

LP 23 - Traitement d'un signal

Niveau : Licence

Prérequis :

- Bases d'électrocinétique,
- Résolution d'équations différentielles,
- Notion complexe

Biblio :

- Electrocinétique, G.Rosset, Précis, Bréal
- Electronique 2, F.Manneville, J.Esquieu, Dunod (modulation d'amplitude et de fréquence)
- Philippe

Plan :

I. Analyse fréquentielle

1. Équations différentielles linéaires et fonction de transfert
2. Représentation fréquentielle : série de Fourier
3. Outil numérique : exemple d'un signal créneau

II. Filtrage linéaire

1. Définitions
2. Diagrammes de Bode
3. Différents types de filtres

III. Modulation d'Amplitude

1. Principe et définitions
2. Spectre du signal modulé
3. Démodulation

NOTES :

Introduction

Expression de $i(t)$ et $u(t)$ \Rightarrow équation différentielles décrivant le système considéré

Evolution temporelle des grandeurs, exemple : charge d'un condensateur

Réponse à une entrée

Traitement de l'information ?

Eq diff \rightarrow descriptions du système

I. Analyse fréquentielle

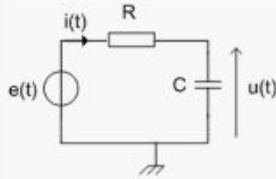
A. Equations différentielles linéaires et fonction de transfert

De façon générale, pour un système linéaire dont les caractéristiques de ses composants indépendantes du temps, on peut exprimer une équation différentielle du type :

$$a_0 s(t) + \sum_{k=1}^n a_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = b_0 e(t) + \sum_{k=1}^m b_k \frac{d^k e(t)}{dt^k}$$

Avec :
 $s(t)$, la sortie du système,
 $e(t)$, l'entrée,
 a_k et b_k des coefficients constants

- Revenons au circuit RC :



$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u(t) = \frac{1}{RC} e(t)$$

Avec :
 $u(t)$, la tension aux bornes de C,
 $e(t)$, l'entrée, la tension de forçage

On néglige le régime transitoire pour ne s'intéresser qu'au régime sinusoïdal forcé.

→ Notation complexe : $\tilde{e}(t) = E e^{j(\omega t + \phi)}$ où ω est la pulsation de forçage
 $\tilde{s}(t) = S e^{j(\omega t + \phi)}$

- Fonction de transfert $H(\omega)$: rapport entre le signal de sortie et le signal d'entrée tel que :

$$H(\omega) = \frac{\tilde{s}(t)}{\tilde{e}(t)} \rightarrow H(\omega) = \frac{b_0 + \sum_{k=1}^m b_k (j\omega)^k}{a_0 + \sum_{k=1}^n a_k (j\omega)^k}$$

Caractérise entièrement la réponse du système pour un forçage de pulsation donnée !

- Cas du RC : $(j\omega)\tilde{u} + \frac{1}{RC}\tilde{u} = \frac{1}{RC}\tilde{e}$ et donc $H_{RC}(\omega) = \frac{\tilde{u}}{\tilde{e}} = \frac{1}{1+jRC\omega}$

B. Représentation fréquentielle : série de Fourier

Objectif : décomposer n'importe quel signal périodique comme une somme de cosinus et de sinus pour exploiter la linéarité des équations différentielles.

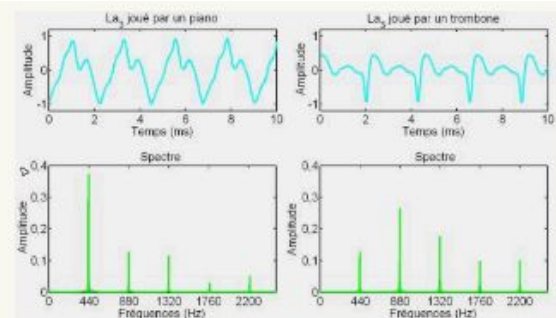
- Soit le signal $s(t)$, alors :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$



Exemples de spectres

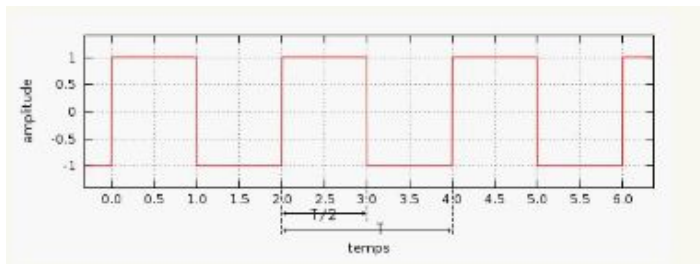
En haut → signal en temporelle → La par un piano et La par un trombone

En dessous décomposition en série de Fourier → on observe la fréquence fondamentale (le plus gros motif qui se répète) et les différentes harmoniques qui sont différentes entre les deux. La hauteur montre la puissance de l'harmonique.

