

Rayonnement thermique

Préparation à l'agrégation interne de Physique

Posséder les bases

1 Rayonnement d'équilibre radiatif et thermique	2
2 Émission / absorption d'un corps	3
Exercices	5

Acquérir l'essentiel

1 Loi de Planck	6
2 Loi de Stefan	6
3 Répartition spectrale	7
Exercices	9
Solutions	12

Approfondir

1 Densité d'états électromagnétiques dans une cavité	14
2 De la densité d'énergie au flux hémisphérique	15

Posséder les bases

1 Rayonnement d'équilibre radiatif et thermique	2
1.1 Définition	2
1.2 Loi de Wien	3
1.3 Loi de Stefan	3
2 Émission / absorption d'un corps	3
2.1 Loi d'émission (Kirchhoff)	3
2.2 Notion de corps noir	4
2.3 Étude expérimentale	4
Exercices	5

★ ★ ★

1 Rayonnement d'équilibre radiatif et thermique

1.1 Définition

Considérons un matériau opaque¹ quelconque —non nécessairement homogène— maintenu à une température T et dans lequel existe une cavité. L'expérience montre qu'à l'équilibre un rayonnement électromagnétique baigne la cavité. Celui-ci est dit *d'équilibre radiatif et thermique*, ou E.R.T.

L'origine de ce rayonnement peut être comprise de la manière suivante : l'agitation thermique est susceptible d'exciter les molécules constituant les parois de la cavité et les éventuelles désexcitations radiatives restituent une partie de cette énergie. L'équilibre radiatif a lieu lorsque les absorptions sont intégralement compensées par les émissions. À l'époque de sa découverte, le mécanisme n'était pas compris en ces termes, mais on savait que la matière interagissait avec le rayonnement (voir cours d'électromagnétisme, notamment rayonnement dipolaire, diffusion par un dipôle...).

Raisonnant à partir du second principe de la thermodynamique, Kirchhoff montre que ce rayonnement E.R.T. est *homogène* (le même en tout point de la cavité), *isotrope* (y compris en ce qui concerne la polarisation), *indépendant de la nature et de la forme des parois*. Ce rayonnement est universel. On décrit souvent ce rayonnement² à partir de sa densité volumique et spectrale d'énergie³ $u^0(\nu, T)$ ou sa densité surfacique et spectrale de flux⁴ $\phi^0(\nu, T)$.

Ces deux dernières quantités sont liées, un peu comme le sont densité de flux et densité volumique dans d'autres domaines ($\vec{j} = \rho\vec{v}$ en électromagnétisme ou en hydrodynamique), sauf que le flux étant hémisphérique, un facteur apparaît :

$$\phi^0(\nu, T) = u^0(\nu, T) \cdot \frac{c}{4}$$

c étant la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Dans toute la suite, sauf indication contraire, les matériaux considérés sont supposés opaques : ils absorbent, réfléchissent (plus généralement diffusent), mais ne transmettent pas.

2. Dans toute la suite, l'exposant 0 indique une quantité relative au rayonnement E.R.T.

3. $u^0 = \frac{d}{d\nu} \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)$.

4. Intégrée sur une surface et un intervalle spectral, celle-ci indique le flux incident sur (ou partant de) cette surface. On parle parfois de flux hémisphérique car toutes les directions sont considérées...

1.2 Loi de Wien

Celle-ci précise la longueur d'onde λ_m à laquelle ϕ^0 admet un maximum⁵ :

$$\lambda_m \cdot T = 3 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}$$

Quelques applications numériques :

- maximum dans le visible : $3750 \text{ K} \leq T \leq 7500 \text{ K}$
- température ambiante : $\lambda \sim 10 \mu\text{m}$ (infrarouge)
- ‘mnemo-technique’ : $3 \mu\text{m}$ à 10^3 K (ou 3 mm à 1 K).

1.3 Loi de Stefan

Celle-ci indique le flux surfacique φ^0 associé à ϕ^0 i.e. $\int_{\mathbb{R}_+} \phi^0(\nu, T) d\nu$:

$$\varphi^0 = \sigma \cdot T^4$$

$\sigma \simeq 5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ (constante de Stefan)

Application numérique : $\varphi^0 \sim 400 \text{ W.m}^{-2}$ à 290 K .

2 Émission / absorption d'un corps

2.1 Loi d'émission (Kirchhoff)

Introduisons la densité surfacique et spectrale de flux émis ϕ_e et de flux absorbé ϕ_a et considérons le corps constituant les parois d'une cavité telle qu'évoquée plus haut. L'équilibre étant réalisé,

$$\phi_e(\nu, T) = \phi_a(\nu, T)$$

Définissons le coefficient d'absorption $a(\nu, T)$ du corps :

$$\phi_a(\nu, T) = a(\nu, T) \cdot \phi_i(\nu)$$

où $\phi_i(\nu)$ est la densité surfacique et spectrale de flux *incident*,

et remarquons que dans la situation envisagée $\phi_i(\nu) = \phi^0(\nu, T)$. Il vient alors :

$$\phi_e(\nu, T) = a(\nu, T) \cdot \phi^0(\nu, T) \quad (\star)$$

La portée de (\star) est bien plus grande que ce qu'il paraît au premier abord. En effet, Kirchhoff propose alors le raisonnement suivant : l'émission par un élément de surface d'un corps dont la température est T ne dépend que de l'état que ce corps acquiert à la température envisagée, mais ne dépend pas du rayonnement incident. Ainsi, peu importe le rayonnement incident, (\star) est vérifiée. C'est la loi fondamentale de l'émission.

