

Cours de physique P11 (électrocinétique en régime continu et
mécanique)

Table des matières

I	Électrocinétique en régime continu	4
1	Les dipôles électrocinétiques	6
1.1	Courant électrique	6
1.1.1	Courant électrique et porteurs de charges	6
1.1.2	Intensité du courant électrique	6
1.2	Tension et potentiel	7
1.3	Dipôles électrocinétiques	8
1.3.1	Puissance électrique reçue par un dipôle	9
1.3.2	Caractéristique d'un dipôle	10
1.3.3	Classification des dipôles	10
1.3.4	Dipôles linéaires passifs classiques (3 seront étudiés ainsi que 2 cas particuliers)	11
1.3.5	Dipôles non linéaires passifs (ils sont nombreux)	14
1.3.6	Sources de tension et sources de courant	15
1.4	Association de dipôles en série et en parallèle	16
1.4.1	Association en série	16
1.4.2	Association en parallèle (ou en dérivation)	17
2	Les réseaux électriques linéaires	19
2.1	Définitions et problèmes posés	19
2.1.1	Définitions	19
2.1.2	Problèmes posés	19
2.2	Lois de Kirchhoff	20
2.2.1	Loi des nœuds	20
2.2.2	Loi des mailles	20
2.3	Association de conducteurs ohmiques	22

2.3.1	Association en série	22
2.3.2	Association en parallèle	23
2.3.3	Application au diviseur de tension	23
2.3.4	Application au diviseur de courant	24
2.3.5	Application du diviseur de tension au pont de Wheatstone	25
2.4	Association de sources linéaires idéales	25
2.5	Représentation de Thévenin et de Norton d'un dipôle actif linéaire	26
2.5.1	Modèle de Thévenin et de Norton	26
2.5.2	Application à la simplification d'un réseau	27
2.6	Théorème de superposition et Théorème de Thevenin	28
2.6.1	Théorème de superposition	28
2.6.2	Théorème de Thévenin	29
II	Mécanique du point matériel	31
1	Introduction, systèmes de coordonnées	32
1.1	Référentiel	32
1.2	Systèmes de coordonnées	33
1.2.1	Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	33
1.2.2	Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires (r, θ, z)	34
2	Cinématique du point	37
2.1	Trajectoire d'un point M	37
2.1.1	Équations paramétriques, cartésiennes, polaires de la trajectoire	37
2.1.2	Abscisse curviligne s	38
2.2	Vecteur déplacement élémentaire	39
2.3	Vecteur vitesse et vecteur accélération de M par rapport à un référentiel \mathfrak{R} . . .	41
2.3.1	Définition intrinsèque (c'est à dire indépendante de la base de projection)	41
2.3.2	Une remarque très importante : distinction entre référentiel et base de projection	41
2.3.3	Composantes cartésiennes et cylindriques des vecteurs vitesse et accélération	42
2.4	Mouvements particuliers	43
2.4.1	Mouvements rectilignes	43

2.4.2	Mouvements circulaires	45
2.4.3	Les mouvements à accélération centrale	46
3	Dynamique du point matériel	50
3.1	Les forces	50
3.1.1	Forces à distance	50
3.1.2	Forces de contact	53
3.2	Les principes de la dynamique	56
3.2.1	Principe d'inertie ou première loi de Newton	56
3.2.2	Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) ou deuxième loi de Newton	56
3.2.3	Principe des interactions réciproques ou troisième loi de Newton	56
3.3	Les diverses étapes du raisonnement de l'étude dynamique	56

Première partie

Électrocinétique en régime continu

Comme son nom l'indique, l'électrocinétique est l'étude du mouvement des charges électriques, c'est à dire des courants, dans les matériaux principalement. C'est une science jeune qui s'appuie sur les lois énoncées dès 1845 par le physicien allemand Gustav Kirchhoff, puis élargie dans le contexte général de l'électromagnétisme par Jens Maxwell en 1873.

Au premier semestre, l'étude se fera seulement en régime continu (ou stationnaire) c'est à dire que les grandeurs électriques (courant, tension) seront indépendantes du temps.

On utilisera les conventions internationales consistant à désigner les grandeurs en régime variable par des lettres minuscules en régime variable et par des lettres majuscules en régime stationnaire.

L'étude préalable du régime continu est essentielle pour plusieurs raisons :

- certains circuits fonctionnent uniquement en régime continu (circuit avec piles ou batterie) ;
- l'analyse est plus simple qu'en régime variable ;
- les lois de Kirchhoff établies historiquement en régime continu sont encore valables en régime variable à chaque instant, pourvu que cette variation ne soit pas trop rapide : $T \gg \tau_p$ où T est la durée caractéristique d'un changement significatif du signal et τ_p la durée nécessaire au signal pour se propager d'un point à l'autre du circuit. C'est l'approximation des régimes quasi stationnaires : ARQS. Dans un conducteur, le courant se propage à la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. Soit d la dimension caractéristique du circuit. Pour que le courant soit le même en tout point du circuit, il faut que $d \ll cT$. Ainsi, à 50 HZ on doit avoir $d \ll 6,0 \cdot 10^3 \text{ km}$, l'ARQS est donc largement valable à la fréquence du réseau électrique. La taille typique des circuits est de l'ordre du mètre, donc l'ARQS est valable pour des fréquences $f \ll 300 \text{ MHz}$.

Les dipôles électrocinétiques

1.1 Courant électrique

1.1.1 Courant électrique et porteurs de charges

Définition : Le courant électrique correspond à un déplacement d'ensemble de particules chargées. Il existe trois types de déplacement des charges électriques :

- ★ le courant de conduction : mouvement de charges dans un milieu (électrons de conduction dans les métaux, ions dans un électrolyte....) ;
- ★ le courant de convection : des charges fixes se trouvent sur un objet qui est en mouvement (par exemple dans le manteau terrestre) ;
- ★ le courant particulaire : un faisceau de particules chargées se déplace dans le vide (par exemple dans un oscilloscope).

Nous nous intéresserons uniquement aux courants de conduction. Les charges qui participent à la conduction du courant peuvent être de nature différente suivant le système considéré :

- ★ conducteur métallique : ce sont les électrons libres du métal qui permettent la conduction du courant (dans un conducteur comme le cuivre, utilisé pour les fils électriques, il y a environ 10^{30} électrons libres par m^3 : chaque atome en libère un en moyenne, et la distance inter-atomique dans un métal est de l'ordre de $10^{-10}\text{m} = 1 \text{ \AA}$) ;
- ★ solution électrolytique : les ions présents dans la solution servent à conduire le courant électrique ;
- ★ semi-conducteur : il existe deux types de semi-conducteurs, selon le type de porteur de charge mis en jeu. Dans les semi-conducteurs de type N (N comme négatif), ce sont les électrons libres, tout comme dans les métaux, alors que dans ceux de type P (P comme positif), ce sont des "trous" qui permettent la conduction électrique (un "trou" correspond à un électron manquant au voisinage d'un atome, ce déficit pouvant se déplacer dans la structure du semi-conducteur comme le font les électrons libres). Un semi-conducteur, comme le silicium ou le germanium, conduit moins bien le courant qu'un conducteur métallique (le nombre de porteurs par unité de volume est de l'ordre de 10^{20} par m^3), néanmoins ses propriétés le rendent très intéressant, et toute l'électronique moderne en utilise (diodes, transistors,).

