

Leçon n°1 : Contact entre deux solides, frottements

Niveau	Licence
Prérequis	Cinématique du solide
Biblio	
Plan	<ul style="list-style-type: none">I. <u>Contact entre solides</u><ul style="list-style-type: none">1. Description cinématique2. Actions de contactII. <u>Lois de coulomb</u><ul style="list-style-type: none">1. Enoncé statique/dynamique<ul style="list-style-type: none">A) StatiqueB) Dynamique2. Vérification3. Aspect énergétiqueIII. <u>Application</u><ul style="list-style-type: none">1. Plan incliné2. Cerceau

Questions :

- V_g ? Seule vitesse de translation? Non il y aussi la vitesse de rotation.
- Qu'est ce que la composante normale positive? R_n action du solide 2 sur 1.

Surface

- Est ce que R_n est tjrs positif ? Vers l'extérieur de la surface ? Si on applique une pression de l'ordre du module d'young du matériau \rightarrow on va avoir des R_n négatif. Si T augmente, pour des faibles P , respecte les lois de coulombs (droite) mais pour des pressions plus forte, rupture de la droite T devient une constante \rightarrow loi de coulomb ne marche plus

Géologue quand ils appliquent des grosses pressions sur des roches.

- S'il n'y a pas de glissement alors $\tan \alpha < \mu_s$; est ce que la réciproque est vraie ? (cad si on a $\tan \alpha < \mu_s$ alors il n'y a pas de glissement)

Non, hysteresis : si un objet glisse à partir d'un angle limite, si on remonte cet angle limite, l'objet ne va pas s'arrêter de glisser \rightarrow il faut mettre un angle plus important que l'angle limite.

Cone de frottement

Se demander ce que l'on apprend de plus sur les frottements avec le cerceau

Frottement solide dans un milieu microscopique

Action de contact ; couple de pivotement et couple de roulement

Remarques :

Il 1) Illustrer avec des exemples de la vie de tous les jours

Adimensionnel —> relation entre force normale et force tangentielle

Eventuellement parler : loi phénoménologique ne dit rien du phénomène qui est derrière pour comprendre les détails des interactions au niveau des surfaces —> aspects microscopiques

Il 3) application de puissance dissipée, élévation de température

Application purement de statique —> vis, échelle sur un mur,

De dynamique avec si possible μ_s et μ_d

CP 1: Contact entre deux solides Frottements

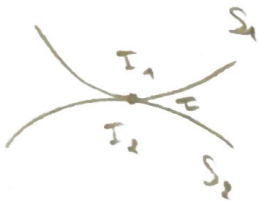
Niveau: Licence

PR: cinématique du solide.

Intro:

I. Contact entre deux solides

1) Description cinématique



$$\vec{v}_G = \vec{v}_{I_1/S_1}$$

$$\vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_2/R} + \vec{v}_{I_1/I_2}$$

$$\hookrightarrow \vec{v}_G = \vec{v}_{I_1/R} - \vec{v}_{I_2/R}$$

$$\vec{v}_{I_2/R} = \vec{v}_{I_2/I_1} + \vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_2/I_1} + \vec{v}_{I_1/I_2}$$

$$\hookrightarrow \vec{v}_G = \vec{v}_{I_2/I_1} - \vec{v}_{I_1/I_2}$$

2) Actions de contact



$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$$

force oppose à la pénétration du solide.

II. Lois de Coulomb

1) Enoncé statique/dynamique

a) statique

$$\vec{v}_G = \vec{0} \quad \|\vec{R}_t\| \leq \mu_s \|\vec{R}_n\| \quad \text{avec } \mu_s \text{ coefficient de frottement statique}$$

