Leçon n°9 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau	**Licence**
Prérequis	Approximation des milieux continus Statique des fluides Dérivée particulaire Conservation de la masse Viscosité, écoulement visqueux
Biblio	J'intègre : PC, Dunod Hydrodynamique physique Guyon, Hulin, Petit/EDP science Fluid dynamos for physicist/faber
Plan	I. Comportement d'un fluide dans un écoulement parfait 1. Contraintes dans un fluide 2. Conditions aux limites 3. Cadre d'utilisation et couche limite II. Etude de l'écoulement parfait 1. Equation d'Euler 2. Conséquences directes 3. Ecoulement potentiel III. Théorème de Bernouilli 1. Hypothèses et énoncé 2. Effet venturi

LP-09 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

BRAUD Valentin U. de Rennes 1

23 mars 2020

Niveau : Licence
Pré-requis :

- Approximation des milieux continus
- Statique des fluides
- Description eulerienne et notion de dérivée particulaire
- Débit, conservation de la masse
- Notion de viscosité, écoulement visqueux

1 Comportement d'un fluide dans écoulement parfait

L'écoulement parfait n'implique pas forcément l'utilisation d'un fluide parfait. Certaines conditions doivent être respectés afin de pouvoir utiliser ce modèle.

Dans toute la leçon, on se place dans un écoulement stationnaire et incompressible.

1.1 Les contraintes dans un fluide

1.1.1 Les contraintes surfaciques

-Introduction des forces de pression et des forces de viscosités

1.1.2 Equivalent volumique de ces contraintes

On se place dans le cadre d'une particule de fluide de volume τ

-Forces de pression $\mathbf{dF_p} = -\mathbf{grad}(P)d\tau$ (FIG 9.2 diapo)
-Forces de viscosité $\mathbf{dF_{visc}} = \mu\mathbf{\Delta v d}\tau$ (FIG 9.5 diapo)[1]
Dans le cas d'un fluide parfait, la viscosité est nulle. Dans la réalité, le seul fluide qui se rapproche le plus d'un fluide parfait est l'Helium à 2.17 K.

Il existe en réalité, une force de viscosité normale à la paroi. On se place cependant ici dans le cas de fluides incompressibles en écoulement incompressible. On n'en tient donc pas compte.

2 Conditions aux limites

* Condition d'impénétrabilité :
Le débit massique est nul à travers la paroi donc la composante normale de la vitesse est nulle au niveau de la paroi.[1]

$$\mathbf{j}(M,t).\mathbf{dS_M} = 0 \qquad donc \qquad \mathbf{v}(M,t).\mathbf{dS_M} = 0$$

*Composante tangentielle de la vitesse :

On parle d'écoulement parfait lorsque l'on peut se placer hors de tout phénomène diffusifs. On se place donc ici hors de la couche limite où se concentre ces effets. Le fluide glisse sur la paroi.

2.1 Cadre d'utilisation du modèle et couche limite

*On introduit les écoulements tourbillonaires et incompressible.

*Conditions pour pouvoir avoir un écoulement parfait :

2.1.1 Cas 1 : Le fluide est parfait

Il ne va pas y avoir de force de viscosité du au fait que l'on peut négliger le coefficient de viscosité.

2.1.2 Cas 2 : L'écoulement est incompressible et irrotationnel

Le laplacien de la vitesse dans l'expression de la force de viscosité est nul. Tout les écoulements tourbillonnaires se produisent à l'interieur de la couche limite que nous n'introduisons pas dans l'étude.[2]

2.1.3 Cas 3 : Cas des grands nombres de Reynolds

Cas lorsque les phénomènes convectifs sont grands devant les phénomènes diffusifs. On sait que la couche limite est inversement proportionelle à la racine carré du nombre de Reynolds. Dans ce cas, la couche limite se limite à une partie très restreinte de l'écoulement. On ne la prend pas en compte. (FIG diapo).[2]

