Variables Aleatorias

Definición de Variable Aleatoria:

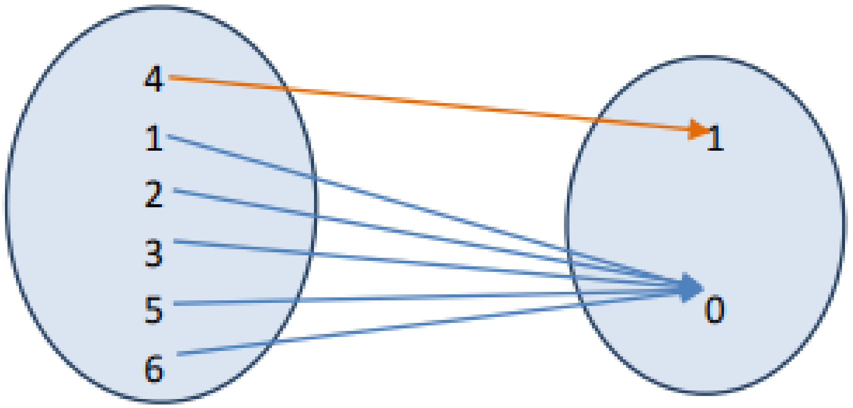
Sea E un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Una variable aleatoria es una función "X" que asigna a cada elemento del espacio muestral un número real. Por lo tanto, decimos que:

$$\boxed{\mathbf{X : E \longrightarrow \mathbb{R}}}$$

Se denomina **Rango o Recorrido** de una variable aleatoria X, y se denota con Rx al conjunto de todos los posibles valores para la imagen de la función.

Variables Aleatorias

<u>Ejemplo 1</u>: Consideramos el siguiente experimento. Tiramos un dado y observamos si sale o no sale "cuatro". Si sale "cuatro" anotamos "1" y si no sale "cuatro" anotamos "0" podemos así definir una función X, relacionando a cada resultado del experimento aleatorio con los números "0" y "1" es decir:



Dominio: {E} Imagen: {Rx}

Variables Aleatorias

V.A. Discreta:

La variable aleatoria "X" es discreta si su recorrido Rx es un conjunto finito o infinito numerable. Normalmente asociado con los números $\mathbb{N}$.

En los problemas prácticos las V.A. Discretas, representan datos por conteo. (n° de artículos defectuosos; n° de accidentes; etc)

V.A. Continua:

La variable aleatoria "X" es continua si su recorrido Rx puede tomar todos los valores de un cierto intervalo real (infinito no numerable).

En los problemas prácticos las V.A. Continuas, representan datos medidos. (Pesos; alturas; distancias; tiempo; temperatura; etc)

Variables Aleatorias Discretas.

- **Función de Probabilidad o Distribución de Probabilidad f(x):**

Cada variable aleatoria discreta “X” tiene asociada una función de probabilidad f(x), la cual asigna a cada valor (x_i) del recorrido de la variable aleatoria, su correspondiente probabilidad de ocurrencia.

A esta función que va de $\mathbf{x_i} \rightarrow \mathbf{f(x_i)}$ se la llama función de probabilidad de la variable aleatoria discreta “X” y se la simboliza como

$$\boxed{\mathbf{f(x_i) = P(X = x_i)} \text{ o simplemente } \mathbf{P(x_i)}.}$$

Siendo x_i los distintos valores que pueda tomar la variable aleatoria discreta “X”.

Variables Aleatorias

<u>Ejemplo 2</u>: El experimento consiste en tirar una moneda 3 veces consecutivas y contar la cantidad de caras que se obtienen. Si a cada elemento del espacio muestral que resulta de este experimento, lo asociamos con los números "0, 1, 2 y 3", queda definida una función….

