Leçon n°30 : Rayonnement dipolaire électrique

Niveau	**CPGE**
Prérequis	Eq de Maxwell Poynting Potentiel électrostatique Jauge de Lorentz
Biblio	H. Prépa chap 10 Perez chat 20 Gié chap 11 Lumbrasso problème chap 4
Plan	I. Modèle du dipôle oscillant 1. Dipôle et approximation 2. Potentiel vecteur, scalaire 3. Champs E et B 4. Rayonnement/Puissance rayonnée II. Application : antenne demi-onde

LP30 : Rayonnement dipolaire électrique

1

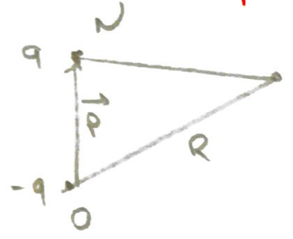
Niveau : CPGE

PR :
- Eq de Maxwell
- Poynting
- Potentiel électrostatique
- Jauge de Lorentz

Biblio :
- H. Prépa chap 10
- Pérez chap 20
- Gié chap 11
- Lumbroso Problème chap 4

I. Modèle du dipôle oscillant

1. Dipôle et approximation



$\vec{p} = q\,\overrightarrow{ON}$ oscillant $\vec{p} = q e^{j\omega t}\,\overrightarrow{ON}$

$q = q(t) \rightarrow$ courant $\rightarrow$ modèle de l'antenne

Approximation : ① Dipolaire $ON \ll M \Rightarrow \frac{1}{MN} = \frac{1}{R}$

② Non relativiste $v \ll c$ $\quad \frac{MN}{c} = \frac{R}{c}$

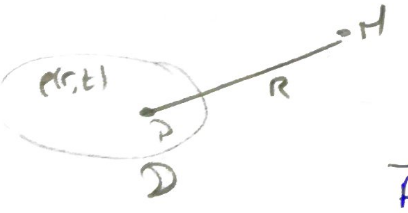
2. Potentiel vecteur, scalaire

Eq de Maxwell : $\begin{array}{l|l} MT & \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ MF & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \\ \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array}\right.$

Jauge de Lorentz : $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{j} \end{array}\right.$

or $\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$ éq de d'Alembert sens de propag $\overrightarrow{OM}$

$\partial V = \frac{1}{R}\cdot f\left(t - \frac{MN}{c}\right) \Rightarrow \partial V(R \to 0, t) = \frac{\partial Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow \partial V = \frac{\partial Q(t,z)}{4\pi\varepsilon R}$



$V(R,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{D} \frac{\rho\left(P, t - \frac{R}{c}\right)}{PM}\, d\tau$

$\vec{A}(R,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{D} \frac{\vec{j}\left(P, t - \frac{R}{c}\right)}{PM}\, d\tau$

or $\vec{j} = q\vec{v} = \dot{\vec{p}}$ - $\vec{A}(R,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{D} \frac{\dot{\vec{p}}\left(P, t - \frac{R}{c}\right)}{PM}\, d\tau \Rightarrow \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}\left(P, t - \frac{R}{c}\right)}{PM}$

① $\frac{1}{MP} = \frac{1}{R}$ ② $\frac{MP}{c} = \frac{R}{c} \Rightarrow \boxed{\vec{A}(R,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\dot{\vec{p}}\left(P, t - \frac{R}{c}\right)}$

or on sait que $\frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div}\vec{A}$

Ainsi $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\dot{\vec{p}}\left(P, t - \frac{R}{c}\right) \Rightarrow \operatorname{div}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\dot{\vec{p}}}{R}\right)\cdot\vec{e}_R$ posons $k = \frac{\omega}{c}$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R}\left(j\omega \frac{\vec{P_0} e^{j(\omega t - kR)}}{R}\right).\vec{e_r}$$

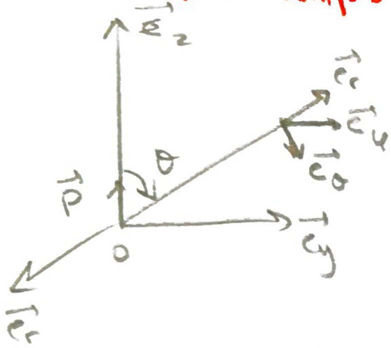
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(-\frac{j^2\omega k}{R^2} - \frac{j\omega}{Rc}\right)\vec{P_0}\, e^{j(\omega t - kR)}.\vec{e_r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\omega^2}{R^2 c} - \frac{j\omega}{R^2}\right)\vec{P_0}\, e^{j(\omega t - kR)}\,\vec{e_r}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{R^2} - \frac{\omega^2}{Rc}\right)\vec{P_0}.e^{j(\omega t - kR)}.\vec{e_r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{j\omega}{Rc}\right)\vec{P_0}\, e^{j(\omega t - kR)}.\vec{e_r}$$

3. Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{j\omega}{Rc}\right)\cos\theta\, p_0\, e^{j(\omega t - kR)}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\vec{P_0}\, e^{j(\omega t - kR)}(\cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$$

$$\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\, V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

or $\vec{\mathrm{grad}}\, A = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial R} \\ \frac{1}{R}\frac{\partial A}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A}{\partial \varphi}\end{array}\right.$ en coordonnée sphérique.

$$-\vec{\mathrm{grad}}\, V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{2}{R^2} + \frac{2j\omega}{R^2 c} - \frac{\omega^2}{R^2}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} + \left(\frac{1}{R^3} + \frac{j\omega}{R^2 c}\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta}\right] P_0\, e^{j(\omega t - kR)}$$

$$-\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi R} P_0\, e^{j(\omega t - kR)}(\cos\theta\,\vec{e_R} - \sin\theta\,\vec{e_\theta})$$

Donc $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\left(\frac{2}{R^3} + \frac{2j\omega}{R^2 c}\right)\cos\theta\,\vec{e_R} + \left(\frac{1}{R^3} + \frac{j\omega}{R^2 c} - \frac{\omega^2}{R^2}\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta}\right]\vec{P_0}\, e^{j(\omega t - kR)}}$

On sait que $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ et $p(t) = p_0 e^{j(\omega t - kR)}$

donc $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{j\omega}{R^2 c} - \frac{\omega^2}{Rc}\right)\sin\theta\, p(t)\,\vec{e_\varphi}}$

4. Rayonnement / Puissance rayonnée

On note $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$. $\frac{1}{R^3}$; $\frac{\omega}{R^2 c} = \frac{2\pi}{R^2 \lambda}$, $\frac{\omega^2}{Rc} = \frac{4\pi^2}{R\lambda^2}$

zone de Rayonnement $\overrightarrow{ON} \ll \lambda \ll R$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-\omega^2}{Rc^2}\right)p(t)\sin\theta\,\vec{e_\theta} = \frac{\ddot{\vec{p}}(t-\frac{R}{c})}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^2}{Rc}p(t)\sin\theta\,\vec{e_\varphi} = \frac{\mu_0}{4\pi Rc}\ddot{\vec{p}}(t-\frac{R}{c})\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$$

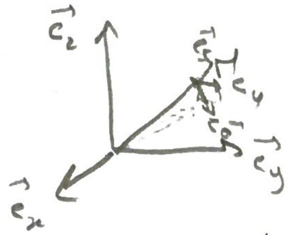
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon c^2}(\ddot{\vec{p}}\wedge\vec{e_r})\vec{e_r} \\ \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}(\ddot{\vec{p}}\wedge\vec{e_r}) \end{cases}$$

- propagation selon $\vec{e_r}$
- à une vitesse c
- $\vec{e_r}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ $\perp$ entre eux

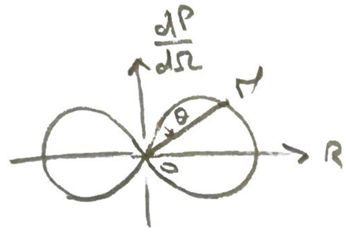
$\Rightarrow$ OPP

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c}\vec{e_r} \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{p}}^2\sin^2\theta\,\vec{e_R}$$

$$dP_{ray} = \vec{\Pi}.dS\,\vec{e_R} = R^2(\vec{\Pi}.\vec{e_r})\,d\Omega$$



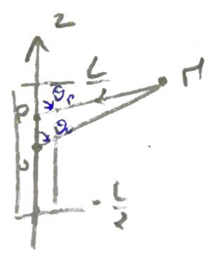
$$\frac{dP_{ray}}{d\Omega} = \frac{\ddot{p}^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}$$ diagramme du rayonnement :



Remarque : pas de dépendance en $\frac{1}{M}$

$$P_{ray} = \int \frac{dP_{ray}}{d\Omega}d\Omega. \Rightarrow P_{ray} = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\ddot{p}^2\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\sin\theta\,d\theta$$

or $\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta = \frac{4}{3}$ donc $\boxed{P_{ray} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}}$ $P = \frac{q^2a^2}{6\pi^2\varepsilon_0 c^3}$ Larmor.



$L = \frac{\lambda}{2}$ avec $\lambda \gg L$ $i(z,L) = I_0\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)$

dipôle = $dp = \frac{di}{dt}dz$

$$d\vec{E} = -\frac{\mu_0 I_0\omega}{4\pi}\frac{\sin\theta_P}{PM}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)\sin\left(\omega t - \omega\frac{PM}{c}\right)dz\,\vec{e_{\theta_P}}$$

$R \gg L \Rightarrow \theta \simeq \theta_P \Rightarrow \vec{e_\theta} = \vec{e_{\theta_P}} \Rightarrow PM = R - z\cos\theta \Rightarrow \frac{\sin\theta_P}{PM} = \frac{\sin\theta}{R.} \Rightarrow \frac{PM}{L} = \frac{z\cos\theta}{c}$

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 I_0\omega}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{j(\omega t - \frac{R}{c})}e^{j\frac{\omega}{c}z\cos\theta}dz\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{E} = \int_{z=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dE = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{\frac{\omega}{c}z\cos\theta}dz = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\left[e^{\frac{2\omega z}{c}(\cos\theta+1)} + e^{\frac{\omega z}{c}(\cos\theta-1)}\right]dz$$

$$\vec{E} = \frac{2L}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\mu_0 c I_0}{2\pi R} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{j\omega\left(t-\frac{R}{c}\right)} \vec{e_\theta}$$

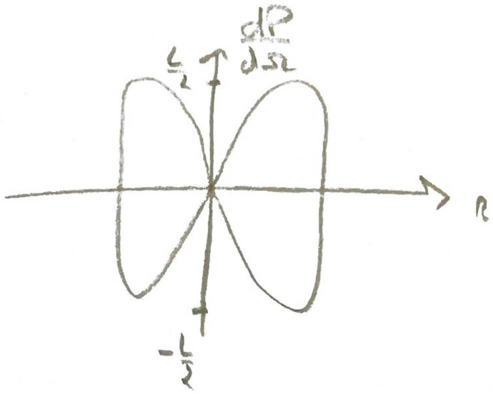
$$\vec{B} = \frac{\vec{e_R} \wedge \vec{E}}{c} \qquad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0}{8\pi^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \right)^2$$

II. Application : antenne demi-onde

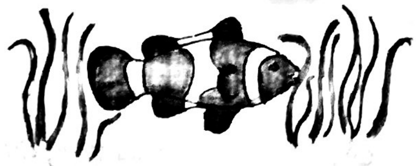
$$\langle P \rangle = \frac{1{,}22\, \mu_0 c I_0^2}{4\pi} = \frac{R_R I_0^2}{2}$$

$$R_r = 73{,}1\ \Omega$$

$$\frac{P_m}{P_e} = 1\%$$

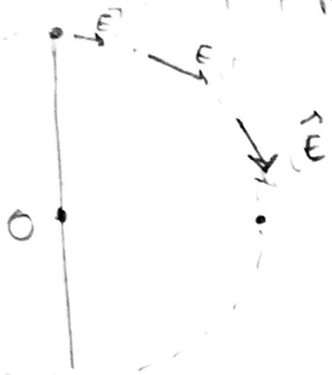


Questions



- Pourquoi on fait des approx ?
- Représenter $\vec{E}$ en qlq point si O est un pt dipôle.