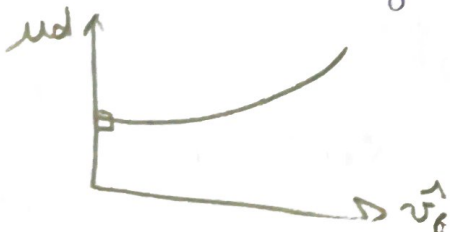
* μ_s indépendant de la surface apparente

b) dynamique

$$\vec{v}_G \neq \vec{0} \quad \|\vec{R}_t\| = \mu_d \|\vec{R}_n\| \quad \text{avec } \mu_d \text{ coefficient dynamique}$$

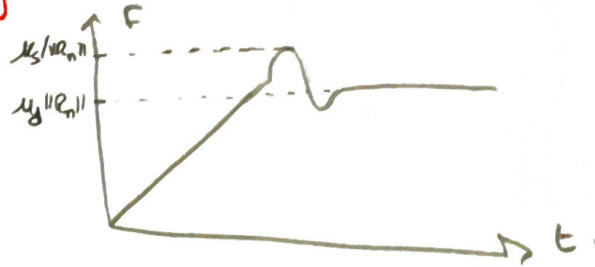
* \vec{R}_t même direct° que \vec{v}_G : $\vec{R}_t \times \vec{v}_G = \vec{0}$

* \vec{R}_t oppose à la vitesse de glissement : $\vec{R}_t \cdot \vec{v}_G < 0$



$$\mu_d = \mu_s + k v_G$$

2) Vérification



$$F = \mu_s \|\vec{R}_n\| \Rightarrow \mu_s = \frac{F}{\|\vec{R}_n\|}$$

AN. $m = 130 \text{ g}$ $F = 0,3 \text{ N}$

$$\mu_s = \frac{0,3}{130 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81} = 0,25$$

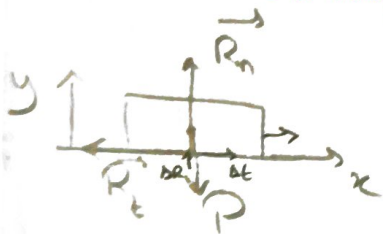
A vitesse constante : $F = \mu_d \|\vec{R}_n\| \Rightarrow \mu_d = \frac{F}{\|\vec{R}_n\|}$

AN $m = 130 \text{ g}$

$F = 0,2 \text{ N}$ $\mu_d = 0,16$

On remarque : $\mu_s > \mu_d$ plus facile de maintenir un mouvement (μ_d) que de mettre en mouvement (μ_s)

3) Aspect énergétique

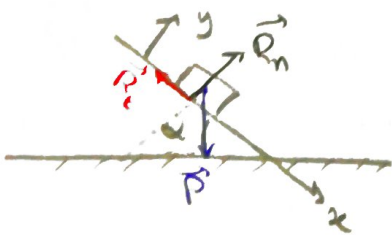


$$\delta W = \vec{R}_t \cdot \delta \vec{r} = -R_t \cdot \delta x$$

Travail des forces de frottement, toujours négatif.
Dissipatif (quand on frotte nos mains, ça chauffe)

III. Application

1) Plan incliné



PFD:
$$\begin{cases} m a_x = -R_t + m g \sin \alpha \\ 0 = R_n - m g \cos \alpha \end{cases}$$

Pas de glissement : $R_t \leq \mu_s R_n$ (1) $a_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_t = m g \sin \alpha \\ R_n = m g \cos \alpha \end{cases}$

(1) $m g \sin \alpha \leq \mu_s m g \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha \leq \mu_s \Rightarrow \alpha < \arctan \mu_s$

Glissement: $R_t = \mu_d R_n(z)$ $ma_x = -R_t + mg \sin \alpha$
 $R_n = mg \cos \alpha$

(2)

(2) $ma_x = -\mu_d mg \cos \alpha + mg \sin \alpha$

$\rightarrow a_x = -g(\mu_d \cos \alpha - \sin \alpha)$

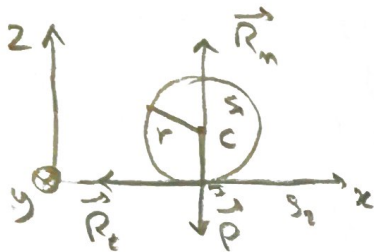
$v(t) = t g (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) + v(0)$
 $= 0$

