Optique géométrique

Préparation à l'agrégation interne de physique

Posséder les bases

⋆ ⋆ ⋆

1 Qu'est-ce que l'optique géométrique ?

L'optique géométrique est la *description* du phénomène lumineux à l'aide de la notion de rayon de lumière [1] sans aucune référence à la nature de la lumière.

La plupart des lois de l'optique étaient connues des grecs. Cependant, notre connaissance de la lumière nous permet maintenant de situer le domaine de validité de ces lois. Celles-ci ne sont vérifiées que si les caractéristiques liées à sa nature n'interviennent pas, c'est-à-dire :

- ▷ taille des « objets » infiniment supérieure à la longueur d'onde (nature ondulatoire)
- ▷ énergie mobilisée infiniment supérieure à l'énergie d'un photon (nature corpusculaire)

L'optique géométrique s'intéresse également au milieu dans lequel la lumière se propage. Cette théorie affecte, à tout point de l'espace parcouru par la lumière, un indice (souvent noté n). L'interprétation qui en est faite est d'être le rapport entre la célérité c de la lumière dans le vide à la célérité v de la lumière dans le milieu considéré.

$$\boxed{n = \frac{c}{v}}$$

Le vide est le milieu dans lequel la célérité est la plus importante. On a donc $n \geq 1$.

1. Cette notion de rayon lumineux sera définie dans la partie approfondissement. Pour l'instant elle n'a de valeur qu'intuitive.

2 Lois fondamentales de l'optique géométrique

2.1 Loi de propagation en ligne droite

Dans un milieu homogène[2] *les rayons lumineux sont rectilignes.*

2.2 Loi du retour inverse de la lumière

Tout trajet suivi par la lumière dans un sens peut l'être dans l'autre.

2.3 Lois de la réflexion et de la réfraction

Définitions préalables :

- ▷ On appelle dioptre la surface (immatérielle) séparant deux milieux homogènes.
- ▷ Lorsqu'un rayon lumineux atteint un dioptre, on appelle plan d'incidence le plan qui contient le rayon lumineux et la normale[3] au dioptre en le point d'incidence du rayon.

Dans la suite, j'appellerai milieu 1 le milieu dans lequel se propage initialement la lumière, et milieu 2, le milieu qui se trouve « de l'autre côté » du dioptre.

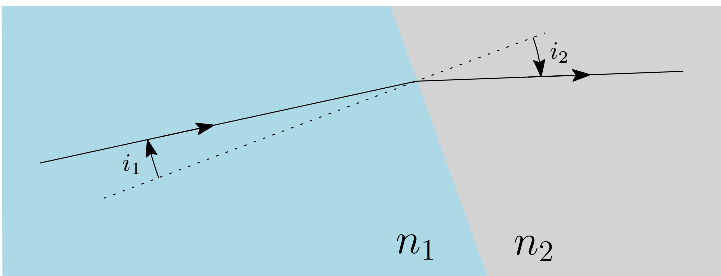
Loi de la réflexion

Lorsqu'un rayon lumineux atteint un dioptre, il donne naissance à un rayon, dit réfléchi, se propageant dans le milieu 1 et tel que :

le rayon réfléchi est le symétrique du rayon incident relativement à la normale

Corollaire : le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence.

Loi de la réfraction



Lorsqu'un rayon lumineux atteint un dioptre, il *peut* donner naissance à un rayon, dit réfracté, se propageant dans le milieu 2 et tel que :

- ▷ le rayon réfracté se trouve dans le plan d'incidence.
- ▷ Si i_1 désigne l'angle que fait le rayon incident avec la normale, i_2 l'angle que fait le rayon réfracté avec la normale, n_1 et n_2 les indices des milieux 1 et 2, on a :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Remarque : la formule ci-dessus n'admet pas toujours de solution (l'inconnue, c'est i_2). En effet, si $n_1 \sin i_1 \geq n_2$, aucun angle i_2 n'est solution. Dans ce cas, l'expérience montre qu'il n'y a pas de rayon réfracté. On dit que la réflexion est totale.

2. Un milieu est dit homogène si, et seulement si, son indice prend la même valeur partout.
3. Celle-ci n'existe que si le dioptre est une surface suffisamment régulière…

3 Constructions géométriques

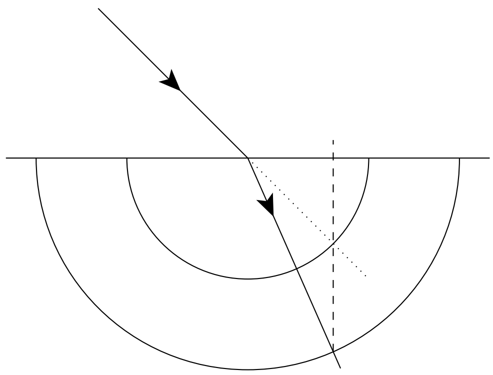
3.1 Réflexion

Étude guidée : considérons un dioptre plan (ou un miroir plan). Représentez-le (vue en coupe) sous la forme d'un segment. Dessinez un rayon incident quelconque.

- ▷ Comment construire géométriquement le rayon réfléchi, c'est-à-dire un rayon symétrique ? Ne passez pas à l'étape suivante avant d'avoir essayé.
- ▷ Choisissez un point sur le rayon incident et construisez son symétrique par rapport au dioptre.
- ▷ Cela vous aide-t-il ?
- ▷ Tracez la droite joignant ce point symétrique au point d'incidence du rayon sur le dioptre. Avez-vous trouvé le rayon réfléchi ?

3.2 Réfraction

Sur la figure ci-après, les cercles ont des rayons respectifs proportionnels aux indices n_1 et n_2 (ici, $n_1 < n_2$).



1. On commence par déterminer l'intersection du prolongement du rayon incident avec le cercle de rayon n_1.
2. Puis, on trace la perpendiculaire au dioptre passant par ce point.
3. Enfin, on trace le rayon réfracté, il passe par l'intersection de cette perpendiculaire et du cercle de rayon n_2.

Expliquez en quoi cette construction respecte les lois de Descartes. Traitez le cas $n_1 > n_2$.

4 Formation des images

4.1 Définitions

Dans la suite, je distingue le rayon lumineux (souvent un segment) et le support de ce rayon (la droite qui le porte).

Système optique : Tout ensemble de dioptres et de surfaces réfléchissantes (miroirs) constitue un système optique. On distinguera une surface d'entrée et une surface de sortie du système.

Objet ponctuel : L'intersection, si elle existe, des supports des rayons lumineux éclairant la face d'entrée d'un système optique, définit un objet ponctuel pour ce système. S'il y a de la lumière à l'intersection[4], l'objet est dit réel, sinon il est dit virtuel.

Image ponctuelle : L'intersection, si elle existe, des supports des rayons lumineux émergeant de la face de sortie d'un système optique, définit une image ponctuelle

4. l'intersection des supports étant donc aussi l'intersection des rayons.

pour ce système. S'il y a de la lumière à l'intersection, l'image est dite réelle, sinon elle est dite virtuelle.

4.2 Stigmatisme – conjugaison

On dit qu'un système optique est *stigmatique* pour un couple de point (A, A') si, et seulement si, chaque rayon issu de A et éclairant la face d'entrée du système optique — et donc définissant A comme objet — émerge de la face de sortie en un rayon contenant A' — et donc définissant A' comme image.

On dit alors que A' est le conjugué de A par le système optique considéré.

Remarque : la loi du retour inverse de la lumière nous indique que cette conjugaison est « à double sens ». Si A' était objet, A serait son image.

Le miroir plan

Étude guidée : je vous propose de dessiner un segment sur votre feuille (représentant un miroir plan en coupe) et de choisir un point A objet.

- ▷ Construisez géométriquement tout un faisceau de rayons réfléchis.
- ▷ Observez que les rayons émergeants se croisent en un point.
- ▷ Déterminez l'image A' de A.
- ▷ Remarquez que, A ayant été choisi au hasard, cette propriété de stigmatisme du miroir plan est étendue à tout l'espace et pas seulement à un couple de points. Connaissez-vous d'autres systèmes qui ont cette propriété ?

EXERCICES

ex 1. Prisme

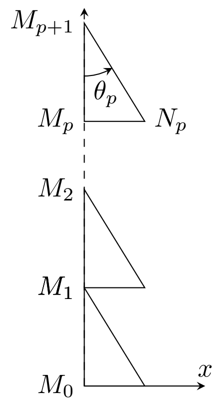
On considère un prisme droit, réalisé dans un verre d'indice n et dont la section droite est triangulaire. Un rayon incident, contenu dans un plan de section droite, atteint le prisme sous une incidence i.

- ▷ À quelle condition ce rayon subira-t-il une réflexion totale à l'intérieur du prisme ?
- ▷ On considère maintenant le cas d'un rayon ne subissant aucune réflexion totale. Exprimer la déviation subie par le rayon entre son entrée dans le prisme et sa sortie. Montrer qu'il existe une incidence qui rend cette déviation minimale.

ex 2. Prisme (bis)

Calculer la déviation D d'un rayon arrivant avec l'incidence i petite sur un prisme d'indice n et d'angle au sommet A petit.