Ce qui différencie l'émission de deux corps distincts, c'est uniquement leur coefficient d'absorption, i.e. leur capacité à absorber tel ou tel rayonnement.

Un corps émet d'autant plus un rayonnement qu'il est susceptible de l'absorber.

5. Dit comme cela, c'est faux ! La densité spectrale en longueur d'onde $\tilde{\phi}^0(\lambda, T)$ ne s'obtient pas en substituant $\frac{c}{\lambda}$ à ν dans $\phi^0(\nu, T)$... et le maximum de l'une “ne correspond pas” au maximum de l'autre.

2.2 Notion de corps noir

Une conséquence de la loi d'émission est qu'un corps totalement absorbant, i.e. tel que

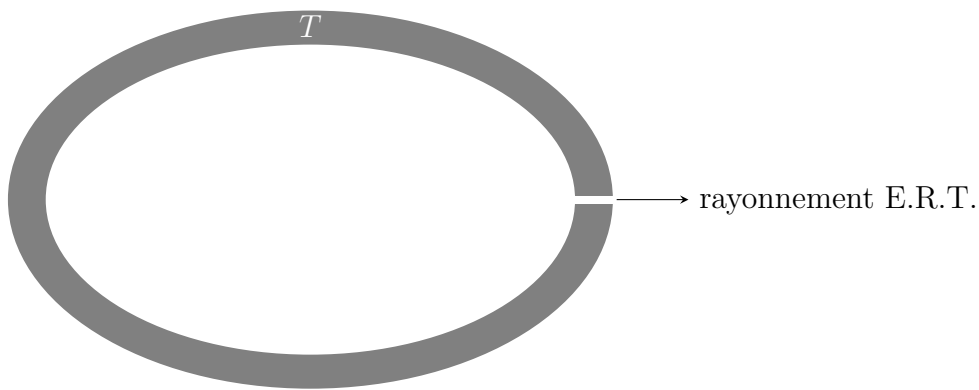
$$\forall \nu, a(\nu, T) = 1,$$

émet le rayonnement E.R.T. qui est, pour cette raison, également appelé *rayonnement du corps noir* (en effet, un corps totalement absorbant apparaît noir). Par ailleurs, on peut remarquer qu'aucun corps n'émet plus qu'un corps noir (en effet, $a \leq 1$!).

Remarque : on parle de corps gris lorsqu'un corps vérifie " $\exists a, \forall \nu, a(\nu, T) = a$ " (absorption indépendante de la fréquence). L'émission a alors le même profil spectral que pour un corps noir ; elle est seulement moins intense (pour un corps gris, on a $\varphi = a \cdot \varphi^0 = a \cdot \sigma \cdot T^4$).

2.3 Étude expérimentale

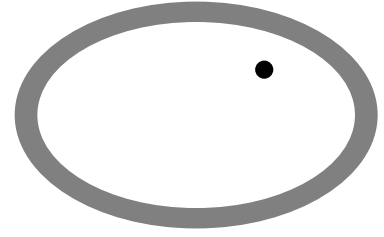
En général, l'étude expérimentale du rayonnement φ^0 est faite en pratiquant une petite ouverture dans un matériau contenant une cavité et maintenu à la température T .



On lit parfois qu'un rayonnement qui entrerait dans cette cavité resterait piégé (effectivement, il n'y a que peu de chance qu'il ressorte, ou alors il faut *bien viser*!), de sorte que celle-ci réalise véritablement un corps totalement absorbant. C'est une façon de raconter la loi fondamentale de l'émission : un corps totalement absorbant émet le rayonnement E.R.T.

ex 1. Retour à l'équilibre

Une sphère d'aluminium, de masse m , est portée à la température initiale T_e puis placée dans une enceinte vide dont les parois sont maintenues à la température T_1 .

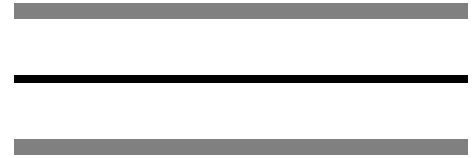


On supposera que la sphère ne perturbe pas l'équilibre radiatif de l'enceinte (sphère "petite"). On supposera de plus que la sphère se comporte comme un corps noir dont la température T est définie et uniforme à chaque instant.

1. La quantité $\frac{T - T_1}{T_1}$ étant petite devant l'unité, exprimer l'énergie perdue par la sphère pendant un intervalle de temps dt .
2. Établir la loi du refroidissement de la sphère $T = f(t)$.
3. Application numérique : $m = 0,12$ kg ; masse volumique $\mu = 2700$ kg.m⁻³ ; capacité thermique massique $c = 910$ J/K/kg ; $T_e = 303,15$ K ; $T_1 = 273,15$ K ; constante de Stefan $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴.

ex 2. Température d'équilibre

Deux parois planes, parallèles, de grande surface, dont les températures sont celles de deux sources aux températures T_1 et T_2 , définissent une enceinte vide à l'intérieur de laquelle on dispose, parallèlement aux parois, un écran fait d'une feuille d'aluminium d'épaisseur $e = 1$ mm. Cet écran sépare l'enceinte en deux parties.



