

# Optique Physique

Préparation à l'agrégation interne de physique

<b>I Posséder les bases</b>	
1 La diffraction : premier contact	3
2 Quelques exemples	4
3 Rôle dans la formation des images	5
Exercices	5
<b>II Acquérir l'essentiel</b>	
1 Fonction de transparence	7
2 Diffraction de Fraunhofer	7
Exercices	9
<b>III Approfondir</b>	
1 Principe d'Huygens-Fresnel	13
2 Approximation de Fraunhofer	14
3 Applications de la diffraction de Fraunhofer	16
Exercices	20



---

## Posséder les bases

---

<b>1 La diffraction : premier contact</b>	<b>3</b>
<b>2 Quelques exemples</b>	<b>4</b>
<b>3 Rôle dans la formation des images</b>	<b>5</b>
<b>Exercices</b>	<b>5</b>

★      ★      ★

L'objet de ce chapitre est essentiellement la diffraction. Plus qu'un phénomène, la diffraction est une théorie. Alors que l'optique ondulatoire (séance 2) vient seulement raconter qu'une grandeur vibre le long des rayons lumineux, la théorie de la diffraction a pour objet de décrire *comment se propage l'onde lumineuse*.

### 1 La diffraction : premier contact

La lumière ne se propage pas selon les lois de l'optique géométrique. L'aspect le plus connu de cet écart à la théorie géométrique est l'élargissement de tout faisceau lumineux — transversalement fini — au cours de sa propagation.

Ce phénomène d'élargissement est d'autant plus perceptible que le faisceau est limité transversalement. En ordre de grandeur, l'ouverture angulaire  $\theta$  d'un faisceau, de longueur d'onde  $\lambda$ , dont l'extension transversale est  $d$  vérifie :

$$\theta \sim \frac{\lambda}{d}$$

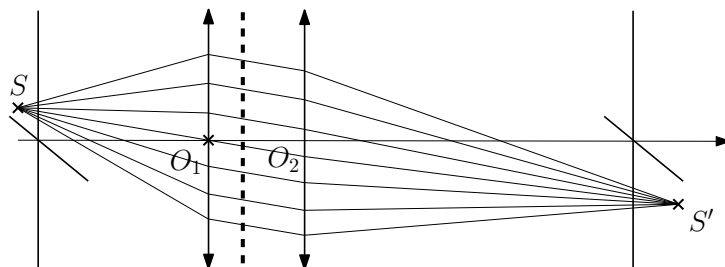
On entend parfois dire que la diffraction intervient quand la dimension des ouvertures rencontrées par la lumière est comparable à la longueur d'onde. Ceci est manifestement faux :

- ▷ d'une part, parce que la formule ci-dessus indique que si  $d \simeq 10\lambda$ ,  $\theta \sim 0,1$  rad soit près de  $6^\circ$ . Avec  $d \simeq \lambda$ , on serait déjà à 1 rad soit  $60^\circ$ .
- ▷ d'autre part, parce que la formule ci-dessus n'est plus valide si  $d \sim \lambda$ . En effet, à cette échelle l'interaction entre l'onde et le matériau qui tente d'en limiter l'extension intervient. Il n'y a plus de traitement simple possible ; cela est alors une affaire d'électromagnétisme.

Il serait plus juste de dire que l'optique géométrique n'est rigoureusement vraie qu'à la limite  $\frac{\lambda}{d} \rightarrow 0$  et qu'en dehors de ce cas — qui n'existe pas — la diffraction est plus ou moins perceptible. Autrement dit, il y a toujours diffraction ; toute la question d'en tenir compte ou pas revient à décider à quelle précision on veut travailler.

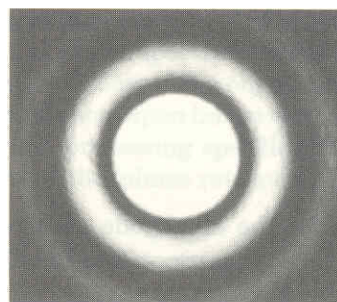
## 2 Quelques exemples

En pratique, on étudie beaucoup la diffraction résultant de la traversée d'un plan contenant une ouverture donnée. Le montage classique — dit de Fraunhofer — est le suivant :



On travaille à l'infini en amont et en aval : source à l'infini (rôle de la première lentille) et observation à l'infini (rôle de la deuxième lentille ; voir interférences). Parfois on se contente de disposer la source « loin », ou d'utiliser une source qui délivre un faisceau quasi-parallèle (laser) ; et d'observer « loin »...

La diffraction par une ouverture circulaire produit une figure, dite d'Airy (ci-contre).



Le diamètre angulaire  $\theta$  de la tache centrale est :

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

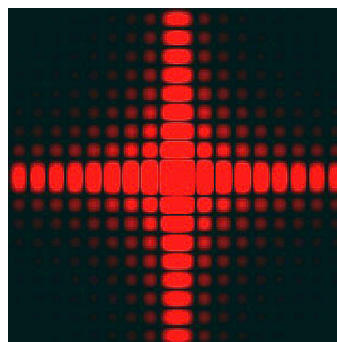
$r$  étant le rayon de l'ouverture.

La diffraction par une ouverture rectangulaire produit une figure, semblable à celle représentée ci-contre.

La largeur angulaire  $\theta$  de la tache centrale est :

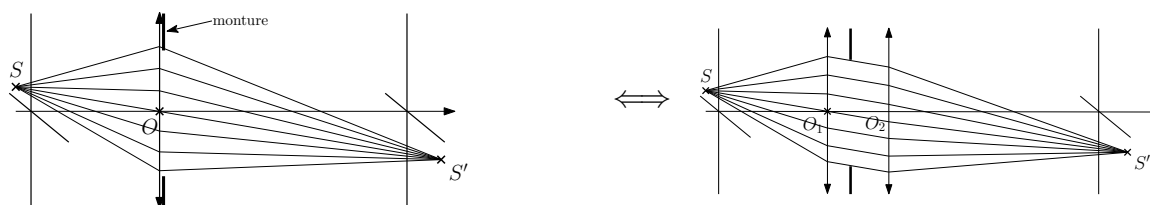
$$\theta = 2 \cdot \frac{\lambda}{d}$$

$d$  étant le côté de l'ouverture.



### 3 Rôle dans la formation des images

Fraunhofer a montré que l'image, par une lentille, d'un objet ponctuel n'est pas un point mais une tache de diffraction, *centrée* sur l'image géométrique de l'objet, et identique à celle que donnerait la *monture* de la lentille dans le dispositif vu au paragraphe 2 page 4.



Ainsi, le problème de la formation des images, de leur qualité (résolution!) est une affaire de diffraction<sup>1</sup>.

En astronomie, l'emploi d'optiques de grand diamètre permet, conjointement, d'obtenir des images *plus lumineuses* et *mieux résolues*.

