LP 24 - Ondes progressives et ondes stationnaires

Niveau : L1-L2

Prérequis :

- Notion d'ondes(lycée)
- Mécanique (Lois de Newton, Tension d'une corde)
- Electrocinétique
- Mathématiques (Équations différentielles, développement limités)

Biblio:

Plan :

I. Propagation d'ondes et équations de d'Alembert
    A. Cas de la corde vibrante
    B. Rappel : Cas du câble coaxial
    C. Equation de d'Alembert générale
II. Solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle : ondes progressives
    A. Ondes progressives
    B. Cas des ondes progressives planes harmoniques
III. Ondes stationnaires
    A. Forme des ondes stationnaires
    B. Propriétés des ondes stationnaires
    C. Régimes forcé d'une corde fixée à ses deux extrémités

NOTES

Introduction

→ effet doppler ...

Phénomènes unique pour les ondes

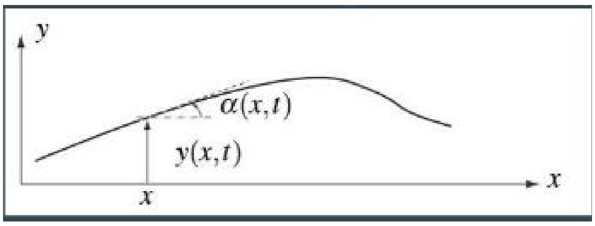
I. Propagation d'ondes et équations de d'Alembert

1) Cas de la corde vibrante

Vibration de cordes de guitares (vidéo Youtube → quelqu'un joue a la guitare on observe la vibration des cordes)

a. Modèle et hypothèse

Corde de masse linéique μ, horizontale au repos et tension T_0. On la perturbe



On néglige l'effet du poids :

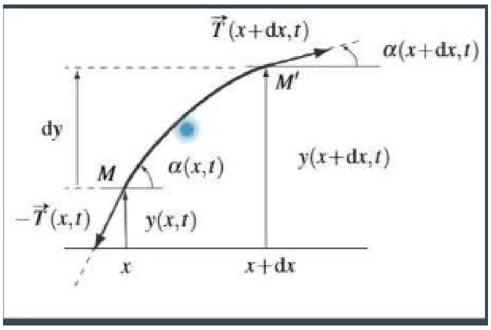
→ Guitare classique : T_0 = 100 N, P = 0,01 H donc c'est justifié !

On se place dans le cas de petites perturbations (approximations) :

$$|y(x,t)| \ll L$$
$$|\alpha(x,t)| \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| = |\tan\alpha| \ll 1$$

→ On ne gardera que les ordres un en alpha

b) Mise en équation



PFD sur l'élément MM' :

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.\vec{u_y} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x)$$

ce qui donne :

$$0 = (Tcos\alpha)(x+dx,t) - (Tcos\alpha)(x,t)$$

$$dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (Tsin\alpha)(x+dx,t) - (Tsin\alpha)(x,t)$$

Attention → pas à l'échelle pour le dessin de la corde !
On a uniquement les tension à chacune des extrémité
dy << dx donc on considère que m = μdxdy = μ dx uniquement

$$0 = T(x+dx,t) - T(x,t) = \frac{\partial T}{\partial x}dx$$

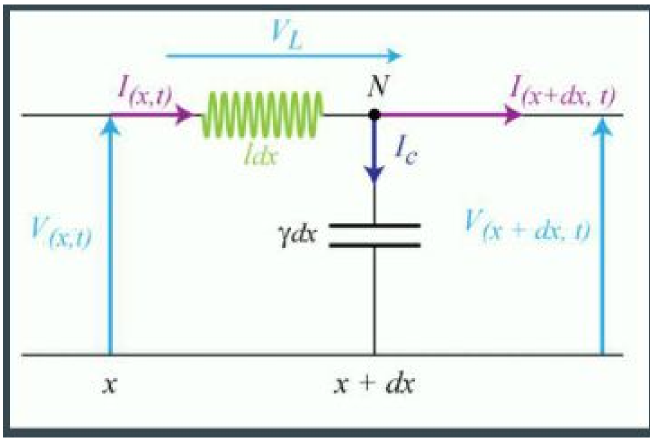
$$\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T\alpha}{\partial x}dx$$

Or on ne garde que le premier ordre

$$T(x,t) = T_0 + T_1(x,t) \text{ où } T_1(x,t) \ll T_0, \longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_\ell}}.$$

c à la dimension d'une vitesse

2) Rappel : Cas du câble coaxial



$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\gamma l}}$$

Et même chose pour I !

