LP 07 - Dynamique relativiste

Niveau : Licence

Prérequis :

- Mécanique classique de Newton
- Cinématique relativiste
- Facteur de Lorentz
- Quadrivecteurs

Biblio :

- https://www.youtube.com/watch?v=B0BOpiMQXQA
- http://www.armelmartin.mon-site-a-moi.fr/doc/cours/adoc_bertozzi_article.pdf
- Perez, relativité, DUNOD

Objectifs :

- Définir le formalisme quadrivectoriel et justifier son intérêt
- Voir le principe de la dynamique relativiste, établir le quadrivecteur énergie-impulsion et faire le lien entre la mécanique classique et celle relativiste
- Appliquer le formalisme aux collisions élastiques

Plan amélioré :

Introduction :

À la fin du XIXème siècle et au début du XXème siècle, notre discipline a vu survenir de nombreux changements. En effet, à cette époque, nous avions deux théories qui expliquaient tous les phénomènes observés, et il n'y avait que quelques expériences qui restaient inexpliquées. Pour pouvoir les décrire, deux nouvelles théories furent donc mises en place et l'une d'entre elle est la théorie de la relativité. La cinématique nous a permis d'expliquer les phénomènes pour des corps voyageant à des vitesses proches de celle de la lumière. Nous avons défini le facteur de Lorentz avec son effet sur le temps et les longueurs. Nous nous intéressons alors à la prévision de ces phénomènes par la dynamique relativiste, de manière analogue à ce qui a été fait pour la mécanique classique

I. Position de la dynamique relativiste

A. Un besoin de simplification

Intérêt du formalisme quadrivectoriel

B. Quadrivecteurs

Énergie - Impulsion

Vitesse

C. Energie

Analogie mécanique classique → une énergie cinétique existe

Énergie relativiste

Invariant

D. Principe Fondamentale de la Dynamique

Déf. PFD avec quadriforce

→ Limite classique, PFD toujours valable pr v<<c

E. Photon

Pas de masse

II. Application
   A. Particule chargée dans un champs
      → mouvement dans le référentiel de laplace
   B. Collisions élastiques

Exprimer effet Compton : Lg d'onde de Compton
A garder sur une feuille à côté : Collisions inélastiques
https://femto-physique.fr/mecanique/pdf/physique_des_collisions.pdf

Conclusion :
La dynamique classique, établie ici comme la limite non-relativiste de la dynamique relativiste, reste dans bien des cas applicable vu la faible vitesse de la majeure partie des corps qui nous entourent

Leçon présentée

Plan :

I. Position de la dynamique relativiste
   A. Quadrivecteur impulsion
   B. Energie
   C. Principe Fondamentale de la Dynamique
   D. Photon
II. Application
   A. Particule chargée dans un champs
   B. Collisions élastiques
   C. Collisions inélastiques

NOTES
I.Position de la dynamique relativiste
   a) Quadrivecteur impulsion

Le quadrivecteur énergie impulsion P est défini par :

$$P = mV$$

Le quadrivecteur vitesse V est défini par :

$$V = \frac{dOM}{dt'}$$

Dans un référentiel R en mouvement rectiligne à une vitesse v par rapport au référentiel propre, la vitesse est :

$$V = \gamma \frac{dOM}{dt}$$

En utilisant la notation du quadrivecteur position OM = X , le quadrivecteur vitesse

$$V = \gamma(c, \vec{v})$$

V s'écrit:

avec $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si m est la masse de la particule, le quadrivecteur énergie impulsion P est défini par : $P = mV = m\gamma(c, \vec{v})$

b) Energie

Lorsque la vitesse de la particule est faible devant c, nous pouvons développer γ à l'ordre le plus bas (1er ordre) en v/c et il vient :

$$\gamma = 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

Le quadrivecteur énergie impulsion s'écrit alors :

$$P = \left(\frac{1}{c}(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2), \gamma m\vec{v}\right)$$

On s'intéresse aux différents termes :

Energie cinétique: $\frac{1}{2}mv^2$

Énergie au repos: mc^2

	m_p	m_n	m_e
En MeV/c^2	938,28	939,57	0,5110
En u	1,007276 u	1,008665 u	$0,54858.10^{-3}$ u

C'est pourquoi nous postulons dans le cas général :

$$P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

E est l'énergie relativiste de la particule dans R et p sa quantité de mouvement relativiste.

