Leçon n°41 : Effet tunnel- Application

Niveau	**Licence**
Prérequis	Notion de fonction d'ondes Equation de Schrödinger Puits quantiques fini
Biblio	J'intègre PC/PC* BUP 699 microscope BUP 734 Radioactivité alpha Cohen Tannoudji
Plan	I. <u>Effet tunnel</u> 1. Position du problème 2. Probabilité de transmission 3. Approximation de la barrière épaisse II. <u>La radioactivité alpha</u> 1. Résultats expérimentaux 2. Modèle de Gamov III. <u>Le microscope à effet tunnel</u> 1. Fonctionnement 2. Résolution

Questions :

- Comment ça s'insère dans un cours de mécanique quantique ? C'est quoi le message de cette leçon ? En quoi c'est une nouveauté ?

Quantification des énergies
Puits finies pour les ondes évanescentes et voir que la probe de présence n'est pas que dans le puit.

- Pb complètement déconnecté au confinement en fait ?

Pas besoin d'utiliser la quantification des énergies.

- 20 % du courant qui passe où ? Par les atomes de la couche supérieur

- Comment fonctionne les mémoires flash ?

Transistor
PNP
Isolant
Grille
Isolant
Matériau conducteur (fil/grille)

Si on met des électrons dans la grille flottante on repousse les électrons de PNP et on bloque le transistor
Effet tunnel se situe dans la couche isolant grille isolant

Capacité de stockage ;
Dépend exponentiellement de l'intensité
Si on met pas de tension électron bloqué
Permet de localisé ou non un électron dans la grille flottante : on lit l'info grâce au courant qui passe pas ou non (si le courant passe pas c'est que la grille est occupée par l'électron) s'il passe c'est que la grille n'est pas occupée.
Exploite variation sur plusieurs ordres de grandeur du facteur de transmission en fonction de la tension.

- Part avec énergie supérieur au puit ?

Classiquement ?
Elle passe au dessus du puit
Quantiquement ?
Existence d'une réflexion à l'interface

- Pourquoi fi et fi' sont continues ?

Schrodinger dérivée seconde du potentiel. Pour que fi '' existe il faut qu'il y ai un fi' et fi continue.

Quand on introduit une barrière de potentiel on pense montage, champ électrique constant.
Barrière de potentiel discontinu (en escalier)
Forme eq de schrodinger justifie le fait que l'on puisse approximer le potentiel morceau par morceau
Condition de continuité comme fi et fi'
Soit le dire comme un rappel soit la redémontrer —> à ne pas mettre sous le tapis
3/4 minutes (donner les hop de travail —> mail qu'il va nous envoyer Jerome LAMBERT)
On résout eq de Schrodinger morceau par morceau.

4 eq a 4 inconnues —> Pas de contrainte sur l'energie
5 equations 4 inconnues. Sy surcontraint. Il faut dire que l'energie est compatible avec une des 4 eq

- Que se passe il lorsque h barre tend vers 0 par rapport à Q?

H barre constante

- Que se passe il quand racine (2m (Vo-E) /h barre) tend vers + infini?

Distance caract tend vers 0 et donc très peu de transmission

- Qu'est ce que p ?

Une impulsion

Partie sur Gamov —> trop de calcul pour au final pas gd chose
Bien mettre en place les hyp

Approximation BWK : les dimensions caractéristiques de variation du potentiel sont plus grand que la longueur d'onde du système.
On découpe la barrière de potentiel en pleins de petite barrière de potentiel —> ça marche car le potentiel varie très lentement par rapport à la longueur d'onde du système.
Dépend de la différence entre l'énergie et le potentiel

Cf dessin marie

3 trucs percutants :
Existence proba de transmission
Barrière carré à une barrière quelconque
Application quotidienne : radioact, mémoire flash

Différents effets tunnels:
Atomique —> Liaison covalente
Nucléaire —> Gamov

Faire un exemple avec un bon ordre de grandeur. AN. Deux atomes séparés par une distance interatomique. Barrière de potentiel qui correspond à l'énergie de la liaison.

Pas de longueur d'onde dans le puit —> longueur caractéristique de variation.

Quand on se rapproche des intersections e-V tend vers 0 dans
Approximation BWK ne marche pas

LP41 : Effet tunnel Applications

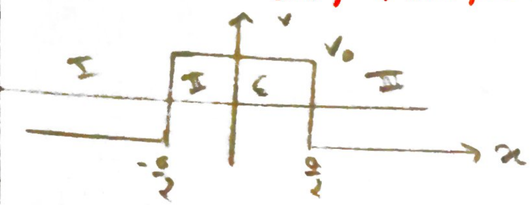
Niveau : Licence

PR : - fct d'onde
- Éq Schrodinger
- Puit quantique fini

Introduction : Aspect historique, onde évanescente à la surface d'un dioptre, réflexion total frustrée. particule qui se prend une montagne elle rebondit —> pas dans l'effet tunnel

I. Effet tunnel

1) Position du problème



$V(x) = V_0 \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$

$V(x) = 0 \quad x > \frac{a}{2}$ et $x < -\frac{a}{2}$

* Mécanique classique : - impossibilité de trouver la particule dans la zone II
* Mécanique : II $P(x) = |\psi|^2 \neq 0$ Possibilité de trouver la part. ds la —

