LP 48 - Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Niveau : L3

Prérequis :

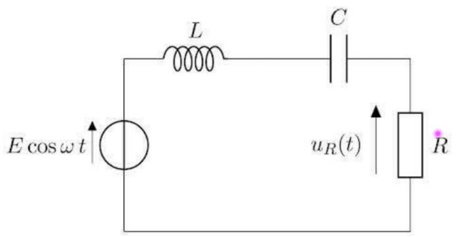
- Electrocinétique (circuit RLC en régime libre)
- Mécanique classique
- Optique ondulatoire (Nitions d'interférence à ondes multiples ; Fabry-Pérot)
- Notation complexe

Plan corrigé :

I. Etude d'un système mono résonant

A. Le circuit RLC série

1. Présentation du système



régime sinusoïdale forcé → E cos wt

2. Réponse en intensité

déphasage et amplitude !

3. Aspect énergétique

Bilan d'énergie → fondamentale !

Puissance : à quel condition est-elle maximal ? → remarque que $w = w_0$.

→ résonance → oscillateur reçoit un transfert depuis l'excitateur qui est maximal !

cf calcul du facteur de qualité de Cappe

B. Analogie avec la mécanique : système masse-ressort + amortisseur

II. Etude d'un système multi résonant : Cavité fabry-Pérot (livre d'exo)

A. Cavité résonnante Fabry-Pérot

Application à la résolution du doublet du sodium

B. Filtre interférentiel ou LASER

LASER très succinct

Leçon présentée

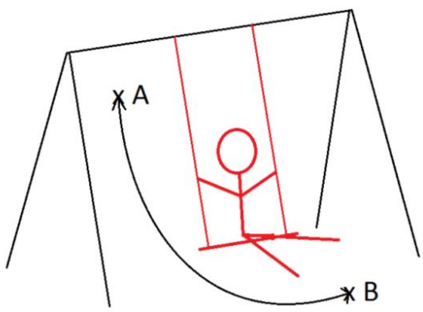
Plan :

I. Etude d’un système à un degré de liberté
   A. Le circuit RLC série
      1. Présentation du système
      2. Réponse en tension
      3. Réponse en intensité
      4. Aspect énergétique
   B. Analogie avec la mécanique : système masse-ressort + amortisseur

II. Etude d’un système à N degré de liberté : Cavité fabry-Pérot
   A. Cavité résonnante Fabry-Pérot
   B. Application au laser

NOTES

Introduction



La balançoire → on doit pousser de façon périodique

Si on contredit pas bien cela ne marche plus on ne va plus aussi loin.

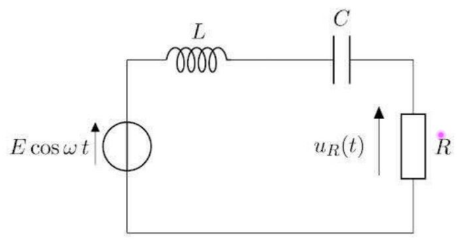
La Résonance est le phénomène selon lequel un système (ici, la balançoire) est sensible à une certaine fréquence (ici, poussée de la balançoire à intervalle réguliers).

On travaillera :
-avec des systèmes linéaires
-en régime sinusoïdal forcé

I. Etude d’un système à un degré de liberté

A. Le circuit RLC série

1. Présentation du système



régime sinusoïdale forcé → E cos wt

2. Réponse en tension

On se place aux bornes du condensateur, d'après la loi des mailles :
$e(t) = u_L + u_R + u_c$
$e(t) = L.di/dt + R.i + u_c$
or $i= C.du_c/dt$ et on est en régime sinusoïdale forcé : $e(t)=E.\cos(wt)$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = E\cos\omega t$$

→ On garde uniquement la solution particulière qui correspond au régime permanent.

Equation différentielle du second ordre
→ on ne gardera que la solution particulière correspondant au système permanent

En notation complexe on a :

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Module de l'amplitude complexe → amplitude réel ensuite

→ Étude en amplitude :

Le module de l'amplitude complexe :

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre du circuit et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de

qualité (on verra son sens plus tard). On pose $x= w/w_o$

Soit
$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Variation de Uc dépend de $f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$

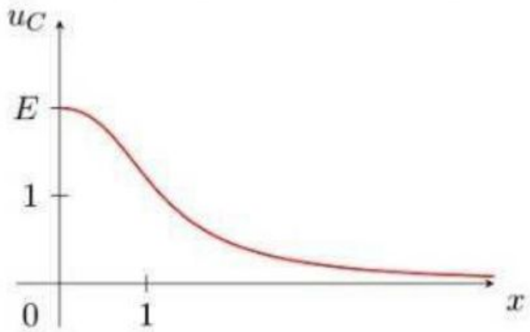
$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} \quad = 4x\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

f'(x) = 0 pour

x=0 et $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si et seulement si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

- $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

alors f'(x) > 0 pour toute valeur de w, donc f(x) croissante soit U_c décroissante



