Leçon n°26 : Propagation avec dispersion

Niveau	**CPGE**
Prérequis	Eq de Maxwell Eq de d'Alembert OPPM dans le vide Métaux et plasma
Biblio	J'intègre PC.PC* PSI PSI* MP MP* Ondes EM dans un milieu dispersif F. Legrand Propagation des ondes E. Thibierge Electromagnétisme, Mauras
Plan	I. <u>Propagation dans un plasma</u> 1. Ionosphère position du problème 2. Equation de propagation 3. Relation de dispersion/Pulsation de coupure II. <u>Paquets d'ondes</u> 1. Définition paquet d'onde 2. Vitesse de phase/vitesse de groupe 3. Déformation du paquet d'onde III. <u>Retour sur ionosphère</u> 1. w>wc 2. w<wc

Questions :

- Si on enlève le carré sur le temps de l'équation de d'Alembert ? Dérivée seconde par rapport à l'espace, dérivée première par rapport au temps ?

Equation de diffusion.

- Quel est le problème de la vitesse de phase du plasma ?

Supérieur à la vitesse de la lumière, on va donc en déduire une vitesse plus physique qui est la vitesse de groupe.

- Quelle est le truc pas possible avec les ondes planes ?

Onde plane infinie —> or infinie dans l'espace (pas possible), énergie infinie (pas possible non plus)

- Pourquoi le plasma est neutre ?

Quand on crée une variation électronique ça crée un champ électrique qui les ramène. On peut calculer la constante de temps pour qu'elle revienne (très très courte). Globalement neutre car les charges reviennent rapidement en place.

- Est ce que tu peux refaire le calcul pour nous montrer comment on fait apparaître la vitesse de phase ?

- D'autres systèmes que le plasma pour observer vitesse de groupe, vitesse de phase ?

Le verre. Variation de l'indice du verre est donné par la loi de Cochy.
Avantage du plasma —> vitesse de phase plus rapide que la vitesse de groupe
Guide d'onde.
Vagues
Paquet d'onde en physique quantique ->Fonction d'onde d'un électron = paquet d'onde
Relation de dispersion d'un paquet d'onde d'un électron dans le vide cf calcul Marie
Dans les matériaux —> haute f qui arrive plus vite que les basses fréquences

- Pour alpha très petit, quand on envoie un paquet d'onde, on a les hautes fréquences au début, et les basses à la fin (retard)?

- Premier stade de dispersion ? vg=cte dispersion peut être différent de vfi.

- Deuxième stade ? Vg dépend de w —> étalement

- Si ça s'étale, comment on fait pour régénérer le faisceau correctement ?

On envoie le paquet d'onde sur un prisme, les hautes fréquences sont en avances
On met qqchose pour ralentir les hautes fréquences—> on reconjugue tout.
Cf schéma Marie

- Comment on peut faire pour éviter la dispersion dans des milieux dispersifs

Exemple des vagues à la surface de l'eau qui se déplace sur des kilomètres (alors que c'est un paquet d'onde qui devrait s'étaler) Onde qui ne se disperse pas=>Soliton
Terme non linéaire vont compenser la dispersion.

Lien sur le site de l'agreg

http://www.f-legrand.fr/scidoc/simul/ondes/reflexionPaquetOndePlasma.html
http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf

LP 26 : Propagation avec dispersion

Niveau : CPGE

PR : - Eq de Maxwell
- Eq de d'Alembert
- OPPH dans le vide
- ~~Rayonnement dipolaire~~. métaux et plasma

Intro : débit limité à cause de la dispersion.

I. Propagation dans un plasma : Gaz neutre T, n_e

+ - + + -
+ - - +
+ + +

1. Ionosphère position du problème

- 100 km d'Altitude, $T = 1200\,K$ et $n_e = 10^{12}\,m^{-3}$ (densité électronique).