3 Etude de l'écoulement parfait

3.1 L'équation d'Euler

On utilise l'équation de Navier-Stokes en supprimant le terme de viscosité pour retrouver l'équation d'Euler.[1]

3.2 Conséquences directes

3.2.1 Effet de la courbure des lignes de courant

On se place dans le cas d'une courbure des lignes de courant lorsque l'écoulement rencontre un obstacle cylindrique.[1]

illustration avec la portance sur une aile d'avion. L'interprétation est limitée, elle ne fait pas intervenir la couche limite (important pour la portance et la trainée).
*Experience : Balle de ping-pong (effet Coanda)[3]

3.3 Ecoulement potentiel

L'écoulement potentiel est un écoulement parfait. de plus le champ des vitesses dérive d'un potentiel.

Conséquences : L'écoulement potentiel est irrotationnel.

Un écoulement potentiel à un instant donné le sera tout au long de l'écoulement (Th de Kelvin).[2]

4 Théorème de Bernoulli

4.1 Hypothèses et énoncés

*Hypothèses :

— écoulement parfait
— écoulement stationnaire

— écoulement incompressible
— masse volumique du fluide uniforme

*Enoncé : Calcul le long d'une ligne de courant[1]. On obtient :

$$P_1 - P_2 = \frac{\mu}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{\mu v_1^2}{2}(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1)$$

En considérant la conservation du débit volumique, avec μ la masse volumique.

4.2 L'effet Venturi

Application avec la vidéo :

Tube 1 : h1=7.5 h2=6.1 / Tube 2 : h1=8.5 h2=2.3 / Tube 3 : h1=7.4 h2=7.1

avec $P_0 = 1029.10^2 Pa$, la pression ambiante.

5 conclusion

Le modèle de l'écoulement parfait ne se limite pas au fluide parfait.
Bien pour la simplifiation d'étude telle que l'utilisation de l'écoulement potentiel.
Permet de s'affranchir des phénomènes liés à la viscosité.

Références

[1] Dominique Chardon François Vandenbrouck, Bernard Salamito. *J'intègre, Physique PC*. Dunod.

[2] Luc Petit Etienne Guyon, Jean-Pierre Hulin. *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences.

[3] T.E Faber. *Fluid dynamices for Physicists*. Cambridge University Press.

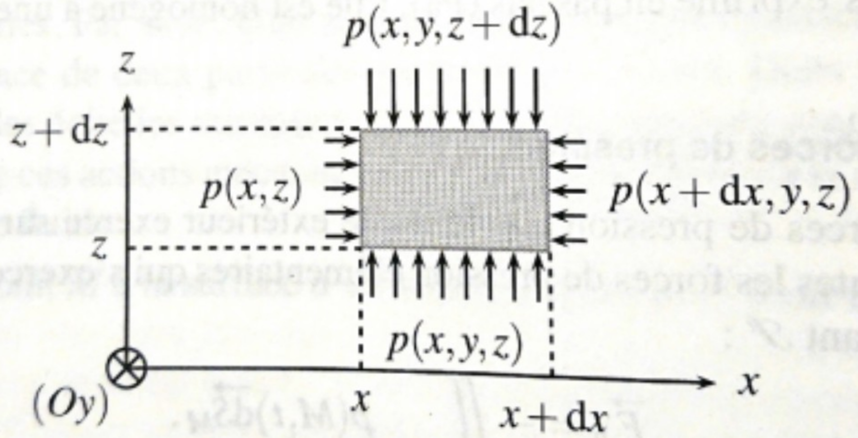


Figure 9.2 – Distribution des forces de pression à la surface de la particule de fluide.