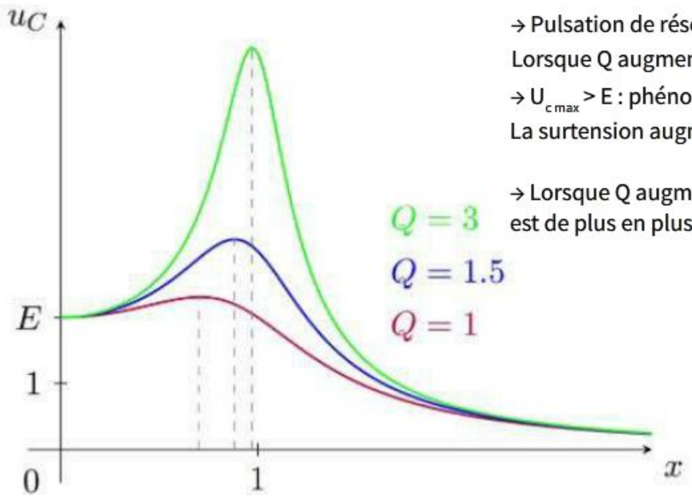
Il n'a pas de résonance en tension quand $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

- $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$		Décroissante		Croissante	
U_C		Croissante	$U_{\max} = \frac{2Q^2E}{\sqrt{4Q^2-1}}$	décroissante	

On observe un maximum en tension pour $w=w_r= w_o \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

→ C'est le phénomène de résonance en tension (ou résonance de charge).



→ Pulsation de résonance $w_r < w_o$:
Lorsque Q augmente, w_r tend vers w_o.
→ $U_{c\,max} > E$: phénomène de surtension
La surtension augmente avec Q

→ Lorsque Q augmente : pic étroit → La résonance est de plus en plus aiguë.

Quand Q aug on se rapproche de x = 1 sans en être égal.

→ Étude du déphasage:

Pour obtenir ϕ, on prend l'argument de $\underline{U}_C$. Celui-ci vaut :

$$\begin{aligned}\phi = Arg(\underline{U}_C) &= Arg\left(\frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\right)\\ &= Arg(E) - Arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega)\\ \phi &= -Arg(1 - LC\omega^2 + jRC\omega)\\ &= -Arg(j(RC\omega - j(1 - LC\omega^2))\\ &= -Arg(j) - Arg((RC\omega - j(1 - LC\omega^2))\\ &= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-(1 - LC\omega^2)}{RC\omega}\right)\\ &\iff \phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{(1 - LC\omega^2)}{RC\omega}\right)\end{aligned}$$

→ Étude du déphasage :

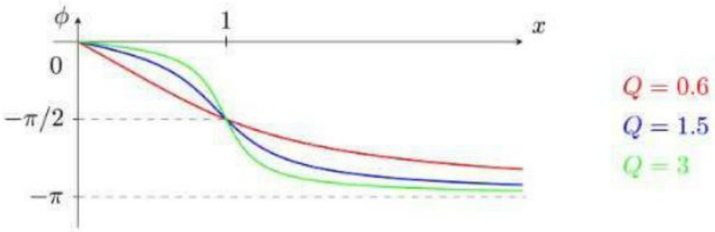
$$\boxed{\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}}\right)}$$

Appelons $f(x) = \left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}}\right) = Q\left(\frac{1}{x} - x\right)$;

Calculons sa dérivée : $f'(x) = Q\left(\frac{-1}{x^2} - 1\right) = -Q\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)$;

$f'(x)$ est négative quelque soit Q, la fonction $f(x)$ est donc décroissante ;
La fonction $\arctan(x)$ étant croissante, au final ϕ décroît.

→ Étude du déphasage:



A la résonance, le déphasage est de π/2

Quand x = 1 → résonance.

3. Réponse en intensité

En pratique → on se place aux bornes de la résistance
En théorie on utilise le lien entre i et u pour le condensateur.

En notation complexe :

$$\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega\underline{u}$$

$$\underline{i} = jC\omega\frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Ainsi que son amplitude complexe :

$$\boxed{\underline{I} = jC\omega\frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

→ Étude en amplitude :

On prend alors le module de l'amplitude complexe :

$$I = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

On passe alors en variable réduite :

$$\boxed{I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

On pose $f(x) = 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$;

On calcule sa dérivée :

$$f'(x) = 2Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

→ Étude en amplitude :

f'(x) = 0 pour x = 1
f'(x) négative sur]0,1[et positive sur]1,∞[

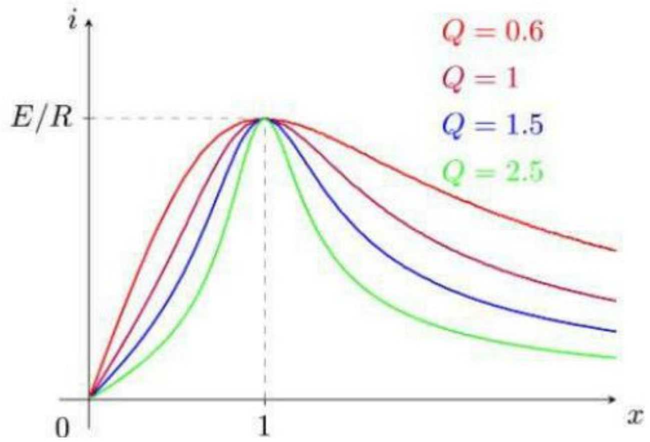
La fonction I(x) admet alors un maximum en x=1 soit $w=w_r=w_o$ et ce maximum vaut E/R.

→ C'est la résonance en intensité

w0 → pulsation propre du système

→ Étude en amplitude :

→ C'est la résonance en intensité



La résonance en intensité a toujours lieu pour $w=w_o$ et le maximum vaut E/R.

