Leçon n°35 : Diffraction de Fraunhofer

Niveau	**Licence**
Prérequis	Modèle scalaire de la lumière, Interférences, Optique géométrique, Notion sur la TF, Diffraction, Principe de Huygens Fresnel.
Biblio	CAP Prépa PC/PC* Farault Renault Optique H prépa
Plan	I. Diffraction de Fraunhofer 1. Rappel du principe de Huygens-Fresnel 2. Diffraction de Fraunhofer II. Effets de la diffraction de Fraunhofer sur la formation d'une image 1. Position du problème 2. Lien avec la diffraction de Fraunhofer 3. Effet d'un diaphragme 4. Critère de Rayleigh III. Formalisme de la TF 1. Diffraction de Fraunhofer et TF 2. Exemple d'un réseau 3. Application : trouver le pas d'un réseau

Questions :

- Représenter la transmittance du réseau graphiquement
Quand x=1/2 cos 2pi = -1 transmittance vaut 0.

- Qu'est ce que b ? b est plus grand que a

- Le réseau est sinusoïdale ou les ouvertures sont en créneaux ?
- A quoi ressemble un réseau sinusoïdale avec des créneaux ?

- A quoi pourrait correspondre un réseau décrit dans le 2. ?

- Sur la partie représentation fréquentielle : Quelle est la largeur des pics ?
C'est delta u = 1/b

- Quelle est la distance entre l'objet diffractant et les lentilles ?
Peu importe car les rayons arrivent parallèle de L1 et l'angle theta ne dépend que de l'objet diffractant.

- Que peut on faire pour rassembler deux lentilles pour avoir la focale ?
1/f''=1/f+1/f'

- Transmittance ; fonction complexe. Donnez un objet avec une transmittance complexe et pas réelle ?
Une lentille

- Et si on voulait faire un réseau avec une transmittance complexe ?
Un réseau par réflexion

Principe de Huygens Fresnel somme des amplitudes complexes
Critère de Rayleigh il y a une intensité figure de réfraction résultante c'est la somme des intensités

- Pourquoi on ne fait pas la somme des amplitudes complexes au carré et qu'on fait la somme des intensités ?
A cause des interférences

- Pourquoi ne pas prendre en compte les interférences ? Quelle est l'hypothèse sous jacente ?

LP35 Diffraction de Fraunhofer

Niveau : Licence

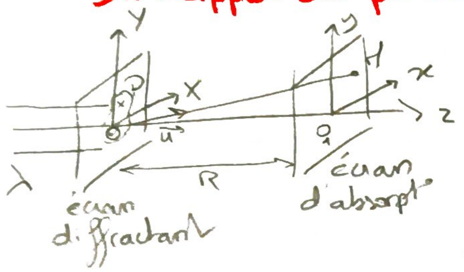
PR : - modèle scalaire - lumière
- interférence optique géo.
- notions sur la TF,
- Diff et Principe de H-F

Biblio : - Cap. Prépas PC/PC*, F.R optique
- H. Pérez Optique ondulatoire.

Introduction : expérience diffract° par une fente

I. Diffraction de Fraunhofer

1. Rappel du principe de Huygens-Fresnel



$\vec{u} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{vmatrix}$

$\vec{k} = k\vec{n}$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}; i = 0$

$OO_1 = R$

$d\underline{s}(M) = K' \underline{s}(P) \exp(k_i PM) \frac{1}{PM} d\Sigma_P$

$\underline{s}(M) = \iint_\Sigma d\underline{s}(M)$

$\vec{OM} \begin{vmatrix} R\alpha \\ R\beta \\ R\gamma \end{vmatrix}$

Calcul de PM : $PM = R^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2$

approximat° : $OP \gg R$ et $M \gg R$ donc $PM \simeq R + \frac{(x+X)^2}{2} + \frac{(y-Y)^2}{2}$

$$PM \simeq \underbrace{R + \frac{R}{2}(\alpha^2+\beta^2)}_{R_0} - (\alpha X + \beta Y) + \frac{X^2+Y^2}{2R}$$

2. Diffraction de Fraunhofer

Approximation : $k' \frac{X^2+Y^2}{2R} \ll 1$ donc $PM \simeq R_0 - (\alpha X + \beta Y)$

on pose $u = \frac{\alpha}{\lambda}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda}$

Ainsi $\underline{s}(M) = \underline{s}(u,v)$

$$= \underbrace{K' \frac{e^{k_i R_0}}{OM}}_{K(u,v)} \underbrace{\iint_\Sigma s(X,Y) e^{-2\pi i(uX+vY)} dXdY}_{T}$$

$R_0 \leftarrow OM$

$s^* s = \left|\frac{K'}{R_0}\right|^2$

$\rightarrow \mathcal{E}(M) = K^2 (T)^2$

Conditions d'obtention : $R \gg \frac{\pi(X^2+Y^2)}{\lambda}$ avec $\lambda = 500$ nm

si $\sqrt{X^2+Y^2} = 1$ cm $R \gg \sim 600$ m

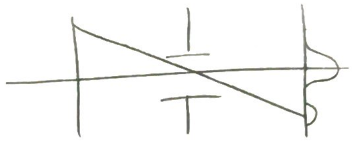
si $\sqrt{X^2+Y^2} = 1$ mm $R \gg \sim 6$ m