1.1.2 Intensité du courant électrique

L'intensité I d'un courant électrique est la charge mobile totale δq_m qui traverse, dans un sens donné, choisi à priori, une section fictive ou réelle, pendant l'unité de temps dt :

$$I = \frac{\delta q_m}{\delta t}$$

L'intensité du courant apparaît donc comme un débit ou flux de charge électrique mobile. C'est une quantité algébrique dont le signe est celui de la charge qui traverse la surface dans le sens convenu.

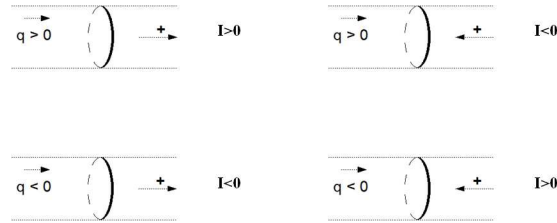


FIGURE 1.1 – Signe de I pour un déplacement de charges positives puis négatives

Donc si on connaît le sens réel du courant, on choisit $I > 0$ dans le sens du courant réel.

Si on ne connaît pas le sens réel du courant (par exemple quand il y a plusieurs générateurs), on choisit un sens positif pour I ; si l'application des lois donne :

- $I > 0$, le sens réel du courant est celui du sens initialement choisi ;
- $I < 0$, cela signifie que le sens du courant est opposé au sens positif initialement choisi.

L'intensité s'exprime en ampère (A), soit en coulomb par seconde.

Dans l'ARQS, la relation demeure vraie à chaque instant.

Quelques ordres de grandeurs :

- ★ en électronique I est de quelques mA ;
- ★ dans les appareils ménagers I_{max} est de l'ordre de 10 A (i est sinusoïdal) ;
- ★ dans les lignes à haute tension (HT) : 500 A ;
- ★ 10^4 A pour la foudre.

L'intensité du courant électrique se mesure avec un ampèremètre, branché donc en série comme sur la figure 1.2.

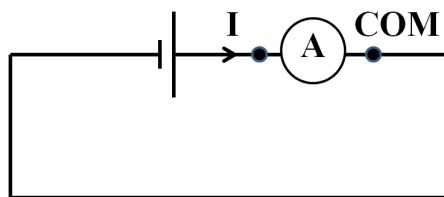


FIGURE 1.2 – Branchement d'un ampèremètre

L'ampèremètre ne doit pas résister au passage du courant donc sa résistance R_A doit être faible.

1.2 Tension et potentiel

Définition : on appelle tension, la différence de potentiel électrique (ddp) (cette notion sera précisée au 2^{ème} semestre en électrostatique) entre 2 points A et B d'un circuit :

$$U_{AB} = V_A - V_B$$

Dans l'ARQS, cette définition garde son sens à chaque instant :

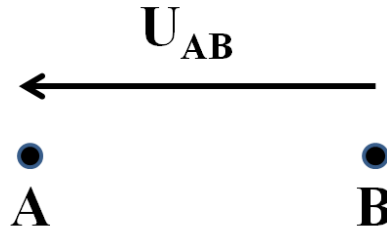


FIGURE 1.3 – Tension entre deux points

$$u_{AB} = V_A(t) - V_B(t)$$

Une tension s'exprime en volt (V).

Comme l'intensité du courant électrique, la tension est une grandeur algébrique : si $U_{AB} > 0$ cela signifie que $V_A > V_B$; $U_{AB} < 0$ signifie que $V_A < V_B$.

La tension entre deux points quelconques d'un circuit se mesure avec un voltmètre, donc branché en parallèle. Pour ne pas dériver une partie du courant, le voltmètre doit avoir une résistance R_V élevée.

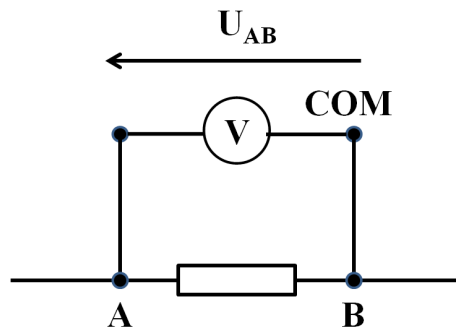


FIGURE 1.4 – Branchement d'un voltmètre

1.3 Dipôles électrocinétiques

Définition : comme son nom l'indique, un dipôle électrocinétique est un composant électrique qui possède deux bornes A et B. On le caractérise par deux seules grandeurs : l'intensité i du courant qui le traverse et la tension u ou différence de potentiel (ddp) entre ses bornes.

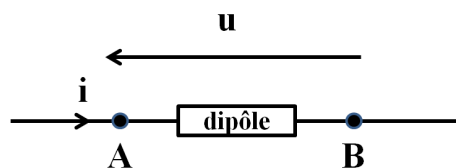


FIGURE 1.5 – Dipôle

Dans le chapitre suivant, les dipôles seront reliés entre eux pour former un réseau électrique.

1.3.1 Puissance électrique reçue par un dipôle

En régime stationnaire ou quasi stationnaire, la puissance électrique que peut dissiper un dipôle est un paramètre important de son fonctionnement. En effet, c'est sa prise en compte qui permet d'éviter sa détérioration, voire sa destruction.

La puissance électrique P **reçue** par un dipôle AB est en régime stationnaire : $P = U_{AB}I_{AB}$ où I_{AB} est l'intensité du courant mesurée dans le sens A vers B et $U_{AB} = V_A - V_B$.

Le choix adopté ici, qui consiste à travailler avec U_{AB} et I_{AB} , est appelé la convention récepteur puisque U_{AB} et I_{AB} sont de même signe pour un dipôle qui reçoit effectivement une puissance. Quand $P > 0$, le dipôle est dit **récepteur**.

Certains dipôles électrocinétiques ne reçoivent pas de puissance électrique, mais au contraire, en fournissent : $P < 0$; ce sont des **générateurs** électriques. Dans ce cas, la puissance électrique reçue par le dipôle, $P = U_{AB}I_{AB}$, est négative. Aussi, on s'intéresse alors à la puissance électrique utile P_u qu'ils fournissent au milieu extérieur et qui a pour expression $P_u = -P = -U_{AB}I_{AB} = U_{AB}I_{BA}$. Pour cette raison, on dit, lorsqu'on écrit la puissance électrique d'un dipôle sous cette

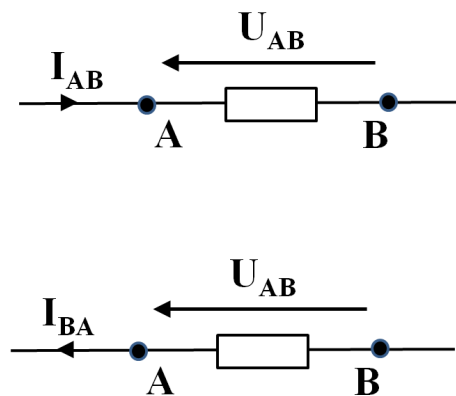


FIGURE 1.6 – Convention récepteur et convention générateur

dernière forme $U_{AB}I_{BA}$, que la convention adoptée est la convention générateur.

Notons qu'un dipôle électrocinétique peut se comporter soit en récepteur soit en générateur selon les conditions d'utilisation. Par exemple, une batterie connectée sur un circuit d'utilisation se comporte en générateur alors que la même batterie en charge est un récepteur.

Pour simplifier, nous adopterons principalement la convention récepteur, dite du système égoïste, selon laquelle la puissance considérée est toujours la puissance algébrique reçue par le dipôle AB. Ce qui revient à écrire $P = U_{AB}I_{AB}$. Si cette puissance est positive, le système reçoit effectivement de l'énergie. Si cette puissance est négative, le système perd de l'énergie en la fournissant au circuit.