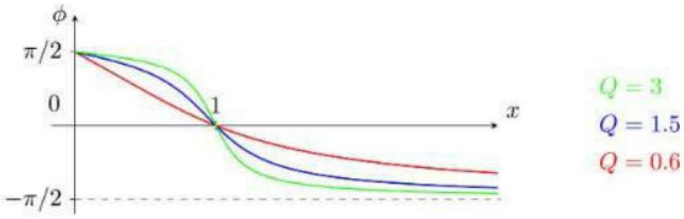
Plus Q est grand, plus la résonance est aiguë.

→ Étude du déphasage :

$$\underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega\underline{u}$$
$$Ie^{j\phi'}e^{j\omega t} = jC\omega U_C e^{j\phi}e^{j\omega t}$$

On pose $I=C.w.U_c$

$$e^{j\phi'} = je^{j\phi}$$
$$e^{j\phi'} = e^{\frac{\pi}{2}}e^{j\phi}$$
$$\phi' = \frac{\pi}{2} + \phi$$



A la résonance, le déphasage est nul.

Utiliser sur les Oscillo I

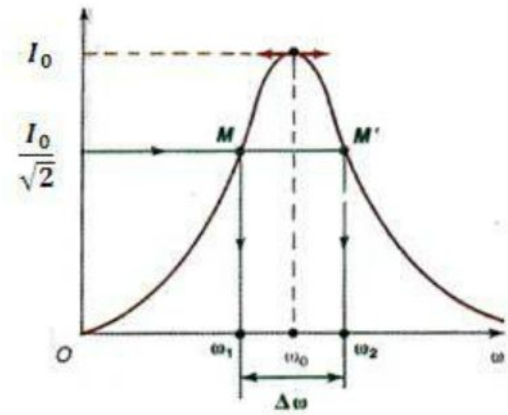
Bilan

- Il y a toujours résonance en intensité, contrairement à la résonance en tension.

-La pulsation de résonance est égale à la pulsation propre, contrairement à la résonance en tension où w_r<w_o.

-Déphasage nul contrairement à la résonance en tension où le déphasage vaut π/2 .

→ Bande passante et facteur de qualité



La bande passante Δw (rad/s) correspond aux pulsation pour lesquelles l'amplitude en intensité I(w) > $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

Soit les 2 pulsations de coupure :

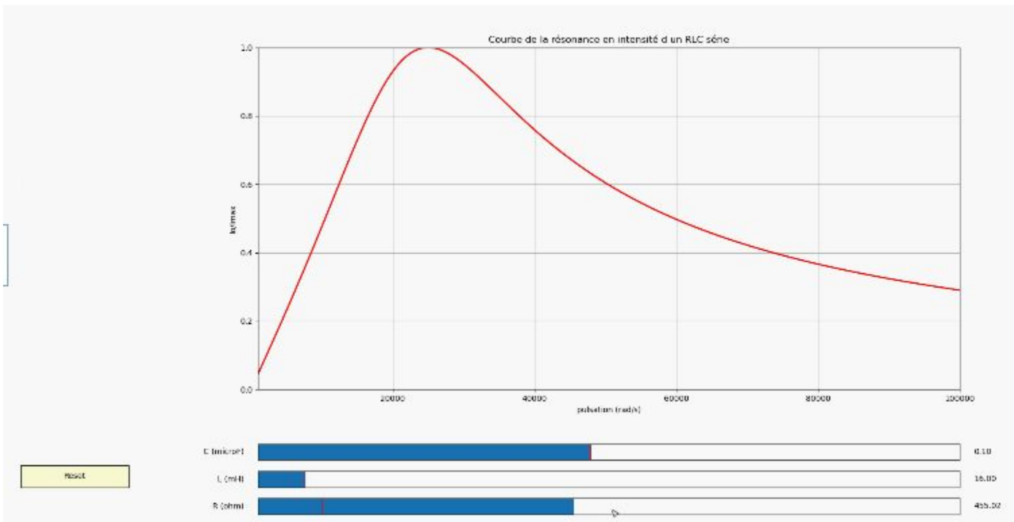
$$w_1 = \frac{w_0}{2Q}(\sqrt{1-4Q^2}-1)$$

