Leçon n°2 : Gravitation

Niveau	**Licence**
Prérequis	Dynamique du point Electrostatique Coordonnée sphérique et angle solide (théorème cinétique gaz)
Biblio	Phys Sup PCSI editions TEC and DOC Mécanique, pérez La gravitation Chérif Zananiri
Plan	I. <u>Interaction gravitationnelle</u> 1. Aspect historique 2. Champ gravitationnel II. <u>Propriétés du champ</u> 1. Potentiel gravitationnel 2. Flux du champ 3. Application : champ d'un astre III. <u>Application</u> 1. Vitesse de libération 2. Atmosphère

Questions :

- Attraction passe travers une masse ?

On est toujours attiré par le soleil si le soleil passe derrière la Terre.
Expérimentalement c'est vrai.
Additivité des forces n'est pas complètement immédiat.

- On veut que le potentiel tendent vers 0 quand la distance est infinie?

On choisit arbitrairement.

- Intégration sur un contour fermé du potentiel. Potentiel en A et potentiel en B c'est les mêmes car A et B confondue (contour fermé) donc intégrale sur un contour fermé =VA-VB= 0

- Pourquoi avec GO on a le droit de dire que div G=-4piG direct ?

Parce que c'est vrai qq soit l'élément de volume donc même un petit volume infinitésimal… —> à revoir

- Est ce qu'on prend en compte l'accélération d'entrainement dans le petit g ?

On prend en compte l'accélération d'entrainement oui. C'est dans le champ de pesanteur qu'on ne le prend pas en compte (vers le centre de la Terre)
Mais ici comment ça se fait qu'on trouve la bonne valeur alors qu'on a négligé l'accélération d'entraînement?
0,034 m/s^2 à l'équateur.
Pas complètement négligeable.
On a négligé l'accélération d'entrainement et le fait que la Terre n'est pas ellipsoïde —> Ces deux là se compensent, c'est pour ça que l'on a trouvé a peu près la bonne valeur.

- Comment il a trouvé g ?

Balance torsion
Equilibre entre le couple de torsion du ressort et la force appliquée.

- Comment on a trouvé la masse de la Terre?

Anomalie du champ de gravitation a la place de la vitesse de la libération. Ou limite de roche (explosion des astres)

LP02 : Gravitation

①

Niveau : Licence

PR : Dynamique du Pt
Électrostatique
Coordonnée Sphérique et Angle Solide
(Théorème cinétique gaz)

Biblio : Phys Sup PCSI
éd. TEC et DOC
- Mécanique Perez
- La grav., chef canon.

Intro : 1687

I. Interaction gravitationnelle

1) Aspect historique

Point de départ : 3 lois de Kepler, surtout la troisième qui nous intéresse ici : Demi grand axe de l'ellipse au carré multiplié par le demi grand axe au cube = constante
On trouve grâce à une intuition ; que l'accélération est égale à l'inverse de la distance au carré (fois une constante)

Départ : • 3 lois de Kepler : $\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 b^3 = k$

• $a = \frac{v^2}{R}$

$$a_{Lune} = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{k}{R^2}$$

PFD $m_L \vec{a_L} = \vec{F}_{T/L} = \frac{m_L k}{R^2} = -G\frac{m_L m_T}{R^2}\vec{e_R} \Rightarrow \forall m_1, M_1$ et $M_2, m_2 \rightarrow \boxed{\vec{F}_{M_1/M_2} = -G\frac{m_1 m_2}{\|\vec{M_1M_2}\|^3}\vec{M_1M_2}}$

2) Champ Gravitationnel

Ensuite système de particule : on somme
Ensuite élément de volume dτ

Propriété que l'on peut extraire de ce champs :

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{O/M} &= -G\frac{m_o m}{R^2}\vec{e_r}\\ \vec{\mathcal{G}}(M) &= -\frac{Gm}{R^2}\vec{e_r}\end{aligned}\right\} \vec{F}_{O/M} = m\,\vec{\mathcal{G}}(O)$$

$\vec{F}_{\to M} = \sum \vec{F}_{O_i/M} = \sum -G\frac{m_{o_i} m}{R_i^2}\vec{e_{r_i}} = m\sum_i \vec{\mathcal{G}}_i(O)$

∞ de particule.

