

Optique Ondulatoire

Préparation à l'agrégation interne de physique

I Posséder les bases	
1 Rappels de physique des ondes	3
2 L'onde lumineuse	5
3 Interférences	6
Exercices	7
II Acquérir l'essentiel	
1 Les ondes	9
2 Le signal lumineux	10
3 Interférences lumineuses à deux ondes	11
4 Défauts de cohérence	15
5 Interférences à N ondes	21
Exercices	24
III Approfondir	
1 L'équation de D'Alembert	31
2 Cohérence	32
Exercices	36

Posséder les bases

1	Rappels de physique des ondes	3
1.1	Notion de propagation	3
1.2	Exemples d'onde	3
2	L'onde lumineuse	5
2.1	Modèle scalaire de l'optique ondulatoire	5
2.2	Ondes harmoniques	5
2.3	Intensité lumineuse	6
2.4	Lien avec l'optique géométrique	6
3	Interférences	6
3.1	Définition	6
3.2	Interférences à deux ondes	7
	Exercices	7

★ ★ ★

1 Rappels de physique des ondes

1.1 Notion de propagation

Soit une grandeur physique s . Si cette grandeur se *propage*, à partir d'un point source S , cela se traduit par :

$$s(M, t) \propto s(S, t - \Delta t_{SM})$$

qui signifie que :

Ce qui se passe en M à l'instant t est comme ce qui se passait en S à un instant antérieur.

Remarques :

▷ L'instant antérieur dont il est question est antérieur à t d'une durée égale à celle de la propagation¹ de S à M .

▷ « est comme » indique que le signal a pu être altéré (absorption, amortissement, . . .) :

$$s(M, t) = \alpha(M) \cdot s(S, t - \Delta t_{SM})$$

1.2 Exemples d'onde

Les exemples qui suivent sont des ondes qui se propagent dans des milieux *neutres* vis-à-vis de l'onde : ils n'absorbent pas, n'amplifient pas. Leur seul rôle consiste à supporter l'onde².

1. S'il s'agit d'un signal lumineux, cette durée est intimement liée au chemin optique comme on l'a vu dans le cours précédent : $\Delta t_{SM} = \frac{[SM]}{c}$.

2. On verra dans la partie « Acquérir l'essentiel », page 9, que toutes ces ondes vérifient la même équation aux dérivées partielles.

L'onde plane

Ces ondes sont telles que les surfaces d'égales vibrations sont des plans. L'onde se propage perpendiculairement à ces plans.

Dans le cas, simple, où on a fait coïncider la direction (Oz) de notre repère avec la direction de propagation de l'onde, l'expression la plus générale de son amplitude s s'écrit :

$$s(x, y, z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

f et g sont des fonctions et v est la vitesse (célérité) de cette onde. Le premier terme correspond à une onde qui se propage dans le sens des z croissants et le deuxième à une onde se propageant dans le sens des z décroissants.

Remarque : Dans le cas où seule f (ou g) est présente, l'onde est dite progressive.

De manière plus générale, si \vec{u} désigne la direction dans laquelle se propage une onde plane progressive, l'expression de l'amplitude devient :

$$s(M, t) = f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{v}\right)$$

L'onde sphérique

L'onde sphérique possède la symétrie sphérique (elle se trouve ainsi *bien nommée*). Dans ce cas, les coordonnées sphériques s'imposent et si $r \stackrel{\text{déf}}{=} OM$, ces ondes s'écrivent :

$$s(M, t) = \frac{1}{r} \cdot f\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} \cdot g\left(t + \frac{r}{v}\right)$$

L'interprétation du facteur $\frac{1}{r}$ étant liée au fait qu'une telle onde voit au cours de sa propagation son énergie se répartir sur des sphères dont le rayon change (augmentant pour une onde « sortante » et diminuant pour une onde « rentrante »).

Ondes sinusoïdales

Les ondes sinusoïdales (on dit aussi *monochromatiques* ou encore *harmoniques*) sont telles que les fonctions f (ou g) sont sinusoïdales : $f(\bullet) = A \cdot \cos(\omega \cdot \bullet + \varphi)$; A étant l'amplitude, ω la pulsation et φ la phase à l'origine. Dans la suite, je n'écrirai que³ des ondes progressives...

3. On peut toujours superposer (linéarité des équations sous-jacentes...).

★ L'onde plane progressive monochromatique (OPPM) :

$$s(M, t) = f\left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{OM}}{v}\right) \left\{ \text{donc, } \boxed{s(M, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} + \varphi)} \right.$$

et $f(\bullet) = A \cdot \cos(\omega \cdot \bullet + \varphi)$

Avec $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{u}$, le *vecteur d'onde*. La longueur d'onde est alors $\lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$

★ L'onde sphérique progressive monochromatique :

De même, $s(M, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \varphi)$, avec $k = \frac{\omega}{v}$.

2 L'onde lumineuse

2.1 Modèle scalaire de l'optique ondulatoire

Le phénomène lumineux est décrit par la donnée, en tout point et à tout instant, de la valeur prise par un champ scalaire⁴ appelé amplitude lumineuse instantanée.

Le long d'un rayon lumineux, menant de S à M , l'amplitude instantanée a de cette onde vérifie (c'est le principe de la propagation, voir plus haut) :

$$a(M, t) = \alpha(M) \cdot a(S, t - \Delta t_{SM})$$

soit $a(M, t) = \alpha(M) \cdot a\left(S, t - \frac{[SM]}{c}\right)$

2.2 Ondes harmoniques

Leur longueur d'onde λ est telle que $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 800 \text{ nm}$, ce qui correspond à des fréquences de l'ordre de 10^{14} Hz. À partir d'ici, j'écrirai les ondes harmoniques en notation complexe.

▷ Onde quelconque progressive monochromatique

$$\underline{a}(S, t) = a_0 e^{i\omega t}$$

donc, $\underline{a}(M, t) = a_0(M) e^{i(\omega t - \varphi)}$ avec⁵ $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} [SM]$

▷ Onde sphérique progressive monochromatique

$$\underline{a}(M, t) = \frac{b_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad \text{en posant } k = \frac{n\omega}{c}$$

▷ Onde plane progressive monochromatique

$$\underline{a}(M, t) = a_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

4. Si on veut faire un lien avec l'électromagnétisme, on pourrait dire que cette grandeur scalaire est une des composantes du champ électrique...

5. Une surface d'onde est donc une surface équiphasse...

2.3 Intensité lumineuse

L'intensité lumineuse⁶ — on dit aussi *éclairement* — est proportionnelle à la moyenne quadratique de l'amplitude lumineuse :

$$I(M) = K \cdot \left\langle |a(M, t)|^2 \right\rangle_{T_d}$$

où T_d est le temps caractéristique du détecteur.

Ordres de grandeurs :

détecteur	œil	photodiode	détecteur ultra-rapide (?)
T_d	40 ms	1 μ s	10 ps

$T_d \gg T$: en pratique, l'intensité est calculée sur une période (quand il y en a une!).

2.4 Lien avec l'optique géométrique

L'optique géométrique est la description du phénomène lumineux à l'aide de la notion de rayon de lumière. La théorie ondulatoire, ne vient pas remettre en cause cette optique, mais plutôt la compléter. En effet, tant que la notion de rayon a encore un sens — donc tant qu'on n'est pas au cœur d'un phénomène de diffraction —, la théorie ondulatoire vient simplement rajouter que *les rayons sont les trajets suivis par des ondes* et que si on désire connaître l'état vibratoire en un point M d'un rayon, il suffit de calculer le retard $\frac{[SM]}{c}$ pris par l'onde le long de ce rayon et :

$$a(M, t) \propto a\left(S, t - \frac{[SM]}{c}\right)$$

Le théorème de Malus (dans sa version enseignée en CPGE), fait également partie de ce lien. Il lie la notion de chemin optique (typiquement géométrique) à la notion de surface d'onde (typiquement ondulatoire).

3 Interférences

Ce paragraphe se veut général : il ne se restreint pas aux ondes lumineuses et n'abordera pas ce qui est spécifique à celles-ci.

3.1 Définition

On dit qu'il y a interférence en un point M atteint par plusieurs ondes si et seulement si l'intensité en M est différente de la somme des intensités que chaque onde produirait en M si elle était seule.

interférences en M

\Longleftrightarrow

$$I_{\text{onde 1} + \text{onde 2} + \dots + \text{onde N}}(M) \neq I_{\text{onde 1}}(M) + I_{\text{onde 2}}(M) + \dots + I_{\text{onde N}}(M)$$

La définition d'interférences faisant intervenir l'intensité, et celle-ci étant dépendante du capteur choisi, l'obtention d'interférences est relative au capteur choisi...

6. En électromagnétisme, on définit l'intensité comme la puissance moyenne par unité de surface orthogonale à la direction de propagation ; il s'agit donc de la norme du vecteur de Poynting...

3.2 Interférences à deux ondes

Soit un point M en lequel deux ondes (lumineuses, mécaniques, sonores, etc.) se superposent. La vibration résultante est la somme⁷ des deux vibrations :

$$s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$$

Et, l'intensité est⁸ : $I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2K \cdot \langle s_1(M, t) \cdot s_2(M, t) \rangle_{T_d}$

Il y a interférence si le dernier terme — appelé *terme d'interférences* — n'est pas nul...

EXERCICES

ex 1. Reconnaître une onde

Indiquez quelles sont les caractéristiques des ondes suivantes (x, y et z sont les coordonnées cartésiennes; r, θ et φ sont les coordonnées sphériques, et enfin, ρ, θ et z sont les coordonnées cylindriques) :

1. $a(M, t) = a_0 \cos(\omega t - a.x - b.y - c)$
2. $\underline{a}(M, t) = a_0 e^{i(\omega t + a.x - c.z)}$
3. $\underline{a}(M, t) = \frac{a_0}{\rho} e^{i(\omega t - k\rho)}$
4. $\underline{a}(M, t) = \frac{a_0 \sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)}$

ex 2. Écrire une onde

Écrivez l'expression de l'amplitude instantanée des ondes suivantes (toutes sont monochromatiques, de pulsation ω) :

1. Onde plane progressive dont l'amplitude est a_0 et la direction de propagation est $\vec{u} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$
2. Onde sphérique progressive, *centripète*, de longueur d'onde λ .

7. Cette additivité des vibrations est liée à la linéarité des équations sous-jacentes...

8. $I_1(M)$ (resp. $I_2(M)$) étant l'intensité en M lorsque seule l'onde 1 (resp. l'onde 2) existe.

ex 3. Ondes stationnaires

Soit une corde tendue parcourue par les deux ondes suivantes :

$$a_1(x, t) = A e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad a_2(x, t) = A e^{i(\omega t + kx)}$$

1. Décrire la situation étudiée.
2. Calculer l'amplitude résultante de la superposition de ces deux ondes.
3. Montrer qu'il existe des points qui ne vibrent plus. Ces points sont appelés *nœuds* de vibration.
4. Pourquoi parle-t-on d'onde stationnaire (par opposition à progressive) ?

Acquérir l'essentiel

1 Les ondes	9
1.1 Ondes planes	9
1.2 Ondes sphériques	10
2 Le signal lumineux	10
2.1 Mécanisme d'émission lumineuse	10
2.2 Ordres de grandeurs	11
3 Interférences lumineuses à deux ondes	11
3.1 Obtention d'interférences à deux ondes	12
3.2 Contraste	12
3.3 Franges - ordre	13
3.4 Déphasage et différence de marche	13
3.5 Quelques dispositifs	13
4 Défauts de cohérence	15
4.1 Défaut de cohérence temporelle	15
4.2 Défaut de cohérence spatiale	17
4.3 S'affranchir du défaut de cohérence spatiale	19
4.4 Exemples de dispositifs diviseurs d'amplitude	20
5 Interférences à N ondes	21
5.1 Intérêt	21
5.2 Réseau	21
5.3 Interféromètre de Fabry-Pérot	23
Exercices	24

★ ★ ★

1 Les ondes

La plupart des théories physiques linéaires⁹ décrivant la propagation d'ondes font intervenir *l'équation de D'Alembert* :

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \Delta s = 0$$

1.1 Ondes planes

Intéressons-nous à des solutions invariantes dans toute translation orthogonale à une direction donnée (appelons-là Ox). Alors, s n'est fonction que de x et de t et on a :

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$$

9. Voir notamment les équations de Maxwell, les équations de l'acoustique et de la mécanique.

Soit f une fonction (d'une seule variable) deux fois dérivable.