$x(t) = g \frac{t^2}{2} (\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha) + x(0)$
 $= 0$

Alpha < arc tan mu s -> non glissement

Deplacement rectiligne accéléré
 Alpha = pi/2 on retrouve notre équation de chute libre

2) Cercle



CI: $\vec{v}(0) = v_0 \cdot \vec{e}_x$
 $\omega(0) = \omega_0 \vec{e}_y$

PFD: en x: $ma_x = -R_t$
 en z: $0 = R_n - mg$

en y: $\frac{dL_c}{dt} = r R_t$
 $mr^2 \frac{d\omega}{dt} = r R_t$

$\vec{\omega} \wedge \vec{r}$
 $-\vec{e}_y \wedge r \vec{e}_x = r \vec{e}_z$
 $r R_t \vec{e}_y$

$\vec{v}_G = (v_c(t) - r\omega(t)) \vec{e}_x$ or $R_t = \mu R_n$ approximatif $\mu_s = \mu_d = \mu$

$ma_x = -R_t$ et $R_n = mg$

donc $ma_x = -\mu mg \Rightarrow v(t) = -t\mu g + v(0) = -t\mu g + v_0$

$mr^2 \frac{d\omega}{dt} = \mu R_t \Rightarrow mr^2 \frac{d\omega}{dt} = t\mu mg \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu g}{r}$

$\Rightarrow \omega(t) = \frac{t\mu g}{r} - \omega(0)$ ainsi $\omega(t) = \frac{\mu g t}{r} - \omega_0$

$\vec{v}_G = -t\mu g + v_0 - r(\frac{\mu g t}{r} - \omega_0) \Rightarrow \vec{v}_G = -2t\mu g + v_0 + r\omega_0$

or $\vec{v}_G = 0$ donc $-2t\mu g + v_0 + r\omega_0 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 + r\omega_0}{2\mu g}$

$$v(t_1) = -\left(\frac{v_0 + r\omega_0}{2\mu_0}\right) \mu_0 + v_0$$

$$-\frac{v_0}{2} - \frac{r\omega_0}{2} + v_0 = 0$$

$$+\frac{v_0}{2} - \frac{r\omega_0}{2} = 0$$

$$\Rightarrow v(t_1) = \frac{v_0}{2} + \frac{r\omega_0}{2}$$

or $v(t_1) < 0$ pour que le cerceau revienne vers nous.

$$\text{donc } \boxed{r\omega_0 > v_0}$$

Vitesse où il n'y a plus de glissement \rightarrow pour que le cerceau revienne vers nous il faut que la vitesse soit négative.

Frottement solide viennent d'expérience \rightarrow empirique

Questions :



$$\frac{dO I_1}{dt} = \frac{dO I_2}{dt}$$

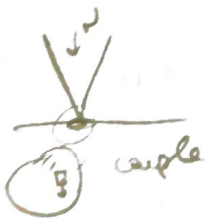
Cône de frottement



ne glisse pas si $F \in$ cône α_s .

$$\mu_s = \tan \alpha_s$$

Remarque :



pivotement / roulement

Loi expérimentale

ordre de grandeur II.1

App aspect énergétique : front vitesse II.3

III. 1 Appli de statique

1 Appli dynamique (avec μ_s et μ_d)

Coefficient de frottement \neq à rebrousse pied et du leant du pied

LP 1: Frottement

Rapports du jury : Leçon doit être illustrée par des exemples concrets maîtrisés /occasion d'appliquer les lois de la mécanique du solide / niveau trop élémentaire /compréhension des aspects microscopiques /notion de contact ponctuel et réalité microscopique de ce contact / différence entre coefficients de frottement statique et dynamique /distinguer contact ponctuel et contact étendu / dégager la distinction entre les deux lois de Coulomb : condition nécessaire de non glissement et loi du frottement de glissement / phénomènes d'hystérésis associés au frottement solide / approche énergétique du contact / roulement