La puissance électrique s'exprime en watt (W).

Quelques ordres de grandeurs :

- ★ une lampe de poche à incandescence, les téléphones portables consomment environ 1 W ;
- ★ les ordinateurs consomment quelques 100 W ;
- ★ un four électrique consomme de l'ordre de 1 kW ;

★ une centrale nucléaire produit de l'ordre d'un GW (10^9 W).

1.3.2 Caractéristique d'un dipôle

On constate que l'on ne peut imposer à un dipôle qu'une **seule** des 2 grandeurs stationnaires U ou I . La relation entre U et I définit sa caractéristique, c'est à dire une courbe qui représente l'ensemble des états électriques possibles du dipôle. Lorsque l'une des grandeurs est imposée par les conditions d'utilisation, l'autre l'est aussi. Le point correspondant sur la caractéristique est le point de fonctionnement (F).

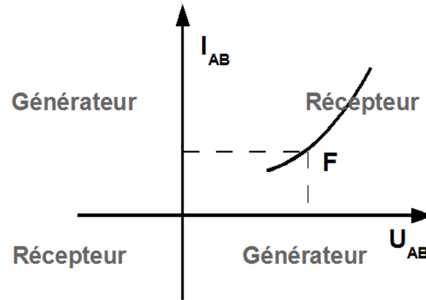


FIGURE 1.7 – Caractéristique d'un dipôle avec la convention récepteur

1.3.3 Classification des dipôles

Dipôles symétriques ou polarisés

Un dipôle est **symétrique** lorsque ses bornes jouent le même rôle : sa caractéristique est alors symétrique par rapport à l'origine. Dans le cas contraire, le dipôle est dit **polarisé**. Le sens du branchement est alors important car les deux bornes ne jouent pas le même rôle.

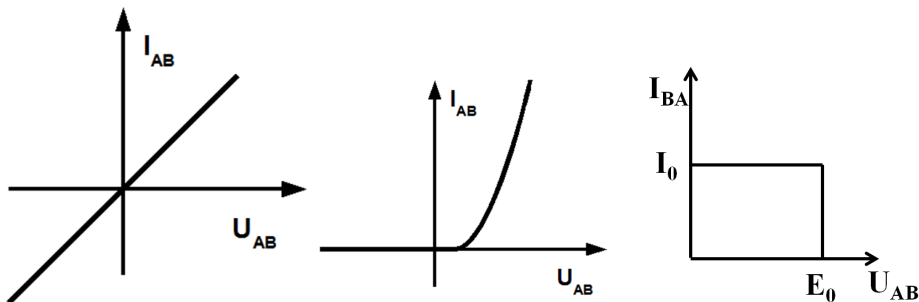


FIGURE 1.8 – Caractéristiques de dipôles symétrique (conducteur ohmique) et polarisés (diode et alimentation stabilisée)

Dipôles passifs

Un dipôle, et plus généralement un composant de circuit électronique, est **passif** s'il n'échange de l'énergie qu'avec le circuit auquel il est connecté. La caractéristique d'un dipôle passif passe par l'origine. Exemples : conducteur ohmique (reçoit de l'énergie électrique et la transforme en énergie thermique), condensateur, bobine, diode à jonction.

Dipôles actifs

Un dipôle est **actif** s'il échange de l'énergie non seulement avec le circuit dont il fait partie mais aussi s'il en reçoit d'une source auxiliaire. La caractéristique d'un dipôle actif ne passe pas par l'origine.

Exemples :

- ★ piles du commerce (source auxiliaire de nature chimique) ;
- ★ alternateurs (source auxiliaire de nature mécanique) ;
- ★ amplificateur opérationnel (source auxiliaire de nature électrique).

Attention : ne pas confondre avec dipôle générateur et récepteur. Exemple : un condensateur est un dipôle passif et il se comporte comme un récepteur pendant sa charge et un générateur pendant sa décharge.

Dipôles linéaires

Un dipôle est dit **linéaire** lorsque l'intensité i qui le traverse et la tension u à ses bornes sont reliées par une équation linéaire entre ces grandeurs (sa caractéristique est une droite) ou entre leurs dérivées par rapport au temps.

1.3.4 Dipôles linéaires passifs classiques (3 seront étudiés ainsi que 2 cas particuliers)

Les conducteurs ohmiques ou résistors

Un résistor est un dipôle récepteur qui satisfait à la loi d'Ohm selon laquelle l'intensité i qui le traverse est proportionnelle à la tension u à ses bornes. C'est le dipôle le plus utilisé.

Ainsi pour un résistor de bornes A et B, on a : $u_{AB} = Ri_{AB}$ ou $i_{AB} = Gu_{AB}$.

Sa caractéristique $I_{AB} = f(U_{AB})$ est donc une droite qui passe par l'origine et dont la pente est définie par la conductance G (en siemens S) ou par l'inverse de sa résistance R (en ohm Ω).

Attention : retenir $u = Ri$ avec les flèches de u et i opposées ! Sinon $u = -Ri$.

Un résistor est un dipôle symétrique : le retournement du dipôle par permutation des bornes ne change pas le circuit.

Remarque : on confond souvent, par abus de langage, le composant résistor avec la résistance R qui le caractérise.

La puissance reçue par un conducteur ohmique vaut $P = u_{AB}i_{AB} = Ri_{AB}^2$. Elle est toujours positive, le conducteur ohmique est donc un dipôle récepteur. L'énergie reçue pendant une durée t $\int_0^t Ri^2 dt$ provoque l'échauffement de la résistance. Ce phénomène thermique s'appelle l'effet Joule.

Les valeurs de R utilisées varient entre quelques ohms et plusieurs mégohms.

Les fils conducteurs et les interrupteurs parfaits

Les fils conducteurs Les fils de connexion entre dipôles sont des conducteurs ohmiques de résistance négligeable devant les autres résistances du circuit.

On montre que pour un conducteur cylindrique de section s et de longueur l , la résistance vaut $R = \frac{\rho l}{s} = \frac{l}{\gamma s}$ où γ est la conductivité du conducteur, c'est à dire son aptitude à laisser circuler les charges. A. N. : un fil de cuivre de longueur 30 cm, de section 1 mm², de conductivité $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ Sm}^{-1}$ a une résistance R de 5 mΩ. Cette valeur est bien très inférieure aux autres résistances du circuit, on peut donc considérer que $R_{fil} = 0$.

Interrupteurs Lorsqu'ils sont fermés, les interrupteurs sont de simples fils de connexion ; on peut alors les assimiler à des fils de résistance négligeable. Ouverts, ils ne laissent passer aucun courant : leur résistance est très grande devant les autres résistances du circuit.

Condensateurs

Les condensateurs sont constitués de deux armatures conductrices séparées par un isolant. Elles portent des charges opposées.

Un condensateur idéal est caractérisé par sa capacité C , telle que $q_A = C u_{AB}$. C s'exprime en farad (F). On peut retenir cette formule sous la forme $q = C u$ avec la flèche de la différence

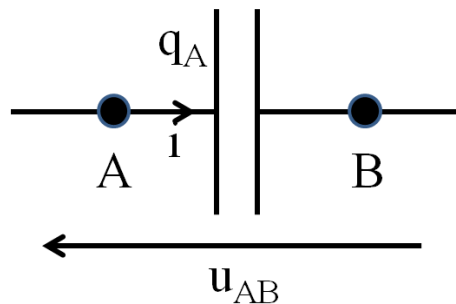


FIGURE 1.9 – Définition de la capacité d'un condensateur

de potentiel u du côté de l'armature qui porte la charge q . Dans ces conditions, pour i orienté vers cette armature, on a :

$$i = \frac{dq_A}{dt} = C \frac{du_{AB}}{dt}$$

La puissance reçue par un condensateur vaut $P = ui = uC \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u^2 \right)$. Elle peut être positive ou négative : un condensateur se comporte en récepteur pendant sa charge et en générateur pendant sa décharge. L'énergie emmagasinée par un condensateur vaut $E_{em} = \frac{1}{2} C u^2$.