$$E = \gamma mc^2$$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

L'expression de l'énergie relativiste E peut se mettre sous la forme :

$$E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2$$

(Energie de masse + énergie cinétique)

L'énergie cinétique relativiste de la particule est alors définie par :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2$$

Voyons maintenant quelles sont les expressions de l'énergie E' et de l'impulsion p' de la particule dans son référentiel propre R' défini à l'instant t dans R.

$$\begin{cases} E'_x &= \gamma(E - vp_x) \\ p'_x &= \gamma(p_x - v\frac{E}{c^2}) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{cases}$$

(Transformée de Lorentz quadrivecteur impulsion)
Mais dans R', $p'_x = p'_y = p'_z = 0$ puisque la particule est au repos.

On trouve finalement :

$$E' = mc^2 \ \text{ et } \ \overrightarrow{p'} = \vec{0}$$

Ce résultat était évident à partir des expressions générales de E et p lorsque R est le référentiel propre et v =0.

$$E = \gamma mc^2$$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$

Intéressons nous maintenant à la pseudo-norme du quadrivecteur énergie impulsion dans le référentiel R.
(Pseudo norme - quadrivecteur au carrée)

$$P^2 = P_i P_J = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\gamma^2 m^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m^2 v^2$$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 .$$

On sait que les pseudos normes sont des invariants dans n'importe quel référentiel. La relation suivante est donc vrai dans tous les référentiels :

$$\underline{E^2 = m^2c^4 + p^2c^2}$$

Vérifions l'invariance → On peut le vérifier dans R':

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2c^2$$

c) PFD

Le quadrivecteur force de la particule de masse m, dans un référentiel galiléen R est défini par :

$$F = \frac{dP}{dt'}$$

Le phénomène de dilatation du temps permet d'écrire :

$$F = \gamma \frac{dP}{dt}$$

On en déduit :

$$F = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

Dans le cadre général de la mécanique relativiste, on postule que dans un référentiel galiléen R :

$$F = \gamma \left(\frac{\overline{f} \cdot \vec{v}}{c}, \vec{f} \right)$$

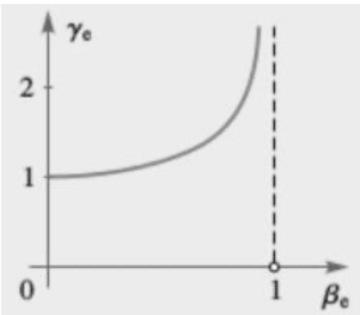
La force est suivant les trois composantes de l’espace.

d) Photon

Photon se déplace à la vitesse de la lumière dans tous les référentiels, ils ont une énergie bien défini. On va postuler que leur masse est nulle.
En reprenant la formule de l'énergie d’une particule dans un référentiel R.

$$E = \gamma mc^2$$

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v}$$



A partir de l’invariant :

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

On obtient (car m_{photon}=0) :

$$E = pc$$

Mais l'énergie E et l'impulsion p restent indéterminés par cette approche.

Ce sont les travaux de Planck puis d'Einstein qui ont permis de définir l'énergie d'un photon par :

$$E = h\nu$$

où ν est la fréquence du rayonnement électromagnétique et h = 6,62x10^{-34} J.s la constante de Planck.

De Broglie nous donne :

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Une autre façon d'écrire l'énergie et l'impulsion du photon est :

$$E = \hbar\omega \quad \text{et} \quad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Le quadrivecteur impulsion se note :