Montrez que $s(x, t) \stackrel{\text{déf}}{=} f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ est solution de l'équation de D'Alembert¹⁰.

Recommencez avec $s(x, t) \stackrel{\text{déf}}{=} g\left(t + \frac{x}{v}\right)$.

1.2 Ondes sphériques

Intéressons-nous cette fois-ci à des solutions présentant la symétrie sphérique. On utilisera les coordonnées sphériques (s n'est alors fonction que de r et t) et un coup d'œil sur un formulaire nous indique que l'équation de D'Alembert s'écrira :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial s}{\partial r} \right) = 0 \\ \text{c'est-à-dire} \quad & \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial(rs)}{\partial r} - rs \right) = 0 \\ & \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(rs)}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2} - \frac{\partial(rs)}{\partial r} \right) = 0 \\ \text{et finalement,} \quad & \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2(rs)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(rs)}{\partial r^2} = 0 \end{aligned}$$

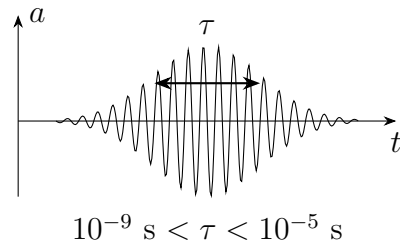
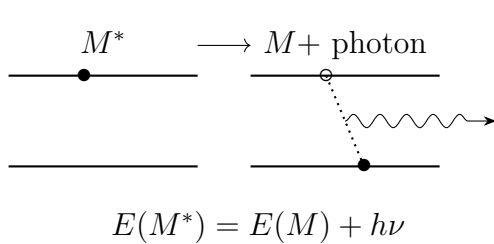
Équation dont on déduit les solutions proposées dans la partie « Posséder les bases ».

2 Le signal lumineux

Ce qui fait la particularité des interférences lumineuses tient à ceci que ces ondes sont émises selon un mécanisme bien particulier. La caractéristique essentielle de celui-ci est sa part de hasard.

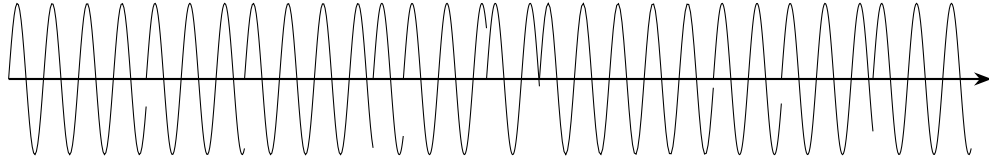
2.1 Mécanisme d'émission lumineuse

Lorsque qu'un édifice moléculaire est excité (par collision, radiation ou autre.) il est susceptible de se désexciter spontanément — de manière totalement aléatoire — en émettant un photon. Ceci peut s'illustrer de la façon suivante :



10. Aucune difficulté ici si on se souvient de la dérivation des fonctions composées : $\frac{\partial s}{\partial t}(x, t) = f'\left(t - \frac{x}{v}\right)$ et $\frac{\partial s}{\partial x}(x, t) = -\frac{1}{v} \cdot f'\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

La superposition d'un très grand nombre de désexcitations du même type produit un signal lumineux d'intensité constante dont il est commode d'imaginer l'amplitude comme suit :



Une succession de *trains d'onde* sinusoïdaux (de fréquence ν) dont la durée moyenne τ_c est appelée *temps de cohérence*.

Ce signal n'est pas sinusoïdal, donc son spectre ne se réduit pas à une raie. On montre que la largeur typique $\Delta\nu$ du spectre est telle que :

$$\Delta\nu \cdot \tau_c \sim 1$$

On voit alors que tout ce qui peut affecter la cohérence, affecte également la largeur spectrale (et vice-versa) :

Causes d'élargissement spectral :

- ▷ chocs (gaz ; discontinuité de phase)
- ▷ effet Doppler (gaz)
- ▷ existence de niveaux structurés en bande (solides ; nombreuses désexcitations possibles...)

Causes de rétrécissement spectral :

- ▷ filtrage
- ▷ émission stimulée (cf. laser)

2.2 Ordres de grandeurs

Source : ENS Cachan	$\Delta\nu$ (Hz)	τ_c (s)	$L_c = c \cdot \tau_c$	$\Delta\lambda$ (nm)
Laser He-Ne	10^9	10^{-9}	30 cm	10^{-3}
Lampe Na/Hg(BP)	$1,5 \cdot 10^{10}$	$7 \cdot 10^{-11}$	1 cm	$2 \cdot 10^{-2}$
Lampe Hg (HP)	$3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{-12}$	< 1 mm	> 0,3
Lampe blanche	$4 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{-15}$	< 1 μm	400

L_c est appelée *longueur de cohérence*.

3 Interférences lumineuses à deux ondes

Le signal illustré à la page 11, peut être écrit comme suit :

$$s(t) = a_0 e^{i(\omega t - \varphi(t))}$$

avec $\omega = 2\pi\nu$ et φ une fonction aléatoire du temps dont le temps caractéristique des variations est τ_c .

3.1 Obtention d'interférences à deux ondes

Soit un point M de l'espace atteint par deux ondes du type ci-dessus :

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t)$$

avec

$$\underline{s}_1(M, t) = a_{01}(M) e^{i(\omega_1 t - \varphi_1(M, t))} \quad \text{et} \quad \underline{s}_2(M, t) = a_{02}(M) e^{i(\omega_2 t - \varphi_2(M, t))}$$

On déduit aisément l'intensité correspondante :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \left\langle \cos \left[(\omega_1 - \omega_2)t - (\varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)) \right] \right\rangle$$

À cause du caractère fortement aléatoire de φ_1 et φ_2 , le terme d'interférences est en général nul. Aucune chance de voir des interférences en allumant deux ampoules dans une pièce !

S'affranchir de cette composante aléatoire ne peut se faire que d'une seule manière : il faut que les ondes 1 et 2 aient été émises par le même point source. C'est à cette seule condition que φ_1 et φ_2 ont des comportements aléatoires *identiques*¹¹ qui disparaissent dans la soustraction $\varphi_1 - \varphi_2$.

L'autre cause de nullité du terme d'interférence est plus facile à contrôler : il faut que $\omega_1 = \omega_2$.

Ainsi,

Seules des ondes de *même fréquence* ET issues d'une *même source ponctuelle* interfèrent.

L'intensité s'écrit alors :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)I_2(M)} \cos [\varphi_1(M) - \varphi_2(M)]$$

Formule de Fresnel

3.2 Contraste

On peut encore écrire :

$$I(M) = \left(I_1(M) + I_2(M) \right) \cdot \left(1 + C(M) \cdot \cos \varphi(M) \right)$$

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

On remarque alors que $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$; $C(M)$ est le contraste¹² en M .

Ici, $C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$. Il est maximal — et vaut dans ce cas 1 — si $I_1 = I_2$. On aura alors :

$$I(M) = 2I_0(M) \cdot \left(1 + \cos \varphi(M) \right)$$

11. On parle alors d'ondes corrélées ou mutuellement cohérentes.

12. On dit aussi visibilité.

3.3 Franges - ordre

On appelle :

▷ frange d'interférence, une courbe d'égal déphasage¹³.

▷ ordre d'une frange, le rapport $p = \frac{\varphi}{2\pi}$.

Alors,

$$\begin{cases} \text{Interf. constructive} & \Longleftrightarrow \text{frange brillante} & \Longleftrightarrow \varphi \equiv 0 [2\pi] & \Longleftrightarrow p \in \mathbb{Z} \\ \text{Interf. destructive} & \Longleftrightarrow \text{frange sombre} & \Longleftrightarrow \varphi \equiv \pi [2\pi] & \Longleftrightarrow p - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.4 Déphasage et différence de marche

$\varphi_1(M)$ (resp. $\varphi_2(M)$) exprime la phase de l'onde 1 (resp. 2) lorsqu'elle arrive en M .

On a alors¹⁴ :

$$\begin{cases} \varphi_1(M) = \varphi(S) + \frac{\omega}{c} \cdot [SM]_1 \\ \varphi_2(M) = \varphi(S) + \frac{\omega}{c} \cdot [SM]_2 \end{cases}$$

où $[SM]_1$ (resp. $[SM]_2$) est le chemin optique menant de S jusqu'à M en suivant le rayon 1 (resp. 2).

Donc,

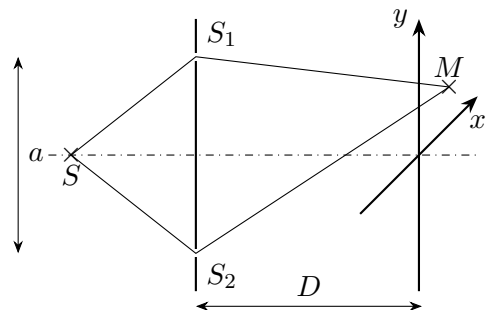
$$\boxed{\varphi(M) = k \cdot \delta(M)} \quad \text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et } \delta(M) = [SM]_1 - [SM]_2$$

$\delta(M)$ est appelé *différence de marche* en M . Remarquons que certains phénomènes, comme par exemple la réflexion sur un miroir ou sur un milieu plus réfringent, peuvent ajouter un déphasage ponctuel. Par exemple, la réflexion, en incidence normale, sur un miroir, déphase de π .

3.5 Quelques dispositifs

Trous d'Young

On considère le dispositif ci-contre, S étant une source ponctuelle monochromatique ; on repère un point M de l'écran d'observation par ses coordonnées x et y . L'origine sur l'écran est le projeté orthogonal du centre du segment S_1S_2 .



13. On la définit souvent avec « égale intensité ». Ceci n'est pas une définition, seulement une propriété des franges dans la situation où I_1 et I_2 ne dépendent pas de M ...

14. En se souvenant que ces ondes proviennent d'un même point source, sinon il n'y a pas interférences...

Remarquons que ce dispositif interférentiel est le seul vu en prépa qui fasse intervenir un phénomène de diffraction. En effet, sans diffraction, les lois de l'optique géométrique s'appliqueraient et les rayons lumineux ne seraient pas déviés...

Exprimons la différence de marche entre les deux rayons qui aboutissent au point M choisi :

$$\delta(M) \stackrel{\text{déf}}{=} [SM]_2 - [SM]_1$$

$$\delta(M) = [SS_2] + [S_2M] - ([SS_1] + [S_1M])$$

$$\delta(M) = [S_2M] - [S_1M] \quad \text{si on suppose que } S \text{ est disposée symétriquement}$$

$$\delta(M) = n\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 + D^2} - n\sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 + D^2}$$

En pratique, $D \gg a$ et $D \gg x$. À l'ordre le plus bas, on a alors : $\delta(M) = n \frac{ay}{D}$

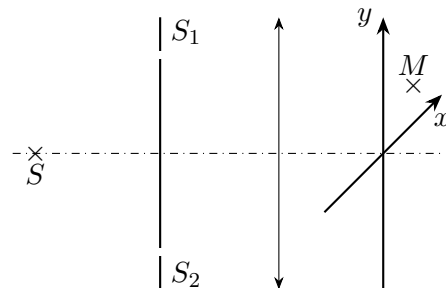
On en déduit que :

- ▷ Les franges ont pour équation $y = C^{\text{te}}$; ce sont donc des droites orthogonales à (S_1S_2) .
- ▷ L'intensité est $I(x, y) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi n a y}{\lambda D}\right)\right)$; donc les franges sont régulièrement espacées. L'interfrange (période de la fonction intensité) est $i = \frac{\lambda D}{na}$.

Trous d'Young (variante) : observation à l'infini

Ici, l'observation se fait par *projection* sur un écran grâce à une lentille convergente de distance focale f .

Étude libre...



Fentes d'Young

Elles sont une variante, plus lumineuse, des trous d'Young.