En régime stationnaire, $u_{AB} = \text{constante}$, donc $i = 0$: un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, c'est à dire un coupe-circuit.

Remarque : pour un condensateur réel, l'isolant n'étant pas parfait il y a des charges qui traversent l'isolant (il y a des fuites) : ainsi on représente un condensateur réel par un condensateur idéal en parallèle avec un résistor.

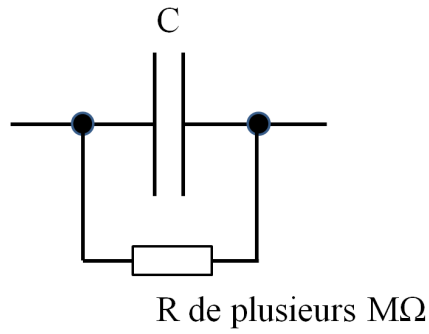


FIGURE 1.10 – Condensateur réel

Bobines

Les bobines sont obtenues par l'enroulement d'un fil conducteur sans support ou sur un support non magnétique (verre). Une bobine idéale est caractérisée par son inductance L telle que :

$$u_{AB} = L \frac{di_{AB}}{dt}$$

L s'exprime en henry (H). Une bobine réelle, du fait de la résistance du fil d'enroulement se

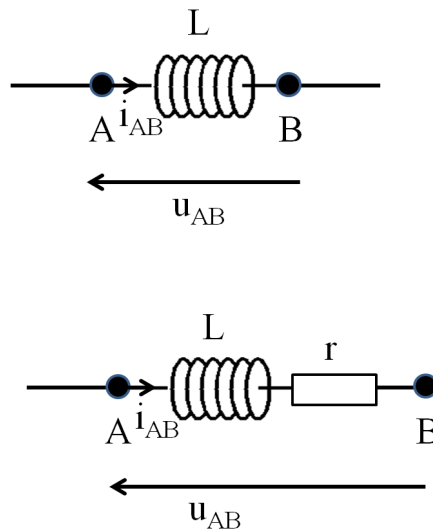


FIGURE 1.11 – Bobine idéale et bobine réelle

comporte comme une bobine idéale en série avec un résistor de sorte que $u_{AB} = ri_{AB} + L \frac{di_{AB}}{dt}$.

La puissance reçue par une bobine vaut $P = ui = Li \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$. Elle peut être positive ou négative : une bobine peut se comporter en récepteur ou en générateur. L'énergie emmagasinée par une bobine vaut $E_{em} = \frac{1}{2} Li^2$.

En régime stationnaire, $i = \text{constante}$, donc $u = ri$: une bobine idéale se comporte comme un fil (court-circuit) ; une bobine réelle comme un résistor dont la résistance est celle du bobinage.

1.3.5 Dipôles non linéaires passifs (ils sont nombreux)

Diode à jonction

La caractéristique d'une diode à jonction idéale est donnée par la figure 1.12.

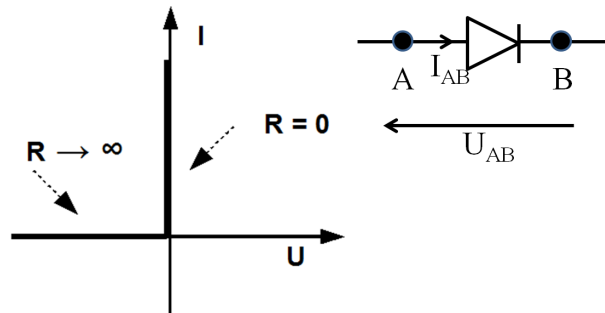


FIGURE 1.12 – Caractéristique d'une diode idéale

Une diode idéale est un dipôle qui ne laisse passer le courant que dans un seul sens sans lui opposer de résistance.

C'est donc un composant non symétrique qui se comporte comme un interrupteur ouvert dans un sens et fermé dans l'autre. Le symbole « flèches » indique le sens passant et la « barre » indique le sens bloqué.

Les diodes réelles à jonction présentent des écarts par rapport à la diode idéale :

- ★ branchées en sens direct, elles laissent passer un courant mais en opposant une résistance statique $R = U/I$ dont la valeur dépend du point de fonctionnement ;
- ★ pour une tension supérieure à une valeur caractéristique U_d de l'ordre de 0,6 V, appelée tension seuil de la diode, le courant devient notable.

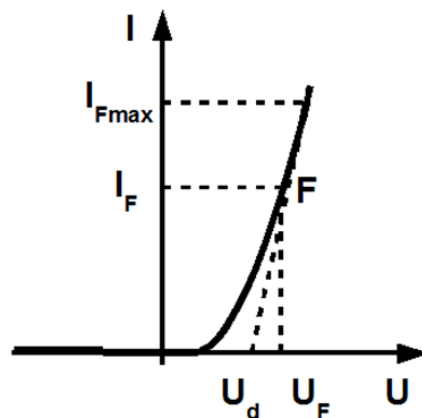


FIGURE 1.13 – Caractéristique d'une diode réelle

Diode Zener

La caractéristique d'une diode Zener est donnée figure 1.14. Les diodes Zener sont des diodes à jonction qui deviennent passantes en sens inverse lorsque la tension à leurs bornes atteint une valeur seuil U_Z fixée, appelée tension Zener qui est de l'ordre de quelques V.

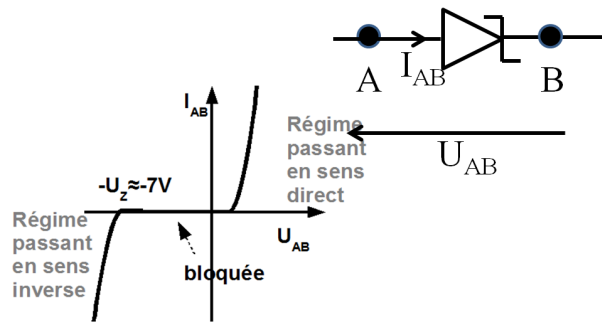


FIGURE 1.14 – Caractéristique d’une diode zéner

Lampe à incandescence

La résistance d’un conducteur métallique augmente avec la température. Lorsque le courant augmente dans une lampe à incandescence la dissipation d’énergie chauffe le filament, généralement en tungstène, ce qui entraîne un accroissement de la résistance de la lampe.

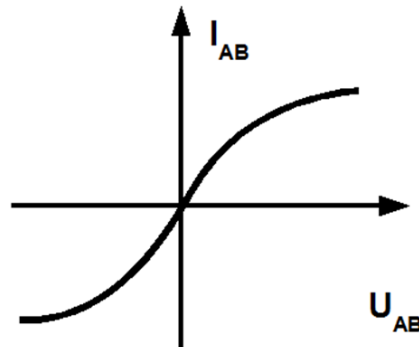


FIGURE 1.15 – Caractéristique d’une lampe à incandescence

1.3.6 Sources de tension et sources de courant

On ne s’intéresse qu’aux sources indépendantes du reste du circuit et non aux commandées ou liées pour lesquelles E et I_0 sont déterminés par une autre partie du circuit.