X : "Número de caras que obtengo en los 3 lanzamientos"

SSS → 0 (que salga 0 cara) → *P(x = 0) = CF/CP = 1/8*

CSS, SCS, SSC → 1 (que salga 1 cara) → *P(x = 1) = 3/8*

CCS, CSC, SCC → 2 (que salgan 2 caras) → *P(x = 2) = 3/8*

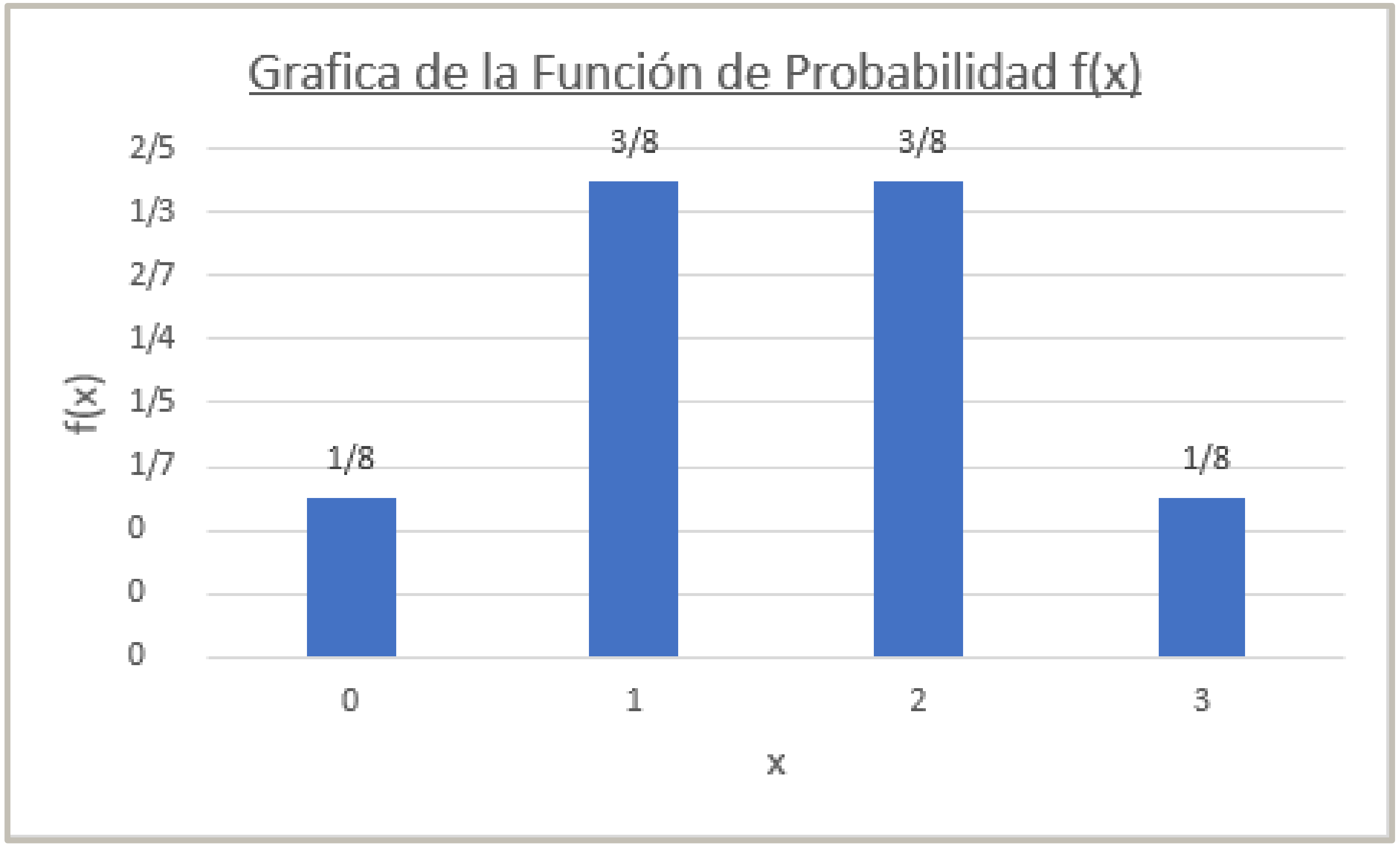
CCC → 3 (que salgan 3 caras) → *P(x = 3) = 1/8*

E	R(x) = {0,1,2,3}	f(x)

Variables Aleatorias

Tabla de la Función de Probabilidad

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8



Variables Aleatorias

<u>**Resumiendo:**</u>

La función de probabilidad f(x), es una función que le hace corresponder a cada valor tomado por la variable aleatoria discreta "X" un único número real comprendido entre 0 y 1, que es la probabilidad de que la variable tome dicho valor.