$$P = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \hbar\vec{k}\right)$$

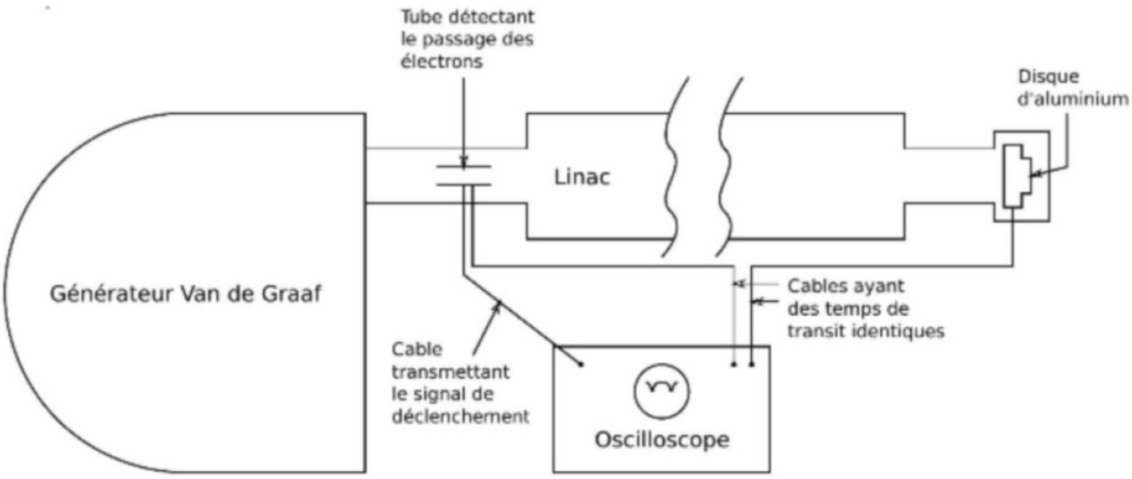
Sa pseudo norme est nulle en accord avec le fait que la masse du photon est nulle.

$$P^2 = P_i P_i = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \hbar^2\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) = 0$$

II. Application

a) Particule chargée dans un champs

Bertozzi en 1964 souhaitait réaliser une expérience illustrant la théorie relativiste. Il utilise des électrons accélérés dans un LINAC par une tension connue, avec l'objectif de mesurer à la fois leur vitesse et leur énergie.



Accélérer des électrons pour voir comment variait l'énergie cinétique et la vitesse des électrons