- Spectre d'un signal : amplitude des différentes harmoniques qui le composent.
- Equivalence temps-fréquence.

C. Outil numérique : exemple d'un signal créneau

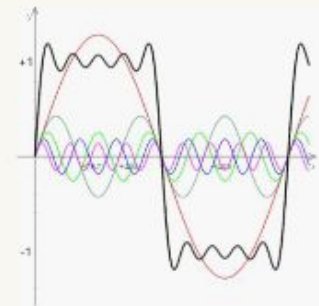
Soit un signal créneau tel que :



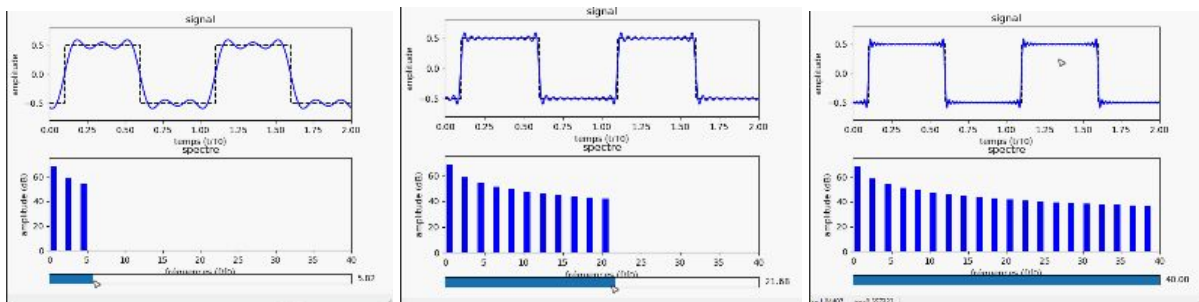
50 % de rapport cyclique

- Ré-écrit en série de Fourier : $s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$

- Programme Python



Programme : On crée un créneau et on calcule toutes ses harmoniques et on va plus ou moins les arrêter car normalement elles doivent être à l'infini. On va regarder ce qui se passe quand on tronque.



II. Filtrage linéaire

A. Définitions

Système linéaire, invariant par rapport au temps dont $H(w)$ n'est pas constante par rapport à w . Il peut amplifier, atténuer ou déphaser chaque composante spectrale sans en ajouter (linéarité).

- Ordre d'un filtre : ordre de l'équation différentielle décrivant le système (en représentation temporelle)
- Gain (dB) : action du filtre sur les amplitudes telle que, $G(w) = 20\log(|H(w)|)$
- Phase (rad ou °) : action sur les phases telle que, $\phi(w) = \arg(H(w))$
- Pulsation de coupure ω_c : définie par $|H(\omega_c)| = H_{max}/\sqrt{2}$
- Bande Passante : ensemble des ω telles que $|H(\omega)| > H_{max}/\sqrt{2}$

Quand on regarde en puissance on cherche à ce qu'elle soit divisé par deux → pulsation de coupure.

On reste toujours à w donnée !

Ces caractéristiques nous permettent de prévoir le comportement du filtre.

B. Diagrammes de Bode

Représentation graphique de l'action du filtre sur le signal d'entrée :

- courbe de gain du filtre : tracé de $G(\omega)$ en échelle logarithmique
- courbe de phase : tracé de $\phi(\omega)$ en échelle log.