---

## EXERCICES

---

### ex 1. Imagerie des exoplanètes

*adapté de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret*

On appelle *exoplanète* une planète en orbite autour d'une étoile autre que le Soleil. Actuellement, la détection des exoplanètes se fait principalement par des méthodes indirectes : vélocimétrie Doppler utilisant la spectrométrie haute résolution, détection des transits par photométrie haute précision, mise à profit du phénomène de lentille gravitationnelle...

Les visualisations directes depuis la surface de la Terre sont très rares et ne concernent pas les planètes ayant des caractéristiques similaires à celles de la Terre. La première image d'exoplanète fût réalisée en 2004 par le télescope VLT (*Very Large Telescope*) de l'ESO (*European Southern Observatory*).

Il s'agit de la planète 2M1207b, de taille comparable à celle de Jupiter mais cinq fois plus massive, en orbite autour d'une étoile de type naine brune, le rayon de l'orbite étant environ deux fois celui de Neptune autour du Soleil.

Le système 2M1207 est situé à une distance de 230 années-lumière de notre système solaire.

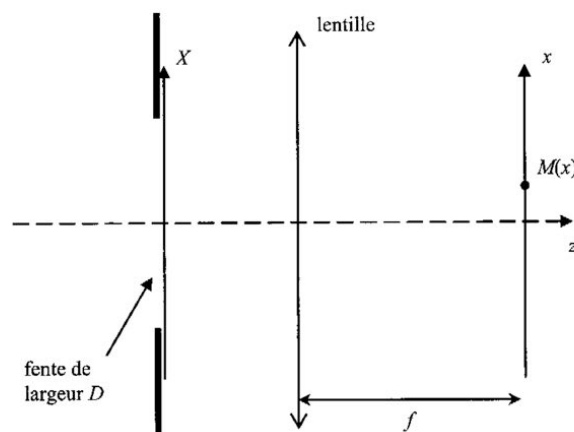
---

1. Une fois traitées les aberrations...



Pour améliorer la résolution, il est avantageux d'aller dans l'espace afin de s'affranchir des turbulences atmosphériques. C'est notamment le cas du projet *Exoplanet Characterisation Observatory* (EChO) de l'agence spatiale européenne (ESA), télescope spatial dont l'envoi est prévu entre 2020 et 2022 vers le point de Lagrange L2. À beaucoup plus long terme, des projets futuristes visent à envoyer un ensemble de télescopes gravitant autour de la Terre. Ce problème propose d'estimer la résolution que permettrait un tel réseau de télescopes.

On peut montrer que le traitement des signaux issus de l'interférence entre les ondes reçues par un ensemble de télescopes distants de  $D$  permet d'obtenir des images avec une résolution équivalente à celle d'une lentille de diamètre  $D$ . On raisonne donc sur le montage simplifié suivant, où le faisceau est diaphragmé non pas par la lentille elle-même, mais par une fente de largeur  $D$ . Dans un premier temps, la fente est éclairée par une onde émise par une source ponctuelle monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  située à l'infini sur l'axe optique.



1. Donner un ordre de grandeur de la largeur  $\Delta x$  de la tache-image de la source dans le plan focal.  
On considère maintenant deux points sources, à l'infini, séparés d'un angle  $\alpha$ .
2. À quelle condition sur  $\alpha$  est-il possible de distinguer les deux images ?
3. Montrer, à l'aide d'une application numérique, qu'un ensemble de télescopes gravitant autour de la Terre pourrait permettre de distinguer les continents et les océans des exoplanètes situées dans un rayon de 100 parsecs ( $1 \text{ pc} \simeq 3,3 \text{ années-lumière}$ ) autour du système solaire.

---

## Acquérir l'essentiel

---

<b>1 Fonction de transparence</b>	<b>7</b>
<b>2 Diffraction de Fraunhofer</b>	<b>7</b>
2.1 Une machine à calculer des transformées de Fourier . . . . .	7
2.2 Diffraction par une transparence harmonique . . . . .	8
2.3 Diffraction par une transparence périodique . . . . .	8
<b>Exercices</b>	<b>9</b>

★      ★      ★

### 1 Fonction de transparence

La fonction de transparence joue un rôle fondamental dans la diffraction par des objets plans. Elle est définie comme le rapport, en chaque point du plan diffractant, de l'amplitude de l'onde diffractée à l'amplitude de l'onde incidente. Elle pourrait être appelée *coefficient de transmission*.

Pour les ouvertures vues dans la partie précédente, qui fonctionnent en *tout ou rien*, elle vaut 1 en les points de l'ouverture et 0 ailleurs.

De manière générale, toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 sont possibles (transparence partielle), voire même les valeurs complexes (l'objet diffractant pouvant déphaser l'onde).

Dans toute la suite cette fonction sera notée  $t$ .

### 2 Diffraction de Fraunhofer

#### 2.1 Une machine à calculer des transformées de Fourier

On peut démontrer qu'avec un dispositif de Fraunhofer (voir paragraphe 2 page 4), l'amplitude lumineuse dans le plan d'observation est proportionnelle à la transformée de Fourier (bidimensionnelle) de la fonction de transparence. Cette dernière étant une fonction de la position, les fréquences présentes dans le spectre déterminé par cette transformée de Fourier sont des *fréquences spatiales*.

Plus précisément, si l'onde incidente est normale au plan diffractant et si  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire, l'amplitude diffractée dans la direction  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  est :

$$a(\vec{u}) = K \hat{t} \left( \frac{u_x}{\lambda}, \frac{u_y}{\lambda} \right)$$

Plus généralement, si l'onde incidente est dirigée par le vecteur unitaire  $\vec{u}_0$  :

$$a(\vec{u}) = K \hat{t} \left( \frac{u_x - u_{x0}}{\lambda}, \frac{u_y - u_{y0}}{\lambda} \right)$$

Le programme de CPGE (essentiellement la filière PC) propose de prédire les figures de diffraction par superposition, connaissant la figure donnée par une transparence sinusoïdale pure. Cette technique est particulièrement efficace quand le spectre de  $t$  est discret et qu'on ne s'intéresse que de loin aux valeurs d'intensité.

## 2.2 Diffraction par une transparence harmonique

Soit la fonction de transparence suivante, de fréquence *spatiale*  $\sigma$  :

$$t(X, Y) = a_0 \cdot \cos(2\pi\sigma X + \varphi)$$

$X$  et  $Y$  étant des coordonnées dans le plan diffractant.

Son spectre est composé de deux raies : l'une de fréquence  $+\sigma$  en  $X$ , et de fréquence nulle en  $Y$ , et l'autre de fréquence  $-\sigma$  en  $X$ , et de fréquence nulle en  $Y$ .

En effet <sup>2</sup>,  $2t(X, Y) = a_0 \cdot e^{2i\pi[(+\sigma)X+(0)Y]} + a_0 \cdot e^{2i\pi[(-\sigma)X+(0)Y]}$ .

Ainsi, en incidence normale, l'amplitude  $a(\vec{u})$  est non nulle si :

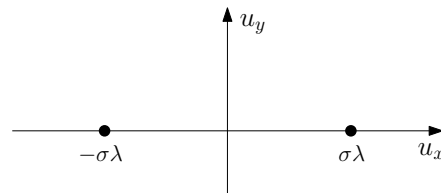
$$\frac{u_x}{\lambda} = +\sigma \text{ et } \frac{u_y}{\lambda} = 0 \quad \text{OU} \quad \frac{u_x}{\lambda} = -\sigma \text{ et } \frac{u_y}{\lambda} = 0$$

C'est-à-dire si :

$$(u_x, u_y) = (\sigma\lambda, 0) \quad \text{OU} \quad (u_x, u_y) = (-\sigma\lambda, 0)$$

Avec une telle transparence, la représentation de  $a(\vec{u})$  est telle que ci-contre.

L'intensité de ces « spots » est proportionnelle à  $a_0^2$ .



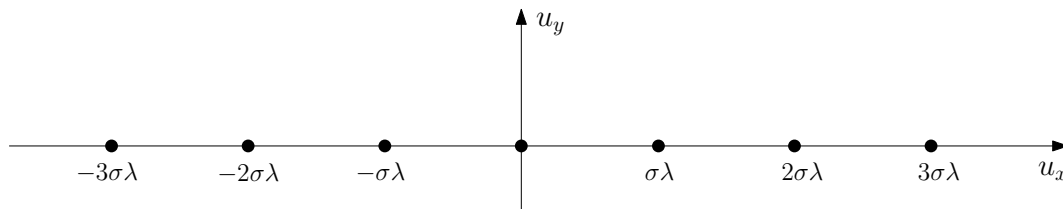
## 2.3 Diffraction par une transparence périodique

Dans ce cas,  $t$  se décompose en série de Fourier :

$$t(X, Y) = \langle t \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi n\sigma X + \varphi_n)$$

Son spectre est composé d'une raie de fréquences nulles et de raies régulièrement espacées de fréquences  $(p\sigma, 0)$ ,  $p \in \mathbb{Z}^*$ .

En incidence normale, cela donne la représentation suivante de l'amplitude diffractée :




---

2. C'est la formule d'Euler...



On peut utiliser ce formalisme pour étudier les réseaux (voir cours d'optique ondulatoire, 2<sup>e</sup> séance). En effet, un réseau n'est ni plus ni moins qu'un plan de transparence périodique (la période étant appelée *pas* du réseau).

En incidence quelconque  $\vec{u}_0 \neq \vec{0}$ , en remarquant <sup>a</sup> que

$$u_x - u_{x0} = \sin i - \sin i_0,$$

on retrouve la formule fondamentale d'un réseau de pas  $\frac{1}{\sigma}$  :

$$\sin i - \sin i_0 = p\sigma\lambda, \quad p \in \mathbb{Z}$$

*a.*  $i$  et  $i_0$  définis de la même manière que pour l'étude des réseaux...

## EXERCICES

### ex 1. Les réseaux de Dammann

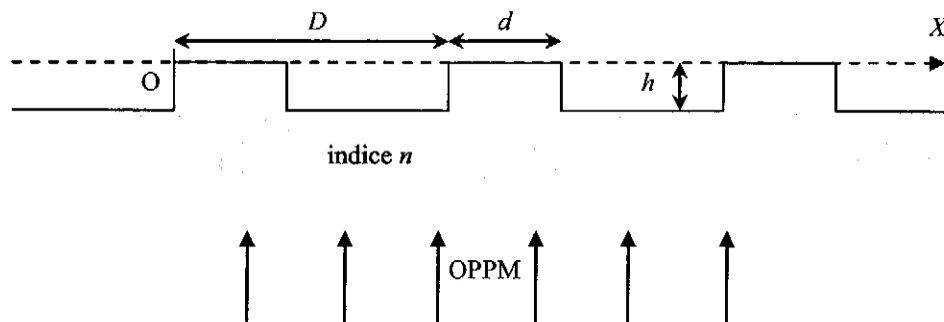
*Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret*

Dans certaines applications, on peut être amené à devoir séparer un unique faisceau laser en  $N$  faisceaux de même intensité. Cette séparation de faisceaux peut être réalisée à l'aide d'un réseau de phase. Il existe plusieurs type de réseaux possibles ; ce problème s'intéresse aux réseaux les plus simples à fabriquer en pratique : les réseaux de Dammann.

Un réseau de phase est un réseau complètement transparent : il agit uniquement sur la phase de l'onde qui le traverse. En notant  $D$  la largeur d'un motif, le réseau de Dammann permettant de créer trois faisceaux de même intensité à partir d'un seul possède un motif ayant :

- ▷ une largeur  $D - d$  introduisant un déphasage uniforme  $\varphi_0$ .
- ▷ une largeur  $d$  introduisant un déphasage uniforme  $\varphi_0 + \pi$ .

Une réalisation simple d'un tel réseau est représentée sur la figure suivante :



Le réseau est éclairé par une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de longueur d'onde  $\lambda \ll D$  arrivant en incidence normale.

1. Quelle doit-être la valeur de  $h$  pour que ce réseau corresponde à un réseau de Dammann ? Faire l'application numérique pour un réseau en arséniure de Gallium (AsGa) d'indice 3,3 pour la longueur d'onde  $4,6 \mu\text{m}$  (moyen infrarouge).

Dans toute la suite du problème on choisit la convention d'une dépendance temporelle en  $\exp(+i\omega t)$  des champs en notation complexe.

2. Comment s'écrit le facteur de transmission complexe  $t(X)$  du réseau dans l'hypothèse où  $\varphi_0 = 0$  ? Expliquer pourquoi cette hypothèse n'est pas restrictive.

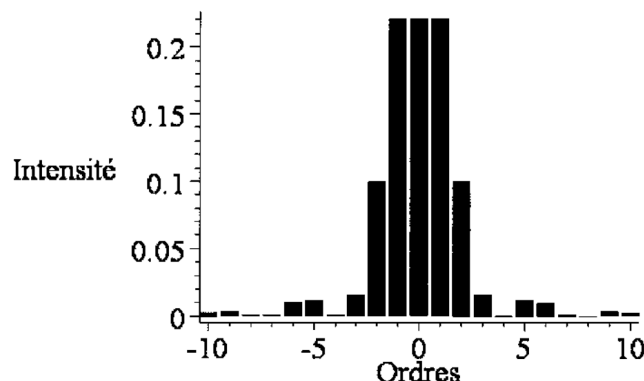
On montre (résultat admis) que la décomposition en série de Fourier de  $t(X)$  s'écrit :

$$t(X) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_K \exp\left(-iK \frac{2\pi}{D} X\right)$$

avec,

$$C_0 = 1 - 2\frac{d}{D} \quad \text{et} \quad C_K = -\frac{2}{K\pi} \sin\left(K\pi \frac{d}{D}\right) \exp\left(iK\pi \frac{d}{D}\right) \quad \text{pour } K \neq 0$$

3. Montrer que l'onde en sortie du réseau peut être décomposée en somme d'ondes planes. Pour chaque onde plane, préciser l'angle que fait sa direction de propagation par rapport à la normale au réseau. Combien y a-t-il d'ondes planes au total ?
4. Montrer qu'il existe deux valeurs possibles du rapport  $\frac{d}{D}$ , que l'on calculera, pour que les trois ondes centrales émergeant du réseau possèdent la même intensité.
5. Calculer la fraction de puissance lumineuse contenue dans ces trois ondes par rapport à l'onde incidente, fraction appelée « efficacité de diffraction » du réseau de Dammann.
6. Vérifier le résultat précédent à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'intensité de chaque ordre divisée par l'intensité de l'onde incidente pour une des valeurs trouvée à la question 4.



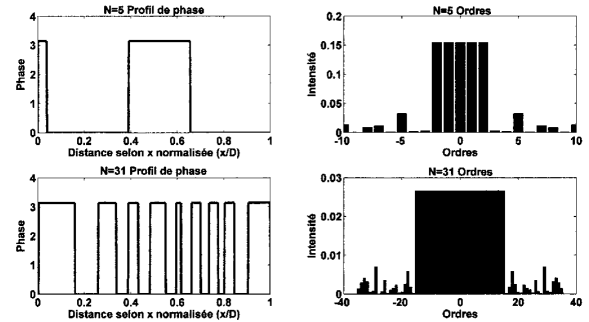
On désire fabriquer un réseau de Dammann à deux dimensions créant neuf faisceaux de même intensité à partir d'un seul.

7. En combinant deux réseaux de Dammann à une dimension, dessiner une structure possible. On pourra représenter un motif du réseau à deux dimensions de la façon suivante : surface blanche pour un déphasage  $2\varphi_0$  et grise pour un déphasage  $2\varphi_0 + \pi$ .

On place derrière ce réseau une lentille convergente de focale  $f$  et l'on positionne un écran dans le plan focal image de la lentille. On considère  $D \gg \lambda$  pour se placer dans les conditions de Gauss.

8. Donner l'allure de la répartition d'intensité à l'écran. Pourquoi le plan focal image de la lentille est-il appelé « plan de Fourier » ?

On peut complexifier le motif d'un réseau de Dammann de manière à ce qu'il y ait  $N > 3$  faisceaux de même intensité. À titre d'exemple, on peut voir sur les graphes suivants les cas  $N = 5$  et  $N = 31$ , avec le profil de phase engendré par le réseau (0 ou  $\pi$ ) sur un motif (de largeur  $D$ ) ainsi que la répartition d'intensité sur les différents ordres de diffraction. Ces résultats sont tirés de la thèse de Guillaume Bloom, soutenue en février 2012.





# Approfondir

<b>1 Principe d'Huygens-Fresnel</b>	<b>13</b>
1.1 Énoncé . . . . .	13
1.2 Lien avec l'équation de D'Alembert . . . . .	13
<b>2 Approximation de Fraunhofer</b>	<b>14</b>
2.1 Expression de l'amplitude diffractée . . . . .	14
2.2 Quelques propriétés . . . . .	15
<b>3 Applications de la diffraction de Fraunhofer</b>	<b>16</b>
3.1 Montage de base . . . . .	16
3.2 Quelques exemples de filtrage . . . . .	17
<b>Exercices</b>	<b>20</b>

\*      \*      \*

## 1 Principe d'Huygens-Fresnel

### 1.1 Énoncé

Près de deux cents ans séparent Huygens (XVII<sup>e</sup>) de Fresnel (XIX<sup>e</sup>) et pourtant leurs noms sont associés à un principe. Celui-ci réunit des lois identifiées par ces deux grands physiciens :

**Huygens :** La lumière se propage de proche en proche. Chaque élément d'une surface atteinte par une onde lumineuse se comporte comme une source secondaire émettant des ondelettes sphériques.

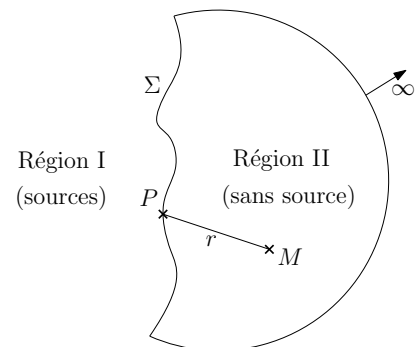
**Fresnel :** L'amplitude émise par une source secondaire est proportionnelle à l'aire de celle-ci et à l'amplitude de l'onde incidente ; ainsi, toutes les ondes secondaires sont corrélées. L'intensité en un point résulte alors de l'interférence entre ces ondes.

### 1.2 Lien avec l'équation de D'Alembert

Par une résolution purement formelle de l'équation de D'Alembert, on peut montrer qu'en tout point  $M$  d'une région sans source s'étendant à l'infini (voir schéma), l'amplitude lumineuse s'écrit, si  $r \gg \lambda$  :

$$\underline{a}(M, t) = \int_{P \in \Sigma} Q \cdot \underline{a}_0(P) \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \cdot d\Sigma$$

$Q$  est communément appelé *facteur d'inclinaison*<sup>3</sup>.



3. Je ne m'étends pas plus ; vous trouverez plus de détails à son sujet dans la littérature...

Le lien avec le principe d'Huygens-Fresnel est saisissant : on voit dans cette expression la superposition des amplitudes (interférences) d'ondes sphériques  $\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$  issues des points  $P$  d'une surface atteinte par une onde lumineuse.

**Remarque :** Si la surface  $\Sigma$  est matérielle, il faut comprendre  $P \in \Sigma$  côté région II. Ce que cette démonstration ne contient pas et qui se trouve dans le principe d'Huygens-Fresnel est la proportionnalité de  $\underline{a}_0(P \text{ côté II})$  à  $\underline{a}_0(P \text{ côté I})$ .

## 2 Approximation de Fraunhofer

### 2.1 Expression de l'amplitude diffractée

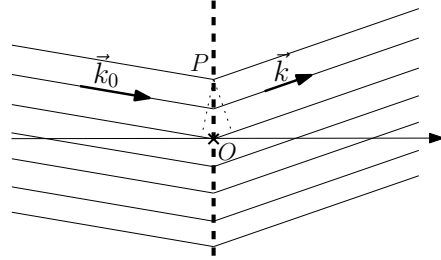
Dans l'approximation de Fraunhofer, on s'intéresse à la diffraction à l'infini par une ouverture plane.

Ainsi, :

▷  $\Sigma$  est un plan,

▷ côté I :  $\underline{a}_0(P) = \underline{a}_0(O) \cdot e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{OP}}$

▷  $Q \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \simeq \frac{Q e^{i(\omega t - kr_0)}}{r_0} \cdot e^{i\vec{k} \cdot \vec{OP}}$   
 $O$  étant un point quelconque de  $\Sigma$ .