$\vec{E} = E_0 \exp(i(\omega t - kx))\,\vec{u_z}$

Jusqu'à présent ; ondes qui suivent les équations d'alembert, dans le vide. Mais ce n'est pas le cas partout.
Plasma : gaz neutre composé d'ions, d'électrons. Caractérisé par sa température et sa densité electronique.
Ionosphère ; entre 100 et 500 km.

2. Equation de propagation

PFD sur e^- ($\frac{m_i}{m_e} = 10^3$ d'où pas sur les ions.) :

$$m_e \frac{dv}{dt} = q(\vec{E} + \cancel{\vec{v} \wedge \vec{B}}) - \cancel{mg} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{-e}{m_e}\vec{E}$$

non relativiste

on a $\vec{j} = -n_e e \vec{v} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{e n_e}{m_e}\vec{E}}$

On cherche l'équation de propagation dans ce plasma
Masse ion plus élevé que électron
Donc on applique le PFD sur l'électron et pas les ions.
On néglige P
On néglige force de Lorentz car non relativiste.
Grad div E=0 car plasma est neutre

Equation de propagation : $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \vec{grad}(\underbrace{\cancel{div\,\vec{E}}}_{=0}) - \vec{\Delta}\vec{E}$

M.F et M.AE (on les soustrait).

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad \text{avec } c^2 = \varepsilon_0 \mu_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega_c^2}{c^2}\vec{E}} \quad \text{avec } \omega_c = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$$

pulsation de coupure. plasma

Max-Faraday - Max-Ampère —>Eq de propagation dans un milieu dispersif (par définition, ne satisfait pas eq d'Alembert)

3. Relation de dispersion / Pulsation de coupure

$$-k^2\vec{E} + \frac{1}{c^2}\omega^2\vec{E} = \frac{\omega_c^2}{c^2}\vec{E} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}}}$$

k dépend de la pulsation ω.

II. Paquet d'ondes

1. Définition du paquet d'ondes

$$s(x,t) = \int_0^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t - k(\omega)x - f(\omega)) \Rightarrow \underline{s}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega)\, e^{i(\omega t - k(\omega)x)}\, d\omega.$$

A(w_) Spectre en amplitude complexe du paquet d'onde.

$$\underline{A}(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)} \qquad \in \left[\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right]$$

$$DL : k(\omega) = k_0 + \overbrace{\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0}}^{v_0} \times (\omega - \omega_0)$$

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$$

$$\boxed{\underline{s}(x,t) = \exp(i(\omega_0 t - k_0 x))\, s\left(t - \frac{dk}{d\omega} x\right)}$$

On décale de s(t-dkx/dw)

$$s\left(t - \frac{dk}{d\omega}x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp\left(i(\omega-\omega_0)\left(t - \frac{dk}{d\omega}x\right)\right) d\omega. \quad \rightarrow * \text{ dvpt ds questions}$$

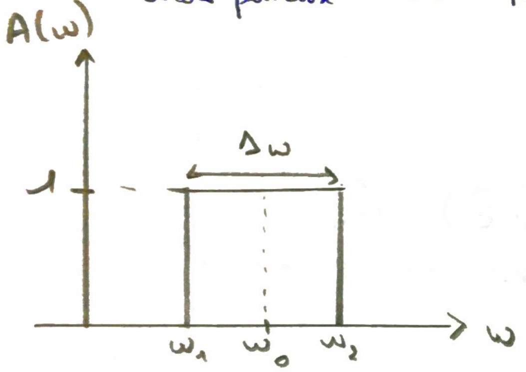
Produit de deux ondes progressives qui se propagent à deux vitesses différentes.

