Distribución Normal

Introducción.

Es una distribución de ***variable aleatoria continua***, con campo de variación entre -∞ y +∞. Fue descubierta por Gauss al estudiar la distribución de los errores en las observaciones astronómicas.

Es el modelo de distribución más importante y por lo tanto más utilizado en la práctica dentro del universo de las distintas distribuciones de probabilidad.

Sabemos que un gran número de fenómenos reales y gran parte de los procesos productivos pueden ser modelizados y representados según una distribución normal.

Por último y no menos importante es que muchas de las distribuciones de uso frecuente tienden a aproximarse a la distribución normal bajo ciertas condiciones.

Distribución Normal

Variable Aleatoria Continua.

Una variable aleatoria es continua cuando su recorrido (Rx) es un intervalo real. Este intervalo puede estar acotado superiormente, inferiormente, ambas cosas o no estar acotado.

Son ejemplos de variables aleatorias continuas:

- La altura de un adulto seleccionado al azar en una población.
- Un número real elegido al azar entre 0 y 1.
- El peso de un paquete de arroz elegido al azar del lote de producción.

Función de Densidad f(x).

Toda variable aleatoria continua X tiene asociada una función llamada función de densidad, f , tal que:

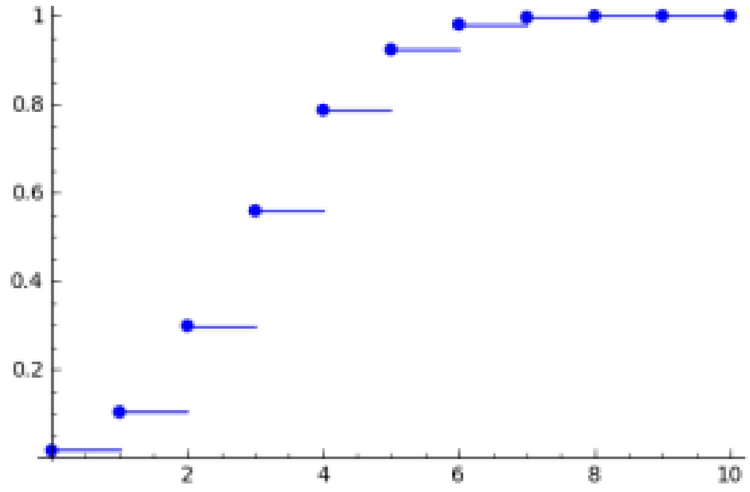
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 \end{array}}$$

Distribución Normal

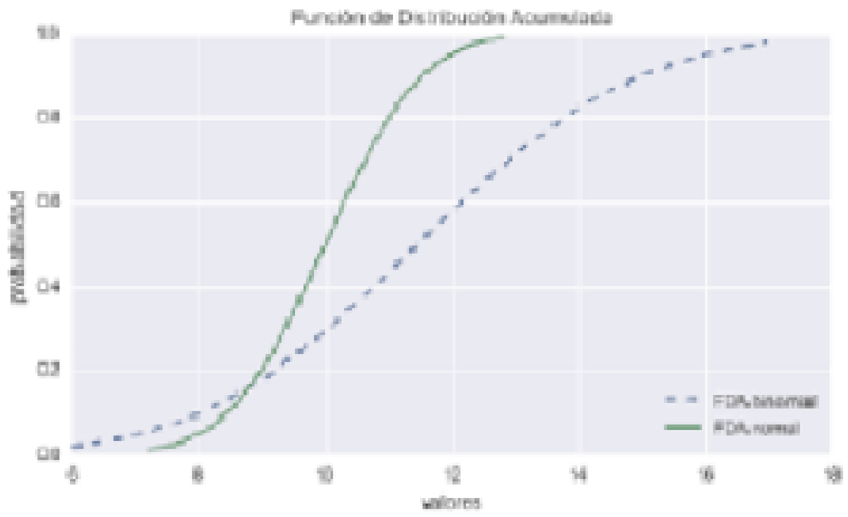
Distribución Acumulada F(x).