Niveau : MPSI

Pré-requis :

- Cinématique du solide

-Mécanique du point

Biblio :

-Perez de mécanique

-<http://olivier.granier.free.fr/MOOC/co/ex-CCP-3-meca-solide.html>

-<https://www.youtube.com/watch?v=eucVByJ23zU>

Introduction:

Dans cette leçon nous utiliserons les théorèmes fondamentaux de la mécanique ; le théorème de la résultante cinétique (TRC) et le théorème du moment cinétique (TMC). Dans de nombreux systèmes physiques, il arrive que des solides soient en contact. Les forces qui s'exercent sur chaque solide dépendent d'un grand nombre de paramètres liés à la surface de contact et il est impossible d'en donner un modèle simple comme on le fait pour les forces de gravitation et électromagnétiques agissant à distance. Nous allons donc utiliser des lois empiriques qui vont nous permettre de montrer l'importance du frottement et son utilité dans différents problèmes.

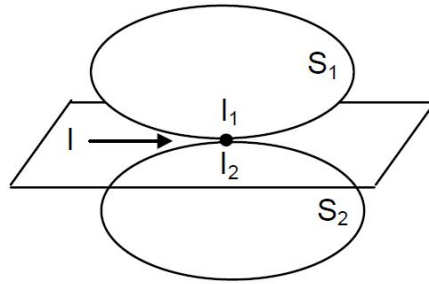
I-Contact entre solide

1) Vitesse de glissement

Dans un référentiel galiléen R , on considère deux solides $S1$ et $S2$ en contact ponctuel au point géométrique I .(partir directement sur un parallélépipèdes sur un plan, plus facile)

Le point $I1$ est le point coïncidant a I et appartient au solide $S1$.

Le point $I2$ est le point coïncidant a I et appartient au solide $S2$.



En appliquant la relation de composition des vitesses au point I1 par rapport a R et au référentiel relatif S2, la vitesse d'entraînement étant celle du point coïncidant I2, il vient : (plus facile à se le représenter si on part d'un système avec un parallélogramme qui glisse sur un plan horizontal)

$$\vec{v}_{I_1/R} = \vec{v}_{I_1/S_2} + \vec{v}_{I_2/R}$$

La vitesse de glissement de S1 sur S2 est :

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{I_1/S_2} = \vec{v}_{I_1/R} - \vec{v}_{I_2/R}$$

Cette vitesse est contenue dans le plan tangent en I aux deux solides. En effet, la vitesse du point I par rapport a R s'exprime de deux façons différentes suivant que le référentiel relatif est S1 ou S2 :

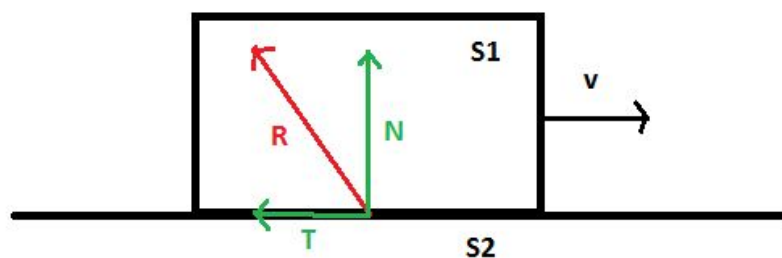
$$\vec{v}_{I/R} = \vec{v}_{I/S_2} + \vec{v}_{I_2/R} = \vec{v}_{I/S_1} + \vec{v}_{I_1/R}$$

et puisque v_{I/S_1} et v_{I/S_2} appartiennent au plan tangent, la vitesse de glissement $v_g = v_{I/S_2} - v_{I/S_1}$ est également contenue dans ce plan.

Remarque: v_g ne dépend que des solides en contact, il ne dépend pas du référentiel d'observation.