$\otimes$ $dm = \rho(o)\,d\tau \rightarrow d\vec{\mathcal{G}}(M) = \frac{G\,dm}{R^2}\vec{e_r}$

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}} = \iiint_V d\vec{\mathcal{G}} = \iiint G\frac{\rho\,d\tau}{R^2}\vec{e_r}}$$

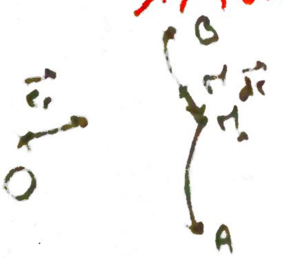
II. Propriétés du champ

Circulation élémentaire

oméga=angle solide= 4pi sur une surface fermée

1) Potentiel gravitationnel

$\vec{R}\,d\vec{R} = d\left(\frac{1}{2}\vec{R}\cdot\vec{R}\right) = d\left(\frac{1}{2}R^2\right)$
$= r\,dr$



$$\delta C = \vec{\mathcal{G}}(M)\cdot\vec{MM_1} = \vec{\mathcal{G}}(M)\cdot d\vec{r}$$
$$= G\frac{m}{\|\vec{R}\|^3}\vec{R}\,d\vec{r} = -G\frac{m}{R^2}dr = -dV.$$

où $V(r) = -\frac{Gm}{R} + cst$

$V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \Rightarrow cst = 0$

donc $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = -\vec{\text{grad}}\,V}$

$$\oint \delta \mathcal{C} = \oint_A^B -dV = V(A) - V(B) = 0$$

$$\Rightarrow \oint_A^B \vec{\mathcal{G}}(M)\, d\vec{r} = 0.$$

2) Flux du champ

$$d\phi = \vec{\mathcal{G}}(M)\, d\vec{S} = -G \frac{m_0}{R^2}.\vec{e}\; d\vec{S} = -G m_0\, d\Omega$$

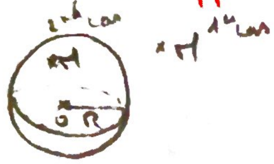
$$\boxed{\phi = \iint_S d\phi = -G m_0\, \Omega = \iint \vec{\mathcal{G}}\, d\vec{S}}$$

$\phi = \iint \vec{\mathcal{G}}\, d\vec{S} = \underline{-4\pi G m_{int}}$ vrai sur toute surface

Forme locale : $\iint \vec{\mathcal{G}} \cdot \underset{\text{sphère}}{d\vec{S}} = -4\pi G m_{int} \Leftrightarrow \iiint_V \text{div}\, \vec{\mathcal{G}}\, d\tau = -4\pi G m_{int} = -4\pi G \iiint_V \rho\, d\tau$

donc $\boxed{\text{div}\, \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G \rho}$

3) Application : Champ d'un astre



× Symétrie sphérique → Invariant par Rotat°

* $\rho = cst$
* $\vec{OM} = R\vec{e}_r$

$\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$

1er cas : extérieur $\iint \vec{\mathcal{G}}\, d\vec{S} = -4\pi G m_{int} \Leftrightarrow 4\pi R^2 \mathcal{G} = -4\pi G m$ par applicat° du th de Gauss

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{G}} = -G \frac{m}{R^2}\vec{e}_r}$

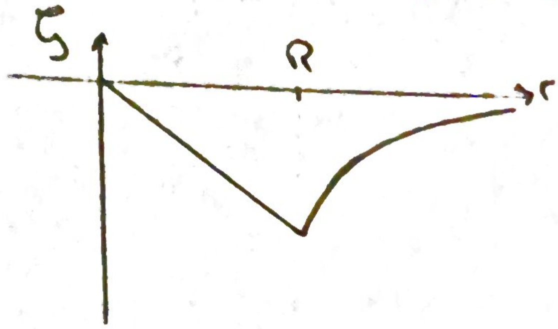
$\vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{r} = -dV \rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{Gm}{R}}$