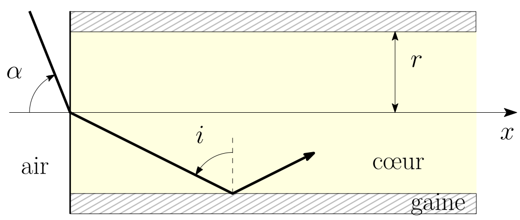
ex 3. Lentille de Fresnel détournée



1. On effectue une révolution d'axe Ox des triangles $M_pN_pM_{p+1}$ pour $0 < p < m$. Le volume ainsi délimité est occupé par un matériau d'indice n. On note $2a$ la distance M_pM_{p+1} et θ_p l'angle en M_{p+1}.
   Les rayons incidents viennent des x négatifs, parallèlement à Ox.
   ▷ Trouver une condition sur θ_p assurant qu'il n'y a pas réflexion totale dans le prisme.
2. θ_p a la valeur limite calculée ci-dessus. Déterminer la région de l'axe Ox qui est éclairée.

ex 4. Fibre à saut d'indice

La fibre optique, de révolution autour de l'axe Ox, est consituée d'une partie appelée « cœur » de rayon $r = 0{,}5$ mm, d'indice constant $n_c = 1{,}43$ entourée d'une gaine d'indice constant $n_g = 1{,}40$. L'air a un indice constant $n_a = 1$, et l'entrée de la fibre est en $x = 0$.



▷ Rappeler les deux lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. Définir l'angle limite correspondant à la réflexion totale.

▷ Quelle relation doit vérifier l'angle i d'incidence cœur - gaine pour que le rayon se propage dans la fibre en restant confiné dans le cœur ? En déduire la condition imposée à l'angle d'entrée α pour que la propagation se maintienne dans la fibre. Calculer numériquement les valeurs limites i_ℓ de i et α_ℓ de α.

▷ Montrer simplement à l'aide d'une figure ce qui se passerait si la fibre présentait un coude prononcé. Conclusion ?

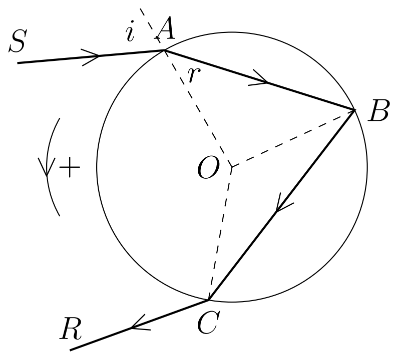
ex 5. Lentille demi-boule

On considère une lentille plan-convexe en forme de demi-boule de rayon r, taillée dans un matériau d'indice n. Celle-ci est posée, côté sphérique, sur un support plan, et est éclairée, côté plat, par un faisceau de largeur $2r$ en incidence normale. Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble des rayons incidents qui subissent une réfraction en arrivant sur le dioptre sphérique.
2. À quelle distance de l'axe un rayon lumineux doit-il arriver pour ressortir (côté incident) parallèlement à lui-même après k réflexions dans la boule ?

ex 6. Arc en ciel

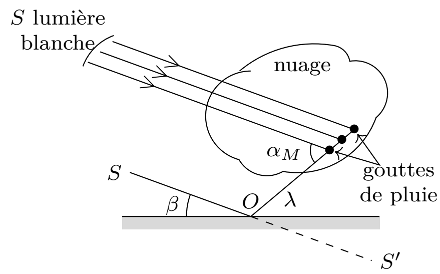
1. On considère une goutte de pluie de centre O, de rayon R, d'indice $n > 1$, plongée dans l'air (d'indice égal à 1). Exprimer $\alpha \overset{\text{déf}}{=} \left(\widehat{\vec{AS};\vec{CR}}\right)$ en fonction de i et r puis en fonction de i uniquement. Montrer que α est extrémal pour une incidence i_0 à préciser.



2. Le soleil émet de la lumière blanche (polychromatique). L'indice n varie depuis 1,331 pour le rouge extrême jusqu'à 1,337 pour le violet extrême. Il en résulte que les valeurs de i_0 et de $\alpha_M \overset{\text{déf}}{=} \alpha(i_0)$ dépendent maintenant de la longueur d'onde λ. On peut montrer que, pour chaque longueur d'onde, il y aura accumulation d'énergie lumineuse dans la direction α_M.

   ▷ Déterminer le signe de $\dfrac{\mathrm{d}\alpha_M}{\mathrm{d}\lambda}$.

3. L'observateur est en O, le soleil a l'inclinaison β. L'axe SOS' étant de révolution, chaque couleur λ donne un anneau. Sous quel angle est-il vu ? De l'intérieur vers l'extérieur de l'arc, quel est l'ordre de succession des couleurs ?



4. On s'intéresse aux rayons subissant deux réflexions totales. Reprendre l'étude et déterminer la position de l'arc secondaire relativement à l'arc primaire ainsi que l'ordre de succession des couleurs.

SOLUTIONS

ex 1. Prisme

Réflexion totale ssi $i > i_0$ avec $\sin i_0 = n \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - A\right)$; Si $n \sin\frac{A}{2} > 1$, tout incident est totalement réfléchi ; si $n \sin A > 1$, tous les rayons arrivant « côté sommet » sont totalement réfléchis.

ex 2. Prisme (bis)

$D = (n-1) \cdot A$

ex 3. Lentille de Fresnel détournée

1. $n \sin\theta_p > 1$
2. Les points d'abscisse multiple de $\frac{h}{\sqrt{n^2-1}}$, où h est la hauteur d'un prisme, sont éclairés.

ex 4. Fibre à saut d'indice

Confinement si $n_c \sin i > n_g$ donc si $\sin\alpha < \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$.

En présence d'un coude, risque de réfraction cœur-gaine.

ex 5. Lentille demi-boule

1. Réfraction si $x < \frac{r}{n}$; 2. $x_k = r\cos\left(\frac{\pi}{2k}\right)$.

ex 6. Arc en ciel

1. $\alpha = 2(2r - i)$; $\alpha = 2\left(\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) - i\right)$; $\sin i_0 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$ (n'existe que si $n \leq 2$). ; 2. $\frac{\mathrm{d}\alpha_M}{\mathrm{d}\lambda} > 0$; 3. $\alpha - \beta$; violet à l'intérieur, rouge à l'extérieur. 4. arc secondaire au dessus ; couleurs inversées.

Acquérir l'essentiel

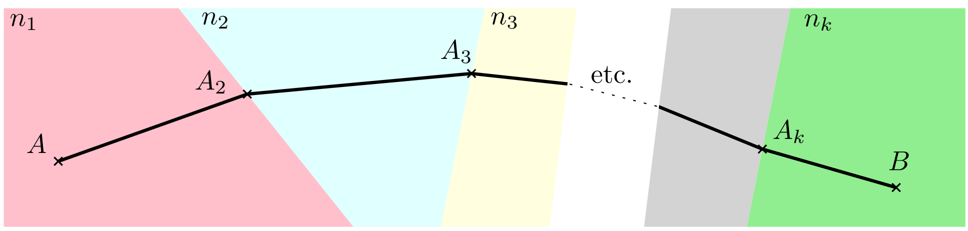
⋆ ⋆ ⋆

1 Chemin optique

Soient deux points A et B appartenant à un même rayon lumineux $\mathscr{C}$. On appelle chemin optique de A à B le long de $\mathscr{C}$ la quantité :

$$\boxed{[AB]_{\mathscr{C}} \overset{\text{déf}}{=} \int_{A \xrightarrow[\mathscr{C}]{} B} n\mathrm{d}s}$$

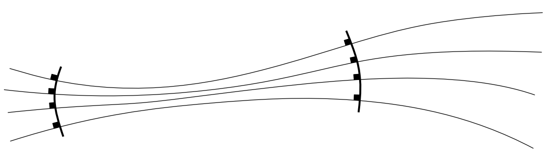
Si le milieu traversé est homogène par morceaux, le chemin optique est alors simplement la somme, sur chaque morceau, du produit de l'indice n du milieu par la distance parcourue dans le morceau (le schéma parle de lui-même) :



$$[AB] = n_1.AA_2 + n_2.A_2A_3 + \cdots + n_k.A_kB$$

2 Théorème de Malus

Soit un faisceau de rayons lumineux et une surface $\mathscr{S}$ orthogonale à ce faisceau. La surface obtenue en faisant progresser chaque point de $\mathscr{S}$ d'un même chemin optique le long du rayon lumineux qui le contient est elle aussi orthogonale au faisceau.



Quelques remarques

Dans le cas d'une source ponctuelle, on appelle *surface d'onde*[5] une surface réunissant les points atteints par les rayons lumineux après le parcours d'un chemin optique donné.