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x) \rightarrow \psi(x,t) = \varphi(x) f(t) \text{ avec } f(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

I, III $\quad \varphi''(x) + k^2\varphi(x) = 0 \qquad k^2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

II $\quad \varphi''(x) - q^2\varphi(x) = 0 \qquad q^2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

$\varphi_1(x) = A_1 e^{-ikx} + B_1 e^{-ikx}$

$\varphi_2(x) = A_2 e^{qx} + B_2 e^{-qx}$

$\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$

$\Downarrow$ $B_3 = 0$ pas d'onde provenant de $-\infty$

Puits fini 4 éq. et 4 inconnu → E quantifié

Dans notre cas 4 éq et 5 inconnu → Pas de quantification de l'énergie

cf diapo

2) Probabilité de transmission

Courant de probabilité présence : $\vec{j} = \frac{\vec{p}}{m}|\psi|^2$ ← densité × vitesse

$\vec{j}_r = \frac{-\hbar\vec{k}}{m}|B_1|^2$; $\vec{j}_i = \frac{\hbar\vec{k}}{m}|A_1|^2$; $\vec{j}_t = \frac{\hbar\vec{k}}{m}|A_3|^2$

réfléchi — incident — transmit

$\frac{\vec{j}_r}{\vec{j}_i} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = R$; $\frac{\vec{j}_t}{\vec{j}_i} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = T$

$$R = \frac{\frac{V_0^{2}}{4E(V_0-E)}\, sh^2(qa)}{1+\frac{V_0^{2}}{4E(V_0-E)}\, sh^2(qa)}$$

$$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^{2}}{4(E(V_0-E))}\, sh^2(qa)}$$

Remarques : - $T \neq 0$
- $R + T = 1$

Rmq : analogie avec physique ondulatoire R+T =1 —> conservation de l'énergie
Dans notre cas : conservation de la probabilité de présence de la particule.

Physique ondulatoire → conservation de l'énergie
Dans notre cas → conservation de la probabilité de présence

$P_3(x) = |A_3|^2$

Zone I : Interférence onde incidente onde réfléchie avec longueur entre diff maxima lié à la longueur d'onde de Broglie

Zone II : décroissance exponentielle sur une distance caractéristique

Zone III : probabilité de présence de la particule constante.

$P(x,t) = |\psi|^2$

II décroissance sur $\delta = \frac{1}{q} = \frac{h}{\sqrt{2m(V-E)}}$

3) Approximation de la barrière épaisse

Calcul de T : Exponentielle très grande devant 1 donc on le néglige.

$$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^{2}}{4E(V_0-E)}\, sh^2\left(\frac{a}{\delta}\right)}$$

si $a \gg \delta \rightarrow sh^2\left(\frac{a}{\delta}\right) = \frac{e^{\frac{a}{\delta}} - e^{-\frac{a}{\delta}}}{2}$

$$\rightarrow T = \frac{1}{1+\frac{V_0^{2}}{4E(V_0-E)}\left(\frac{e^{\frac{a}{\delta}}}{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow T = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^{2}}\, e^{-\frac{a}{\delta}}$$

Si $m = 1\,kg$; $E = mgz_0$ avec $z_0 = 1m$; $V = mgh$ avec $h = 2m$ et $a = 10\,cm$

$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}} = 10^{-34}\,m$ donc $T = \frac{16\cancel{m}gz_0(\cancel{m}g(h-z_0))}{\cancel{m}^2 g^2 h^2}\, e^{-\frac{2a}{\delta}}$

$= 10^{-35}$

Approximation barrière épaisse fonctionne elle ? Distance caractéristique plus faible que la largeur de notre puit a. Donc barrière épaisse ok
Particule macroscopique a quasi aucune chance de traverser un puit (d'où le fait que l'on ne voit pas de balle traverser un mur).

Pour avoir de fortes probabilités il faut ;

Remarques : - Petite amplitude de la barrière de potentiel
- Petite largeur de la barrière
- Petite masse.

II. La radioactivité α

1) Résultats expérimentaux

$$^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He$$

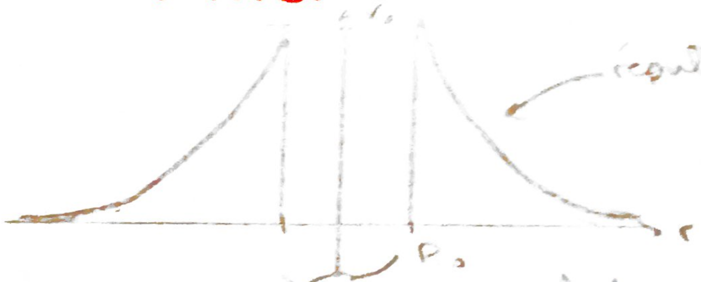
Noyau avec bcp de proton répulsion électrostatique de l'ordre de l'interaction forte
Pour diminuer répulsion le noyau éjecte une particule alpha.

$$\Rightarrow \ln t_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

Tableau II 1 et graphe
Relation entre le temps de demi vie et l'énergie cinétique des particules.