2) Actions de contact

Si on s'intéresse au cas de notre parallélépipède. On considère seulement un glissement sans pivotement. (Pour le pivotement voir plan PH suet)



R_n : Force qui s'applique sur le solide S1, elle est dirigé vers l'intérieur du solide car c'est une force répulsive manifestant le rapprochement des électrons à la surface des solides.

R_t : Force de frottement qui résiste au déplacement

II-Lois de Coulombs et Amontons

1) Enonce Statique/dynamique

Statique: $v_g=0$

L'expérience montre que:

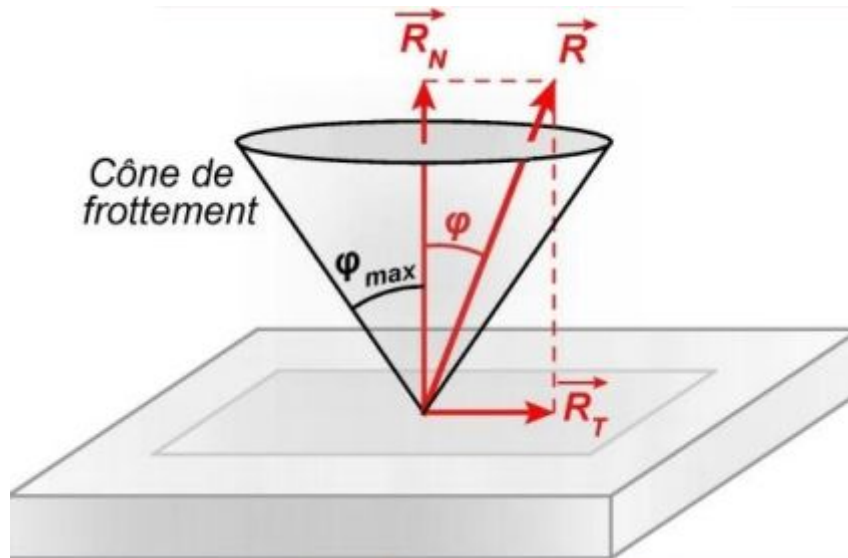
$$\vec{T} \leq \mu_s \vec{N}$$

ou μ_s est le coefficient de frottement statique.

1er loi: μ_s indépendant de l'aire de contact apparente

2eme loi: μ_s indépendant de N

μ_s ne dépend que de l'état et de la nature des surfaces en contact. Géométriquement, R se situe à l'intérieur d'un cône de révolution de demi-angle au sommet: $\varphi_{\max} = \arctan(\mu_s)$.



Dynamique: v_g non nul

1er loi: T même direction que v_g

$$\vec{T} \times \vec{v}_g = 0$$

(relation vectoriel)

2eme loi: T sens opposé à v_g

$$\vec{T} \cdot \vec{v}_g < 0$$

(relation vectoriel)

3eme loi:

$$\vec{T} = \mu \vec{N}$$

Le coefficient de frottement dynamique est toujours inférieur au coefficient de frottement statique.

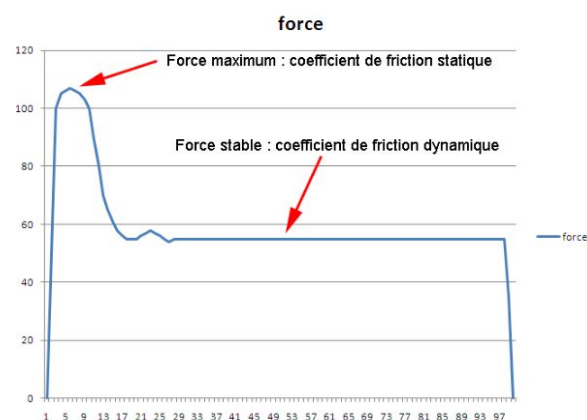
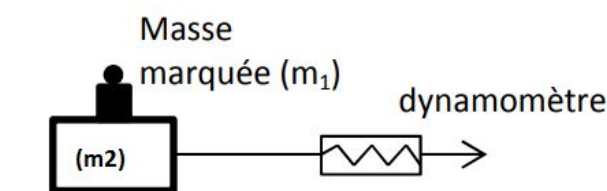
Matériaux	μ_s	μ_c
Acier sur glace	0.1	0.05
Acier sur acier, sec	0.6	0.4
Acier sur acier, lubrifié	0.1	0.05
Bois sur bois	0.5	0.3
Téflon sur acier	0.04	0.04
Chaussures sur glace	0.1	0.05
Bottes de montagne sur rocher	1.0	0.8
Pneus de voiture sur béton sec	1.0	0.7
Caoutchouc sur asphalte	0.6	0.4