Contient toutes les caractéristiques précédentes

- Étude des comportements asymptotiques, cas du filtre RC : $H(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$$

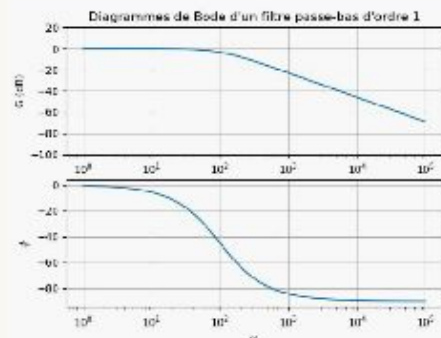
$$-\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(\omega)| = 1 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(\omega)| = \frac{1}{\omega} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) = 20 \log(\omega) + C_{ste}$$

$$\phi(\omega) = \arg(H(\omega)) = -\arctan(\omega/\omega_c)$$

$$-\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi(\omega) = 0$$

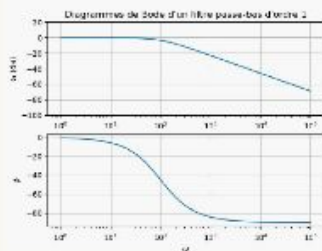
$$-\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \phi(\omega) = -\pi/2$$



C. Différents types de filtres

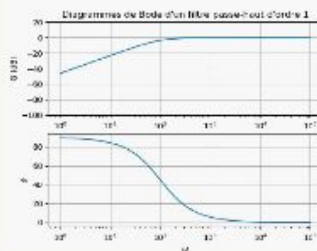
Passe-bas d'ordre 1

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} H_0$$



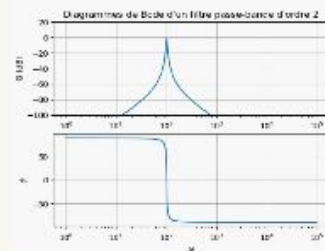
Passe-haut d'ordre 1

$$H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}} H_0$$



Passe-bande d'ordre 2

$$H(\omega) = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c Q}}{1-(\frac{\omega}{\omega_c})^2 + j\frac{\omega}{\omega_c Q}} H_0$$



Exemple du Quartz

Différence notable :

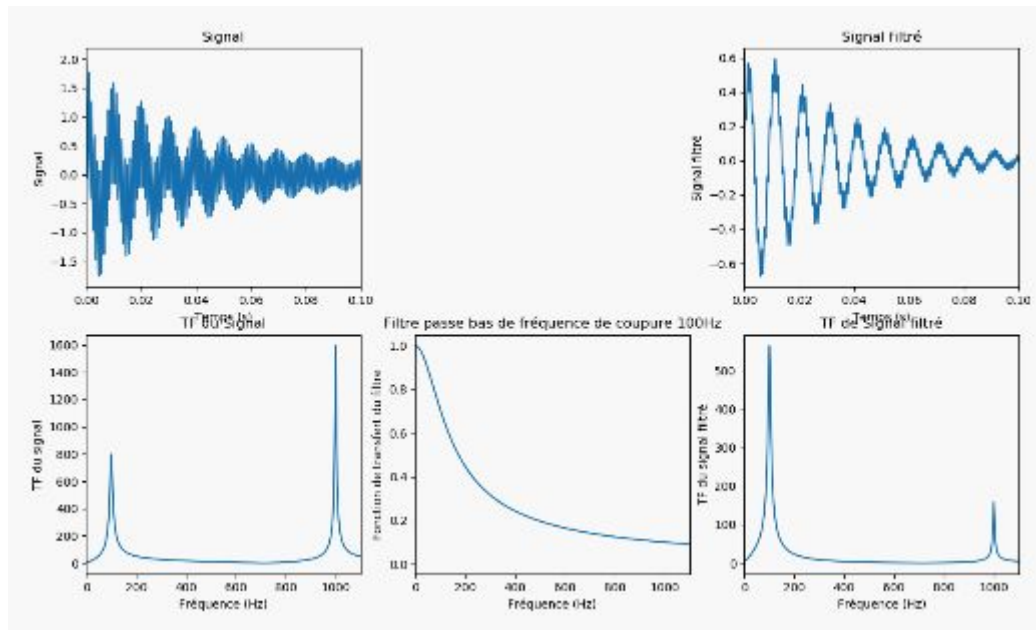
- ordre 1 → - 20 dB/dec
- ordre 2 → - 40 dB/dec

Programme Python : Passe bas d'ordre 2

Comparaison avec passe bas ordre 1 :

- différence de pente (atténuation asymptotique).
- résonance
- phase plus abrupte

Python →



En haut à gauche → signal + bruit

Analyse de fourier en dessous → 2 fréquences

Filtre passe bas graphe milieu → atténuation des hautes fréquences

A droite c'est le signal après le filtre :

→ on a atténué le bruit du signal

Les filtres vont permettre de traiter les signaux.