Norme dp sin θ



- Pq on utilise la jauge de Lorentz ? indétermination de jauge, Éq + simple adapté au phénom propag magné
- Jauge utilisée en électrostatique et magnéto ? Poisson
- D'autres solut° de $\vec{E}$ onde plane donc utilise $t - \frac{x}{c}$
- Éq des potentiels retardé $t - \frac{R}{c}$ prend en compte les délais de propag
- si on enlève le courant de dpt on ne pt pas résoudre.
- $\vec{p}$ c'est quoi ? C/m
- Faire au tableau : 3GHz téléphone où est la zone de rayonnement

$\lambda = \frac{c}{f} \sim 0,1$ m

Pour un atome $\lambda = 300$ nm $= 3.10^{-7}$ m $\Rightarrow a_0 = 10^{-10}$ m

Donner + d'ordre de grandeur.

- Pourquoi l'antenne demi-onde ?
- cos(cos) ?
- pourquoi $e^{\frac{\pi}{2}}$ ⇒ coefficient de Bessel
- Il faut mieux que l'antenne soit au-dessus pour ne pas avoir de rayonnement
- Pourquoi on n'étudie pas dipôle oscillant ? car à m courant bp moins de P_{ray}
- Dvpmt multipolaire ?
- Pq on étudie ça ⇒ car en réalité bp de charge pas juste 1 modèle le + simple qui est capable de rayonner un chp

$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{q_i}{\|\vec{M_iM}\|}$ $\|\vec{M_iM}\|^2 = \|\vec{M_iO} + \vec{OM}\|^2 = M_iO^2 + OM^2 - 2\vec{M_iO}\cdot\vec{OM}$

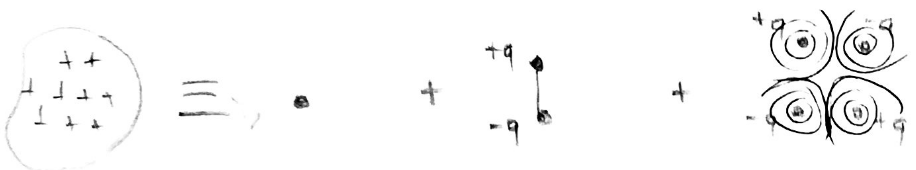
$= d_i^2 + R^2 - 2 d_i R \cos\alpha_i$

$$\frac{1}{|M_iH|} = \frac{1}{R\sqrt{1+\frac{d_i^2}{R^2} - 2\cos\alpha_i\frac{d_i}{R}}}$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^2)$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d_i^2}{R}\cos\alpha_i - \frac{d_i^2}{R^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{d_i^2}{R^2}\right)\cos^2\alpha_i + O(x^2)\right)$$

donc $V(M) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{R}}_{\text{terme monopolaire}} + \underbrace{q_i\frac{d_i}{R^2}\cos\alpha_i}_{\text{terme dipolaire}} + \underbrace{q_i\frac{(3d_i^2\cos^2\alpha_i - 1)}{R^3}}_{\text{terme quadripolaire}}$



Manipe de la diffusion de Rayleigh : eau + qlq gouttes de lait
Lampe blanche éclaire d'un côté de l'autre on observe un bleu
transmission la lampe est orange.

Ne pas démontrer potentiel retardé mettre en PR

montré en 3D

PR en statique Rappel dipôle.

Zone de rayonnement $\frac{1}{R^3}$ et $\frac{1}{R^2}$ vt être négligeable car R gd

Approx dip. ordre de grd

⚠ il faut commenter la physique

Introduct° : c'est quoi dipôle, oscillant et ph ?

Structure d'onde localement plane

ou manipe

Calculs faisable avec $\vec{p}$ et $\dot{\vec{p}}$ expo c'est harmonique
Potentiel vecteur et rotat° exp.

Larmor + général que dans ce cas.

Diffusion de Mi