\,(\mathrm{A}) = \rho\,(\mathrm{A'}) = 2$. Los elementos del conjunto solución son $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) + k\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$, $k \in \mathbf{R}$.

6-26. Las raíces de la ecuación son: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ las infinitas soluciones son del tipo $x_1 = -a$, $x_2 = b$, $x_3 = a$.
Para $\lambda_3 = -1$, se obtiene $x_1 = -2k$, $x_2 = 2k$, $x_3 = k$.

6-27. Determinar los valores de k que anulan al determinante de los coeficientes. Se obtiene $k = 0$ o $k = -3$. Para estos valores de k se obtienen soluciones no triviales. Analizar ambas situaciones. Para $k = 0$, el espacio solución es el plano de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Para $k = -3$ el espacio solución es la recta de ecuaciones $x_1 = x_2 = x_3$.

6-28.

$$\mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

6-29. Después de efectuar operaciones, eliminar denominadores y reducir términos, se resuelve el sistema homogéneo resultante, y se obtiene

$$x_1 = \ \frac{4}{3}\,k\ , \quad x_2 = k\ , \quad x_3 = 4\,k$$

6-30. Trasponer al segundo miembro los términos en z y aplicar el teorema de Cramer. Si los tres determinantes son no nulos, puede escribirse

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

6-31. Proceder como en 6-27. Para α distinto de 2 y de 3, se obtiene solución única. Para $\alpha = 2$ existen infinitas soluciones y para $\alpha = 3$ no existe solución.

6-32. Para $\alpha \neq \pm 1$ existe solución única. Para $\alpha = 1$ el conjunto solución es infinito y para $\alpha = -1$ el conjunto solución es vacío.

6-33. Analizar qué relación vincula a a y a b para que exista solución única, ninguna solución e infinitas soluciones.

6-34. Un sistema lineal y homogéneo es $74x_1 + 11x_2 - 25x_3 = 0$.

6-35. Analizar el determinante de los coeficientes. La solución única es

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\ ,\ y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\ ,\ z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b}$$

6-36. La solución es $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

TRABAJO PRACTICO VII

7-25. Se verifican los tres primeros axiomas de la definición, pero no el cuarto.
El vector de componentes $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ es no nulo, pero $\langle X, X \rangle < 0$.

7-26. No se verifica el axioma de simetría.

7-27. Tener en cuenta la definición de ortogonalidad y expresar a v como combinación lineal de los tres vectores.

7-28. Es el teorema del coseno; despejar **x** y considerar el producto interior $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$.

7-29. Para la condición necesaria proponer una combinación lineal de **x** e **y** que sea igual al vector nulo y considerar el producto interior entre dicha combinación lineal y ella misma. Suponer que ambos vectores son no nulos.
Para probar la condición suficiente, siendo los dos vectores no nulos, expresar uno de ellos como múltiplo escalar del otro, por ejemplo $\mathbf{y} = \alpha\,\mathbf{x}$. Considerar $\|\mathbf{x}\|\ \ \|\mathbf{y}\|$.

7-30. Partir de la desigualdad de Schwarz y elevar al cuadrado.

7-31. Es suficiente probar que son L.I. Considerar el producto interior entre una C.L. que sea igual al vector nulo y cualquier $\mathbf{v}_j$.

7-32. Tener en cuenta que una distancia en V es una función $d : V^2 \to \mathbf{R}$ que satisface: (1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. (2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. (3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$ y $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

7-33. Probar que f es una trasformación lineal.

7-34. Probar que φ satisface los axiomas de producto interior, sabiendo que f es una trasformación lineal.

7-35. Utilizar la definición de N.

7-36. Llamando **x** e **y** a dos lados del rombo que sean consecutivos, las diagonales son $\mathbf{D} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Considerar el producto interior, y tener en cuenta la definición de rombo, o sea $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$.

7-37. Demostrar 3. haciendo $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{z}$; despejar **x** y aplicar 7.5.
Para probar 1., ver que es suficiente demostrar que $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ y para esto, partir de $-(\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|)$.

Para probar 2., partir de $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2$.
Para demostrar 4., considerar $\| \mathbf{x} + \alpha\, \mathbf{y} \|^2$.

7-38. Tener en cuenta la definición de subespacio generado por un conjunto de vectores $A = \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \}$, y probar que el producto interior entre **x** y cualquier vector de A es cero.