Alors, en corollaire du théorème de Malus, on peut affirmer que :

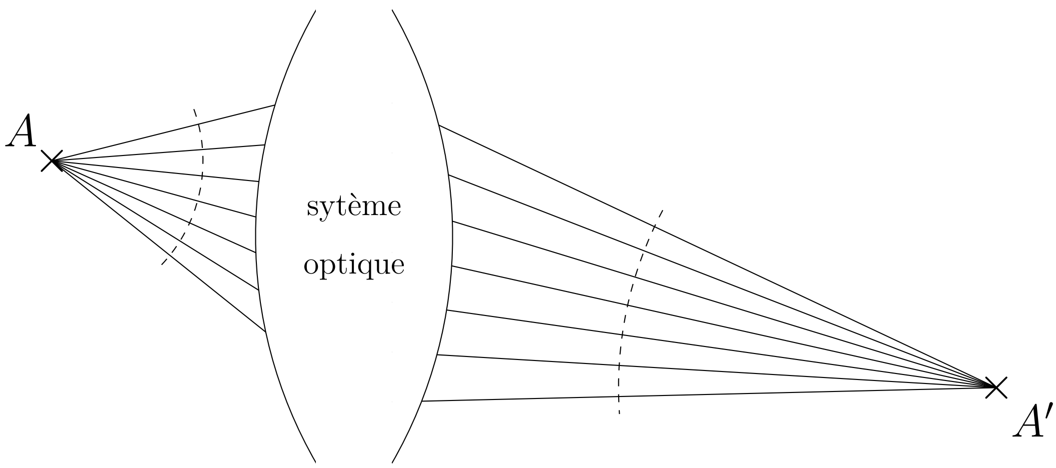
Les surfaces d'onde sont orthogonales aux rayons lumineux

C'est sous cette forme que le théorème de Malus est enseigné en classes préparatoires. Attention, cette version est moins générale que l'énoncé précédent. Remarquons également qu'une surface orthogonale à des rayons lumineux n'est pas nécessairement une surface d'onde[6]...

3 Formation des images

3.1 Retour sur le stigmatisme

Soit un système optique, un point A et son image A'. Considérons deux surfaces (représentées en tirets) orthogonales aux rayons lumineux issus de A et aboutissant en A'. D'après le théorème de Malus, ces surfaces sont séparées d'un même chemin optique, quel que soit le rayon choisi.



En faisant *glisser* ces surfaces vers A, pour l'une, et vers A', pour l'autre, et en passant à la limite, on déduit que :

Le long de tous les rayons menant d'un objet à son image, le chemin optique est le même

5. Aie, le mot est lâché : *onde*. Mais que vient-il faire ici, dans un cours d'optique géométrique ? Cela m'est imposé par la version du théorème de Malus qui est au programme. Voir les lignes qui suivent...
6. Il suffit que la lumière ait subi un phénomène de diffraction. Autrement dit, ce théorème n'a de validité que dans le cadre de l'optique géométrique. Ceci est, tout bien considéré, parfaitement logique !

3.2 Systèmes centrés

Un système optique est dit *centré* s'il possède un axe de révolution. Bien qu'ils ne puissent être parfaitement stigmatiques, les systèmes centrés possèdent une propriété intéressante dans leur capacité à former des images : un stigmatisme aussi proche de la perfection que souhaité est réalisable.

Définitions

- ▷ Un rayon est dit paraxial s'il est *peu incliné* et *peu écarté* de l'axe optique du système centré considéré.
- ▷ On dit qu'on utilise un système optique centré dans les conditions de Gauss si les seuls rayons qui l'atteignent sont paraxiaux. (à cet effet l'utilisation de diaphragmes est courante.)

Stigmatisme approché

On peut s'approcher aussi près qu'on veut d'un stigmatisme parfait à condition de se restreindre autant que nécessaire à des rayons paraxiaux.

Traduction :

En diaphragmant un système optique centré, les rayons lumineux issus d'un point objet ne se croisent, certes, pas en un point (donc il n'y a pas d'image au sens strict), mais il existe une région de l'espace, d'autant plus petite que le diaphragme est fermé, dans laquelle ils passent tous.

Si cette zone n'est pas résolue[7], la différence avec une situation de stigmatisme parfait sera imperceptible. On parlera de stigmatisme approché et, par abus, d'image.

Une démonstration de cette propriété ? Voir la partie « Approfondir » page 23.

Foyers

On appelle *foyer image*, d'un système centré, le point image d'un point à l'infini sur l'axe.

On appelle *foyer objet*, d'un système centré, le point dont l'image est à l'infini sur l'axe.

Ainsi, tout rayon arrivant sur un système optique centré, parallèlement à l'axe optique, en ressortira de manière à contenir (passer par) le foyer image.

De même, tout rayon arrivant sur un système optique centré, en contenant (passant par) le foyer objet, en ressortira parallèle à l'axe optique.

7. Au sens de résolution : taille de cette zone inférieure à la taille d'un pixel de capteur CCD ou encore zone vue à l'œil sous un angle inférieur à 1' ; etc.

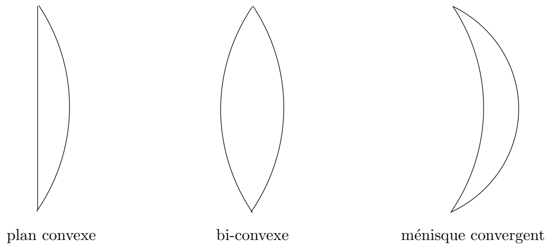
3.3 Lentilles minces

Définition — catalogue

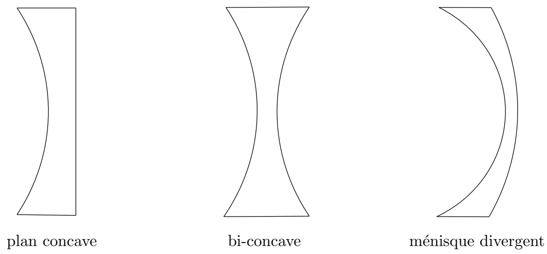
Une lentille sphérique mince est la réunion de deux dioptres sphériques coaxiaux dont les sommets sont à une distance négligeable[8] l'un de l'autre.

Par construction une lentille mince est un système centré.

On distingue les lentilles à bord mince (qui présentent un caractère convergent)...



... des lentilles à bord épais (qui présentent un caractère divergent).



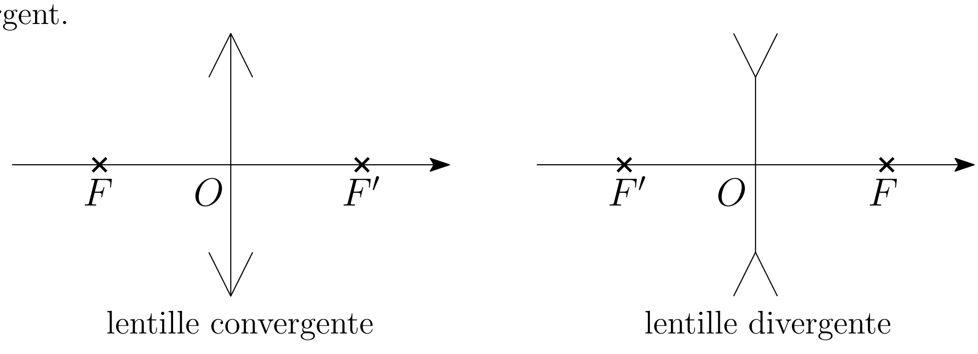
3.4 Constructions

Représentation

Les lentilles minces sont représentées par un segment orthogonal à leur axe (dit axe optique). Cette représentation indique bien cette notion de « minceur » : épaisseur négligeable.

Du même coup apparaît un point particulier (sur la représentation ! En pratique j'ai bien peur qu'il n'existe pas vraiment[9]...) : le centre optique (noté O sur les figures ci-dessous). Il est l'intersection de ce segment et de l'axe optique.

Aux extrémités du segment-lentille, on indique symboliquement le caractère convergent ou divergent.



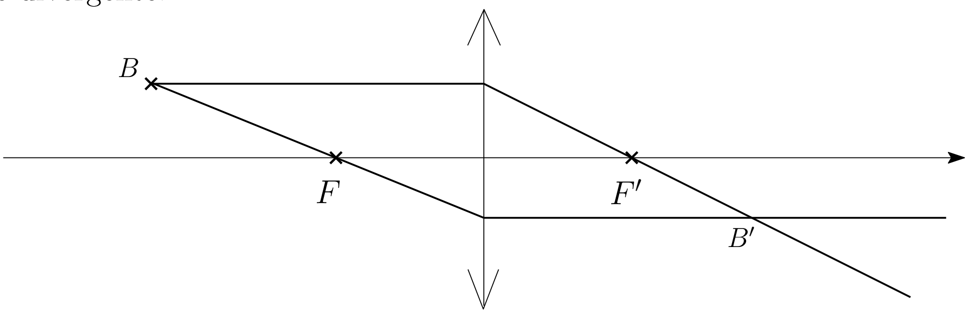
8. devant les autres distances intervenant dans le problème.
9. Pour aller plus loin, il faut aller chercher la notion de nœuds. Partie « Approfondir » ?

Image d'un objet ponctuel

L'idée générale est simple : le stigmatisme indique que tous les rayons issus du point objet passent par le point image. Il suffit alors de deux rayons pour construire cette image...

Il se trouve que, de la définition même des foyers, nous savons construire deux rayons ! L'un est celui qui part de l'objet parallèlement à l'axe optique. L'autre est celui qui part de l'objet en direction du foyer objet.