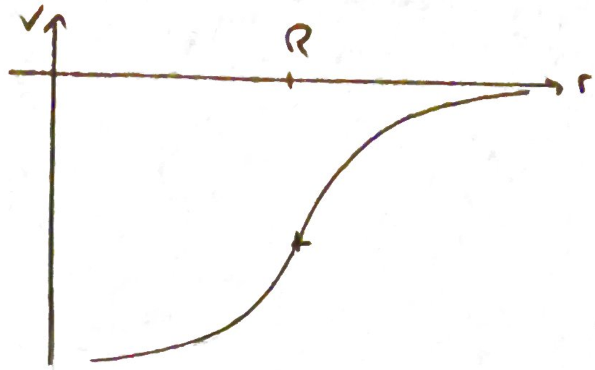
2nd cas : intérieur $\iint \vec{\mathcal{G}}\, d\vec{S} = -4\pi G m_{int} \Leftrightarrow R^2 4\pi \mathcal{G} = -4\pi G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho = -4\pi G\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{G}} = +G \frac{m}{R^3} R\, \vec{e}_r}$

$\vec{\mathcal{G}}\, d\vec{r} = -dV \rightarrow V(r) = \frac{Gm}{2R^3}R^2 + cst$ or $V_{int}(R) = V_{ext}(R) \Rightarrow cst = -\frac{3}{2}\frac{Gm}{R}$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{Gm}{2R^3}R^2 - \frac{3}{2}\frac{Gm}{R}}$





<u>AN</u> $\zeta(R) = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$ on a $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg

$R_T = 6370$ km

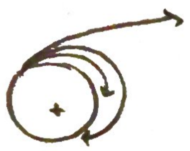
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot kg^{-2} \cdot m^2$

$\Rightarrow \zeta = 9{,}81$ m/s $= g$

↳ gravitat° et accélérat° centrifuge

III. Applications

1) Vitesse de libération



$E_m = 0 = E_c + E_p$ et $E_p = qV_{el} = mV_G$; $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

donc $0 = \frac{1}{2}mv_\ell^2 - m\dfrac{GM_T}{R}$ $\Rightarrow \boxed{v_\ell = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{R_T}}}$

AN : $v_\ell = 11{,}2$ km.s^{-1}

Vitesse de libération : Vitesse minimale que l'on doit avoir pour s'échapper de l'attraction gravitationnelle

Lien entre la vitesse de libération et existence ou non d'une atmosphère sur un astre

Sur le soleil : $v_{\ell s} = 617{,}5$ km/s

— la Lune : $v_{\ell L} = 2{,}4$ km/s

— mars : $v_{\ell m} = 5$ km/s

2) Atmosphère

D'après TCG : $E_{cr} = \frac{3}{2}k_BT$ sachant que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow \frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3R.T}{M_G}}$ avec R ct des gaz parfait.

AN : pour O_2 $M_{O_2} = 32$ g/mol supposons $T = 300$ K $\Rightarrow v = 484$ m/s $< v_\ell$

$M_{N_2} = 28$ g/mol $\longrightarrow v = 517$ m/s $< v_\ell$

$M_{H_2} = 2$ g/mol $\longrightarrow v = 1{,}93$ km/s.

donc format° atmosphère, gaz ne s'échappe pas.

Conclusion : théorie a ses limites, Relativité explique micro.

Questions.

$= - G m_1 \Omega$

$\iint \vec{G}\, d\vec{S} = -4\pi G m_{int} = -4\pi G \iiint_V \rho\, d\tau = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{G}\, d\tau = \iiint_V (-4\pi G)\rho\, d\tau$

$\iiint_V \underbrace{(\mathrm{div}\,\vec{G} + 4\pi G\rho)}_{=0} d\tau = 0$

Additivé → considérat° expérimentale.

Pas d'écrantage

$\left[G \frac{m_T}{R_T^2}\right] = g(R_T)$

→ Anomalie du chp grav