$$w_2 = \frac{w_0}{2Q}(\sqrt{1-4Q^2}+1)$$

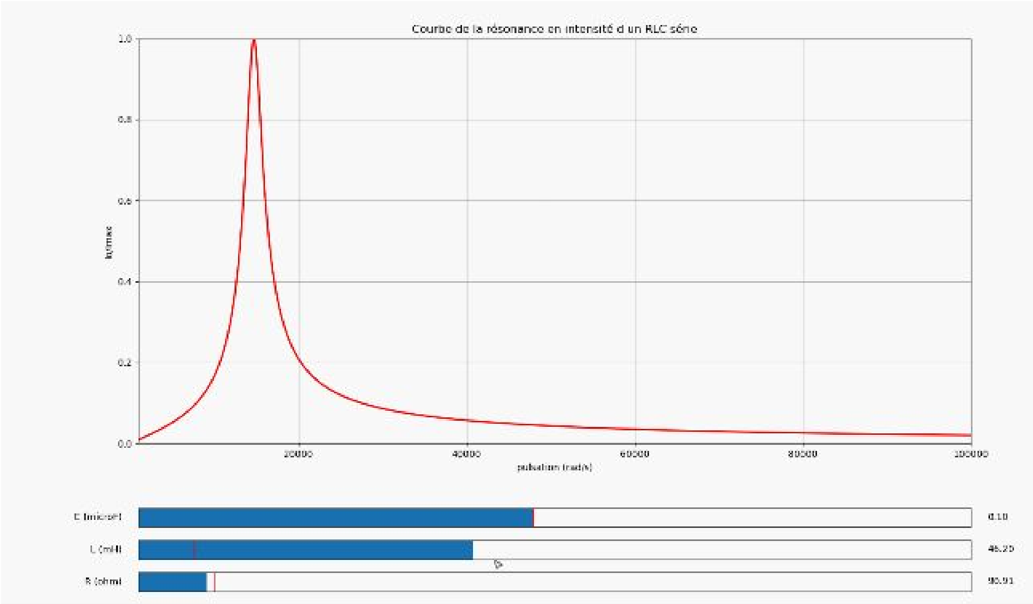
Soit $\Delta w = w_o/Q = R/L$

Plus Q est élevé, plus la bande passante est petite, la résonance est aiguë, sinon la résonance est dite floue .

ici $I_0 = I_{max}$.



Si on augmente Q ? → cela élargit le pic



Si on augmente → cela diminue le pic
C n'a pas d'influence, L cela décale

4. Aspect énergétique

Dans le circuit, l'addition des tensions s'écrit :

$$E(t) = u_R + u_L + u_C, \quad \text{soit : } E(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + u_C.$$

Pour passer à une égalité en puissance[1], on multiplie par $i = C\dfrac{du_C}{dt}$:

$$E(t)i(t) = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} + C\frac{du_C}{dt}u_C,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{E}(t)\mathbf{i}(t) = \mathbf{R}\mathbf{i}^2 + \frac{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{dt} + \frac{d\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)}{dt}. \quad (1)$$

Puissance P_g fournie par le générateur

Puissance P_J dissipée par effet Joule

Énergie magnétique E_{mag} emmagasinée par la bobine

Énergie électrostatique E_{elec} emmagasiné par le condensateur

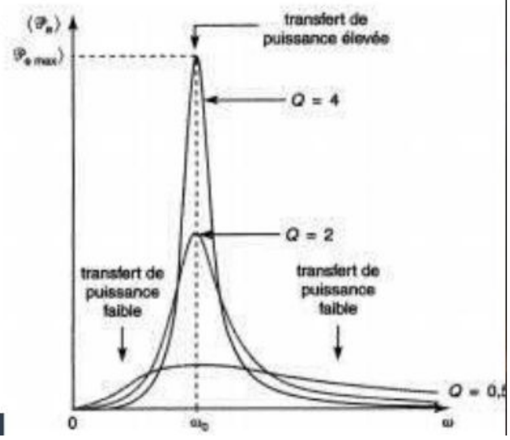
La bobine charge et se décharge et on observe des oscillations.

D'un point de vue énergétique $Q=2.\pi.\ E_{électromagnétique}/E_{perdue}$

En régime permanent :

$<P_g>=<P_J>$, la puissance fournie par le générateur ne sert plus qu'à compenser l'effet Joule.

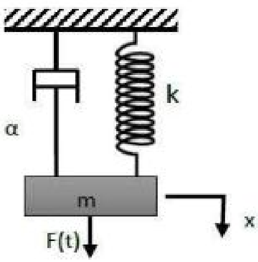
A la résonance $<P_g>=<R.i^2>= R.I_e{}^2=R.I_{max}{}^2/2 = E^2/2.R$



La résonance est la situation correspondant à une fréquence pour laquelle **la puissance moyenne transférée de l'excitateur à l'oscillateur est maximale**. L'énergie est toujours apportée en phase et devient très important.

I_e → intensité efficace = I_{max} /racine de 2

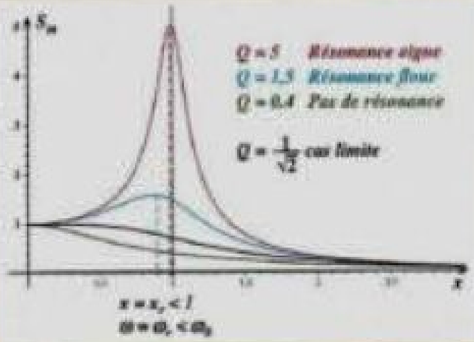
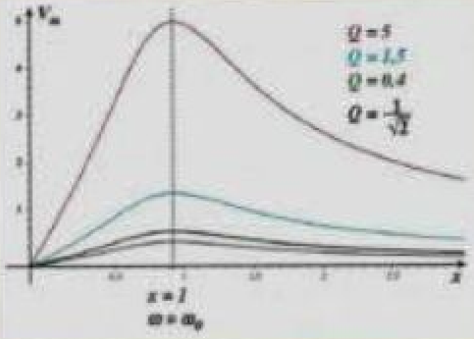
B. Analogie avec la mécanique : système masse-ressort + amortisseur