Siendo X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x) . Se llama función de distribución acumulada de X a la función:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$



variable discreta



variable continua

Distribución Normal

Esperanza Matemática

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X. Entonces se define la **Esperanza** de X y se nota $E(X)$ como:

$$E(X) = \int_{x\in\mathbb{R}} x f_X(x)dx$$

La esperanza queda definida cuando esta integral converge.

Varianza de una variable aletoria continua

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f_X y $E(X) = \mu$. Entonces se define la **Varianza** de X y se nota $V(X)$ como:

$$V(X) = E((X-\mu)^2) = \int_{x\in\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$$

Desvío Standard de una variable aleatoria continua

Sea X una variable aleatoria continua. Se define el **desvío estándar** de X y se nota con σ_X a :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$$

Distribución Normal

Definición:

La función de densidad f(x) de una variable aleatoria continua X con distribución Normal de parámetros μ y σ es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde $x \in R$, $\mu \in R$ y $\sigma > 0$.

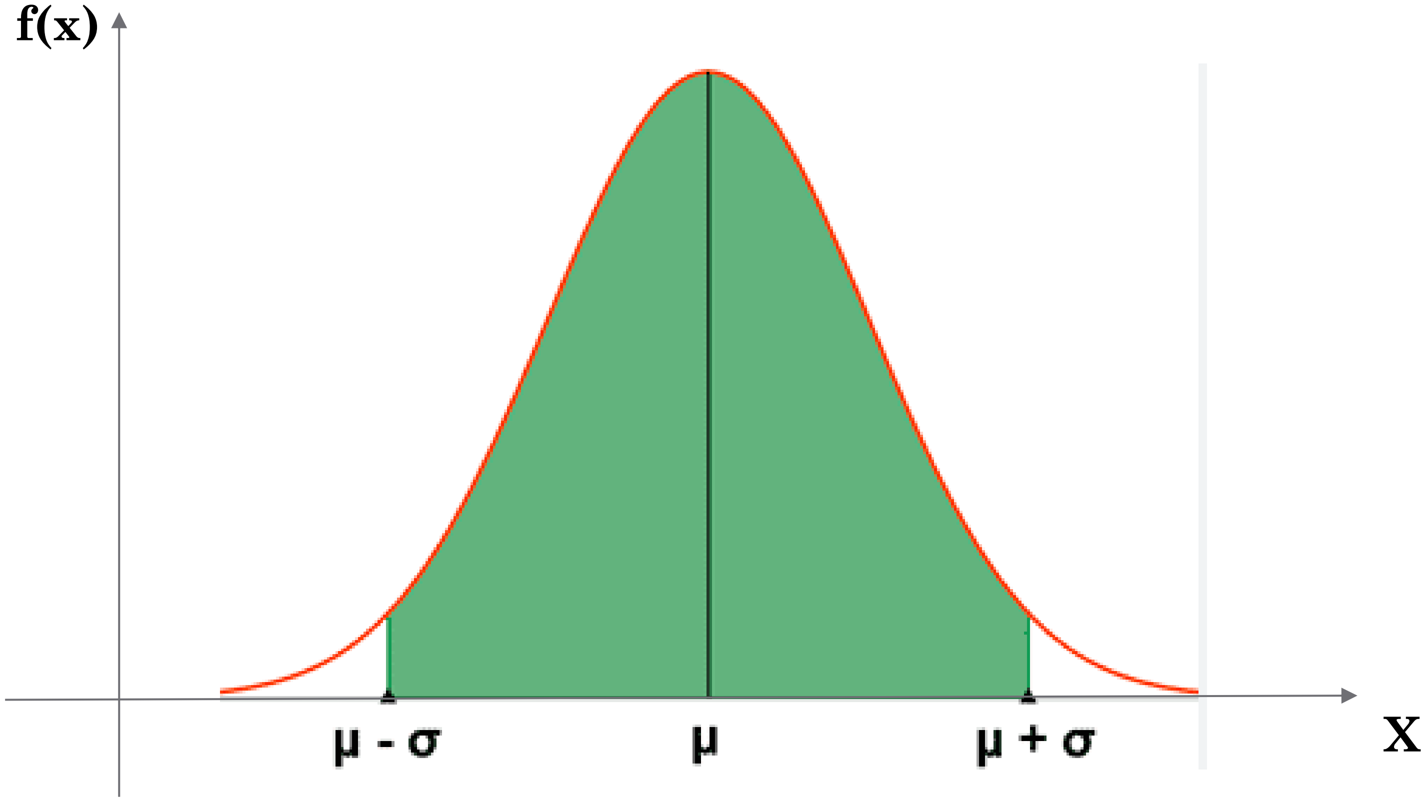
Siendo **μ** la media de la distribución y **σ²** su varianza. La distribución normal queda definida por estos dos parámetros. Por lo tanto, decimos que la variable aleatoria X sigue una distribución normal de parámetros:

$$\boxed{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$$

Distribución Normal

Gráfica de la distribución normal o Campana de Gauss

La distribución normal se caracteriza porque los valores se distinguen formando una campana llamada campana de Gauss, en torno a un valor central que coincide con el valor medio de la distribución.

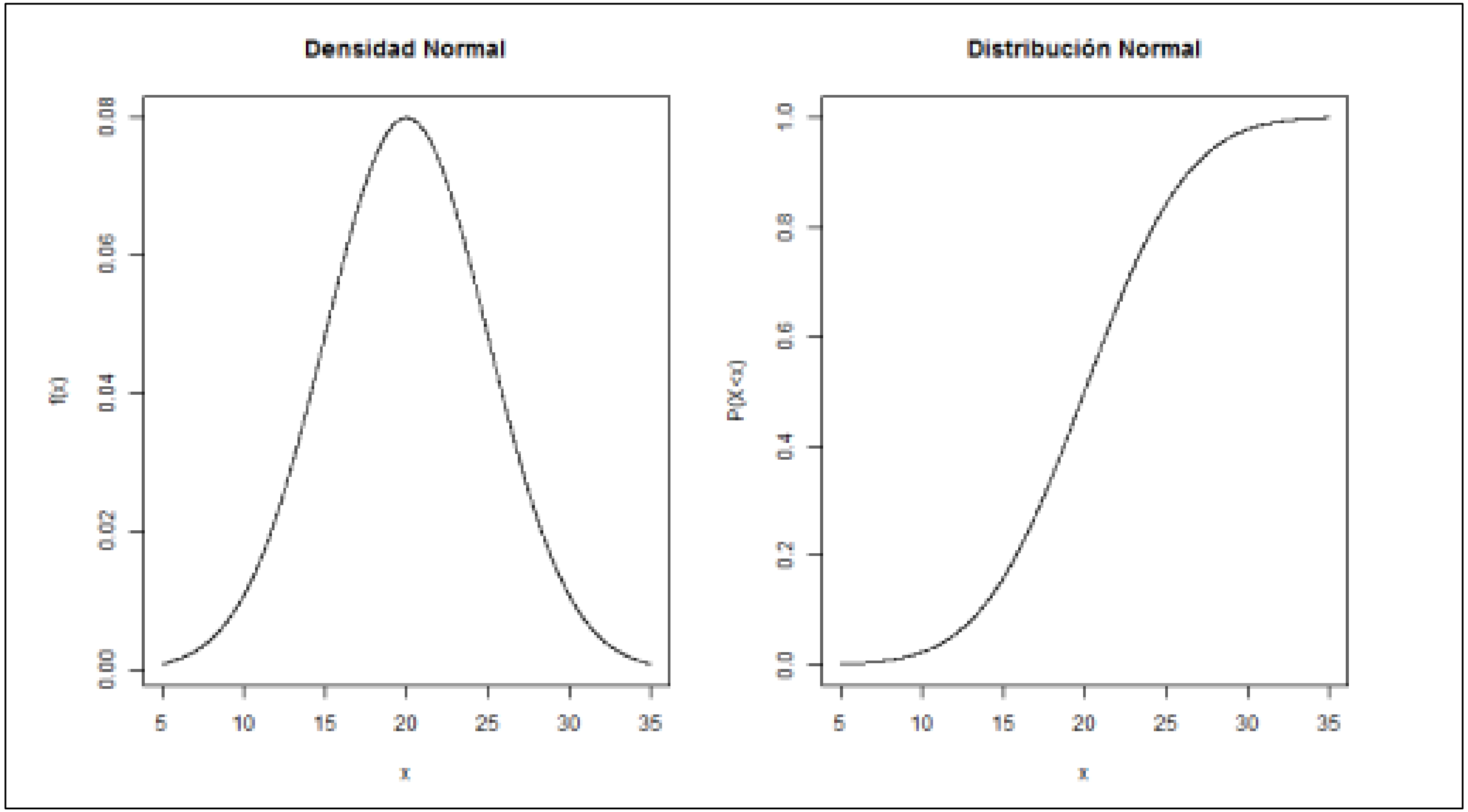


<u>Observando la gráfica podemos dar algunas características de la curva</u>:

- Es simétrica respecto a la recta vertical $x = \mu$
- Es asintótica al eje x
- Posee puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$