II. Effet de la diffract° de Fraunhofer sur la formation de l'image

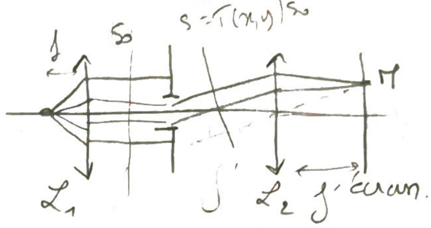
1. Position du problème

But d'un instrument d'optique → établir une correspondance ponctuelle entre un objet et son image.

Réalisation : introduire un diaphragme
L'image formé va être affecté par l'effet de la diffraction.



2. Lien avec la diffraction de Fraunhofer



$\frac{1}{f''} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$

Comment se ramener à un pb av F.

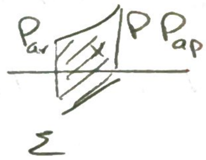
3. Effet d'un diaphragme

$s(u,v) = \int s(x,y) e^{\cdots} = \int s_0 T(x,y) e^{\cdots}$

* Transmittance d'un diaphragme $\mathcal{D}$:

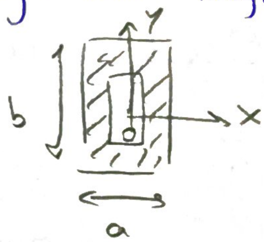
Pour tout point P de Σ $\quad t(P) = \frac{s(P_{ap})}{s(P_{av})}$

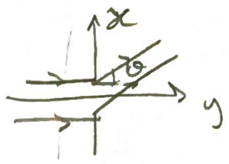
on a donc $\underline{s}(P) = s_0 \underline{t}(P)$



* Diffraction par une fente rectangulaire infiniment longue :

b >> a diffract° que selon (OX).





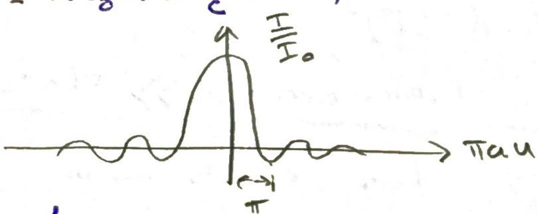
$u = \frac{\theta}{y}$

$\underline{s}(M) = \underline{s}(u)$

$= K s_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1 \times e^{-2i\pi u X}\, dX = \frac{K s_0 a}{\pi u a} (\sin(\pi u a))$

$= K s_0 a \,\mathrm{sin_c}(\pi u a)$

$I(u) = I_0 \,\mathrm{sin_c}^2(\pi u a) = I_0 \,\mathrm{sin_c}^2\left(\pi a \frac{\theta}{\lambda}\right)$

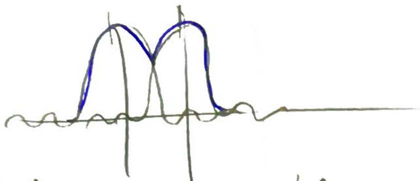


* demi-longueur angulaire : $\Delta u = \frac{1}{a}$ cad $\Delta\theta = \frac{1}{a}$
* Discussion dans ces limites : $a \to \infty$ $\Delta\theta \to 0$ propag en ligne droite
  $a \to 0$ $\Delta\theta \to \infty$ diffract° ds ∀ les dir.
* Diffract° par un trou circulaire : tâche d'Airy de rayon angulaire $\Delta\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$

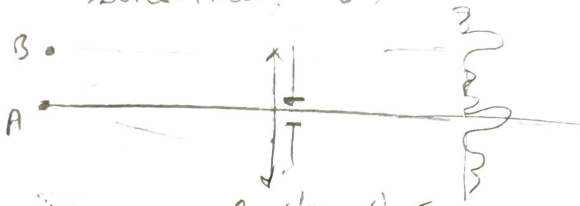
D = diamètre du trou.

4. Critère de Rayleigh

La limite de résolution d'un système optique est atteinte lorsque la distance angulaire qui sépare les 2 tâches est égale au rayon de la tâche d'Airy.



sources incohérentes, elles n'interfèrent pas → pas de relat° de phase



on somme les intensités

Applicat° numérique sur un télescope ou appareil photo (taille pixel < taille tâche d'Airy)

III. Formalisme de la transformé de Fourier (TF)

1. Diffraction de Fraunhofer et TF

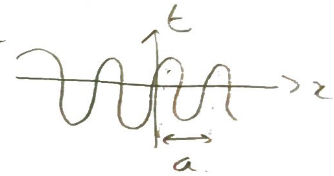
$$\underline{s}(u,v) = K s_0 \iint_{\Sigma} \underbrace{\underline{t}(X,Y) e^{-2i\pi u X} e^{-2i\pi v Y} dX dY}_{\underline{E}(u,v)}$$