Miroir de Lloyd

S est une source ponctuelle monochromatique. Il s'agit d'étudier l'interférence entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi par le miroir. Je vous laisse introduire les grandeurs pertinentes ainsi que les coordonnées repérant les points de l'écran. On supposera la distance à l'écran grande devant toutes les autres longueurs.



Sachez vous inspirer du travail fait pour les trous d'Young (on en parle en séance?)...

Autres dispositifs

Pour vous exercer, essayez (vous trouverez le principe de ces dispositifs sur internet) :

- ▷ Les miroirs de Fresnel
- ▷ Le biprisme de Fresnel
- ▷ Les bi-lentilles (Billet & Meslin)

4 Défauts de cohérence

Les sources étudiées ci-dessus sont idéales. En réalité, aucune source n'est strictement ponctuelle, ni strictement monochromatique.

On dira qu'une source ponctuelle et monochromatique est parfaitement cohérente, qu'une source étendue présente un *défait de cohérence spatiale* et qu'une source non monochromatique présente un *défait de cohérence temporelle*.

Je traite les cas discrets dans cette partie ; les cas continus seront abordés dans la partie « Approfondir », page 31.

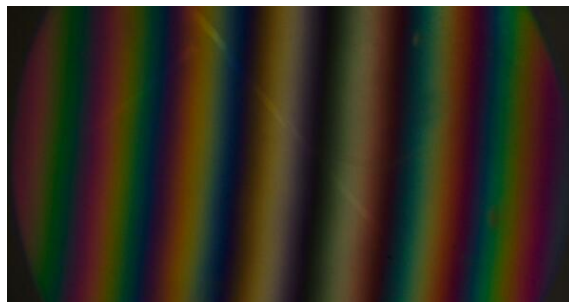
4.1 Défait de cohérence temporelle

Envisageons une source émettant les longueurs d'onde suivantes : $\{\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_N\}$. Comme deux ondes de fréquences différentes n'interfèrent pas, on a :

$$I(M) = \sum_{k=1}^N I_{\lambda_k}(M)$$

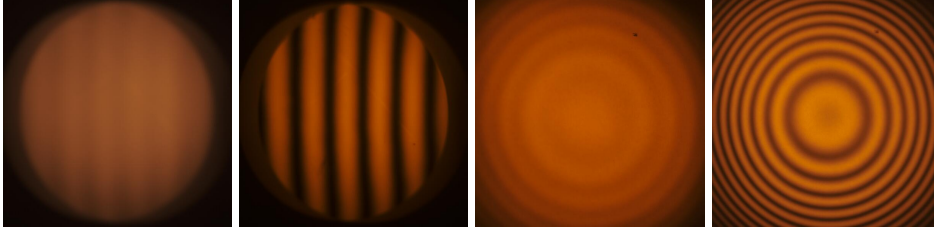
Quelle(s) conséquence(s) cela peut-il avoir sur une figure d'interférence ? Plusieurs cas sont à distinguer :

- ▷ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sont relativement éloignées les unes des autres : dans ce cas, se superposent plusieurs figures d'interférence dont les couleurs diffèrent. Et comme, en général, l'interfrange dépend de la longueur d'onde, ces figures se décalent les unes par rapport aux autres et on observe de jolis jeux de couleurs sur l'écran (ci-dessous en lumière blanche).



source : F. Perrin (2018)

▷ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ sont relativement proches, de sorte que l'impression colorée ne permette pas de les distinguer. Alors, la superposition de tous ces systèmes de franges *décalés* peut conduire à une perte de visibilité (brouillage) du phénomène. La question est alors de savoir si une bonne visibilité sera au rendez-vous ou pas...



source : F. Perrin (2018)

Qualitativement, le contraste reste¹⁵ bon en M si les franges ne sont pas trop décalées, c'est-à-dire si l'écart entre les déphasages relatifs aux différentes longueurs d'onde reste petit ... devant 2π .

$$\Delta_\lambda \varphi(M) \ll 2\pi$$

Cette contrainte¹⁶ n'est jamais réalisée dans tout l'espace ; un défaut de cohérence conduit à des *interférences localisées* !

Dans le programme de CPGE, on demande aux étudiants de mémoriser que le brouillage d'une figure d'interférence intervient dès que la variation de l'ordre d'interférence — variation évaluée sur la moitié de l'étendue spectrale de la source — est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Doublet spectral

Traitions explicitement le cas du doublet spectral : soit une source qui émet des ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . Il est plus commode ici d'utiliser le nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$; profitons-en pour introduire l'écart $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ entre les nombres d'onde et le nombre d'onde moyen $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$. Nous supposons que la différence de marche ne dépend pas de la longueur d'onde¹⁷.

Alors,

$$I = 2I_{01}(1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta)) + 2I_{02}(1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta))$$

Dans le cas $I_{01} = I_{02} \stackrel{\text{déf}}{=} I_0/2$, l'expression se simplifie aisément¹⁸ et devient :

$$I = 2I_0(1 + V \cos \varphi)$$

avec, $V = \cos(\pi\Delta\sigma\delta)$ et $\varphi = 2\pi\bar{\sigma}\delta$

Tout se passe donc comme s'il s'agissait d'une interférence à deux ondes *monochromatiques* — de nombre d'onde $\bar{\sigma}$ — avec un contraste non parfait.

15. On suppose qu'il l'est avec une seule longueur d'onde.

16. Ce que je note $\Delta_\lambda \varphi(M)$ c'est $\max_{i,j} |\varphi_{\lambda_i}(M) - \varphi_{\lambda_j}(M)|$.

17. En toute rigueur, dès que nous ne sommes pas dans le vide, l'indice optique de chaque milieu traversé est fonction de la longueur d'onde et par conséquent la différence de marche aussi. Il arrive cependant que cet effet soit négligeable...

18. J'insiste sur le *aisément*, la forme obtenue est très générale...

V , appelée *visibilité*, est le contraste de la figure d'interférences. Comme δ dépend du point d'observation, le contraste est maintenant local...

Interprétation :

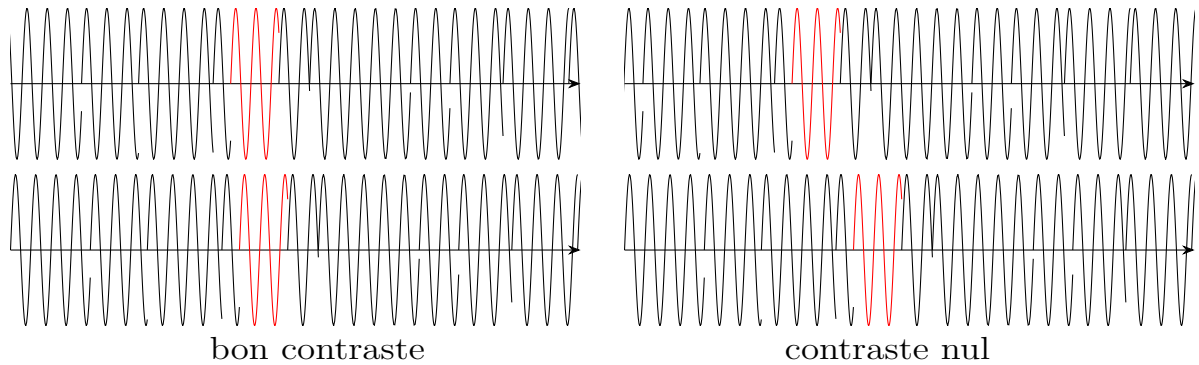
La visibilité est très bonne si $\pi\Delta\sigma\delta \ll \pi$, donc si $\delta \ll \frac{1}{\Delta\sigma}$. Or, $\Delta\sigma = \frac{\Delta\nu}{c}$, donc la visibilité est très bonne si :

$$\delta \ll L_c$$

L_c est la longueur de cohérence de la source (voir 2.2, page 11).

Une différence de marche est un décalage des trains d'onde. Si en M se superposent des trains d'onde trop décalés, ils ne sont plus mutuellement cohérents et il n'y a plus d'interférences.

Les situations de bon contraste ou de contraste quasi nul peuvent être illustrées de la façon suivante :



4.2 Défaut de cohérence spatiale

Envisageons plusieurs sources ponctuelles monochromatiques¹⁹ : $\{S_1; S_2; \dots; S_N\}$. Comme deux ondes émises par des sources différentes n'interfèrent pas, on a :

$$I(M) = \sum_{k=1}^N I_{S_k}(M)$$

Quelle(s) conséquence(s) cela peut-il avoir sur une figure d'interférence ? La superposition des systèmes de franges — *décalés* — produits par chacune de ces sources peut conduire à une perte de visibilité (brouillage) du phénomène. La question est alors de savoir si une bonne visibilité sera au rendez-vous ou pas...

Qualitativement, le contraste reste²⁰ bon en M si les franges ne sont pas trop décalées, c'est-à-dire si l'écart entre les déphasages relatifs aux différents points sources reste petit ... devant 2π .

$$\Delta_S\varphi(M) \ll 2\pi$$

19. de même fréquence...

20. On suppose qu'il l'est avec une seule source.

Cette contrainte²¹ n'est jamais réalisée dans tout l'espace ; un défaut de cohérence conduit à des *interférences localisées* !

Dans le programme de CPGE, on demande aux étudiants de mémoriser que le brouillage d'une figure d'interférence intervient dès que la variation de l'ordre d'interférence — variation évaluée sur la moitié de l'étendue spatiale de la source — est supérieure à $1/2$.

Doublet de sources ponctuelles

Traitions explicitement le cas du doublet de sources ponctuelles : soient deux sources, S_1 et S_2 qui émettent des ondes de longueurs d'onde λ . Il est plus commode ici d'utiliser le nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$; profitons-en pour introduire l'écart $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ entre les différences de marche et la différence de marche moyenne $\bar{\delta} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$.

Alors,

$$I = 2I_{01}(1 + \cos(2\pi\sigma\delta_1)) + 2I_{02}(1 + \cos(2\pi\sigma\delta_2))$$

Dans le cas $I_{01} = I_{02} \stackrel{\text{déf}}{=} I_0/2$, l'expression se simplifie aisément²² et devient :

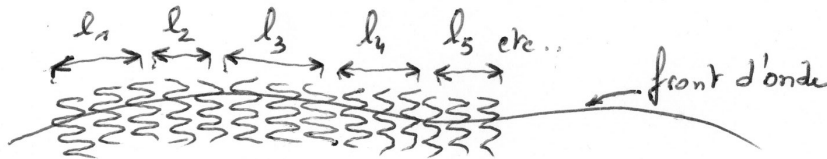
$$I = 2I_0(1 + V \cos \varphi)$$

avec, $V = \cos(\pi\sigma\Delta\delta)$ et $\varphi = 2\pi\sigma\bar{\delta}$

Tout se passe donc comme s'il s'agissait d'une interférence à deux ondes — de différence de marche $\bar{\delta}$ — avec un contraste non parfait. V , appelée *visibilité*, est le contraste de la figure d'interférences. Si $\Delta\delta$ dépend du point d'observation, le contraste est local...

Largeur de cohérence

De la même manière que la cohérence temporelle traite de la corrélation entre trains d'onde décalés dans le temps, la cohérence spatiale traite de la corrélation entre trains d'onde décalés dans l'espace :



On définit une largeur de cohérence l_c par l'étendue moyenne de ces corrélations sur un même front d'onde (en général, on raisonne sur un front d'onde plan). Sachant que des trains d'onde non corrélés ne peuvent pas interférer, on peut mesurer cette largeur de cohérence avec un dispositif aussi simple que les trous d'Young. En effet, si la distance a entre les trous est supérieure à la largeur de cohérence, les ondes qui se superposent sur l'écran d'observation ne sont pas corrélées et on a un contraste nul. En revanche, pour

21. Ce que je note $\Delta_S \varphi(M)$ c'est $\max_{i,j} |\varphi_{S_i}(M) - \varphi_{S_j}(M)|$.

22. J'insiste sur le *aisément*, la forme obtenue est très générale...

une distance entre les trous inférieure à la largeur de cohérence, un contraste existera²³ ; il sera d'autant plus important que $\frac{a}{l_c}$ sera petit.