Sources de tension

Une source de tension idéale est un dipôle qui maintient, entre ses bornes, une tension quelque soit l’intensité du courant débité. Cette tension constante est appelée la f.e.m. de la source. En fait la tension U_{AB} aux bornes d’une source de tension réelle décroît avec l’intensité du courant débité : $U_{AB} = E - R_i I$ où R_i est la résistance interne du générateur de tension.

La fem E apparaît comme étant la tension à vide ($I = 0$) de la source de tension réelle, c’est à dire la tension entre ses bornes quand rien n’est connecté entre A et B.

Exemples de source de tension :

- ★ une pile LR14 (moyenne) : $E = 1,5 \text{ V}$ et $R_i \approx \text{quelques } \Omega$; une batterie de voiture : $E = 12 \text{ V}$ et $R_i \approx \text{quelques } 0,01 \Omega$.

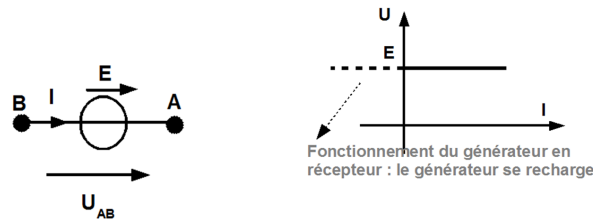


FIGURE 1.16 – Schéma et caractéristique d'une source de tension idéale

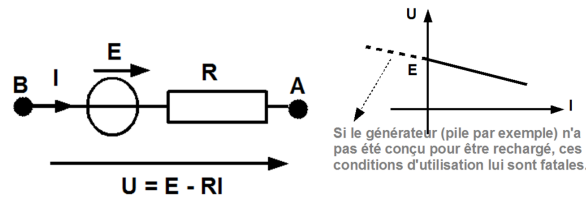


FIGURE 1.17 – Schéma et caractéristique d'une source de tension réelle

Sources de courant

Une source de courant idéale débite un courant I_0 appelé courant électromoteur ou courant de court-circuit, quelque soit la tension à ses bornes. En fait pour une source réelle de courant,

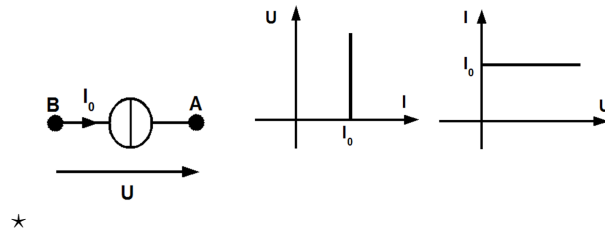


FIGURE 1.18 – Schéma et caractéristique d'une source de courant idéale

l'intensité I diminue quand la tension U augmente : $I = I_0 - GU_{AB}$ où R est la résistance interne du générateur de courant.

Le cem I_0 apparaît comme étant le courant de court-circuit ($U = 0$) de la source de courant réelle, c'est à dire le courant entre A et B quand un fil relie A et B.

Exemples de générateur de courant : cellules photoélectriques, ohmmètres, antennes.

1.4 Association de dipôles en série et en parallèle

1.4.1 Association en série

Dans l'association série, on impose aux dipôles d'être parcourus par le même courant, il faut donc mettre en commun une borne de chacun d'entre eux. Le nouveau dipôle est formé avec les deux autres bornes laissées libres.

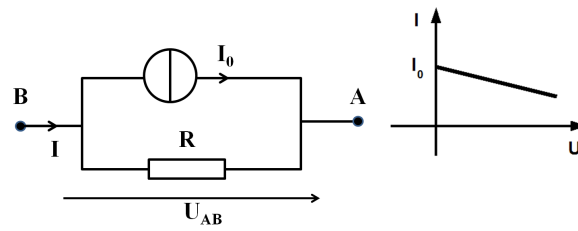


FIGURE 1.19 – Schéma et caractéristique d’une source de courant réelle

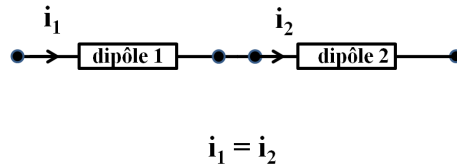


FIGURE 1.20 – Association série

1.4.2 Association en parallèle (ou en dérivation)

Une autre façon d’associer deux dipôles est de les connecter borne à borne. Il en résulte que la tension à leurs bornes est la même.

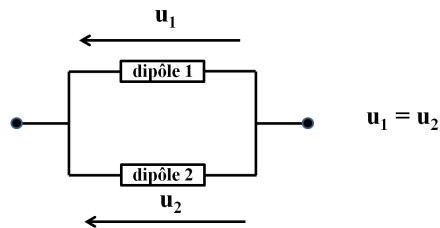


FIGURE 1.21 – Association parallèle

Remarque : des dipôles ne sont pas forcément associés en série ou en parallèle. Par exemple, sur la figure 1.22 : D_2 et D_4 ou D_3 et D_7 ...ne sont associés ni en série ni en parallèle.

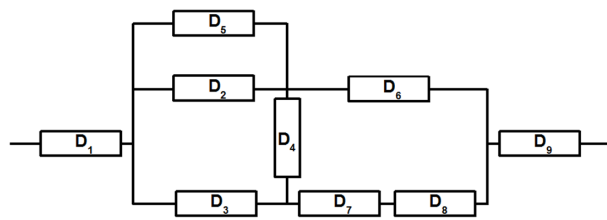


FIGURE 1.22 –

Les réseaux électriques linéaires

2.1 Définitions et problèmes posés

2.1.1 Définitions

Un réseau électrique (ou circuit) est un ensemble de composants reliés entre eux par des conducteurs de résistance négligeable. Le réseau contient au moins une source de tension ou de courant. Un réseau est constitué de b branches connectées par n nœuds et formant m mailles.

- ★ Un **nœud** est un point de jonction entre, au moins, 3 fils de connexion.
- ★ Une **branche** est un ensemble de dipôles montés en série entre deux nœuds consécutifs.
- ★ Une **maille** est un ensemble de branches formant une boucle fermée et ne passant qu'une fois, au plus, par un nœud donné.
- ★ Un **point de masse** est le point de référence (point par rapport auquel toutes les tensions sont exprimées) de potentiel électrique nul. On adopte le plus souvent pour masse d'un circuit une borne du générateur qui est souvent la borne négative du générateur en courant continu.

Exemple : déterminer le nombre de nœuds, de branches, de mailles dans le circuit de la figure 3.3.

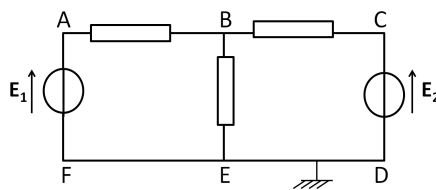


FIGURE 2.1 – Circuit d'étude

- 2 Nœuds : B et E
- 3 Branches : FAB, BCD, BE
- 3 Mailles : ABEFA, BCDEB, ABCDEFA
- points de masse : F, E, D.

2.1.2 Problèmes posés

Déterminer le courant I_k passant dans une branche k , ou dans chaque branche k , ou déterminer la tension aux bornes d'un des dipôles. Il existe plusieurs méthodes qui reposent sur des lois, des théorèmes.

2.2 Lois de Kirchhoff

2.2.1 Loi des nœuds

Elle traduit que la charge électrique est une grandeur conservative, c'est à dire que la variation de la charge électrique d'un système ne peut être due qu'à des transferts de charges avec l'extérieur du système : il ne peut y avoir création ni destruction de charge électrique.

