Leçon n°29 : OEM dans les milieux conducteurs

Niveau	Licence
Prérequis	Conductivité statique OEM dans le vide OEM dans les milieux dispersifs plasma
Biblio	Cap prépa PC ou MP : I) II) J'intègre PC : III) Garing, EM : compléments Latour, Leçons d'EM : conseils généraux
Plan	I. <u>Modélisation du conducteur</u> 1. Modèle de Drude 2. Electroneutralité 3. ARQS II. <u>Etude à basse fréquence : effet de plasma</u> 1. Equation de diffusion : atténuation 2. Limite du conducteur parfait III. <u>Etude à haute fréquence : plasma</u> 1. Rappel de la relation de dispersion 2. Transparence/evanescence 3. Difference avec le plasma simple

II) 2.

	Gamma (S/m)	n(e-/m^3)	T(s)	w(rd/s)
Cu	5.96e7	8,5E+28	2,5E-14	1,65E-16
Al	3,77E+07	1,8E+29	7E-14	2,4E-16

LP 29 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Niveau : Licence

PR : - conductivité statique
- OEM dans le vide
- OEM dans les milieux dispersifs, plasma

Intro :

I. Modélisation du conducteur

1. Modèle de Drude

Rappel : e- libres mais ~~l'attraction~~ interaction modélisé $\vec{F} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$

$\Rightarrow \vec{j} = nq\vec{v} = \gamma_0 \vec{E}$ $\quad \gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ $\quad [\gamma_0] = S/m \sim 10^7 \Rightarrow \tau \sim 10^{-14}s$.

n = densité.

soumis à un champ EM variable :

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{j\omega t}$ idem pour $\underline{\vec{B}}$ et $\underline{\vec{v}}$.

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} - e(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

or $\|\vec{B}\| \simeq \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ $\Rightarrow \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{v}\wedge\vec{B}\|} \sim \frac{c}{v} \gg 1$ si non relativiste

$(mi\omega + \frac{m}{\tau})\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-e\tau}{m}\frac{1}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$

$\underline{\vec{j}} = n\underline{v}q = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}\underline{\vec{E}}$ Loi d'ohm locale.

2. Electroneutralité

Initialement $(t=0) \Rightarrow \rho = 0$ en tout points

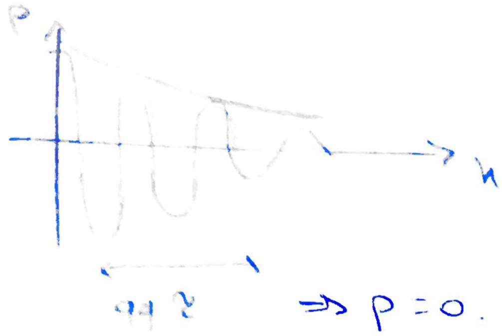
$\rho(t=0^+) = \rho_0$.

Conservations de la charge : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\underline{\vec{j}} = 0 \Leftrightarrow \left(i\omega + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\right)\rho = 0$

$\Leftrightarrow \left(i\omega + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0(1+i\omega\tau)}\right)\underline{\rho} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} + i\omega - i^2\omega^2\tau\right)\underline{\rho} = 0$

Réel : $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}\rho = 0. \Rightarrow \rho'' + \frac{\omega_0}{Q}\rho' + \omega_0^2\rho = 0.$

avec $Q = \omega_0\tau = 100 > \frac{1}{2}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0\tau}} = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} = \omega_p$ (pulsat° plasma) $= 10^{-16}$ tableau



$\Rightarrow \rho = 0.$

$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \omega_{cn} = 10^{14}$ rad/s.

3. ARQS

$\vec{Rot}(\vec B) = \mu_0\left(\vec j + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec E}{\partial t}\right) = \mu_0 \vec j$

↳ courant de déplacement

↳ courant de contruction.

$|\vec{\underline{j}}| \gg |\varepsilon_0 \frac{\partial \vec E}{\partial t}|$ et $\frac{\gamma_0}{|1+i\omega\tau|} = \varepsilon_0 \omega_p$ $\qquad \omega_p = \omega_{limite}$

Supp $\omega_p \tau \ll 1 \Rightarrow \omega_p \ll \frac{1}{10^{-14}}$ alors $\omega_p = \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \simeq 10^{17}$!

Supp $\omega_p \tau \gg 1 \Rightarrow \frac{\gamma_0}{\omega_p \tau} = \varepsilon_0 \omega_p \Rightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \tau}} = \omega_{p\ell} \simeq 10^{16}$

Conclusion : ARQS valable si $\omega \ll \omega_p \simeq 10^{16}$

II. Étude à basse fréquence : effet de peau

Ici $\omega \ll \omega_{cn} = \frac{1}{\tau}$ et $\omega \ll \omega_p$

Énergie $\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = \langle \vec j \cdot \vec E \rangle = \gamma_0 \langle |\vec E| \rangle$ effet Joule, dispersif

1. Équation de diffusion : Atténuation

$\mathrm{div}\,\vec E = 0 \qquad \vec{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\vec B = 0 \qquad \vec{rot}\,\vec B = \mu_0 \vec j$

$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec E) = \vec{grad}(\mathrm{div}\,\vec E) - \Delta \vec E \Leftrightarrow \vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec B}{\partial t}\right) = -\Delta \vec E$

