Introducción a la Probabilidad

La Probabilidad consiste en el estudio de experimentos aleatorios, es decir, aquellos experimentos de los cuales no es posible predecir el resultado.

<u>Las caracteríısticas de un experimento aleatorio son:</u>

- No se puede anticipar su resultado.
- Se conocen con exactitud todos sus posibles resultados.
- Se puede repetir indefinidamente, en las mismas condiciones iniciales, pudiendo ser los resultados distintos en cada repetición.

Introducción a la Probabilidad

ESPACIO MUESTRAL (E):

Llamaremos espacio muestral

al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio. A cada elemento del espacio muestral se lo denomina punto muestral.

EVENTO O SUCESO:

Suceso o Evento

es cualquier subconjunto medible del espacio muestral.

Introducción a la Probabilidad

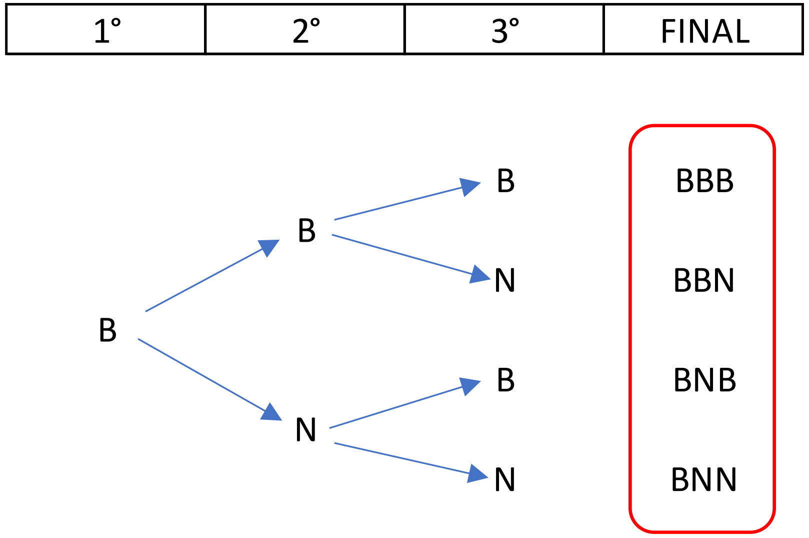
<u>EJEMPLO 1</u>:

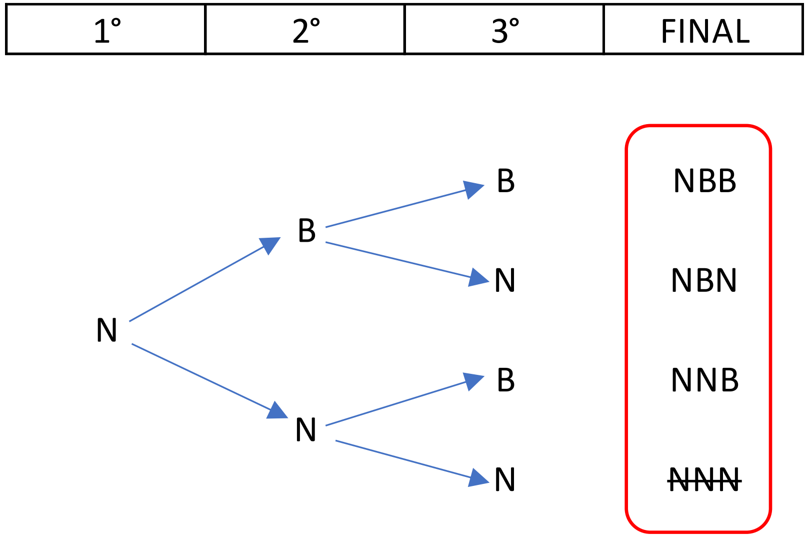
Una urna contiene 3 bolas blancas y 2 bolas negras. Se considera el experimento aleatorio que consiste en sacar 3 bolas de la urna. Las bolas no están numeradas.