Por lo tanto, el dominio de esta función de probabilidad f(x) es el recorrido Rx de la variable aleatoria "X" y su conjunto imagen la probabilidad.

$$E \xrightarrow{\mathbf{X}} R_x \in \mathbb{N} \xrightarrow{\mathbf{f(x)}} 0 \leq P(xi) \leq 1$$

Por otro lado, la función de probabilidad f(x) satisface las siguientes propiedades:

- **$0 \leq f(x_i) \leq 1$ para todo xi Є al Rx**
- **$\Sigma f(xi) = 1$**

Variables Aleatorias

<u>Ejemplo 3</u>: En una urna hay 10 bolas numeradas del 0 al 9; de ellas 3 son blancas y 7 son negras. Se extraen 4 bolas aleatoriamente y se considera la variable aleatoria X = "numero de bolas negras extraídas". Se pide:

a) Hallar el recorrido de la VAD.
b) Hallar la función de probabilidad P(x) o f(x).
c) Graficar la función de probabilidad.

X=" número de bolas negras extraidas"

a) R(x) = {1,2,3,4}

b) 10C4 = 210 casos posibles

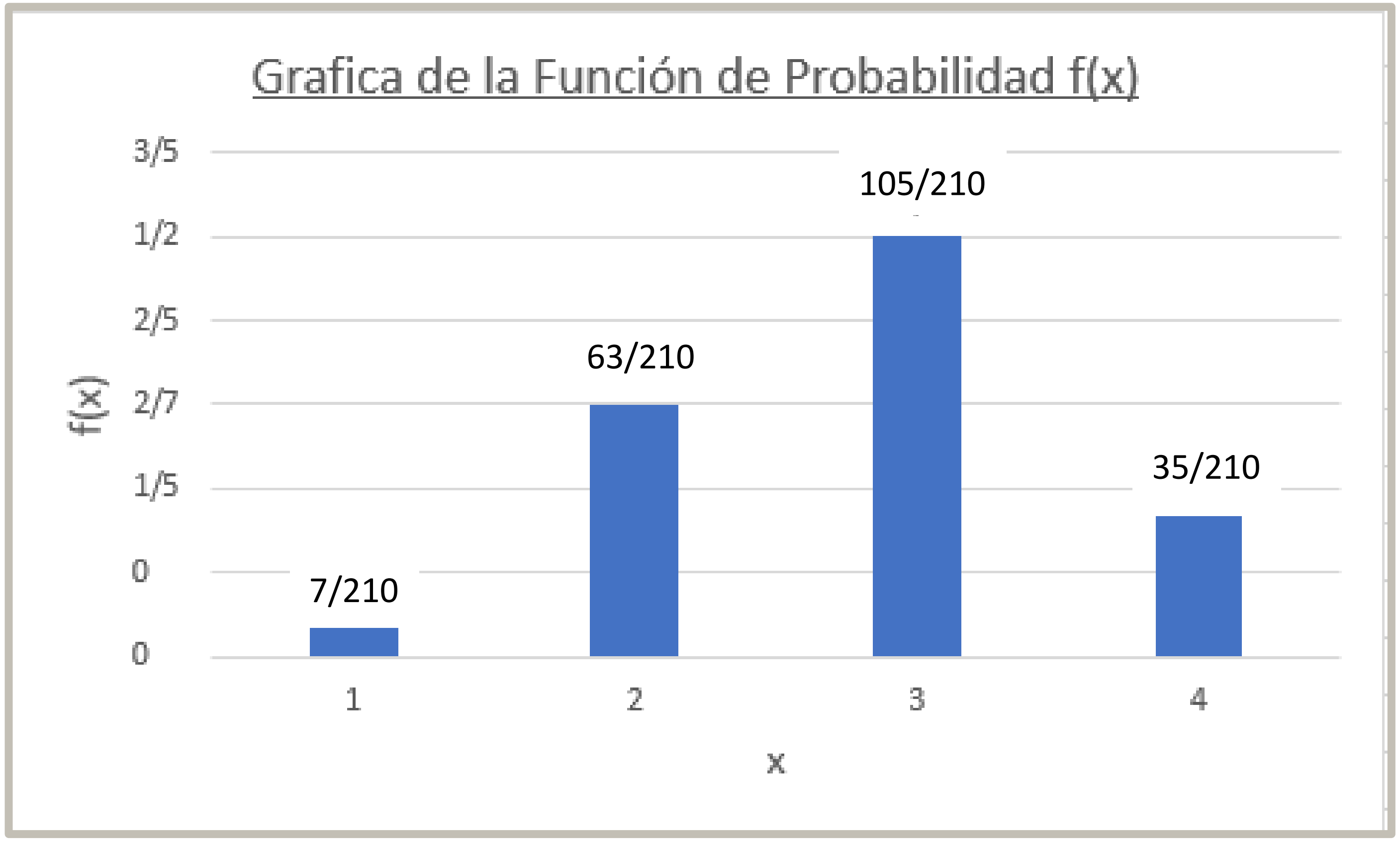
7C4 * 3C0 = 35	casos 4 bola negra
7C3 * 3C1 = 105	casos 3 bola negra
7C2 * 3C2 = 63	casos 2 bola negra
7C1 * 3C3 = 7	casos 1 bola negra