También podemos sacar, de manera aproximada las siguientes conclusiones: son más probables los valores cercanos a la media. Conforme nos separamos de ese valor, la probabilidad va decreciendo de igual forma de derecha a izquierda por su simetría y lo hará más o menos rápido dependiendo del desvió estándar.

Gráficas de f(x) y F(x) para la distribución normal.



Distribución Normal Estandar.

Es un caso particular de la distribución normal y se obtiene cuando:

$$\boxed{\mu = 0 \text{ y } \sigma = 1}$$

La variable aleatoria continua la denominamos Z y su notación será:

$$\boxed{Z \sim N(0,\ 1)}$$

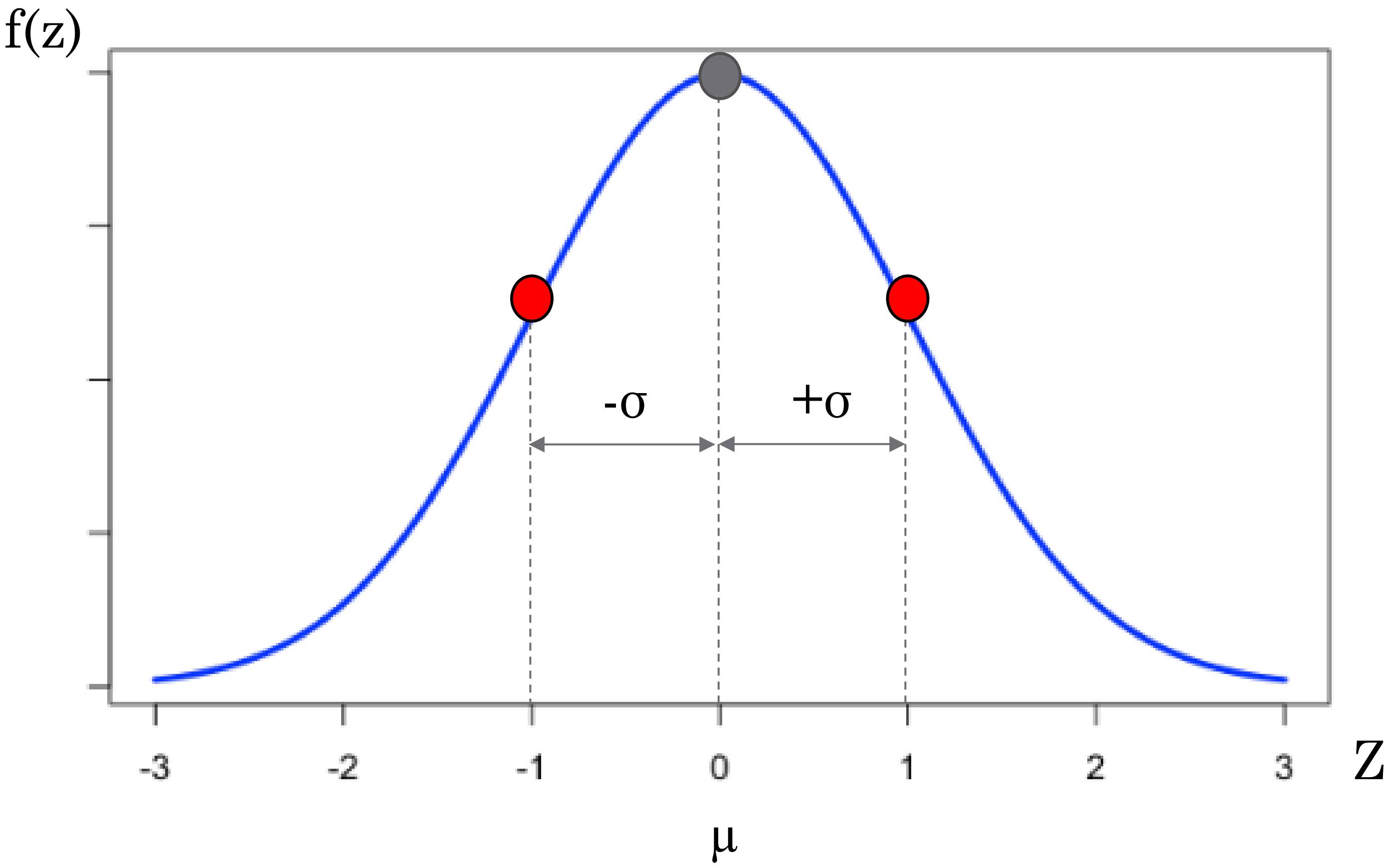
Por lo tanto, a la función de densidad f la llamaremos f(z).