Les parois et l'écran sont assimilés à des corps noirs. La température initiale de l'écran est notée T_0 . On supposera la température de l'écran définie à chaque instant.

1. Établir la loi de variation de la température T de l'écran en fonction du temps.
2. Quelle est la température d'équilibre de l'écran ?
3. Application numérique : masse volumique $\mu = 2700$ kg.m⁻³ ; capacité thermique massique $c = 910$ J/K/kg ; $T_1 = 273$ K ; $T_2 = 373$ K ; constante de Stefan $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W.m⁻².K⁻⁴. Calculer la constante de temps.

Acquérir l'essentiel

1 Loi de Planck	6
2 Loi de Stefan	6
3 Répartition spectrale	7
3.1 Densité de flux en longueur d'onde	7
3.2 Loi de Wien	7
3.3 Localisation spectrale du rayonnement	8
Exercices	9
Solutions	12

★ ★ ★

1 Loi de Planck

Je ne m'étends pas sur l'origine historique de cette loi (pourtant fondamentale car il s'agit de la première loi quantique!). Un savant mélange d'électromagnétisme et de physique statistique.

On la trouve souvent exprimant $u^0(\nu, T)$; compte tenu du contexte, je vais plutôt donner $\phi^0(\nu, T)$ sous une forme factorisée faisant apparaître la contribution de l'électromagnétisme (1^e terme) et celle de la physique statistique :

$$\phi^0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

2 Loi de Stefan

Établissons la loi de Stefan :

$$\begin{aligned}\varphi^0 &= \int_0^\infty \phi^0(\nu, T) d\nu \\ &= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \\ &= \left(\frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \right) \cdot T^4\end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale est une affaire de mathématiciens⁶. Il vient :

$$\varphi^0 = \sigma \cdot T^4$$

$$\text{avec } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} \simeq 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

6. Qui trouvent $\frac{\pi^4}{15}$.

3 Répartition spectrale

3.1 Densité de flux en longueur d'onde

Posons le problème : étant connue la densité surfacique et spectrale en fréquence, $\phi^0(\nu, T)$, comment déterminer la densité surfacique et spectrale en longueur d'onde, $\tilde{\phi}^0(\lambda, T)$?

Il suffit, pour répondre à cette question de revenir à la définition : si ν_1 et ν_2 ($\nu_2 > \nu_1$) sont deux fréquences, la densité surfacique de flux relative à l'intervalle spectral $[\nu_1; \nu_2]$ est :

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \phi^0(\nu, T) d\nu$$

Si ce même intervalle est représenté en longueur d'onde, la densité $\tilde{\phi}^0(\lambda, T)$ cherchée est telle que :

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \tilde{\phi}^0(\lambda, T) d\lambda = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \phi^0(\nu, T) d\nu$$

avec $\lambda_i = \frac{c}{\nu_i}$.

En changeant de variable dans la seconde intégrale, il vient :

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \tilde{\phi}^0(\lambda, T) d\lambda = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \phi^0\left(\frac{c}{\lambda}, T\right) \frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

L'égalité valant quelque soit l'intervalle spectral choisi, on obtient :

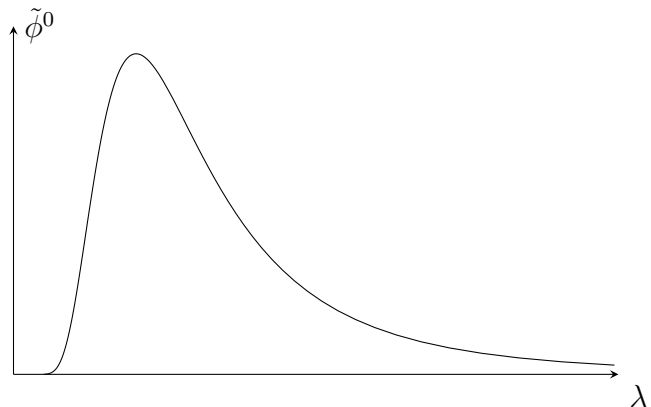
$$\tilde{\phi}^0(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \phi^0\left(\frac{c}{\lambda}, T\right)$$

soit explicitement :

$$\tilde{\phi}^0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Représentons $\tilde{\phi}^0(\lambda, T)$ en fonction de la longueur d'onde pour une température donnée :

Ce graphe —incomplet car sans unités— indique que $\tilde{\phi}^0$ admet un maximum et s'annule en 0 comme à l'infini (condition nécessaire d'intégrabilité!). Les lois qui suivent rendent quantitatives ces observations, notamment en précisant la position du maximum (loi de Stefan) et en montrant que l'essentiel du rayonnement est limité à un intervalle de longueurs d'onde relativement petit autour de ce maximum...



3.2 Loi de Wien

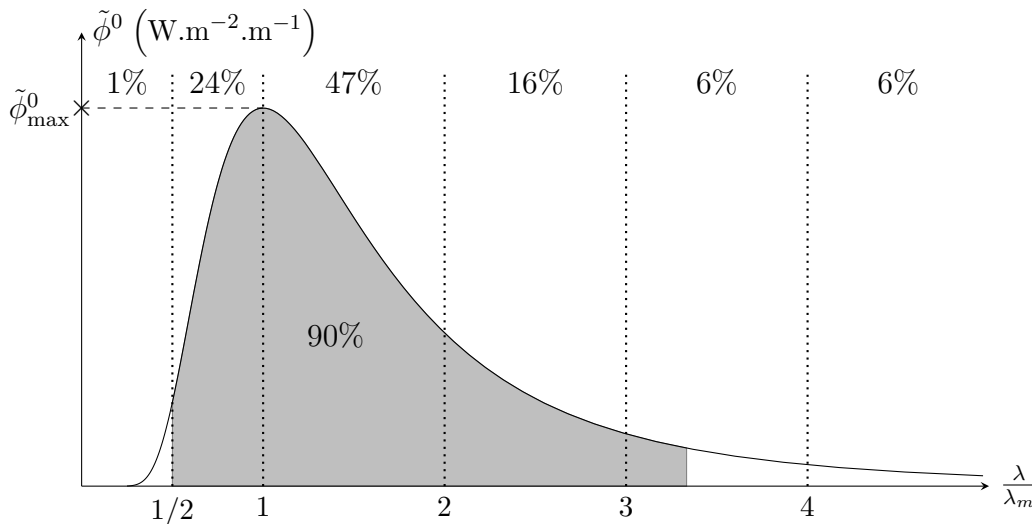
La recherche du maximum de $\tilde{\phi}^0$ se fait de manière classique, par dérivation. Cette dérivée s'annule en $\lambda = 0$ et en la solution de $(5 - x) \cdot e^x = 5$ avec $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ qui s'écrit :

$$\lambda_m \cdot T = C^{\text{te}} \simeq 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ K.m}$$

3.3 Localisation spectrale du rayonnement

Une étude plus poussée (et numérique) de la distribution spectrale du rayonnement du corps noir montre que :

- 25% de la puissance rayonnée est localisée dans l'intervalle $[0; \lambda_m]$.
- Près ⁷ de 90% de la puissance rayonnée est localisée dans l'intervalle $[\frac{\lambda_m}{2}; 3\lambda_m]$.



Pour info, $\frac{\tilde{\phi}_{\max}^0}{T^5} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ W.m}^{-2}.\text{m}^{-1}.\text{K}^{-5}$, ce qui donne $3 \cdot 10^7 \text{ W.m}^{-2}.\text{m}^{-1}$ à 300 K.

3.3.1 Conséquences

1. Soit un corps quelconque (non noir !) à une température T . Si le coefficient d'absorption de ce corps est proche de 1 dans l'intervalle $[\frac{\lambda_m}{2}; 3\lambda_m]$, alors il émet comme s'il était noir...
2. De la même manière, si ce corps recevait le rayonnement d'un corps dont la température est T alors il absorberait comme un corps noir...

Ainsi, la notion de “noirceur” est relative à la gamme spectrale envisagée.

Exemple : La plupart des verres sont presque noirs dans l'infrarouge, c'est-à-dire ont un coefficient d'absorption proche de 1 dans cette gamme spectrale. Lorsqu'ils sont à température ambiante, ils émettent donc ⁸ comme un corps noir. S'ils reçoivent le rayonnement d'un corps à température ambiante, ils absorbent totalement ce rayonnement. En revanche, ils sont transparents dans le visible et n'absorbent donc que très peu le rayonnement solaire ⁹...

7. 87% pour être précis.

8. En effet, comme nous l'avons calculé précédemment, λ_m se trouve bien dans l'infrarouge pour les températures ambiantes.

9. C'est pour toutes ces raisons que les serres nous proposent de belles tomates...

ex 1. Le Soleil, la loupe et le papier

Le Soleil est assimilé à une boule de rayon $R_{\odot} = 7.10^8$ m dont le centre est à la distance $d = 1,5.10^{11}$ m de la Terre. On forme l'image du Soleil à travers une loupe (lentille mince convergente de focale $f = 5$ cm et de rayon de bord $\rho = 1$ cm) sur une feuille de papier confondue avec le plan focal image.

1. Déterminer les caractéristiques géométriques de l'image.
2. Le flux lumineux surfacique reçu à la surface de la lentille vaut $E_0 = 10^3$ W.m⁻². Déterminer le flux surfacique sur la partie de la feuille de papier qui accueille l'image du Soleil en supposant la lentille parfaitement transparente.
3. Calculer la température de cette partie de la feuille de papier en supposant l'équilibre radiatif et thermique réalisé.
4. Amélioration du modèle : on considère le coefficient moyen d'absorption a du papier vis-à-vis du rayonnement solaire. On suppose que le papier émet comme un corps noir. On n'oubliera pas que le papier a deux faces !
 - ▷ Calculer la température du papier. Application numérique : $a = 15\%$ (papier blanc) et $a = 85\%$ (papier noirci).
 - ▷ Mêmes conditions, mais on tient compte de la présence de l'atmosphère supposé être un corps en E.R.T. à $T_{\text{atm}} = 300$ K. on supposera que vis-à-vis du rayonnement atmosphérique, le papier est un corps noir (absorbeur intégral). Conclusion sur l'intérêt de tenir compte de ce rayonnement.
5. Vers encore plus de réalisme... Le papier n'évacue pas l'énergie qu'il reçoit seulement par rayonnement. Des échanges conductifs au sein du papier ainsi que des échanges conducto-convectifs avec l'atmosphère ont lieu. Je propose de négliger les premiers (s'ils étaient conséquents, on pourrait se brûler en tenant le papier trop près de la zone chauffée...). On considère donc seulement l'échange conducto-convectif avec l'atmosphère, de coefficient surfacique h .
 - ▷ Exprimer le bilan des échanges entre le papier et l'extérieur (le papier a toujours deux faces!).
 - ▷ On constate expérimentalement qu'un papier noirci s'enflamme rapidement alors qu'un papier blanc, même après une longue exposition reste intact. Sachant que la température d'inflammation spontanée du papier est environ $T_{\text{inf}} = 230^\circ \text{C} \simeq 500$ K, que peut-on dire de h (on attend un encadrement) ?