Récapitulatif des systèmes

	Généralisation	Mécanique	Electricité
Système	Oscillateur amorti	Masse-ressort+amortisseur	RLC série
Forçage	$e(t)=E_0\cos(\omega t)$	Support oscillant : $z_A(t)=A_0\cos(\omega t)$	Générateur sinusoïdal : $u_G=U_0\cos(\omega t)$
Réponse	$s(t)=S_m\cos(\omega t+\varphi)$	élongation : $z(t)=Z_m\cos(\omega t+\varphi)$	Charge* : $q(t)=Q_m\cos(\omega t+\varphi)$
Dérivée	$i(t)=V_m\cos(\omega t+\psi)$	vitesse : $v(t)=\dot{z}=V_m\cos(\omega t+\psi)$	intensité : $i(t)=\dot{q}=I_m\cos(\omega t+\psi)$
Paramètres	ω_0 pulsation propre Q = facteur de qualité	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ $Q=\frac{\sqrt{km}}{\alpha}$	$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

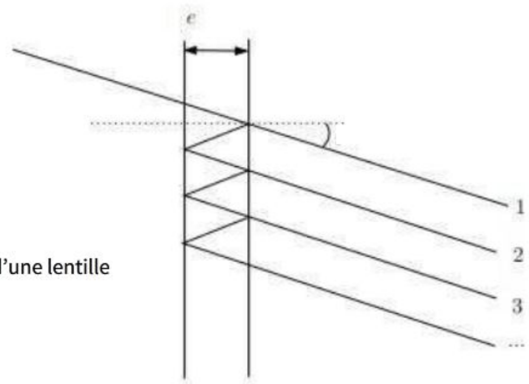
Tableau analogique

	Réponse en élongation ou charge (ou tension)	Réponse en vitesse ou intensité
Réponse réelle	$s(t)=S_m\cos(\omega t+\varphi)$	$v(t)=V_m\cos(\omega t+\psi)$
Amplitude complexe de la réponse	$\underline{S}=\frac{\omega_0^2E_0}{\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0\omega}{Q}}=\frac{E_0}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$	$\underline{V}=\frac{Q\omega_0E_0}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}=\frac{Q\omega_0E_0}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$
Amplitude de la réponse	$S_m=\lvert\underline{S}\rvert=\frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$	$V_m=\frac{Q\omega_0E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$
Courbes		
Abscisse du maximum (résonance)	$x=x_r=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ et $\omega=\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$	$x=1$ et $\omega=\omega_0$
Maximum d'amplitude	Le maximum n'existe que si $Q>1/\sqrt{2}$. x_r se rapproche de la fréquence propre quand Q augmente.	Quel que soit Q, le maximum existe et correspond toujours à la fréquence propre.

II. Etude d'un système à N degré de liberté : Cavité fabry-Pérot

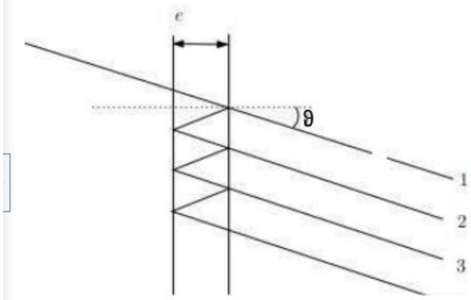
A. Cavité résonnante Fabry-Pérot

<u>Interféromètre Fabry-Pérot :</u>
- 2 miroirs semi-réfléchissants à haut coefficient de réflexion (~95%)



Interférence à l'infini → utilisation d'une lentille de focalisation.

Les rayons transmis interfèrent ensemble.



Déphasage entre 2 rayons successifs :

$$\Delta\Phi = 2.k.e.\cos(\theta) = \frac{4\pi}{\lambda}\, e.\cos(\theta)$$

On a l'amplitude du $m^{\text{ième}}$ rayon :

$$s_m = s_0(\sqrt{R})^{2m} e^{jm\Delta\phi} = s_0(Re^{j\Delta\phi})^m$$

$$s_{tot} = \sum_{m=1}^{+\infty} s_m = s_0 \sum_{m=1}^{+\infty} (Re^{j\Delta\phi})^m = s_0 \lim_{m\to+\infty} \frac{1-(Re^{j\Delta\phi})^m}{1-Re^{j\Delta\phi}} = s_0 \frac{1}{1-Re^{j\Delta\phi}}$$

Soit l'intensité totale :

$$I_{tot} = |s_{tot}|^2 = s_{tot}\,\overline{s_{tot}} = \frac{s_0^2}{(1-Re^{j\Delta\phi})(1-Re^{-j\Delta\phi})} = |s_i|^2 \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\Delta\phi} = I_i \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\Delta\phi}$$

La transmittance est alors:

$$T(\theta) = \frac{I_{tot}}{I_i} = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\Delta\phi} = \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\Delta\phi(\theta)}{2}}$$

On obtient sur l'écran :

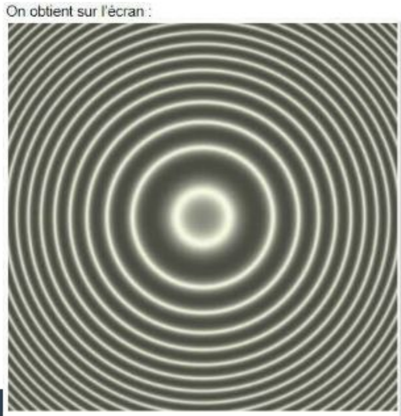
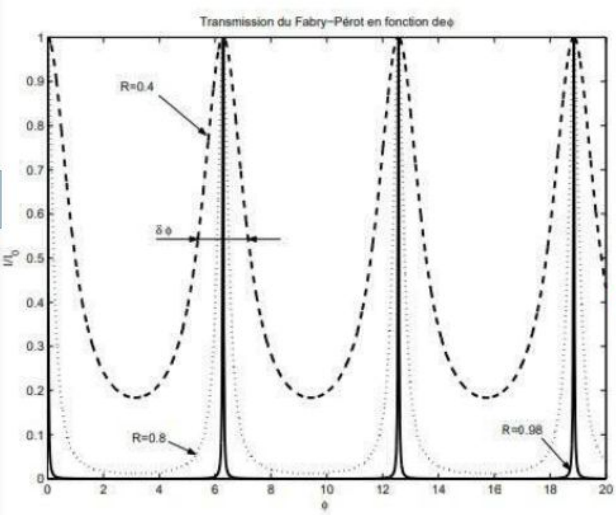