Historiquement, cette idée a été exploitée par Michelson et Pease dans les années 1920. Ils ont mesuré grâce à cette technique le diamètre de certaines étoiles dont Betelgeuse (constellation d'Orion). Info en provenance de : Université de Nice - cours de Eric Aristidi.

Remarque : on parle souvent, à tort, de largeur de cohérence de la source ; il s'agit en réalité de la largeur de cohérence du front d'onde étudié... Idem vis-à-vis de la cohérence temporelle.

Retour au doublet de sources

Estimons sa largeur de cohérence. Dans le cas de trous d'Young, $\delta = SS_2 - SS_1 + \frac{ay}{D}$. En notant \vec{u}_1 (resp. \vec{u}_2) le vecteur unitaire dirigeant (SS_1) (resp. (SS_2)), on a alors :

$$\Delta\delta = (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{\Delta S}$$

$\vec{\Delta S}$ étant le vecteur joignant les 2 points sources.

On remarque que si les points sources sont disposés sur une ligne orthogonale à la ligne joignant les trous, $\Delta\delta = 0$. Dans ce cas, $V = 1$ et le contraste est maximal.

En revanche, si les points sources sont disposés parallèlement à la ligne joignant les trous — et sous l'hypothèse que la distance entre les sources et les trous d'Young soit très grande devant la distance séparant les trous et la distance séparant les sources —, $\Delta\delta \simeq a\Delta\theta$ où $\Delta\theta$ est l'angle sous lequel on voit les points sources depuis le plan des trous d'Young. V s'écrit alors $V = \cos(\pi\sigma a\Delta\theta)$ et

$$l_c \sim \frac{1}{\sigma\Delta\theta}$$

4.3 S'affranchir du défaut de cohérence spatiale

Les sources que nous savons fabriquer sont étendues²⁴. Cela peut engendrer des problèmes de visibilité lorsque nous souhaitons travailler avec des systèmes interférentiels. La première solution consiste à transformer ces sources en sources quasi-ponctuelles en les plaçant derrière un écran percé d'un très petit trou. Cependant, nous aurons des figures d'interférences très peu lumineuses.

Une deuxième solution serait d'utiliser des dispositifs peu sensibles au défaut de cohérence spatiale. Il suffirait en effet, que toutes les figures d'interférences (une pour chaque point de la source) se superposent exactement (ou presque) pour que la visibilité reste très bonne.

Les dispositifs vus plus haut divisent le front d'onde : ce sont deux rayons différents qui interfèrent en M . Ces dispositifs seront toujours plus ou moins sensibles à l'extension spatiale de la source. Remarquons tout de même qu'éclairer des trous d'Young avec

23. La largeur de cohérence étant statistique, la transition est douce...

24. À part les laser qu'on peut assimiler en première approximation à des sources quasi-ponctuelles.

une fente source perpendiculaire à la ligne joignant les trous ne cause aucune perte de contraste.

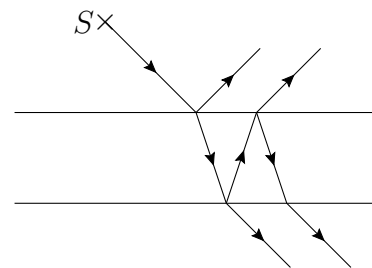
D'autres dispositifs permettent de faire interférer *un rayon avec lui-même*. Ils utilisent tous un phénomène de réflexion-réfraction qui divise le rayon. Une partie de l'amplitude de l'onde est réfléchie, l'autre est réfractée. Ces dispositifs sont dits à division d'amplitude.

4.4 Exemples de dispositifs diviseurs d'amplitude

Lame à faces parallèles, à l'infini.

Soit une lame à faces parallèles, d'indice n , éclairée par une source ponctuelle monochromatique S . On s'intéresse aux interférences²⁵ obtenues à l'infini (en pratique, dans le plan focal d'une lentille convergente : voir trous d'Young).

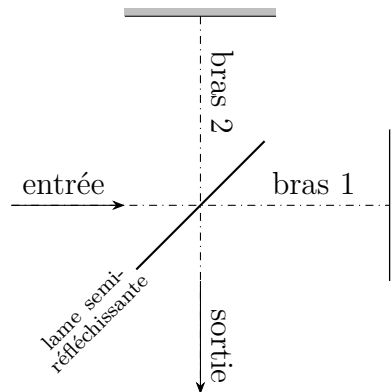
- ▷ Étudiez la figure d'interférences obtenue (théorème de Malus indispensable...).
- ▷ Remarquez que l'ordre d'interférence ne dépend pas de la position de S .
- ▷ Conclure sur la visibilité des interférences quand la lame est éclairée par une source étendue.



Interféromètre de Michelson (explicitement au programme de CPGE)

Une représentation schématisée de cet interféromètre est donnée ci-contre. Deux configurations particulières sont étudiées :

- ▷ Config 1, dite en lame d'air : les bras ont des longueurs qui diffèrent de e et les miroirs sont perpendiculaires l'un à l'autre. L'observation se fait à l'infini (ailleurs, avec une source étendue, la visibilité serait mauvaise...). Étude libre.
- ▷ Config 2, dite en coin d'air : les bras ont même longueur et les miroirs sont perpendiculaires à un angle ε près petit. On admet que les franges conservent une bonne visibilité avec une source étendue si l'éclairage est quasi-parallèle et en incidence quasi-normale et si l'observation est faite au voisinage des miroirs (pour cela, une lentille de projection est nécessaire : on conjugue les miroirs avec un écran). Conseil pour l'étude : commencer par un éclairage strictement parallèle (onde plane)... On voit ça ensemble ?



25. On suppose que cette interférence ne fait intervenir que deux rayons (voir schéma) ; cette approximation est raisonnable si les faces de la lame ne sont pas traitées (voir Fabry-Pérot page 23 pour un traitement rigoureux).

5 Interférences à N ondes

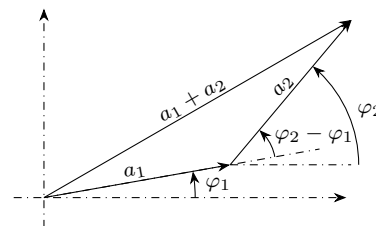
5.1 Intérêt

L'intérêt est d'avoir une très bonne résolution spectrale grâce à des franges brillantes très fines. Ceci se comprend facilement sur une représentation de Fresnel :

Cas d'une interférence à 2 ondes

Avec la construction ci-contre, on remarque que :

- ▷ l'interférence est constructive ssi
 $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv 0 [2\pi] \dots\dots\dots$ (vecteurs alignés)
- ▷ l'interférence est destructive ssi
 $\varphi_2 - \varphi_1 \equiv \pi [2\pi] \dots\dots\dots$ (vecteurs opposés)



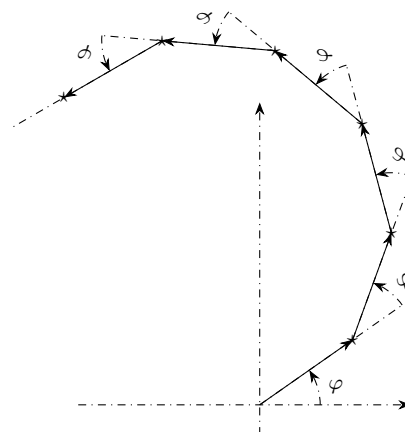
Cas d'une interférence à N ondes

Ici, on traite un cas particulier d'interférences à N ondes, celui dans lequel :

1. toutes les ondes ont même amplitude : $\forall k, a_k = a_0$
2. tous les déphasages entre deux ondes successives sont égaux : $\exists \varphi, \forall k, \varphi_{k+1} - \varphi_k = \varphi$

Avec la construction ci-contre, on remarque que :

- ▷ l'interférence est constructive ssi
 $\varphi \equiv 0 [2\pi] \dots\dots\dots$ (vecteurs tous alignés)
- ▷ l'interférence est destructive ssi
 $\varphi \equiv \frac{2\pi}{N} \left[\frac{2\pi}{N} \right]$ et $\varphi \not\equiv 0 [2\pi] \dots\dots\dots$ (polygone)



5.2 Réseau

Un réseau est un dispositif qui, comme on va le voir, réalise la condition d'interférences à N ondes de même amplitudes et dont les déphasages suivent une progression arithmétique (comme supposé dans le paragraphe 5.1).

Description

Un réseau est une agencement périodique de motifs diffractants (du simple trou — ou fente — jusqu'aux motifs moléculaires complexes qu'on peut trouver dans certains cristaux). L'étude de la diffraction n'étant plus dans les programmes de CPGE, nous étudions les réseaux sans tenir compte de la forme précise du motif. On considère alors, comme on l'a fait avec les trous d'Young, que des rayons diffractés sont émis de manière isotrope.

Formule fondamentale

On s'intéresse (toujours dans le cadre du programme de CPGE) à un réseau unidimensionnel. Le pas de ce réseau (ou période spatiale) sera notée a . Le nombre de motifs²⁶ par unité de longueur est $n = \frac{1}{a}$.

Ce que l'on appelle formule fondamentale d'un réseau est simplement l'expression de la condition d'interférence constructive vue au paragraphe 5.1, à savoir $\varphi \equiv 0 [2\pi]$.

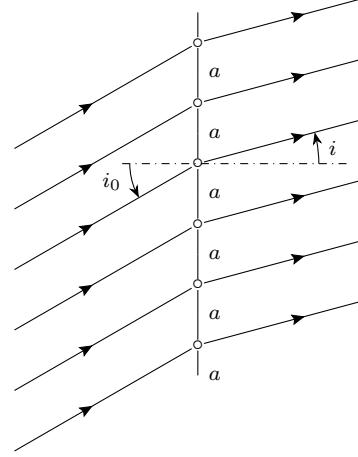
Ici,

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a (\sin i - \sin i_0)$$

Donc, la formule fondamentale peut s'écrire

$$\boxed{\sin i - \sin i_0 = np\lambda \quad p \in \mathbb{Z}}$$

Attention, les signes qui apparaissent dans cette formule dépendent de l'orientation choisie pour les angles. Remarquez aussi qu'un réseau peut fonctionner par « réflexion » (on pourrait dire *rétro-diffraction*) ; sauriez-vous déterminer une formule fondamentale dans ce cas ?



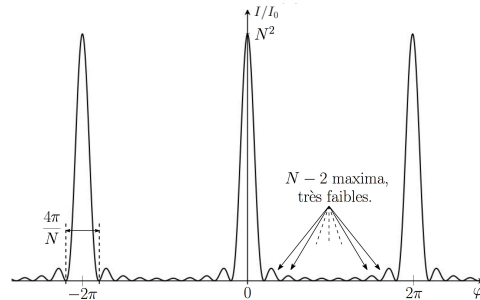
Calcul de l'intensité

Le calcul de l'intensité diffractée par un réseau n'est pas d'une utilité gigantesque. En effet, si le nombre N de motifs du réseau est grand, cette intensité est négligeable partout où l'interférence n'est pas constructive. Ainsi, seules comptent les directions solutions de la formule fondamentale.

$$\begin{aligned} a(M, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_{0k}(M) e^{i(\omega t - \varphi_k(M))} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_0 e^{i(\omega t - k\varphi)} \quad \text{d'après les hypothèses faites plus haut} \\ &= a_0 e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i\varphi})^k = a_0 e^{i\omega t} \cdot \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \end{aligned}$$

On en déduit l'intensité :

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$



26. On dit souvent « traits ».

5.3 Interféromètre de Fabry-Pérot

Description

L'interféromètre de Fabry-Pérot est constitué en général d'une cavité dont les parois ont été traitées pour être très réfléchissantes :

Après avoir pénétré dans la cavité, tout rayon incident subit une infinité²⁷ de réflexions-réfractions. À la sortie de cet interféromètre, se superposent donc une infinité d'ondes déphasées les unes par rapport aux autres. Le traitement est une généralisation de ce qu'on a vu avec la lame à faces parallèles ; en pratique cependant, la cavité est faite de deux miroirs, l'intérêt résidant dans le fait de pouvoir changer la longueur de la cavité ainsi que régler le parallélisme des miroirs.