2) Modèle de Gamov

$V_0 \approx 30$ MeV



Bien mettre en place les hyp

Découpe la barrière de potentiel en plein de pt portion où on peut calculer

Particule $\alpha(m, v)$ $\quad f = \frac{v}{R_0}$

Relation Heisenberg : $m\Delta v \Delta x = \hbar \quad \Delta x \simeq R_0$ et $v = \Delta v = \frac{\hbar}{mR_0}$

$$f = \frac{\hbar}{mR_0^2}$$

fréquence de désintégration : $\lambda = f \times T = \frac{\hbar}{mR_0^2} \times \frac{16E(V(r)-E)}{V_0^2} e^{-2\frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}a}$

$$= \frac{\hbar}{mR_0^2} \times \frac{16E(V(r)-E)}{V_0^2} \exp\left(\int_{R_0}^{R} -2\frac{\sqrt{2m(V(r)-E)}}{\hbar} dr\right)$$

$$\Rightarrow \ln \lambda = \ln\left(\frac{\hbar}{mR_0^2}\right) + \ln\left(\frac{16E(V(r)-E)}{V_0^2}\right) - \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \underbrace{\int_{R_0}^{R} \sqrt{V(r)-E}\, dr}_{I}$$

$$I = \sqrt{E}\int_{R_0}^{R} \sqrt{\frac{R}{r}-1}\, dr = R\sqrt{E}\left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R_0}{R}}\right) \quad \text{cf BUP 736}$$

$$E = V(r) \Rightarrow R = \frac{2(Z-2)}{E}e^2$$

$$\ln \lambda = \ln\left(\frac{\hbar}{mR_0^2}\right) - \frac{2\pi(Z-2)e^2\sqrt{2m}}{\hbar\sqrt{E}} + \frac{8e}{\hbar}\sqrt{Rm(Z-2)}$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = -\ln(\lambda) + \ln(\ln 2) \Rightarrow \ln t_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$$

1929 Gamov va introduire un autre type de radioactivité alpha.

Particule alpha va avoir une interaction forte avec les particules du noyau quand elle sera dans le noyau
Et en dehors ; répulsion électrostatique.

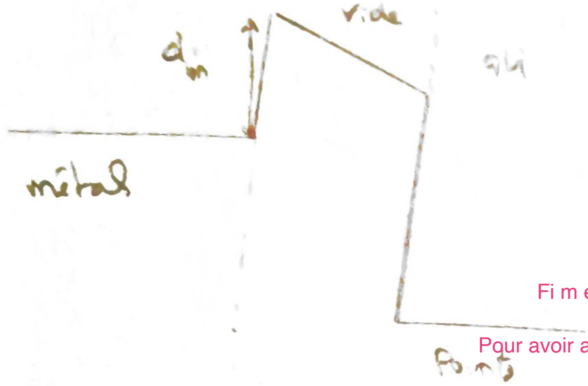
Hauteur de la barrière de potentiel pour un noyau 30 MeV
Ec a laquelle sorte les particules alphas sont bcp moins élevé que cette énergie là donc ça fait penser à un effet tunnel.
Particule alpha se balade à la vitesse v
Elle tape la barrière avec une certaine fréquence f

Fréquence de désintégration

Multitude de petite barrière et on intègre sur toute la barrière.

III. Application : le microscope à effet tunnel

1) Fonctionnement



$\Phi_m \simeq 4\,eV$

$\delta \simeq 1\,Å$

$I = I_0\, e^{-\frac{2d}{\delta}}$ avec $I_0 \propto U$.

microscope a effet tunnel photo
electron passe du substrat a la pointe et donne un courant
Matériau conducteur (métal ou semi conducteur)
Fi m energie que l'on doit apporter au métal pour arracher un électron

Pour avoir accès à un courant il faut approcher la pointe à moins de dix angströms

Quartz piezoelectrique qui permettent de bouger la pointe avec une très gde précision afin de ne pas trop faire varier le courant
Matériaux durs pas sensible au vibration pour éviter les fluctuations de courant

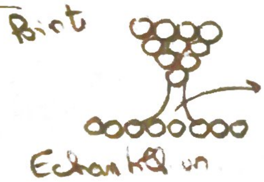
2) Résolution

Pour avoir une bonne résolution :
- bouger la pointe à 10^{-11} m près
- Réduire les vibrations
- Pointe très fine

Résolution en largeur de 2 Å

Résolution en hauteur de 0,05 Å.

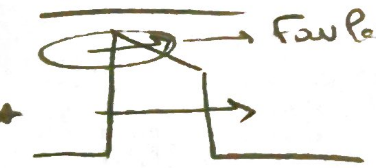
Echelle atomique



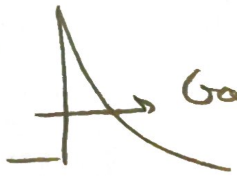
80 % courant passe par l'atome de pointe.

Conclusion ; On ne trouve pas l'effet tunnel que dans des instruments complexes comme le microscope a effet tunnel ou la radioactivité alpha, elle est aussi à l'origine de la mémoire flash de nos clés usb et de nos disques durs. Ouvrir sur la liaison chimique ou la liaison cristalline.