2) Vérification expérimental

<https://www.youtube.com/watch?v=eucVByJ23zU>

On tire une masse posée sur une plaque en bois, elle même posée sur une plaque en bois. Un dynamomètre est relié à la plaque inférieure en bois pour mesurer la norme horizontale de la force de frottement.

->Expérience pour montrer le fait que $\mu_s > \mu_c$



(attention, ce n'est pas la courbe liée à l'expérience de la vidéo, mais elle a la même forme)

Voilà ce que l'on obtient lorsque l'on fait l'expérience:

- Une augmentation de la force jusqu'à une valeur limite, qui est la force nécessaire pour mettre en mouvement le solide

- Puis la force diminue jusqu'à une certaine valeur qui est la force nécessaire pour entretenir le mouvement.

A l'aide de cette expérience on peut calculer les coefficients de frottement dynamique et statique.

A la naissance du mouvement: $|T| = \mu_s |N|$

AN: $m_1 + m_2 = 12\text{Kg}$, force statique 50N.

$$s = \frac{|T|}{|N|} = \frac{F}{mg}$$

On trouve $\mu_s = 0.43$

Avec le solide en mouvement: $|T| = \mu_d |N|$

AN: $m_1 + m_2 = 12\text{Kg}$, force statique 30N.

$$s = \frac{|T|}{|N|} = \frac{F}{mg}$$

On trouve $\mu_d = 0.25$

Les résultats sont un peu en dessous des coefficient de frottement pour le bois sur bois.

Mais on remarque quand même que $\mu_s > \mu_d$

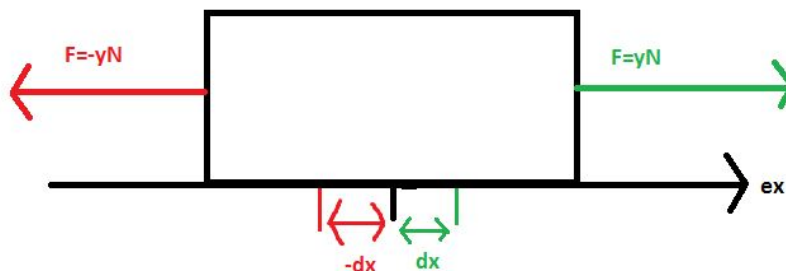
-> C'est pour cela qu'il est plus facile d'entretenir le mouvement que de mettre l'objet en mouvement.

Ceci est la méthode généralement utilisée pour déterminer le coefficient de frottement dynamique. Nous verrons plus tard dans la leçon qu'une technique plus courante est utilisée pour le coefficient statique (plan incliné).

3) Aspect énergétique

On fait l'approximation dans cette partie que $\mu_s = \mu_d$.

Calculons le travail élémentaire nécessaire pour déplacer un solide de dx .



Si on tire le bloc dans un sens.

$$W = (+N)ex \cdot (+x)ex$$

$$W = Nx$$

Si on tire le bloc dans l'autre sens.

$$W = (-N)dx.(-x)dx$$

$$W = Nx$$

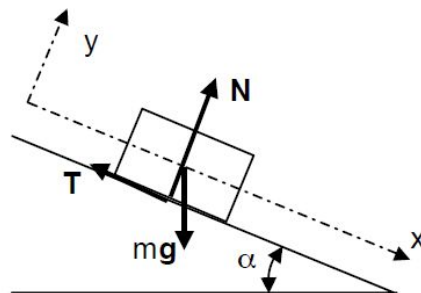
On remarque que peu importe le mouvement il est toujours nécessaire d'apporter de l'énergie à notre système. Comparé à une force élastique tel un ressort qui lui emmagasine de l'énergie pour ensuite retrouver sa position d'équilibre.

