

# Transports diffusifs

Préparation à l'agrégation interne de physique

<b>I Posséder les bases</b>	
1 Introduction	3
2 Transports diffusifs	3
Exercices	4
<b>II Acquérir l'essentiel</b>	
1 Le cadre	5
2 Lois gouvernant la diffusion	6
3 Bilans de particules	7
4 Bilans thermiques	9
Exercices	14
<b>III Approfondir</b>	
1 Établir proprement l'équation de la chaleur	19
Exercices	21



---

# Posséder les bases

---

<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2 Transports diffusifs</b>	<b>3</b>
2.1 Généralités . . . . .	3
2.2 Les échelles caractéristiques . . . . .	4
<b>Exercices</b>	<b>4</b>

★      ★      ★

## 1 Introduction

On appelle transport tout échange intervenant lors de l'évolution<sup>1</sup> d'un système. Ces transports peuvent être de deux types :

**Transport convectif :** échange dû à un déplacement de matière. En se déplaçant, les particules transportent naturellement leurs caractéristiques (énergie, quantité de mouvement, etc.) avec elles. Je mettrais sans hésiter les échanges radiatifs ici car ils ne sont qu'une convection de photons !

**Transport diffusif ou conductif :** échange dû à la transmission de proche en proche<sup>2</sup> au sein d'un support matériel immobile. Exemples : conduction électrique, thermique, diffusion de particules, viscosité (diffusion de quantité de mouvement).

L'objet de ce cours est les phénomènes de transport diffusif.

## 2 Transports diffusifs

### 2.1 Généralités

Chacun de ces transports naît d'une inhomogénéité et est associé à l'existence d'un courant :

- ▷ Inhomogénéité de température  $\Rightarrow$  courant d'énergie thermique (chaleur),
- ▷ Inhomogénéité de potentiel électrique  $\Rightarrow$  courant de charge électrique,
- ▷ Inhomogénéité de concentration  $\Rightarrow$  courant de particules,
- ▷ Inhomogénéité de vitesse  $\Rightarrow$  courant de quantité de mouvement.

On remarque le même schéma : une inhomogénéité d'une grandeur intensive provoque l'apparition du transport d'une grandeur extensive. L'existence de systèmes homogènes s'explique par le fait que ces courants sont dirigés dans le sens qui atténue l'inhomogénéité initiale. Ainsi, toutes les lois phénoménologiques qui expriment le courant associé à une inhomogénéité incluent cet effet de *modération*.

---

1. On quitte ici le domaine d'étude des états d'équilibre pour décrire ce qu'il se passe lors d'une évolution.

2. Tous les phénomènes de diffusion font intervenir une part aléatoire ; ceci est décrit en termes de collisions au gré du mouvement des particules ou ce qui *revient au même* en termes de marche au hasard...

## 2.2 Les échelles caractéristiques

Les questions que peuvent immédiatement soulever les phénomènes de diffusion sont :  
*Combien de temps faut-il à la grandeur considérée pour diffuser sur une distance donnée ?*

ou encore :

*Sur quelle distance la grandeur considérée diffuse pendant un temps donné ?*

Le lien entre distance  $L$  et durée  $\tau$  est tel que :

$$L \propto \sqrt{\tau}$$

Cette évolution en la racine carrée du temps est caractéristique des phénomènes de diffusion. Ainsi, si une goutte d'encre met une seconde pour diffuser dans l'eau d'un verre sur une distance de 1 cm, alors le deuxième centimètre sera atteint 3 secondes plus tard...

On verra plus loin, qu'en ordre de grandeur, le facteur de proportionnalité est la *diffusivité*  $D$  :

$$L \sim \sqrt{D \cdot \tau}$$

---

## EXERCICES

---

### ex 1. L'artisan verrier

Un artisan verrier chauffe le milieu d'un tube de verre ( $D \simeq 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) de longueur  $2L = 20 \text{ cm}$  pour pouvoir y créer un coude.

- ▷ Évaluer l'ordre de grandeur de la durée pendant laquelle il peut tenir à pleine mains les extrémités du tube.

### ex 2. L'hypothèse adiabatique dans un moteur

On modélise en général la compression et la détente du mélange air-carburant dans un moteur à quatre temps par une évolution adiabatique ; pourtant, les parois métalliques sont de bons conducteurs thermiques.

- ▷ À partir de quelle épaisseur  $e$  de paroi peut-on valider l'approximation adiabatique pour un moteur tournant à 6000 tr/min ?

On donne la diffusivité du métal constituant les parois :  $D \simeq 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ .

---

# Acquérir l'essentiel

---

<b>1 Le cadre</b>	<b>5</b>
1.1 Le vecteur densité de flux . . . . .	5
1.2 L'équilibre thermodynamique local . . . . .	6
<b>2 Lois gouvernant la diffusion</b>	<b>6</b>
2.1 Loi de Fick – diffusion de particules . . . . .	6
2.2 Loi de Fourier – diffusion thermique . . . . .	6
2.3 Loi d'Ohm – diffusion de charge électrique . . . . .	6
<b>3 Bilans de particules</b>	<b>7</b>
3.1 Expression du bilan . . . . .	7
3.2 Équation de diffusion . . . . .	8
3.3 Échelles caractéristiques . . . . .	8
<b>4 Bilans thermiques</b>	<b>9</b>
4.1 Expression du bilan . . . . .	9
4.2 Équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur . . . . .	10
4.3 Échelles caractéristiques . . . . .	10
4.4 Quelques notions intéressantes . . . . .	10
4.5 Échange à travers une interface solide-fluide . . . . .	12
4.6 Conditions aux limites - continuité des flux . . . . .	13
<b>Exercices</b>	<b>14</b>

★      ★      ★

## 1 Le cadre

### 1.1 Le vecteur densité de flux

Ce vecteur est la grandeur qui mesure localement le *courant* associé à un phénomène de diffusion. On en introduit un par grandeur suivie :

- ▷ vecteur densité de flux de particules,
- ▷ vecteur densité de flux de chaleur,
- ▷ vecteur densité de flux de charge électrique (densité de courant),
- ▷ etc.

Par définition, le flux de ce vecteur à travers une surface orientée<sup>3</sup> donnée est le *débit* de la grandeur considérée à travers cette surface. Débit de particules dans le cas d'un courant de particules, débit de charge électrique (i.e. intensité) dans le cas d'un courant électrique, débit d'énergie thermique (i.e. puissance thermique) dans le cas d'un courant de chaleur.

---

3. L'orientation de la surface indique le sens dans lequel on compte positivement le débit.

Si on note  $\vec{j}$  le vecteur densité de courant et  $\phi$  le flux à travers  $\mathcal{S}$ , on a :

$$\phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

## 1.2 L'équilibre thermodynamique local

Le système dans lequel se déroule un phénomène de diffusion est, nous l'avons dit, hors équilibre. Cependant, nous faisons l'hypothèse que, localement, le système est quasiment à l'équilibre. Ceci signifie qu'il existe une échelle, petite macroscopiquement parlant et grande microscopiquement parlant à laquelle les variables thermodynamiques ont un sens. Cette échelle existe si le temps de relaxation relatif à cette échelle est suffisamment petit devant le temps typique d'évolution des conditions extérieures.

Dans ce cas, les variables thermodynamiques sont définies localement :

- ▷ champ de température  $T(M, t)$ ,
- ▷ champ de pression  $p(M, t)$ ,
- ▷ champ d'énergie interne (massique ou volumique)  $u(M, t)$ ,
- ▷ champ densité de particules  $n(M, t)$ ,
- ▷ etc.