A) Hallar el espacio muestral de este experimento.
B) Nombrar por extensión los siguientes sucesos asociados.

A =”la última bola extraída es blanca”
B =”se sacaron al menos dos bolas blancas”
C =”no se sacaron dos bolas seguidas del mismo color”
D =”las 3 bolas resultaron negras”

Introducción a la Probabilidad





Respuestas:

Espacio muestral (E) = {(bbb),(bbn),(bnb),(nbb),(bnn),(nbn),(nnb)}

Suceso (A) = {(bbb),(bnb),(nbb),(nnb)}

Suceso (B) = {(bbb),(bbn),(bnb),(nbb)}

Suceso (C) = {(bnb),(nbn)}

Suceso (D) = { }

Introducción a la Probabilidad

EVENTOS O SUCESOS ESPECIALES:

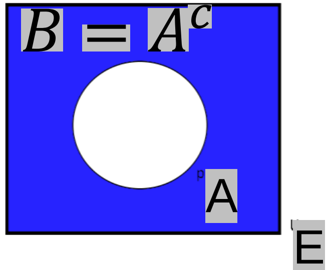
- Se dice que un evento es **cierto o seguro** cuando ocurre en toda realización del experimento aleatorio. *(ej: al menos una bola blanca)*

- Un suceso o evento se dice **imposible** cuando no ocurre en ninguna realización del experimento aleatorio. *(ej: 3 bolas negras)*

- Dos sucesos A y B se dicen **incompatibles o mutuamente excluyentes** cuando no comparten resultados comunes, es decir, no existe ningún elemento que pertenezca a ambos. Los sucesos incompatibles no pueden ocurrir simultáneamente. $[A \cap B = \emptyset]$

- Dos o más eventos se dicen **exhaustivos** cuando cubren totalmente el espacio muestral entre ellos. $[A \cup B \cup C \ldots\ldots \cup Z = E]$

- Dos sucesos A y B se dicen **complementarios** cuando son al mismo tiempo mutuamente excluyentes y exhaustivos. Si sucede A no sucede A^c (Complemento de A).
    - $[A \cap B = \emptyset]$
    - $[A \cup B = E]$



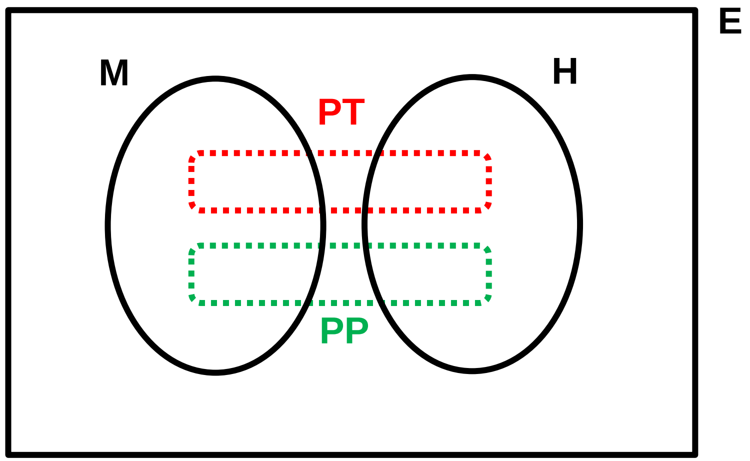
EJEMPLO 2:

En una empresa hay profesionales hombres y/o mujeres, pudiendo ser tercerizados y/o contratados en forma directa (planta permanente). Si elegimos un profesional de esta firma al azar y consideramos su género y tipo de contratación nos encontramos con las siguientes posibilidades:

Siendo los elementos para este experimento:

- MP: mujer de planta
- MT: mujer tercerizada
- HP: hombre de planta
- HT: hombre tercerizado