Figure observer sur l'écran



La transmittance est max si : $\sin(\Delta\phi/2)=0$

Soit $\Delta\phi = 2n\pi$ et $I=I_o$

→ Interférence constructives, la lumière est entièrement transmise même si R~95 %

C'est la résonance !

Rayon transmis est égal au rayon incident.

On a résonance pour un nombre n discret : $v_n = n.c/(2.e.\cos(\theta))$ → C'est les **modes propres** de la cavité.

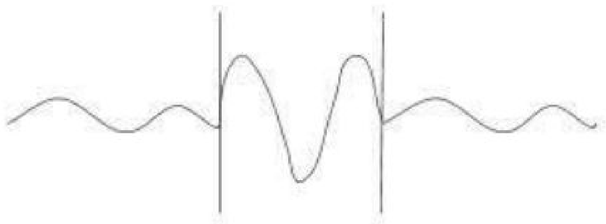
Intervalle spectral libre (ISL) : $\Delta v = c/(2e\cos(\theta))$

On définit la finesse $\mathcal{F} = \frac{\Delta v}{\delta v} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$

→ Fonction croissante de R : plus la finesse est élevée, plus les pics sont fins.

Modes propres = modes de résonance
Equidistant → intervalle spectral libre

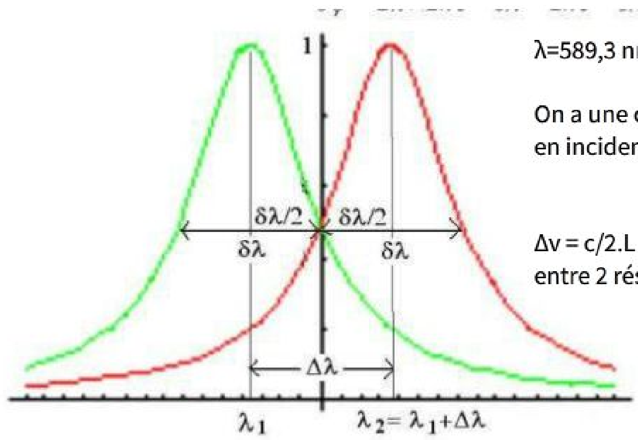
Finesse = évolution de la largeur du pic
Le pic va être fin si R augmente



La cavité entre les miroirs va accumuler de l'énergie → le plus à la résonance → ils vont interférer

On définit aussi le facteur de qualité ou pouvoir de résolution : $Q = \frac{v}{\delta v} = \mathcal{F}\,\frac{v}{\Delta v}$

<u>Résolution du doublet du sodium ??</u>



Cas limite de « résolution » de deux raies proches sur le critère de « mi-hauteur » (max/2)

λ=589,3 nm (moyen pour le doublet du sodium)

On a une cavité L= 20cm, et supposons qu'on es en incidence normale

Δv = c/2.L = 3.108/2.0,2 = 7,5.108 Hz = 750 MHz entre 2 résonances (soit 0,4 nm)

On a λ=589,3 nm, L= 20cm, $\Delta\nu$ = 750 MHz entre 2 résonances (soit 0,4 nm)

Si on utilise des miroirs à R=0,95, on a F= $\dfrac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$ = 61

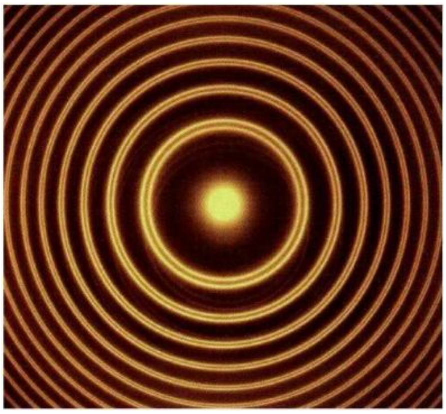
Soit Q=F.$\lambda/\Delta\lambda$ = 89868 = $\lambda/\delta\lambda$

Donc l'écart minimal détectable est $\delta\lambda$ = 589,3/89686 = 6 pm

Or l'écart entre les 2 raies du sodium est de 0,6 nm > 6 pm

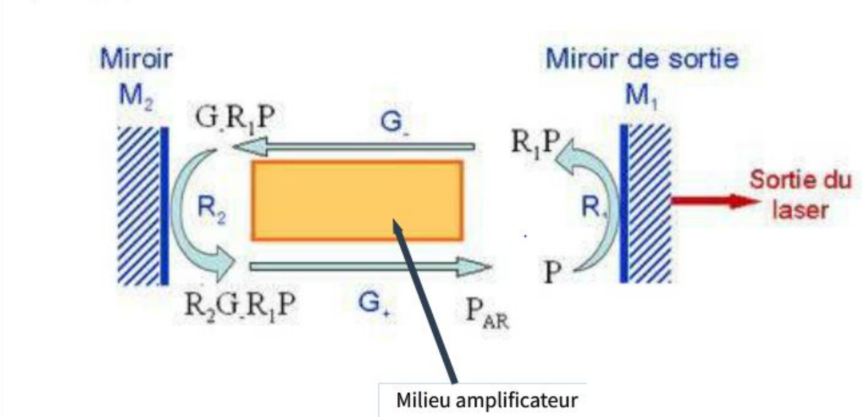
→ Cet interféromètre peut résoudre les raies du doublet du sodium

delta lambda = largeur du pic à mi hauteur.