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad z \in \mathbb{R}}$$

Si $Z \sim N(0,\ 1)$ entonces $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$

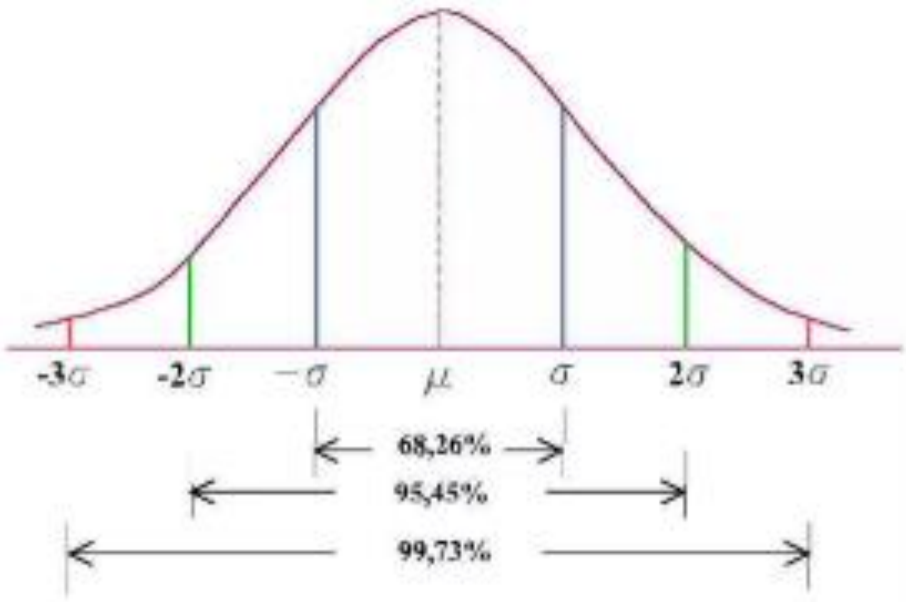
Distribución Normal

Grafica de la función de densidad f(z).



<u>Gráfica de la función de densidad f(z).</u>

A medida que trabajemos con un desvío estándar mayor, vamos a estar pudiendo abarcar dentro de la campana de gauss un mayor porcentaje de los datos o elementos analizados. En la práctica se suele trabajar con ± 3σ, con lo cual abarcaremos un 99,73% de los datos. (Muy cercano al 100%)



Propiedades Gráficas

1. La función de densidad es asintótica respecto del eje de abscisas.
2. La función de densidad es simétrica respecto del eje de ordenadas.
3. La función de densidad presenta un máximo en $(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$
4. La función de densidad presenta dos puntos de inflexión en $z = 1$ y en $z = -1$.