Si l'amplitude du rayon incident est A , si on note r (resp. t) le coefficient de réflexion (resp. transmission) par les miroirs, alors l'amplitude du k^{e} rayon sortant²⁸ est

$$a_k = t^2 r^{2k} A e^{i(\omega t - k\varphi)} \quad \text{avec } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2e \cos i$$

Calcul de l'intensité

L'amplitude résultante est $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, c'est-à-dire :

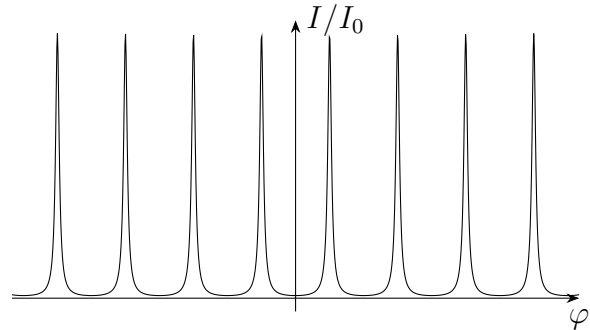
$$a = t^2 A e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} (r^2 e^{-i\varphi})^k = t^2 A e^{i\omega t} \cdot \frac{1}{1 - r^2 e^{-i\varphi}}$$

On en déduit l'intensité :

$$I = \frac{|t^2 A|^2}{|1 - r^2 e^{-i\varphi}|^2}$$

En écrivant²⁹ $r^2 = |r^2| e^{-i\psi}$, il vient :

$$I = \frac{|t^2 A|^2}{|1 + |r^2|^2 - 2|r^2| \cos(\varphi + \psi)|}$$



C'est-à-dire,

$$I = \frac{I_0}{1 + M \sin^2 \left(\frac{\varphi + \psi}{2} \right)}$$

$$\text{avec } M = \frac{4|r^2|}{(1 - |r^2|)^2} \text{ et } I_0 = \left(\frac{|t^2 A|}{1 - |r^2|} \right)^2$$

Ici encore, on peut remarquer que les raies sont très fines du fait du nombre très important d'ondes qui interfèrent.

27. En fait, le nombre est nécessairement fini à cause de la cohérence temporelle également finie de toute onde ; cependant, pour une cavité suffisamment courte, cette approximation est valide... ; À la réflexion, je crois qu'on n'a même pas besoin de cet argument : on travaille avec une composante spectrale, elle est donc strictement monochromatique.

28. Le premier correspondant à $k = 0$.

29. Contrairement à beaucoup, je ne suppose pas r^2 réel.

EXERCICES

ex 1. Mesure de l'indice de l'air

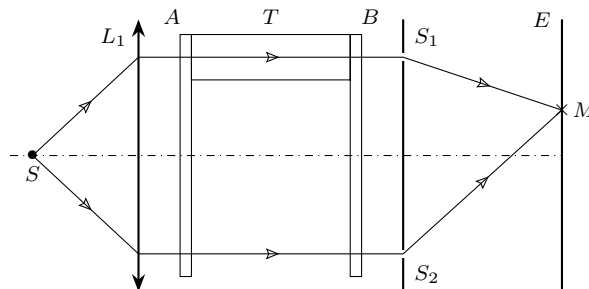
On réalise le dispositif d'Young en lumière parallèle : une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,5893 \mu\text{m}$, est placée au foyer d'une lentille mince convergente L_1 de distance focale 30 cm et éclaire deux trous S_1 et S_2 , placés symétriquement de part et d'autre de l'axe optique de L_1 .

La distance qui sépare ceux-ci est $e = 1 \text{ mm}$.

1. On observe des franges d'interférence sur un écran E , perpendiculaire à l'axe optique et situé à 2 m de S_1 et S_2 .

Quelle est la valeur de l'interfrange ?

2. On introduit sur le trajet avant S_1 un tube T fermé par deux glaces plan-parallèles A et B , de dimensions telles qu'elles soient aussi traversées par les rayons allant en S_2 (voir schéma).



- ▷ Le tube T étant en communication avec l'extérieur, qu'observe-t-on sur l'écran ?
 - ▷ On fait le vide dans le tube T . Comment se modifie le système de franges précédent ?
 - ▷ La longueur du tube T étant $L = 20 \text{ cm}$, déterminer la valeur de l'indice absolu de l'air, sachant que, pendant le pompage, on a vu défiler $N = 99$ franges brillantes au centre O de la figure d'interférences initiale et que, l'opération terminée, on observe en ce point une frange sombre.
3. On place en S une source de lumière blanche. On fait le vide dans T .
 - ▷ Quelles sont les longueurs d'onde qui, en O , subissent une interférence destructive ?
 - ▷ À quelle(s) distance(s) X de O observe-t-on l'extinction de $\lambda = 0,7549 \mu\text{m}$?

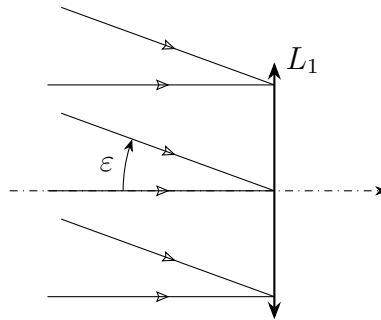
ex 2. Taille angulaire d'une étoile double

Une lunette astronomique est constituée d'un objectif L_1 , assimilable à une lentille mince de distance focale $f = 1 \text{ m}$, et d'un oculaire L_2 placé de sorte que le système soit afocal.

1. Faire un schéma du dispositif et tracer le trajet d'un faisceau lumineux de lumière parallèle incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique de ce système centré.

On dirige cette lunette vers un groupe de 2 étoiles très voisines S_1 et S_2 qu'on supposera ponctuelles étant donné leur éloignement ; elles émettent une même lumière, rendue

expérimentalement monochromatique de longueur d'onde λ . On posera ε la distance angulaire entre les deux étoiles.



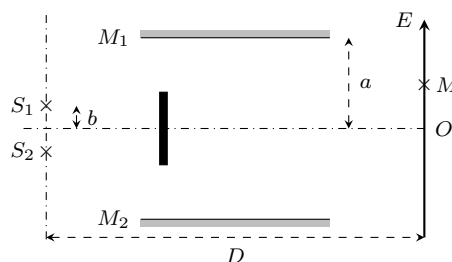
La face d'entrée de l'objectif L_1 est masquée par un écran E (non représenté) percé de 2 fentes fines et parallèles F_1 et F_2 dont on peut faire varier la distance e .

2. Montrer que, pour une valeur donnée de e , on observe en général des franges d'interférence rectilignes dans le plan focal image P de L_1 .
 ▷ Déterminer l'interfrange. On prendra $e = 6 \text{ mm}$ et $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$.
3. Montrer que les franges d'interférence disparaissent pour certaines valeurs de e .
4. La plus petite distance entre F_1 et F_2 pour laquelle les franges disparaissent est $e_m = 52 \text{ mm}$.
 ▷ Quelle est la distance angulaire entre les deux étoiles ?

ex 3. Cohérence spatiale

On considère le dispositif interférentiel ci-dessous, éclairé par deux sources S_1 et S_2 , indépendantes, de même longueur d'onde λ .

Un rayon parvenant en M , d'abscisse x , a été réfléchi soit par M_1 , soit par M_2 , un cache interdisant l'accès de rayons directement issus des sources.



1. Pour chacune des sources, déterminer la zone d'interférences ; Choisir alors une position intéressante pour l'écran.
2. Déterminer l'intensité $I(x)$ et commenter. On pourra considérer $a \ll D$ et $x \ll D$.
3. Le même dispositif est maintenant éclairé par une source étendue de largeur $2b$ (source s'étendant donc de S_1 à S_2). Déterminer l'intensité $I(x)$ et commenter.

ex 4. Miroirs de Fresnel

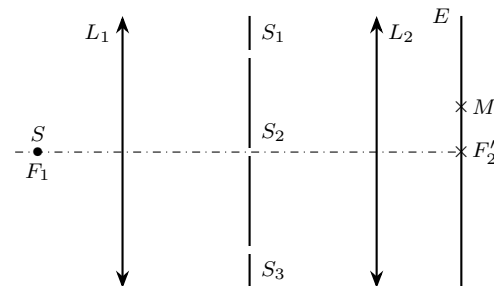
Le dispositif interférentiel des miroirs de Fresnel est formé de deux miroirs présentant une arête commune et faisant entre eux un angle très faible α . Il est éclairé par une source ponctuelle S placée à une distance d de l'arête commune.

- Déterminer l'écartement entre les deux sources S_1 et S_2 secondaires.
- On place un écran E , parallèlement à l'axe des 2 sources, à une distance L de l'arête commune.
 - ▷ Quelle est la forme des franges observées ?
 - ▷ Combien observe-t-on de franges sombres et brillantes ?
 A.N. : $\lambda_0 = 490 \text{ nm}$; $d = 20 \text{ cm}$; $L = 1,8 \text{ m}$; $\alpha = 0,1^\circ$.
- La source émet à présent deux longueurs d'onde très voisines λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda$ avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.
 - ▷ Déterminer l'intensité $I(x)$ en un point de l'écran.
 - ▷ Montrer alors que le contraste s'annule périodiquement. Quel est l'ordre d'interférence pour la première annulation du contraste ? Commenter.
 - ▷ Montrer qu'on peut le retrouver très simplement en comparant les systèmes de franges associés à chaque longueur d'onde.
 A.N. : $\lambda_0 = 577 \text{ nm}$; $\Delta\lambda = 2,1 \text{ nm}$ (doublet du mercure)
- Quelle est l'intensité $I(x)$ si la source émet toutes les longueurs d'ondes comprises entre λ_0 et $\lambda_0 + \Delta\lambda$?

ex 5. Interférences à 3 ondes

On considère le système interférentiel ci-contre, où S est une source ponctuelle monochromatique placée au foyer d'une lentille L_1 .

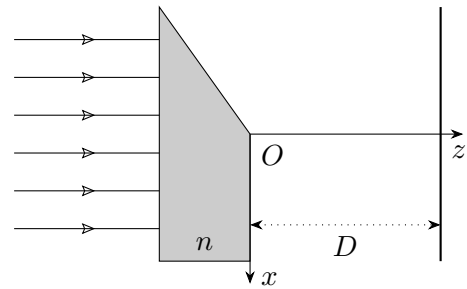
L'écran est placé dans le plan focal image de L_2 . S_1 , S_2 et S_3 sont trois trous identiques placés dans un plan orthogonal à l'axe optique.



- Tracer les rayons parvenant en un point M de l'écran, d'abscisse x .
- Déterminer l'intensité lumineuse $I(x)$. Reprendre le calcul en supposant que l'amplitude émise par la source secondaire S_2 est deux fois plus importante que les autres.

ex 6. lame prismatique

Un faisceau monochromatique, en provenance de l'infini, de longueur d'onde $\lambda = 0,600 \mu\text{m}$, éclaire une lame mince de verre d'indice $n = 1,50$, formée d'une lame prismatique de hauteur $h = 12 \text{ mm}$ et de petit angle $\theta = 30'$, accolée par sa base à une lame à faces parallèles de même hauteur h et d'épaisseur égale à la base du prisme.



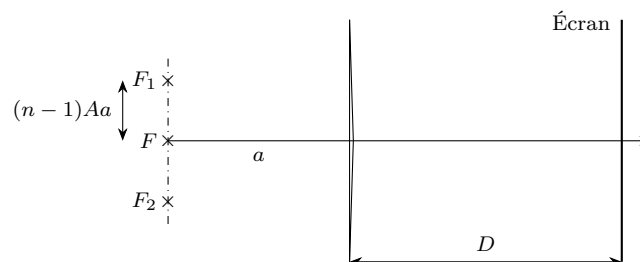
On observe les franges d'interférences sur un écran normal à l'axe Oz , et donc parallèle à la lame, à la distance D de celle-ci.