N1 – N2 – B3 – B1
1° 2° 3° 4°

10C4 = C(10;4) = 10! / 4!*(10-4)!

Variables Aleatorias

X	1	2	3	4
P(X)	7/210	63/210	105/210	35/210



Variables Aleatorias Discretas.

Función de Distribución Acumulada o Escalonada F(x):

La función de distribución acumulada F(x) de una variable aleatoria discreta "X" con función de probabilidad f(x) es:

$$\boxed{F(x_i) = P(X \leq x_i)}$$

$$0 \leq F(x) \leq 1 \text{ para todo } x \in R.$$

Existen muchos problemas en los que desearíamos calcular la probabilidad de que el valor observado de una variable aleatoria discreta "X" sea menor o igual que algún número natural.

Por lo tanto, la función de distribución acumulada asociada a la variable aleatoria discreta X acumula en cada punto, las probabilidades asignadas a números inferiores o iguales a este.

Variables Aleatorias

Ejemplo 3: En una urna hay 10 bolas numeradas del 0 al 9; de ellas 3 son blancas y 7 son negras. Se extraen 4 bolas aleatoriamente y se considera la variable aleatoria X = "numero de bolas negras extraídas".

X	1	2	3	4
P(X)	7/210	63/210	105/210	35/210

$$F(1) = P(X \leq 1) = P(X=1) = \boxed{7/210}$$

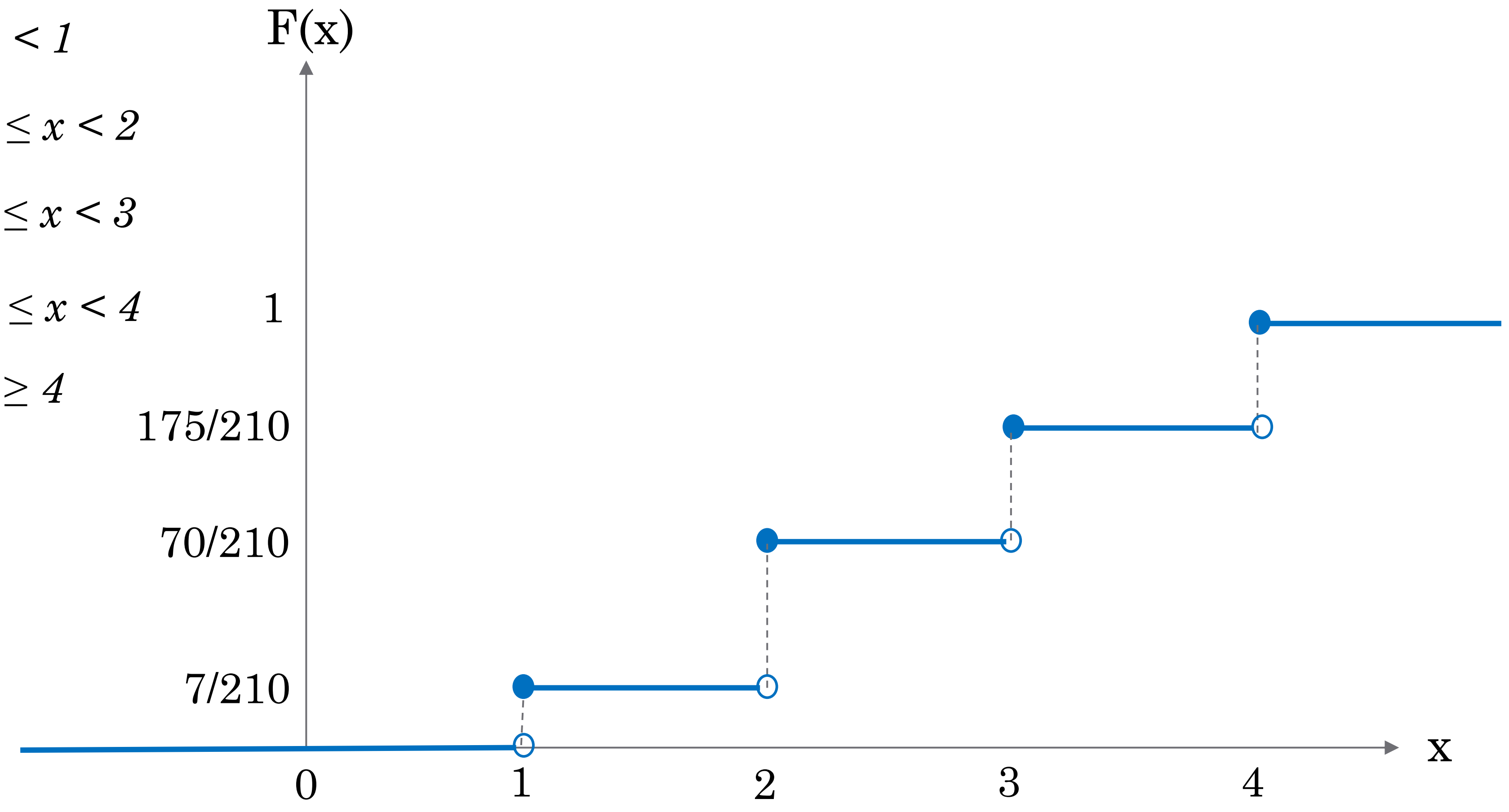
$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = 7/210 + 63/210 = \boxed{70/210}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 7/210 + 63/210 + 105/210 = \boxed{175/210}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$
$$F(4) = 7/210 + 63/210 + 105/210 + 35/210 = \boxed{1}$$

Variables Aleatorias

$$F(X) = \begin{cases} 0 & Si\ x < 1 \\ 7/210 & Si\ 1 \leq x < 2 \\ 70/210 & Si\ 2 \leq x < 3 \\ 175/210 & Si\ 3 \leq x < 4 \\ 1 & Si\ x \geq 4 \end{cases}$$



Grafica de la Función de Distribución Acumulada

<u>Ejercicio 117</u>: Una firma de inversores ofrece a sus clientes bonos municipales con vencimiento cada 2 años. Dada la distribución acumulada F(x) y la VAD X: “número de años para el vencimiento de un bono”. Si seleccionamos aleatoriamente uno de ellos hallar:

P(x = 5)
P(x > 3)
P(1,4 < x < 6)

