Esperanza & Varianza

Esperanza Matemática de una V.A. Discreta.

Sea X una variable aleatoria discreta y sea f(x) su función de probabilidad. Entonces su esperanza matemática o valor esperado, se denota E(X) o μ , y se define como:

$$\boxed{\mu = E(X) = \Sigma\ x.f(x)}$$

Sabiendo que $x \in Rx$.

La esperanza o valor esperado no es más que el valor promedio al cual tiende una variable aleatoria luego de infinitas realizaciones de la misma.

Esperanza & Varianza

Ejemplo 1: Considerese una universidad que tiene 15.000 estudiantes y sea la V.A.Discreta X = "Cantidad de cursos en los cuales está inscripto un estudiante seleccionado al azar". Se sabe que la variable X tiene la siguiente función de probabilidad f(x) o p(x):

x	1	2	3	4	5	6
p	0.02	0.03	0.13	0.25	0.39	0.18
Cant. Alumnos	300	450	1950	3750	5850	2700

¿Cuál es el número promedio de cursos en los que se inscribe un estudiante?

$$\text{Prom}(X) = \frac{(1 * 300) + (2 * 450) + (3 * 1950) + (4 * 3750) + (5 * 5850) + (6 * 2700)}{15000} = \mathbf{4{,}5}$$

$$E(X) = (1 * p(1)) + (2 * p(2)) + (3 * p(3)) + (4 * p(4)) + (5 * p(5)) + (6 * p(6)) =$$

$$E(X) = (1 * 0{,}02) + (2 * 0{,}03) + (3 * 0{,}13) + (4 * 0{,}25) + (5 * 0{,}39) + (6 * 0{,}18) = \mathbf{4.5}$$

Teorema:

Sean X e Y variables aleatorias, con Y = g(X), si X es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad p(x), la esperanza de la variable aleatoria Y está dada por:

$$\boxed{\mathbf{E\,(Y) = E[g(X)] = \Sigma\,[g(x) * p(x)]}}$$

Sabiendo que x ∊ Rx y que g(X) es una función continua.

Propiedades de la Esperanza:

- Dados a, b ∊ R ⇒ **E(aX + b) = E(aX) + E(b) = aE(X) + b.**
- Si $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(X) \leq b$.

Esperanza & Varianza

Ejemplo 2: Suponga el número de automóviles X que pasa por un local de lavado de autos entre las 4:00 p.m. y las 5:00 p.m. de cualquier viernes soleado tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	4	5	6	7	8	9
$P(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sea **Y = [g(X)] = (2X – 1)** la suma de dinero representativa del gasto en insumos por cada vehículo lavado. Calcule las ganancias esperadas en dicho periodo si cada lavado tiene un valor de $100.

G = I – E = [E(X)*$100] – [E(X)*E(Y)]

$E(X) = \Sigma (x_i)*p(x_i) = (4*1/12) + (5*1/12) + (6*1/4) + (7*1/4) + (8*1/6) + (9*1/6) =$
E(X) = 41/6 = **6,83**

E(Y) = E[g(X)] = E(2X − 1) = 2E(X) – E(1) = (2*41/6) – 1 = 38/3 = **$12,66**

G = [E(X)*$100] – [E(X)*E(Y)] = (6,83*$100) – (6,83*$12,66) = **$596,77**

Esperanza & Varianza

Varianza de una V.A. Discreta.

Como ya hemos visto, si consideramos un gran número de valores de una variable aleatoria y los promediamos, obtendremos la esperanza de X. ahora bien, necesitaríamos de algún otro parámetro que nos de información de cómo están concentrados o dispersos los valores de la variable alrededor de la esperanza o media. Para este fin definimos a la varianza:

$$\boxed{V(X) = \Sigma\,(x-\mu)^2.f(x) = E(x^2) - [E(x)]^2}$$

Si los valores están concentrados alrededor de la media (μ) entonces V(X) será relativamente pequeña, por el contrario, si estos están alejados de μ en ese caso el valor de V(X) será grande.