7-39. Considerar un vector en el complemento ortogonal de S.

7-40. Tener en cuenta 7.9.

7-41. 1. Considerar $\mathbf{v} = (x, y, z)$ y resolver el sistema que se obtiene de las relaciones $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$ y $\| \mathbf{v} \| = 1$. Resulta $\mathbf{v} = \left(-\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)$.

2. $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{4}{\sqrt{66}}, -\frac{7}{\sqrt{66}}, -\frac{1}{\sqrt{66}} \right)$.

3. $\mathbf{y}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{y}_2 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{y}_3 = (0, 0, 1)$ son los vectores de la base ortonormal pedida.

7-42. Efectuar el producto interior entre **v** y $\mathbf{v}_i$.

7-43. Considerar el producto interior entre $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$.

7-44. Probar que el conjunto de todos los vectores ortogonales a A es un subespacio de V, y tener en cuenta las definiciones correspondientes.

7-45. Expresar cada uno de los dos vectores como combinación lineal de la base.

7-46. Desarrollar $0 \leqslant \langle \alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y}, \alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y} \rangle$, hacer $\alpha = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ y $\beta = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, y considerar que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle} = |\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2$.

7-47. 1. $\overrightarrow{\mathbf{P}_1 \mathbf{X}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2} = 0$; $2x - 2y + z - 5 = 0$.

2. $\mathbf{X} = \mathbf{P}_0 + \lambda\, \mathbf{A}$; $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = z + 3$.

7-48. Es el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 6x - 6y - 4z + 1 = 0$.

7-49. $\overrightarrow{\mathbf{P}_0 \mathbf{X}} \cdot \mathbf{A} = 0$; $ax + ay - 2a^2 = 0$.

7-50. $d = \frac{5}{\sqrt{14}}$.

7-51. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-3}$.

7-52. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$

7-53. $2(x - y + 2)^2 + (z - y + 2)^2 = 2$.

7-54. $18x^2 + [3(z - 1) + (y + 1)]^2 = 2(y + 1)^2$

7-55. $P_{z=0}\, C \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$P_{x=0}\ C \begin{cases} z = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \\ x = 0 \end{cases}$$

$$-\ P_{y=0}\ C \begin{cases} z = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

7-56. $2x = (2-y)(2-z)$.

7-57. $\mathbf{X} = \mathbf{M} + \lambda\, \mathbf{M}\, \Omega\, ;\ z = b \text{ arc } tg \dfrac{y}{x}$.

7-58. Desarrollar el producto hermitiano.

7-59. Efectuar el producto $\mathrm{P}\,\mathrm{P}^t = \mathrm{I}$.

7-60. Considerar el producto interior entre cualquier fila i, con $i < n$, y tener en cuenta, de acuerdo con el ejercicio anterior, que tal producto es 0.

7-61. Probar que la función $\mathrm{F} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ definida por $\mathrm{F}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{x}}$, donde $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ es un isomorfismo.

7-62. Desarrollar $\sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$.

TRABAJO PRACTICO VIII

8-14. 1. $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 5$ son los valores propios.

Vectores propios son $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. No existen en **R**.

8-15. 1. Valores propios: 2 y 3.

Vectores propios: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. No existen en **R**.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 11$. Vectores propios asociados a 6 son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; a

$\lambda_3 = 11$, corresponde $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8-16. Suponer que existe algún valor propio nulo.

8-17. Considerar $A\,\mathbf{X} = \lambda\,\mathbf{X}$ y premultiplicar por la inversa de A y por el recíproco de λ.

8-18. Probarlo por inducción.

8-19. Partir de $S^{-1}\ A\ S\ \mathbf{Y}$.

8-20. 1. Para A, es $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Los vectores propios asociados son $\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$

y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

2. Para B, los valores propios son $-1, 1, -i, i$.

8-21. Considerar $P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n).$$

8-22. Partir de la expresión de $P(\lambda) = D(\lambda I - A)$; tener en cuenta el ejercicio anterior; dar a λ el valor 0.

8-23. Partir de $A\mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$ y premultiplicar por A.

8-24. Tener en cuenta que los determinantes de dos matrices traspuestas son iguales.