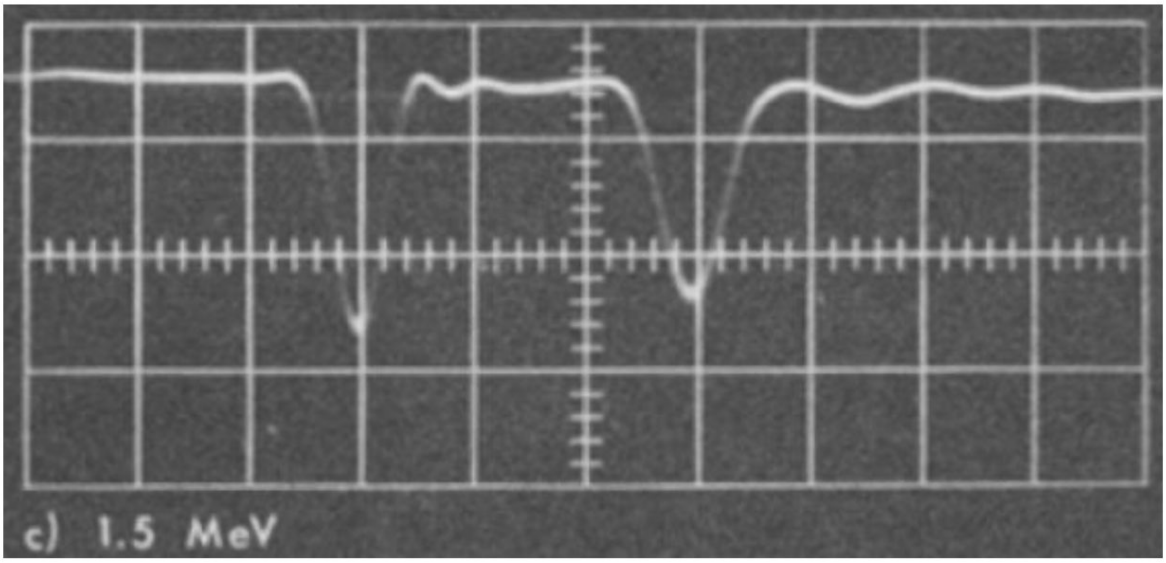
Cathode : Générateur de Van de Graaf

Accélérateur linéaire → linac

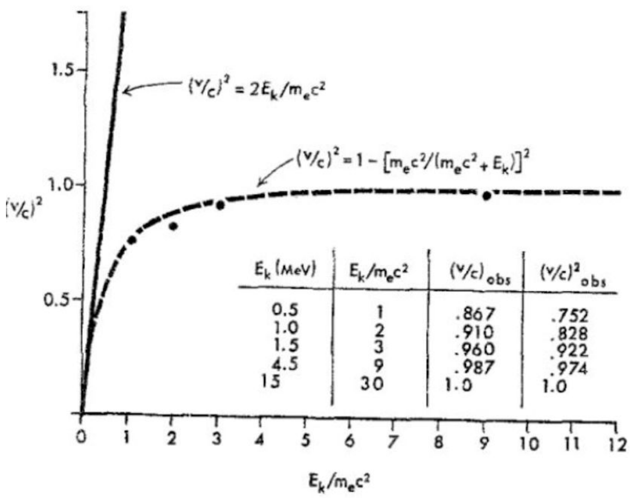
Stopper dans une cible en alu → Disque d'aluminium

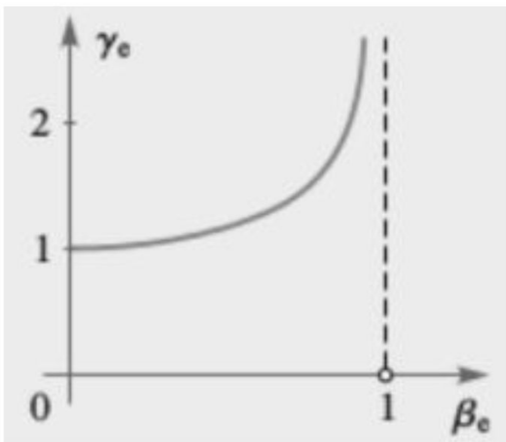
Tube qui capte les électrons
Premier signal qui traverse l'accélérateur, un deuxième signal qui se stoppe par le disque et on récupère les signaux sur l'oscilloscope.

Signal obtenu par addition des deux voies de l'oscilloscope, d'une salve d' électrons d'énergie 1,5 MeV Sensibilité horizontale : 0, 98 × 10^{-8} s.



Premier signal → électron avant accélérateur et second signal → cible électron après accélérateur
Courbe linéaire → théorie de la dynamique
Courbe obtenu est la deuxième. Elle avoisine la vitesse de la lumière sans jamais la dépasser → asymptote
Première image → Bêta en fonction de gamma ?





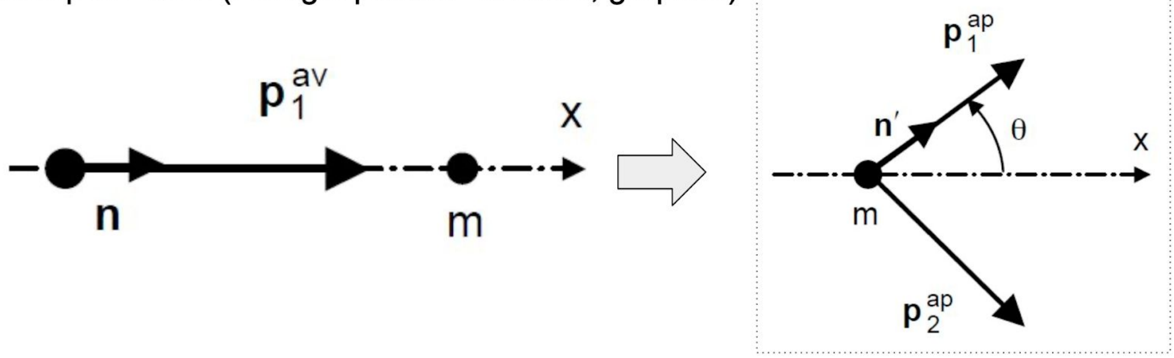
Quand on accélère les électrons, leur vitesse ne tend pas vers l'infini → Rien ne dépasse la vitesse de la lumière.

Vérifie que la théorie de la relativité fonctionne.

b) Collisions élastiques

Nous allons étudier la collision d'un photon de grande énergie et d'un électron immobile de masse m dans un référentiel galiléen R.

Compton 1922 (Energie photon=17.5keV, graphite)



Il a utiliser des RX

Électrons sur la couche externe du graphite, électron considéré comme libre car énergie de liaison très faible avec le graphite.

Obtient deux rayons électromagnétique → un perpendiculaire avec une énergie similaire à celle de l'électron incident ?? et un avec un angle θ avec une longueur d'onde plus grande.

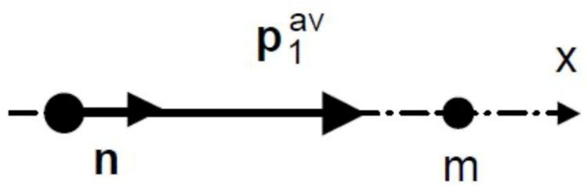
Déterminons la longueur d'onde λ' en fonction de l'angle θ.

On considère le système isolé.

n le photon.

m l'électron.

<u>Avant le choc dans R</u>



Si n est un vecteur unitaire porté par la direction du photon incident.

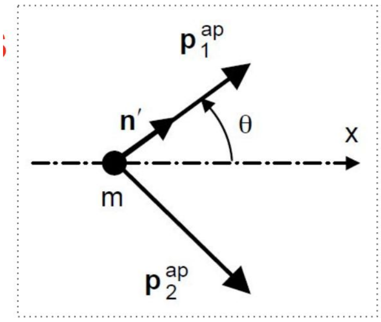
Le quadrivecteur énergie impulsion du photon:

$$P_i^{av} = \left(\frac{E_1^{av}}{c}, \overrightarrow{p_1^{av}}\right) = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right)$$

Celui de l'électron:

$$P_2^{av} = \left(\frac{E_2^{av}}{c}, \overrightarrow{p_2^{av}}\right) = \left(\frac{mc^2}{c}, \vec{0}\right)$$

Après le choc dans R



Quadrivecteur impulsion du photon :

$$P_1^{ap} = \left(\frac{E_1^{ap}}{c}, \overrightarrow{p_1^{ap}}\right) = \left(\frac{h\nu'}{c}, \frac{h\nu'}{c}\vec{n'}\right)$$

Quadrivecteur impulsion de l'électron :

$$P_2^{ap} = \left(\frac{E_2^{ap}}{c}, \overrightarrow{p_2^{ap}}\right)$$

Il a gagné de l'énergie et de la vitesse.

La conservation du quadrivecteur énergie impulsion du système, avant et après le choc, permet d'écrire :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overrightarrow{p_2^{ap}} & = & \overrightarrow{p_1^{av}} - \overrightarrow{p_1^{ap}} \\ E_2^{ap} & = & E_1^{av} + E_2^{av} - E_1^{ap} \end{array}\right.$$

Soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} c\overrightarrow{p_2^{ap}} & = & h\nu\vec{n} - h\nu'\vec{n'} \\ E_2^{ap} & = & h(\nu - \nu') + mc^2 \end{array}\right.$$

Invariant relativiste → Et puisque $E_2^{ap\,2} = p_2^{ap\,2}c^2 + m^2c^4$, on obtient :

$$\left[h(\nu - \nu') + mc^2\right]^2 = h^2(\nu\vec{n} - \vec{\nu}'n')^2 + m^2c^4$$

En remplaçant ν par c/λ et en simplifiant on tombe sur la relation:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

Equation trouvé par Compton

La longueur h/mc = 0,024 A (angstrom) s'appelle la longueur d'onde Compton de l'électron. Le résultat du calcul en accord avec l'expérience, confirme que le photon possède une quantité de mouvement de module hν/c.

Pour cette expérience, Compton obtint le prix Nobel en 1927.

c) Collisions inélastiques

Définition : Un choc entre particules est inélastique si la nature ou le nombre des particules avant la collision n'est pas conservé après la collision.

Considérons un système isolé de N particules, en subissant des chocs elles peuvent se désintégrer en Q particules. Si le système est isolé et que les particules sont indépendantes les unes des autres, on peut alors écrire :

$$P^{av} = P^{ap}$$

$$\sum_i^N (m_i c^2 + E_{Ci}^{av}) = \sum_j^Q (m_j c^2 + E_{Cj}^{av}) \quad \text{et} \quad \sum_i^N \overrightarrow{p_i^{ab}} = \sum_j^Q \overrightarrow{p_j^{ab}}$$

L'énergie cinétique du système n'est plus conservée si la somme des masses est différentes :

$$\sum_i^N m_i c^2 \neq \sum_j^Q m_j c^2$$

Différence d'énergie de masse se traduit par un gain ou une perte d'énergie cinétique.