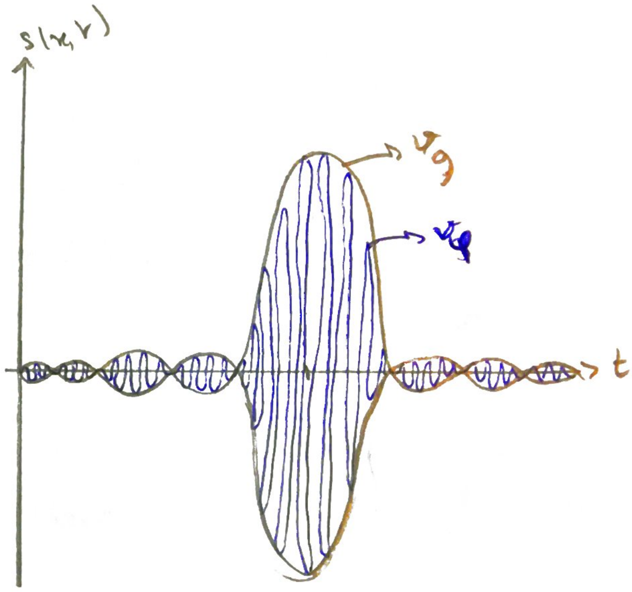
2. Vitesse de phase et de groupe

① $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0}$ vitesse de phase ② $v_g = \left(\frac{d\omega_0}{dk_0}\right)_{\omega_0}$ vitesse de groupe.

TF d'une porte = sinus cardinal

$$\underline{s}(x,t) = \underbrace{\exp\left(i\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right)}_{\text{onde porteuse}} \underbrace{s\left(t - \frac{x}{v_g}\right)}_{\text{enveloppe.}}$$





Pour des milieux plus dispersif, on ne doit pas limiter l'ordre 2 du DL

La vitesse dépend de 1/alpha —> implique une déformation de l'enveloppe :

ANIMATION (à utiliser également pour montrer ce qu'il se passe si la vitesse de phase est plus rapide que la vitesse de groupe (bande rouge)) a=0 dispersion du premier ordre Si a augmente on observe un étalement du paquet d'onde au cours de sa propagation.

3. Déformation du paquet d'ondes

$$k(\omega) = k_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + (\omega - \omega_0)^2 \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}$$

$$\underline{s}\left(t - \frac{x}{v_g}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(\omega) \exp(i(\omega-\omega_0)(1 - \alpha(\omega) x))\, d\omega$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{v_g(\omega)} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)\left(\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_0}$$

↳ étalement du paquet d'onde au cours de sa propagat°

III. Retour sur l'ionosphère

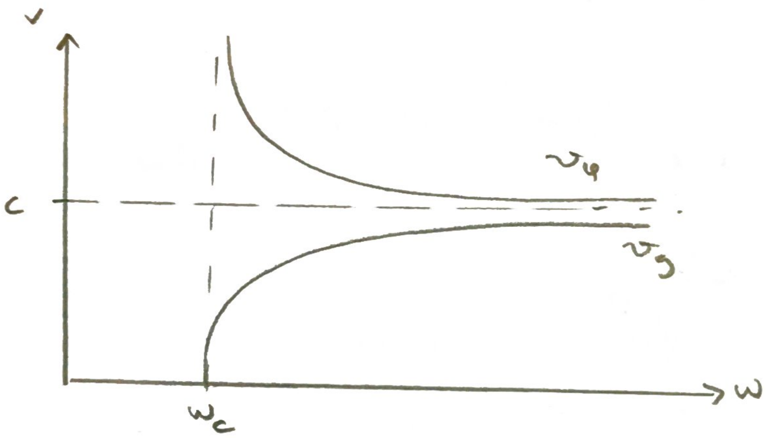
1. $\omega > \omega_c$

Relation de dispersion : $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c} \Rightarrow \omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_c^2}$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}}$$ donc $v_\varphi > c$.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \boxed{v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$ donc $v_g < c$.

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \Rightarrow 2k\,dk = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2} \Rightarrow c^2 = \frac{\cancel{2}\omega\,d\omega}{\cancel{2}k\,dk} = \underline{v_\varphi \times v_g}.$$



Qu'est ce qui se passe dans la ionosphère quand il y a une propagation?