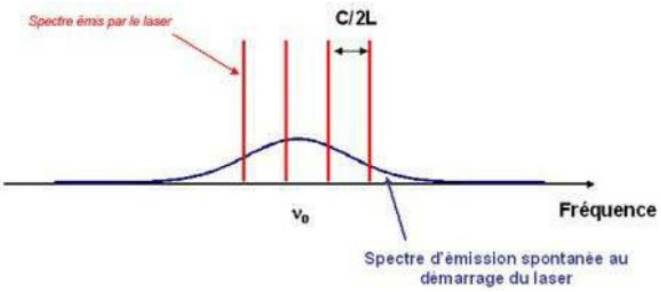


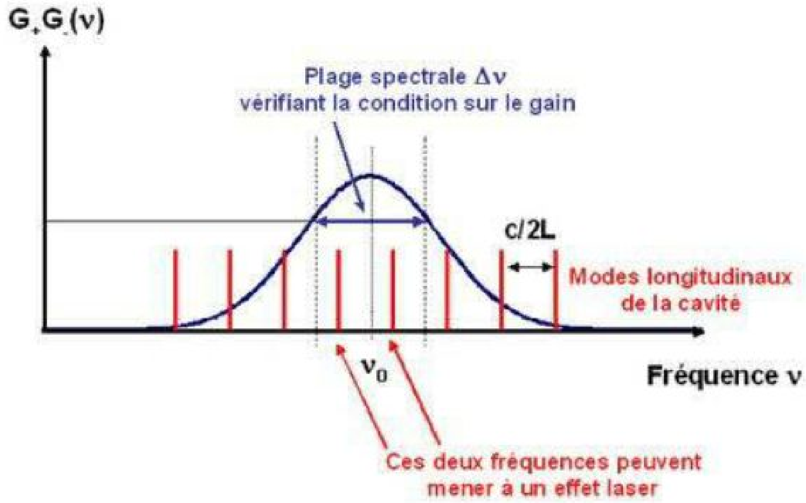
C. Application au laser

M1,M2 ~ 99 %



Effet laser → milieu amplificateur entre deux miroir à 95%
Incidence normal
La cavité va filtrer les fréquences





Il faut choisir le gain de façon à avoir le gain supérieur à la cavité ??

Conclusion
Résonance dans différents domaines
Mais elle n'est pas toujours souhaiter : Système dissipatif pour éviter la résonance → voiture

Remarques :
Corde de melde → N degré de liberté

Manipe avec deux lampes de Sodium → une lampe allumé éclaire une lampe éteinte → quand on l'éteint on voit que l'autre illumine pendant un certain temps → excitation transfert d'énergie.

Attention facteur de qualité arrive un peu comme un cheveu sur la soupe !

Le bilan de puissance → résonance

On s'en fiche des aspects mathématiques !

Résonance en tension et en amplitude ne sont pas des résonance techniquement !
Faire plus à l'envers.

commencer par réponse en intensité → déphasage et amplitude !
On enlève la réponse en tension.
Bilan d'énergie → fondamentale !
Puissance : à quel condition est-elle maximal ? → remarque que $w = w_0$.
→ résonance → oscillateur reçoit un transfert depuis l'excitateur qui est maximal !
cf calcul du bilan d'énergie de Cappe
Ensuite F-P (regarder dans les livres d'exo)
Application avec sodium bien !
Laser bien aussi prendre avec des pincettes. cf nouveau prog de PC
ou on ne parle pas du laser mais juste de la cavité pour résoudre le doublet en appli !
+ filtre interférentiel (si pas laser)

Attention calcul de grandeur moyenne quand on se place à la résonance !

Ancien programme de prépa potentiellement !

On ne peut pas parler de résonance en tension car elle n'existe pas toujours, condition d'existence → dépend des conditions du système.

Questions :
- Excitation en RMN ?

Champs magnétique tournant

- Oscillateur du RMN ?

Moment magnétique de spin → aimantation du milieu qui tourne

- Qu'est ce qui autorise à se placer qu'en régime sinusoïdale forcé ?

On peut utiliser n'importe quel excitation quelconque tant qu'elle peut se décomposer en série de fourier, en sinusoïdale
Cela nous autorise à nous limité au sin forcé.

- Balançoire ?

Se limiter à une personne qui pousse
Pour avoir un balancement optimal → fréquence périodique → pousse toujours qu'en A

Oscillateur non linéaire si on s'intéresse uniquement à l'enfant qui se balance seule.
→ Équation de Mathieu
Problème du botafumeiro agreg 2019

- Qu'est ce qui nous autorise à dire que le régime transitoire est bref ? de quoi dépend la durée du régime transitoire ?