Remarque : localement, les équations d'état sont satisfaites. En particulier, dans un gaz parfait, on aura  $p(M, t) = n(M, t) \cdot R \cdot T(M, t)$

## 2 Lois gouvernant la diffusion

Ces lois sont la plupart du temps empiriques ; certains modèles permettent de les établir sous certaines conditions.

### 2.1 Loi de Fick – diffusion de particules

$$\vec{j}_n = -D \cdot \vec{\nabla} n$$

$D$  diffusivité.

### 2.2 Loi de Fourier – diffusion thermique

$$\vec{j}_Q = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T$$

$\lambda$  conductivité thermique.

### 2.3 Loi d'Ohm – diffusion de charge électrique

Ici, sous une forme approchée valable si les phénomènes inductifs sont négligeables.

$$\vec{j} = -\gamma \cdot \vec{\nabla} V$$

$\gamma$  conductivité électrique.

Elles peuvent être vues comme la traduction mathématique la plus simple<sup>4</sup> de ce qui a été affirmé dans la partie « Posséder les bases » :

*Le courant réagit à une inhomogénéité dans le sens qui la modère...*

---

4. Notamment linéaire...

### 3 Bilans de particules

Pour bien aborder un bilan il est nécessaire d'avoir en tête son aspect purement comptable comme il a été vu dans le cours précédent :

$$\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{créé}}$$

Ici, nous allons compter des particules. Dit comme cela, il faut être conscient que ce n'est pas suffisamment précis. Quelles sont les particules que nous décidons de compter ?

Une fois ce choix fait, il convient de faire le tour des différents éléments constituant le bilan : choix d'un volume, énumération des échanges, énumération des éventuels termes de création.

#### 3.1 Expression du bilan

##### Forme intégrale

Soit un volume  $\mathcal{V}$  du milieu considéré et  $n(M, t)$  la densité d'une (ou plusieurs) espèce(s) de particules bien identifiées.

1. Entre  $t$  et  $t + dt$ , la variation du nombre  $N_{\mathcal{V}}$  de particules dans  $\mathcal{V}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{V}}(t + dt) - N_{\mathcal{V}}(t) &= \iiint_{\mathcal{V}} (n(M, t + dt) - n(M, t)) \cdot dV \\ &= dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial n}{\partial t}(M, t) \cdot dV + \text{termes d'ordre 2} \end{aligned}$$

2. Pendant cette durée, la quantité de particules échangées à travers la surface  $\partial\mathcal{V}$  qui délimite  $\mathcal{V}$  est :

$$N_{\text{ech};[t;t+dt]} = -dt \cdot \iint_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_n(M, t) \cdot d\vec{S} + \text{termes d'ordre 2}$$

3. Enfin, selon les cas, il peut y avoir un terme de création<sup>5</sup>. On peut alors introduire un taux volumique de création  $\sigma(M, t)$  tel que :

$$N_{\text{créé};[t;t+dt]} = dt \cdot \iiint_{\mathcal{V}} \sigma(M, t) \cdot dV + \text{termes d'ordre 2}$$

On obtient alors le bilan suivant (en divisant par  $dt$  et en passant à la limite) :

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial n}{\partial t}(M, t) \cdot dV = - \iint_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_n(M, t) \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \sigma(M, t) \cdot dV}$$

forme intégrale (globale) du bilan

5. Par exemple une création de neutrons libres dans les réactions ayant lieu dans un réacteur nucléaire ou encore une création d'espèce lors d'une réaction chimique.

### Forme locale

Grâce au théorème de Green-Ostrogradski, on déduit :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left( \frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n - \sigma \right) (M, t) \cdot dV = 0$$

Ce bilan devant être vérifié pour tout volume  $\mathcal{V}$ , on déduit :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_n = \sigma}$$

forme locale du bilan

### 3.2 Équation de diffusion

On obtient l'équation de diffusion en intégrant la loi de Fick dans le bilan purement formel ci-dessus. Il vient alors :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \Delta n + \sigma}$$

### 3.3 Échelles caractéristiques

Considérons un problème sans terme de création. Je discuterai dans un deuxième temps ce qu'on peut dire des échelles caractéristiques en présence d'un terme source.

Introduisons les variables « réduites » (sans dimension) :  $\tilde{t} = \frac{t}{\tau_d}$ ,  $\tilde{x} = \frac{x}{L}$  et  $\tilde{n} = \frac{n}{n_0}$ . On construit alors l'équation adimensionnée :

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{t}} = \frac{D \cdot \tau_d}{L^2} \cdot \tilde{\Delta} \tilde{n}$$

Par définition,  $\tau_d$  et  $L$  sont des grandeurs caractéristiques du problème si le coefficient de l'équation a pour ordre de grandeur 1. Ainsi, si  $\tau_d$  et  $L$  sont des grandeurs caractéristiques du problème, on a :

$$\boxed{L^2 \sim D \cdot \tau_d}$$

Remarque à propos du terme source

À la découverte du temps caractéristique  $\tau_s$  lié au terme source, nous considérons l'équation sans le terme de diffusion. Il vient<sup>6</sup>  $\tau_s = \frac{n_0}{\sigma}$  et l'équation différentielle adimensionnée est alors :

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\tau}{\tau_d} \cdot \tilde{\Delta} \tilde{n} + \frac{\tau}{\tau_s}$$

- ▷ Si  $\tau_s \ll \tau_d$ , le problème est dominé par la création ; en première approximation, et tant que  $t \ll \tau_d$ , on aura  $\frac{\partial n}{\partial t} \simeq \sigma$ .
- ▷ Si  $\tau_s \gg \tau_d$ , le problème est dominé par la diffusion ; en première approximation, et tant que  $t \ll \tau_s$ , on aura  $\frac{\partial n}{\partial t} \simeq D \cdot \Delta n$ .

6. L'interprétation de  $n_0$  est ici essentielle. Je dirais qu'elle peut être une précision à laquelle on



## 4 Bilans thermiques

On pourrait reconduire ici le même raisonnement qu'au sujet de la diffusion de particules. Il sera important<sup>7</sup> de mettre en évidence les différentes hypothèses qui sont faites au niveau prépa et qui limitent le champ de validité des équations obtenues.

### 4.1 Expression du bilan

#### Forme intégrale

On peut commencer par remarquer que nous travaillons depuis le cours précédent avec une expression de premier principe qui n'est valable que si le système est fermé. Raisonner sur un volume donné comme on l'a fait pour le bilan de particules n'est alors pas possible<sup>8</sup>.

Je considère donc une certaine quantité de matière au sein d'un matériau macroscopiquement au repos. À l'instant  $t$ , celle-ci est contenue dans le volume  $\mathcal{V}(t)$ . Je suppose que le matériau considéré est au contact de l'atmosphère et évolue donc à pression extérieure constante (évolution monobare). Je suppose également que l'évolution du système considéré est monobare ; cela suppose que les phénomènes de dilatation ne sont pas très importants.

Alors,

$$\frac{dH}{dt} = P_{\text{th}}$$

Comme on l'a montré au chapitre précédent

Pour un système homogène en évolution isobare, on a  $dH = mc_p dT$ . Donc pour chaque élément de volume du présent système, on a  $d(\delta H) = \delta mc_p dT$ .