$\Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec j) = \Delta \vec E \Leftrightarrow \Delta \vec E = \gamma_0 \mu_0 \frac{\partial \vec E}{\partial t}$

Diffusion : vide | conducteur → z

$\vec{E}(z,t) = \underline{E_0} \cdot e^{i(\omega t - \underline{k} z)} \vec{e_x}$

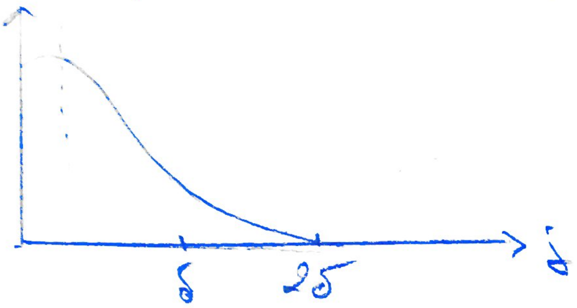
$\vec{E}(z,t) = \underline{E_0} \vec{e_x} e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}$

$\underline{k}^2 = \gamma_0 \mu_0 i \omega$

$\underline{k} = \sqrt{\frac{\gamma_0 \mu_0 \omega}{2}}(1+i) = \frac{1+i}{\delta}$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma_0 \mu_0 \omega}}$

Onde plane monochromatique, pas progressive



Champ $\vec{E}$ confiné sur une épaisseur δ, dite de peau

Rq : $\delta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\gamma_0 \mu_0 \omega}}$ Ordre grandeur pour cuivre :
20 kHz → $\delta \simeq 1$ mm
1 MHz → $\delta \simeq 15\,\mu$m.

Interprétation inductive

2. Limite du conducteur parfait

Conducteur dit parfait si $\gamma_0 \to +\infty \Rightarrow \delta \to 0$

Champ, courant sont uniquement en surface.

III. Etude à hautes fréquences - plasma

Ici : $\omega \gg \frac{1}{\tau} = 10^{-14}$ s $\qquad \underline{\gamma} = -i \frac{\gamma_0}{m\omega}$

Energie : $\vec{\underline{j}}$ et $\underline{\vec{E}}$ sont en quadrature de phase.

$\left\langle \frac{dP}{d\tau} \right\rangle = 0$ pas d'énergie cédée.

1. Rappel de la relation de dispersion

$k^2 = \frac{1}{c^2}(\omega^2 - \omega_p^2)$ dispersif

2. Transparence et évanescence

* $\omega > \omega_p$ $\quad k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$ transparent, dispersif.

* $\omega < \omega_p$: $k = \frac{i}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \frac{i}{\delta}$

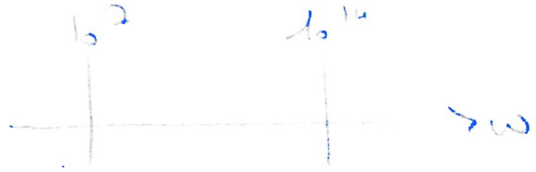
$\vec{E} = E_0 \, e^{-\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t - \varphi)\, \vec{e}_x$ → onde stationnaire et évanescente

3. Différence avec un plasma simple

⚠ Pour un plasma peu dense, $n \simeq 10^{12}\, e^-/m^3$

$\Rightarrow \omega_{p_{plasma}} = 10^7 \neq 10^{14}$

voir programme pour ω/ω_p



Rq partie III rappel sur les plasma

Question

Autre cours ? Modèle de Drude donné directe avec exemple

Intro : approfondir les cours

fil conducteur ?

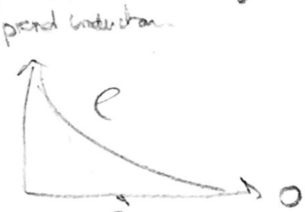
Onde plasma → créat° d'une onde Eg à cause des ≠ de charge.

$\vec{k}\ \varepsilon_p\ \vec{E} = 0$

Électroneutralité → on triche on suppo basse fréq : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ | $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma\,\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$

charge se repousse sur la surface



$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\rho$

$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sim 10^{-19}\,s$

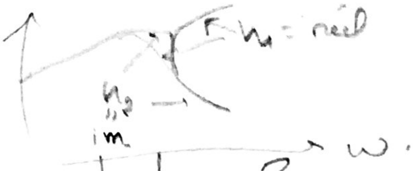
$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\frac{\sigma_0/\tau}{\frac{1}{\tau} + i\omega} + i\varepsilon_0\omega\right)\vec{E}$

1.2 et 1.3 → + rapide avec ça

$\frac{1}{\tau} =$ $\omega_p =$

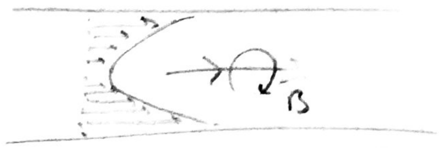
ω : 1 — $\frac{1}{\tau}$ — 2 — ω_p — 3

discuter ensuite des 3 parties → dessin



Lien entre ce cours et effet de peau dans un conducteur ?

dessin et OG



Câble ?

$R = \frac{L}{\sigma S}$ $\Sigma = \frac{\sigma S}{L}$

gros centre non utilisé

petit × bcp totalité utilisée

Onp $\vec{B}$ pousse vers ext