Dépend de R et C → on résout l'équation caractéristique sans le membre de droite → pseudo pulsation
pseudo période = durée caractéristique → R/L
Il faut qu'elle soit petite devant ce que l'on étudie
On commence l'étude quand la transitoire est fini

- Inconvénient d'une surtension ?

Endommager les composants
Condensateur → on ionise le milieu → Tension de claquage : milieu diélectrique, champ interne plus grand
inductance → surintensité → fils qui fondent ! Trop fort effet joule.

- Pourquoi racine de 2 pour la bande passante ?

En puissance

- Bilan de puissance ?

convention qui permet de définir le courant : générateur (u=-Ri) ou récepteur (u=Ri).
Quand on se place indépendant du temps avec un GIT, plus facile que dépendant du temps
Selon la convention choisit on voit si c'est reçu ou perdu → signe de la puissance

- Type de figure d'interférence du F-P ?

Anneaux d'égale inclinaison

- C'est quoi un mode propre ?

fréquence propre → d'oscillation du système sans contrainte

- A une fréquence donné à quoi correspond un mode propre pour une corde de melde ?

Un mode propre = une réponse particulière du système pour lequel la réponse est harmonique

- Si le facteur de réflexion est de 1 que vaut la finesse ?

Finesse tend vers l'infini

- Facteur de réflexion en énergie qui vaut 1 y a-t-il un intérêt ?

R=1 alors il n'y a rien qui sort ! En pratique cela ne sert à rien car on ne voit rien !!

- facteur de qualité d'un laser ?

Plus grand que 89868, on est au delà de 10^8.

- Existence des différent mode longitudinaux ?

existence d'un seuil en dessous pas assez amplificateur donc pour avoir de l'amplification il faut être au dessus.

- Le laser n'est pas monochromatique ?

Plusieurs fréquences mais très très proche !

- Degré de liberté ?

Parler de système multi résonant
RLC → monorésonant
FP → multrésonant

Facteur de qualité. Cas du RLC

- $e_g(t) = e_m \cos(\omega t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

soit $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{e_m}{L}\cos(\omega t)$

où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ soit $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

- $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}Li^2(t)$

$= \frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2}L\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2$

$q(t) = q_m \cos(\omega t + \varphi)$ en régime forcé

$\underline{q_m} = \frac{e_m/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0 \omega}{Q}} = q_m e^{j\varphi}$ en complexe

donc $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2C} q_m^2 \cos^2(\ ) + \frac{1}{2}L\omega^2 q_m^2 \sin^2(\ )$

$\langle \mathcal{E}(t) \rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{q_m^2}{4C} + \frac{L\omega^2 q_m^2}{4} = \frac{1}{4}L(\omega_0^2 + \omega^2)\, q_m^2$

$\frac{q_m^2}{4C} = \frac{1}{4}L\omega_0^2 q_m^2$

En particulier, à la résonance, $\langle \mathcal{E}(t) \rangle_{T_0} = \frac{1}{2}L\omega_0^2 q_m^2(\omega_0)$

- $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ soit en complexe $\underline{i} = j\omega \underline{q_m}\, e^{j\omega t}$

$= \omega \underline{q_m}\, e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

$P(t) = e_g(t)\, i(t) = e_m \cos(\omega t)\, \omega q_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2} + \varphi)$

$= e_m \cos(\omega t)\, i_m \cos(\omega t + \psi)$ où $i_m = \omega q_m$ et

$\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$

Donc $P_g(t) = e_m \cos(\omega t) i_m \left(\cos(\omega t)\cos\psi - \sin(\omega t)\sin\psi\right)$

En moyenne $\langle P_g(t)\rangle_{T=\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{e_m i_m}{2}\cos\psi = -\frac{e_m i_m}{2}\sin\varphi$

où $\sin\varphi = -\frac{\omega_0/Q\,.\,\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}}}$

$\varphi = -\arg\left(\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0\omega}{Q}\right)$

Or $q_m = \frac{e_m/L}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}}$ donc $\langle P_g(t)\rangle_T = -\frac{1}{2}e_m\,\omega\, q_m \sin\varphi$

ie $\langle P_g(t)\rangle_T = \frac{1}{2}e_m\,\omega^2 . \frac{e_m}{L}.\frac{\omega_0}{Q}.\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$

$$= \frac{1}{2}\frac{e_m^2}{L}.\frac{\frac{\omega_0}{Q}.\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

L'énergie fournie pendant T s'écrit donc en moyenne

$$\langle \mathcal{E}_g(t)\rangle_T = \langle P_g(t)\rangle_T . T = \pi\frac{e_m^2}{L}\frac{\frac{\omega_0}{Q}.\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$$

$$\equiv \pi L\frac{\omega_0}{Q}q_m^2\,\omega$$

En particulier, à la résonance, $\langle \mathcal{E}_g(t)\rangle_{T_0} = \pi L\frac{\omega_0^2}{Q}q_m^2(\omega_0)$

- On en déduit la relation :

$$\frac{\langle \mathcal{E}(t)\rangle_{T_0}}{\langle \mathcal{E}_g(t)\rangle_{T_0}} = \frac{Q}{2\pi}$$

Ainsi, à la résonance, l'énergie emmagasinée par l'oscillateur RLC est $\frac{Q}{2\pi}$ fois supérieure à l'énergie fournie par l'excitateur, la source, égale à l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance.