Distribuciones de Probabilidad Discreta

Introducción.

"La distribución de probabilidad discreta describe el comportamiento de una variable aleatoria discreta".

A menudo las observaciones que se generan mediante diferentes experimentos estadísticos tienen el mismo tipo de comportamiento. En consecuencia, las variables aleatorias discretas asociadas con estos experimentos se pueden describir con la misma distribución de probabilidad y, por lo tanto, es posible representarlas usando una sola fórmula.

En la práctica, se necesitan sólo unas cuantas distribuciones de probabilidad discreta para describir muchas de las variables aleatorias discretas asociadas a distintos fenómenos de la vida real.

El proceso de Bernoulli.

Con frecuencia un experimento consta de “n” pruebas repetidas, donde cada una puede tener dos resultados posibles que se pueden denominar éxito “p” o fracaso “q”. La aplicación más evidente tiene que ver con la prueba de artículos a medida que salen de una línea de ensamble, donde cada prueba o experimento puede indicar si un artículo es bueno o defectuoso.

El proceso de Bernoulli se caracteriza por lo siguiente:

1. El experimento consta de n ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se puede clasificar como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de un éxito, que se denota con p, permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Distribución Binomial.

El número de éxitos en "n" experimentos de Bernoulli se denomina variable aleatoria binomial y se denota: ***X ~ Bi(n, p)***

La distribución de probabilidad de esta variable aleatoria discreta se llama **distribución binomial** y se denota: **b(k; n, p)**

Entonces decimos que para un experimento binomial con probabilidad p de éxito y n ensayos independientes, la probabilidad de obtener k éxitos esta dado por la expresión:

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = C_{(n,k)} * p^{(k)} * q^{(n-k)}}}$$

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Siendo:

- $q = 1 - p$ (probabilidad de fracaso)
- $k \in \{0, 1, 2, \cdot\cdot\cdot, n\}$
- $\binom{n}{k}$ las distintas formas de elegir las posiciones donde suceden los k éxitos dentro de los n ensayos.

Finalmente, dada la hipótesis de n ensayos independientes, podemos multiplicar todas las probabilidades que corresponden a los diferentes resultados. (Sucesos Independientes)

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Ejemplo 1: La probabilidad de que cierta clase de componente electrónico sobreviva a un ensayo de durabilidad es de 3/4. Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes que se ensayen. Sabemos que:

n=4
k=2
p=3/4
q=1 – p=1/4

S	S	F	F	CASO 1
C1	**C2**	**C3**	**C4**	

3/4 X **3/4** X **1/4** X **1/4** = **9/256**

C1 **C2** **C3** **C4**

Ahora debemos tener en cuenta todas las posibles combinaciones donde 2 componentes sobreviven y otros 2 fallan. Entonces utilizamos las combinaciones, dado que no importa el orden:

$$C_{(4;2)} = \frac{4!}{2!.(4-2)!} = 6$$

{(SSFF);(FSSF);(FFSS);(SFSF);(FSFS);(SFFS)}

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Finalmente, la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 componentes será:

$$(6 * 9/256) = 27/128 = \mathbf{0{,}2109}$$

El procedimiento anterior se puede simplificar si utilizamos la expresión generalizada de la distribución binomial.

- ***<u>"X": n° de componentes que sobreviven al ensayo"</u>***
  Siendo Rx = {0,1,2,3,4}
- ***X ~ Bi(4 ; 3/4)***

$$P(X = k) = C_{(n;k)} \,.\, (p)^k .\, (q)^{n-k}$$

$$P(X = 2) = C_{(4;2)} \,.\, \left(\frac{3}{4}\right)^2 .\, \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128} = \mathbf{0{,}2109}$$

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Con frecuencia nos interesamos en problemas donde se necesita obtener $P(X \leq a)$ o $P(a \leq X \leq b)$.

Para esto tenemos 2 maneras de proceder:

a) Calcular para cada valor de éxito k su probabilidad de ocurrencia y luego sumarlas hasta el valor requerido.

Ej: $P(X \leq 3)$ $\quad R(x) = \{0,1,2,3,4\}$

$$P(X=0) = C_{(4;0)} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = 0{,}0039$$

$$P(X=1) = C_{(4;1)} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}0468$$

$$P(X=2) = C_{(4;2)} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0{,}2109$$

$$P(X=3) = C_{(4;3)} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 0{,}4218$$

$$P(X \leq 3) = 0{,}0039 + 0{,}0468 + 0{,}2109 + 0{,}4218 = 0{,}6834$$

Distribuciones de Probabilidad Discreta

b) ***Utilizar las tablas de la distribución binomial, teniendo especial atención en comprender que los números mostrados allí corresponden siempre a la acumulación o suma de los distintos valores k que toma la variable aleatoria para el rango solicitado.***

Las sumatorias binomiales se presentan en la tabla D.2 del anexo para n = 1, 2,…, 25, para valores seleccionados de p entre 0.01 y 0.99.

¡¡¡SOLO PODREMOS UTILIZAR LAS TABLAS PARA VERIFICAR LOS RESULTADOS!!!

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Ejemplo 2: La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que a) sobrevivan al menos 10, b) sobrevivan de 3 a 8, y c) sobrevivan exactamente 5?

Siendo "X" el número de personas que sobreviven:

$$\mathbf{R_x = \{0,1,2,\ldots\ldots\ldots,15\}} \qquad \boldsymbol{X \sim Bi(15\,,\,0{,}4)}$$

$$a) \qquad P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - \sum_{x=0}^{9} b(x; 15, 0.4) = 1 - 0.9662$$
$$= 0.0338$$

$$b) \qquad P(3 \leq X \leq 8) = \sum_{x=3}^{8} b(x; 15, 0.4) = \sum_{x=0}^{8} b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^{2} b(x; 15, 0.4)$$
$$= 0.9050 - 0.0271 = 0.8779$$

$$c) \qquad P(X = 5) = b(5; 15, 0.4) = \sum_{x=0}^{5} b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^{4} b(x; 15, 0.4)$$
$$= 0.4032 - 0.2173 = 0.1859$$

Esperanza o media de la distribución binomial.

$$\boxed{E(X) = n \cdot p}$$

Varianza de la distribución binomial.

$$\boxed{V(X) = n \cdot p \cdot q}$$

Distribución de Poisson.

La variable aleatoria de Poisson, depende de un parámetro **(λ)** que se denomina intensidad del proceso de Poisson y cuya notación usual es **X ~ Po(λ)**.

Utilizamos el modelo de distribución de Poisson cuando se intenta explicar un experimento donde existen ocurrencias discretas sobre un espacio continuo.

- ✓ *Llegada de autos a un peaje por minuto.*
- ✓ *Llamadas que llegan a un call center por hora.*
- ✓ *Cantidad de infectados por coronavirus en un día.*
- ✓ *Baches en una ruta por km.*
- ✓ *Fallas en una tela por m2 .*

Siendo λ el valor que se corresponde con el valor esperado o media.

k: número de éxitos requeridos dentro de los "n" ensayos independientes.

Entonces decimos que para un experimento de Poisson con parámetro λ y n ensayos independientes, la probabilidad de obtener k éxitos esta dado por la expresión:

$$\boldsymbol{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^{k}}{k!}}$$

Siendo e = 2.71828 y k ∈ {0, 1, 2, . . .,n}

Esperanza o media de la distribución de Poisson.

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

Varianza de la distribución Poisson.

$$\boxed{V(X) = E(x^2) - [E(x)]^2 = (\lambda^2 + \lambda) - (\lambda^2) = \lambda}$$

<u>Ejemplo 3:</u> Una máquina analiza pruebas de laboratorio y procesa en promedio 6 muestras por hora. Calcular:

1. La probabilidad de que no se analice ninguna muestra en media hora.
2. Se analicen al menos dos muestras en una hora.
3. El valor esperado de muestras para quince minutos.

Sabiendo que λ = 6 (Muestras/Hora)

"X": n° de muestras analizadas ***$X \sim Po(\lambda=6)$***

1)

$$P_{\lambda=3}(X=0)=\frac{e^{-3}3^0}{0!}\approx 0.0497$$

2)

$$P_{\lambda=6}(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{e^{-6}6^0}{0!}-\frac{e^{-6}6^1}{1!}$$

$$P_{\lambda=6}(X\geq 2)=0.9826$$

3)

$$\lambda=6/4=1.5$$

<u>Ejemplo 4:</u> El número promedio de camiones-tanque que llega cada día a cierta ciudad portuaria es 10. Las instalaciones en el puerto pueden alojar a lo sumo 15 camiones-tanque por día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado lleguen más de 15 camiones y se tenga que rechazar algunos?

"X": el número de camiones-tanque que llegan cada día.
$X \sim Po(\lambda=10)$

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \sum_{x=0}^{15} p_{\lambda}(x) = 1 - 0.9513 = 0.0487.$$

$P(X > 15) = 1 - [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+\ldots\ldots\ldots\ldots+P(X=15)]$

La tabla D.4 del anexo contiene las sumatorias de la probabilidad de Poisson para valores de λ que van de 0.1 a 36.0.

Distribuciones de Probabilidad Discreta

(*) Aproximación de una distribución binomial por medio de una distribución de Poisson

Como la distribución binomial, la distribución de Poisson se utiliza para control de calidad, aseguramiento de calidad y muestreo de aceptación.

En el caso de la distribución binomial, si **n es bastante grande y p es pequeña**, las condiciones comienzan a simular las implicaciones de espacio o tiempo continuos del proceso de Poisson.

Por lo tanto, ***se puede probar que la distribución binomial converge a la distribución de Poisson cuando el parámetro (n) tiende a infinito y el parámetro (p) tiende a ser cero***, *bajo la condición de que el producto (n*p) sea una cantidad constante (λ).*

$$\boxed{\lim_{n \longrightarrow +\infty \wedge p \longrightarrow 0 \wedge n.p=\lambda} P_{Bi(n,p)}(X) = P_{Po(\lambda)}(x)}$$

(*) Aproximación de una distribución binomial por medio de una distribución de Poisson

En la práctica, cuando el experimento se realiza para un número **n** de repeticiones tal que **($n > 50$)** y la probabilidad de éxito **p** en cada ensayo es **($p < 0{,}1$),** podemos aproximar la distribución Binomial a través de la distribución de Poisson con un error despreciable.

$$\boxed{\lambda = n * p}$$

Distribuciones de Probabilidad Discreta

Ejemplo 4: Cada vez que un alumno realiza una práctica de química, hay una probabilidad p=0,01 de que se rompa un tubo de ensayo. Si la práctica la realizan 300 alumnos de un curso de primer año de Ingeniería Química.
Determinar, ¿Cuál es la probabilidad de que ningún tubo de ensayo se rompa?
“X”: n° de tubos de ensayo rotos

Distribución Binomial

n = 300 , p = 0,01 y q = 0,99

$$P(X = k) = C_{(n;k)} \,.\, (p)^k .\, (q)^{n-k}$$

$$P(X = 0) = C_{(300;0)} \,.\, (0{,}01)^0 .\, (0{,}99)^{300-0}$$

$$P(X = 0) = 0{,}0490 = \mathbf{4{,}90\%}$$

Error aprox = 0,0008

Distribución de Poisson

n = 300 y p = 0,01 => λ = 3

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} * 3^0}{0!}$$

$$P(X = 0) = 0{,}0498 = \mathbf{4{,}98\%}$$