ex 2. Lampe à incandescence

Une lampe à incandescence de puissance $P = 60$ W est modélisée par une ampoule sphérique en verre de rayon $R = 2,5$ cm et de faible épaisseur à l'intérieur de laquelle est disposé un filament sphérique concentrique de surface $S_F = 2.10^{-5}$ m².

1. Le rayonnement du filament est assimilé à celui d'un corps noir de température T_F . Calculer T_F et la longueur d'onde correspondant au maximum de l'émission. Justifier que le verre de l'ampoule puisse absorber une partie de ce rayonnement alors qu'il paraît transparent.
2. Le milieu ambiant est en équilibre radiatif et thermique à la température $T_a = 293$ K. Le verre de l'ampoule absorbe une fraction $\alpha = 0,05$ de la puissance P émise par le filament. D'autre part, le verre de l'ampoule se comporte comme un corps noir à la température T_v pour son propre rayonnement et pour le rayonnement du milieu ambiant. Un échange conducto-convectif de coefficient $h = 5$ W/m²/K existe entre le verre de l'ampoule et le milieu extérieur.

- ▷ Déterminer la température T_v de l'ampoule en régime stationnaire, supposée proche de T_a . On supposera que l'enceinte en verre réabsorbe tout le rayonnement émis par sa paroi interne vers le vide.

ex 3. Température d'équilibre

On considère une enceinte, dont la température est maintenue à une valeur T_0 , dans laquelle se trouve un disque matériel dont l'aire de chaque face est s_0 . L'enceinte, dans laquelle on a fait le vide, possède les propriétés d'un corps noir ; le disque également.

1. À l'équilibre, le disque sera à la température T_0 . Grâce à un bilan radiatif, déterminer la puissance P qu'il reçoit en fonction de s_0 , T_0 et σ la constante de Stefan.

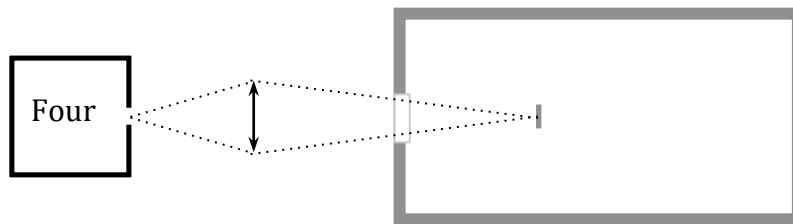
Cette puissance P ne dépendant que de la température de l'enceinte et de la taille du disque, on pourra utiliser l'expression ci-dessus dans une situation où le disque n'est pas à T_0 .

Un four, assimilable à un corps noir de température constante T présente un petit orifice circulaire de surface s .

On aménage dans la paroi de l'enceinte une petite fenêtre transparente à travers laquelle, à l'aide d'une lentille parfaitement transparente (n'absorbant donc aucun rayonnement), on réalise l'image du trou dans le plan qui contient le disque sus-cité. Le trou, la lentille et le disque ont même axe. On a $s_0 < s$. Soit D la distance trou-lentille. Voir le schéma.

On donne l'expression de la fraction du flux rayonné par le trou qui traverse la lentille : $\phi = \sigma T^4 s \frac{\Omega}{2\pi}$. Dans les conditions de Gauss, on admettra que $\Omega = \frac{\pi r^2}{D^2}$, r étant le rayon de la lentille.

2. Quel doit être le grandissement de la lentille pour que l'image du trou recouvre le disque entièrement et sans le déborder ? On supposera dans la suite que cette condition est réalisée.
3. Expliquer comment est construite l'expression de ϕ .
4. Déterminer la température du four sachant que la température d'équilibre du disque est T' .

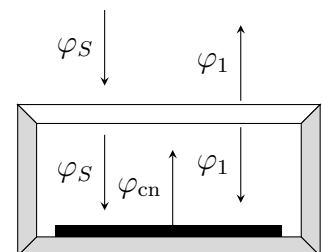


Données numériques :

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}; T_0 = 300 \text{ K}; T' = 352 \text{ K}; r = 2 \text{ cm}; \frac{s_0}{s} D^2 = 10^{-2} \text{ m}^2$$

ex 4. Effet de serre

On étudie l'effet de serre produit par l'interposition d'une vitre au-dessus d'une plaque qui reçoit le rayonnement solaire. La plaque est noircie et assimilée à un corps noir. Le verre est supposé totalement transparent au rayonnement solaire sauf à la question 3. où l'on tient compte du rayonnement solaire réfléchi. Il est, en revanche, totalement absorbant pour le rayonnement infrarouge émis par la plaque.