Enfin, la transmission par  $\Sigma$  s'écrit :

$$\underline{a}_0(P) = t(P) \cdot \underline{a}_0(P \text{ côté I})$$

**Remarque :** Cette proportionnalité suppose une interaction « très faible » entre l'onde et la surface ainsi qu'une échelle des variations de  $t$  très supérieure à la longueur d'onde.

Finalement, l'amplitude diffractée dans la direction  $\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$  s'écrit :

$$\underline{a}(\vec{k}) = K \cdot \int_{P \in \Sigma} t(P) \cdot e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \vec{OP}} d\Sigma$$

$K$  étant quasiment constant selon les directions intéressantes.

On reconnaît une transformée de Fourier : l'amplitude diffractée est la transformée de Fourier de la fonction de transparence (translatée dans la direction de l'onde incidente...).

Alors, comme avec toute transformée de Fourier, on a (c'est une inégalité du type Heisenberg, mais on l'écrit en ordre de grandeur) :

$$\Delta X \cdot \Delta k_X \sim 2\pi$$

$\Delta X$  désignant la largeur typique des variations de  $t$  dans la direction  $X$ ,  $\Delta k_X$  désignant l'extension typique dans l'espace des  $k_X$ . Ceci n'est rien d'autre que la relation d'ordre de grandeur vue dans la partie « Posséder les bases », paragraphe 1, page 3.

## 2.2 Quelques propriétés

L'amplitude diffractée possède toutes les propriétés des transformées de Fourier. En voici quelques unes importantes :

### Théorème de Babinet

Ce théorème est relatif à des ouvertures complémentaires. Par définition, l'ouverture complémentaire d'une ouverture de transparence  $t$  a une transparence  $t_c$  telle que :

$$\forall P \in \Sigma, t(P) + t_c(P) = 1$$

On en déduit que  $a(\vec{k}) + a_c(\vec{k}) = K \cdot \delta(\vec{k} - \vec{k}_0)$

Donc, en dehors de la direction  $\vec{k} = \vec{k}_0$ ,

$$I_c(\vec{k}) = I(\vec{k})$$

Deux ouvertures complémentaires ont, sauf en le point image de la source, des figures de diffraction identiques. Ce résultat constitue le théorème de Babinet.

### Déplacement de la source

$$\vec{k}_0 \rightarrow \vec{k}_0 + \Delta\vec{k} \implies a(\vec{k}) \rightarrow a(\vec{k} - \Delta\vec{k})$$

La figure de diffraction suit l'image de la source...

### Translation de l'ouverture

$$t_{\text{trans}}(P) = t(P - P_0) \implies a_{\text{trans}}(\vec{k}) = a(\vec{k}) \cdot e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot O\vec{P}_0} \implies I_{\text{trans}}(\vec{k}) = I(\vec{k})$$

### Diffraction par plusieurs ouvertures

Plus précisément, on s'intéresse ici à la diffraction par une ouverture qui est constituée de la répétition d'un même motif :

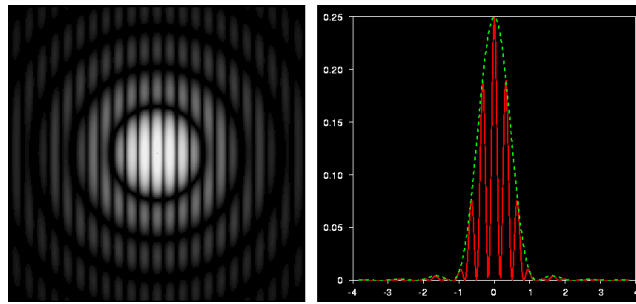
$$\forall P \in \Sigma, t(P) = \sum_{n=1}^N t_0(P - P_n)$$

$t_0$  est la transparence d'un motif,  $P_n$  le point en lequel est translatée la  $n^{\text{e}}$  répétition du motif,  $N$  est le nombre de motifs et  $t$  la transparence de l'ouverture ainsi définie.

Alors, en utilisant le résultat relatif à la translation d'une ouverture, on obtient :

$$I(\vec{k}) = \underbrace{I_0(\vec{k})}_{\substack{\text{diffraction} \\ \text{par un motif}}} \times \underbrace{\left| \sum_{n=1}^N e^{i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot O\vec{P}_n} \right|^2}_{\text{interférence entre les motifs}}$$

La diffraction « module » la figure d'interférences...



Cas de 2 trous d'Young...

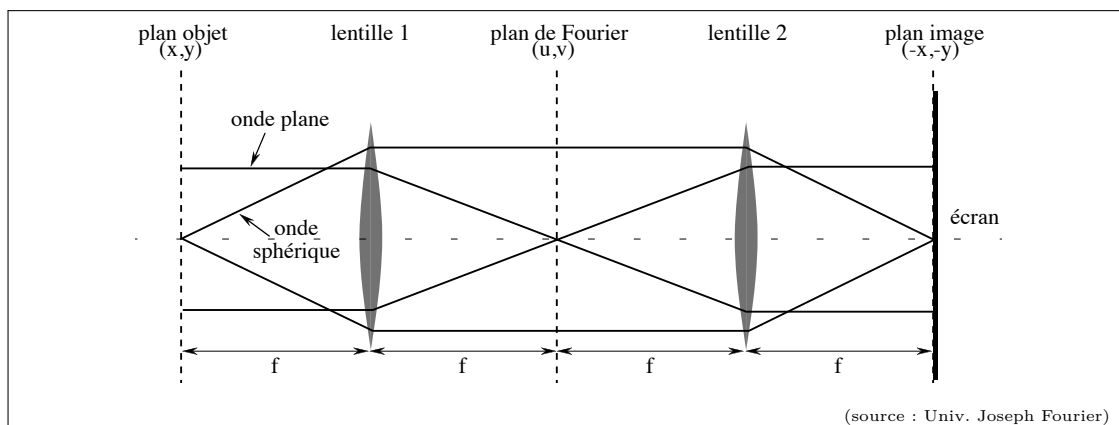
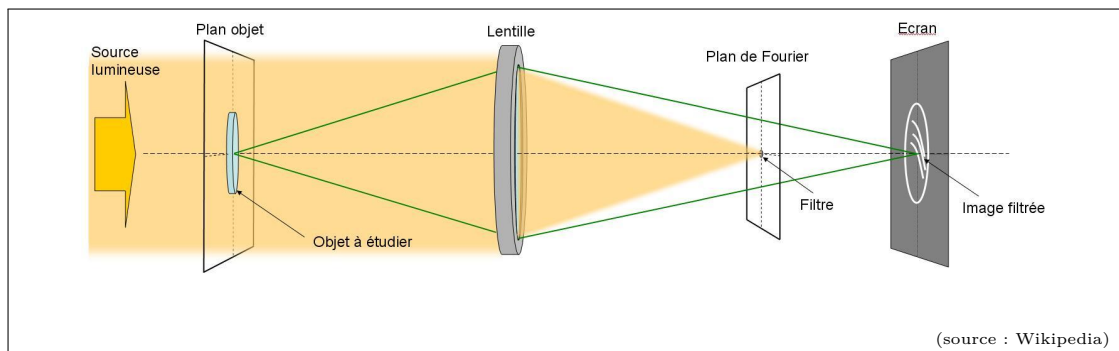
source : univ. Nice

### 3 Applications de la diffraction de Fraunhofer

Ce qui apparaît dans ce paragraphe fait partie de ce que l'on appelle communément « optique de Fourier ». Un dispositif de Fraunhofer « calcule » des transformées de Fourier à la vitesse de la lumière ! Une figure de diffraction est, dans ce cadre, une représentation du *spectre* de la fonction de transparence de l'objet qui diffracte. Et si on ... filtrait ?