2. Exemple d'un réseau

$$\begin{cases} a = \text{pas} \\ b = \text{longueur fente} \\ t(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a}\right)^{*} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(u) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} t(x) e^{-2i\pi u x} dx$$

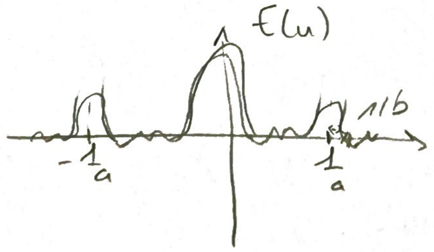
$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(1 + e^{2i\frac{\pi x}{a}} + e^{-2i\frac{\pi x}{a}}\right) e^{-2i\pi u a} dx.$$

* 

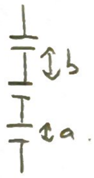
$$E(u) = \frac{1}{2}\left[\text{sin}_c(\pi u a) + \frac{1}{2}\left(\text{sin}_c\left(\pi b\left(u - \frac{1}{a}\right)\right) + \text{sin}_c\left(\pi b\left(\frac{1}{a} + u\right)\right)\right)\right]$$

Représentation fréquentielle.

$\Delta u = \frac{1}{b}$

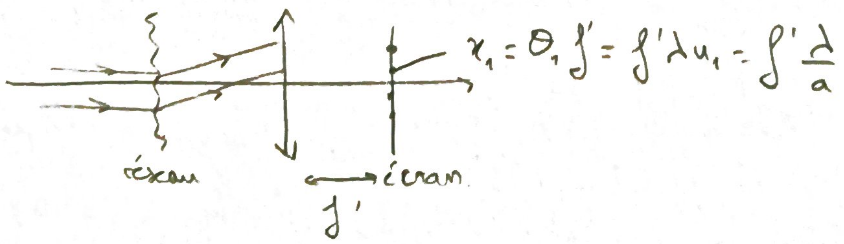


fréq spatiale



si $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ alors $b > a$

3. Application : retrouver le pas d'un réseau

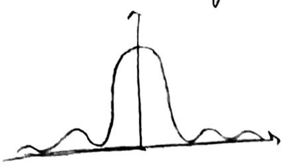


$(\vec{E_1}+\vec{E_2})^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$

→ Bien penser à discuter les résultats important.

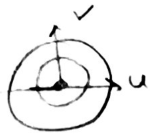
→ Etablir les limites rapidement pour passer aux applicat°

→ Discuter la symétrie pour II.3 de la figure de dif.



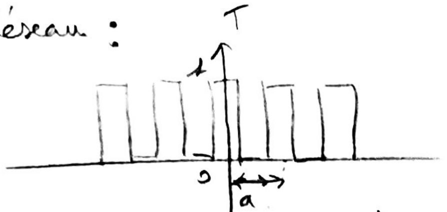
Pl fourier

tâche d'Airy



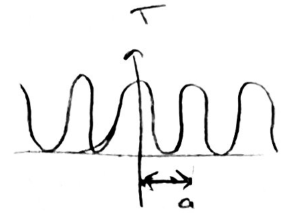
→ Attent° prendre un cas que l'on comprend.

Réseau :



Pb de f° g

+ facile →



$T(x) = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)$

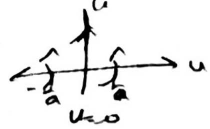
$T(x) = e^{j\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)}$

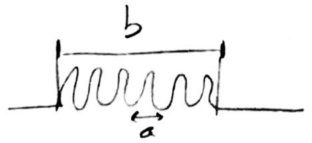
↳ réseau en phase.

$T(x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{j\frac{2\pi x}{a}}+e^{-j\frac{2\pi x}{a}}}{2}\right)$

$T(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi x}{a}} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi x}{a}}$

$T(u) = \frac{1}{2}\delta(u) + \frac{1}{4}\delta\left(u-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(u+\frac{1}{a}\right)$

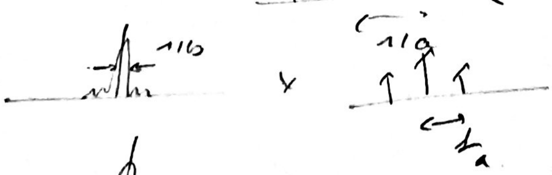




pour II.2

TF(∿∿∿) = TF(⎍) ⊗ TF(∿∿∿)

$= \text{sin}_c(\pi u b)$ ⊗

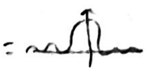


Traiter un réseau infini revient au même qu'un réseau à N fentes.

+ facile

Théorème de Babinet :

$T_1 + T_2 = 1$

TF(T_1) =  TF(T_2) =  TF = tâche d'Airy.

$TF(T_1) + TF(T_2) = TF(1) = \delta(u)$

si $u \neq 0$ $\tilde{T}_1(u) + \tilde{T}_2(u) = 0$

$\tilde{T}_1(u) = -\tilde{T}_2(u) \Rightarrow J_1(u) = J_2(u)$