Relación entre la Distribución Normal "Real" y la Distribución Normal Estándar.

Debemos realizar la transformación de la V.A.C "X" a la variable estándar o tipificada "Z" de manera que:

$$\boxed{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

Entonces, si $X \sim N(\mu, \sigma)$ por lo tanto $Z \sim N(0, 1)$

Finalmente,

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z)$$

Distribución Normal

Uso de las tablas.

Sea X ~ N(μ, σ) entonces se tiene que:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\ (z_1 \leq Z \leq z_2)$$

Siendo:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$$

Finalmente nos quedará:

$$P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) = (Z2 - Z1)$$

Donde (Z2 – Z1) representan el área bajo la curva de la función de densidad f(z) obtenida de tabla.

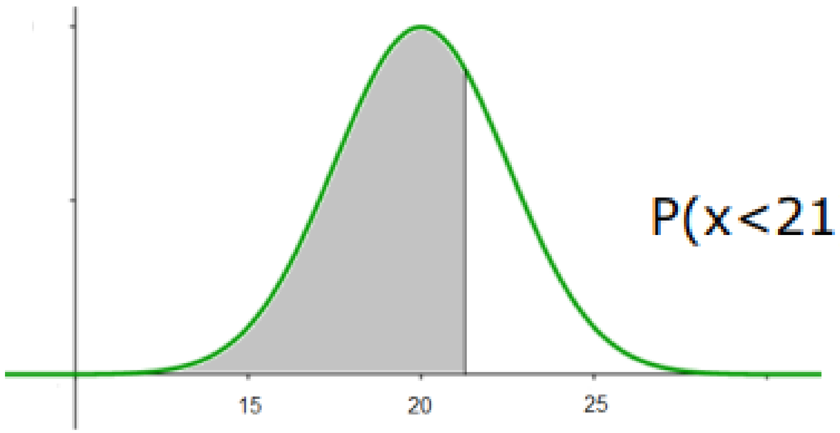
Distribución Normal

<u>Ejemplo 1:</u> Dada la variable X : N(20,5) calcular:

a) P(x<21)
b) P(x>22)
c) P(23,25<x<26,3)

Siempre que tengamos que calcular debemos hacer la transformación en z para poder utilizar las tablas.

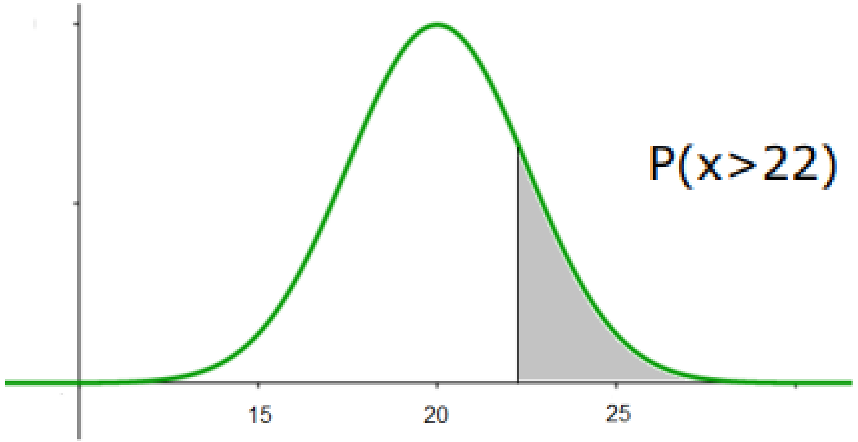
a)