#### 3.1 Montage de base

Pour réaliser un filtrage optique, on utilise un montage à 1 ou 2 lentilles :



Le filtre est disposé dans le plan dit de Fourier, plan contenant l'image de la source. Ce filtre modifie l'importance de certaines *raies spectrales* (attention, ce sont des fréquences spatiales...) et l'image vue sur l'écran n'est pas celle de l'objet, mais le résultat du filtrage de celle-ci.



### 3.2 Quelques exemples de filtrage

#### Expérience d'Abbe (1893) et Porter(1906)

Une expérience qui démontre le filtrage. L'objet utilisé est une grille régulière. Ce système périodique a un spectre très simple fait d'un fondamental et de ses multiples.

En filtrant à l'aide d'une fente, on supprime les variations de transparence dans l'une ou l'autre des directions.

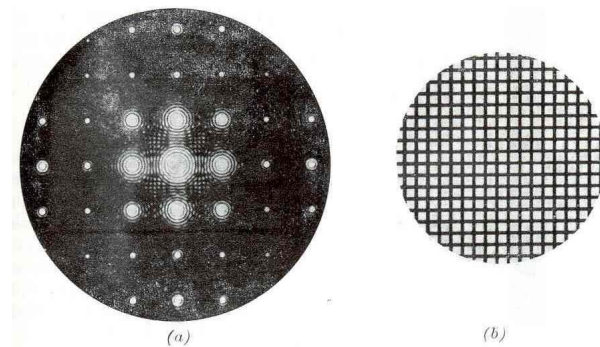


FIG. 7-2. — a) Spectre non modifié d'une grille. b) Image correspondante.

source : Yann Vails (Univ. Orléans)

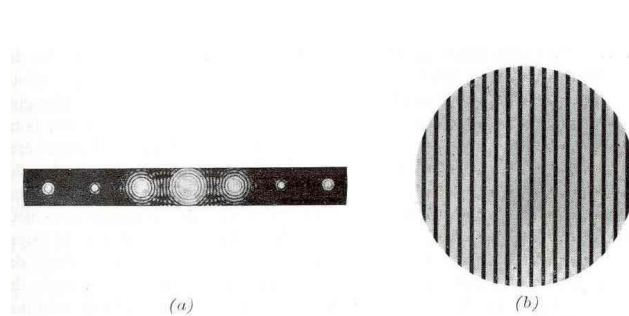


FIG. 7-3. — Grille filtrée à l'aide d'une fente horizontale. a) Le spectre; b) l'image.

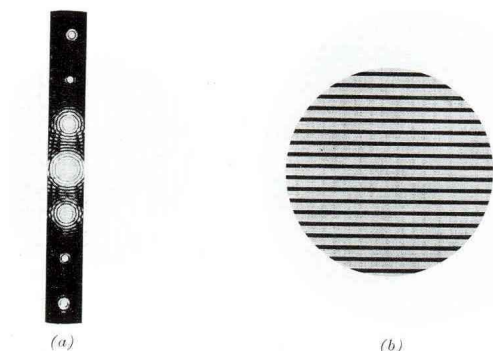


FIG. 7-4. — Grille filtrée à l'aide d'une fente verticale. a) Le spectre; b) l'image.

source : Yann Vails (Univ. Orléans)

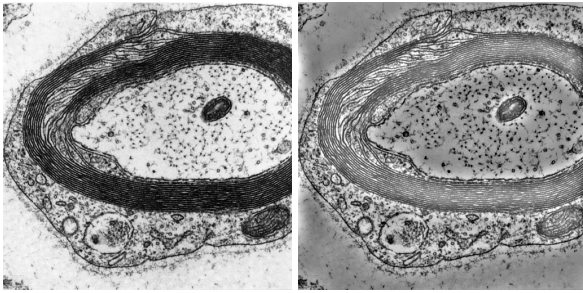
#### Strioscopie

L'idée de la strioscopie est d'augmenter le contraste d'une image en enlevant la luminosité moyenne de celle-ci. Cette luminosité provient de la transparence de l'objet. Un objet très transparent va avoir une image très claire, alors qu'un objet peu transparent aura une image très sombre. Dans ces deux situations, les variations de transparence de l'objet, si elles sont relativement modestes, ne seront pas visibles.

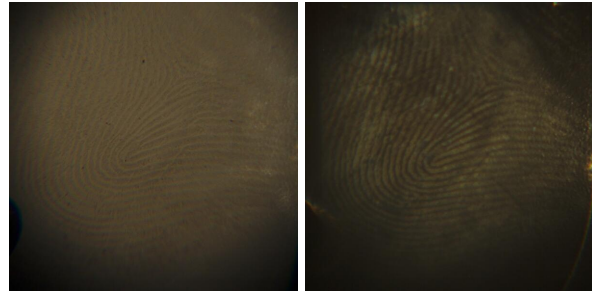
En filtrant la transparence moyenne, c'est-à-dire les fréquences très basses, on observera sur l'écran une image n'ayant conservée que les variations de luminosité.

Les très basses fréquences étant au centre<sup>4</sup> du plan de Fourier, il suffit de cacher cette partie (par exemple avec une pointe de crayon) pour obtenir l'effet souhaité.

4. plus précisément en le point image de la source.



source : Yves Usson (UJF)



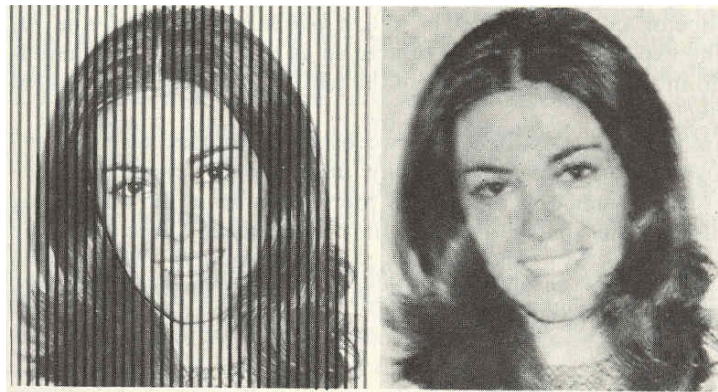
source : F. Perrin (2018)

Sur le premier couple d'images ci-dessus, vous pouvez remarquer que dans les zones très claires ou très foncées de l'image initiale, on a une moins bonne visibilité des détails que dans l'image filtrée. Le deuxième couple d'image tente de montrer comment cette technique peut révéler une empreinte digitale sur une plaque de verre. Je suis assez déçu de ce que j'ai obtenu, même si on peut quand même remarquer une amélioration du contraste. Je ferai une autre tentative prochainement...