Questions :



Fowler Nordheim



Gamow.

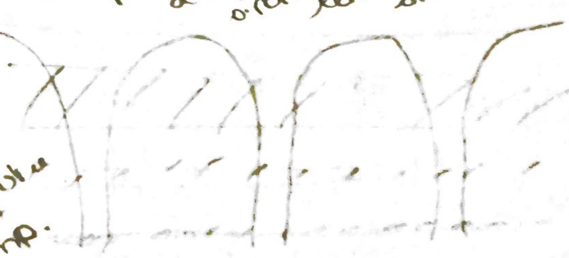
approx $\frac{\partial^2 |\psi(x)|}{\partial x^2} \ll \frac{|\psi(x)|}{\lambda^2}$ ⇒ λ très petit devant distances caractéristiques d'évolution de $|\psi|$ de de V

Brillouin Kramers Wentzel.

on peut pas négliger l'amplitude pr comparer à l'incident où on → 2e terme du sinus hyperbolique

Josefson Junction

de + en + large car proba pr 1 particule passe d'1 pic à l'autre de + en + imp.



Effet tunnel. Applications

I) L’effet tunnel

1) Position du problème
2) Probabilité de transmission
3) Approximation de la barrière épaisse

II)La radioactivité alpha

1) Résultats expérimentaux
2) Modèle de Gamov

III)Le microscope a effet tunnel

1) Fonctionnement
2) Résolution

I).1) Position du problème

$$A_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) + B_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right) - B_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right),$$

$$A_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = A_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right) + B_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right),$$

$$ikA_1 \exp\left(-i\frac{ka}{2}\right) - ikB_1 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = -qA_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right),$$

$$ikA_3 \exp\left(i\frac{ka}{2}\right) = qA_2 \operatorname{sh}\left(\frac{qa}{2}\right) + qB_2 \operatorname{ch}\left(\frac{qa}{2}\right).$$

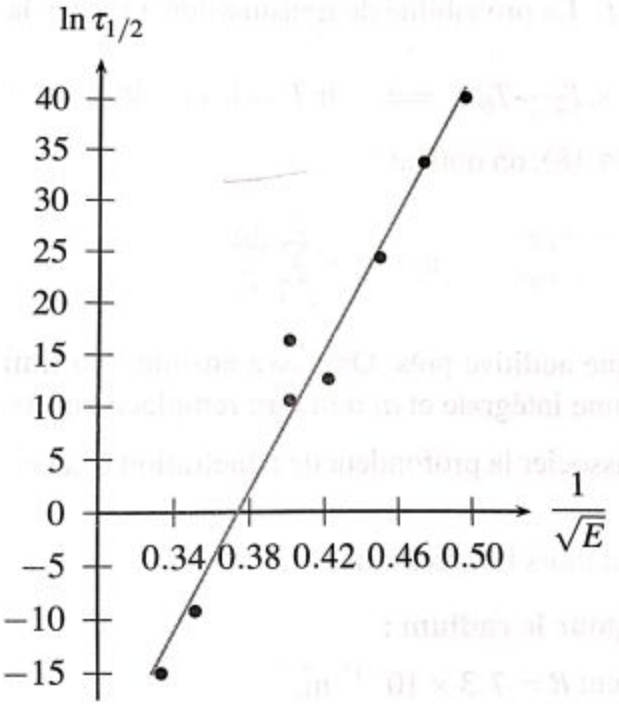
I).3) Approximation de la barrière épaisse

Particule	m (kg)	V_0 (eV)	a (nm)	δ (nm)	T
Électron	10^{-30}	4	0,3	0,1	10^{-2}
Électron	10^{-30}	40	0,3	4×10^{-2}	10^{-6}
Électron	10^{-30}	4	3	0,1	10^{-20}
Proton	10^{-27}	4	0,3	4×10^{-3}	10^{-63}
Proton	10^{-27}	4	3	2×10^{-3}	10^{-628}