El espacio muestral será: E = {MP, MT, HP, HT}



Introducción a la Probabilidad

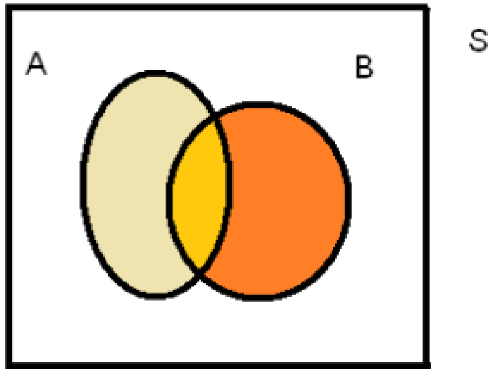
EJEMPLO 2:

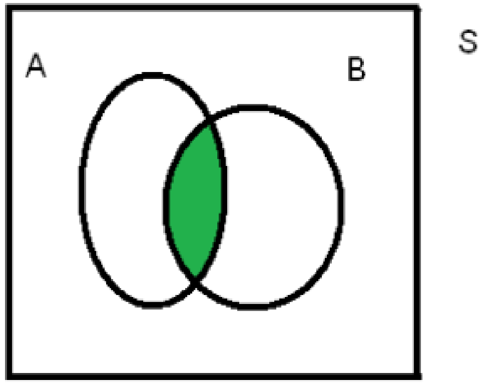
A = {el profesional seleccionado es hombre} → A = {HT, HP }
B = {el profesional seleccionado es hombre y de planta} → B = {HP}
C = {el profesional seleccionado es mujer} → C = {MT, MP}
D = {el profesional seleccionado es tercerizado} → D = {MT, HT}
E = {el profesional seleccionado no trabaja en la empresa} → E = {}
F = {el profesional seleccionado trabaja en la empresa} → F = {MP,MT, HP, HT}

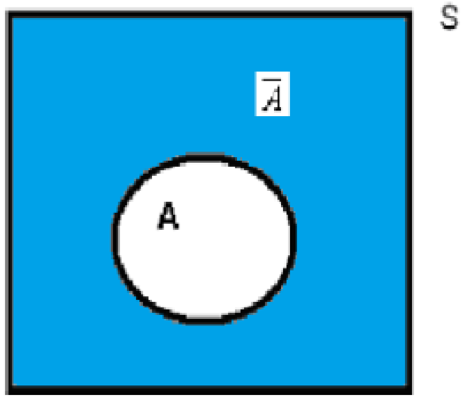
- ✓ B tiene un único punto muestral, es un **suceso elemental**.
- ✓ A por el contrario es un **evento compuesto**.
- ✓ E nunca ocurre, es un **evento imposible**.
- ✓ F siempre ocurre, es un **evento cierto o seguro**.
- ✓ B y C no pueden ocurrir al mismo tiempo, son **mutuamente excluyentes o incompatibles**.
- ✓ A y C no pueden ocurrir al mismo tiempo y son exhaustivos, por lo tanto **son complementarios**.

OPERACIONES ENTRE EVENTOS O SUCESOS:

- $A \cup B$ es el evento que sucede si se cumple alguna de ella o ambas a la vez.
- $A \cap B$ es el evento que sucede si ambos ocurren a la vez.
- A^C es el evento que se cumple si "A" no se cumple.







Introducción a la Probabilidad

DEFINICIÓN CLÁSICA (LAPLACE)

Dado un experimento o fenómeno aleatorio, con espacio muestral asociado E, y un evento A, de este espacio muestral; se llama probabilidad de que ocurra el suceso A al cociente entre el número de elementos de A (resultados favorables) y el total de elementos de E (resultados posibles).

$$P(A) = \frac{\text{nro de casos favorables a } A}{\text{nro de casos posibles}}$$

** Esta definición es válida para espacios que son **equiprobables**, es decir, aquellos en donde todos los resultados posibles tienen la misma probabilidad de ocurrir.*

Introducción a la Probabilidad

EJEMPLO 3:

- ✓ Consideremos el ensayo de arrojar un dado equilibrado de 6 caras.