### Détramage

Le détramage consiste lui en un filtrage passe-bas. Imaginez une photo comme on les trouve dans les journaux : imprimées selon une trame de pas donné ; différentes densités de points donnent différents niveaux de gris. Cette trame est en général très fine relativement aux détails de l'image (sinon elle n'est pas adaptée et on ne reconnaît pas ce qu'il y a à voir sur l'image), donc elle correspond aux fréquences hautes de la fonction de transparence.

En disposant, dans le plan de Fourier, un diaphragme à iris et en réglant de manière adéquat son diamètre, on peut espérer supprimer du spectre ces fréquences dont la présence est causée par la trame et conserver les fréquences qui sont des variations propres à l'image.



source : Yann Vails (Univ. Orléans)

Sur l'image ci-dessus, on constate que des détails de l'image (sourcils notamment) ont subi le filtrage. C'est ce qui arrive avec une trame grossière : il y a des fréquences sur l'image qui sont semblables à celle de la trame et qui disparaissent avec elle... Ici, comme la trame est verticale, on aurait pu filtrer avec une fente plutôt qu'un diaphragme ; ainsi, la perte de détail n'aurait eu lieu que horizontalement...

Sur l'exemple ci-contre, le résultat est nettement plus convaincant. À droite des images vous est proposée une photo du plan de Fourier.

La trame est suffisamment fine pour que le filtre puisse supprimer son spectre sans toucher à celui de l'image. Tout cela est très similaire à ce que vous avez vu en matière d'échantillonnage (cours d'électrocinétique); le théorème de Shannon permet de choisir une finesse de trame convenable...

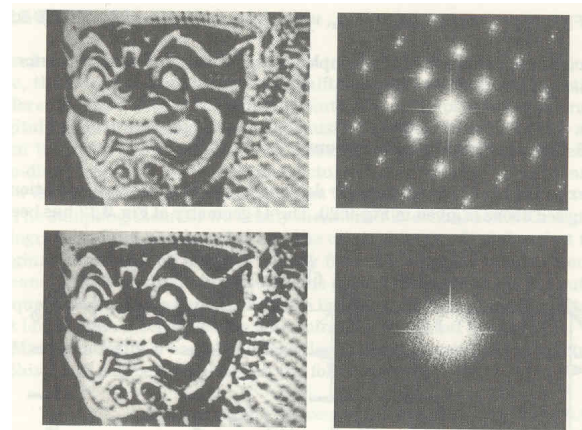


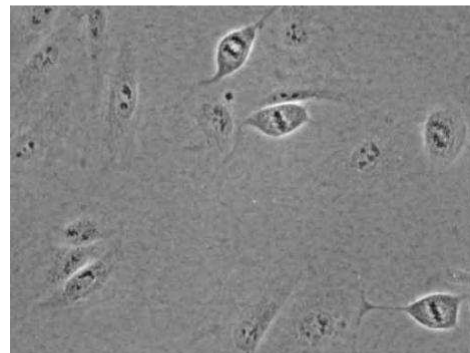
Fig. 9.21. Raster elimination of a halftone image by low pass filtering.  
source : Yann Vails (Univ. Orléans)

### Contraste de Phase (Zernike)

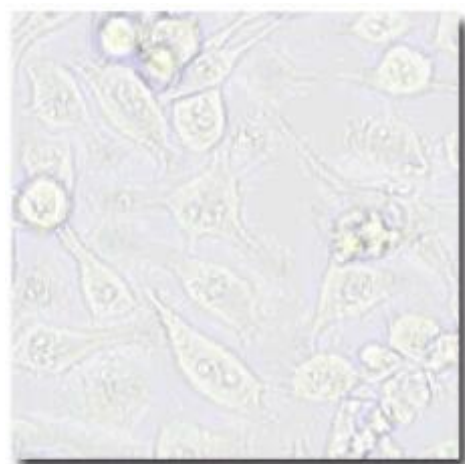
Cette technique, mise au point par Zernike, est très semblable à la strioscopie. Au lieu de supprimer les très basses fréquences à l'aide d'un petit objet opaque, Zernike propose de les déphaser de  $\pm \frac{\pi}{2}$ . Cette technique est très utilisée en biologie pour les objets quasi-transparents.



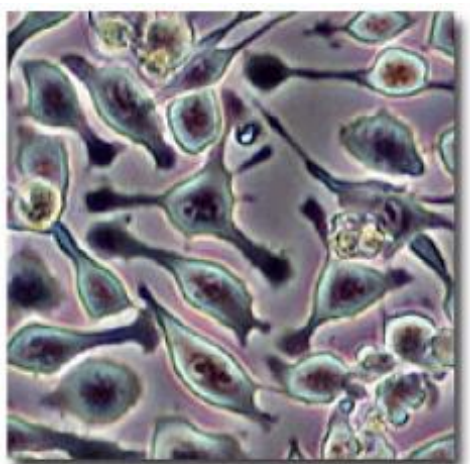
(sans)



(avec)



Fond clair



Contraste de phase

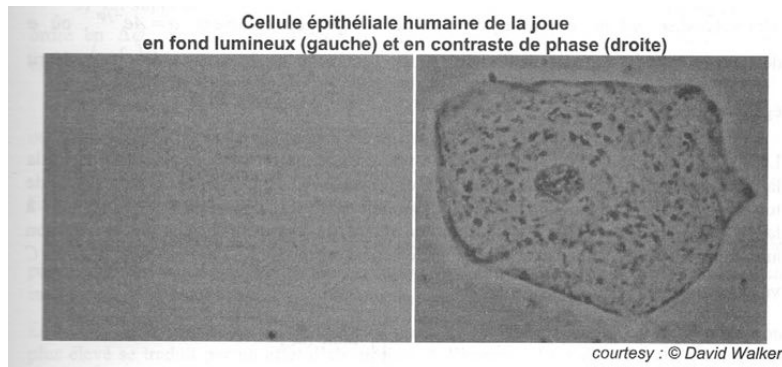
source : quelque part sur le web...

