Rapport du projet

Calcul Scientifique pour les Grands Systèmes Linéaires

Thibault Cimic

29 avril 2017

Superviseur :
X. Claeys, P. Marchand

Paris
Universite Pierre et Marie Curie

1 Méthodes de l'équation normale

1.1 Question 2a

Pour les données du problème (1), on définit la fonctionnelle suivante :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}|Ax-b|_2^2 \end{array}$$

Notons $(a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ les coefficients de la matrice A, $(x_j)_{1\leq j\leq m}$ les coefficients de x, et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ les coefficients de b. On a alors pour $x \in \mathbb{R}^m$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}x_j - b_i\right)^2$$

Donc pour $k = 1, ..., m$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}x_j - b_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} 2a_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}x_j - b_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}x_j - b_i\right)
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement le k ième coefficient du vecteur $A^t\,(Ax-b)$. Ainsi $\nabla\Phi(x) = A^t\,(Ax-b) = A^tAx - A^tb$. Si de plus x est solution du problème (1), alors $\nabla\Phi(x) = 0$ ce qui est équivalent à trouver x tel que : $A^tAx = A^tb$.
La matrice A est alors nécessairement inversible car elle est symétrique définie positive (SDP). En effet,

$$(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, on a :

$$< A^tAx, x > = < Ax, Ax > = |Ax|_2^2 > 0, \text{ car } x \neq 0 \text{ et } \ker(A) = \{0\}$$

2 Décomposition QR

2.1 Question 4a

Soit $v, e \in \mathbb{R}^n$ tel que $|e|_2 = 1$.

$$\begin{aligned}
H(v-|v|_2e)v &= \left(Id - 2\frac{vv^t - |v|_2ev^t - |v|_2ve^t + |v|_2^2ee^t}{|v-|v|_2e_2^2}\right)v \\
&= v - 2\frac{v|v|_2^2 - |v|_2^3e - |v|_2 < e, v > (v-|v|_2e)}{|v-|v|_2e|_2^2} \\
&= v - 2\frac{(|v|_2^2 - |v|_2 < e, v >)\,(v-|v|_2e)}{|v-|v|_2e|_2^2}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
|v - |v|_2 e|_2^2 &= < v - |v|_2 e, v - |v|_2 e > \\
&= |v|_2 - 2|v|_2 < e, v > + |v|_2 |e|_2 \\
&= 2\left(|v|_2^2 - |v|_2 < e, v >\right), \text{ car } |e|_2 = 1
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
H(v - |v|_2 e)v &= v - (v - |v|_2 e) \\
&= |v|_2 e
\end{aligned}$$