Leçon n°21 : Induction électromagnétique

Niveau	**CPGE**
Prérequis	Electrostatique et magnétostatique Electrocinétique des courants continus Mécanique Newtonienne
Biblio	
Plan	I. Induction de Newmann 1. Lois de l'induction de Newmann 2. Inductance et auto-inductance 3. Energie magnétique 4. Induction de Newman dans un circuit filiforme II. Induction de Lorentz 1. Changement de réferentiel en élec 2. Champ induit dans un circuit 3. Induction de Lorentz dans un circuit III. Application Rails de Laplace

Remarques :

Redémontrer rot E=-dB/dt?

Préciser convention générateur

Intro : Faraday
Sois manip au début (montrer variation de flux) sois rail de Laplace à la fin

Passer plus de temps sur inductance auto induction

Redonner définition de flux sur une spire.

Parler plus de rail de laplace. —> propre et bien comme il faut

Questions :

- Comment définir l'induction électromagnétique en une phrase?

Couplage physique entre le monde du magnétisme et de l'électricité.

- Donner quelque repères historiques de l'induction ?

1831 Faraday qui a fait le lien entre le magnétisme et l'electricité.

- Avant Faraday on en est où de l'électromag dans l'histoire des sciences ?

Gauss/ Ampère figures du 18e —> Electrostatique et magnétostatique.

- Maxwell?

Fin 19e

- Pourquoi il y a un moins dans la loi de Faraday ? A part le fait que ça modère.

C'est la convention générateur. e dans le même sens.

- Spire, champ magnétique, comment on peut le mesurer ? Tension qui apparaît aux deux bouts de la spire si on l'ouvre.

- Pourquoi ça s'appelle une force électromotrice alors que c'est une tension?

e force qu'il faut par unité de charge qu'il faut fournir pour faire un tour sur la spire.
F.dl —> Travail de la force
e=Int(v^Bdl)= int (Flap/q *dl)

- Inductance propre et auto inductance même chose ? Oui.

Courant d'un circuit va varier, donc va modifier le champ B, qui va modifier le courant du deuxième circuit.

- Valeur limite du coefficient mutuel ?

Son signe dépend de l'orientations relatives des circuits

- Application coefficient mutuelle et coefficient d'inductance dans la vie de tous les jours?

Transformateur
Puce Rfilé
Haut parleur

- Courant de Foucault pas d'échauffement ?

- Non mais en fait c'est des courants volumiques donc mieux chaleur mieux réparties

-

Oméga carré

- Dans un transfo les courants continues ne passent pas, c'est de l'induction.

- Comment on fait pour limiter les courants de Foucault dans le transfo?

On fait du feuilletage des ferromagnétiques.
Feuillet avec couche d'isolant. On peut démontrer que la puissance dissipée par courant de Foucault va être proportionnel au volume, à la fréquence et au courant coercitif.

- Dans quel mesure le changement de référentiel est valable ?

Valable dans l 'ARQS et dans la mécanique classique. Vitesse suffisamment faible pour négliger la relativité.

- Pourquoi en pratique on aura pas 100% de rendement?

Perte par effet joule.

- Loi de Fraday se généralise, cad ?

Champ variable+circuit en déplacement + deformable

- Roue de Barlow —> ça ne marche pas.

Circuit dfi/dt ça serait quoi : spire, mercure
Flux de B au cours du temps n'a pas l'air de changer quand la roue tourne le champ B ne tourne pas.
Attention piège : circuit change au cours du temps : segment OA jamais le même conducteur.

- Autre ex : solénoïde Qd on bouge d'une spire à l'autre on change de flux

Donc a chaque mouvement on devrait avoir de l'induction or ce n'est pas le cas.
Piège ; on change la topologie du circuit. Ce n'est plus le même circuit.

- Loi des flux a des limites :

Continuité de la vitesse
Conservation de la topologie

- ARQS : eq découplée d'électricité et de magnétisme

Si on rajoute MF : premier couplage

Ca c'est l'ARQS quand on néglige le déplacement (+dE/dt)

- Si on enlève le courant de déplacement qu'est ce qu'on ne peut plus décrire avec Maxwell ?

Temps de propagation entre un point et un autre du circuit.
On aura pas les courants de déplacement, on aura pas les équations de d'Alembert, on aura pas de propagation. —> intuition de Maxwell, qui rajoute le courant de déplacement pour retomber sur de d'Alembert et trouve que la v = la vitesse de la lumière et donc première fois qu'on fais le lien entre la lumière et OEM.

Leçon n°21 : Induction électromagnétique

Niveau : CPGE
Prérequis : - Electrostatique et magnétostatique (Equation de Maxwell, énergie électromagnétique, ARQS, Force de Laplace, Forces de Lorentz)

- Electrocinétique des courants continus (Loi d'ohm locale)
- Mécanique Newtonienne

Bibliographie : - *CAP Prépa Physique, Vincent Renvoisé, PERSON.*

- *Physique : 1ère-2ème année MP, Vincent Demery, J'intègre Dunod.*
- *Electromagnétisme 2, J.Renault et JP Faroux, J'intègre Dunod.*
- *Fiche Constance (cours Guy Ropartz Rennes 1)*
- https://studylibfr.com/doc/2244548/deux-circuits-filiformes

0. Introduction

Le phénomène d'induction est le nom donné à l'apparition de courants, dits induits, dans un circuit électrique sous l'effet d'un champ magnétique. On limitera notre étude au deux cas extrêmes suivant :

- Si le circuit est fixe et indéformable, le champ magnétique étant temporellement variable, on parle d'induction de Neumann.
- Si le circuit est mobile ou déformable, le champ magnétique étant stationnaire, on parle d'induction de Lorentz.

I. Induction de Neumann

1. Lois de l'induction de Neumann

- Loi de Faraday :

Expression de la force électromotrice induite dans un circuit (carré filiforme immobile) : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ où Φ est le flux de $\vec{B}$ à travers une surface orientée reposant sur le circuit (convention générateur).

Rq : La loi de Faraday est énoncée pour un circuit fixe. Nous verrons qu'elle est en réalité valable même si le circuit est mobile, son mouvement étant une des causes de variation temporelle du flux magnétique Φ .

- Loi de Lenz :

Les conséquences des phénomènes d'induction s'opposent aux phénomènes qui leur ont donné naissance.
La loi de modération de Lenz est implicitement contenue dans le signe « moins » de la loi de Faraday. En toute rigueur, il faudrait aussi tenir compte du flux magnétique crée par la spire elle-même. Et pas uniquement le champ extérieur.

- Champ électromoteur et force électromotrice de Neumann :

Le phénomène d'induction se traitre dans le cadre de **l'ARQS magnétique**, où le courant de déplacement est négligé.

Les équations de Maxwell donnent : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Définition des potentiels ($\vec{A}$,V) :

L'équation de Maxwell-flux :

$$div\, \vec{B} = 0$$

et la propriété précisée ci-dessus permettent de définir un champ vectoriel $\vec{A}$ (appelé potentiel vecteur) tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\, \vec{A}$$

Si l'on introduit cette relation dans l'équation de Maxwell-Faraday, il vient :

$$\overrightarrow{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\, \vec{A}) \qquad soit \qquad \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

Il existe donc au moins un champ scalaire que l'on notera – V (V est appelé potentiel scalaire) tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \overrightarrow{grad}\, (-V) = -\overrightarrow{grad}\, V \qquad soit \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Dans le cas du régime permanent dA/dt = 0, on retrouve l'expression classique E = -grad V

Le champ électromoteur est alors $\overrightarrow{E_m} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur magnétique défini par $\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\vec{A})$. Sa circulation porte le nom de force électromotrice (FEM) de Neumann : $e = \oint(\overrightarrow{E_m}.\overrightarrow{dl})$

Avec la force électromotrice (FEM) induite valant : $e_{A\to B} = \int_A^B -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\overrightarrow{dl}$

Cette force électromotrice a les mêmes effets qu'un générateur : elle crée les courants induits en fournissant du travail aux charges mobiles le long d'un circuit fermé.

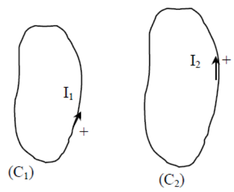
2. Inductance et auto-inductance

Biot - Savart

- Inductance propre d'un circuit filiforme fermé :

Le flux propre Φ_p, c'est-à-dire le flux du champ créé par le circuit à travers le circuit lui-même, s'exprime en fonction de l'inductance propre L (henry) du circuit : $\Phi_p = Li$

Soit deux circuits filiformes orientés C_1 et C_2. On note B_1 et B_2 les champs magnétiques créés respectivement par les courants i_1 et i_2. Chaque champ crée un flux magnétique à travers chaque circuit.

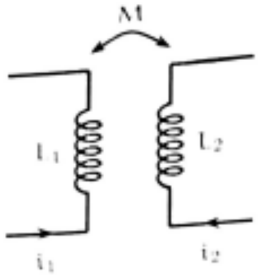


- Coefficient de mutuelle inductance :

Le flux $\Phi_{1\text{->}2}$ du champ magnétique créé par le circuit 1 à travers le circuit 2 est proportionnel à l'intensité i_1, on note $M_{1\text{->}2}$ le coefficient de proportionnalité : $\Phi_{1\text{->}2} = M_{1\text{->}2}\, i_1$. De même, on introduit le coefficient $M_{2\text{->}1}$.

On montre, en généralisant un raisonnement sur des circuits élémentaires à partir de la loi de Biot et Savart (la démo n'est pas au prog), que $M_{1\to2} = M_{2\to1}$. On note ce coefficient M : c'est le coefficient de mutuelle inductance entre les deux circuits. On a les relations : $\begin{cases}\Phi_{1\to2} = Mi_1 \\ \Phi_{2\to1} = Mi_2\end{cases}$

Il dépend uniquement de la géométrie de l'ensemble des deux circuits et s'exprime en henry. Son signe peut être quelconque : il dépend des orientations relatives des circuits.



3. Energie magnétique (Cas de deux circuits fixes)

La puissance électrique reçue par les deux circuits vaut :

$$P = u_1 I_1 + u_2 I_2$$

Soit :

$$P = \left(R_1 I_1^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2\right) + MI_1\frac{dI_2}{dt}\right) + \left(R_2 I_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_2 I_2^2\right) + MI_2\frac{dI_1}{dt}\right)$$

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_2 I_2^2\right) + M\frac{d}{dt}(I_1 I_2)$$

Finalement :

$$P = (R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2\right)$$

On reconnaît d'une part la puissance dissipée par effet Joule et on définit d'autre part :

$$E_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + MI_1 I_2$$

Ce qui conduit à introduire l'énergie magnétique stockée par un ensemble de deux circuits fixes par les phénomènes d'auto-inductance et de mutuelle inductance : $U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

Elle correspond à l'énergie qu'ont dû fournir les générateurs aux deux circuits pour créer le champ magnétique

4. Induction de Neumann dans les circuits non filiformes

Lorsque le conducteur est un bloc de métal plongé dans un champs magnétique temporellement variable, l'induction de Neumann se manifeste par des courants volumiques, appelés courants de Foucault.

II. Induction de Lorentz = Induction électromagnétique pour un circuit mobile dans un champ permanent

L'effet du champ magnétique sur le courant en mouvement équivaut à celui d'un générateur caractérisé par une FEM dite de Lorentz.

1. Changement de référentiel en électromagnétisme

Considérons une charge ponctuelle q en mouvement dans un laboratoire.

Démonstration :

- Le système 0 est un porteur de charge q, situé au point M, libre de se déplacer dans le circuit.
- Le référentiel 1 est celui du laboratoire, dans lequel une distribution *fixe et indéformable* de charges et de courants crée dans l'espace environnant un champ électromagnétique. On note $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$ la valeur de ce champ au point M dans le référentiel 1.
- Le référentiel 2 est en translation par rapport à 1. Il est centré sur le point M du circuit mobile par rapport au référentiel 1. On note $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$ le champ électromagnétique en M dans le référentiel 2.

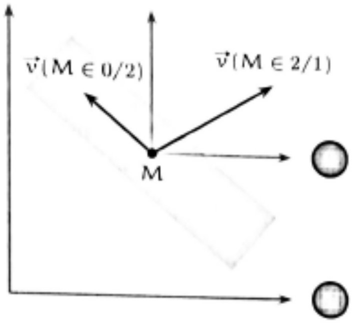


Fig. 14.3. **Changement de référentiel.** Le bloc de couleur est le conducteur en mouvement par rapport au référentiel 1. On note 2 le référentiel centré en M en translation par rapport à 1.

Traduisons l'invariance de la force de Lorentz généralisée ressentie par le porteur q situé en M :

$$q\left[\vec{E}_1 + \vec{v}(M \in 0/1) \wedge \vec{B}_1\right] = q\left[\vec{E}_2 + \vec{v}(M \in 0/2) \wedge \vec{B}_2\right]. \qquad (14.6)$$

Le référentiel 2 étant en translation par rapport à 1, la loi de composition newtonienne des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}(M \in 0/1) = \vec{v}(M \in 0/2) + \vec{v}(M \in 2/1). \qquad (14.7)$$

On combine les expressions (14.6) et (14.7) :

$$\vec{E}_1 + \vec{v}(M \in 2/1) \wedge \vec{B}_1 + \vec{v}(M \in 0/2) \wedge \vec{B}_1 = \vec{E}_2 + \vec{v}(M \in 0/2) \wedge \vec{B}_2. \qquad (14.8)$$

Cette égalité doit être vérifiée quelle que soit la vitesse du porteur de charge q par rapport au circuit, c'est-à-dire pour tout $\vec{v}(M \in 0/2)$. Par conséquent, les coefficients de $\vec{v}(M \in 0/2)$ sont égaux, donc $\vec{B}_2 = \vec{B}_1$. Ainsi, l'expression (14.8) se résume à $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}(M \in 2/1) \wedge \vec{B}_1$. Nous retrouvons les relations (14.5). La faille de ce raisonnement[2] réside dans le fait qu'il conduit à croire que la relation (14.5) est *toujours* valable alors que ce n'est le cas que dans l'AEQS magnétique.

Théorème : Transformation galiléenne du champ électromagnétique dans l'ARQS magnétique. D'après l'égalité des forces de Lorentz dans les différents référentiels, on en déduit l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans R en fonction du champ $(\vec{E}_s, \vec{B}_s)$ dans R_s et de la vitesse relative $\vec{v}$ de R par rapport à R_s au point considéré : $\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_s \\ \vec{E} = \vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B}_s \end{cases}$

2. Champ induit dans un circuit par son déplacement

Le théorème montre que le champ magnétique n'est pas modifié par changement de référentiel. Désormais, on notera simplement $\vec{B}$ sa valeur dans les deux réf. Il reste simplement $\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{v} \wedge \vec{B}_s$ dans le référentiel du conducteur en mouvement.

La composante du champ dans le circuit qui est induite par son déplacement, appelée aussi champ électromoteur de Lorentz, vaut $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}_s$
Ce champ a les mêmes effets qu'un champ électrique et s'ajoute aux champs électriques déjà existants.

- Force électromotrice induite :

Dans un circuit filiforme rigide et mobile dans R_s : obtenue en intégrant l'équation précédente :

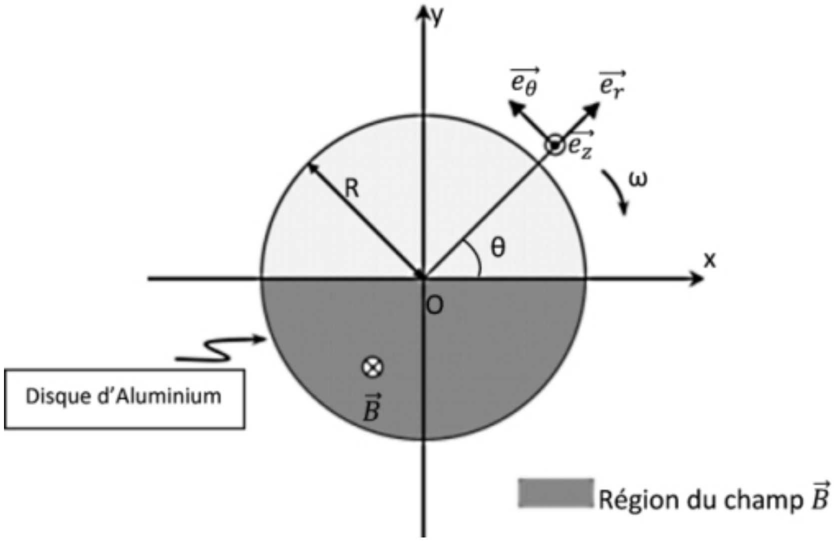
$$e_{A\to B} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}\,.$$

Alors on a : $V_A - V_B = R_{AB}.I_{AB} - e_{A\text{->}B}$ et pour tout circuit $RI = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$

Théorème : Généralité de la loi de Faraday (admis)

On peut montrer que, la loi de Faraday est généralisable : $e = -d\Phi/dt$
où $d\Phi$ représente la variation du flux du champ magnétique à travers le circuit lors du déplacement du circuit pendant l'intervalle de temps dt.

3. Induction de Lorentz dans un circuit non filiforme



Envisageons une roue métallique pivotant autour de l'axe (O, $\mathbf{e_z}$) à la vitesse angulaire ω. Supposons qu'une zone de cette roue soit baignée dans un champs magnétique $\mathbf{B} = B.\mathbf{e_z}$, indépendant du temps. Des courants de Foucaults vont se développer dans la roue (induction de Lorentz). Localement, un point de la roue possède une vitesse $\mathbf{v} = \omega r\, \mathbf{e_\theta}$. Les courants de Foucault, dans le référentiel de la roue, sont donnés par la loi d'Ohm locale : $\mathbf{j} = \gamma\, \mathbf{E_m} = \gamma.\ \omega r B\, \mathbf{e_r}$.
L'élément dτ parcouru par ce courant est soumis à une action de Laplace :
$d\mathbf{F_{Lap}} = \mathbf{j}\, d\tau \wedge \mathbf{B} = \gamma.\ \omega r B\, \mathbf{e_r}\, d\tau \wedge B.\mathbf{e_z} \Rightarrow d\mathbf{F_{Lap}}/d\tau = -\gamma.\ \omega r B^2\, \mathbf{e_\theta}$.

Cette force par unité de volume est dirigée selon $-\omega.\ \mathbf{e_\theta}$ et a donc tendance à freiner la roue, conformément à la loi de Lenz. Elle est mise à profit dans les ralentisseurs électromagnétiques de camion et de bus pour trois raisons :

- C'est une force volumique, donc l'échauffement au freinage est mieux réparti sur les freins conventionnels où il se fait unique par frottement entre les plaquettes et le disque.
- Il n'y a pas d'usure mécanique.
- Si jamais la roue bloque intempestivement, le freinage cesse automatiquement (il est proportionnel à ω) et la roue se débloque. Il n'y a donc aucun risque de dérapage.

III. Application

1. Exemple de rails de Laplace : principe des générateurs

Expérience : Rails de Laplace

Il s’agit de deux rails horizontaux en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, noté [CD] sur la figure 14,4 refermant le circuit. On note R la résistance du circuit. L’orientation du circuit est fixée arbitrairement.

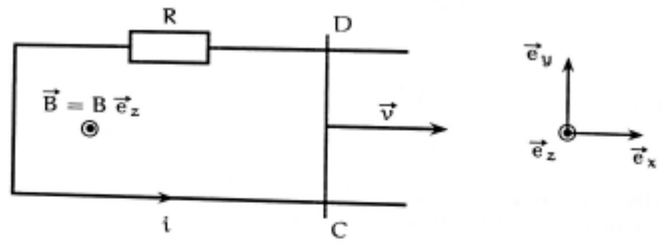


Fig. 14.4. Rails de Laplace en vue de dessus. Le dispositif baigne dans un champ magnétique uniforme créé par un aimant. La barre [CD], mobile, est mise en mouvement par un opérateur. Un galvanomètre, non représenté sur le schéma, mesure le courant i induit. L’orientation de l’intensité est arbitraire.

Un opérateur anime la barre [CD] d’une vitesse $\mathbf{v} = v\,\mathbf{e_x}$, qui devient ainsi une portion de circuit électrique en mouvement dans un champs magnétique extérieur indépendant du temps : c’est un cas d’induction de Lorentz.
En chaque point M de la barre [CD] règne un champ électromoteur $\mathbf{E_m} = \mathbf{v}(M,t) \wedge \mathbf{B}(M) = v\,\mathbf{e_x} \wedge B\,\mathbf{e_z} = -vB\,\mathbf{e_y}$. Le champ électromoteur est nul ailleurs. La FEM induite dans le circuit est obtenue en calculant la circulation de $\mathbf{E_m}$ le long du circuit.
Ici nous choisissions arbitrairement de calculer la circulation dans le sens choisi pour i :
e = intégrale fermé sur le circuit ($\mathbf{E_m}.\mathbf{dl}$) = intégrale de C à D ($-vB\,\mathbf{e_y}.dy\,\mathbf{e_y}$) = intégrale de 0 à l ($-vB\,dy$) = $-vBl$.

Le circuit électrique équivalent est donné sur la figure 14,5. Il conduit à l’équation électrique suivante : $i = e/R = -vBl/R$

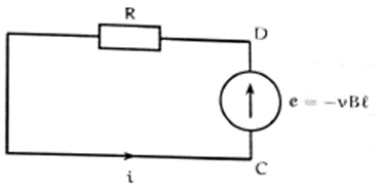


Fig. 14.5. Schéma électrique équivalent à la situation de la figure 14.4. La FEM induite est orientée selon le sens choisi pour calculer l’intégrale de la circulation du champ électromoteur.

La barre [CD] est parcourue par un courant électrique alors qu’elle est plongée dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à des actions de Laplace.
La résultante des actions de Laplace sur la barre [CD] est donc :
$\mathbf{F_{Lap}}$ = intégrale de C à D ($i\mathbf{dl} \wedge \mathbf{B}$) = intégrale de y=0 à l ($idy\,\mathbf{e_y} \wedge B\,\mathbf{e_z}$) = intégrale de y=0 à l ($-vBl/R*dy*B(+\mathbf{e_x})$) = $-vB^2l^2/R\,\mathbf{e_x}$
La force de Laplace tend à ralentir la barre quel que soit le signe de v. Ce résultat peut être prévu par la loi de Lenz. En effet, l’apparition d’une force de freinage négative est bien un effet modérateur tendant à s’opposer à la mise en mouvement de la barre.

Calculons la puissance mécanique fournie par la force de Laplace à la barre, dans le réf. des rails :
$P_{Lap} = \mathbf{F_{Lap}}.\mathbf{v} = -vB^2l^2/R\,\mathbf{e_x} \,.\, v\,\mathbf{e_x} = -v^2B^2l^2/R$
Par ailleurs, calculons la puissance électrique P_e fournie par la FEM induite au reste du circuit, cette FEM est orientée en convention générateur, donc :
$P_e = e*i = e^2/R = v^2B^2l^2/R$
Nous constatons que $P_{Lap} = -P_e$. Ce résultat est général pour l’induction de Lorentz.

Rq : On dit que la convention de puissance électromagnétique a un rendement de 100%. Cela est mis à profit dans les transducteurs électromécaniques (moteurs électriques et générateurs).
On parle de couplage électromécanique parfait.

X. Conclusion

« L'induction électromagnétique est un phénomène unique : l'induction de Lorentz et l'induction de Neumann en sont deux facettes qui dépendent du point de vue de l'observateur. »

Nous avons étudié deux cas extrêmes du phénomène de l'induction : l'induction de Neumann et de Lorentz. Ces deux phénomènes ont des applications dans les appareils utilisés dans la vie de tous les jours comme les plaques à induction avec les courants de foucault ; ils sont utilisés dans les moteurs électriques et les générateurs ou au contraire comme frein comme pour ceux des bus et des camions.

Leçon 21 : Induction électromagnétique

Rappels sur les équations de Maxwell et le potentiel vecteur :

Les équations de Maxwell sont des équations locales qui expriment des relations entre le champ EM $(\vec{E},\vec{B})$ et ses sources $(\rho,\vec{j})$:

$$div\ \vec{B} = 0 \qquad (Equation\ du\ flux\ magnétique - Flux)$$

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Gauss - MG)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Faraday - MF)$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (Equation\ de\ Maxwell - Ampère\ - MA)$$

Rappels mathématiques :

Un champ égal à un gradient a un rotationnel nul et un champ égal à un rotationnel a une divergence nulle :

$$\vec{e} = \overrightarrow{grad}\ \varphi \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{rot}\ \vec{e} = \vec{0}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{rot}\ \vec{a} \quad \Rightarrow \quad div\ \vec{b} = \vec{0}$$

Réciproquement, on peut montrer que :

- Si un champ vectoriel a un rotationnel nul, il existe au moins un champ scalaire dont il est le gradient.
- Si un champ vectoriel a une divergence nulle, il existe au moins un champ vectoriel dont il est le rotationnel.

- Equations de Maxwell dans un conducteur :

Finalement, dans le cadre de l'ARQS, le champ EM vérifie les équations de Maxwell « simplifiées » suivantes :

$$div\ \vec{B} = 0$$

$$div\ \vec{E} = 0$$

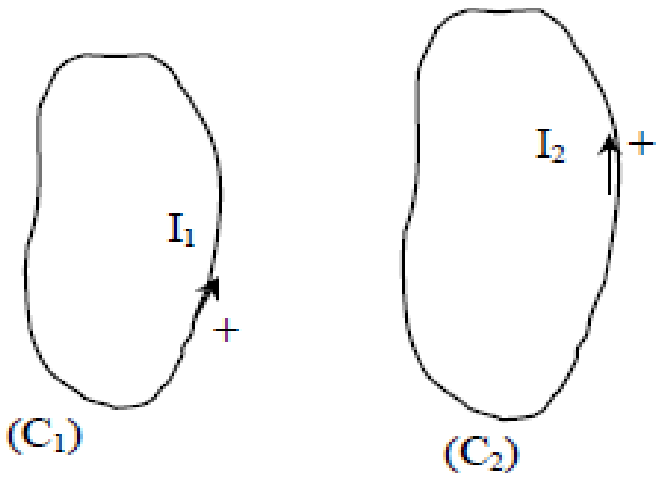
$$\overrightarrow{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma\ \vec{E}$$

Ainsi, dans un conducteur, l'ARQS ne diffère des régimes stationnaires que par la prise en compte des phénomènes d'induction (équation de Maxwell-Faraday).

1) Loi d'Ohm généralisée :

On considère deux circuits filiformes (C_1) et (C_2) en couplage mutuel. Alors, en l'absence d'autres sources de champs magnétiques :



$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \qquad et \qquad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Si les circuits sont rigides et immobiles dans le référentiel du laboratoire, les fém d'induction valent :

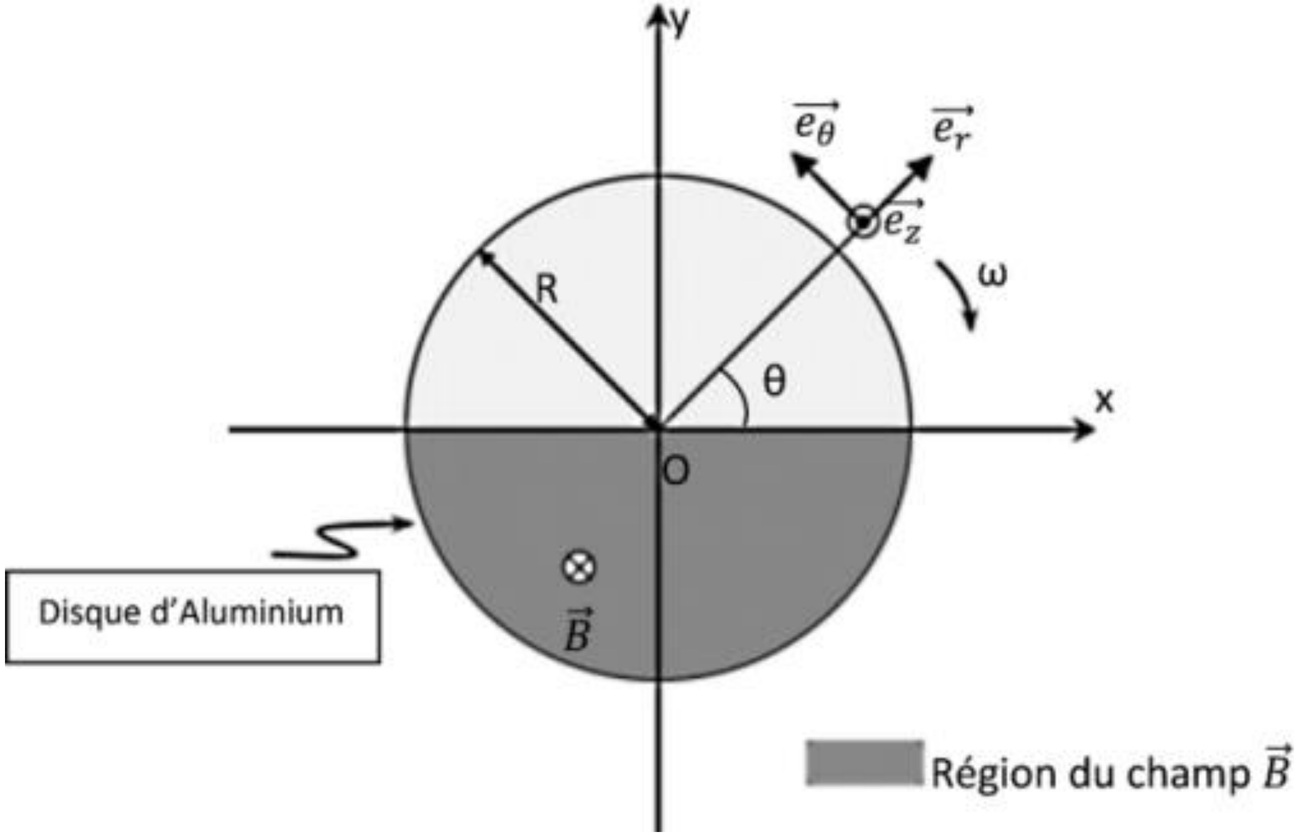
$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \qquad et \qquad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M\frac{dI_1}{dt}$$

(Remarque : si les deux circuits ne sont pas rigides, il faut tenir compte des dérivées $\frac{dL_1}{dt}$, $\frac{dL_2}{dt}$ et $\frac{dM}{dt}$).

La ddp aux bornes de chaque circuit est alors :

$$u_1 = R_1 I_1 - e_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} \qquad et \qquad u_2 = R_2 I_2 - e_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$$

Induction de Lorentz circuit non filiforme



Les rails de Laplace

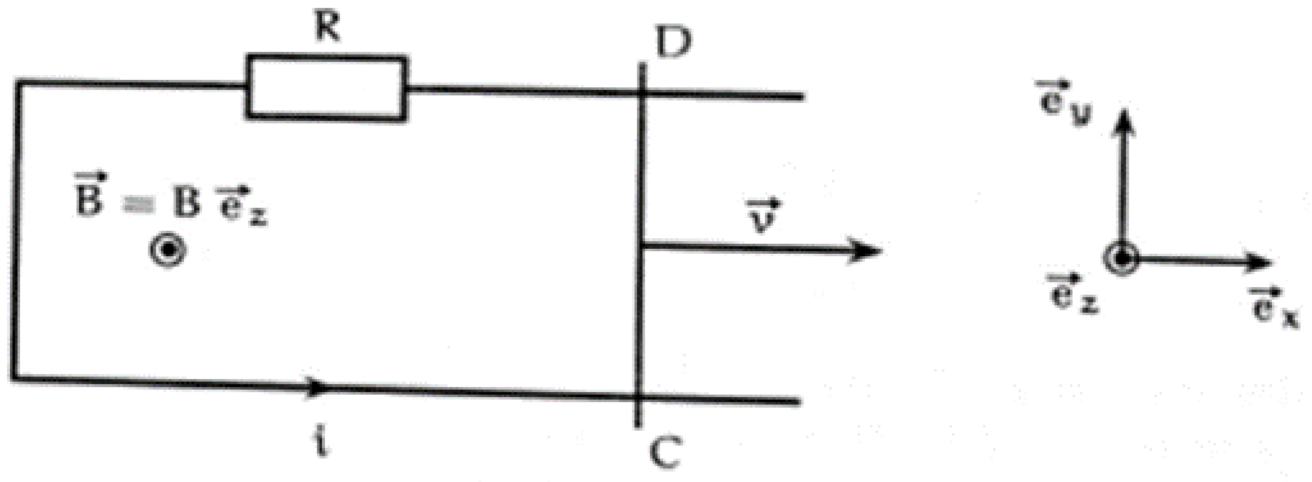
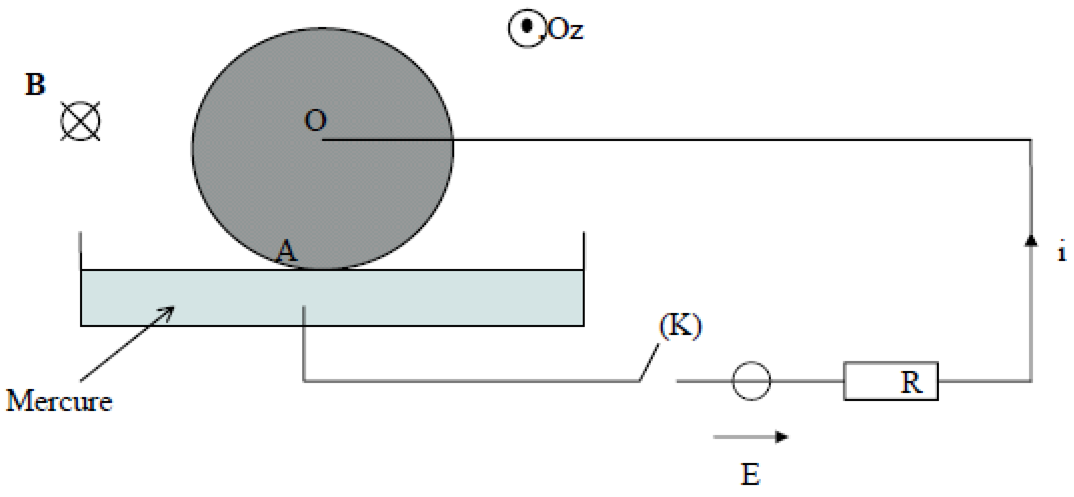


Fig. 14.4. Rails de Laplace en vue de dessus. Le dispositif baigne dans un champ magnétique uniforme créé par un aimant. La barre [CD], mobile, est mise en mouvement par un opérateur. Un galvanomètre, non représenté sur le schéma, mesure le courant i induit. L'orientation de l'intensité est arbitraire.

La roue de Barlow



Rayon du disque de centre O : a
Moment d’inertie : J
Champ magnétique : $\mathbf{B} = -B\mathbf{u_z}$
Vitesse angulaire de rotation du moteur : ω

Un élément de longueur $d\vec{\ell} = dr\,\vec{u}_r$ du conducteur filiforme fictif OA , centré en M, est soumis à la force de Laplace :

$$d\vec{F} = i\,dr\,\vec{u}_r \wedge (-B)\,\vec{u}_z = iB\,dr\,\vec{u}_\theta$$

Le moment élémentaire de cette force par rapport à l'axe (Oz) est :

$$d\Gamma_z = (r\,\vec{u}_r \wedge d\vec{F})\vec{u}_z = iB\,rdr$$

Le moment total par rapport à l'axe vaut donc :

$$\Gamma_z = \frac{1}{2}iBa^2$$

Le théorème scalaire du moment cinétique donne ensuite (dans le référentiel galiléen du laboratoire) :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}iBa^2 - f\omega$$

C'est l'équation différentielle (M) obtenue par les lois de la mécanique.

On va déterminer maintenant l'équation électrique du système.

La fém d'induction qui apparaît peut se calculer selon :

$$e_{OA} = \int_0^a \left(r\omega\,\vec{u}_\theta \wedge (-B\,\vec{u}_z)\right).dr\,\vec{u}_r = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

On peut également dire que, pour un transducteur électromécanique dans un champ magnétique stationnaire, la puissance des forces de Laplace et la puissance de la fém induite sont opposées. Par conséquent :

$$P_e = ei = -P_L = -\Gamma_z\omega$$

Soit :

$$e = -\frac{\Gamma_z\omega}{i} = -\frac{B\omega a^2}{2}$$

La loi des mailles dans le circuit électrique équivalent donne l'équation électrique (E) :

$$E - Ri + e = 0 \qquad soit \qquad Ri = E - \frac{Ba^2\omega}{2}$$

En éliminant i entre les équations (E) et (M), on obtient :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}Ba^2\frac{E - \frac{Ba^2\omega}{2}}{R} - f\omega$$

Soit :

$$J\frac{d\omega}{dt} + \left(f + \frac{B^2a^4}{4R}\right)\omega = \frac{Ba^2E}{2R}$$

La roue étant immobile à t = 0, il vient :

$$\omega = \omega_\ell(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \qquad avec \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{f}{J} + \frac{B^2a^4}{4RJ} \qquad et \qquad \omega_\ell = \frac{2Ba^2E}{4Rf + B^2a^4}$$

Le moteur atteint une vitesse angulaire limite ω_ℓ au bout d'un intervalle de temps de l'ordre de τ.

On obtient l'intensité par :

$$i = \frac{1}{R}(E - \frac{Ba^2\omega}{2})$$

Soit :

$$i(t) = \frac{4Ef}{B^2a^4 + 4Rf} + \frac{B^2a^4E}{B^2a^4R + 4R^2f}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On constate que le courant est discontinu à l'instant t = 0 puisque $i(0^+) = \frac{E}{R}$ alors que $i(0^-) = 0$.

Il atteint une valeur permanente :

$$i_\ell = \frac{4Ef}{B^2a^4 + 4Rf}$$

On peut effectuer un bilan énergétique du dispositif : pour cela, on multiplie l'équation (M) par ω et l'équation (E) par i :

$$J\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}i\omega Ba^2 - f\omega^2 \quad ; \quad Ri^2 = Ei - \frac{Ba^2\omega i}{2}$$

Soit :

$$Ei = Ri^2 + f\omega^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J\omega^2\right)$$

La puissance fournie par le générateur sert à augmenter l'énergie cinétique du disque, une partie étant dissipée sous forme de frottements mécaniques et d'effet Joule.

En régime permanent établi, ce bilan se simplifie sous la forme :

$$Ei_\ell = Ri_\ell^2 + f\omega_\ell^2$$

La puissance du générateur compense entièrement les pertes.