On note $\varphi_S = 0,6 \text{ kW/m}^2$ le flux solaire surfacique, supposé arriver en incidence normale et φ_1 le flux surfacique émis par la vitre sur chacune de ses faces.

1. On suppose la plaque et la vitre en équilibre radiatif. Écrire les équations traduisant ces équilibres et en déduire la température T de la plaque. À quelle condition sur sa température T_1 la vitre peut-elle être traitée comme un corps noir relativement au rayonnement qu'elle émet ? Calculer dans ces conditions sa température T_1 .
2. Reprendre la question précédente dans les cas où 2 vitres puis n vitres surplombent la plaque.
3. Chaque vitre réfléchit une fraction $r = 0,08$ du rayonnement solaire incident. On néglige toujours l'absorption du rayonnement par les vitres. Calculer le nombre de vitres au-delà duquel l'ajout d'une vitre supplémentaire produit une augmentation relative de φ_{cn} inférieure à 10%. (La résolution est assez technique —voir la résolution page 12 ; en revanche, l'écriture des équations est formatrice...) Commenter.

ex 5. Température d'un véhicule

Un véhicule adopte en général, en régime stationnaire, une température T_v supérieure à celle $T_a = 303$ K de l'air ambiant, du fait du rayonnement solaire et de celui envoyé par l'atmosphère toute entière.

Le rayonnement solaire direct correspond, au niveau de la mer et par une journée claire d'été, à une puissance thermique égale à 700 W/m^2 . Il n'est absorbé que pour une fraction ε qui dépend de la couleur du véhicule ($\varepsilon = 0,25$ pour une voiture blanche et $\varepsilon = 0,95$ pour une voiture noire).

Le rayonnement de l'ensemble de l'atmosphère (Soleil exclu) est égal à celui d'un corps noir à la température de l'atmosphère. Ce rayonnement est absorbé en totalité par le véhicule, quelle que soit sa couleur. Les puissances reçues par rayonnement le sont essentiellement au niveau des surfaces horizontales (toit, capot) d'aire S .

On négligera les échanges thermiques au niveau de la face inférieure du véhicule. D'autre part, l'ensemble des surfaces (horizontales ou non) du véhicule, d'aires $S' > S$, se refroidit par rayonnement et par convection de l'air ambiant.

Pour les applications numériques, on prendra $S' = 2S$. Le coefficient de transfert thermique parietal par convection est noté h ; lorsque le véhicule est à l'arrêt, la convection naturelle est bien décrite par la relation $h = g|T_v - T_a|^{0,25}$ avec $g = 2,4$ SI, tandis qu'en circulation à vitesse v assez élevée, on adopte la relation $h = k.v^{0,6}$ avec $k = 8,7$ SI.

Le rayonnement émis par le véhicule latéralement (surface $S' - S$) est, lorsque le véhicule est en stationnement, compensé par les autres véhicules stationnés autour.

1. Déterminer la température d'un véhicule en stationnement en fonction de sa couleur.
2. Expliquer pourquoi le volant (noir) est en général plus chaud que le véhicule.
3. Mêmes questions pour un véhicule roulant à 90 km/h.

ex 6. Bilan radiatif de la Terre

On donne le rayon du Soleil $R_\odot = 7.10^8$ m, la distance moyenne Terre-Soleil $D = 1,5.10^{11}$ m, le rayon de la Terre $R_T = 6,4.10^6$ m et la température moyenne au niveau du sol $T_0 = 287$ K. On assimile le Soleil à un corps noir de température T_\odot .

1. La constante solaire $E_0 = 1,35 \text{ kW/m}^2$ est égale à la puissance reçue du Soleil par unité de surface normale aux rayons solaires, au sommet de l'atmosphère terrestre.
 - ▷ Exprimer la puissance P_\odot émise par le Soleil sur la sphère de rayon D . En déduire T_\odot . Comparer avec l'estimation de T_\odot qu'on peut obtenir à partir de la longueur d'onde λ_m du maximum de rayonnement solaire et commenter.

- ▷ Montrer que le flux solaire surfacique moyen à la surface de la Terre vaut $\varphi_{\odot} = E_0/4$. Interpréter qualitativement le facteur $1/4 < 1$.
- 2. L'albédo A d'une surface est le rapport du flux qu'elle diffuse sans l'absorber au flux qu'elle reçoit. Pour l'ensemble atmosphère-Terre, on $A = 0,34$. On suppose que l'atmosphère est transparente pour le rayonnement solaire.
 - ▷ En supposant l'équilibre radiatif au sol et supposant que l'atmosphère n'absorbe aucun rayonnement (visible comme infrarouge), montrer que le flux surfacique moyen du rayonnement émis par le sol vaut $\varphi = (1 - A)\varphi_{\odot}$. En déduire la température T_s au sol si on assimile son rayonnement à celui d'un corps noir et commenter.
 - ▷ On suppose désormais que seule une fraction $\alpha = 0,25$ du rayonnement infrarouge émis par le sol peut traverser l'atmosphère. On note φ_i le flux surfacique moyen rayonné par l'atmosphère vers le sol et φ_e le flux surfacique moyen rayonné par les couches atmosphériques élevées vers l'extérieur du système Terre-atmosphère. Écrire l'équilibre radiatif. En déduire la température au sol si on suppose $\varphi_i = \varphi_e$ (atmosphère isotherme).
- 3. Le bilan purement radiatif précédent ne tient pas compte de phénomènes comme l'évaporation de l'eau au niveau du sol et sa recondensation dans l'atmosphère. Cet effet est-il négligeable ? On donne l'enthalpie de vaporisation $L_v = 2,5.10^3$ kJ/kg de l'eau, sa masse volumique $\mu = 10^3$ kg/m³ et la hauteur moyenne $h = 2$ m des précipitations annuelles.