Propiedades de la Varianza:

- $V(X) \geq 0$. la varianza siempre es mayor o igual a 0
- Dados a, b $\in$ R $\Rightarrow$ $\mathbf{V(aX + b) = V(aX) + V(b) = a^2\,V(X) + 0}$

Esperanza & Varianza

Ejemplo 3: Suponga que la variable aleatoria X representa el número de piezas defectuosas que una máquina produce por cada lote de 100 piezas fabricadas. Se obtiene una muestra aleatoria de tres piezas y se somete a prueba. La siguiente es la distribución de probabilidad de X.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.51	0.38	0.10	0.01

Calcule V(X) utilizando la expresión $V(X) = E(x^2) – [E(x)]^2$

- $E(X^2) = \Sigma[x^2.f(x)] = (0)(0\ .51) + (1)(0.38) + (4)(0.10) + (9)(0.01) =$ **0.87**.
- $E(X) = \Sigma[x.f(x)] = (0)(0.51) + (1)(0.38) + (2)(0.10) + (3)(0.01) =$ **0.61**.
- $V(X) = 0.87 - (0.61)^2 =$ **0.4979**.

Esperanza & Varianza

Desvío estandar de una V.A. Discreta.

Como la varianza se expresa en unidades que corresponden al cuadrado de las unidades de la variable aleatoria X, es conveniente tomar otra medida de dispersión que solucione este inconveniente. Esta medida es el desvió estándar σ(x), también llamada desvió típico o desvió tipo y resulta de la raíz cuadrada de la varianza:

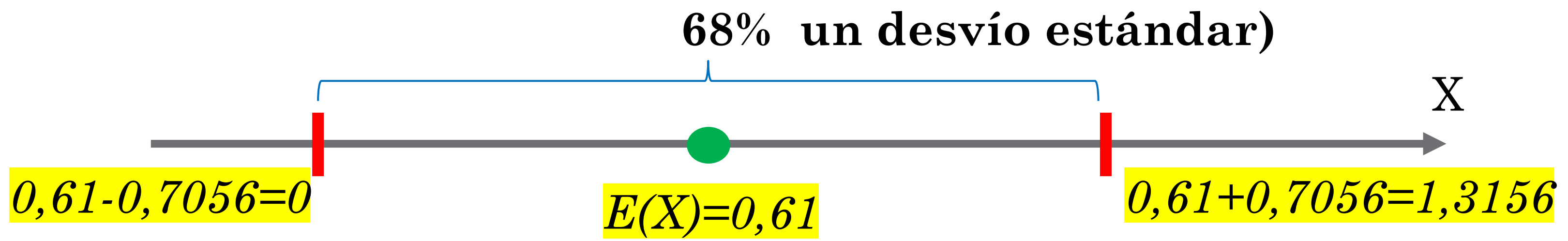
$$\boxed{\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{V(x)}}}$$

Continuando con el ejemplo anterior, el desvío estándar será:

$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0{,}4979} = \pm\, \mathbf{0{,}7056}$

E(X) = **0,61**

(Representa los datos contenidos debajo de una curva normal para un desvío estándar)



<u>Interpretación práctica:</u> Si sabemos que los puntajes obtenidos en un examen de Matemática por un grupo de estudiantes de cierta facultad, sigue una **Distribución Normal** con **E(x) = 70** y **σ(x) = 10**.

Dependiendo de la cantidad de desvíos estándar considerados podemos formar intervalos de amplitud diferente:

- ***<u>Si el rango es: 70 +/- 10 (±1σ) => el intervalo será de 60 a 80</u>***. *Esto quiere decir que el 68,27% de estudiantes obtuvo una calificación entre 60 y 80 puntos.*

- ***<u>Si el rango es: 70 +/- 20 (±2σ) => el intervalo será de 50 a 90</u>***. *Esto quiere decir que el 95,45% de estudiantes obtuvo una calificación entre 60 y 80 puntos.*

- ***<u>Si el rango es: 70 +/- 30 (±3σ) => el intervalo será de 40 a 100</u>***. *Esto quiere decir que el 99,73% de estudiantes obtuvo una calificación entre 40 y 100 puntos.*