  El espacio muestral será: E = {1;2;3;4;5;6}

  Entonces la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de los resultados posibles de dicho espacio muestral será P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=1/6. (CF/CP)

- ✓ Ahora consideremos el ensayo de arrojar un dado cargado de 6 caras.

  El espacio muestral será: E = {1;2;3;4;5;6}

  En un espacio NO equiprobable, cada resultado posible del espacio muestral tiene asignada una probabilidad y estas pueden ser diferentes entre sí.

  La probabilidad de que salga una de las caras será:
  P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=1/10 y P(6)=1/2

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD:

La definición axiomática de la probabilidad es quizás la más simple de todas las definiciones y la menos controvertida. Está basada en un conjunto de axiomas (afirmaciones sobre las que se acuerda y no se intenta demostrar). La ventaja de esta definición es que permite un desarrollo riguroso y matemático de la probabilidad.

- **Axioma 1**: Para todo suceso "A", se cumple que $0 \leq P(A) \leq 1$
- **Axioma 2**: Para el espacio muestral E se cumple que $P(E) = 1$
- **Axioma 3**: Si "A" y "B" son dos eventos mutuamente excluyentes del espacio muestral E, es decir, que $P(A \cap B) = 0$

Entonces → $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Generalizando, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$.

Introducción a la Probabilidad

CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN AXIOMÁTICA:

- ***TEOREMA 1***

Evento Imposible

La probabilidad de que ocurra el evento imposible es cero, puesto que es el evento complementario del espacio muestral. Simbólicamente puede expresarse:

$$P(\emptyset) = 0$$

Si { } es el conjunto vacío, entonces P(∅) = 0

- ***TEOREMA 2***

Probabilidad del Complemento

La probabilidad de que no ocurra el evento A, es decir la probabilidad de que ocurra el evento complemento de A (es decir que no ocurra A) y la probabilidad de que ocurra A suman 1.

$P(A^C) + P(A) = 1 \Rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$

Puesto que: $A \cap A^c = \emptyset$ **y** $A \cup A^c = E$

Introducción a la Probabilidad

CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN AXIOMÁTICA:

- ***TEOREMA 3***

Eventos Encajados

Si el evento A ocurre algunas de las veces que ocurre el evento B, lo que simbólicamente se puede indicar $A \subseteq B$ (A es una parte de B o A está incluido en B), entonces la probabilidad asociada al evento A es menor o igual a la probabilidad de que ocurra el evento B. Simbólicamente puede expresarse:

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

- ***TEOREMA 4***

Sí "A" y "B" son dos sucesos o eventos cualesquiera de un espacio muestral, entonces decimos que:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

CONSECUENCIAS DE LA DEFINICIÓN AXIOMÁTICA:

- ***TEOREMA 5***

Probabilidad de la Unión o Teorema de la Suma

Para eventos cualesquiera A y B de un espacio muestral S, vale que la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es igual a la suma de las probabilidades de ambos menos la probabilidad de la intersección. Simbólicamente:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para tres eventos A, B y C, podemos deducir que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

EJEMPLO 4:

Un 15% de los pacientes atendidos en cierto hospital asisten a los consultorios externos por enfermedades crónicas; mientras que el 50% de los pacientes son de barrios cercanos al hospital. Finalmente, un 10% de los pacientes corresponden a consultas por enfermedades crónicas y son residentes de la zona. Determinar: ¿Qué probabilidad hay de que al elegir un paciente al azar sea de la zona cercana o venga por un padecimiento crónico?