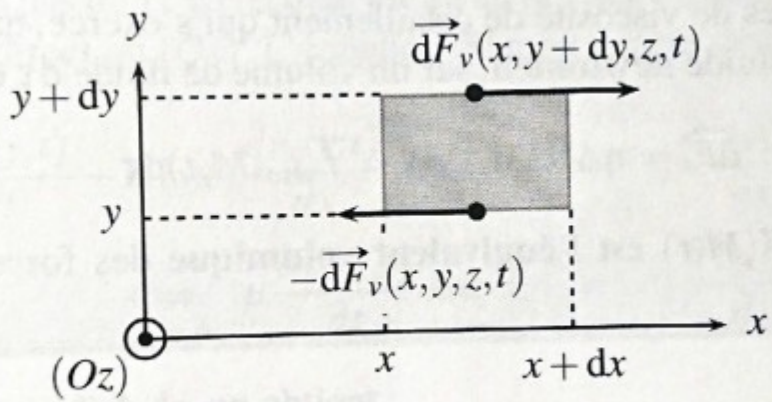
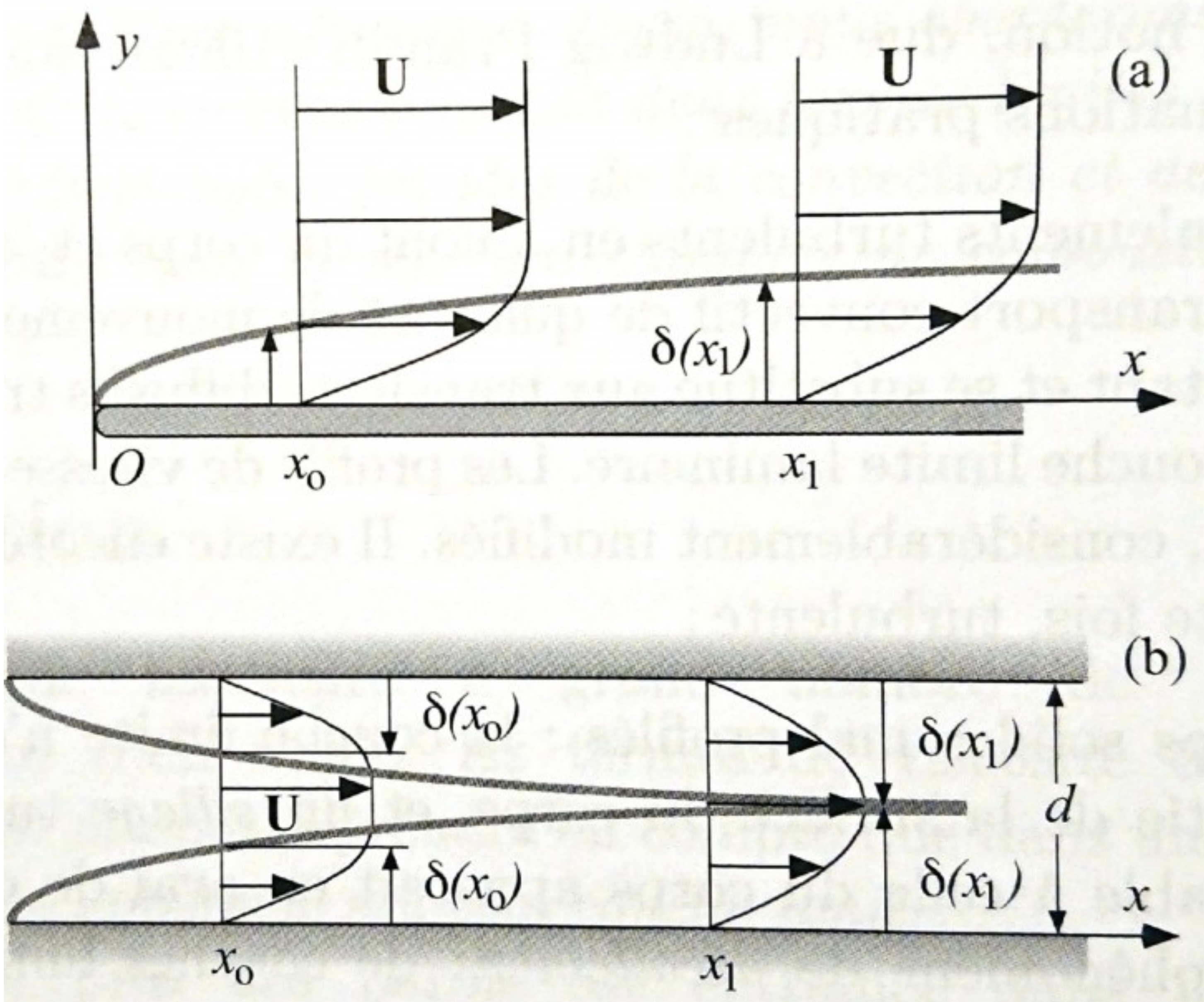