Voici la construction avec une lentille convergente. Je vous laisse faire celle qui concerne la lentille divergente.

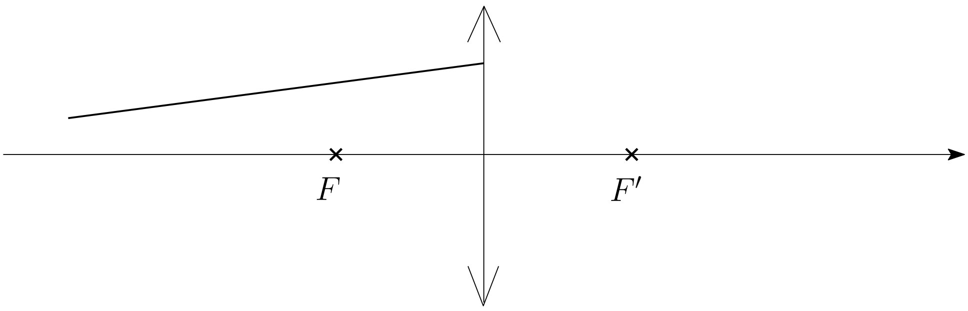


Ce schéma illustre certaines propriétés fondamentales des systèmes centrés minces :

- ▷ Aplanétisme : si deux points objets sont dans un même plan orthogonal à l'axe optique, leurs images respectives sont également dans un même plan orthogonal à l'axe optique.
- ▷ Les foyers étant symétriques l'un de l'autre par rapport au centre optique [10], le rayon BB' — rayon en apparence non dévié — contient le centre optique.

Image d'un rayon

Étude guidée : considérons une lentille mince et un rayon quelconque arrivant sur celle-ci.



- ▷ Comment construire le rayon réfracté par la lentille ? Ne passez pas à l'étape suivante avant d'avoir essayé ; toutes les connaissances nécessaires ont été vues.
- ▷ Posez un point B sur le rayon. Imaginez que ce point est celui qui a émis le rayon. Y a-t-il un lien entre l'image de ce point et le rayon cherché ?

10. C'est une propriété qui est effective dès que le milieu avant la lentille et le milieu après la lentille ont même indice.

▷ Vous avez trouvé ? Si tous les rayons issus d'un point passent par son image, alors le rayon cherché passera par l'image B' de B. C'est gagné. Il ne vous reste plus qu'à construire B' comme on l'a vu plus haut.

▷ optimisation : quel que soit le point B choisi sur le rayon initial, cette méthode fonctionnera. Y a-t-il des points pour lesquels la construction sera la plus simple (dans le sens économe en traits de construction) ?

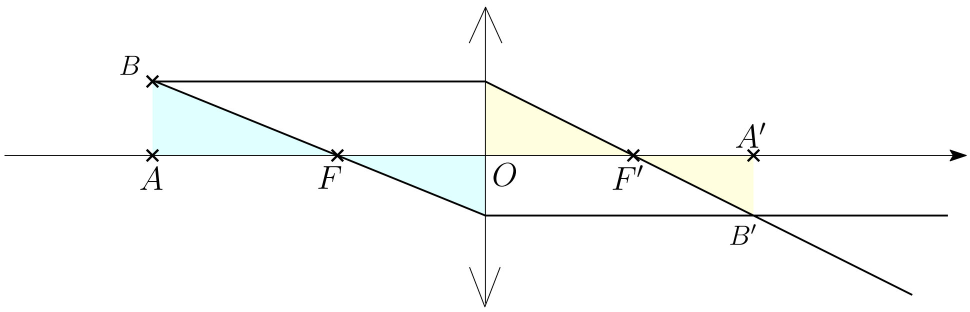
▷ Oui : B à l'infini ou encore B dans le plan focal objet… Assurez-vous d'avoir bien compris.

3.5 Formules de conjugaison

Elles sont la version analytique des constructions. Ni plus ni moins d'information.

Reprenons la construction précédente (ci-après). J'y ai rajouté la projection A (resp A') de B (resp. B') sur l'axe optique. La propriété d'aplanétisme indique que A' est bien l'image de A. La fonction qui donne A' à partir de A est appelée *relation de conjugaison*. Elle indique comment le plan contenant le point objet considéré est conjugué au plan contenant l'image de cet objet.

Une fois connu le plan contenant B', il suffira alors de connaître le rapport $\gamma \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, appelé *grandissement transversal*, pour déterminer B'.



Formules de Newton

Les formules de Newton indiquent la relation de conjugaison et le grandissement avec une origine des positions aux foyers de la lentille.

Elles se retrouvent très facilement à partir du schéma ci-dessus. Il s'agit d'appliquer le théorème de Thalès (triangles semblables) à chaque couple de triangles que j'ai identifiés par une couleur.

Ainsi,

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \qquad ; \qquad \gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}}$$

Voici deux formules de grandissement (merci Newton !). Je les aime beaucoup plus que celles de Descartes (ci-après). En effet, l'une ne fait intervenir que la position de l'objet, l'autre ne fait intervenir que la position de l'image… C'est pratique.

Par substitution, on en déduit la formule de conjugaison :

$$\boxed{\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2} \text{ avec } f' \overset{\text{déf}}{=} \overline{OF'} = \overline{FO} \text{ : distance focale.}$$

Remarque : Ah oui, j'oubliais ! Ces traits sur les distances ... indiquent des valeurs algébriques, c'est-à-dire des valeurs signées (positives ou négatives). Là encore, avantage à Newton : vous choisissez la convention que vous voulez. D'ordinaire, les orientations positives sont selon l'axe optique et vers « le haut de la feuille ».

Vérifiez bien que les mêmes formules fonctionnent avec les lentilles divergentes et quel que soit le caractère réel ou virtuel de l'objet ou de son image. Un seul jeu de formules pour toutes les situations.

Formules de Descartes

Elles indiquent la conjugaison et le grandissement avec une origine des positions au centre optique. Je vous propose de les déduire de celles de Newton. Pour cela, un jeu avec la formule de Chasles [11] suffira.

Vous devriez obtenir :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

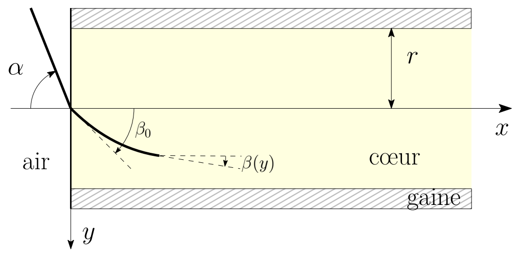
Remarquez : l'usage de la (eh oui, une seule !) formule de grandissement nécessite d'avoir déjà calculé où est l'image...

11. $\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR}$...

EXERCICES

ex 1. Fibre à gradient d'indice

Dans le cœur, l'indice $n(y)$ varie de façon continue, depuis n_C en $y = 0$ jusqu'à la valeur n_G en $y = r$, les surfaces équi-indices ayant pour équation $y =$ cste. Le rayon lumineux, se propageant dans le plan méridien Oxy, a une inclinaison β par rapport à l'axe Ox.



1. Montrer que l'équation de la trajectoire du rayon s'écrit : $n(y).\cos\beta(y) = A$, où A est une constante que l'on exprimera en fonction de n_C et de β_0.
2. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en fonction de $\beta(y)$. En déduire une relation entre $n(y)$ et $y(x)$. On donne la loi $n(y)$ suivante (dite pseudo - parabolique) :

$$n^2(y) = n_C^2\left(1 - 2\Delta\left(\frac{y}{r}\right)^2\right) \qquad \text{pour } y \leq r, \text{ avec } \Delta = \frac{n_C^2 - n_G^2}{2n_C^2}$$

   Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $y(x)$.
3. Pour l'intégrer, on posera : $a = \dfrac{n_C^2}{A^2} - 1$, $b = \dfrac{n_C^2 - n_G^2}{A^2 r^2}$, puis on fera le changement de variable suivant : $y\sqrt{\dfrac{b}{a}} = \sin\varphi$. En déduire l'équation $y(x)$ de la trajectoire.
4. Calculer l'écart maximum y_m de ce rayon par rapport à l'axe de la fibre et en déduire une condition sur l'angle d'entrée α pour que la propagation du rayon soit limitée au cœur de la fibre. Conclusion ?
5. Montrer que le rayon coupe l'axe Ox en des points régulièrement espacés d'une longueur d que l'on calculera. Proposez une application numérique.

ex 2. Surfaces d'onde et chemin optique

On considère une surface P, plane et réfléchissante, et une source ponctuelle S.

- ▷ Dessiner quelques rayons issus de S et se réfléchissant sur P.
- ▷ Représenter alors quelques surfaces d'onde.
- ▷ Comment exprimer simplement le chemin optique séparant S d'une surface d'onde donnée. (faire intervenir le symétrique S', par rapport à P, de S)

ex 3. Chemin optique et lois de Descartes

On considère un dioptre plan séparant deux milieux transparents, d'indices respectifs n_1 et n_2. Un faisceau lumineux parallèle de direction $\vec{u}_1$ arrive sur le dioptre et se réfracte, donnant ainsi naissance à un faisceau lumineux parallèle de direction $\vec{u}_2$.