1. Expliquer qualitativement, pourquoi il y a des interférences. Où peut-on les observer ?
2. Déterminer la loi $I(x)$ donnant l'intensité lumineuse en un point $M(x, y)$ de l'écran, dans le champ d'interférences.
3. En déduire la forme des franges et l'interfrange.
4. Déterminer la valeur D_1 de D permettant l'observation du plus grand nombre de franges.
5. Quelle est la nouvelle valeur de l'interfrange obtenue en immergeant l'ensemble du dispositif dans de l'eau d'indice $n_{\text{eau}} = 1,33$?

ex 7. Biprisme de Fresnel – spectre cannelé

Un biprisme de Fresnel est constitué de deux prismes identiques d'angle $A = 0,01$ radian, d'indice de réfraction $n = 1,5$. Ils donnent, dans les conditions de Gauss, deux images F_1 et F_2 d'une fente F très fine, disposée à une distance $a = 20 \text{ cm}$ de l'arête centrale du biprisme.

Dans tout le problème, on néglige l'épaisseur de la base du biprisme devant a .



1. Faire un schéma montrant les régions où pourront apparaître des interférences. Sur quelle largeur $2x_0$ les interférences se verront-elles sur un écran E placé à une distance $D = 180 \text{ cm}$ des prismes ?
2. La fente F étant éclairée par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$, décrire la forme des franges qui apparaissent sur l'écran. Calculer l'interfrange et le nombre total N de franges noires qu'il contient. *Les questions suivantes (3., 4. et 5.) sont indépendantes les unes des autres...*

3. On recouvre la face d'entrée du prisme du haut par un film transparent à faces parallèles dont l'indice n' vaut 1,6. La frange centrale se déplace d'une distance $d = 6,72$ mm.
 - ▷ Dans quel sens se fait ce déplacement ?
 - ▷ Quelle est l'épaisseur e du film ? *On admettra que la nouvelle image F'_1 de F est approximativement confondue avec F_1 ...*
4. La fente F est éclairée en lumière blanche.
 - ▷ Décrire l'aspect des franges.
 - ▷ Soit L le point de l'écran situé à 3,3 mm de la frange centrale. On analyse la lumière présente en ce point à l'aide d'un spectromètre. Combien de cannelures observe-t-on ?
5. Le biprisme est maintenant éclairé en lumière parallèle, sous incidence normale. Déterminer la zone d'interférences, l'interfrange du système. On place l'écran là où le champ d'interférences est le plus large. Sachant que la hauteur totale du biprisme est $2h = 16$ mm, combien de franges brillantes observe-t-on ?

ex 8. Mesure d'une distance

1. Décrire le montage utilisant un interféromètre de Michelson permettant d'obtenir, à partir d'une source étendue, les franges du coin d'air observées à l'aide d'un viseur.
2. La source lumineuse est une lampe à incandescence (lampe blanche). Quelle est la figure d'interférences observée ?
On place ensuite un filtre vert ne laissant passer que les longueurs d'onde voisines de $0,55 \mu\text{m}$.
3. Si la distance mesurée entre deux franges à l'aide du micromètre du viseur est de 0,11 mm, quel est l'angle entre les miroirs ?
4. Sous l'action d'une contrainte, un des bras du Michelson s'allonge. La position de la frange centrale vue dans le viseur s'est décalée de 0,200 mm. Quelle est l'élongation du bras ? Sachant que l'on peut apprécier un déplacement d'1/10ème d'interfrange, quelle est la précision de la mesure ?

ex 9. Anneaux d'égale inclinaison

Un interféromètre de Michelson est constitué :

- ★ d'une source S placée devant un collimateur (L),
 - ★ de deux miroirs plans M_1 et M_2 orthogonaux, M_1 étant déplacé d'une distance d par rapport au contact optique,
 - ★ d'une lame séparatrice Σ , inclinée à 45° du faisceau incident (les inconvénients dus à l'épaisseur de la séparatrice sont compensés par une compensatrice C de même épaisseur ; on ne se préoccupera donc pas de l'épaisseur du système $\Sigma + C$),
 - ★ d'un objectif d'observation (L') assimilé à une lentille convergente de distance $f' = 1$ m.
1. La source S est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 508,6$ nm (vert cadmium) ; on donne $d = 7629 \mu\text{m}$.

- ▷ Exprimer l'ordre d'interférence $p(x)$ au point M d'abscisse x de l'écran E ; on n'oubliera pas le déphasage supplémentaire de π introduit par la séparatrice.
 - ▷ Quelle est la forme des franges d'interférences ? Déterminer la loi $I(x)$ de l'intensité.
 - ▷ Calculer l'ordre d'interférence p_0 au centre O de l'écran ainsi que le rayon des trois premiers anneaux noirs.
 - ▷ On insère, sur le bras contenant M_1 et parallèlement à celui-ci, une lame de mica L_1 très mince, d'indice $n = 1,52$ et d'épaisseur ℓ inconnue. On observe, au centre, le défilement de 18 franges sur l'écran E . Calculer ℓ .
2. La source est une lampe à vapeur de sodium qui émet deux radiations monochromatiques de même intensité et de longueurs d'onde voisines $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. On posera $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ et $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ où $\sigma_i = 1/\lambda_i$.
- ▷ Montrer que l'intensité vibratoire en O peut s'écrire $I = I_0(1 - V(d) \cdot \cos(4\pi\sigma d))$. Expliciter $V(d)$.
 - ▷ On règle la position de M_1 jusqu'à observer des anneaux parfaitement visibles ; de quelle quantité Δd minimale faut-il tradater M_1 pour que ces anneaux disparaissent complètement ?

Approfondir

1 L'équation de D'Alembert	31
2 Cohérence	32
2.1 Sources à spectre continu	32
2.2 Sources continûment réparties	33
2.3 Théorème de Wiener-Khintchine	34
Exercices	36

★ ★ ★

Je vous propose ici deux approfondissements. L'un, purement mathématique sur la résolution de l'équation de D'Alembert à 1D. L'autre concerne la notion de cohérence d'une onde.

1 L'équation de D'Alembert

Rappelons l'équation dont il est question :

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$$

Dans les parties précédentes, nous avons montré que, quelles que soient les fonctions f et g (deux fois dérivables), $f(t - x/v)$ et $g(t + x/v)$ sont solutions. Ici, nous allons chercher à trouver *toutes* les solutions de cette équation.

Nous commençons par introduire deux variables u et w définies par :

$$\begin{cases} u = t + \frac{x}{v} \\ w = t - \frac{x}{v} \end{cases}$$

Ceci définit un changement de variable licite (bi-univoque).

$$\text{Alors, } \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w} \right)$$

$$\text{Donc, } \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right)$$

Ainsi, dans ce nouveau jeu de variables, l'équation de D'Alembert s'écrit simplement :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u \partial w} = 0$$

L'ensemble des solutions est alors :

$$\left\{ f(u) + g(w) \mid (f, g) \in \left(\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right)^2 \right\}$$

Les solutions que nous avons manipulées précédemment étaient donc les solutions les plus générales. À propos de l'équation de D'Alembert « sphérique », tout est fait, il n'y a qu'à recoller les morceaux...

2 Cohérence

Deux aspects m'intéressent ici. Le premier est simplement de généraliser ce que l'on a vu sur les sources à spectre discret (resp. sources réunion de sources ponctuelles) aux sources à spectre continu (resp. sources continûment réparties). Le second vise à aborder le théorème de Wiener-Khintchine.

2.1 Sources à spectre continu

On envisage ici un système interférentiel éclairé par une source dont le spectre est continu (par opposition à un spectre de raies). Signalons que ceci constitue le seul cas susceptible de décrire précisément toute source réelle. En effet, toute raie spectrale a une largeur non nulle (voir à ce sujet la notion de largeur naturelle de raie).

Le traitement de cette situation repose — comme le cas discret — sur le fait que deux ondes de fréquences différentes n'interfèrent pas.

La « sommation » des contributions de chaque élément du spectre s'écrit à l'aide d'une intégrale :

$$I(M) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_{\nu}(M) d\nu$$

$\mathcal{J}_{\nu}(M)$ est la densité spectrale d'intensité en M .

S'il s'agit d'une interférence à deux ondes, cette densité est donnée par la formule de Fresnel :

$$\mathcal{J}_{\nu}(M) = 2\mathcal{J}_0(\nu) \cdot (1 + \cos \varphi_{\nu}(M))$$

Exemple

Considérons, un dispositif du type trous d'Young. Ici, $\delta = \frac{2\pi\nu}{c} \cdot \frac{ay}{D}$, et l'intensité en le point d'abscisse y de l'écran s'écrit :

$$I(y) = \int_{\mathbb{R}} 2\mathcal{J}_0(\nu) \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\nu ay}{cD}\right)\right) d\nu$$

L'intégration est facile si le profil spectral \mathcal{J}_0 est rectangulaire ; soient alors ν_1 et ν_2 tels que :

$$\mathcal{J}_0(\nu) = \begin{cases} \frac{I_0}{\nu_2 - \nu_1} & \text{si } \nu \in [\nu_1; \nu_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On posera $\bar{\nu} = \frac{\nu_2 + \nu_1}{2}$ et $\Delta\nu = \frac{\nu_2 - \nu_1}{2}$.

Alors,

$$I = 2I_0 \left(1 + V \cos \left(\frac{2\pi \nu a y}{cD} \right) \right)$$

avec $V = \frac{\sin \left(\frac{\pi a y \Delta \nu}{cD} \right)}{\frac{\pi a y \Delta \nu}{cD}}$

On retrouve la même forme que dans le cas du doublet ; seule change la visibilité. Ceci sera généralisé avec le théorème de Wiener-Khintchine page 34. Dans le cas présent, la visibilité est proche de 1 si et seulement si $\frac{\pi a y \Delta \nu}{cD} \ll \pi$, c'est-à-dire :

$$y \ll \frac{cD}{a\Delta \nu}$$

Ainsi, plus la largeur spectrale est importante, moins la zone de l'écran sur laquelle on a un bon contraste l'est.

Cette dernière condition se réécrit également $\delta \ll L_c$; expression qu'on a déjà interprétée...

2.2 Sources continûment réparties

On envisage ici un système interférentiel éclairé par une source continûment répartie. Signalons que ceci constitue le seul cas susceptible de décrire précisément toute source réelle. En effet, toute source a une taille non nulle.

Le traitement de cette situation repose — comme le cas discret — sur le fait que deux ondes issues de points source différents n'interfèrent pas.

Une source étendue est une surface émettrice \mathcal{S} . La « sommation » des contributions de chaque élément dS de cette surface s'écrit à l'aide d'une intégrale :

$$I(M) = \int_{S \in \mathcal{S}} \mathcal{I}_S(M) dS$$

$\mathcal{I}_S(M)$ est la densité surfacique d'intensité en M .

S'il s'agit d'une interférence à deux ondes, cette densité est donnée par la formule de Fresnel :

$$\mathcal{I}_S(M) = 2\mathcal{I}_0(S) \cdot (1 + \cos \varphi_S(M))$$

Exemple

Considérons un dispositif de type trous d'Young éclairé par une source rectangulaire de côtés b et b' située à une distance d des trous. La contribution, d'un point source S de coordonnées (X, Y) , à l'intensité en $M(x, y)$ est :

$$\mathcal{I}_S(M) = 2\mathcal{I}_0(S) \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{Y}{d} \right) \right) \right)$$

L'intensité en M est alors :

$$I(M) = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b'/2}^{b'/2} \mathcal{I}_S(M) dX dY$$

c'est-à-dire, si \mathcal{J}_0 est uniforme sur la source :

$$I(M) = 2\mathcal{J}_0 b' \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \left(\frac{y}{D} + \frac{Y}{d} \right) \right) \right) dY$$

donc,

$$\boxed{I(M) = 2I_0 \left(1 + V \cos \left(\frac{2\pi a y}{\lambda D} \right) \right)} \quad \text{avec } I_0 = \mathcal{J}_0 b b' \text{ et } V = \frac{\sin \left(\frac{2\pi a b}{\lambda d} \right)}{\frac{2\pi a b}{\lambda d}}$$

Ainsi, bon contraste $\iff a \ll l_c$ avec $l_c = \frac{\lambda d}{b} = \frac{1}{\sigma \Delta \theta}$.

2.3 Théorème de Wiener-Khintchine

Interférences et fonction d'autocorrélation d'un signal

Considérons une source ponctuelle qui émet un signal s . Soit un point M de l'espace qui reçoit deux fils de ce signal. La vibration résultante en M est la superposition :

$$s(M, t) = s(t - \tau_1) + s(t - \tau_2)$$

τ_1 et τ_2 étant les retards liés à la propagation de S jusqu'à M .