III. Modulation d'amplitude

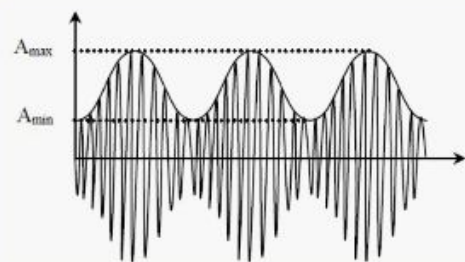
A. Principe et définitions

Objectif : utiliser la meilleure propagation des ondes électromagnétiques à plus hautes fréquences pour transporter de l'information sur de longues distances.

Exemple : Radio

Multiplication de deux signaux : la porteuse (de fréquence élevée) et le signal modulant (de fréquence plus basse, contenant l'information).

- Porteuse : $v_p(t) = A_p \cos(\omega_p t)$
- Signal modulant : $v_m(t) = A_0 + A_m \cos(\omega_m t)$
Avec $\omega_m \ll \omega_p$
- $s(t) = v_p(t) \cdot v_m(t) = A_p \cos(\omega_p t) [A_0 + A_m \cos(\omega_m t)]$
- Taux de modulation m :
$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{A_m}{A_0}$$

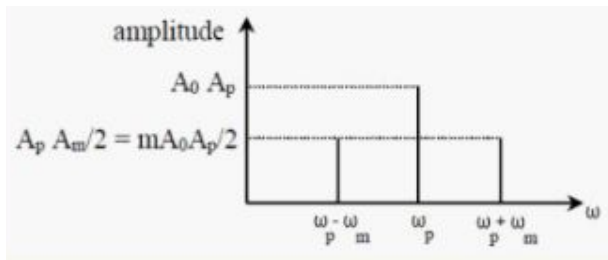


B. Spectre du signal modulé

Le développement de $s(t)$ nous donne :

$$s(t) = A_p \left[A_0 \cos(\omega_p t) + \frac{A_m}{2} \cos((\omega_p + \omega_m)t) + \frac{A_m}{2} \cos((\omega_p - \omega_m)t) \right]$$

Son spectre est donc :



(Apparition de la non-linéarité !)

C. Démodulation

Objectif : récupérer l'information transmise

Les techniques de récupération peuvent varier en fonction de la valeur de m , on s'intéresse à la démodulation synchrone : multiplication du signal modulé par le signal de la porteuse.

- Le développement de $v_{dem}(t) = [v_p(t) \cdot v_m(t)] \cdot v_p(t)$ fait apparaître 5 harmoniques :
 - $\omega_1 = 0$
 - $\omega_2 = \omega_m$
 - $\omega_3 = 2\omega_p$
 - $\omega_4 = 2\omega_p + \omega_m$
 - $\omega_5 = 2\omega_p - \omega_m$
- Hors $\omega_m \ll \omega_p$, donc, en filtrant $v_{dem}(t)$, on peut récupérer uniquement $\omega_2 = \omega_m$, le signal contenant l'information !

Les chiffres avec w signifient différentes harmoniques.

Elles sont utiles car elles sont à de très hautes fréquences, on va pouvoir les filtrer (passe bas) puis un passe haut va permettre de supprimer la fréquence continue → donc on récupère le signal d'origine qui à l'information.

Conclusion :

- Signal périodique :
 - Spectre en fréquence : harmoniques et amplitudes associées
 - Caractérisation des signaux
- Signaux non périodiques ?
 - transformée de Fourier

Traitement de ces signaux comme action sur ces harmoniques

Opérations non-linéaires → génération et déplacement des harmoniques

Questions :

- Que se passe-t-il quand on met deux filtre linéaire à la suite ?

Action du premier filtre → va filtrer les harmoniques du signal d'entrée, son signal de sortie va devenir le signal d'entrée du second filtre qui va agir sur les harmoniques restantes.

- Comment le voit t'on en terme de Diagramme de Bode ?

Diagramme de Bode vont se sommer.

- Quel conséquence sur le gain en décibel ?