▷ Montrer que le chemin optique séparant deux surfaces d'onde est indépendant du rayon suivi si et seulement si une certaine condition est vérifiée par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

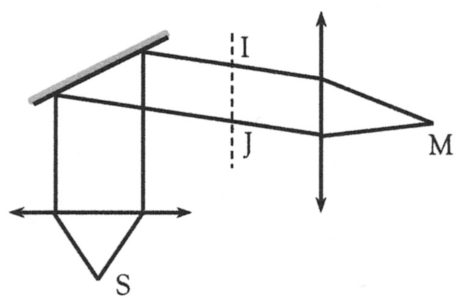
▷ Montrer que cette condition est équivalente aux lois de Descartes.

▷ Soient A et B deux points sur un même rayon lumineux, A étant dans le milieu d'indice n_1 et B dans le milieu d'indice n_2. Montrer que parmi tous les trajets hypothétiques menant de A jusqu'à B, celui que suit effectivement la lumière est celui dont le chemin optique est minimal.

▷ Recommencer avec la réflexion.

ex 4. Du bon usage du théorème de Malus

Sur le schéma ci-contre, on a représenté le trajet de 2 rayons lumineux issus de S et qui aboutissent en M.



▷ Comparer les chemins optiques le long de ces deux rayons.

▷ Sur ces deux rayons, on a identifié deux points (I et J). Exprimer $[IM] - [JM]$ à l'aide de coordonnées de M.

ex 5. Chemin optique et stigmatisme

En utilisant la notion de chemin optique et son lien avec le stigmatisme (voir paragraphe 3.1 page 12), montrer qu'un miroir qui fait converger un faisceau parallèle en un unique point F est nécessairement parabolique. (on pourra dans un premier temps raisonner dans un plan).

ex 6. Chemin optique et stigmatisme (bis)

On considère une lentille plan-convexe de rayon R, taillée dans un matériau d'indice n et plongée dans l'air, sur laquelle arrive un faisceau lumineux parallèle en incidence normale (côté plan).

En utilisant une méthode identique à celle de l'exercice ci-dessus, déterminer, dans les conditions de Gauss, la position du foyer image de cette lentille.

ex 7. Lentilles minces

▷ Déterminer l'ensemble des rayons lumineux qui atteignent un point donné du plan focal image d'une lentille convergente.

▷ Déterminer l'ensemble des rayons lumineux qui atteignent un point image donné (éventuellement virtuel) après réfraction dans une lentille convergente.

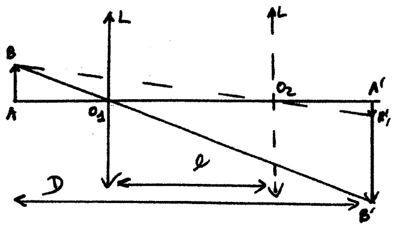
▷ On considère un oeil placé derrière une lentille divergente (pas nécessairement sur l'axe optique !). Déterminer l'ensemble des points de l'espace objet que l'oeil « voit ».

ex 8. Lentilles minces (bis)

Concevoir une méthode de construction (donc pas de calculs ! !) permettant de déterminer où placer un objet pour que le grandissement ait une valeur donnée. On commencera avec un système optique constitué d'une seule lentille, puis on s'intéressera à des systèmes composés…

ex 9. Méthodes de focométrie

1. Méthode de Bessel : la distance $AA' = D$ étant fixée, il existe (si D vérifie une condition à préciser) deux positions de la lentille conjugant A et A'. On pose $O_1O_2 = \ell$. Calculer la distance focale de la lentille en fonction de D et de ℓ.
2. Méthode de Silbermann : idem avec un grandissement imposé : $\gamma = -1$. Comparer à la méthode de Bessel en terme de précision…



ex 10. Étude d'un doubleur de focale

1. À l'aide d'un objectif assimilable à une lentille mince convergente L_1, de centre optique O_1, de distance focale image $f_1' = 50$ mm, on forme sur un film photographique l'image A_1B_1 d'un objet réel de hauteur $AB = 20$ cm situé à une distance $D = 1$ mètre de l'objectif.
   - ▹ À quelle distance de l'objectif doit-on placer le film ?
   - ▹ Calculer la grandeur de l'image obtenue.
2. On place un objet virtuel A_1B_1 à une distance $d = 2$ cm d'une lentille mince divergente L_2 de centre optique O_2 et de distance focale image $f_2' = -40$ mm.
   - ▹ Déterminer la position de l'image $A'B'$ obtenue, sa nature et le grandissement transversal.
3. L'objectif L_1 restant fixe par rapport à l'objet AB précédent (donc tel que $\overline{O_1A} = -1$ m), on déplace le film et on intercale entre celui-ci et l'objectif L_1 la lentille divergente L_2 précédente. On veut obtenir une image réelle $A'B'$ deux fois plus grande que l'image A_1B_1 donnée par l'objectif L_1 seul.
   - ▹ Où doit-on placer L_2 ? Préciser la distance entre L_2 et A_1B_1.
   - ▹ De quelle distance a-t-on reculé le film ? Préciser la distance entre L_2 et le film, et vérifier qu'elle ne dépend pas de la distance focale f_1' de l'objectif.

SOLUTIONS

ex 1. Fibre à gradient d'indice

1. Il suffit de considérer le milieu comme la limite d'un milieu stratifié et d'écrire la loi de la réfraction. $A = n_C \cos\beta_0$. 2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\beta$; $n_C \cos\beta_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{n^2 - n_C^2 \cos^2\beta_0}$; $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a}\sqrt{1 - \frac{b}{a}y^2}$.
3. $y(x) = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin\left(\sqrt{b}\, x\right)$

ex 2. Surfaces d'onde et chemin optique

$[SP] = n \cdot S'P$

ex 3. Chemin optique et lois de Descartes

$(n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) \wedge \vec{N} = \vec{0}$ où $\vec{N}$ est normal au dioptre.

ex 4. Du bon usage du théorème de Malus

$[SM]$ indépendant du rayon ; $[IJ] - [JM] = IJ \cdot x/f$ avec x abscisse de M dans le plan focal.

ex 5. Chemin optique et stigmatisme

Écrire que le chemin optique pour un rayon qcq est identique à celui du rayon suivant l'axe.

ex 6. Chemin optique et stigmatisme (bis)

$f = \frac{R}{n-1}$

ex 7. Lentilles minces

Utiliser le principe du retour inverse de la lumière et la définition du stigmatisme.

ex 8. Lentilles minces (bis)

Certains rayons peuvent être construits même si on ne connait pas l'abscisse de l'objet et/ou de l'image…

ex 9. Méthodes de focométrie

1. $f = \frac{D^2 - \ell^2}{4D}$; 2. $f = D/4$ (et $\ell = 0$).

ex 10. Étude d'un doubleur de focale

1. film à environ 53mm ; image de 1,1 cm ; 2. image réelle à 40mm de la lentille, grandissement +2 ; 3. Il suffit de combiner les résultats précédents : L_2 20mm en avant de A_1B_1 (ancienne position du film) ; on recule le film de 20mm ; la distance L_2-film est $-f_2' = 40$ mm.

Approfondir

⋆ ⋆ ⋆

1 Formulation axiomatique de l'optique géométrique

La théorie de l'optique géométrique est simple, très simple : il est possible de la formuler à l'aide d'un seul principe. Ensuite, tout n'est qu'affaire de déduction logique. Ce principe, on le doit à Pierre de Fermat (1657).

1.1 Principe de Fermat

Énoncé

> *Les trajets effectivement suivis par la lumière (i.e. les rayons lumineux) sont les courbes le long desquelles la durée de parcours est stationnaire.*

À l'époque, Fermat annonçait des durées *minimales*. La formulation que je vous propose ici est un peu plus moderne [12]. Remarquons qu'énoncer mathématiquement les lois physiques de cette façon (le comportement d'un système est celui qui rend telle ou telle fonction stationnaire) est très fécond et est devenu incontournable dans la physique moderne. En ce sens, Fermat est un pionnier.

Premières conséquences

Le principe de Fermat fournit comme conséquences immédiates la loi de propagation rectiligne ainsi que la loi du retour inverse. En effet, la durée de parcours d'une courbe ne dépend pas du sens dans lequel on suit celle-ci et, dans un milieu homogène, les courbes le long desquelles la durée de parcours est minimale sont les courbes de longueur minimale c'est-à-dire les segments de droite.

12. On rencontre parfois *localement minimale* — par exemple sur Wikipédia.

Le lien avec le chemin optique

La durée du trajet AB le long d'une courbe $\mathscr{C}$ est :

$$\Delta t_{AB}(\mathscr{C}) \overset{\text{déf}}{=} \int_{A \underset{\mathscr{C}}{\longrightarrow} B} \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

$$\text{Or, } v = \frac{c}{n}, \text{ donc :} \qquad \Delta t_{AB}(\mathscr{C}) = \frac{1}{c} \int_{A \underset{\mathscr{C}}{\longrightarrow} B} n \mathrm{d}s$$

$$\text{Donc,} \qquad c.\Delta t_{AB}(\mathscr{C}) = [AB]_{\mathscr{C}}$$

Le principe de Fermat est souvent énoncé en termes de stationnarité du chemin optique.