Ainsi,

$$dH = \iiint_{\mathcal{V}} (\rho c_p dT) dV$$

Et comme  $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$ , il vient :

$$\frac{dH}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \left( \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) dV$$

Par ailleurs,  $P_{\text{th}}$  contient un terme d'échange  $-\iint_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$  et un terme source (éventuellement)  $\iiint_{\mathcal{V}} \sigma dV$ . Finalement, on a :

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{V}} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\iint_{\partial\mathcal{V}} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \sigma dV}$$

forme intégrale (globale) du bilan

désire — ou peut — connaître les variations de densité, comme par exemple une précision expérimentale. Pourquoi pas également un ordre de grandeur des variations typiques de densité. Et vous, qu'en pensez-vous ?

7. Je le ferai de manière plus complète dans la partie approfondir.

8. Le faire nécessiterait de considérer aussi les échanges convectifs d'énergie en plus des échanges sous forme de travail ou de chaleur.

### Forme locale

Avec les mêmes techniques que pour la diffusion de particules, il vient :

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q = \sigma}$$

forme locale du bilan

### 4.2 Équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur

On obtient l'équation de la chaleur en intégrant la loi de Fourier dans le bilan purement formel ci-dessus. Il vient alors :

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D \cdot \Delta T + \frac{\sigma}{\rho c_p}}$$

avec  $D = \frac{\lambda}{\rho c_p}$

### 4.3 Échelles caractéristiques

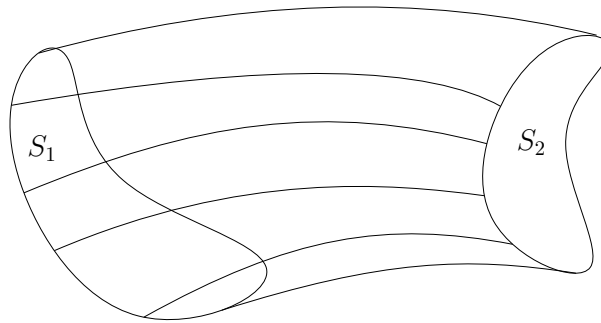
Rien de mieux que ce qui a été écrit à propos de la diffusion de particules.

### 4.4 Quelques notions intéressantes

Certaines de ces notions peuvent également être définies dans un problème de diffusion de particules, mais conformément au programme, je les introduis ici...

### Notion de résistance thermique

Considérons un volume  $\mathcal{V}$  d'un matériau. Dans le cas où  $\mathcal{V}$  est un tube de courant de  $\vec{j}_Q$ , fermé par deux surfaces isothermes, comme schématisé ci-après,



le bilan en *régime permanent* et *sans terme source* s'écrit :

$$\iint_{S_1} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

équation dont l'interprétation est évidente...

Ce même flux traverse également toute section isotherme de ce tube.

Alors,

$$T_1 - T_2 = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\vec{j}_Q}{\lambda} \cdot d\vec{\ell}$$

on intègre le long d'une ligne de courant

Et,

$$\varphi = \iint_S \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad \text{à travers toute section isotherme}$$

La linéarité des équations régissant le problème permet de dire que si les conditions aux limites étaient toutes multipliées par un même réel,  $\vec{j}_Q$  le serait également et donc le rapport  $\frac{T_1 - T_2}{\varphi}$  serait inchangé.

Ce rapport indépendant de la « hauteur » des conditions aux limites est par définition la résistance thermique<sup>9</sup> du volume considéré dans la situation étudiée :

$$R_{th} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{T_1 - T_2}{\varphi}$$

#### Remarque

*Calculons explicitement la résistance thermique d'un barreau rectiligne de longueur  $L$  et de section isotherme  $S$ .*

*On montre aisément (faites-le), en résolvant l'équation de la chaleur, que dans ce barreau,*

$$\vec{j}_Q = \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{L} \vec{e}_x$$

*Et on en déduit que :*

$$R_{th} = \frac{L}{\gamma \cdot S}$$

*Quand on achète un matériau isolant, par exemple pour isoler une toiture, le fabricant nous donne l'inverse  $\frac{L}{\gamma}$  de la conductance thermique surfacique. Il est alors très simple de calculer la résistance thermique qu'on obtiendra en couvrant une surface  $S$  avec celui-ci.*

## ARQS

Si les conditions auxquelles est soumis un système, évoluent au cours du temps, le système ne peut pas atteindre un régime stationnaire.

Cependant, si le temps typique d'évolution de ces contraintes est grand devant le temps caractéristique du système, on pourra faire une Approximation de Régime Quasi-Stationnaire : les résultats obtenus sous l'hypothèse strictement stationnaire seront approximativement valables malgré l'évolution des conditions aux limites. Notamment, la notion de résistance thermique sera utilisable. On écrira :

$$\varphi(t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_{th}}$$

9. Remarquez l'analogie évidente avec la résistance électrique.

Cette approximation est systématiquement faite quand on étudie l'isolation d'une maison : les changements de la température extérieure se font sur des temps très grands devant le temps de thermalisation des murs...

C'est ce qu'on fait tous les jours en électrocinétique quand on écrit la loi d'Ohm  $u(t) = Ri(t)$  en régime variable.

#### 4.5 Échange à travers une interface solide-fluide

L'objet de ce paragraphe est d'étudier les échanges qui peuvent exister à l'interface entre un solide (dans lequel on s'intéresse à la diffusion thermique) et le fluide avec lequel il se trouve en contact.

La loi qui est utilisée à cet effet est la loi de Newton :

$$\varphi_{cc} = h \cdot S \cdot (T_s - T_f)$$

Elle donne la valeur de la puissance  $\varphi_{cc}$  cédée par le solide au fluide si la surface de contact est  $S$ , en désignant par  $T_s$  la température de surface du solide et par  $T_f$  la température du fluide.  $h$  est un facteur traduisant l'importance de cet échange.

L'indice « cc » signifie *conducto-convectif*.

Commentaires :

- ▷ La première chose qui peut interpeler en regardant cette expression est la notion de température du fluide. En effet, celle-ci n'a de sens que si la température dans le fluide est homogène.

Il arrive fréquemment qu'un fluide soit le siège de mouvements de convection. Ceux-ci tendent, et beaucoup plus rapidement que ne pourrait le faire la conduction, à homogénéiser la température au sein du fluide. C'est dans ce cadre là que cette loi de Newton est valide et que la notion de température du fluide a du sens.

Au voisinage du solide, la mécanique des fluides nous apprend qu'alors, dans une épaisseur de fluide appelée *couche limite*, l'écoulement du fluide est laminaire, parallèle à la surface du solide. C'est dans cette couche qu'est localisée la variation de température entre la surface du solide et le reste du fluide. Cette couche est le siège d'échanges *conductifs* de chaleur entre le solide et le fluide. Voici pourquoi cette interaction fluide-solide est qualifiée de *conducto-convection*.

Dans le cas d'un fluide parfaitement au repos, celui-ci, au même titre que le solide avec lequel il est en contact, subira la diffusion thermique et sa température ne sera alors, en général, pas homogène et la loi de Newton ne sera pas utile.

- ▷ Le facteur  $h$  est d'autant plus grand que l'échange est important. On peut montrer, même avec des modèles simples, que  $h$  augmente avec la vitesse du fluide ou plus précisément avec l'importance des mouvements de convection.