Figure 9.5 – Forces de viscosité de cisaillement exercée par le fluide environnant sur une particule de fluide.



y
U
U
(a)
δ(x1)
x
O
x0
x1
(b)
δ(x0)
δ(x1)
U
d
δ(x0)
δ(x1)
x
x0
x1

CP 9 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Niveau : Licence

PR :
- Approximation des milieux continus
- Statique des fluides
- Dérivée particulaire
- Conservation de la masse
- viscosité, écoulement visqueux

Biblio :
- J'intègre Dunod
- Hydrod
- Faber

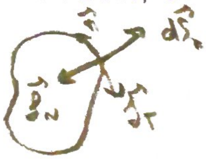
Intro :
- .É stationnaire : $\vec{v}, \rho$ indépendant du tps
- .É incompressible : conservat° du Débit $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

I. Comportement d'un fluide dans un écoulement parfait

A) Contraintes dans un fluide

- Écoulement parfait : → on se place hors des phénomènes diffusifs.

* Contraintes surfaciques :



$$\boxed{d\vec{F}_{ext \to int} = \vec{f}_N\, dS + \vec{f}_T\, dS}$$

- Pression : $d\vec{F}_P = -p(M_i)\, d\vec{S} \Rightarrow dF_{P_z} = -\dfrac{\partial p(x,y,z)}{\partial z}\, d\tau \Rightarrow \boxed{\vec{F}_P = -\vec{\mathrm{grad}}\, P}$

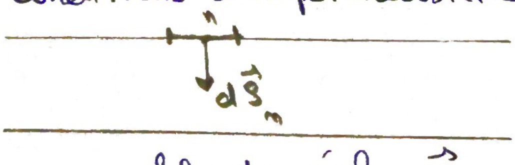
* Contraintes de viscosité :

$d\vec{F}_v = \eta \dfrac{\partial v}{\partial y}\, dS\, \vec{u}_x$ η coefficient de viscosité dynamique

$dF_{v_x} = \eta \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\, d\tau \Rightarrow \boxed{\vec{F}_v = \eta \Delta \vec{v}}$

B) Conditions aux limites

* Conditions d'imperméabilité : $\vec{j}(M).d\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{v}(M).d\vec{S}_M = 0$



donc $\boxed{\vec{v}_N = \vec{0}}$

Pour un fluide réel : $\vec{v}_T = \vec{0}$ $\vec{v}_T(M) = \vec{0}$

* Écoulement parfait :

couche limite $\boxed{\vec{v}_T = \vec{cst}}$

C) Cadre d'utilisation et couche limite

Couche limite → zone où se concentre les phénomènes de viscosité

* 1ère condition : → viscosité nulle ⇒ fluide parfait

$$\boxed{\eta \simeq 0 \rightarrow \vec{f}_{visc} = \frac{d\vec{F}_v}{d\tau} \simeq \vec{0}}$$

* 2nd condition : - on se place dans le cas de $Re \gg 1$

$Re = \frac{\Phi_{convectif}}{\Phi_{diffusif}} \gg 1$ donc pas de diffusion

- $\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\delta \ll L}$ δ épaisseur de la couche limite
- $\vec{v}_r = cst$ $\vec{f}_v = \frac{dF_v}{d\tau} = \eta \Delta \vec{v} = \vec{0}$

II. Etude de l'écoulement parfait

A) Equation d'Euler

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{grad})\vec{v}\right) = -\vec{grad}\, P + \cancel{\eta \Delta \vec{v}} + \vec{f}_{vol}$$

Effet Coanda trop quali

$\Rightarrow$ Equation d'Euler

B) Conséquences directes

- Pour des courbures de lignes de courant

$\boxed{\vec{v}(M) = v_\theta \cdot \vec{e}_\theta}$ v ne dp que de r.