Exprimons alors l'intensité en M :

$$I(M) = \langle |s(t - \tau_1)|^2 \rangle + \langle |s(t - \tau_2)|^2 \rangle + \langle s(t - \tau_1)^* s(t - \tau_2) \rangle + \langle s(t - \tau_1) s(t - \tau_2)^* \rangle$$

Si on introduit la fonction d'auto-corrélation³⁰ R de s :

$$R(\tau) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle s(t)^* s(t - \tau) \rangle$$

L'intensité en M devient, en posant $\tau = \tau_2 - \tau_1$:

$$\begin{aligned} I(M) &= R(0) + R(0) + R(\tau) + R(-\tau) \\ &= 2R(0) + 2\Re_e(R(\tau)) \end{aligned}$$

Théorème de Wiener-Khintchine

Ce théorème établit que la fonction d'auto-corrélation d'un signal est la transformée de Fourier de sa densité spectrale d'intensité. Avec les notations précédentes, cela s'écrit :

$$R(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_0(\nu) e^{-2i\pi\nu\tau} d\nu$$

30. Pour une source en régime permanent, cette fonction ne dépend pas explicitement de $t \dots$

Retour sur l'expression de l'intensité

L'expression de l'intensité en M établie ci-dessus devient en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine :

$$I(M) = \int_{\mathbb{R}} \left(2\mathcal{J}_0(\nu) + 2\mathcal{R}_e \left(\mathcal{J}_0(\nu) e^{-2i\pi\nu\tau} \right) \right) d\nu$$

$$I(M) = \int_{\mathbb{R}} 2\mathcal{J}_0(\nu) \left(1 + \cos(2\pi\nu\tau) \right) d\nu$$

Ce qui est l'expression affirmée en 2.1, page 32.

Visibilité

On peut exploiter le théorème de Wiener-Khintchine d'une autre manière qui éclaire le lien qu'il y a entre le spectre de la source et la visibilité des interférences.

Pour cela, nous introduisons la *densité spectrale centrée réduite* γ :

$$\gamma(\nu) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathcal{J}_0(\bar{\nu} + \nu)}{R(0)}$$

Alors,

$$\begin{aligned} R(\tau) &= R(0) \int_{\mathbb{R}} \gamma(\nu - \bar{\nu}) e^{-2i\pi\nu\tau} d\nu \\ &= R(0) e^{-2i\pi\bar{\nu}\tau} \int_{\mathbb{R}} \gamma(\nu) e^{-2i\pi\nu\tau} d\nu \end{aligned}$$

Apparaît alors la transformée de Fourier $\hat{\gamma}$ de la densité spectrale centrée réduite et on a :

$$R(\tau) = R(0) e^{-2i\pi\bar{\nu}\tau} \hat{\gamma}(\tau)$$

Une nouvelle expression de l'intensité en M se déduit alors de celle qu'on a établie en 2.3, page 34 :

$$I(M) = 2R(0) \left(1 + \mathcal{R}_e \left(\hat{\gamma}(\tau) e^{-2i\pi\bar{\nu}\tau} \right) \right)$$

C'est-à-dire

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + |\hat{\gamma}(\tau)| \cos \left(2\pi\bar{\nu}\tau - \arg(\hat{\gamma}(\tau)) \right) \right)$$

La visibilité est le module de la T.F. de la densité spectrale centrée réduite...

Des propriétés de la transformée de Fourier, on déduit que si la largeur spectrale typique (écart quadratique moyen) est $\Delta\nu$ alors la visibilité prend des valeurs notables sur un intervalle typique $[0; \tau_c]$ avec τ_c tel que :

$$\Delta\nu \cdot \tau_c \sim 1$$

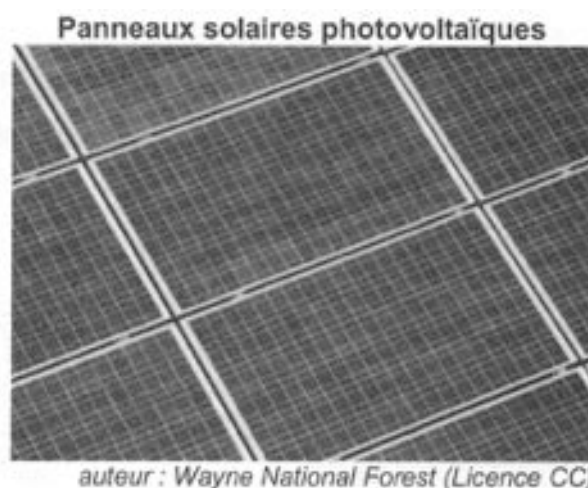
C'est la propriété affirmée en 2.1 page 10. La boucle est bouclée.

EXERCICES

ex 1. Panneaux solaires anti-reflet

Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret

Les panneaux solaires photovoltaïques permettent de convertir l'énergie lumineuse provenant du Soleil en énergie électrique. Le rendement énergétique d'un panneau solaire va typiquement de 10 à 25% suivant la technologie utilisée et peut-être optimisé en utilisant une couche anti-reflet.



On considère une toiture équipée de panneaux solaires ayant un rendement de 20% sur une surface totale $S = 30 \text{ m}^2$. On estime que la puissance solaire surfacique reçue dans cette région vaut 600 W.m^{-2} .

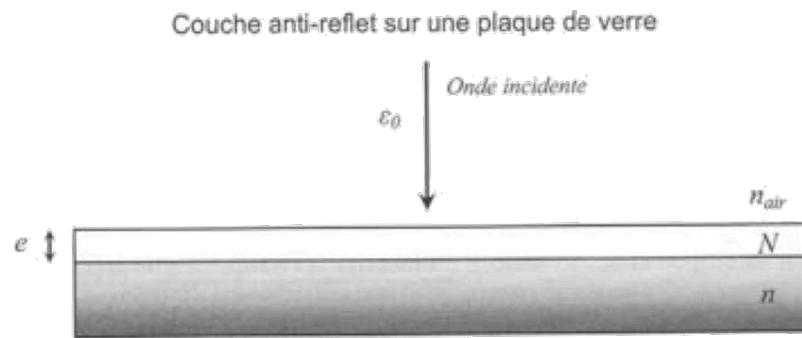
1. Évaluer la puissance électrique maximale produite par cette installation. Comment faudrait-il orienter les panneaux solaires pour optimiser cette production ?
2. Estimer l'énergie électrique produite en un an. Avec un prix de rachat de l'électricité de $0,30 \text{ €/kWh}$, en déduire le montant de la facture annuelle de rachat.

Les cellules photovoltaïques sont en réalité protégées par une plaque de verre d'indice de réfraction $n = 1,50$. On rappelle les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance à l'interface entre deux milieux transparents d'indices respectifs n_1 et n_2 en incidence normale :

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

3. Déterminer les pertes par réflexion à l'interface entre l'air, d'indice $n_{\text{air}} = 1$, et le verre. Commenter.

On réalise une couche antireflet sur la plaque de verre précédente en déposant une mince couche d'épaisseur e d'un matériau diélectrique transparent d'indice de réfraction N (compris entre n_{air} et n). Une onde incidente monochromatique de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ arrive en incidence normale avec un éclairement ε_0 .



4. Faire un schéma faisant apparaître les ondes (1) et (2) issues de la première réflexion à chaque interface air-milieu diélectrique et milieu diélectrique-verre. On négligera l'effet des autres réflexions sur l'onde totale.
5. Déterminer la différence de marche δ entre ces ondes.
6. Exprimer les éclairements ε_1 et ε_2 des ondes (1) et (2) en fonction de l'éclairement ε_0 et des indices n_{air} , N et n .
7. Établir *deux* conditions permettant d'annuler l'onde totale réfléchie à la longueur d'onde λ_0 . En déduire l'expression de l'indice N et de l'épaisseur e la plus faible permettant de réaliser cette couche anti-reflet. Calculer numériquement N et e . Commenter.
8. Expliquer qualitativement ce qu'il se passe si l'onde incidente n'arrive plus normalement sur les panneaux solaires.

En réalité, il faut tenir compte de toutes les longueurs d'onde contenues dans la lumière blanche incidente. Le spectre de la lumière blanche s'étend, en pulsation, entre $\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}$, où $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ et $\Delta\omega$ est la largeur de la fenêtre spectrale du domaine visible. L'éclairement de l'onde totale réfléchie à la pulsation ω dans la fenêtre de largeur $d\omega$ peut alors s'écrire :

$$d\varepsilon = 2\varepsilon_{0\omega} \left(1 + \cos \left(\frac{\omega\delta}{c} \right) \right) d\omega$$

où δ est la différence de marche et $\varepsilon_{0\omega}d\omega$ est l'éclairement de chaque onde réfléchie dans la bande spectrale $d\omega$.

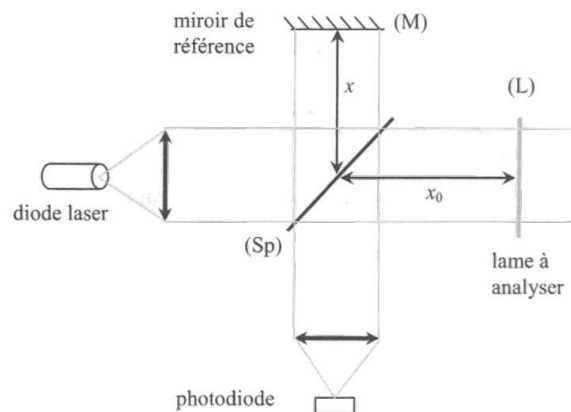
9. Quelle serait la couleur de la lumière réfléchie en incidence normale avec l'épaisseur e trouvée précédemment ?
10. En intégrant sur tout le domaine visible, déterminer l'éclairement total ε_r de l'onde réfléchie. On supposera que $\varepsilon_{0\omega}$ est indépendant de la pulsation.
11. Tracer l'allure de cet éclairement en fonction de l'épaisseur e de la couche diélectrique. Comment faut-il choisir l'épaisseur e pour réaliser la couche anti-reflet la plus efficace ?
12. En déduire la valeur du coefficient de réflexion minimal $R' = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}$ qu'il est possible d'obtenir avec ce traitement anti-reflet. Commenter.

ex 2. Tomographie par cohérence optique

Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret

La tomographie par cohérence optique (OCT : *Optical Coherence Tomography*) est un système moderne d'imagerie optique basé sur l'interférométrie en lumière peu cohérente. L'OCT est utilisé depuis les années 2000 en ophtalmologie car elle permet d'obtenir des images du fond de l'œil en trois dimensions, très utile pour détecter ou suivre certaines maladies ou dégénérescences oculaires. Ce problème propose de comprendre les principes généraux de l'OCT.

Le dispositif optique d'un OCT est analogue à un interféromètre de Michelson. Afin, de faciliter sa compréhension, on raisonne dans un premier temps sur le schéma simplifié suivant :



La lame séparatrice (Sp) et le miroir (M) sont supposés parfaits. La lame à analyser (L), supposée infiniment fine, possède un coefficient de réflexion en amplitude (c'est-à-dire pour le champ scalaire associé à l'onde lumineuse) r . Le but est de déterminer par mesure interférométrique la valeur de r et la distance x_0 de la lame (L) au centre de (Sp). Pour cela, on utilise une diode laser polychromatique émettant de manière quasi-uniforme sur une bande spectrale en longueur d'onde de largeur $\Delta\lambda$ centrée sur λ_0 , avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$.

Pour les calculs, on s'attachera à utiliser le nombre d'onde σ défini par $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. Le dispositif est supposé être réglé en lame d'air.