3) Equation de d'Alembert générale

Equation de d'Alembert pour une grandeur X :

$$\boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}$$

L'équation de d'Alembert (ou équation d'onde) traduit un phénomène de propagation.

Situation	Grandeurs couplées	Expression de c	ODG
Corde	T, y	$\sqrt{(T0/\mu)}$	350 m/s
Cable Coaxial	U, I	$1/\sqrt{(\gamma L)}$	2.10^8 m/s

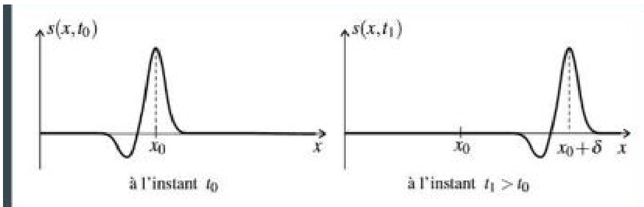
On trouve des vitesses bien différentes. Il y a aussi ondes électro, … où est utilisé d'Alembert.

II. Solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle : ondes progressives

Nous avons une équation, il nous faut maintenant des solutions. Dans cette partie, nous allons développer la notion d'onde progressive, et nous vérifierons que ces dernières sont bien solution des équations de d'Alembert.

1) Ondes progressives

Une onde est dite progressive si elle correspond à la propagation dans l'espace et au cours du temps d'une perturbation (variation d'une grandeur physique). Cette propagation s'effectue sans transport de matière mais avec transport d'énergie.



$$s(x,t_0) = s(x+\delta, t_1) = s(x + c(t_1 - t_0), t_1)$$

$$s(x,t) = s(x - ct, 0) = f(x - ct)$$

Propagation dans le sens de x croissants.

On s'intéresse uniquement à un exemple à une dimension → simplifié le problème !
On peut remplacer dx par cdt.
On choisit une nouvelle origine des temps et des positions.
On trouve la forme générale d'une onde progressive.
On trouve un - pour une onde allant dans l'autre sens.

Nos ondes progressives de la forme f(x-ct)=f(u) sont elles bien solution de l'équation de d'Alembert ?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \; puis \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial u} \; puis \; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

On retrouve bien : $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
Notre onde progressive est une solution de l'équation de d'Alembert.

2) Cas des ondes progressives planes harmoniques (OPPH)

Les OPPH sont des ondes progressives particulières, de la forme :

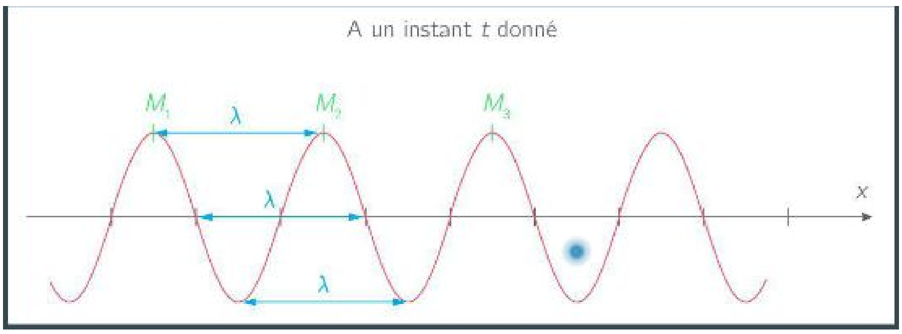
$$s(x,t) = s_0 cos(\omega t - kx + \Phi)$$

Pour vérifier l'équation de d'Alembert, on doit avoir : k = w/c
C'est ce qu'on appelle une relation de dispersion.