En régime stationnaire (ou dans le cadre de l'ARQS), la charge ne varie pas au cours du temps, ce qui signifie que toutes les charges qui pénètrent dans un volume V en ressortent : il n'y a pas accumulation de charges aux nœuds d'un circuit. **Il en résulte que la somme des intensités des courants qui arrivent à un nœud N est égale à la somme des intensités qui en repartent.** Cette loi souligne bien l'importance de ne pas oublier l'orientation du courant électrique sur un circuit.

Autre formulation : la somme algébrique des intensités des courants arrivant à un nœud est nulle :

$$\sum \epsilon_k i_k = 0 \text{ avec } \epsilon_k = +1 \text{ si le courant arrive et } \epsilon_k = -1 \text{ sinon.}$$

Voir l'exemple de la figure 2.2.

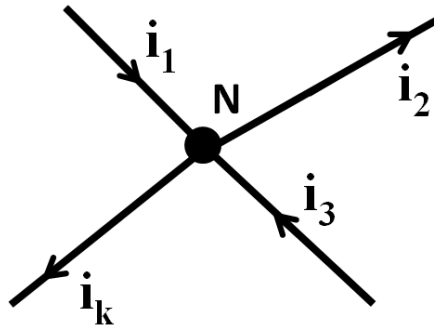


FIGURE 2.2 – Exemple d'application de la loi des nœuds : $i_1 + i_3 = i_2 + i_k$

2.2.2 Loi des mailles

Elle traduit que le potentiel électrique en un point ne dépend que de ce point.

Le potentiel électrique V_A ne dépend que du point A et par définition $U_{AA} = V_A - V_A$ or $U_{AA} = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D + V_D - V_A$ donc $U_{AA} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA}$, c'est la loi d'additivité des tensions.

Soit la maille ABCDE de la figure 2.3.

Il en résulte que la somme algébrique des tensions aux bornes des branches successives d'une maille parcourue dans un sens déterminé est nulle.

Ainsi, on choisit un sens de parcours positif, et on écrit $\sum \epsilon_k u_k = 0$ avec $\epsilon_k = +1$ si la flèche de u_k est dirigée dans le sens positif et $\epsilon_k = -1$ sinon.

Application : déterminer l'intensité des courants I_1, I_2, I_3 pour le circuit de la figure 3.3.

On choisit arbitrairement un sens positif pour les intensités des courants, par exemple comme

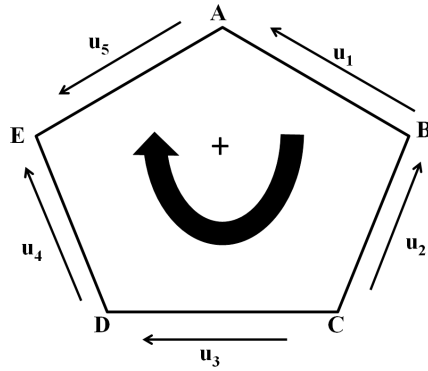


FIGURE 2.3 – Loi des mailles : $U_{AA} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EA} = 0$ soit $u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 = 0$

sur la figure 2.4. Il y a 3 inconnues il faut donc trouver 3 équations.

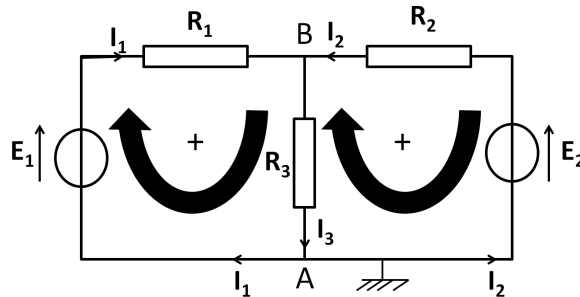


FIGURE 2.4 –

Loi des nœuds en B : $I_1 + I_2 = I_3$

Loi des mailles : la grande maille contient les deux petites mailles donc il ne sert à rien d'appliquer la loi des mailles avec la grande maille mais il faut le faire avec les deux petites mailles :

$$\begin{aligned} E_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 &= 0 \\ E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

Réolvons le système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2 \end{cases}$$

Tirer par exemple I_1 de la première équation, le remplacer dans la deuxième ce qui donnera I_2 et I_3 . En tirer par exemple I_2 puis le remplacer dans la troisième équation ce qui nous donnera I_3 . Puis le reporter dans la deuxième équation ce qui nous donnera I_2 puis dans la première équation ce qui nous donnera I_1 .

Remarques :

- ★ c'est une méthode systématique qui marche tout le temps mais qui est fastidieuse (calculatoire) et qui donne tous les courants alors que souvent on n'en veut qu'un seul ; donc on simplifiera l'analyse du circuit en s'appuyant sur les associations en série et en parallèle de conducteurs ohmiques, de sources de tension, de sources de courant, d'où la suite du cours ;

- ★ lorsque le système donnant les intensités comporte plus de 3 équations il faut utiliser la méthode de Cramer qui fait intervenir des déterminants (cf : algèbre linéaire en fin d'année en maths).

Résolution par élimination - substitution :

$I_1 = -I_2 + I_3$, on reporte dans la 2^e équation d'où $-R_1 I_2 + (R_1 + R_3) I_3 = E_1$ puis on multiplie la 2^e par R_2 et la 3^e par R_1 . On obtient :

$$I_3 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

On multiplie la 2^e équation par $-R_3$ et la 3^e par $R_1 + R_3$. On obtient :

$$I_2 = \frac{-R_3 E_1 + (R_1 + R_3) E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Puis comme $I_1 = I_3 - I_2$, on obtient :

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3) E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

2.3 Association de conducteurs ohmiques

2.3.1 Association en série

Par définition les dipôles sont parcourus par la même intensité I .

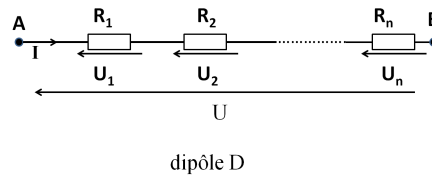


FIGURE 2.5 – Dipôle D

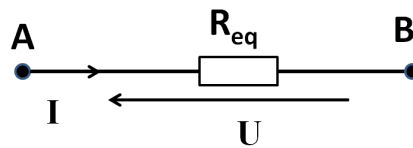


FIGURE 2.6 – Dipôle équivalent

Pour le dipôle D de la figure 2.5 :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ &= R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \\ &= \left(\sum_{k=1}^n R_k \right) I \end{aligned}$$

Pour le dipôle équivalent de la figure 2.6 :

$$U = R_{eq} I$$

donc

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k.$$

2.3.2 Association en parallèle

Par définition les dipôles sont soumis à la même tension U .

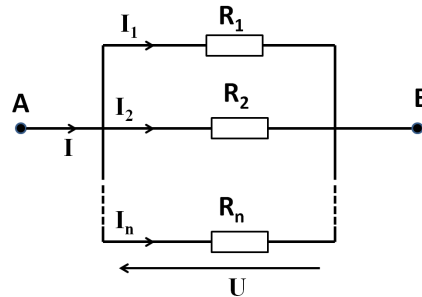


FIGURE 2.7 – Dipôle D

Pour le dipôle D de la figure 2.7 :

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

d'après la loi des noeuds. Or

$$U = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_n I_n$$

donc

$$I_k = \frac{U}{R_k} = G_k U$$

soit

$$I = \left(\sum_{k=1}^n G_k \right) U$$

Pour le dipôle équivalent de la figure 2.6 :

$$I = G_{eq} U$$

donc

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^n G_k$$

ou

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

2.3.3 Application au diviseur de tension

La connexion des bornes d'une source de tension à celles de deux résistors connectés en série forme un montage très simple appelé diviseur de tension (figure 2.8).