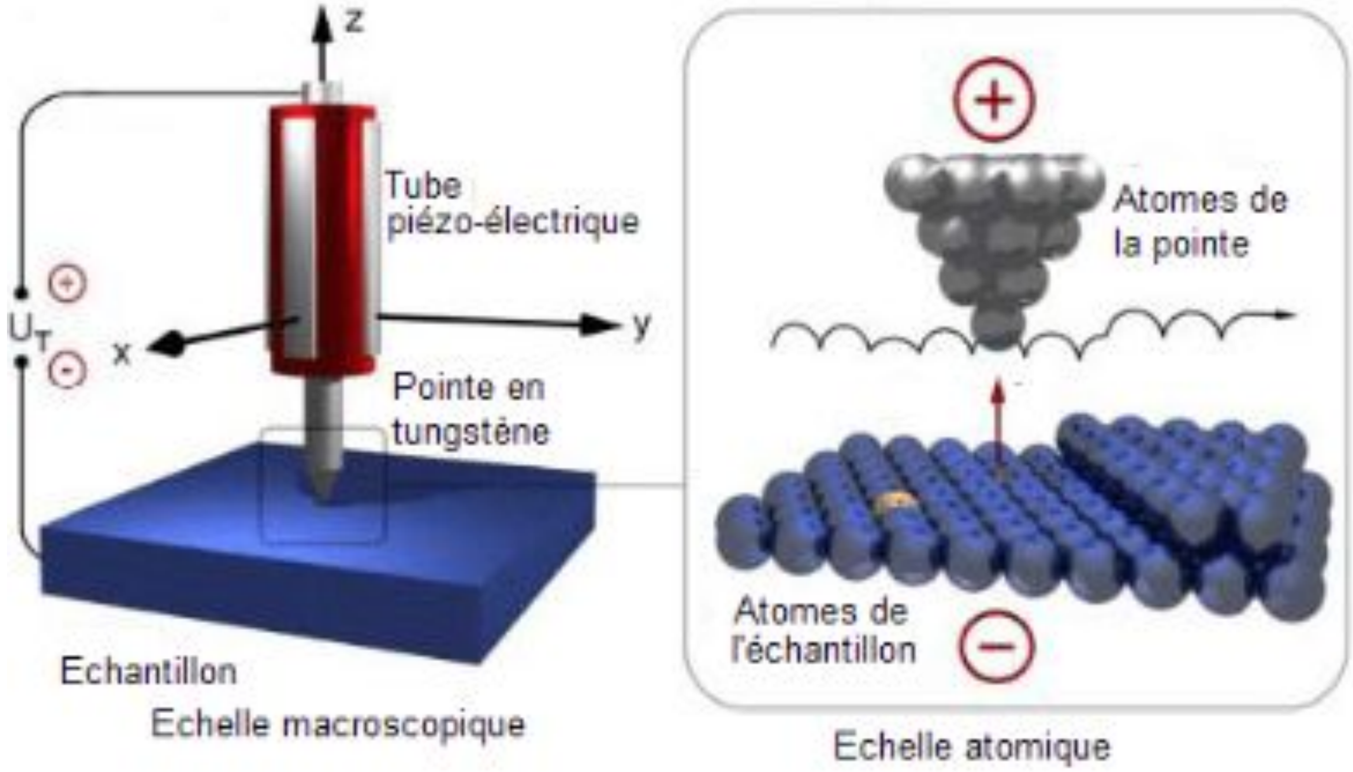
II).1) Résultats expérimentaux

Noyau	Demi-vie $\tau_{1/2}$ (s)	E (MeV)	Noyau	Demi-vie $\tau_{1/2}$(s)	E (MeV)
${}^{212}_{83}\mathrm{Bi}$	$4,0 \times 10^4$	6,2	${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$	$5,4 \times 10^{10}$	4,9
${}^{212}_{84}\mathrm{Po}$	$3,0 \times 10^{-7}$	9,0	${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$	$4,4 \times 10^{17}$	4,0
${}^{215}_{85}\mathrm{At}$	$1,0 \times 10^{-4}$	8,1	${}^{236}_{92}\mathrm{U}$	$7,2 \times 10^{14}$	4,4
${}^{222}_{86}\mathrm{Ra}$	$3,3 \times 10^5$	5,6	${}^{242}_{96}\mathrm{Cm}$	$1,4 \times 10^7$	6,2