L'énergie que l'on apporte est dissipée sous forme de chaleur. (exemple des mains qui frottent).

III-Applications

1) Plan incliné

Considérons un solide de masse m immobile sur un plan incliné faisant un angle avec l'horizontale.



Le TRC s'écrit :

$$m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

En projetant cette relation sur les axes Ox et Oy il vient :

$$mg \sin \alpha - T = 0$$

$$mg \cos \alpha - N = 0$$

et puisque le solide est immobile $T/N = \tan \alpha \leq \mu s$. C'est le phénomène d'arc-boutement. Quelle que soit la masse du solide, il ne glisse pas tant que $\alpha < \alpha_s$ avec $\alpha_s = \arctan(\mu s)$. Ceci explique aussi que l'on ne peut pas enfoncer une vis en appuyant simplement dessus (même avec un marteau !) car l'inclinaison des filets n'est pas suffisante pour autoriser le glissement.

Considérons maintenant le solide mobile sur le plan incliné. Le TRC s'écrit cette fois :

$$m\vec{g} + \vec{R} = m\vec{a}$$

et la projection de cette relation sur les axes Ox et Oy :

$$mg \sin \alpha - T = m\ddot{x}$$

$$mg \cos \alpha - N = 0$$

Le solide glisse et donc $T/N = \mu$. En remplaçant T dans la première équation il vient :

$$\ddot{x} = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$$

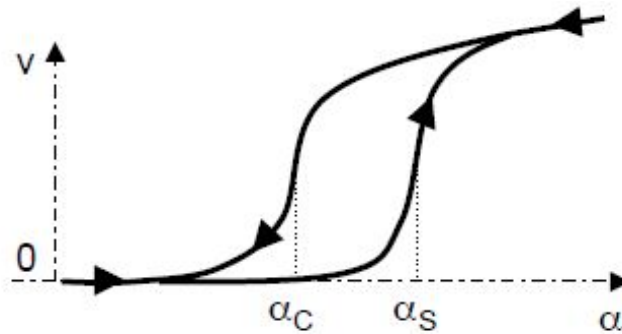
En analysant cette formule on remarque qu'il y a deux accélération:

- $g \sin \alpha$ qui représente l'accélération liée à la pesanteur
- $g \cos \alpha$ qui représente l'accélération de freinage du frottement.

Il y a compétition entre ces deux accélération.

Pour un angle très grand le solide a un mouvement accéléré, puis pour $\alpha = \alpha_c$ tel que $\tan(\alpha_c) = \mu$ le solide glisse à vitesse constante et enfin pour $\alpha < \alpha_c$ le solide ralentit.

On peut alors tracer un cycle d'hystérésis en partant de $\alpha < \alpha_c$ et en augmentant l'inclinaison, puis de $\alpha < \alpha_s$ en diminuant l'inclinaison.



Expérience

Reprenons l'exemple précédent en utilisant un livre posé sur une table. On veut déterminer les coefficients μ et μ_s .

Le livre étant immobile sur la table horizontale, on incline celle-ci jusqu'à ce que le livre se mette à glisser. On note alors la position de la table (contre un mur par exemple) et on en déduit $\mu_s = \tan \alpha_s$

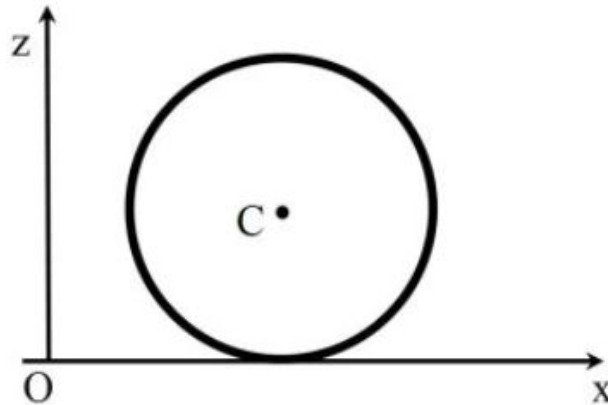
Le livre glissant, on réduit doucement l'inclinaison et on note la position de la table dès que le livre commence à ralentir. On déduit α_c et $\mu = \tan \alpha_c$