Pour avoir un signal d'un satellite, il faut que la fréquence soit supérieur à 10 MHz, sinon les signaux seront bloqués par la ionosphère.

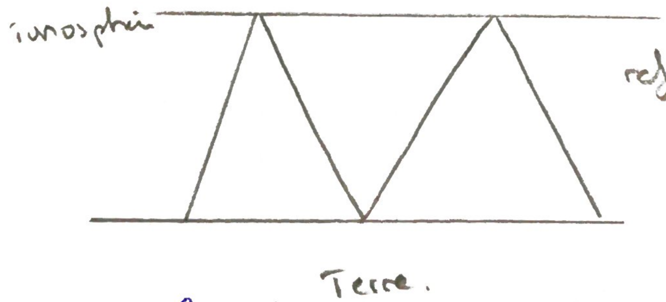
$$\omega_c = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}} = 10^7\ \text{rad/s} \Rightarrow \boxed{f_c = 10\,\text{MHz}}$$

pour envoyer un signal à un satellite il faut que $f > f_c$ pour traverser la ionosphère.

Doivent tenir compte de l'étalement du paquet d'onde à l'intérieur de la ionosphère.

2. $\omega < \omega_c$

Relation de dispersion : $k = \pm i \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$



reflexion sur la ionosphère.

phénomène utilisé par les ondes radios (reflexion sur la ionosphère —> transport d'information)
ANIMATION : on peut jouer sur la fréquence centrale :
Plus on étale la gaussienne, plus les paquet d'ondes seront fin.
Si on augmente la fréquence de coupure, le paquet d'onde subit une déformation alors que ses hautes fréquences seront réfléchies et les basses sont transmises dans la ionosphère.
Plus on augmente la fréquence de coupure, moins il y a de fréquence transmise —> jusqu'à ce que tout soit réfléchi.

utiliser pour la radio.
voir animat°

Questions :

OP n'est pas possible car infini ~~des~~ NRS infini pas physique

Ph le plasma est neutre ? cst de tps qd revient très court.
globalement neutre charge reviennent vite à leur place

*Calcul de $\underline{s}(x,t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i(\omega t - kx)} d\omega$.

$DL_1 : k(\omega) = \underbrace{k(\omega_0)}_{k_0} + \underbrace{\left(\frac{\partial k}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_0}}_{v_0} (\omega - \omega_0)$ on a : $\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0)$

$$\underline{s}(x,t) = \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i[(\omega_0 + (\omega-\omega_0))t - (k_0 + v_0(\omega-\omega_0))x]} d\omega.$$

$$= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i[(\omega-\omega_0)t - v_0(\omega-\omega_0)x]} d\omega.$$

$$= \quad '' \quad \int_0^{+\infty} \underline{A}(\omega) e^{i[(\omega-\omega_0)(t - v_0 x)]} d\omega.$$

$$= \quad '' \quad s(t - v_0 x)$$

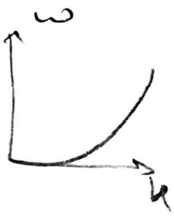
- Animat° vitesse de phase et de groupe.
  - vitesse de phase : sommet cosinus
  - de groupe : sommet de l'enveloppe.

- d'autre système : verre, diélectrique, guide d'onde, onde sismique vague.

Recombinaison.

$$\begin{cases} \hbar\omega = E \\ \hbar k = P \end{cases}$$

$E = \frac{1}{2}\frac{P^2}{m} = E_c \Rightarrow \hbar\omega = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2 k^2}{m} \Rightarrow \underline{\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}}$ relat° de dispersion paquet d'onde.



Rapl.

① $v_g = \text{cst} = \text{dispersion} \neq v_\varphi$

② $v_g(\omega)$ déformation pH fq va + vite que ~~haute~~ gd fq.