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + (\vec{v}\,\vec{grad})\vec{v}\right) = -\vec{grad}\, P \Rightarrow v.\frac{1}{r}\frac{\partial(v \vec{e}_\theta)}{\partial \theta} = \frac{\vec{v}}{r}\left(v \underbrace{\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta}}_{-\vec{e}_r} + \cancel{\vec{e}_\theta \frac{\partial v}{\partial \theta}}\right)$$

En projection suivant $\vec{e}_r$: $\boxed{\frac{v^2}{R} = \frac{\partial P}{\partial r} > 0}$

C) Ecoulement potentiel

Théo. Kelvin, définir potentiel du $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$

III. Théorème de Bernoulli

A) Hypothèses et énoncé

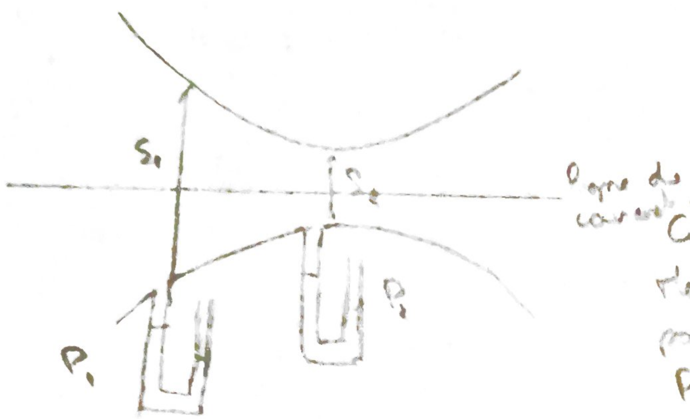
$\rightarrow$ E statio / incomp / parfait / irrotationnel

* On se place le long d'une ligne de courant :
  Eq d'Euler ap. simplificat° : $\rho\underbrace{(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}}_{\frac{1}{2}\vec{grad}\, v^2 - \cancel{\vec{v} \wedge \vec{rot}\,\vec{v}}} = -\vec{grad}\, P$

$\Rightarrow \vec{grad}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho}\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = cst}$

B) Effet Venturi



$P_A = P_0 - \rho g h$

$P_0 = 1{,}029$ bar

Conservat° du débit : $S_1 v_1 = S_2 v_2$

Mesure les hauteurs de chaque tube pour ensuite trouver la pression

$P_1 = 102800{,}86$ Pa ; $P_2 = 102800{,}39$ Pa

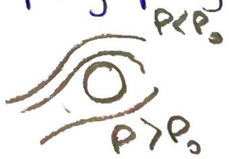
$\rightarrow \rho \dfrac{v_1^2}{2} + P_1 + \cancel{\rho g z_1} = \rho \dfrac{v_2^2}{2} + P_2 + \cancel{\rho g z_2}$ on se place sur une ligne de courant donc $z_1 = z_2 = z$.

$\Rightarrow P_1 - P_2 = \rho \left(\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2} \right)$ or $v_1 = \dfrac{S_2}{S_1} v_2$.

$\Rightarrow \Delta P = \dfrac{\rho v_1^2}{2} \left(\left(\dfrac{S_2}{S_1} \right)^2 - 1 \right) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\dfrac{2 \Delta P}{\rho} \left(\left(\dfrac{S_2}{S_1} \right)^2 - 1 \right)^{-1}} = 0{,}56 \text{ m s}^{-1}$

donc $v_2 = 1{,}12 \text{ m s}^{-1}$

Expérience qualitative : balle de ping-pong dans une colonne de vent (pompe)



$\rightarrow$ Dans l'autre sens possible aussi c.à.d tirer des conclu d'une expérience.