La loi de conservation de l'énergie relativiste s'écrit alors :

$$\Delta E_C = \Delta m c^2$$

C'est la formule très célèbre qu'Einstein découvrit en 1905. Elle traduit l'équivalence entre la masse et l'énergie.

<u>Energie de seuil</u>

Définition : L'énergie de seuil, de production de Q particules lors d'une collision inélastique est l'énergie cinétique minimum des N particules incidentes, permettant de créer des particules au repos dans leur référentiel du centre de masse R*.

L'énergie cinétique minimum que doit posséder une particule de masse m_1 entrant en collision avec une particule immobile de masse m_2, pour former Q particules de masse m_j est :

$$(E_{C1}^{av})_{min} = \frac{\left(\sum_j^Q m_j c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2}{2m_2c^2}$$

- Si $m_1+m_2 > \Sigma m_j$ (masse des particules crééees)
(Si la somme des masses est supérieurs à la somme des masses des particules créées)
Il n'y a pas d'énergie de seuil. La réaction est toujours possible. Les particules émises possèdent une énergie cinétique dans R*.

La réaction proton-antiproton de même masse, 938,3 MeV/c^2 , donnant naissance à un méson π- et son antiparticule π+ de même masse, égale à 139,6 MeV/c^2

$$p + p^- \rightarrow \pi^- + \pi^+$$

- Si $m_1+m_2 < \Sigma m_j$. Il y a une énergie de seuil.

La réaction entre deux protons, l'un accéléré et l'autre immobile, permettant de créer une paire proton-antiproton suivant :

$$p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$$

Toutes les particules ont la même masse 938,3 MeV/c^2. L'énergie de seuil ou énergie cinétique minimum du proton incident est :

$$(E_{C1}^{av})_{min} = 6mc^2 = 5,63 \text{ GeV}$$

On a besoin de cette énergie pour faire cette réaction et que les protons soient créés sans énergie initiale ?

L'énergie minimum totale du système avant la collision dans R est donc :

$$(E^{av})_{min} = 8mc^2 = 7,51 \text{ GeV}$$

On peut calculer sa valeur dans le référentiel du centre de masse R* en utilisant les relations:

$$E^{*av} = \frac{E^{av}}{\gamma} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{E_1^{av} + mc^2}{2mc^2}}$$

E_1^{av} : énergie du proton qui est lancé

On obtient γ = 2 et :

$$(E^{av})_{min} = 4mc^2 = 3,75 \text{ GeV}$$

Énergie du système avant le choc

Energie cinétique nécessaire pour créer nos trois protons ?

En 2012 → Boson de X → 125 GeV = énergie de masse, Divisé par la vitesse de la lumière au carré

Conclusion :

- On utilise le quadrivecteur énergie impulsion
- Sa pseudo-norme est invariante dans tout les référentiels
- Le photon n'a pas de masse
- Le PFD est toujours valide dans le cas de la dynamique relativiste
- L'énergie de masse est accessible à haute énergie
- Il est préférable de faire des collisions dans le référentiel du centre de masse

(pour voir comment fonctionne les centrales nucléaires)

Remarques :
Limite classique → 10% de la vitesse de la lumière c'est déjà énorme

Attention au notation : g_e= g du mouvement de la particule à préciser
→ Un peu maladroit de mettre g_e et Béta e car ça pourrait correspondre à l'entraînement !

Choisir un exemple → Garder collision élastique et mouvement dans le référentiel de laplace
la collision inélastique il faut l'avoir fait sur une feuille à côté !

Questions :

- Dans l'accélérateur de Bertozzi, pouvez vous écrire l'équation du mouvement qui régit le mouvement de l'électron dans un champ électrique donné?

Cad, la relation qui lie les vitesse dans le ref du laboratoire a la différence de potentiel où au champ électrique dans le tunnel ? Mettre les temps et les gammas au bon endroit

égaliser les deux grands F

La première expression de F est égale à la deuxième expression de F
On réécrit les équations avec les grandeurs introduites et après
gamma dp/dt = gamma f
f = q E
gamma de chaque côté se simplifie
d(g mv)/dt = q(E + v vecto B)
(force de Laplace)
f = qE(v vectoriel B)
un seul référentiel
ce qui intervient dans la force de laplace c'est v non corrigé dans la force du laboratoire

f => inchangé expression habituelle de la force de Laplace
E et B solution des équations de Maxwell inchangé

- Pourquoi le gamma est dans la dérivée ?

$$F = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) \quad F = \gamma\left(\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{f}\right)$$

Dynamique relativiste, introduit une nouvelle brique élémentaire
On postule que : (on admet)
dp/dt = F
p = g mv
On dérive donc avec le gamma (g).