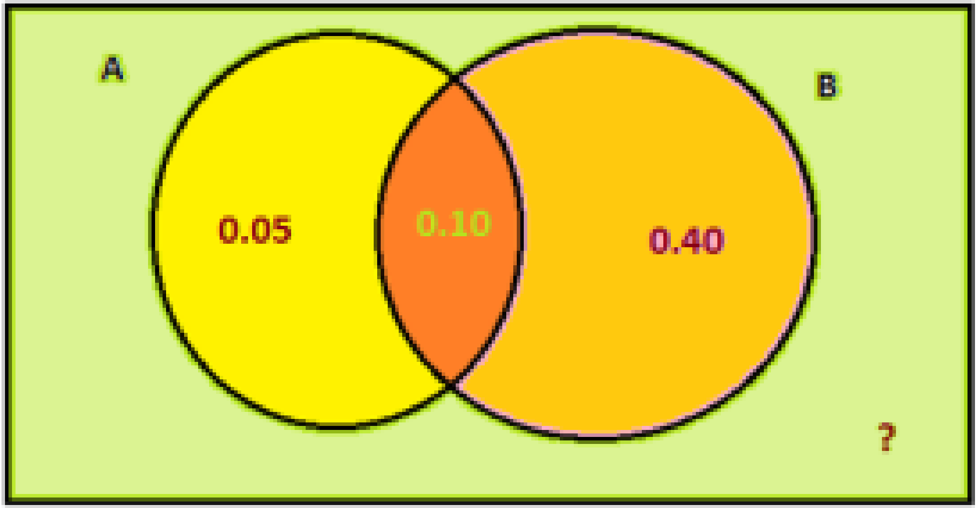
Denotemos con: A = {enfermedad crónica}; B = {paciente de la zona}

Representar los datos utilizando: Diagrama de Venn

Introducción a la Probabilidad

EJEMPLO 4:

Sabemos que: $P(A) = 0{,}15$
$P(B) = 0{,}50$
$P(A \cap B) = 0{,}10$



Entonces, por la propiedad de la suma: $P(A \cup B) = 0,15 + 0,50 - 0,10 = 0,55$
Entonces podemos afirmar que el 55% de los pacientes de este hospital asisten por una dolencia crónica o son de su zona de jurisdicción.

Introducción a la Probabilidad

EJEMPLO 5:

En un armario del laboratorio de química, hay 15 probetas, de las cuales 10 fueron realizadas por distintos alumnos del turno mañana y las restantes por distintos alumnos del turno tarde. Si se eligen 5 probetas al azar sin reposición para una eventual calificación. Determinar:

A. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 hayan sido realizadas por alumnos del turno mañana?

B. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 hayan sido realizadas por alumnos del turno mañana?

** Debemos tener en cuenta que las 15 probetas se encuentran todas juntas y mezcladas en un solo armario.*

Introducción a la Probabilidad

<u>EJEMPLO 5</u>:

Un posible resultado por ser:

TM	TM	TM	TT	TT
1°	2°	3°	4°	5°

Si tenemos en cuenta las PROBABILIDADES nos quedaría:

10/15	X	9/14	X	8/13	X	5/12	X	4/11
1°		2°		3°		4°		5°

Por la tanto, en principio la probabilidad de obtener 3 probetas del TM dentro de las 5 extracciones es: **40/1001 = 0,0399**