Réfraction et réflexion

Vous avez montré, dans l'exercice 3 page 19, que le trajet de chemin optique minimal était celui qui vérifie les lois de Descartes. On pourrait, ici, le démontrer de manière plus élaborée, mais l'essentiel est fait.

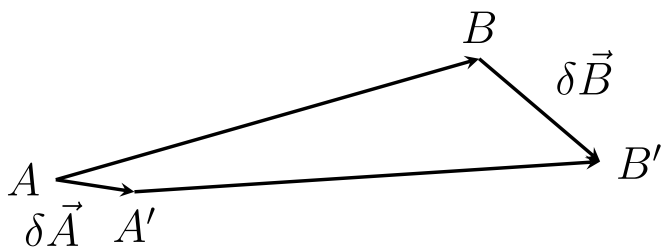
Remarquons que la réflexion totale correspond à une situation dans laquelle il n'existe pas de chemin stationnaire menant au point B choisi. Sauriez-vous le montrer ?

1.2 Le théorème de Malus

Je vous propose ici une démonstration de ce théorème à partir du principe de Fermat.

Préliminaire : variation élémentaire d'un vecteur

Considérons un vecteur $\vec{AB}$ et intéressons-nous à exprimer au premier ordre sa variation [13]. Envisageons pour ce faire un déplacement de A vers A' et de B vers B'.



Alors,

$$\vec{A'B'} - \vec{AB} = \vec{A'A} + \vec{AB} + \vec{BB'} - \vec{AB}$$

$$\text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{d}\vec{AB} = \delta\vec{B} - \delta\vec{A}$$

Remarque : pour un vecteur unitaire (ou plus généralement de norme invariable), cette variation est toujours orthogonale au vecteur lui-même. En effet :

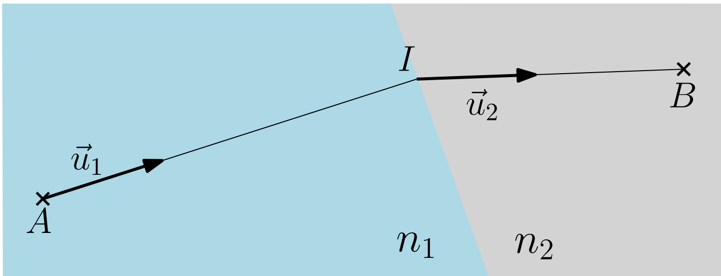
$$\|\vec{u}\| = c^{te} \iff \vec{u} \cdot \vec{u} = c^{te} \iff \mathrm{d}\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

13. La variation au premier ordre est liée à ce que les mathématiciens appelle différentielle.

Principe de la démonstration

1. On commence par prouver le théorème à la traversée d'un dioptre (n_1, n_2).
2. Le cas d'une réflexion se déduit immédiatement par la substitution $(n_1, n_2) \to (n_1, n_1)$.
3. Par récurrence, on en déduit qu'il est vrai lorsque les rayons subissent un nombre quelconque de réfractions et réflexions.

Cas de la traversée d'un dioptre



Exprimons la variation première du chemin optique $[AB] = n_1\vec{u}_1 \cdot \vec{AI} + n_2\vec{u}_2 \cdot \vec{IB}$:

$$\mathrm{d}[AB] = n_1\mathrm{d}\vec{u}_1 \cdot \vec{AI} + n_1\vec{u}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{AI} + n_2\mathrm{d}\vec{u}_2 \cdot \vec{IB} + n_2\vec{u}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{IB}$$

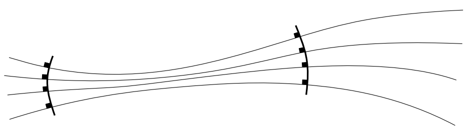
$\vec{AI}$ étant colinéaire à $\vec{u}_1$, de même que $\vec{IB}$ est colinéaire à $\vec{u}_2$, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}[AB] &= n_1\vec{u}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{AI} + n_2\vec{u}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{IB} \\
\mathrm{d}[AB] &= n_1\vec{u}_1 \cdot (\delta\vec{I} - \delta\vec{A}) + n_2\vec{u}_2 \cdot (\delta\vec{B} - \delta\vec{I}) \\
\mathrm{d}[AB] &= n_2\vec{u}_2 \cdot \delta\vec{B} - n_1\vec{u}_1 \cdot \delta\vec{A} + \delta\vec{I} \cdot (n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2)
\end{aligned}$$

Si AIB est un rayon lumineux, cela signifie que I est tel que $\mathrm{d}[AB]$ soit nul pour tout $\delta\vec{I}$ dès lors que A et B sont fixés. Donc [14], $\delta\vec{I} \cdot (n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) = 0$ et on a :

$$\mathrm{d}[AB] = n_2\vec{u}_2 \cdot \delta\vec{B} - n_1\vec{u}_1 \cdot \delta\vec{A} \qquad (\star)$$

Voici l'expression mathématique du théorème de Malus. L'énoncé que je vous ai donné plus haut est :

> *Soit un faisceau de rayons lumineux et une surface $\mathscr{S}$ orthogonale à ce faisceau. La surface obtenue en faisant progresser chaque point de $\mathscr{S}$ d'un même chemin optique le long du rayon lumineux qui le contient est elle aussi orthogonale au faisceau.*
>
> 

14. Voici une version curieuse des lois de Descartes… Sauriez-vous les retrouvez dans l'expression qui suit.

Et en effet, si je déplace A sur une surface orthogonale aux rayons lumineux, cela signifie que $\delta\vec{A}\cdot\vec{u}_1 = 0$. Si $[A'B'] = [AB]$, cela signifie que $\mathrm{d}[AB] = 0$. Il vient alors, avec ($\star$) :

$$\vec{u}_2 \cdot \delta\vec{B} = 0$$

Qui indique que B' appartient à la surface, orthogonale aux rayons, qui contient B.

C.Q.F.D.

Suite de la démonstration

Voir le principe de la démonstration… c'est trivial.

2 Stigmatisme et formation des images

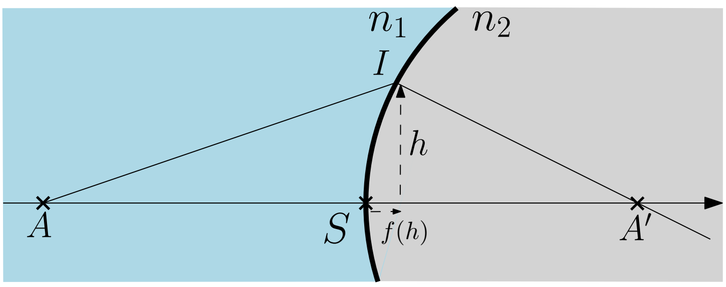
2.1 Un dioptre stigmatique

Considérons un dioptre, séparant un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2. Considérons deux points A et A' et un rayon menant de l'un à l'autre via une réfraction en un point I du dioptre.

Introduisons un système de coordonnées tel que :

- ▷ un point du dioptre, noté S, ait pour coordonnées $(0, 0)$
- ▷ que A et A' soient sur l'axe des ordonnées.

Introduisons la fonction f qui précise la forme du dioptre (voir schéma).



Le chemin optique AIA' s'écrit ainsi :

$$[AIA'] = n_1\sqrt{\left(\overline{AS}+f(h)\right)^2 + h^2} + n_2\sqrt{\left(\overline{SA'}-f(h)\right)^2 + h^2} \qquad (\star\star)$$

Stigmatisme

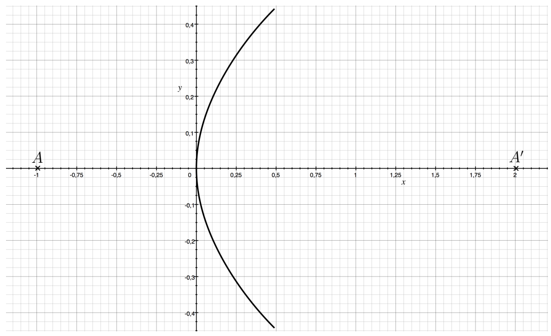
A' est l'image de A si et seulement si quel que soit le rayon menant de A à A', le chemin optique prend la même valeur, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall I, [AIA'] = [ASA'] \qquad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\forall h, n_1\left(\sqrt{\left(\overline{AS}+f(h)\right)^2 + h^2} - \overline{AS}\right) = n_2\left(\overline{SA'} - \sqrt{\left(\overline{SA'}-f(h)\right)^2 + h^2}\right)$$

2.2 Ovales de Descartes

On peut choisir de fixer A et A' et de s'intéresser à la forme $f(h)$ du dioptre qui conjugue A et A'. Grâce à une résolution numérique, avec $\overline{AS} = 1$ unité, $\overline{SA'} = 2$ unités, $n_2 = 1,3.n_1$ j'obtiens la courbe ci-contre.



2.3 Stigmatisme approché

On viens de trouver comment usiner un dioptre pour qu'il soit parfaitement stigmatique pour un couple de points choisis à l'avance [15], mais aucun ne sera stigmatique quel que soit le point objet ! Autre problème : difficulté d'usiner une telle surface (sauf peut-être avec les machines numériques modernes...). Dans la suite, je suppose le système centré [16] ($f'(0) = 0$).