L'hiver, lorsque le vent souffle fort, on peut parfois ressentir qu'il fait plus froid dans une habitation : eh oui, les pertes thermiques augmentent avec  $h$ . C'est aussi ce lien entre  $h$  et vitesse d'écoulement qui explique l'efficacité de souffler sur une purée de

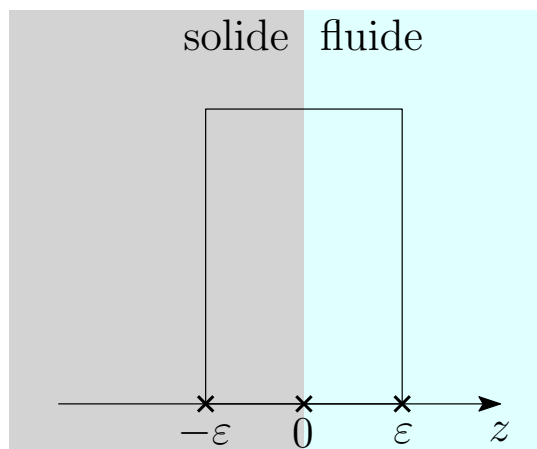
pommes de terre pour la faire refroidir (ça marche aussi avec le polenta !) : renouveler l'air au-dessus de la purée (ou au contact des murs de l'habitation) permet de maintenir un fort gradient de température et donc de renforcer l'échange thermique.

▷ La proportionnalité à  $S$  est « évidente ». Elle suppose la localité du phénomène.

#### 4.6 Conditions aux limites - continuité des flux

Comme à chaque fois qu'on résout une équation différentielle (ou aux dérivées partielles) sur les coordonnées, se pose la question des conditions aux limites.

Considérons une interface entre deux milieux (peu importe lesquels, ce raisonnement a une portée très générale).



Intéressons-nous au système contenu dans un parallélépipède de largeur  $2\varepsilon$  et de section  $S$ , « à cheval » sur l'intersection. Un bilan énergétique donne :

$$\frac{dU}{dt} = \varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)$$

Si on oriente les flux vers les  $z$  croissants

Quand on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0, le membre de gauche s'annule car un système d'épaisseur nulle ne contient ni matière ni champs et donc pas d'énergie. Il vient alors :

$$\boxed{\varphi(0^-) = \varphi(0^+)}$$

Cette équation traduit la conservation du flux sur toute interface. Vous remarquerez qu'aucune hypothèse sur la nature du flux (conductif, conducto-convectif, et pourquoi pas radiatif) n'a été faite. Ainsi, en  $0^-$ , le flux peut être la somme de flux de différentes natures, de même en  $0^+$ , sans nul besoin que ces natures soient les mêmes des deux côtés.

Ainsi, si j'étudie l'interface entre une station spatiale et l'espace, je vais écrire que le flux conductif en  $0^-$  (limite de la paroi de la station) est égal au flux radiatif en  $0^+$  (limite de l'espace environnant). En effet, dans la paroi seuls des échanges conductifs ont lieu (ce n'est pas un fluide et le matériau qui la compose est opaque) et le rayonnement est le seul mode d'échange thermique qui existe dans le vide.

---

EXERCICES

---

**ex 1. Résistance thermique**

Calculer la résistance thermique d'un manchon cylindrique  $(H, R_1, R_2, \lambda)$  pour un flux radial.

**ex 2. Résistance thermique**

1. Calculer la résistance thermique d'une coquille sphérique  $(R_1, R_2, \lambda)$  pour un flux radial.
2. On considère deux coquilles concentriques, l'une de paramètres  $(R_1, R_0, \lambda_1)$  et l'autre de paramètres  $(R_0, R_2, \lambda_2)$ . On a  $R_1 < R_0 < R_2$ .
  - ▷ Déterminer la résistance thermique équivalente.
  - ▷ Exprimer  $T(R_0) - T_1$  en fonction de  $T_2 - T_1$ . Commenter.
  - ▷ Exprimer  $T(r)$ .

**ex 3. Température de la Terre**

La Terre est supposée sphérique et homogène, de rayon  $R = 6400$  km, de conductivité thermique  $\lambda$  indépendante de la température. La chaleur interne du globe provient de la désintégration radioactive de certaines roches qui libère par unité de volume une puissance  $p$  uniforme.

À la surface, on observe que la température s'accroît de  $1^\circ\text{C}$  par kilomètre.

- ▷ Calculer la température en fonction de la distance  $r$  au centre de la Terre.
- ▷ Que vaut-elle au centre? Donner un ordre de grandeur en considérant que la Terre n'est ni un bon conducteur, ni un bon isolant.

**ex 4. Étude de la sensation de chaud**

*On étudie un modèle destiné à interpréter l'observation suivante : une personne posant sa main sur une table en bois et une table en acier à la même température a l'impression que le bois est plus chaud que l'acier.*

Deux cylindres de même section  $S$ , de même axe  $Ox$ , de conductivités  $k_1$  et  $k_2$ , de longueurs  $L_1$  et  $L_2$  sont mis bout à bout, le contact s'établissant en  $x = 0$ . On maintient les extrémités  $x = -L_1$  et  $x = L_2$  des deux cylindres aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ . On étudie le régime stationnaire.

1. Expliquer le lien entre ce modèle et la situation réelle.
2. Établir l'expression de  $T(x)$  dans les deux cylindres en fonction des données et de la température  $T_0$  en  $x = 0$ .
3. En déduire que  $T_0$  est un barycentre de  $T_1$  et  $T_2$ .
4. A.N. : calculer  $T_0$  pour un contact main-bois puis main-acier.

*Données :*  $T_1 = 37^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ ;  $L_1 = L_2$ ;  $k_1 = 10\text{ W/m/K}$ ;  $k_2(\text{bois}) = 1\text{ W/m/K}$ ;  $k_2(\text{acier}) = 100\text{ W/m/K}$ .

**ex 5. Répartition de température dans un fil électrique**

Un fil cylindrique, de rayon  $a$ , est parcouru par un courant électrique uniforme d'intensité  $I$ , en régime permanent. Il est entouré d'une gaine isolante d'épaisseur  $b$ , la température extérieure étant constamment égale à  $T_0$ . On néglige tout effet de bord et on note respectivement  $\gamma$  la conductivité électrique du fil et  $\lambda$  et  $k$  les conductivités thermiques du fil et de la gaine.

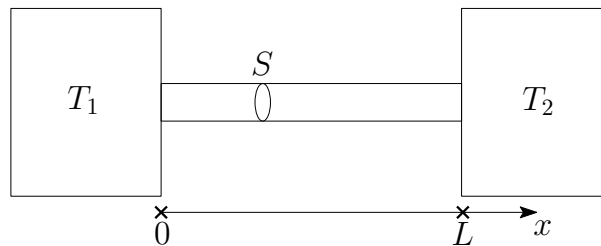
- ▷ Déterminer la répartition de température dans le fil et la gaine. Où cette température est-elle maximale ?

*Compte tenu de l'avancée du cours d'électromagnétisme, on donne :*

- puissance volumique dissipée par effet Joule :  $p = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{I}{\pi a^2} \right)^2$

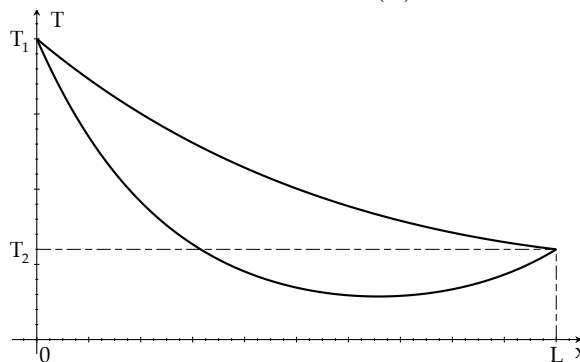
**ex 6. Conduite imparfaitement calorifugée : loi de Newton**

Deux récipients identiques sont portés aux températures  $T_1$  et  $T_2$  supposées constantes. Ils sont reliés par une conduite cylindrique (longueur  $L$ , section  $S$ ) de conductivité thermique  $\lambda$ .