Deux passe bas d'ordre 1 l'un à la suite de l'autre $\rightarrow H_1 * H_2$ pour la fonction de transfert totale (les fonctions de transfert des deux filtres se multiplient) \rightarrow même chose qu'avant mais avec un -40 dB/dec \rightarrow Somme

\rightarrow intérêt du diagramme.

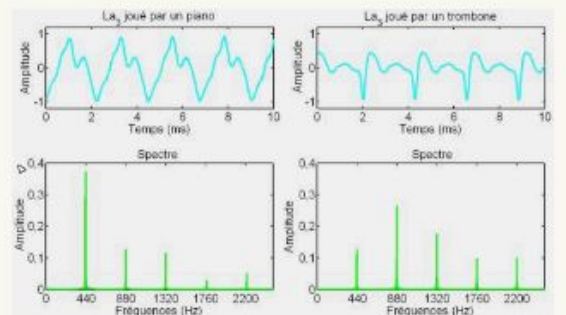
- Soit le signal $s(t)$, alors :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(n\omega t) dt$$



Exemples de spectres

- A quoi correspondent les pics verts ? coeff sinus ou cos ?

C'est équivalent d'écrire $\rightarrow A (\cos + \sin)$

- Intérêt modulation d'amplitude ?

Transporter le signal basse fréquence (voix) sur de longues distances.

Aller chercher une information sur un signal physique \rightarrow chacun à une fréquence intéressante et les autres on s'en fiche.

Des signaux de même nature peuvent être décalés les uns par rapport aux autres on peut ainsi sélectionner des radios. Et ensuite il y a la modulation.

- Avantages et inconvénients de la modulation d'amplitude ?

- va être sensible aux perturbations dans le canal de transmission.

Si la porteuse est altérée alors le signal est altéré.

Pas très large : Pas beaucoup de place, de bande \rightarrow ondes longues : quelques centaines de kilohertz.

- Type de Filtre non linéaire ?

amortisseur de voiture

Redressement monoalternance \rightarrow diode dans un circuit.

Ampli Op en saturation

Question jury : Autres filtres qui foutent en l'air le spectre ?

- Comment faire un multiplieur ? un sommateur ?

Ampli Op

- Composant avec une caractéristique courant-tension exponentielle ?

Diode

Cela permet de prendre le logarithme d'un signal

On prend le log de 2 signaux, on les somme.

Étage log, étage somme et étage exponentielle = multiplieur

- Spectre créneau Continue ou discontinue ?

harmoniques impaires non nulles → Gibbs = discontinue

On est obligé d'aller très loin en fréquence pour un créneau différent que pour un triangle qui s'atténue beaucoup plus vite ($1/n^2$ pour les signaux continue et $1/n$ pour les signaux discontinue)

- Quel est le choix optimum de la fréquence de coupure ?

Perdre un peu d'amplitude sur le signal et la prendre proche pour couper tout le bruit.

Ou garder le signal intact au risque de garder un peu de bruit en la décalant sur la droite.

- Durée du régime transitoire ?

Charge rapide ou lente en fonction de la capacité du condensateur

AO → slow rate (rampe qui suit le signal d'entrée)

Remarques :

Leçon d'introduction

Petit problème de passage avec le filtre non invariant dans le temps

III.2 → ajouter un spectre

Ajouter formule de multiplication des cosinus → montrer la linéarisation et justifie

parle pas du tout des phases c'est pas ouf !

Abscisse du prog. est étrange.

Platine de synthèse de signaux ?

Redressement (convertisseur) bi ou double alternance () et simple

alternance ()

Signal notablement différent.

<https://sites.google.com/site/thierrybiaye2/home/01-redresseur-simple-et-double-alternance>

Attention bien connaître les programmes de terminale et première sur le traitement d'un signal !!!

Passer plus de temps sur la construction d'un signal avec des sinusoïdes et passer moins de temps sur les séries de Fourier ...

Intérêt de la série de Fourier

Avec un filtre → altération du signal est inévitable.

Attention préférer une fréquence de coupure entre la fréquence du signal et celle du bruit.

Ajouter plus de choses sur le filtrage linéaire pour en voir les limites.

Titre très vague → Attention ne pas faire une leçon très vague → qui part de très bas et qui va ensuite très loin ! car cela va obliger de passer sur des choses ou alors il faut présenter un plan exhaustif.

Plus de phase !