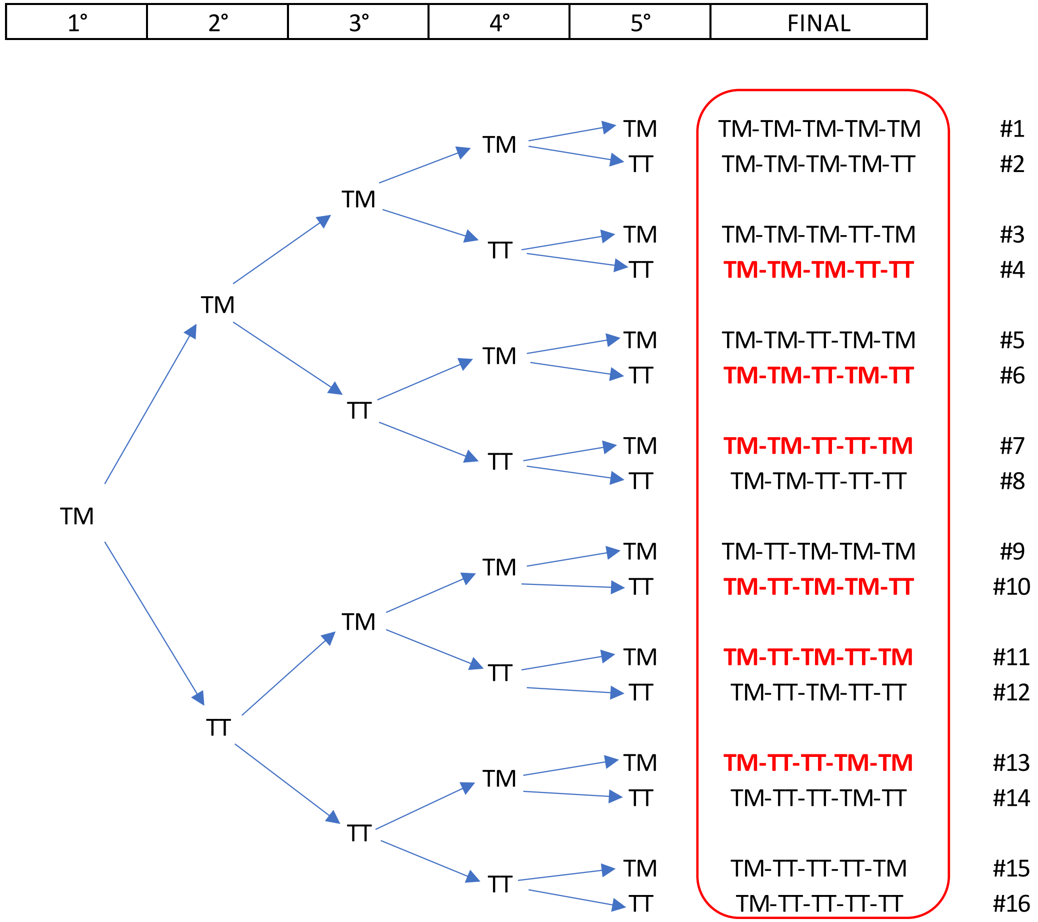
Pero nos están faltando contabilizar las distintas posibilidades donde aparecen 3 probetas del TM en la selección de 5 probetas……..