2) Le cerceau

<http://olivier.granier.free.fr/MOOC/co/ex-CCP-3-meca-solide.html>

Un cerceau de masse M et de rayon R est lancé avec les conditions initiales suivantes:

$\vec{v}_C(0) = v_0 \vec{u}_x$, avec $v_0 > 0$ et $\vec{\omega}(0) = -\omega_0 \vec{u}_y$, avec $\omega_0 > 0$.



Il reste en contact avec le plan horizontal ; ce contact est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f .

Le mouvement du cerceau est donné par la vitesse $\vec{v}_c = v(t) \vec{u}_x$ de son centre C et son vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{u}_y$.

La vitesse de glissement par rapport au sol est

$$\vec{v}_g = (v - R\omega) \vec{u}_x$$

A $t = 0$, $\vec{v}_g = (v_0 + R\omega_0) \vec{u}_x$, est non nulle : la 1^{ère} phase est une phase avec glissement dans le sens des x positifs.

Les forces s'exerçant sur le cerceau sont : le poids et la réaction du support.

Le théorème de la résultante cinétique donne :

$$M \frac{dv}{dt} = T \quad \text{et} \quad -Mg + N = 0$$

Le théorème du moment cinétique en C donne :

$$MR^2 \frac{d\omega}{dt} = -RT$$

De plus, durant la 1^{ère} phase :

$$\frac{dv}{dt} = -fg \quad \text{soit} \quad v(t) = v_0 - fgt \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{fg}{R} \quad \text{soit} \quad \omega(t) = -\omega_0 + \frac{fg}{R}t$$

La vitesse de glissement à l'instant t est alors :

$$v_g(t) = v(t) - R\omega(t) = v_0 + R\omega_0 - 2fgt$$

Elle s'annule à l'instant :

$$t_0 = \frac{v_0 + R\omega_0}{2fg}$$

À quelle condition le cerceau revient-il en arrière ?

La 2^{ème} phase est une phase de roulement sans glissement. L'équation $T = -fN$ n'est plus valable durant cette phase et doit être remplacée par :

$$v_g(t) = v(t) - R\omega(t) = 0$$

Les autres équations restant valables. On en déduit :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad v(t) = v(t_0) = \frac{v_0 - R\omega_0}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

Soit:

$$\omega(t) = \omega(t_0) = \frac{-\omega_0 + \frac{v_0}{R}}{2}$$

Le cerceau revient en arrière si $v(t_0) < 0$, soit :

$$R\omega_0 > v_0$$

Conclusion

Nous avons vu dans cette leçon que les lois phénoménologiques du frottement ne sont pas les mêmes s'il y a glissement ou non-glissement. Il faut remettre le problème en équation chaque fois que l'on passe d'une situation à l'autre. La solution est donc a priori plus complexe que celle d'un problème sans frottement à une équation différentielle.

D'autre part les actions de contact ne sont pas connues au départ. Ce sont les lois empiriques du frottement qui permettent de relier les composantes de ces forces et de réduire le nombre de paramètres

Remarques:

- il y a deux expériences, pas le temps de faire les deux, parler de la première, et revenir après la leçon sur la deuxième.

-

.

Question: Est-ce que la force de contact peut être attractive (exemple je mouille mon doigt, la feuille est attirée suite au contact? Ce sont les forces de van der Waals qui entrent en jeu à ce moment-là. Cependant il est possible que la force soit attractive si les matériaux sont de la même nature et une grande surface de contact (Écrit dans le perez)