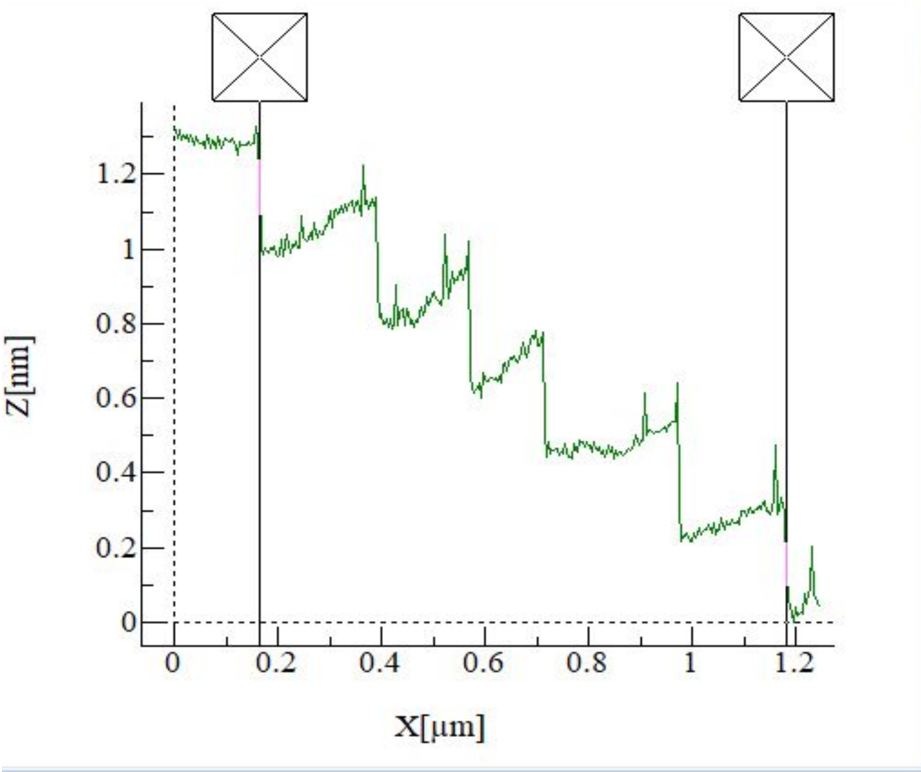
II).1) Résultats expérimentaux

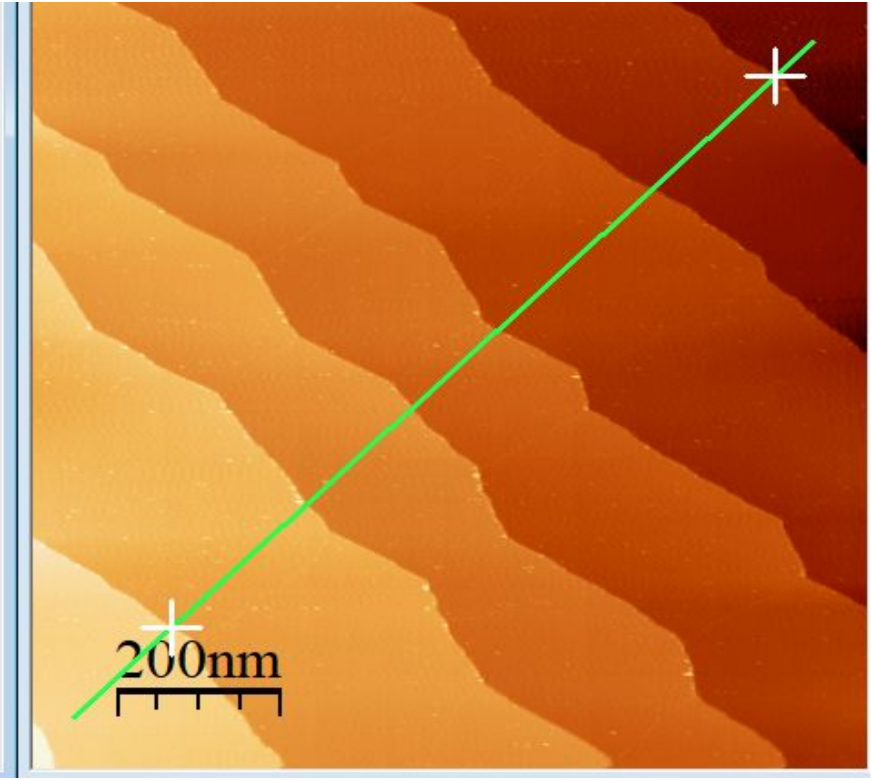


III).1)Fonctionnement

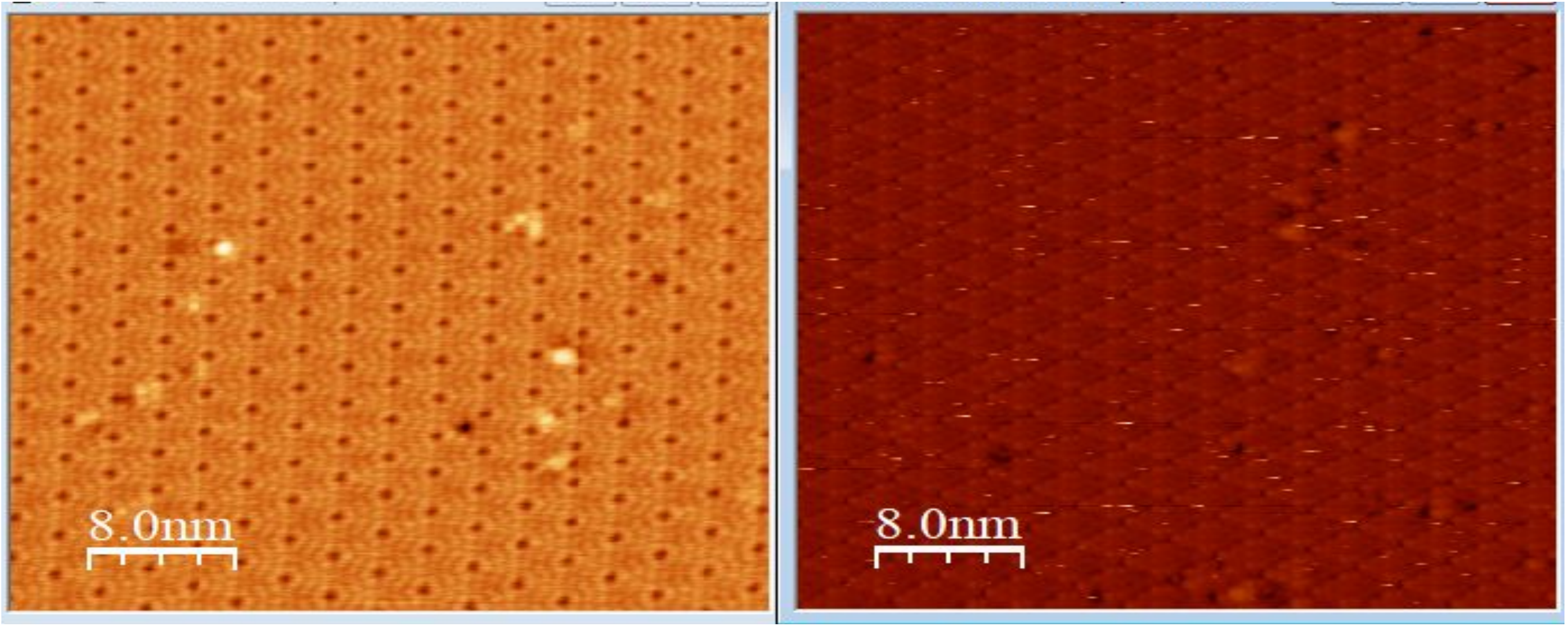


III).2)Résolution





III).2)Résolution



Représentation de la surface du silicium découpé selon le plan (111)