- k = 2pi/lambda est le nombre d'onde et w = 2pif = 2pi/T est la pulsation.

s0 → amplitude
w → la pulsation
phi → la phase

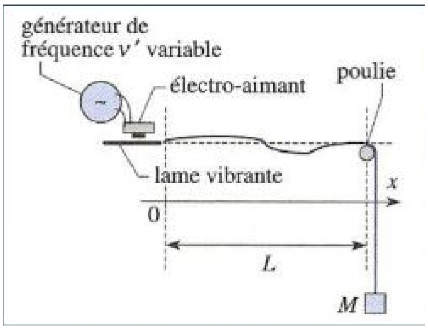
Rappel du lycée :



Les OPPH ont peu de réalité physique seule, mais on trouve souvent des sommes d'OPPH, qui sont aussi solutions de l'équation de d'Alembert puisqu'elle est linéaire ...
Périodicité spatial de lambda
Dans la nature → somme de OPPH

III. Ondes stationnaires
On peut observer un autre type d'onde, qui ne semble pas se propager :
Corde de Melde
Dispositif (youtube)
Observation → on observe des endroit qui ne vibre pas → onde stationnaire

1) Forme des ondes stationnaires



- Ondes sinusoïdale créée en 0.
- Rencontre la poulie en x=L → Réflexion (totale)

$$s(x,t) = s_i(x,t) + s_r(x,t) = s_0 cos(\omega t - kx) + s_0 cos(\omega t + kx) = 2s_0 cos(\omega t) cos(kx)$$

Définition d'une onde stationnaire → formes s(x,t) = f(x)g(t) (découplage).
Avec d'Alembert :

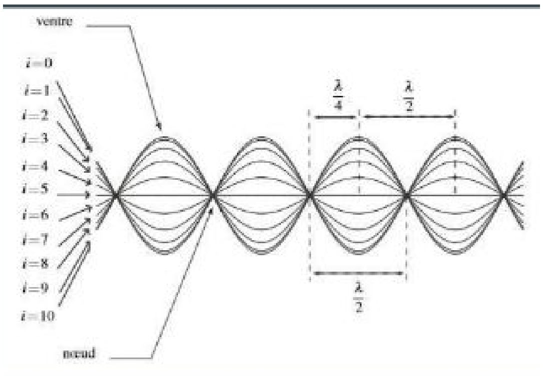
$$s(x,t) = s_0 cos(kx + \Phi) cos(\omega t + \Psi) \ avec \ k = \frac{\omega}{c}$$

fréquence w ne change pas
k ne change pas car c ne change pas
découplage entre le temps et l'espace
→ onde stationnaire

2) Propriétés des ondes stationnaires

- Les ondes stationnaires ne transportent pas d'énergie.
- Points immobiles : noeuds → kx_n + phi = (n+½) pi, donc distant de lambda/2.
- Amplitude max : Ventre → kx_m + phi = m*pi, donc distant de lambda/2 aussi.

Représentation avec t_i = T*i/20 :



On observe la vibration d'une corde découpé en 20 images

La corde de Melde ne vibre pas pour toutes les fréquences.

3) Régimes forcé d'une corde fixée à ses deux extrémités

Pour la corde de Melde, on a passé un détail sous silence : la corde ne se met effectivement à vibrer que pour quelques fréquences données. Pour chacune de ces fréquences, le nombre de noeuds est différent. Expliquons cela.

On prend une corde de longueur L, fixée à ces deux extrémités; En réalité, 2 conditions limites :

$$y(0,t) = 0 \ et \ y(L,t) = 0 \ \forall t$$

On considère une onde stationnaire, et on lui impose ces conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(0,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(\psi) = 0 \\ y(L,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\psi) = 0 \\ \cos(kL + \psi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi = \dfrac{\pi}{2} \\ \sin(kL) = 0 \quad \text{donc} \quad kL = n\pi, \quad n \text{ entier.} \end{cases}$$

C'est un noeud donc ne dépend pas du temps.