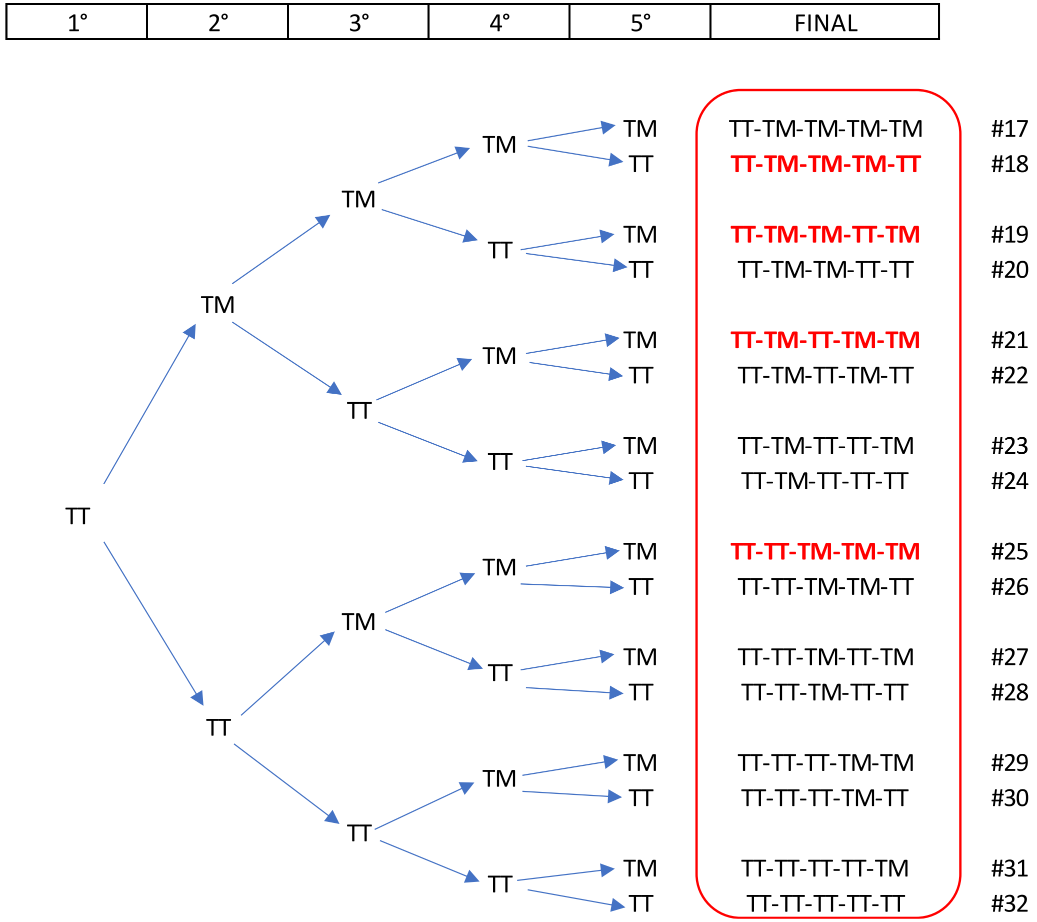
![UTN Avellaneda]

Introducción a la Probabilidad

EJEMPLO 5:

Pensemos en el diagrama de árbol para encontrar todos los posibles resultados….





Introducción a la Probabilidad

EJEMPLO 5:

En el diagrama de árbol podemos listar y contabilizar 10 posibles resultados que cumplen con la consigna del experimento. Estos serán:

1. TM-TM-TM-TT-TT
2. TM-TM-TT-TM-TT
3. TM-TM-TT-TT-TM
4. TM-TT-TM-TM-TT
5. TM-TT-TM-TT-TM
6. TM-TT-TT-TM-TM
7. TT-TM-TM-TM-TT
8. TT-TM-TM-TT-TM
9. TT-TM-TT-TM-TM
10. TT-TT-TM-TM-TM

$$C_{(5,3)} = \frac{5!}{3! * (5-3)!} = 10$$

Por lo tanto, la probabilidad final del evento A será: $\boxed{\mathbf{P(A) = 0{,}0399 \times 10 = 0{,}399}}$

Como podemos ver esto mismo de una manera simple utilizando las técnicas de conteo…?

EJEMPLO 5:

Siendo un experimento que se realiza sin reposición y donde todas las probetas son distintas (alumnos diferentes), podes concluir que estamos en un modelo simple. Por otro lado, no importa el orden, solo la clase o tipo de probeta (TM o TT). Lo que finalmente nos lleva a pensar en **combinaciones simples**.

TM	TM	TM	TT	TT
1°	2°	3°	4°	5°

$$P(A) = P(3TM) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{10}{3} * \binom{5}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{120 * 10}{3003} = \frac{400}{1001} = \mathbf{0,399}$$

EJEMPLO 5:

$$P(B) = P(3TM) + P(4TM) + P(5TM)$$

$$P(4TM) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{10}{4} * \binom{5}{1}}{\binom{15}{5}} = \frac{210 * 5}{3003} = \frac{1050}{3003} = \mathbf{0,349}$$

$$P(5TM) = \frac{CF}{CP} = \frac{\binom{10}{5} * \binom{5}{0}}{\binom{15}{5}} = \frac{252 * 1}{3003} = \frac{252}{3003} = \mathbf{0,083}$$

$$P(B) = 0{,}399 + 0{,}349 + 0{,}083 = \mathbf{0,831}$$