## EXERCICES

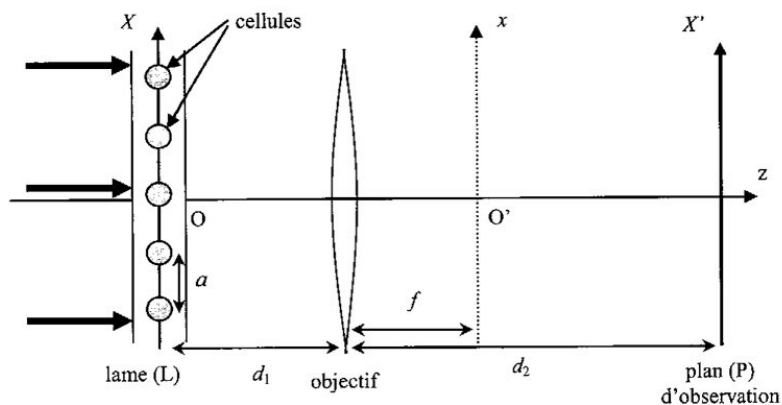
## ex 1. Microscopie à contraste de phase

*Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret*

Dans le cadre d'observations en médecine ou en biologie cellulaire, de nombreuses cellules se trouvent être quasiment invisibles au microscope du fait de leur grande transparence en lumière visible. Une solution consiste à injecter un colorant qui va se fixer préférentiellement dans certaines parties des cellules, mais cela peut poser des problèmes pour des cellules vivantes. En 1934, le néerlandais Zernike proposa une méthode optique permettant de traduire de très légères différences d'indice de réfraction en différences d'intensité, rendant ainsi visible au microscope des objets transparents. Cette méthode d'imagerie par contraste de phase, qui valut à Zernike le prix Nobel en 1953, est encore très utilisée de nos jours. Ce problème propose d'en comprendre le principe. À titre d'illustration, les photos ci-dessous permettent de comparer l'image d'une cellule de  $120\ \mu\text{m}$  de largeur par microscopie classique (en fond lumineux) et par contraste de phase.



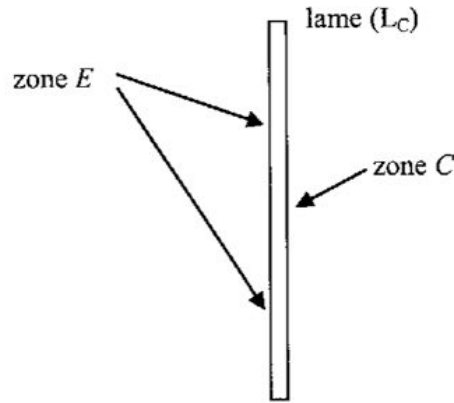
On raisonne sur le montage représenté ci-après. La lame de microscope (L) contient les cellules que l'on désire observer. En pratique, dans un microscope, le plan (P) d'observation est en réalité le plan focal objet de l'oculaire, où se forme l'image intermédiaire. Cependant, pour plus de simplicité, on ne raisonne qu'avec l'objectif du microscope, assimilé à une lentille mince convergente de distance focale  $f$ . Par ailleurs, on raisonne à une seule dimension et les cellules sont supposées être réparties uniformément dans la lame selon  $OX$ , les centres de deux cellules consécutives étant distants de  $a$ . La lame (L) est éclairée par une onde plane progressive harmonique de longueur d'onde  $\lambda$  en incidence normale.



1. Indiquer les valeurs de  $d_1$  et  $d_2$  en fonction de  $f$  pour que l'objectif puisse produire un grandissement  $\times 10$ .
2. Où se situe le plan de Fourier de la lame (L)? Décrire le plus précisément possible la répartition de l'intensité dans ce plan.

Pour les calculs qui suivent, on utilise la notation complexe : à la grandeur scalaire  $s(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$  de l'optique, on associe l'amplitude complexe  $\underline{a} = A e^{-i\varphi}$ . Ainsi, l'intensité lumineuse  $I = K \langle s^2(t) \rangle$  s'écrit également  $I = \frac{K}{2} |\underline{a}|^2$ .

Le principe de l'imagerie par contraste de phase est d'insérer dans le plan de Fourier la lame ( $L_c$ ) dont la structure est représentée ci-dessous. À la traversée de la zone E, l'onde ne subit aucun changement d'amplitude et aucun déphasage. Par contre, à la traversée de la zone C, l'onde subit un retard de phase algébrique  $\psi_c$  et voit son amplitude diminuer d'un facteur  $\varepsilon$ . Le facteur de transmission complexe pour la zone C vaut donc  $t_c = \varepsilon e^{-i\psi_c}$ .



On suppose que le facteur de transmission de la lame (L) est de la forme  $t(X) = e^{-i\Delta\varphi(X)}$ , où  $\Delta\varphi(X)$  représente le retard de phase subi par l'onde lors de la traversée de la lame (L) à l'abscisse  $X$ .

3. Sans l'insertion de la lame ( $L_c$ ), les cellules sont-elles visibles dans le plan d'observation ? Pour comprendre l'effet de l'introduction de la lame ( $L_c$ ) sur l'image formée dans le plan (P), on écrit  $t(X)$  sous la forme  $t(X) = 1 + (e^{-i\Delta\varphi(X)} - 1)$ , le premier terme correspondant au cas où il n'y a aucune cellule dans la lame (L).
4. Si ce terme était le seul présent dans  $t(X)$ , où serait la lumière dans le plan de Fourier de la lame (L) ?

Le deuxième terme,  $e^{-i\Delta\varphi(X)} - 1$ , forme quant à lui tous les autres points lumineux présents dans le plan de Fourier. La lame ( $L_c$ ) est placée de manière à ce que le point lumineux central soit dans la zone C alors que les autres points lumineux se situent dans la zone E. La lame ( $L_c$ ) a donc pour effet de modifier le facteur de transmission de la lame (L) uniquement pour le premier terme « 1 » et non pour le deuxième terme  $e^{-i\Delta\varphi(X)} - 1$ . Tout se passe comme si on visualisait dans le plan (P) l'image d'une lame fictive ayant pour facteur de transmission complexe  $t'(X) = 1.t_c + (e^{-i\Delta\varphi(X)} - 1)$ .

5. En supposant que  $\Delta\varphi \ll \pi$  et en effectuant un développement limité au premier ordre, montrer que l'intensité  $I'(X)$  en sortie de cette lame fictive a pour expression :

$$I'(X) = I_0 (\varepsilon^2 + 2\varepsilon \sin(\psi_c) \Delta\varphi(X))$$



où  $I_0$  représente l'intensité de l'onde incidente sur la lame.

6. Indiquer les valeurs de  $\psi_c$  qui rendent les cellules les plus visibles possibles. Expliquer l'intérêt d'atténuer la lumière dans la zone C.
7. Donner l'ordre de grandeur de  $\Delta\varphi$  pour une cellule de  $1\ \mu\text{m}$  de diamètre éclairée par une lumière verte sachant que le cytoplasme formant l'essentiel de la cellule possède un indice de 1,37 et que l'indice du liquide physiologique dans lequel elle évolue vaut 1,34.

En microscopie, on dit que le contraste de phase est « positif » si un indice de réfraction plus élevé se traduit par un effet d'absorption. À l'inverse, il est dit « négatif » lorsqu'un indice de réfraction plus élevé entraîne une plus grande luminosité.

8. Quel paramètre de la lame ( $L_c$ ) règle-t-on pour obtenir un contraste de phase positif ou négatif ?
9. Selon vous, le cliché présenté en début d'énoncé correspond-il à un contraste de phase positif ou négatif ?