Développons alors ($\star\star$) à l'ordre 2 en h :

$$\begin{aligned}
[AIA'] &\simeq n_1\sqrt{\left(\overline{AS}+\frac{h^2}{2}.f''(0)\right)^2+h^2}+n_2\sqrt{\left(\overline{SA'}-\frac{h^2}{2}.f''(0)\right)^2+h^2}\\
&\simeq n_1\left(\overline{AS}+\frac{h^2}{2\overline{AS}}\left(1+\overline{AS}f''(0)\right)\right)+n_2\left(\overline{SA'}+\frac{h^2}{2\overline{SA'}}\left(1-\overline{SA'}f''(0)\right)\right)\\
&\simeq \left[n_1\overline{AS}+n_2\overline{SA'}\right]+\frac{h^2}{2}.\left[\frac{n_1}{\overline{AS}}\left(1+\overline{AS}.f''(0)\right)+\frac{n_2}{\overline{SA'}}\left(1-\overline{SA'}.f''(0)\right)\right]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$[AIA']-[ASA'] \simeq \frac{h^2}{2}.\left[\frac{n_1}{\overline{AS}}\left(1+\overline{AS}.f''(0)\right)+\frac{n_2}{\overline{SA'}}\left(1-\overline{SA'}.f''(0)\right)\right]$$

Il existe alors un point A' qui rend le chemin optique $[AA']$ indépendant [17] de h (donc du rayon choisi). Ce point est tel que :

$$\frac{n_1}{\overline{AS}}\left(1+\overline{AS}.f''(0)\right)+\frac{n_2}{\overline{SA'}}\left(1-\overline{SA'}.f''(0)\right)=0$$

C'est-à-dire tel que :

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{SA'}}-\frac{n_1}{\overline{SA}}=V}$$

avec $V = (n_2 - n_1).f''(0)$

15. Ceci peut être intéressant, par exemple en microscopie, où l'échantillon est toujours à la même distance, mais en photographie, par exemple, l'intérêt est limité.

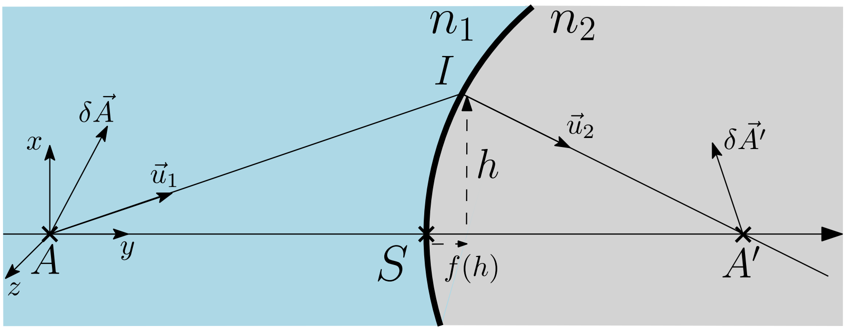
16. Calculs moins lourds...

17. À cet ordre d'approximation ! Voilà pourquoi on parle de stigmatisme approché : tous les rayons ne passent pas par A', mais si h reste suffisamment petit — conditions de Gauss —, ils passeront aussi près que l'on veut de A'.

Ceci est la relation de conjugaison d'un dioptre centré dans les conditions de Gauss. V est appelé vergence.

Remarque : Deux dioptres centrés pour lesquels $f''(0)$ a la même valeur sont équivalents dans le sens qu'ils ont la même vergence. Les dioptres les plus simples à usiner sont sphériques. Dans ce cas, $f(h) = \overline{SC}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\overline{SC}}\right)^2}\right)$ et $f''(0) = \dfrac{1}{\overline{SC}}$, C étant le centre du dioptre.

Aplanétisme



Intéressons-nous aux conditions de *maintient* du stigmatisme pour des points voisins de A. Si A est déplacé de $\delta\vec{A}$ et A' de $\delta\vec{A}'$, le chemin optique $[AIA']$ devient $[AIA'] + \mathrm{d}\mathscr{L}$ avec :

$$\mathrm{d}\mathscr{L} = n_2\vec{u}_2 \cdot \delta\vec{A}' - n_1\vec{u}_1 \cdot \delta\vec{A}$$

Soit $\delta\vec{A} = (\delta x, \delta y, 0)$ et $\delta\vec{A}' = (\delta x', \delta y', \delta z')$. Par symétrie, on déduit que : $\delta z' = 0$.

Ensuite, dans les conditions de Gauss, on obtient, en développant à l'ordre 2 :

$$\mathrm{d}\mathscr{L} \simeq n_2\left[\delta y'.\left(1 - \frac{h^2}{2\overline{SA'}^2}\right) + \delta x'.\frac{h}{\overline{SA'}}\right] - n_1\left[\delta y.\left(1 - \frac{h^2}{2\overline{AS}^2}\right) + \delta x.\frac{h}{\overline{AS}}\right]$$

On déduit alors : $\begin{cases} \delta y = 0 \Longrightarrow \delta y' = 0 & \text{propriété d'aplanétisme} \\ \dfrac{\delta x'}{\delta x} = \dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} & \text{expression du grandissement transversal} \end{cases}$

Foyers et formules de Newton

Par définition des foyers, on obtient : $\begin{cases} \overline{SF'}.V = n_2 \\ \overline{SF}.V = -n_1 \end{cases}$

Ensuite, en exploitant les formules de grandissement et de conjugaison :

$$\gamma = \frac{\overline{SA'}}{n_2}\left(\frac{n_2}{\overline{SA'}} - V\right) \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{\overline{SA}}{n_1}\left(\frac{n_1}{\overline{SA}} + V\right)$$

$$\gamma = 1 - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SF'}} \qquad \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{\overline{SA}}{\overline{SF}}$$

donc, $\boxed{\gamma = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}} \quad ; \quad \gamma = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{FA}}}$

Et la formule de conjugaison s'écrit : $\boxed{\overline{F'A'}.\overline{FA} = \overline{F'S}.\overline{FS}}$

On remarque que, dans les formules de Newton, les indices optiques n'apparaissent pas. Tout est *caché* dans les foyers.

3 Les systèmes optiques centrés

Les systèmes optiques centrés sont, pour la plupart [18], des successions de dioptres, l'image par le $n^{\text{ième}}$ dioptre étant l'objet pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ dioptre.

L'utilisation successive des formules de conjugaison et de grandissement permet de déterminer une formule de conjugaison et de grandissement pour le système complet.

Foyers et plans principaux

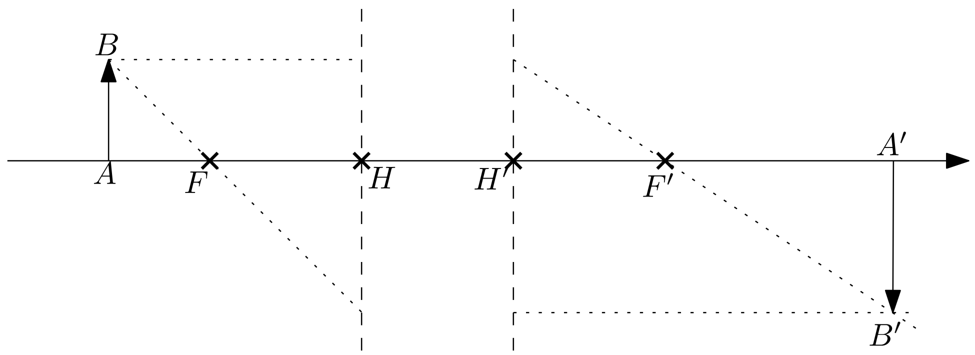
Pour tous ces systèmes, on définit les plans principaux comme les plans conjugués l'un de l'autre avec un grandissement +1. On note en général H et H' les intersections de ces plans avec l'axe optique.

On obtient les formules de Newton [19] suivantes :

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'H'}} \qquad ; \qquad \gamma = \frac{\overline{FH}}{\overline{FA}}}$$

$$\boxed{\overline{F'A'}.\overline{FA} = \overline{F'H'}.\overline{FH}}$$

Constructions



On peut donner également une définition propre de système mince : un système est mince si on peut confondre ses plans principaux.

18. Certains possèdent aussi des surfaces réfléchissantes.
19. Pour les formules de Descartes, il faut introduire la notion de nœuds ; peut-être dans une prochaine édition…

4 Les milieux continus

4.1 Équation d'un rayon lumineux

Soit $\mathscr{C}$ un trajet d'un point A à un point B. Soit ψ une courbe associée à ce trajet, telle que $\psi(0) = A$ et $\psi(1) = B$ et $\forall \lambda \in]0;1[, \psi(\lambda) = \big(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\big) \in \mathscr{C}$.