La loi des mailles donne : $E = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)I$ d'où

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

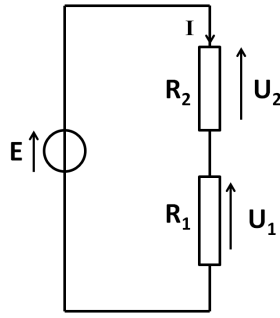


FIGURE 2.8 – Diviseur de tension

et donc

$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

et

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

U_1 est donc un certain nombre de fois E , ce nombre étant la résistance 1 sur la résistance totale.

2.3.4 Application au diviseur de courant

La version est analogue à celle du diviseur de tension. La connexion des bornes d'une source de courant à celles de deux résistors connectés en parallèle forme, elle aussi, un montage simple appelé : diviseur de courant (figure 2.9).

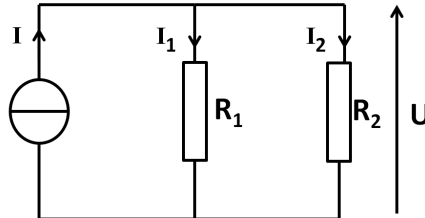


FIGURE 2.9 – Diviseur de courant

La loi des noeuds donne : $I = I_1 + I_2$ or $U = R_1 I_1 = R_2 I_2$ d'où

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = (G_1 + G_2)U$$

soit

$$U = \frac{I}{G_1 + G_2}$$

et donc

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

I_1 est donc un certain nombre de fois le courant total I , ce nombre étant la résistance 2 sur la résistance totale.

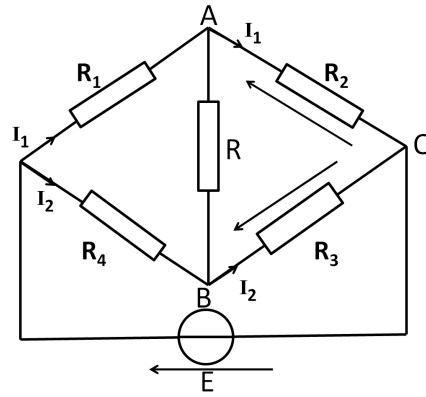


FIGURE 2.10 – Pont de Wheatstone

2.3.5 Application du diviseur de tension au pont de Wheatstone

On dit que le pont est équilibré quand le courant entre A et B est nul, soit dans la résistance R . Quelle est alors la relation entre les quatre résistances R_1, R_2, R_3, R_4 ?

Quand le pont est équilibré cela entraîne le même courant dans R_1 et R_2 et le même courant dans R_3 et R_4 . On reconnaît donc deux diviseurs de tension, d'où :

$$V_A - V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) E$$

et

$$V_B - V_O = \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) E$$

et donc

$$V_A - V_B = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) E = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E$$

lorsque le pont est équilibré.

Le pont de Wheatstone est utilisé pour mesurer une résistance.

Principe : on choisit par exemple $R_1 = R_2$, R_3 est une résistance variable et R_4 est la résistance à mesurer.

Entre A et B, à la place de R on peut utiliser comme détecteur :

- ★ soit un ampèremètre : on fait varier R_3 jusqu'à avoir un courant I nul dans l'ampèremètre. Comme $V_A - V_B = RI$ alors $V_A - V_B = 0$ et alors $R_1 R_3 = R_2 R_4$;
- ★ soit un voltmètre : comme sa résistance interne tend vers l'infini, on a encore le même courant dans R_1 et R_2 et le même courant dans R_3 et R_4 . La relation démontrée est encore valable. On fait varier R_3 jusqu'à avoir $V_A - V_B = 0$ et alors $R_1 R_3 = R_2 R_4$.

2.4 Association de sources linéaires idéales

- ★ Les sources de tension idéales ne peuvent être qu'en série (figure 2.11).
La source de tension idéale équivalente a une force électromotrice égale à la somme algébrique des forces électromotrices d'après la loi des mailles.
- ★ Les sources de courant idéales ne peuvent être qu'en parallèle (figure 2.12).
La source de courant idéale équivalente débite un courant électromoteur égal à la somme algébrique des courants électromoteurs d'après la loi des nœuds.

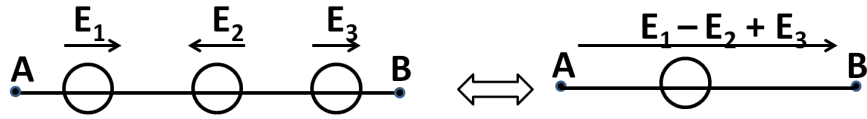


FIGURE 2.11 –

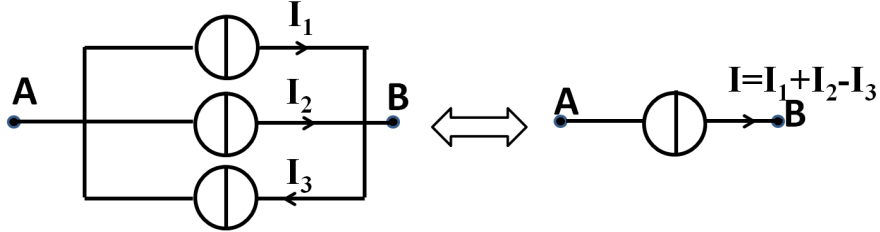


FIGURE 2.12 –

2.5 Représentation de Thévenin et de Norton d'un dipôle actif linéaire

2.5.1 Modèle de Thévenin et de Norton

En 1883, le physicien français Léon Thévenin a montré que tout dipôle linéaire peut être représenté par l'association série d'une source de tension idéale et d'un résistor comme sur la figure 2.13.

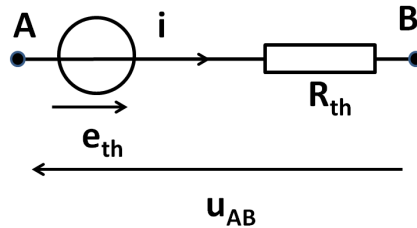


FIGURE 2.13 – Représentation de Thévenin

$$u_{AB} = R_{th}i - e_{th}$$

d'où

$$i = \frac{u_{AB}}{R_{th}} + \frac{e_{th}}{R_{th}} = \frac{u_{AB}}{R_N} + i_N$$

Donc on peut représenter le générateur entre les points A et B par une source de courant idéale de cem

$$i_N = \frac{e_{th}}{R_{th}}$$

en parallèle avec un résistor de résistance $R_N = R_{th}$ comme sur la figure 2.14.

Cette représentation s'appelle la **représentation de Norton** du nom de l'ingénieur américain Edward Norton qui en fut à l'origine en 1926.

Attention au sens des flèches de e_{th} et i_N : elles doivent être dans la même sens pour avoir

$$i_N = +\frac{e_{th}}{R_{th}}!!!$$

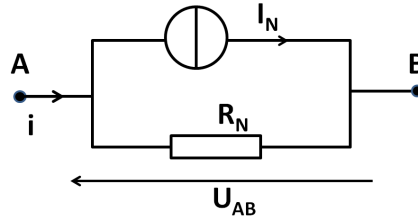


FIGURE 2.14 – Représentation de Norton

2.5.2 Application à la simplification d'un réseau

On utilise les équivalences entre la représentation de Thévenin et celle de Norton ainsi que les lois d'association de résistors et de sources idéales vues précédemment.