La conduite est imparfaitement calorifugée : elle échange de la chaleur avec l'extérieur (de température constante et uniforme  $T_0$ ). Ainsi, un élément d'aire  $d\sigma$  de sa surface latérale échange une puissance  $\alpha(T(x) - T_0)d\sigma$  avec l'extérieur.  $x$  désigne l'abscisse de l'élément considéré et  $\alpha > 0$  est le coefficient d'échange, supposé constant.

1. En effectuant un bilan sur le volume élémentaire de conduite situé entre  $x$  et  $x + dx$ , déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x)$  en régime stationnaire.
2. Pour deux valeurs de  $\alpha$  différentes, la courbe  $T(x)$  obtenue est la suivante :



- ▷ Quelle est la courbe qui correspond à la plus grande valeur de  $\alpha$  ?
- ▷ Quelle serait la courbe pour  $\alpha = 0$  ?

**ex 7. Bouffée de chaleur**

Un milieu unidimensionnel, de masse volumique  $\rho$ , de chaleur massique  $c$ , de conductivité thermique  $\lambda$ , est le siège de fluctuations de température autour d'une température moyenne  $T_0$  : dans ce milieu, la température est de la forme  $T(x, t) = T_0 + \theta(x, t)$ .

On admettra (ou on pourra montrer) que la fonction

$$\theta(x, t) = \frac{A}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad \text{où } D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

est solution de l'équation de la chaleur.

Le milieu est une barre cylindrique de section  $S$  parfaitement calorifugée, de très grande longueur, initialement à la température  $T_0$ . On apporte, à  $t = 0$ , une chaleur  $Q$  au milieu de la barre.

- ▷ Déterminer les fluctuations  $\theta(x, t)$  dans la barre.
- ▷ Donner l'allure des fonctions  $\theta(x_0, t)$  et  $\theta(x, t_0)$ . Commenter.
- ▷ À quelle date la température passe-t-elle par un maximum à 10 cm et à 1 m du centre de la barre ?

A.N. :  $D = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (métal)

ou  $D = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  (bois).

**ex 8. Gel d'un lac**

On s'intéresse à la croissance d'une couche de glace à la surface d'un lac dont l'eau liquide est uniformément à sa température de fusion  $T_F = 273 \text{ K}$ . Lorsque l'air au dessus du lac a une température  $T_a < T_F$ , on constate que l'épaisseur  $e$  de la couche de glace croît lentement, avec « pour  $t$  élevé »  $e(t) \propto \sqrt{t}$ .

On suppose que le profil de température  $T(z, t)$  dans la glace est le même qu'en régime permanent (ARQS).

On donne la chaleur latente de fusion de la glace à  $T_F$  :  $L_F = 330 \text{ kJ/kg}$ . On notera  $\lambda$  sa conductivité thermique et  $\mu$  sa masse volumique (supposé identique à celle de l'eau liquide).

1. On suppose que l'air impose sa température  $T_a$  à la surface (hypothèse H : contact thermique parfait)
  - ▷ Exprimer le flux thermique  $\varphi$  traversant la couche de glace dans le sens des  $z$  décroissants.
  - ▷ En faisant un bilan sur la couche d'eau qui gèle entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , montrer que  $e$  est solution de :

$$e \cdot \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu L_F}$$

Déterminer  $e(t)$  sachant que  $e(0) = e_0$ .

- ▷ En déduire une durée caractéristique des variations de  $e$ . Discuter la validité de l'ARQS.



2. En réalité, l'hypothèse H n'est pas satisfaite en général : le transfert thermique de la glace vers l'air met en jeu un transport conducto-convectif tel que le flux thermique s'écrive

$$\varphi_{cc} = hS(T_s - T_a)$$

où  $T_s$  est la température de surface du lac et  $h$  un coefficient constant, d'autant plus élevé qu'un vent souffle fort au-dessus du lac.

- ▷ Déterminer  $T_s$ .
- ▷ À quelle condition le modèle de la question 1. est-il valable ? On ne demande pas d'établir la nouvelle expression de  $e(t)$ .



---

## Approfondir

---

<b>1</b>	<b>Établir proprement l'équation de la chaleur</b>	<b>19</b>
1.1	Préliminaire . . . . .	19
1.2	Bilan énergétique . . . . .	19
1.3	Un modèle simple de contraintes intérieures . . . . .	20
1.4	Vers l'équation de la chaleur . . . . .	20
	<b>Exercices</b>	<b>21</b>

★      ★      ★

### 1 Établir proprement l'équation de la chaleur

ou *VERS UNE ÉQUATION DE LA CHALEUR PLUS GÉNÉRALE...*

#### 1.1 Préliminaire

Nous allons travailler avec des grandeurs locales *massiques* ; concernant le travail qui nous attend, cela est préférable<sup>10</sup> . En effet, si  $u$  désigne l'énergie interne massique, nous avons :

$$U_{\mathcal{V}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho u \cdot dV$$

Et on montre que (  $\dot{\phantom{x}}$  désigne la dérivée particulaire ) :

$$\frac{dU_{\mathcal{V}}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \dot{u} \cdot dV$$

alors même que le volume contenant le système bouge...

#### 1.2 Bilan énergétique

Considérons une quantité donnée de matière occupant, à l'instant  $t$ , le volume  $\mathcal{V}$  du milieu étudié. Si on note  $U$  son énergie interne et  $K$  son énergie cinétique, le premier principe s'écrit :

$$\frac{d}{dt} [U + K] = P_{\text{ext}} + P_{\text{th}}$$

Par ailleurs, le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$\frac{dK}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{dU}{dt} + P_{\text{int}} = P_{\text{th}}$$

---

10. Sans cela, des termes de surfaces apparaissent dans les dérivations qui suivent.

### 1.3 Un modèle simple de contraintes intérieures

En simplifiant au maximum, les efforts intérieurs ne sont que des efforts de pression et on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} &= \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{f}_v - \vec{\nabla} p) \cdot \vec{v} \, dV \\ &= \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} \vec{f}_v \cdot \vec{v} \, dV}_{P_{\text{ext}}} - \underbrace{\iint_{\partial \mathcal{V}} p \vec{v} \cdot d\vec{S}}_{P_{\text{int}}} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}} p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \, dV}_{P_{\text{int}}} \end{aligned}$$

### 1.4 Vers l'équation de la chaleur

Il vient alors :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\rho \dot{u} + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \, dV = P_{\text{th}}$$

qui, grâce à l'équation de conservation de la masse, devient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho (\dot{u} + p \dot{v}) \, dV = P_{\text{th}} \quad v \text{ étant le volume massique}$$

soit encore :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\rho \dot{h} - \dot{p}) \, dV = P_{\text{th}}$$

$P_{\text{th}}$  est semblable à ce qu'on a écrit dans la partie « Acquérir l'essentiel ». On obtient alors une expression locale du bilan par les méthodes classiques :

$$\rho \dot{h} - \dot{p} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q + \sigma$$

Toujours dans le souci de bien comprendre l'ensemble des hypothèses qui conduisent à l'équation classique de la chaleur, mais dans le même temps d'essayer de montrer comment elle peut être généralisée, considérons que le milieu puisse être le siège d'une réaction chimique. Alors, la relation

$$dH = C_p \cdot dT + \left( \frac{\partial H}{\partial p} \right)_{(T, \xi)} \cdot dp + \Delta_r H^0 \cdot d\xi$$

conduit à :

$$\rho \dot{h} = \rho c_p \dot{T} + \rho \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{(T, \xi)} \dot{p} + \Delta_r H^0 \dot{\xi}$$

où  $\xi$  est un avancement volumique...

On a alors :

$$\rho c_p \dot{T} + \dot{p} \left[ \rho \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_{(T, \xi)} - 1 \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q + \sigma - \Delta_r H^0 \dot{\xi}$$

En général, le terme  $-\Delta_r H^0 \dot{\xi}$  est inclus dans le terme source bien que son origine soit dans la variation d'enthalpie (dans la suite je noterai  $\sigma^*$  le terme source gonflé de cette quantité).

Les hypothèses conduisant alors à l'équation de la chaleur sont :

1. système macroscopiquement au repos : dérivée particulière identique à la dérivée partielle,
2. l'éventuelle dilatation du système est telle que les variations de pression soient négligeables.

Alors,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_Q + \sigma^*$$

Enfin, supposant la loi de Fourier valide, il vient :

$$\boxed{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \sigma^*}$$

---

## EXERCICES

---

### ex 1. Échangeur thermique

Un échangeur thermique est constitué de deux canalisations d'axe  $Ox$ , de longueur  $L$  et de même section rectangulaire de côtés  $b$  selon  $Oy$  et  $a$  selon  $Oz$ . Ces deux canalisations sont séparées par une paroi métallique d'épaisseur  $e \ll L$ .

Dans la conduite (1), un liquide entre en  $x = 0$  à  $T_1(x = 0) = T_{01}$  et s'écoule à vitesse constante  $v\vec{u}_x$ .

Dans la conduite (2), le même liquide entre en  $x = L$  à  $T_2(x = L) = T_{L2}$  et s'écoule à la vitesse  $-v\vec{u}_x$ .

Les températures  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$  sont supposées uniformes dans toute section des conduites. On suppose la pression uniforme.

*Données* : capacité thermique massique  $c$ , masse volumique  $\mu$ , conductivité  $\lambda$  du liquide ; conductivité  $\lambda_m$  du métal.

1. Dans la paroi, comparer en ordre de grandeur le flux thermique selon  $\vec{u}_x$  et selon  $\vec{u}_z$ . Dans toute la suite, on néglige le flux thermique selon  $\vec{u}_x$ .
2. Exprimer le flux thermique  $\delta\varphi$  traversant un élément de surface  $b\delta x$  de la paroi, de (1) vers (2), en fonction de  $b$ ,  $\delta x$ ,  $\lambda_m$ ,  $e$ ,  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$ .
3. On considère le système fermé constitué à l'instant  $t$  du liquide contenu dans la canalisation (1) entre les abscisses  $x$  et  $x + \delta x$ . À l'instant  $t + dt$ , ce système est compris entre  $x + vdt$  et  $x + \delta x + vdt$ .

- ▷ Montrer que sa variation d'énergie interne est  $U(t + dt) - U(t) = \mu c v a b \delta x \frac{dT_1}{dx}$ .
- ▷ En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $T_1(x)$ . En déduire sans calcul l'équation pour  $T_2$ .
- ▷ Montrer que ces équations peuvent se mettre sous la forme approchée :

$$\delta \cdot \frac{dT_1}{dx} = T_2 - T_1 = \delta \cdot \frac{dT_2}{dx}$$

à condition que la vitesse  $v$  soit suffisante.

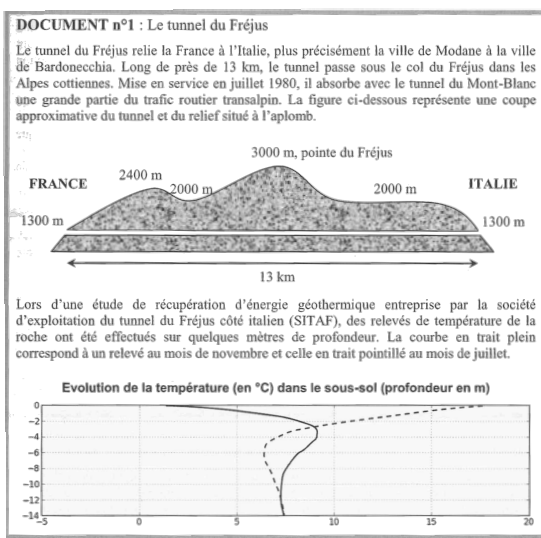
Exprimer  $\delta$  en fonction des données. Quelle est sa dimension ?

- ▷ Résoudre les équations ci-avant compte tenu des conditions aux limites. Discuter l'optimisation industrielle du rapport  $L/\delta$ , puis du choix de  $\lambda_m$ . Montrer qu'il faut trouver un compromis sur la vitesse  $v$ .

## ex 2. Température dans un tunnel

Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret

Lorsqu'on emprunte un long tunnel creusé sous un important massif montagneux, on peut être surpris par la température régnant à l'intérieur de celui-ci. Ce problème propose d'en comprendre l'origine et d'effectuer une étude quantitative dans le cas du tunnel du Fréjus.



### DOCUMENT n°2 : Quelques caractéristiques des roches alpines

Essentiellement constitué de roches granitiques, le massif des Alpes possède une hauteur moyenne de 2500 m. Le phénomène d'isostasie entraîne que la croûte continentale située sous les Alpes y est plus épaisse, avec une épaisseur de l'ordre de 45 km (contre 30 km en moyenne sur le globe terrestre). Les roches granitiques possèdent une conductivité thermique typiquement entre 2,5 et 4 W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> et une diffusivité de l'ordre de 1 mm<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>. Vers 3000 m d'altitude, la température de la roche à quelques mètres de profondeur est de l'ordre de -10°C, indépendamment des conditions météorologiques et des variations saisonnières.

Les roches granitiques contiennent une faible proportion d'éléments radioactifs. Les trois principaux isotopes radioactifs sont l'uranium (<sup>238</sup>U et <sup>235</sup>U), le thorium (<sup>232</sup>Th) et le potassium (<sup>40</sup>K). La désintégration de ces isotopes génère près de la surface une production interne de chaleur égale à 2,5 μW.m<sup>-3</sup>. La concentration des isotopes radioactifs diminue avec la profondeur, un modèle communément admis consiste à multiplier la production interne de chaleur à la profondeur  $z > 0$  par le facteur  $\exp(-z/h)$ , avec  $h = 10$  km.

A la surface, le flux thermique venant du sous-sol varie dans les Alpes cottiennes entre 60 et 80 mW.m<sup>-2</sup>. Ce flux a deux origines distinctes :

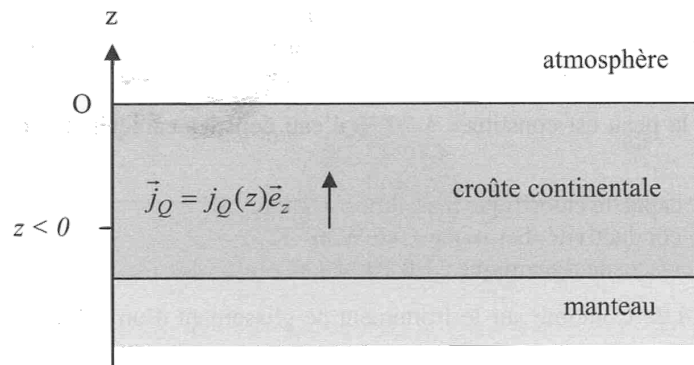
- la radioactivité naturelle dans la croûte continentale (évoquée précédemment) ainsi que dans le manteau,
- l'énergie primitive de la Terre issue de l'accrétion à l'origine de sa formation, une partie de l'énergie venant de la cristallisation du noyau terrestre.

### DOCUMENT n°3 : Laboratoire souterrain de Modane, d'après le site « <http://laguna.ethz.ch> » et « <http://www-lsm.in2p3.fr/> »

Le laboratoire souterrain de Modane (LSM) est un laboratoire français inauguré en 1982 situé à 1700 m sous la montagne au milieu du tunnel du Fréjus. Il est à ce titre le troisième laboratoire le plus profond au monde. Il accueille des expériences de physique des particules nécessitant un environnement protégé des rayons cosmiques, notamment pour l'étude des neutrinos ainsi que pour la recherche de la « matière noire ». Au niveau du laboratoire, la roche environnante a une température entre 28 et 30°C tout au long de l'année.

1. Justifier, par un calcul semi-quantitatif, le fait que les variations saisonnières n'affectent pas la température de la roche au-delà d'une dizaine de mètres de profondeur.

Pour simplifier la modélisation, on se place dans un problème unidimensionnel où la température ne dépend que de la profondeur  $z < 0$ , l'axe  $Oz$  étant ascendant et l'origine se situant à la surface. On note  $\lambda$  la conductivité thermique de la roche, supposée homogène, et  $P_{\text{vol}}(z) = P_0 \exp(z/h)$  la puissance thermique volumique dégagée par la roche à la profondeur  $z$ . Enfin, on note  $\vec{j}_Q = j_Q(z)\vec{e}_z$  le vecteur densité de flux thermique. On se place dans toute la suite en régime stationnaire dans la croûte continentale.



2. Établir l'équation locale reliant  $P_{\text{vol}}(z)$  et la dérivée de  $j_Q(z)$ . En déduire l'expression de  $j_Q(z)$  en fonction de  $j_Q(z = 0)$ .
3. Donner l'expression de  $T(z)$  en fonction de  $T(z = 0)$ .
4. Calculer la contribution de la radioactivité à l'intérieur de la croûte continentale dans le flux thermique surfacique au niveau du sol. Est-ce une contribution significative ?
5. Estimer la température à l'interface entre la croûte continentale et le manteau au niveau des Alpes.
6. À partir du modèle développé précédemment et des documents n° 1 et n° 2, estimer la température de la roche au milieu du tunnel de Fréjus. On accompagnera le résultat d'une incertitude. Est-ce en accord avec le document n° 3 ?

Les lecteurs intéressés par l'étude des flux thermiques dans la croûte terrestre trouveront des informations complémentaires dans l'article suivant :

M. JABOYEDOFF, Modèles thermiques simples de la croûte terrestre : un regard sur les Alpes, Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles, 86.4 : pp. 229-271.

Cet article est accessible à l'adresse :

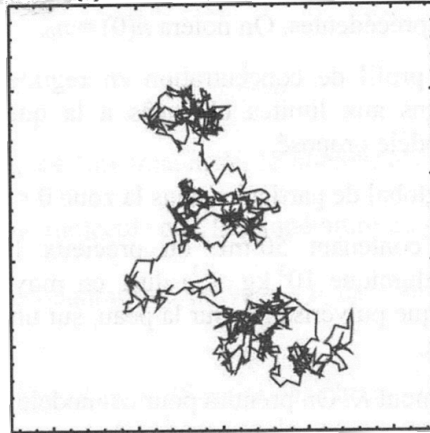
[http ://www.quanterra.org/Mod%E8leWo20thermique.pdf](http://www.quanterra.org/Mod%E8leWo20thermique.pdf)

### ex 3. Diffusion d'un parfum

*Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret*

La diffusion de particules permet de décrire la progression spatio-temporelle d'un ensemble de particules dans un milieu (gaz, liquide ou solide). À l'échelle microscopique, la diffusion moléculaire s'interprète de façon statistique. Après une étude dimensionnelle de la diffusion au voisinage de la peau, on se propose de déterminer l'ordre de grandeur d'un coefficient de diffusion dans l'air à l'aide d'un modèle statistique microscopique.

**Le déplacement aléatoire d'une particule dans un milieu est appelé mouvement brownien**

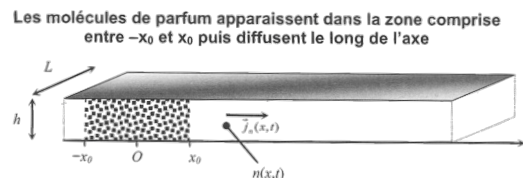


Auteur : PAR (domaine public)

La diffusion d'un parfum dans l'air peut avoir des conséquences... physiques !

Lorsqu'un parfum est pulvérisé sur la peau, le solvant, volatile, s'évapore et des molécules odorantes se retrouvent dans l'air et diffusent. On considère un modèle unidimensionnel permettant d'accéder à la concentration  $n(x, t)$  en parfum dans une couche d'air de largeur  $L$  et d'épaisseur  $h$  le long d'un axe  $Ox$  au voisinage de la peau. Après avoir pulvérisé du parfum sur la peau dans la zone comprise entre  $-x_0$  et  $+x_0$ , il apparaît  $K$  molécules de parfum par unité de volume et par unité de temps dans la couche d'air correspondante.

On appelle  $D$  le coefficient de diffusion du parfum dans l'air et on note  $\vec{j}_n(x, t) = j_n(x, t)\vec{e}_x$  le vecteur densité de courant de particules, la diffusion se faisant uniquement le long de l'axe  $Ox$ .



Le problème étant symétrique de part et d'autre de l'origine  $O$ , on cherche le profil de concentration uniquement pour  $x > 0$ .

1. A l'aide d'un bilan de particules dans la tranche située entre  $x$  et  $x + dx$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , établir l'équation différentielle vérifiée par la concentration  $n(x, t)$  pour  $0 < x < x_0$ . Que devient cette équation pour  $x > x_0$  ?
2. Comment évoluerait la concentration pour  $0 < x < x_0$  si l'on empêchait la diffusion en  $x = x_0$  ? Un régime stationnaire est-il possible ?  
On cherche à étudier le profil de concentration  $n(x)$  en régime stationnaire.
3. Établir l'équation vérifiée par  $n(x)$  dans chaque zone  $0 < x < x_0$  et  $x > x_0$ . En déduire l'expression générale de  $n(x)$  dans chaque zone en introduisant quatre constantes d'intégration.
4. Préciser les conditions aux limites en  $x = 0$  et en  $x = x_0$ . En déduire l'expression des constantes d'intégration précédentes. On notera  $n(O) = n_0$ .



5. Tracer l'allure du profil de concentration en régime stationnaire et interpréter graphiquement les conditions aux limites obtenues à la question précédente. Discuter brièvement la validité du modèle proposé.

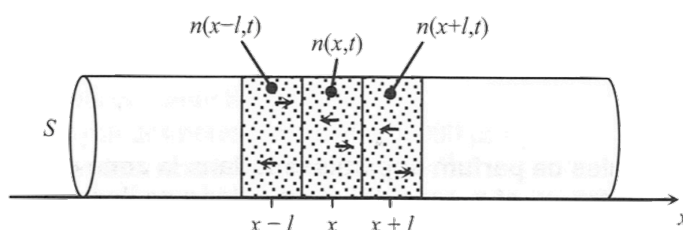
6. Effectuer un bilan global de particules dans la zone  $0 < x < x_0$ . Commenter.

Une bouteille de parfum contenant 50 mL du précieux liquide (de masse molaire 100 g/mol et de masse volumique  $10^3 \text{ kg/m}^3$ ) dure en moyenne 6 mois à raison de 2 pulvérisations par jour. Chaque pulvérisation sur la peau, sur une zone de 2 cm de côté, fait effet durant environ 5 heures.

7. Évaluer numériquement  $K$ . On prendra pour ce modèle  $h = 5 \text{ mm}$  et  $L = 2 \text{ cm}$ .

On souhaite à présent évaluer le coefficient de diffusion  $D$  du parfum dans l'air. On se place dans une zone sans source de particules ( $x > x_0$ ). Dans ce modèle microscopique simplifié, les particules se déplacent toutes avec la même vitesse  $u$ , identique à la vitesse quadratique moyenne de l'air, avec une probabilité  $\frac{1}{2}$  de se déplacer selon  $+\vec{e}_x$  et  $\frac{1}{2}$  de se déplacer selon  $-\vec{e}_x$ . Chaque particule se déplace en moyenne de la distance  $l$ , appelée libre parcours moyen, avant de subir un choc et de changer éventuellement de direction.

#### Modèle simple de diffusion unidimensionnelle



8. Exprimer la durée  $\tau$  que met une particule pour se déplacer de la distance  $l$ .
9. Exprimer la variation  $dN$  du nombre de particules situées dans la tranche d'abscisse  $x$  et d'épaisseur  $l$  entre les instants  $t$  et  $t + \tau$ .
10. Déterminer le nombre  $\delta N_e$  de particules qui entrent dans cette tranche entre  $t$  et  $t + \tau$  et le nombre  $\delta N_s$  de particules qui en sortent.
11. Écrire le bilan de particules pour la tranche d'abscisse  $x$  et simplifier la relation à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2.
12. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $n(x, t)$ . Commenter ce résultat. En déduire l'expression du coefficient de diffusion  $D$  en fonction de  $l$  et  $u$ .

La théorie cinétique des gaz parfaits permet de relier l'énergie cinétique moyenne d'une molécule du gaz à son agitation thermique, grâce à la relation (valable pour un gaz parfait diatomique) :

$$\frac{5}{2}k_B T = \frac{1}{2}mu^2$$

où  $k_B = \frac{R}{N_A}$  est la constante de Boltzmann,  $N_A$  le nombre d'Avogadro,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $m$  la masse d'une molécule et  $T$  la température du gaz.

13. Évaluer la vitesse quadratique moyenne  $u$  de l'air à la température ambiante  $T = 293 \text{ K}$ .

Le libre parcours moyen  $l$  dépend de l'efficacité des chocs subis par les particules dans le milieu. Pour des molécules supposées sphériques de rayon  $r$ , on estime que le libre

parcours moyen s'écrit :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

où  $\sigma = 4\pi r^2$  est la section efficace des chocs et  $n$  la densité volumique en molécules.

14. Évaluer la densité volumique en molécules d'air à la température ambiante.
15. Proposer un ordre de grandeur pour  $r$  et évaluer numériquement le libre parcours moyen  $l$  dans l'air.
16. En déduire une valeur numérique du coefficient de diffusion  $D$ .
17. Évaluer le temps caractéristique d'une diffusion de particules dans l'air sur une distance  $L = 1$  m. Commenter le résultat. Quel phénomène, non étudié ici, permettrait un transport plus efficace des molécules sur de grandes distances ?

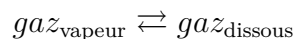
#### ex 4. Durée de vie d'une bulle

*Extrait de « La physique en application » ; Ellipse ; Carpentier-Dépret*

Une bulle est en général un objet éphémère. Généralement, sa fin de vie consiste à un éclatement de la partie la plus amincie du film de liquide (du fait de la gravité, il s'agit souvent de la partie supérieure de la bulle). Si cet effet ne venait pas à se produire, la bulle ne serait pas stable pour autant à long terme si le gaz qu'elle renferme peut se dissoudre dans le film. En effet, la tension superficielle crée une surpression dans la bulle : le gaz emprisonné à l'intérieur va alors diffuser à travers le film de la bulle, cette dernière voyant donc son rayon diminuer au cours du temps. Ce problème propose de quantifier ce phénomène.

On suppose le gaz identique et parfait à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle. Par ailleurs, on suppose la transformation isotherme à la température  $T$ . On note  $p_0$  la pression extérieure (constante) et  $p_i(t)$  la pression à l'intérieur de la bulle, de rayon  $R(t)$  et dont le film, de volume invariant  $V_{\text{film}}$ , possède une épaisseur  $e(t)$ , supposée très petite devant  $R(t)$ .

On donne la loi de Laplace :  $p_i(t) - p_0 = \frac{4\gamma}{R(t)}$ , où  $\gamma$  désigne la tension superficielle du film de la bulle. Enfin, on note  $D$  le coefficient de diffusion du gaz dans le film et l'on suppose a priori que le phénomène diffusif dans le film est en régime quasi-stationnaire. Par ailleurs, on suppose qu'il y a constamment l'équilibre thermodynamique de la réaction



à chaque interface. On note  $K$  la constante d'équilibre de cette réaction, de sorte que

$$\frac{n_{\text{dissous}}}{n_{\text{vapeur}}} = K,$$

où  $n$  représente le nombre de molécules de gaz par unité de volume. On rappelle que la constante de Boltzmann est reliée à la constante des gaz parfaits et au nombre d'Avogadro par la formule  $k_B N_A = R$ .

1. Quelle relation lie constamment  $R(t)$  et  $e(t)$  ?
2. Montrer que le flux de particules sortant de la bulle par diffusion peut s'écrire :

$$\Phi_p(t) = 16\pi \frac{\gamma DK}{k_B T} \frac{R(t)}{e(t)}$$

Indication : puisque  $e(t) \ll R(t)$ , on pourra considérer que la diffusion du gaz dans le film est un problème unidimensionnel.

3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $R(t)$ .
4. On suppose que  $p_0 \gg \frac{\gamma}{R(t)}$ . Simplifier l'équation et la résoudre en posant  $R_0$  le rayon initial de la bulle. En déduire le temps caractéristique  $\tau$  de disparition de la bulle.
5. Établir l'inégalité sur  $K$  et les autres paramètres du problème pour que l'hypothèse du régime de diffusion quasi-stationnaire soit légitime.

Le coefficient de diffusion de l'azote dans l'eau à 25 ° C vaut  $4,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La loi de Henry stipule que la concentration molaire d'un gaz dissous dans un liquide est proportionnelle à la pression partielle du gaz au contact du liquide, la constante de proportionnalité, notée  $H$ , est appelée la constante de Henry. Pour l'azote dans l'eau,  $H = 6,4 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$ .

6. Calculer la valeur de  $K$  associée à la dissolution de l'azote dans l'eau.
7. Estimer la durée de vie d'une bulle d'air de 1 cm de diamètre et dont le film, de  $10 \mu\text{m}$  d'épaisseur, est formé d'eau et de tensioactifs, pour lesquels  $\gamma = 20 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ .
8. Vérifier la validité des différentes approximations faites pour déterminer  $\tau$ .