LP 41 Effet tunnel. Applications

Niveau: licence

Pré requis:

- Notion de fonction d'onde
- Equation de schrodinger

Plan

Introduction

Aspect historique, onde évanescente à la surface d'un dioptre, réflexion total frustrée.

I) L'Effet Tunnel

1)Position du problème

Poser la barrière carré, l'équation de schrodinger dans les trois zones, solutions des équations, relation de continuité**[1]**. Expliquer la continuité de la fonction d'onde(H1 **[2]**). L'énergie n'est pas quantifiée car pas de confinement de la particule.

Si l'énergie de la particule E<V potentiel impossibilité de traverser la barrière en classique. En quantique l'onde évanescente permet d'avoir une probabilité non nul de passer la barrière.

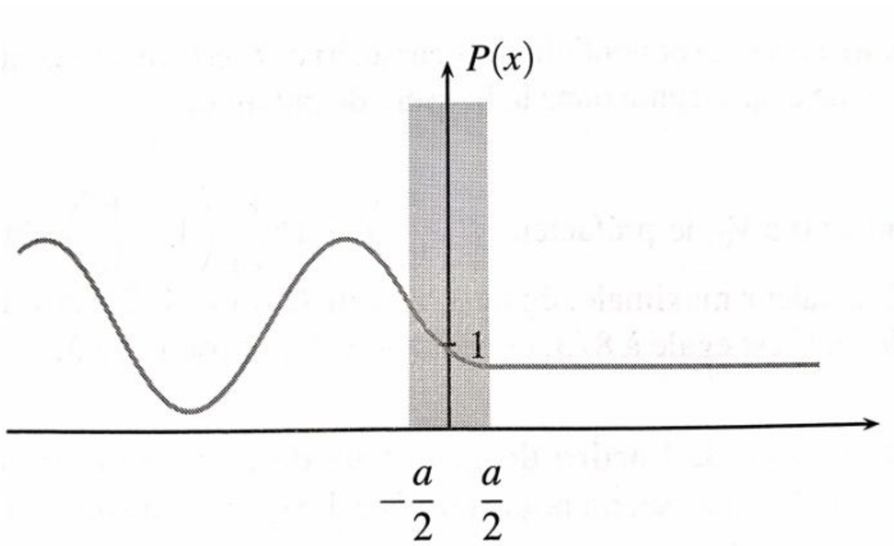
2)Probabilité de transmission

Définition des coefficients de transmission et de réflexion

Remarques:

- la probabilité de transmission n'est jamais nul.
- R+T=1 conservation de la probabilité de présence
  analogie avec l'électromagnétisme -> conservation de l'énergie

Représentation de la fonction d'onde



Zone I: phénomène d'interférence spatiale dû à la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie. Distance séparant deux maximums= λdb/2

Zone II: Décroissance exponentiel sur une distance caractéristique de δ=1/q

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V-E)}}$$

Zone III: Probabilité de présence uniforme

3)Approximation de la barrière épaisse

Faire l'approximation proprement **[1]**, puis donner des ordres de grandeur. Ex: électrons forte probabilité de transmission. Particules classiques petite probabilité de transmission.
Remarques: Pour avoir une forte probabilité il faut:

- une faible amplitude de la barrière de potentiel
- une faible largeur de la barrière de potentiel
- une particule de petite masse

II)La radioactivité alpha **[3]**

1)Résultats expérimentaux

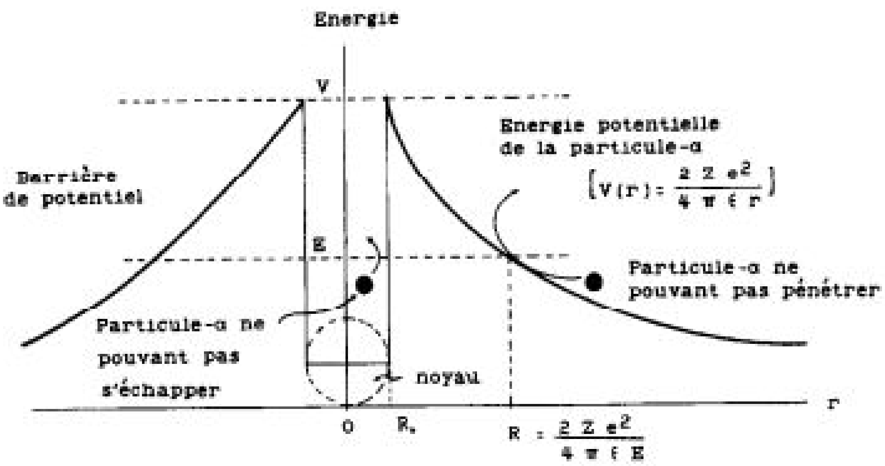
Expliquer la radioactivité alpha(noyau lourd se désintégrant pour réduire la répulsion électrostatique), rappeler l'équation de désintégration.