SOLUTIONS

La résolution des équations de l'exercice 'effet de serre' étant technique, je vous propose ici la méthode que j'ai suivie.

ex 1. Effet de serre

Les équations à résoudre :

Je note ϕ les flux infrarouges (émis par la plaque ou les vitres), φ les flux visibles se dirigeant vers la plaque et $\tilde{\varphi}$ les flux visibles se dirigeant vers le ciel. Alors, les différents bilans conduisent —pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$ — à¹⁰ :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} 2\phi_k &= \phi_{k-1} + \phi_{k+1} \\ \phi_{n+1} &= 0 \quad ; \phi_0 = \varphi_{cn} \end{cases} \\
 (2) \quad & \begin{cases} \varphi_k &= t.\varphi_{k+1} + r.\tilde{\varphi}_k \\ \tilde{\varphi}_{k+1} &= r.\varphi_{k+1} + t.\tilde{\varphi}_k \\ \tilde{\varphi}_1 &= 0 \quad ; \varphi_{n+1} = \varphi_S \end{cases}
 \end{aligned}$$

La dernière équation fait le lien entre les flux infrarouges et les flux visibles ; elle est le bilan radiatif pour la plaque (seul élément qui convertit ces flux les uns dans les autres !) :

$$(3) \quad \phi_1 + \varphi_1 = \varphi_{cn}$$

10. J'ai posé $t = 1 - r$.

La résolution :

Résolution de (1). Différentes méthodes s'offrent à nous. On peut résoudre pour $n = 1$ puis 2 et 3 et tenter de voir se dégager une forme générale dont on vérifiera ensuite qu'elle est bien solution. Il est toujours possible de tester des choses ; si on a du "sens physique", ou de la chance ça peut marcher. C'est ce qui m'est arrivé ! J'ai cherché des solutions affines : (de la forme $\phi_k = a.k + b$). On obtient alors

$$(1') \quad \phi_k = \varphi_{cn} \cdot \frac{n+1-k}{n+1}$$

De même, la résolution de (2) avec la même hypothèse a fonctionné : $\begin{cases} \varphi_k = \alpha.k + \beta \\ \tilde{\varphi}_k = \tilde{\alpha}.k + \tilde{\beta} \end{cases}$ et on obtient :

$$(2') \quad \begin{cases} \varphi_k = \frac{\varphi_S}{1 + (n-1)r} (1 + (k-2)r) \\ \tilde{\varphi}_{k+1} = \frac{r\varphi_S}{1 + (n-1)r} (k-1) \end{cases}$$

Enfin, usant de (3) on termine la résolution et obtient φ_{cn} :

$$(3') \quad \varphi_{cn} = \varphi_S \cdot \frac{(n+1)(1-r)}{1 + (n-1)r}$$

À partir de la 5^e vitre, l'augmentation relative de φ_{cn} est inférieure à 10%.

Pour info, une méthode générale de résolution est possible en écrivant chacune des équations sous la forme d'un système linéaire d'ordre 1 :

$$U_k = A.U_{k-1}$$

où U_k est une suite de vecteurs colonne — par exemple $\begin{pmatrix} \varphi_k \\ \tilde{\varphi}_k \end{pmatrix}$ pour le système (2) —, et A une matrice.

Alors la solution s'écrit toujours :

$$U_k = A^k.U_0$$

le problème se résume alors — ce qui n'est pas nécessairement drôle — à calculer les puissances de A .

Approfondir

1 Densité d'états électromagnétiques dans une cavité	14
1.1 Quels sont les états possibles ?	14
1.2 Quelle densité ?	14
2 De la densité d'énergie au flux hémisphérique	15
★ ★ ★	

1 Densité d'états électromagnétiques dans une cavité

Un petit complément qui concerne l'établissement de la loi de Planck. Une première étude a été faite dans le cours de physique statistique. Il s'agit ici de déterminer le nombre d'états électromagnétique dans une cavité. Le rayonnement E.R.T. ne dépendant pas de la forme de celle-ci, on raisonne sur une cavité parallélépipédique de côtés L_x , L_y , et L_z .