8-25. Los tres valores propios son iguales a 1 y a éste le corresponde un sistema homogéneo cuyo espacio solución tiene dimensión 1. No es diagonalizable.

8-26. Considerar 8-18.

8-27. Sea T una matriz triangular superior; considerar el valor de $D(\lambda I - T)$.

8-28. Tener en cuenta 8-18 y la definición de matriz nilpotente.

8-29. 1. Aplicar 8.3.4.

2. Aplicar 8-18.

3. Demostrar primero que si A es idempotente y de rango r, entonces existe P ortogonal tal que $P^t A P = D_r$, donde D_r es una matriz diagonal con r unos y n-r ceros. Aplicar después 7.

4. Aplicar la definición de traza.

5. Considerar 8-24.

6. Expresar los valores de tr AB y tr BA.

7. Asociar y aplicar 6.

8. Aplicar 7.

8-30. Hallar los valores y los vectores propios y ortonormalizar éstos. Se obtiene

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

8-31. Considerar 8.5.3. II, o sea, la existencia de una matriz P no singular, tal que $P^{-1} A P = T$. Aplicar determinantes y tener en cuenta 8-27.

8-32. $P(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

8-33. Considerar $P(A) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i A^i$ y tener en cuenta que $A^t = A$.

8-34. Por ser A hermitiana, es $A = \bar{A}^t$. Proceder como en 8-33.

8-35. Puede demostrarse por inducción sobre k.

8-36. Partir de $P(B^{-1} A B) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i (B^{-1} A B)^i$ y aplicar 8-35.

8-37. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{pmatrix}$.

8-38. $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 - \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$. Respecto de los vectores $\mathbf{Y}$, f representa una simetría.

8-39. $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ y representa la composición de una rotación de ángulo φ y una simetría axial.

8-40. Según 8.5.3. II, existe P no singular tal que $\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ es triangular superior. Resulta $f(\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P})$ triangular superior cuya diagonal está formada por $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$. Además $f(\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}) = \mathrm{P}^{-1}\,f(\mathrm{A})\,\mathrm{P}$ es la forma triangular de $f(\mathrm{A})$.

8-41. Tener en cuenta 8.5.

8-42. Considerar $(\alpha\,\mathrm{I} + \mathrm{A})\,\mathbf{X}$.

8-43. Relacionar con 8-16.

8-44. $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

La matriz 3 X 3 es diagonalizable y su forma diagonal es $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8-45. Los valores propios de A son 1 y 4. Los valores propios de P (A) son 0 y 15. La forma diagonal de P (A) es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$.

8-46. De acuerdo con 8-7 existe $\mathrm{P} \in \mathbf{C}[\mathrm{X}]$ no nulo, tal que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{N}$, donde A es la matriz de f. Además, es

$$\mathrm{P}(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i), \text{ donde } \lambda_i \in \mathrm{C}.$$

O sea

$$\mathrm{N} = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{A} - \lambda_i\,\mathrm{I})$$

$\exists\, i$ tal que $\mathrm{A} - \lambda_i\,\mathrm{I}$ es singular, pues si no, P (A) sería inversible. En consecuencia, existe $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$(\mathrm{A} - \lambda_i\,\mathrm{I})\,\mathbf{X} = 0$$

O sea

$$\mathrm{A}\,\mathbf{X} = \lambda_i\,\mathbf{X}$$

Luego, existe un vector propio de f.

TRABAJO PRACTICO IX

9-15. Desarrollar $(f+g)(a\mathbf{x}+b\mathbf{x}', \mathbf{y})$, $(f+g)(\mathbf{x}, c\mathbf{y}+d\mathbf{y}')$, $(\alpha f)(a\mathbf{x}+b\mathbf{x}', \mathbf{y})$ y $(\alpha f)(\mathbf{x}, c\mathbf{y}+d\mathbf{y}')$, definiendo la suma de funciones y el producto de escalares por funciones de acuerdo con las leyes de composición punto a punto.

9-16. Desarrollar $g_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')$ y $g_{\mathbf{y}}(a\mathbf{x})$.

9-17. i) $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_1 - 2x_2 y_3 + x_3 y_2 + x_3 y_3$.

ii)

$$B = P^t\, A\, P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

donde P es la matriz de pasaje de la base dada a la base canónica.