$P(x<21) = P(z<(21-20)/5) = P(z<0,2) = 0,5793$

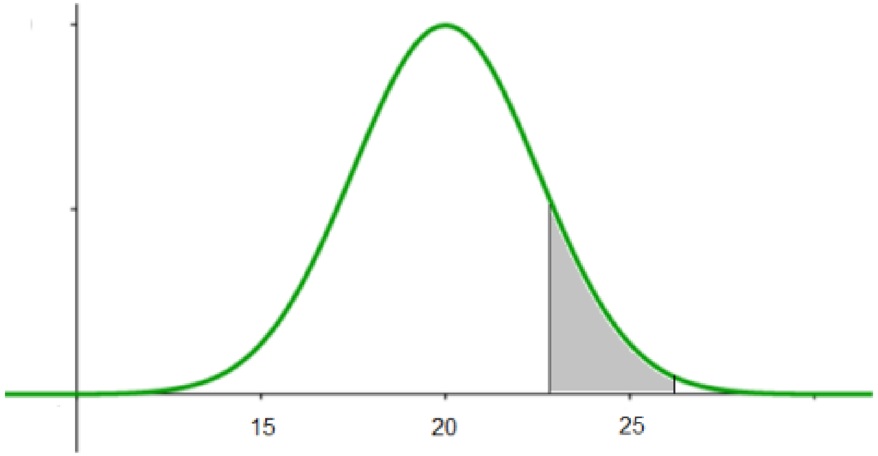
Distribución Normal

b)



$P(x>22) = 1-P(z<(22-20)/5) = 1-P(z<0,4) = 1-0,6554 = 0,3446$

c)



$P(23,25<x<26,3) =$

$P(x<26,3) - P(x<23,25) =$

$P(z<(26,3-20)/5) - P(z<(23,25-20)/5) =$

$P(z<1,26) - P(z<0,65) =$

$0,8962 - 0,7422 = 0,154$

Distribución Normal

Ejemplo 2: Una persona acude diariamente al trabajo. El tiempo que tarda en ello se distribuye normalmente, con media de 21,3 minutos y desviación típica de 2.8 minutos. A lo largo del año va 256 días a trabajar.

a) Si en el trabajo debe estar a las 8:30 hs y sale de su casa a las 8:05 hs ¿Cuántos días llegará tarde al cabo de un año?

Siendo "X" V.A.C : Tiempo transcurrido en llegar al trabajo

$$P(x > 25) = P(z > \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(z > \frac{25-21,3}{2,8}) = 1 - P(z \leq \frac{25-21,3}{2,8}) = 1 - P(z \leq 1,32)$$

$= 1 - 0,9066$ => $\mathbf{P(x > 25) = 0,0934}$

Entonces: 0,0934 * 256d = **24 días.**

Distribución Normal

<u>**Ejemplo 3**</u>: La distribución de las alturas de los jugadores de basquet de un equipo de la NBA es normal con media $\mu = 1.95$ m y desvío $\sigma = 0.05$ m.

a) Hallar la probabilidad de que un jugador elegido al azar mida más de 2.05 m. Siendo "X" V.A.C : altura, en metros, de un jugador de la NBA.

$$P(X > 2{,}05) = P(Z > \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z > \frac{2{,}05-1{,}95}{0{,}05}) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772$$

=> $P(X > 2{,}05) = 0{,}0228$

Ejemplo 3: La distribución de las alturas de los jugadores de basquet de un equipo de la NBA es normal con media $\mu = 1.95$ m y desvío $\sigma = 0.05$ m.

b) Calcular la altura superada por el 20% de los jugadores.

$P(X > x_1) = 0{,}2 \Rightarrow P(X \leq x_1) = 0{,}8$ (Complemento)

$\Rightarrow P(X \leq x_1) = P(Z \leq \frac{h-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{h-1{,}95}{0{,}05}) = 0{,}8$

$\Rightarrow$ Busco en la tabla para que valor de z la probabilidad acumulada F(z) se acerca lo más próximo a 0,8. Por lo tanto, $z = 0{,}84$ tal que $P(Z \leq 0{,}84) = 0{,}7995$

Finalmente, igualamos $\frac{\mathbf{x_1 - 1{,}95}}{\mathbf{0{,}05}} = \mathbf{0{,}84} \Rightarrow \mathbf{x_1} = \mathbf{1{,}992}\ \boldsymbol{metros}$