1.1 Quels sont les états possibles ?

La cavité étant supposée vide, le champ électromagnétique y vérifie l'équation de D'Alembert. Alors, un champ de pulsation $2\pi\nu$ à variables séparées (sont-ce les seules solutions ?) s'écrit :

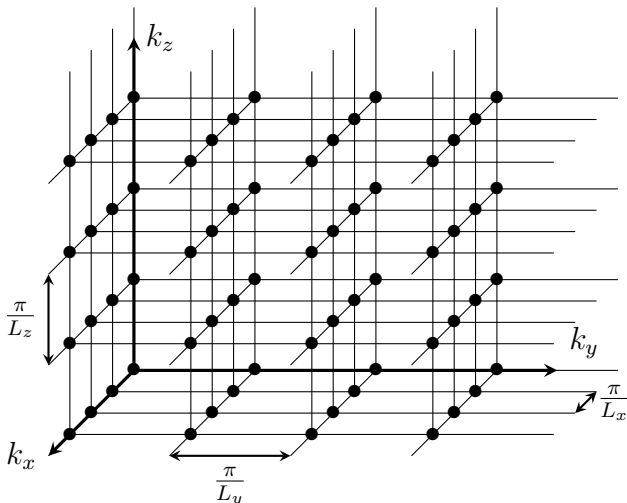
$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \cdot \sin\left(\frac{p\pi z}{L_z}\right) \cdot \cos(2\pi\nu t)$$

m , n et p étant des entiers non nuls.

Pour chaque choix du triplet (m, n, p) , il existe deux états du champs de polarisations indépendantes.

1.2 Quelle densité ?

Représentons les états possibles dans l'espace des vecteurs d'onde (k_x, k_y, k_z) :



On voit que l'ensemble des états est les nœuds d'un réseau dont il est facile d'extraire l'information cherchée. Chaque "maille élémentaire" contient $8 \cdot \frac{1}{8}$ nœud, chacun comptant pour deux états. Donc le volume (de cet espace !) occupé par un état est :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^3}{V}$$

où $V = L_x \cdot L_y \cdot L_z$ est le volume de la cavité.

On détermine ensuite le nombre d'états dont la fréquence est inférieure à une valeur ν donnée. Ces états sont ceux qui sont contenus dans la boule de rayon $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi\nu}{c}$. Pour des fréquences

grandes devant $\frac{c}{2L}$ —régime non quantique, approximation de “grande” cavité—, on évalue cette quantité en rapportant le volume de cette boule (seul le 8^e de celui-ci compte!) à celui d’un état. Il vient alors :

$$N(\text{états} < \nu) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi k^3}{\frac{\pi^3}{2V}} = \frac{k^3 V}{3\pi^2} = \frac{8\pi\nu^3 V}{3c^3}$$

On déduit finalement le nombre dN d’états entre ν et $\nu + d\nu$ par différentiation :

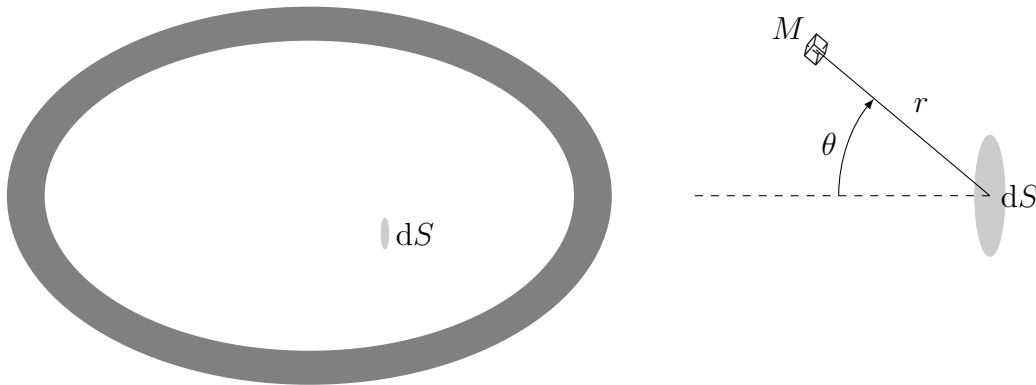
$$dN = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} \cdot V$$

Un des intérêts de cette démonstration est de montrer que la loi de Planck n’est pas entièrement quantique!

2 De la densité d’énergie au flux hémisphérique

Soit un surface (immatérielle) dS à l’intérieur d’une cavité en E.R.T. On s’intéresse au flux incident sur cette surface relativement à un intervalle spectral élémentaire $[\nu; \nu + d\nu]$. Pour cela, on va déterminer la part $\Delta\mathcal{E}$ d’énergie — relative à $[\nu; \nu + d\nu]$ — qu’elle reçoit pendant une durée Δt .

En chaque point M qui contribue — c’est-à-dire un point situé dans le demi-espace qui fait face à dS et qui est à une distance inférieure à $c\Delta t$ —, on définit un élément de volume $d\tau$. Celui-ci contient une énergie $u d\tau$ par unité de fréquence. L’isotropie du rayonnement indique que seule une fraction $\frac{d\Omega}{4\pi}$ — où $d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$ est l’angle solide sous lequel, de M , on voit dS — de cette énergie se dirige vers dS .



Alors,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \iiint_{M \in \text{demi-boule de rayon } c\Delta t} u d\tau \frac{d\Omega}{4\pi} \\ &= \frac{u dS}{4\pi} \cdot \int_{r=0}^{c\Delta t} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \frac{\cos \theta}{r^2} \\ &= \frac{u dS}{4\pi} \cdot c\Delta t \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi \\ &= \frac{uc}{4} dS \Delta t \end{aligned}$$

On en déduit le flux : $\phi \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathcal{E}}{dS \Delta t}$ soit $\boxed{\phi = \frac{uc}{4}}$.