9-18. i) $f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{X}^t\, A\, \mathbf{X} = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2\sqrt{2}\, x_1 x_2$.

ii) $f(\mathbf{X}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$.

9-19.

$$A = \frac{1}{n^2}\, \vec{1}\, \vec{1}^{\,t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n^2} & \frac{1}{n^2} & \cdots & \frac{1}{n^2} \end{pmatrix}$$

Ver 4-65, i).

9-20. i) $A = \frac{1}{n}\, \vec{1}\, \vec{1}^{\,t}$

ii) Desarrollar el cuadrado, aplicar el operador sumatoria, tener en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\, \overline{X} = \vec{1}^{\,t}\, \mathbf{X}$ y que $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathbf{X}^t\, \mathbf{X}$. Se obtiene $A = I - \frac{1}{n}\, \vec{1}\, \vec{1}^{\,t}$

Ambas matrices son idempotentes.

9-21. i) Expresar en términos de g a $f(\mathrm{x}+\mathrm{y})-f(\mathrm{x}-\mathrm{y})$.

ii) Lo mismo respecto de $f(\mathrm{x}+\mathrm{y})-f(\mathrm{x})-f(\mathrm{y})$.

9-22. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

9-23. La función $h: \mathrm{V}^2 \to \mathrm{K}$ definida por $h(\mathrm{x},\mathrm{y})=\frac{1}{2}g(\mathrm{x},\mathrm{y})$ es una forma bilineal simétrica y la forma cuadrática asociada es f.

9-24. Aplicar 9.7.1., desarrollando $\langle f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y})\rangle$ y probando que es igual a $\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle$.

9-25. A partir de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i)=\mathbf{0}$, considerar $\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i), f(\mathbf{v}_j)\rangle = 0$.

Se prueba que $\alpha_j=0$ para todo j, o sea, $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n)$ son linealmente independientes y en consecuencia constituyen una base de V que verifica $\langle f(\mathbf{v}_i), f(\mathbf{v}_j)\rangle = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = \delta_{ij}$, o sea, es ortonormal.

9-26. Tener en cuenta que $\mathrm{P}\,\mathrm{P}^t=\mathrm{I}$ y que $\mathrm{P}^t=\mathrm{P}$.

9-27. Considerar 9.7.5. y que $\mathrm{U}\,\mathrm{Q}=\mathrm{P}\,\mathrm{U}$.

$$\mathrm{U}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\[2ex] -\frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{pmatrix}$$

9-28. Sea A la matriz de $f: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$; de acuerdo con el ejercicio 8-46, A admite un vector propio, o sea existe $\lambda \in \mathrm{C}$ tal que $\mathrm{A}\,\mathbf{Z}=\lambda\mathbf{Z}$. Observar que $\lambda \in \mathbf{R}$, según 9.6.3. Considerar que $\mathbf{Z}=\mathbf{X}+i\mathbf{Y}$, donde $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ pertenecen a $\mathbf{R}^n$ y premultiplicar por A.

9-29. i) $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

ii) $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

9-30. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$; por 9.10.1. A es definida positiva. La matriz de vectores ortonormales es

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\[2ex] \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Siguiendo 9.10.2. se forma $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y resulta

$$Q = P\,D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

9-31. La matriz ortogonal de vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$ es $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

La trasformación de coordenadas está dada por $\mathbf{X} = P\,\mathbf{Y}$, o sea

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\sqrt{3}\,y_1 - \sqrt{2}\,y_2)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\,(\sqrt{2}\,y_1 + \sqrt{3}\,y_2)$$

9-32. Sea $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^t A\,\mathbf{X}$ definida positiva y sea $\mathbf{X} = P\,\mathbf{Y}$, donde P es no singular; entonces $g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t B\,\mathbf{Y}$ y es tal que $B = P^t A\,P$. Tanto f como g tienen la misma imagen; es suficiente probar que $\mathbf{Y}^t B\,\mathbf{Y} = 0 \Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{0}$. Considerar $\mathbf{Y} = P^{-1}\,\mathbf{X}$.

9-33. Tener en cuenta el ejercicio 8-17 y 9.13.2.

9-34. i) $\rho(A) = 3;\ s = 3$.

ii) $\rho(A) = 1;\ s = 1$.

9-35. Considerar 9.11. Se obtiene

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i = 6 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

9-36. i) Considerar 9.11.

ii) Considerar el ejercicio 8-17.