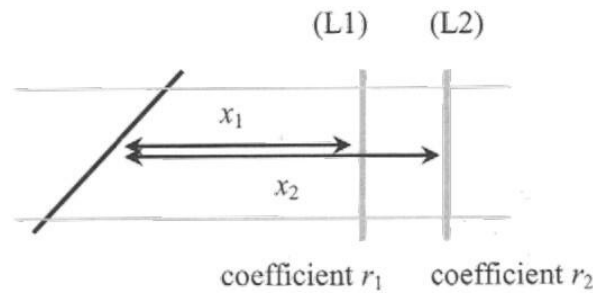
1. Que cela signifie-t-il ? Exprimer l'ordre d'interférence p au niveau de la photodiode pour une onde monochromatique de nombre d'onde σ .
2. Exprimer la largeur spectrale en nombre d'onde $\Delta\sigma$ de la source en fonction de $\Delta\lambda$ et λ_0 .

Imagerie TD-OCT :

On étudie dans un premier temps la tomographie TD-OCT (*time domain*) : le principe est de mesurer l'intensité I reçue par la photodiode en faisant varier la distance x du miroir de référence. L'alternance de franges brillantes et sombres va alors être visible uniquement sur un intervalle restreint de valeurs de x .

3. Justifier la phrase précédente et déterminer cet intervalle. Expliquer comment l'exploitation du graphe $I(x)$ permet d'avoir accès à la valeur de x_0 et de r .

Pour comprendre comment l'OCT permet de sonder un échantillon en profondeur, on remplace la lame (L) par deux lames (L1) et (L2) non absorbantes, de positions et de coefficients de réflexion respectivement x_1 et x_2 , et r_1 et r_2 tels que $r_1 \ll 1$ et $r_2 \ll 1$.



On admet le résultat suivant : dans le cas d'une interférence à N ondes monochromatiques de longueur d'onde λ_0 , la formule de Fresnel se généralise par l'expression :

$$I = \sum_{n=1}^N \left(I_n + \sum_{m>n}^N 2\sqrt{I_n I_m} \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{nm} \right] \right)$$

où I_n désigne l'intensité de la n^e onde et δ_{nm} la différence de marche entre la n^e onde et la m^e onde.

4. Expliquer pourquoi les hypothèses $r_1 \ll 1$ et $r_2 \ll 1$ permettent d'écrire la formule approchée pour l'intensité $I(x)$ reçue par la photodiode :

$$I(x) = I_M \left(1 + 2r_1 V_1(x) \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} 2(x - x_1) \right] + 2r_2 V_2(x) \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} 2(x - x_2) \right] \right)$$

où I_M désigne l'intensité si les lames étaient absentes (miroir de référence seul) et la fonction $V_i(x)$ représente le facteur de visibilité de la lame (Li) dont on ne cherchera pas une expression analytique, mais dont on précisera les principales caractéristiques.

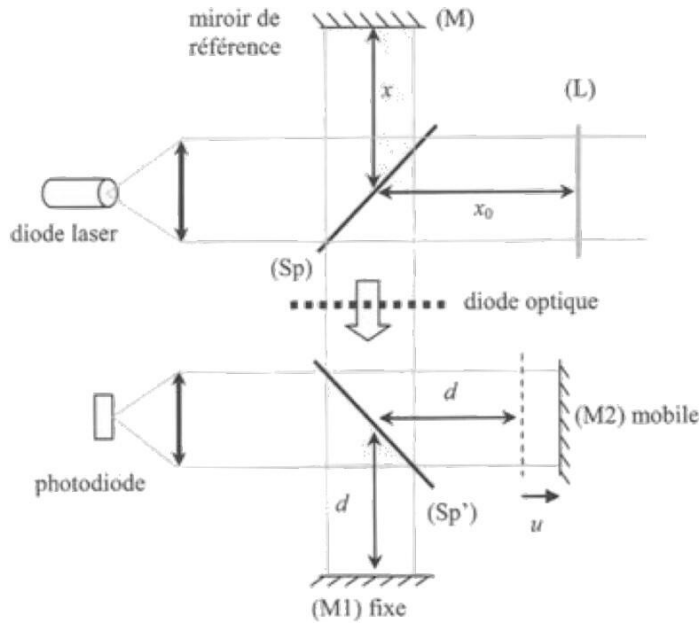
5. L'exploitation du graphe $I(x)$ permet-elle de distinguer systématiquement les deux lames ? En déduire la résolution spatiale en profondeur de la méthode TD-OCT. Illustrer votre propos en dessinant l'allure des graphes $I(x)/I_M$ pour les données suivantes :
- ▷ $x_1 = 25 \mu\text{m}$ et $r_1 = 0,1$ pour (L1),
 - ▷ $x_2 = 40 \mu\text{m}$ et $r_1 = 0,05$ pour (L2),
 - ▷ une longueur d'onde centrale $\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$,
 - ▷ une largeur spectrale $\Delta\sigma = 2500 \text{ cm}^{-1}$ d'une part, et $\Delta\sigma = 500 \text{ cm}^{-1}$ d'autre part.

Imagerie SD-OCT :

Depuis quelques années seulement, un nouveau procédé beaucoup plus efficace remplace la TD-OCT : il s'agit de la SD-OCT (*spectral domain*). Cette technique s'affranchit du déplacement du miroir de référence et permet ainsi une acquisition des images beaucoup plus rapide. Elle est basée sur une analyse spectrale de la lumière en sortie de l'interféromètre. Le système {lentille + photodiode} est remplacé par un analyseur de spectre constitué d'un réseau, d'une lentille et d'un capteur CCD (voir figure ci-contre). L'analyseur de spectre permet de mesurer la densité spectrale $D(\sigma)$ de la lumière définie de la façon suivante : l'intensité des ondes lumineuses monochromatiques qui la compose dont le nombre d'onde est compris dans l'intervalle $[\sigma; \sigma + d\sigma]$ vaut $dI = D(\sigma)d\sigma$. Un ordinateur calcule alors la fonction de u suivante pour $u > 0$:

$$I_{\text{calc}}(u) = \int_{\text{spectre}} D(\sigma) \cos(4\pi u \sigma) d\sigma$$

À une translation près, la fonction $I_{\text{calc}}(u)$ est pour la SD-OCT l'analogue de la fonction $I(x)$ pour la TD-OCT. Pour le comprendre, on raisonne sur le montage fictif représenté ci-dessous. La diode optique a la propriété de ne laisser passer la lumière que dans un seul sens (ici vers le bas). Le miroir (M2) est mobile et repéré par le déplacement u par rapport au contact optique. À l'image de la TD-OCT, on mesure l'intensité I_{simul} reçue par la photodiode en faisant varier l'abscisse u du miroir (M2). On supposera dans toute la suite que $x - x_0 > 0$.



6. En distinguant les différents trajets possibles de la lumière et à l'aide d'un calcul élémentaire de chemins optiques, montrer que si $x - x_0 > \frac{1}{\Delta\sigma}$, la courbe $I_{\text{simul}}(u)$

possède trois zones distinctes, que l'on précisera, où des franges d'interférences sont visibles. Montrer que l'exploitation de la courbe $I_{simul}(u)$ dans la zone de plus grande valeur de u permet d'accéder aux caractéristiques de la lame (L).

7. En raisonnant uniquement sur la partie du montage située en aval de la diode optique, exprimer l'intensité $dI_{simul}(u)$ reçue par la photodiode en fonction de σ , u et $D(\sigma)d\sigma$ dans le cas où la diode optique laisse passer uniquement les ondes monochromatiques dont le nombre d'onde est compris dans l'intervalle $[\sigma; \sigma + d\sigma]$.
8. En déduire que la fonction calculée par l'ordinateur $I_{calc}(u)$ correspond à une translation près à $I_{simul}(u)$.

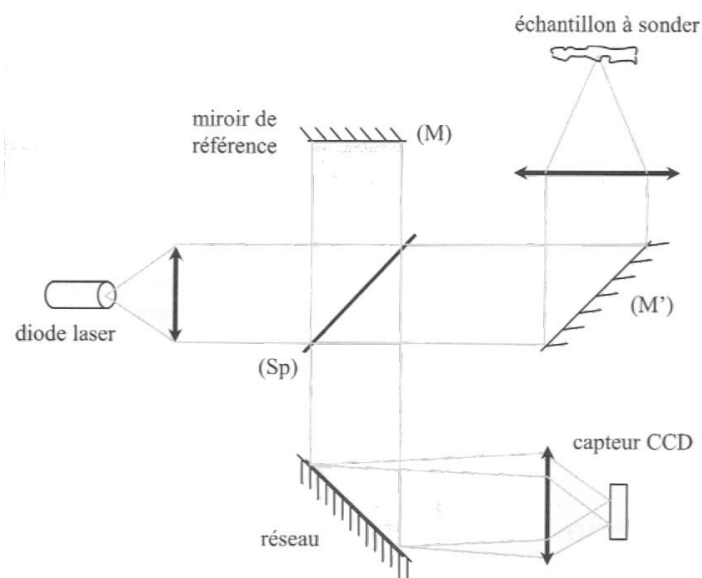
Nous venons donc de montrer qu'un traitement numérique de la densité spectrale de la lumière émergeant de l'interféromètre (méthode SD-OCT) revient à simuler de déplacement du miroir de référence, nécessaire dans la méthode TD-OCT. La puissance de calcul des ordinateurs actuels fait que le temps d'acquisition d'une image par la SD-OCT est beaucoup plus rapide (de l'ordre d'un facteur 100) que la TD-OCT, limitée par la vitesse de déplacement du miroir.

9. Dans la technique TD-OCT, indiquer ce qui fixe la profondeur sur laquelle l'échantillon est sondé.

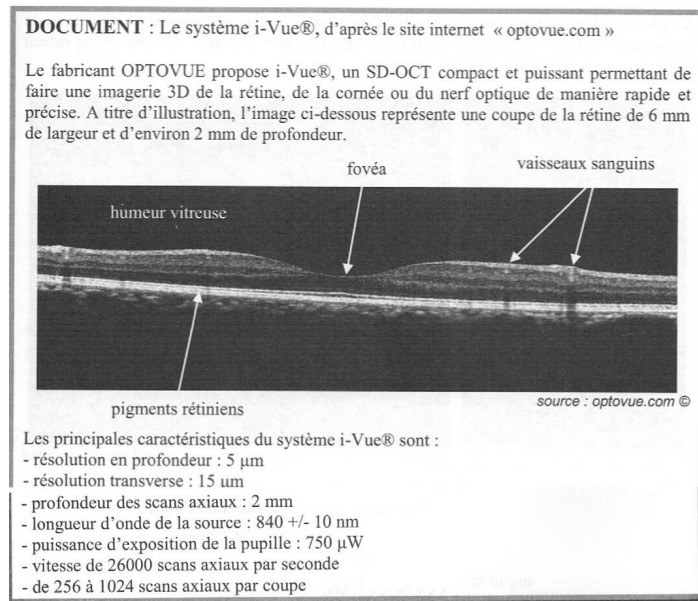
Dans la technique SD-OCT, cette profondeur est fixée par le critère de Nyquist-Shannon. Le capteur CCD possède un nombre limité de pixels : cela entraîne que la densité spectrale est mesurée avec une résolution $\delta\sigma$. Le critère de Nyquist-Shannon indique que la fonction $I_{calc}(u)$ ne fournira des données fiables que si $\delta\sigma$ est inférieur à la moitié de la période de $f(\sigma) = \cos(4\pi u\sigma)$.

10. Exprimer dans ce cas, en fonction de $\delta\sigma$, la profondeur Δx sur laquelle l'échantillon peut être sondé avec la technique SD-OCT.

Afin d'obtenir une image en 3D de l'échantillon, il est nécessaire de focaliser le faisceau en un certain point de la surface (voir figure suivante), puis d'effectuer un balayage de ce point sur toute la surface à analyser.



11. Proposer un moyen simple d'effectuer le balayage du faisceau.



12. Le patient voit-il le faisceau entrant dans son œil ? La puissance de ce faisceau vous paraît-elle dangereuse ?
13. Sur l'image montrant la coupe de la rétine, comment expliquer les bandes sombres situées en dessous des vaisseaux sanguins ?
14. En se basant sur l'étude théorique de l'OCT faite précédemment et sachant que l'humeur vitreuse remplissant le globe oculaire a un indice de 1,34, la résolution en profondeur affichée par le constructeur et les données concernant la source vous paraissent-elles cohérentes entre elles ?
15. Indiquer la résolution minimale, exprimée en nm, que doit avoir le spectromètre de l'appareil SD-OCT décrit dans le document.