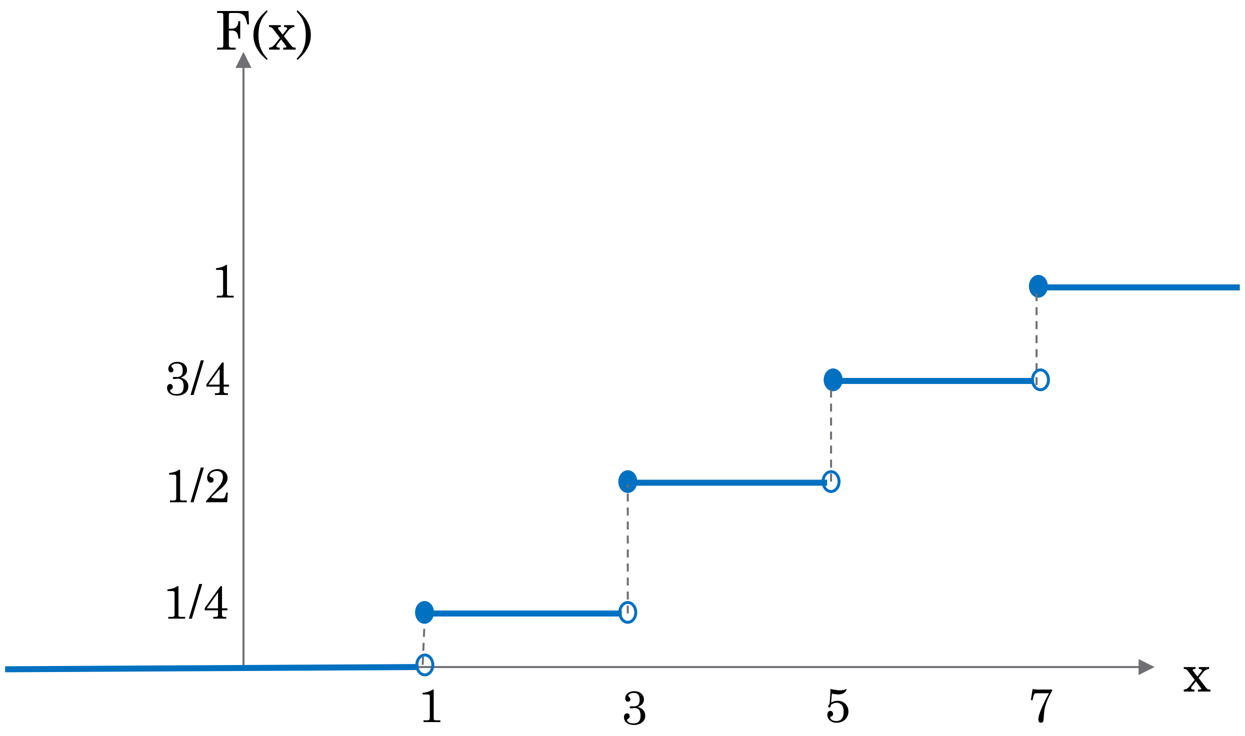
$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{Si } x < 1 \\ 1/4 & \text{Si } 1 \leq x < 3 \\ 1/2 & \text{Si } 3 \leq x < 5 \\ 3/4 & \text{Si } 5 \leq x < 7 \\ 1 & \text{Si } x \geq 7 \end{cases}$$

Ejercicio 117:

A partir de la distribución acumulada F(x) podemos encontrar la función de probabilidad f(x).

$$F(X) = \begin{cases} 0 & Si\ x < 1 \\ 1/4 & Si\ 1 \leq x < 3 \\ 1/2 & Si\ 3 \leq x < 5 \\ 3/4 & Si\ 5 \leq x < 7 \\ 1 & Si\ x \geq 7 \end{cases}$$

Rx = {1,3,5,7}



Grafica de la Función de Distribución Acumulada

Ejercicio 117:

A partir de la distribución acumulada F(x) podemos encontrar la función de probabilidad f(x).

Rx = {1,3,5,7}

$$F(X)=\begin{cases} 0 & Si\ x<1 \\ 1/4 & Si\ 1\le x<3 \\ 1/2 & Si\ 3\le x<5 \\ 3/4 & Si\ 5\le x<7 \\ 1 & Si\ x\ge 7 \end{cases}$$

$F(1) = P(X\le 1) = P(X=1) = 1/4$

$F(3) = P(X\le 3) = F(1) + P(X=3) = 1/2 \therefore P(X=3) = 1/4$

$F(5) = P(X\le 5) = F(3) + P(X=5) = 3/4 \therefore P(X=5) = 1/4$

$F(7) = P(X\le 7) = F(5) + P(X=7) = 1 \therefore P(X=7) = 1/4$

Variables Aleatorias

Ejercicio 117:

A partir de la distribución acumulada F(x) podemos encontrar la función de probabilidad f(x).

$Rx = \{1,3,5,7\}$

X	1	3	5	7
f(x) ó P(X)	1/4	1/4	1/4	1/4

$P(x=5) = f(x=5) = \frac{1}{4}$

$P(x>3) = f(x>3) = f(x=5) + f(x=7) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(1,4<x<6) = f(1,4<X<6) = f(x=3) + f(x=5) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$