9-37. A es no singular y $A\,A^t$ es simétrica. Según 9.10.2., $A\,A^t$ es definida positiva. Existe Q ortogonal tal que $Q^t A\,A^t Q = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, de acuerdo con 9.9.3., donde los valores propios de $A\,A^t$ son positivos. Considerar $D_1 = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ y $S = Q\,D_1\,Q^t$. Resulta S simétrica, y definida positiva por ser semejante a D_1. Definir $P = S^{-1}\,A$ y probar que $P\,P^t = I$.

9-38. Aplicando 9-37 se obtiene A S P, donde $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica definida positiva y $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

9-39. Probar que si f es definida positiva, existe una trasformación no singular $\mathbf{X} = \mathrm{T}\,\mathbf{Y}$ donde T es triangular superior y $D(T) = 1$, que la reduce a la forma $g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t\,\mathrm{D}$
$g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}^t\,\mathrm{D}\,\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2$, donde $\alpha_i > 0$, siendo $\mathrm{D} = (\mathrm{T}^{-1})^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{T}^{-1}$. En consecuencia, $D(\mathrm{D}) = D(\mathrm{A}) > 0$.
Haciendo $x_n = 0$, f se convierte en una forma cuadrática respecto de $n-1$que sigue siendo definida positiva; la correspondiente matriz se obtiene prescindiendo de la última fila y de la última columna de A. Reiterar el procedimiento.
Para la suficiencia, utilizar el método de Lagrange, que consiste en completar cuadrados. Siendo $a_{11} > 0$, existe una trasformación no singular, triangular superior, con determinante igual a 1, que la reduce a

$$a_{11}\,z_1^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}\,z_i\,z_j$$

Probar que $b_{22} > 0$, haciendo $x_j = z_j = 0$ para $i = 2, 3, \ldots, n$, y reiterar el procedimiento.

9-40. Por ser f definida positiva, según 9.12.4., existe una trasformación de coordenadas $\mathbf{X} = \mathrm{P}\,\mathbf{Y}$ que la reduce a la forma $\sum_{i=1}^{n} y_i^2$.
Se tiene $\mathrm{P}^t\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{I}$, o sea $\mathrm{A} = (\mathrm{P}\,\mathrm{P}^t)^{-1}$. La trasformación aplicada a g es tal que $\mathbf{X}^t\,\mathrm{B}\,\mathbf{X} = \mathbf{Y}^t\,(\mathrm{P}^t\,\mathrm{B}\,\mathrm{P})\,\mathbf{Y}$, donde $\mathrm{P}^t\,\mathrm{B}\,\mathrm{P}$ es simétrica. En consecuencia, existe una trasformación ortogonal $\mathbf{Y} = \mathrm{Q}\,\mathbf{Z}$ que la reduce a una suma de cuadrados cuyos coeficientes son los valores propios de $\mathrm{P}^t\,\mathrm{B}\,\mathrm{P}$.

$$\mathbf{X}^t\,\mathrm{B}\,\mathbf{X} = \mathbf{Z}^t\,(\mathrm{P}\,\mathrm{Q})^t\,\mathrm{B}\,(\mathrm{P}\,\mathrm{Q})\,\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,z_i^2$$

Esta trasformación aplicada a $\mathbf{Y}^t\,\mathrm{I}\,\mathbf{Y}$ la reduce a $\sum_{i=1}^{n} z_i^2$. La composición de las dos trasformaciones: $\mathbf{X} = (\mathrm{P}\,\mathrm{Q})\,\mathbf{Z}$, reduce ambas formas.

9-41. Demostrarlo por inducción sobre $n = \dim V$.

TRABAJO PRACTICO X

10-6. Frontera de A es el conjunto

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \;/\; |x_1| = 1 \wedge |x_2| \leqslant 2\} \;\cup\; \{(1, 2)\}$$

o sea, es la unión entre el contorno del rectángulo de vértices $(-1, -2)$, $(1, -2)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$ y el conjunto cuyo único elemento es $(2, 1)$.
El derivado de A es el rectángulo cuyos vértices son los nombrados.

10-7. 1. A es la eclipse de centro $(0, 0)$ y semidiámetros $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$, y su interior. La frontera es la elipse. Los puntos cuyas coordenadas verifican la desigualdad estricta, son interiores. Puntos exteriores a A son los que satisfacen

$$\frac{x_1^2}{3} + \frac{x_2^2}{2} > 1$$

El derivado de A es A; o sea, A es cerrado.

2. Los puntos frontera de B tienen coordenadas que verifican $x_1 = 1$ o $x_2 = 2$; la frontera de B es la unión de un par de semirrectas cerradas.
Puntos interiores de B son los que satisfacen $x_1 > 1$ y $x_2 > 2$.
Todos los puntos de acumulación de B pertenecen a B, o sea, B es cerrado. Además, todos los elementos de B son puntos de acumulación de B.

3. C es cerrado e igual a su derivado. Los puntos interiores de C satisfacen las condiciones

$$x_1\, x_2 \leqslant 2 \quad \text{y} \quad x_1 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad x_2 \geqslant 1$$

10-8. 1. Sea A cerrado. Considerar un punto $\mathbf{a} \in A^c$; resulta que $\mathbf{a}$ no es de acumulación de A. Luego, existe $S(\mathbf{a}, \epsilon) \,/\, S(\mathbf{a}, \epsilon) \cap A = \phi$. En consecuencia, $S(\mathbf{a}, \epsilon) \subset A^c$ y por lo tanto, A es abierto.

2. Sea A^c abierto. Suponer que existe un punto de acumulación de A que pertenece a A^c. Se llega a una contradicción.

10-9. Sean: el hiperplano π de ecuación $N^t X = k$, $\mathbf{a} \in \pi$ y la esfera abierta $S(\mathbf{a}, \epsilon)$.
Considerando $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \dfrac{\epsilon}{2} \dfrac{N}{\|N\|}$ se verifica que $\mathbf{b} \in S(\mathbf{a}, \epsilon)$, pues $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Ahora bien $N^t\, \mathbf{b} > k$, y por lo tanto, $\mathbf{b} \notin \pi$. O sea, todo punto de π es frontera de π.

10-10. El conjunto del ejercicio 10-6 no es convexo. Los tres conjuntos de 10-7 son convexos.

10-11. Probar primero que el conjunto vacío es abierto. Sea $\{ A_i / i \in \mathbf{N} \}$ una familia numerable de abiertos. Si esta familia es vacía, entonces $A = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} A_i$ es el conjunto vacío, y en consecuencia es abierto. Si la familia no es vacía, cada abierto de la misma es una unión de esferas abiertas. De este modo, A es la unión de tales esferas abiertas, y por lo tanto es un conjunto abierto.
Se ha utilizado la siguiente propiedad: un subconjunto $C \subset \mathbf{R}^n$ es abierto si y sólo si es una unión de esferas abiertas.

10-12. Sea $\{ A_i / i \in I_n \}$ una familia finita de abiertos. Si esta familia es vacía, entonces $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es el espacio total, que es abierto (probarlo). Supongamos ahora que la familia es no vacía; si A es vacío, entonces es abierto. Consideremos entonces que A es no vacío y sea $\mathbf{a} \in A$.
Se tiene

$$\mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{a} \in A_i,\ \forall i \Rightarrow \exists\ \epsilon_i \,/\, S(\mathbf{a}, \epsilon_i) \subset A_i, \text{ para cada } i.$$

Sea ϵ el mínimo del conjunto $\{ \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \}$. Entonces para cada i se verifica que

$$S(\mathbf{a}, \epsilon) \subset S(\mathbf{a}, \epsilon_i)$$

en consecuencia, para cada i es

$$S(\mathbf{a}, \epsilon) \subset A_i$$

por lo tanto $S(\mathbf{a}, \epsilon) \subset A$. Luego, A es abierto.

10-13. Aplicar 10-11, 10-12 y las leyes de De Morgan.

10-14. El casco convexo generado por los puntos dados, es el pentágono convexo de vértices $(-1, -1)$, $(-1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(1, -1)$. Además, $(0, 0)$ es combinación convexa de $(1, -1)$ y $(-1, 1)$, donde $t = \frac{1}{2}$.

10-15. Aplicar la definición de convexidad y de la función dada.

10-16. Tener en cuenta que el conjunto solución del sistema es la intersección de n hiperplanos de $\mathbf{R}^n$, y que éstos son convexos.

10-17. Considerar que

$$\mathbf{y} \in C \Rightarrow \mathbf{y} = \alpha\, \mathbf{x} \text{ donde } \alpha \geqslant 0\ ,\ \mathbf{x} \in A.$$

Multiplicar por $\beta \geqslant 0$.

10-18. El cono generado por la intersección de los dos conjuntos está caracterizado por

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - z^2 \leqslant 0 \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

10-19. Utilizar la definición de cono y de C^*.

10-20. Aplicar la definición de $C^{\perp}$ y multiplicar por $\alpha \geqslant 0$.

10-21. Utilizar la definición de cono ortogonal y la condición suficiente de subespacio.

10-22. Considerar un vector $\mathbf{z} \in C$, multiplicar por $\alpha \geqslant 0$, y tener en cuenta que C_1 y C_2 son conos.

10-23. Sea x_{ij} la cantidad de litros de licor i que se destina a la mezcla j, donde $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$. Se tiene:

i \ j	1	2	3	Disponibilidades en litros	Costo por litro
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	6.000	63
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	7.500	45
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	3.600	36
Precio de venta por litro	68	57	45		

Objetivo: maximizar

$$F = 5x_{11} - 6x_{12} - 18x_{13} + 23x_{21} + 12x_{22} + 32x_{31} + 21x_{32} + 9x_{33}$$

Sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leqslant 6.000\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leqslant 7.500\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leqslant 3.600\\
x_{11} &\geqslant 0.6\,(x_{11} + x_{21} + x_{31})\\
x_{31} &\leqslant 0.2\,(x_{11} + x_{21} + x_{31})\\
x_{32} &\leqslant 0.6\,(x_{12} + x_{22} + x_{23})\\
x_{12} &\geqslant 0.15\,(x_{12} + x_{22} + x_{32})\\
x_{33} &\leqslant 0.5\,(x_{13} + x_{23} + x_{33})\\
x_{ij} &\geqslant 0 \quad , i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

10-24. Detallando los tipos de corte de cada rollo, y denotando con x_j la variable que especifica el número de rollos del corte j, se obtiene la siguiente tabla:

ancho \ número de rollos	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
58	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	3	2	2	1	1	1	0	0	0	0
24	1	0	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0
23	0	1	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
Desperdicio en cm	0	1	4	6	7	8	9	10	10	11	12	13

Minimizar

$$F = x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 + 9x_7 + 10x_8 + 10x_9 + 11x_{10} + 12x_{11} + 13x_{12}$$

Sujeta a las restricciones:

$$x_1 + x_2 \geqslant 60$$

$$3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geqslant 85$$

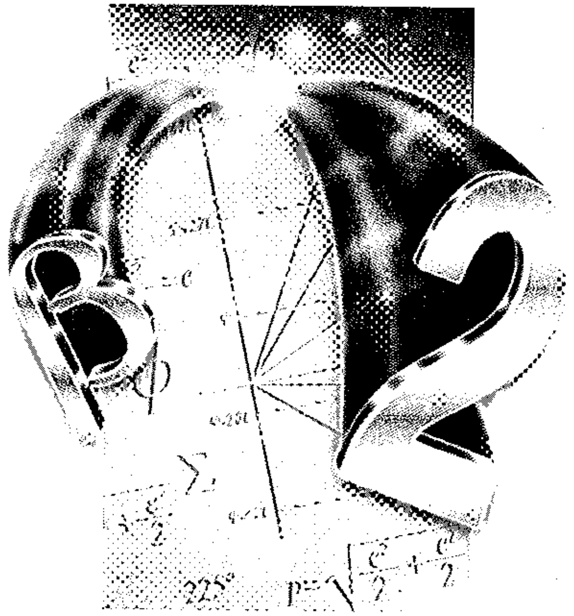
$$x_1 + x_4 + 2x_6 + x_7 + 3x_9 + 2x_{10} + x_{11} \geqslant 85$$

$$x_2 + x_5 + x_7 + 2x_8 + x_{10} + 2x_{11} + 3x_{12} \geqslant 50$$

$$x_j \geqslant 0\ ,\ j = 1, 2, \ldots, 12.$$

INDICE

ALGEBRA II



62

ISBN 950-02-5205-8
9 789500 252058