- Qu'est ce que le petit f ?

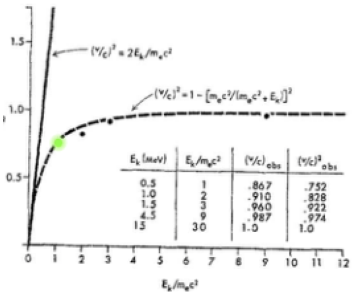
f est une force EM. La seule à notre disposition dans le cadre de ce cours étant donné le formalisme que l'on utilise.
Gravité : relativité générale
force phénoménologique : pas aux bonnes échelles
force faible et forte : aspect quantique qui sort de notre application.
Il reste donc juste la force EM f.

Dans le terme de puissance c'est pareil. $\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c},$

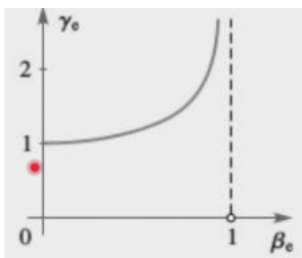
A ajouter dans la leçon.

- La courbe en pointillé est la même que celle à côté :

Ec= mc² = g $^{-1}$



E_k (MeV)	E_k/m_ec^2	$(v/c)_{obs}$	$(v/c)^2_{obs}$
0.5	1	.867	.752
1.0	2	.910	.828
1.5	3	.960	.922
4.5	9	.987	.974
15	30	1.0	1.0



Résoudre par l'énergie c'est plus simple !
Pas forcément la résoudre par rapport au temps !

Pas besoin de connaître la vitesse, juste faire un bilan entre le début et la fin
On sait que l'énergie à fournir c'est qU

Savoir → Écrire le PFD avec une force de Lorentz (voir au dessus)

- Pourquoi il y a un e dans g_e ?

On peut écrire g et bêta juste dans le référentiel propre

- C’est quoi le référentiel propre ?

Référentiel dans lequel la particule est immobile

- Est ce que le ref propre est galiléen ?

ref terrestre comme un ref galiléen car le temps de l'expérience est rapide par rapport au mouvement de la Terre.

- Ref propre de la particule est-il galiléen ?

Oui car le référentiel du laboratoire est galiléen donc le référentiel propre est également galiléen.

on a pas le droit de travailler dans ce truc si le ref n’est pas gal

- ??

On prend la vitesse moyenne.
Voir résolution complète du problème
Equa diff non résolue
La vitesse dans le tube et la vitesse à la fin
Ce qu’il peut mesurer c’est la vitesse moyenne.

- Vitesse des protons et anti proton sachant que 6mc² est l'énergie la plus basse dans laquelle on peut faire la transformation?

Pas de vitesse dans le centre de masse car on est juste en train de les créer → faux !

- Est ce que 6mc² correspond à l'énergie dans le ref de travail ?

Oui

- Est ce qu'il vont tous à la même vitesse dans le ref du laboratoire ?

Oui dans la direction de l’alignement de l’arrivée du proton.

- Conservation de l’impulsion?

On ne peut pas avoir une énergie cinétique nulle au niveau des produits dans le référentiel du laboratoire, on ne peut pas avoir une impulsion non nulle et une énergie cinétique nulle.

- Pouvez vous ré-établir cette formule :

$$(E_{C1}^{av})_{min} = \frac{\left(\sum_j^Q m_j c^2\right)^2 - (m_1c^2 + m_2c^2)^2}{2m_2c^2}$$

conservation de l'énergie
Etablir l'énergie minimum de réaction

travailler dans le référentiel du centre de masse
ref de labo on fait les transformations pour se trouver dans le centre de masse

Le plus optimale est d'avoir Ec nulle à la fin
Ec incident qui permet de faire la réaction et on la re-transforme pour la ramener dans le ref de départ.

Bonne idée de pas montrer le calcul, pour re-établir l'équation pd les questions. Mais attention de bien connaître la structure de résolution.
Cf le cours Isabelle