Alors, l'élément de longueur ds le long de $\mathscr{C}$ est[20] : $\mathrm{d}s = \|\psi'\|\mathrm{d}\lambda$, c'est-à-dire

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}\lambda$$

Ainsi, $[AB](\mathscr{C}) = \displaystyle\int_{A \underset{\mathscr{C}}{\longrightarrow} B} n\mathrm{d}s$ s'écrit explicitement $[AB](\mathscr{C}) = \displaystyle\int_0^1 \mathcal{L} \circ \varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

$$\text{avec } \mathcal{L}(x, y, z, x', y', z') = n(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\text{et } \varphi(\lambda) = \big(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), x'(\lambda), y'(\lambda), z'(\lambda)\big)$$

Par définition, le chemin optique $[AB](\mathscr{C})$ est stationnaire si et seulement si, pour toute variation $\tilde{\mathscr{C}}$ de trajet au voisinage de $\mathscr{C}$, $\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) \overset{\text{déf}}{=} [AB](\tilde{\mathscr{C}}) - [AB](\mathscr{C})\Big|_{\text{ordre 1}}$ est nulle.

Soit donc $\tilde{\varphi} \overset{\text{déf}}{=} \Big(x + \delta x, \dots, x' + \delta x', \dots\Big) = \varphi + \delta\varphi$ une variation de la courbe φ. Dans la suite, pour plus de commodité, je notera q_i, pour $i \in \{1;2;3\}$ les variables de ψ et (q_i, q_i') celles de φ.

Alors,

$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = \int_0^1 \Big(\mathcal{L} \circ \tilde{\varphi} - \mathcal{L} \circ \varphi\Big)\Big|_{\text{ordre 1}}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = \int_0^1 \Big(\mathcal{L} \circ (\varphi + \delta\varphi) - \mathcal{L} \circ \varphi\Big)\Big|_{\text{ordre 1}}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

Ici, on différentie une fonction composée (notez la convention de sommation d'Einstein...) :

$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = \int_0^1 \left(\delta q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \circ \varphi + \delta q_i' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \circ \varphi\right)(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

On intègre par parties le deuxième terme :

$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = \int_0^1 \left(\delta q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \circ \varphi + \left(\delta q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \circ \varphi\right)' - \delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \circ \varphi\right)'\right)(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$
$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = \left[\delta q_i(\lambda) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \circ \varphi(\lambda)\right]_0^1 + \int_0^1 \delta q_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \circ \varphi - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} \circ \varphi\right)'\right)(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

20. Le prime désigne la dérivée (par rapport à λ).

En remarquant que $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial n}{\partial q_i}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda}$ et $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i'} = \vec{e}_{q_i} \cdot \big(n\vec{u}\big)$, il vient :

$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = n_{(B)}\vec{u}_{(B)} \cdot \delta\vec{B} - n_{(A)}\vec{u}_{(A)} \cdot \delta\vec{A} + \int_0^1 \delta q_i \left(\frac{\partial n}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\lambda} \circ \varphi - \vec{e}_{q_i} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\big(n\vec{u} \circ \varphi\big)\right)(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

Un dernier changement de variables conduit à :

$$\mathrm{d}[AB](\mathscr{C}) = n_{(B)}\vec{u}_{(B)} \cdot \delta\vec{B} - n_{(A)}\vec{u}_{(A)} \cdot \delta\vec{A} + \int_A^B \delta q_i \vec{e}_{q_i} \cdot \left(\vec{\nabla} n - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(n\vec{u}\big)\right) \mathrm{d}s$$

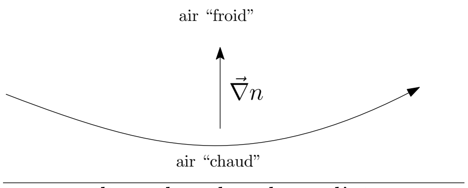
On en déduit, l'équation d'un rayon lumineux $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big(n\vec{u}\big) = \vec{\nabla} n}$

et que le théorème de Malus est encore valable…

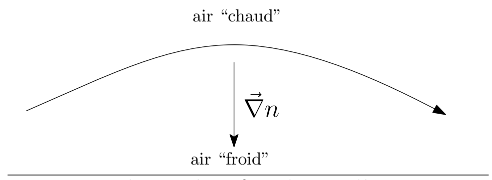
4.2 Les mirages

Cette équation du rayon lumineux nous indique que les rayons lumineux se courbent dans la direction donnée par $\vec{\nabla} n$.

Si on sait que l'indice de l'air augmente avec sa densité [21], cela suffit à interpréter le phénomène de mirage :



milieu plus chaud que l'air



milieu plus froid que l'air

21. donc diminue avec sa température…

EXERCICES

ex 1. Association de systèmes centrés

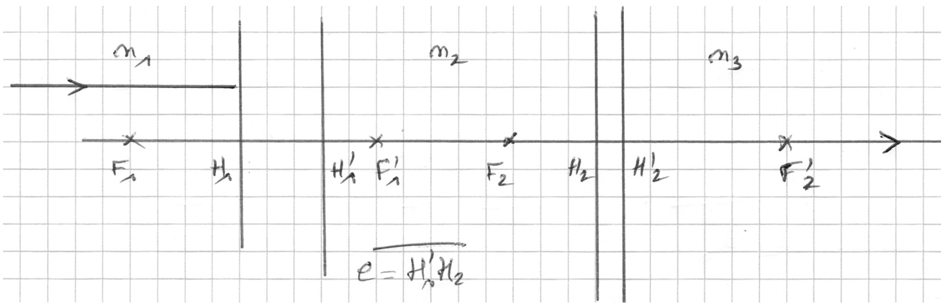
1. Éléments cardinaux et vergence d'un système épais.
   Soit un système épais dont les éléments cardinaux sont H, H', F et F'.
   - ▷ Faire un schéma et construire l'image $A'B'$ d'un objet AB.
   - ▷ Retrouver la formule de conjugaison (Newton) et de grandissement à partir de la construction.
   - ▷ Par analogie avec le dioptre sphérique, on définit la vergence V du système par :

   $$V = \frac{n_s}{\overline{H'F'}} = \frac{n_e}{\overline{FH}}$$

   (n_e est l'indice côté entrée du système et n_s l'indice côté sortie). Montrer qu'on peut écrire la conjugaison :

   $$\frac{n_s}{\overline{H'A'}} - \frac{n_e}{\overline{HA}} = V$$

2. Association de deux systèmes centrés épais ; système équivalent.
   On considère la succession de deux systèmes épais (voir les notations sur le schéma qui suit)



   - ▷ Construire le trajet du rayon qui se trouve sur le schéma et identifier F' et H'.
   - ▷ Établir géométriquement : $\dfrac{\overline{F_1'H_2}}{\overline{F_1'H_1'}} = \dfrac{\overline{F'H_2'}}{\overline{F'H'}}$ et $\dfrac{\overline{F'H_2'}}{\overline{F'F_2'}} = \dfrac{\overline{F_1'H_2}}{\overline{F_2H_2}}$
   - ▷ En déduire : $\overline{H'F'} = \dfrac{n_3}{V}$ et $\overline{H_2'H'} = -\dfrac{\overline{H'F'}}{\overline{H_1'F_1'}}e$ avec [22] $V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n_2}V_1.V_2$
   - ▷ Utiliser la symétrie du problème pour déduire : $\overline{HF} = -\dfrac{n_1}{V}$ et $\overline{H_1H} = \dfrac{\overline{HF}}{\overline{H_2F_2}}e$
   - ▷ Montrer que le système est afocal ($V = 0$) ssi $F_1' = F_2$. Où sont les éléments cardinaux dans ce cas ?

22. formule de Gullstrand…

ex 2. Microscope

L'appareil est schématisé par deux lentilles minces convergentes de même axe optique : l'objectif L_1 de distance focale $\phi_1 = 5$ mm, et l'oculaire L_2 de distance focale $\phi_2 = 25$ mm. Le foyer image F_1' de L_1 et le foyer objet F_2 de L_2 sont distants de $F_1'F_2 \overset{\text{déf}}{=} \Delta = 250$ mm.

L'œil de l'observateur sera toujours placé dans le plan focal image de L_2. L'objet AB, situé dans un plan de front (donc orthogonal à l'axe), A étant sur l'axe, a une image réelle A_1B_1 par l'objectif et l'oculaire en donne une image virtuelle définitive $A'B'$.

1. L'œil doit effectuer son observation sans accommoder, donc voir un faisceau parallèle.
   - ▷ En déduire la position de l'image intermédiaire A_1B_1, puis calculer la position de l'objet AB (donc la quantité F_1A).
   - ▷ Faire une construction représentant la marche d'un pinceau lumineux étroit issu de B.
2. L'image $A'B'$ est vue par l'œil sous l'angle α' avec l'appareil, et serait vue sans l'appareil (donc à l'œil nu au punctum proximum $d_m \simeq 25$ cm) sous l'angle α. Calculer le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.
3. Calculer la distance focale ϕ du microscope à l'aide de la formule de Gullstrand $V = V_1 + V_2 - eV_1V_2$.
4. Construire les plans principaux (où le grandissement vaut +1) et les foyers.
5. En accommodant, l'œil peut observer nettement un objet situé à une distance comprise entre d_m et l'infini. Calculer la latitude Δx de mise au point de l'appareil, c'est-à-dire l'écartement entre les positions extrêmes de l'objet.