Au final on obtient une condition sur k et donc sur l'onde elle même :

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \ , \ \omega_n = k_n c = n\frac{\pi c}{L} \ soit \ f_n = n\frac{c}{2L}$$

On a donc un ensemble de fréquences (modes) possibles, avec une fréquence fondamentale f_0 = c/2L et des harmoniques qui sont les multiples de f_0.

En jouant sur L, on peut choisir quelles fréquences peuvent exister : c'est le principe des instruments à cordes.

Conclusion

- Equation de d'Alembert : caractéristique des ondes
- 2 types d'ondes solutions : progressive et stationnaire.

- Reste à voir des exemples plus en détails : ondes acoustiques et ondes EM

TP possible : les étudiants doivent mettre en place un protocole pour mesurer la tension au repos d'une corde de guitare pour faire un Mi à vide. (Principe de l'accordage).

Questions :

- Est ce que la condition limite de réflexion totale est bien ?

w est fixé → par le vibeur → cela fixe k
s = 0 en L
Cela ne bouge pas donc les amplitudes s_i et s_r vont être fixées par une relation entre elles mais elles ne sont pas égales.
Le fait qu'elles soient égales répond à une autre condition limite.

- Les ondes stationnaires ne transportent pas d'énergie ?

Ne propage pas d'énergie !
Elle ne se déplace pas → la puissance moyenne temporel est nulle.

Mode pour le câble coaxial uniquement pour TEM car on n'aboutit pas à la même équation autrement ! On ne peut pas définir de tension donc l'équation est différente.
On a un champs E radial. On se sert du fait que la circulation du champ électrique.

Remarques :
On ne voit pas assez le rapport entre la condition limite et le caractère de réflexion !
III.3) Régime forcé → Résonance, Hors leçon !
Il manque de configuration sur l'énergie, les aspects énergétiques.

I°) Corde de Melde.

1°) Mise en equations

2°) generalité sur eq d'onde. (linearité; renversement de tps; etc..)

3°) Solution generale $f(x-ct)+g(x+ct)$

II°) onde progressives

1°) Solution monochromatique.

2°) Discussion energetique

III°) onde Stationnaires

1°) CL. corde pincé .. corde libre

2°) Bilan energetique

3°) CL generale. impedance accoustique

manque intro → on a vu plein de types d'ondes et on s'intéresse à l'effet de la propagation et on regardera les conditions limites.
On se limite à un type d'onde mais cela se généralise.
Linéarité
→ solution inverse dans le temps marche aussi ??
Linéaire → donc une fréquence puis plusieurs, cos(wt-kx)

cf note du prof pour la partie énergétique
impédance acoustique et conditions aux limites
→ corde pincé ou libre
Observation on trouve des conditions limites différentes.

Pas d'énergie qui se propage

Vidéo :
http://www.sup-numerique.gouv.fr/pid33288/catalogue-ressources-pour-auto-formation.html?ressourceUrl=http%3A%2F%2Fwww.sup-numerique.gouv.fr%2Fressources-pedagogiques%2Fnotice%2Fview%2Foai%25253Acanal-u.fr%25253A59
Différent exemple d'onde qui se propage et se réfléchit

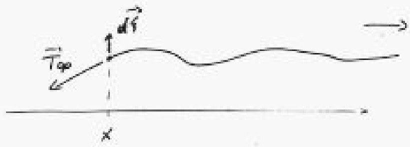
Impédance infini → pincé
Impédance nul → libre

Un vibreur = corde pincé

Livre : Vibrations, propagation, diffusion. Soutif, Notes J.C. :

II) 2.)

Bilan energetique



* Un operateur exerce $\vec{T}_{op}$

Son travail $\delta W_{op} = \vec{T}_{op} \cdot \vec{d\xi}$

$= -T_y \, d\xi$

$$\begin{cases} T_y = T_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \\ d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \, dt \end{cases}$$

$\delta W_{op} = -T_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} \, dt$ [Valable progressif / stationnaire]

$\boxed{Si}$ solution $\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$ [Solution ondes progressives]

$\delta W_{op} = + T_0 \xi_0^2 \omega k \sin^2(\omega t - kx) \, dt$

Et le travail fourni pendant une periode.