En 1911 Geiger et Nuttal en mesurant l'énergie cinétique d'expulsion des particules alpha trouvent une relation entre le temps de demi vie de désintégration et l'énergie cinétique des particules.

$$ln\tau_{1/2} = A + B/\sqrt{E}$$

2)Modèle de Gamov

En 1928 Gamov donne une explication quantique à la radioactivité alpha. Il approxime le noyau par un potentiel de la forme



A l’intérieur du noyau de rayon R0 la particule alpha qui est très stable va subir l’interaction forte des protons et des neutrons autour d’elle. Mais dès qu’elle sort du noyau, la particule chargée positivement va subir la répulsion électrostatique des Z-2 protons.

L’ordre de grandeur de l’amplitude de la barrière de potentiel du noyau est de 40 MeV. Mais les particules sortent du noyau avec des énergies de 4 à 9 eV. Gamov pense immédiatement à l’effet tunnel.

Faire la démonstration dans les grandes lignes, parler de l’approximation BWK (possibilité de discrétiser la barrière de potentiel comme une succession de barrière de largeur dr et de hauteur V(r), si le potentiel diminue lentement sur une distance de l’ordre de la longueur d’onde)

Montrer que l’on retrouve la relation entre le temps de demi vie et l'énergie de la particule.

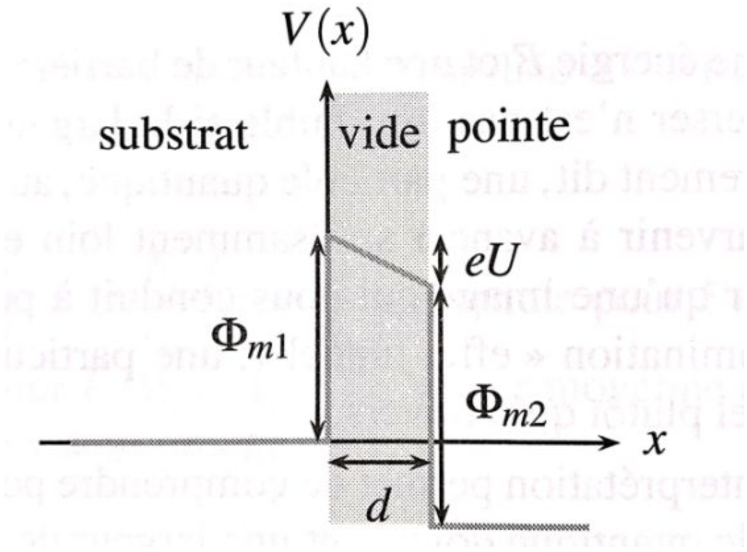
III)Le microscope à effet tunnel **[4]**

1)Fonctionnement

Schéma du microscope sur le diaporama

Une différence de potentiel est appliquée entre la pointe et le substrat, un courant apparaît lorsque la pointe est assez proche du matériau. De ce courant, il est possible de mesurer des distances.
Le matériau étudié doit donc être conducteur et l'expérience doit se faire sous vide.

Potentiel entre la pointe et le substrat



Φm est de l'ordre de 4 eV -> distance caractéristique δ de l'ordre de 10Å
Nécessité d'approcher la pointe à moins de d=10Å pour obtenir un courant.
Ce courant est proportionnel à la probabilité de transmission.

$$I = Io * exp(-2d/\delta)$$

2)Résolution

Pour avoir une résolution permettant d'étudier les atomes un par un il faut:

- une pointe très fine (méthode chimique pour avoir un seul atome en bout de pointe)
- être capable de contrôler des déplacements de la pointe à 0.1Å près (trois quartz piézoélectriques)
- éliminer les vibrations (matériaux très rigides entre la pointe et le substrat, tout ça monté sur ressort)

80% des électrons passe par l'atome en bout de pointe, ce qui donne une résolution latéral de 2Å.
La résolution vertical est elle limitée par la stabilité mécanique, elle est estimer au mieux 0.05Å

En Fixant la tension et le courant constant en maintenant la pointe à une distance d de la surface, il est possible d'obtenir la topographie de la surface du matériau.

Conclusion

On ne trouve pas l'effet tunnel que dans des instruments complexes comme le microscope a effet tunnel ou la radioactivité alpha, elle est aussi à l'origine de la mémoire flash de nos clés usb et de nos disques durs. Ouvrir sur la liaison chimique ou la liaison cristalline.

Bibliographie

[1] J'intègre PC/PC*
[2]Mécanique quantique, tome I, C. Cohen-Tannoudji
[3]Effet tunnel : quelques applications, BUP 734, mai 1991, C. Matta
[4]Le microscope à effet tunnel, BUP 699, décembre 1987, B. Leroy