$\int_0^T \delta W_{op} = \dfrac{T}{2} \times \xi_0^2 \omega k T_0$

* Energie / unite de longueur

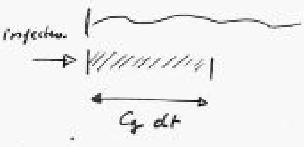
$e_c = \dfrac{1}{2} \mu \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \mu \, \xi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$

$e_p = \dfrac{1}{2} T_0 \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \dfrac{1}{2} T_0 \, \xi_0^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx)$

$\langle e_c + e_p \rangle_T = \dfrac{1}{4} \mu \, \xi_0^2 \omega^2 + \dfrac{1}{4} T_0 \, \xi_0^2 k^2$

$= \dfrac{1}{2} T_0 \, \xi_0^2 k^2$

* Bilan d'energie (sur une periode ou pendant dt)

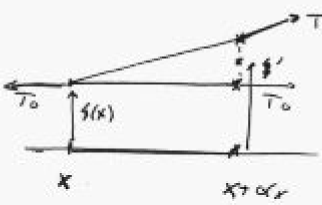


$\delta W_{op} = (e_c + e_p) \, c_g \, dt$

$T_0 \, \xi_0^2 \omega k \sin^2(\omega t - kx) \, dt = T_0 \, \xi_0^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx) \, c_g \, dt$

$\omega / k = c_g$

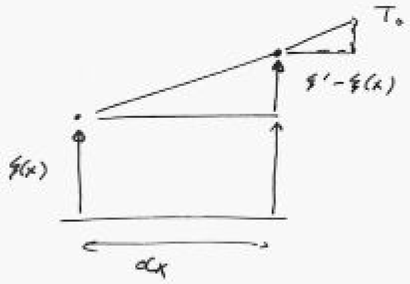
Energie potentielle (Permet de justifier la forme de Ep)



$$\delta W = \int_{\xi' = \xi(x)}^{\xi' = \xi(x+dx)} T_0 \, \frac{(\xi' - \xi(x))}{dx} \, d\xi'$$

$$= \frac{T_0}{dx} \left[\frac{\xi' - \xi(x)}{2} \right]^2 \Bigg|_{\xi(x)}^{\xi(x+dx)}$$

$$= \frac{T_0}{2\,dx} \left(\xi(x+dx) - \xi(x) \right)^2$$



$$\delta W = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\boxed{e_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2}$$

$$e_c = \frac{1}{dx} \frac{1}{2} \mu \, dx \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2$$

III.) 1.) Corde pincée / Libre

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad c^2 = T_0 / \mu$$

. Solution generale $\quad \xi = \Xi_+ \, e^{j(\omega t - kx)} + \xi^- \, e^{j(\omega t + kx)}$

. CL pincée $\quad \xi(x=0) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \xi^+ + \xi^- = 0$

$$\Rightarrow \quad \xi = \Xi_+ \left[e^{j(\omega t - kx)} - e^{j(\omega t + kx)} \right]$$
$$= \Xi_+ \, e^{j\omega t} \, 2j \sin(kx)$$

Solution reelle. $\quad \boxed{\xi = \Xi_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx)}$

* Description $\qquad$ noeuds ; ventre ; etc..

* 2 ondes meme amplitude ; etc..

CL Corde libre = pas de force $\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$

$$\boxed{\xi = \xi_0 \sin(\omega t + \varphi)\cos(kx)}$$

III) 2.) Ondes stationnaires : aspects energetique

$$\delta W_{op} = - T_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} dt \qquad \xi = \xi_0 \sin(\omega t)\sin(kx)$$

$$= - T_0 \xi_0^2 \sin(\omega t)\, k \cos(kx)\, \cos(\omega t)\, \omega \sin(kx)$$

$$= - T_0 \xi_0^2 \omega k \frac{1}{4} \sin(2\omega t) \sin(2kx)$$

$\int_{\text{Periode}} \delta W_{op}\, dt = 0$ $\Rightarrow$ pas d'energie fournie en moyenne

$\Rightarrow$ pas de propagation.