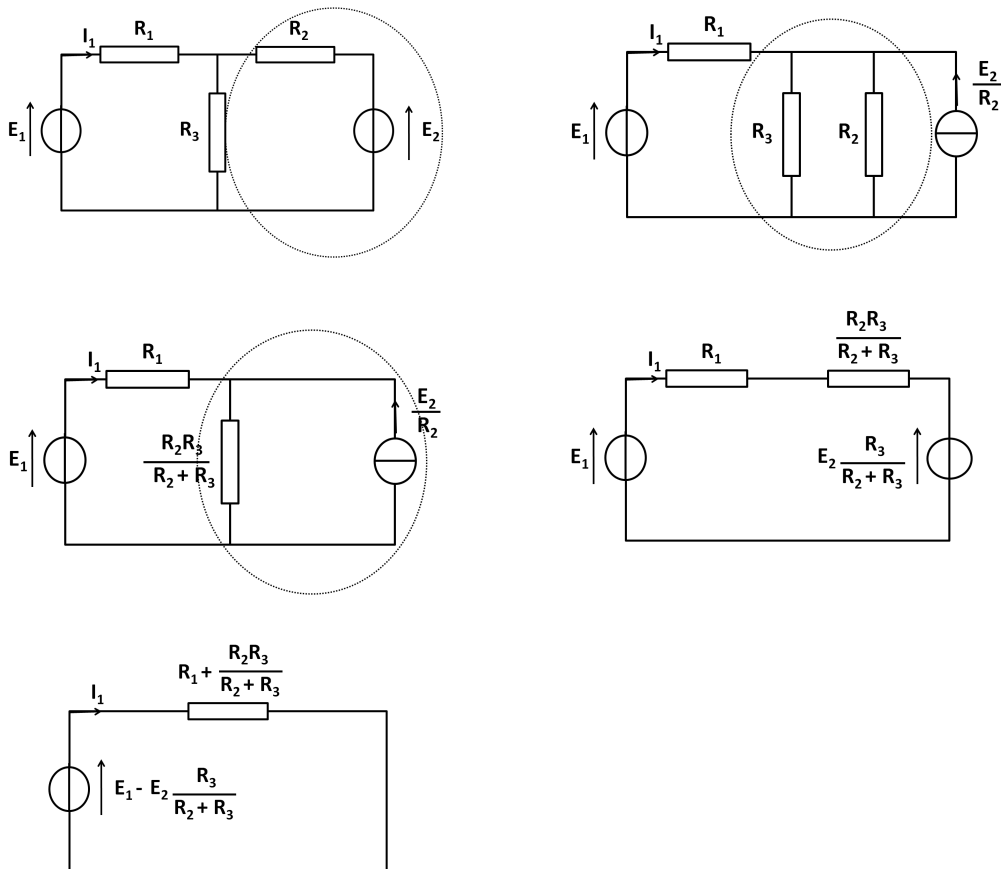
Donc, lorsque des sources réelles sont en série il faut d'abord les transformer en leur représentation de Thévenin avant de les associer.

De la même manière avant d'associer des sources en parallèle il faut les représenter selon le modèle de Norton.

Donc il faut chercher en premier si les sources réelles sont associées en série ou en parallèle.

Exemple : déterminer I_1 pour le montage de la figure 3.3.

Attention : ne pas toucher à la branche qui contient I_1 .



donc

$$I_1 = \frac{E_1 - \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_2}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{E_1(R_2 + R_3) - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

On retrouve l'expression obtenue par les lois de Kirchhoff.

2.6 Théorème de superposition et Théorème de Thevenin

2.6.1 Théorème de superposition

Après résolution du problème général d'un circuit linéaire par les lois de Kirchhoff, on constate toujours que l'intensité des courants dans les différentes branches du réseau est une combinaison linéaire des forces électromotrices $I_1 = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots$ avec les coefficients λ_j qui sont des fonctions des résistances R_j du réseau.

Ce qui entraîne le théorème de superposition :

Dans un réseau linéaire alimenté par plusieurs sources indépendantes, le courant produit dans une branche est la somme algébrique des courants produits par chacune des sources seules, les autres étant éteintes ou rendues passives.

Éteindre une source de tension signifie ramener sa f.e.m à 0, il faut donc la remplacer par un fil.

Éteindre une source de courant signifie ramener son c.e.m à 0, il faut donc la remplacer par un interrupteur ouvert.

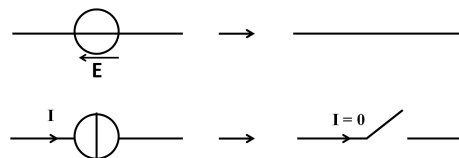
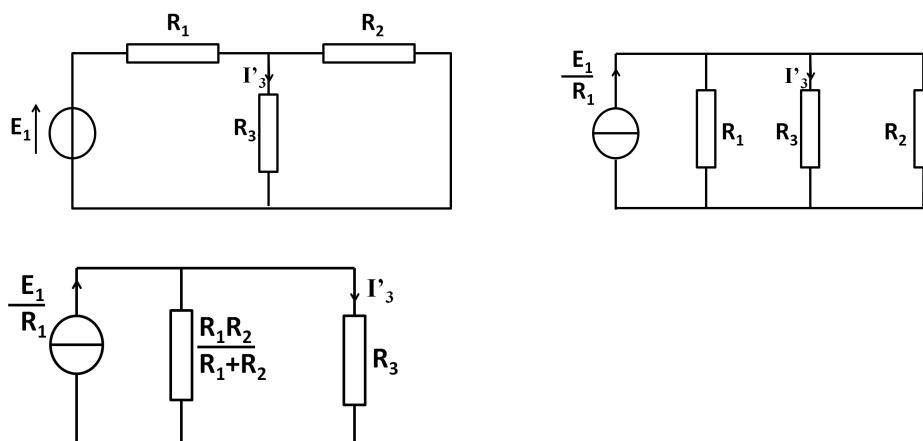


FIGURE 2.15 – Éteindre une source

À l'aide de la figure 2.15 on remarque l'intérêt des symboles des sources : dans les schémas, il suffit à chaque fois d'enlever le cercle.

Exemple : déterminer I_3 pour le montage de la figure 3.3.

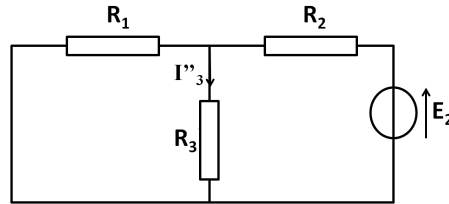
Premier état : on éteint la source de tension 2



La formule du diviseur de courant donne :

$$I'_3 = \frac{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \frac{E_1}{R_1} = \frac{R_2 E_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Deuxième état : on éteint la source de courant 1



On constate qu'il suffit de changer les indices du premier cas : 1 en 2, 2 en 1, 3 en 3.

D'où

$$I''_3 = \frac{R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

et donc

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

On retrouve l'expression obtenue par les lois de Kirchhoff.

2.6.2 Théorème de Thévenin

En 1883, l'ingénieur télégraphe français Léon Thévenin cherche à déterminer l'intensité du courant qui circule dans un résistor branché aux bornes d'un réseau linéaire actif. Il énonce alors le théorème suivant :

Tout réseau linéaire actif vu de deux points A et B est équivalent à un générateur de tension dont :

- ★ la force électromotrice E_{th} est égale à la différence de potentiel à vide $(U_{AB})_0$ entre les deux points A et B. À vide signifie que les points A et B ne sont pas reliés par le résistor.
- ★ la résistance interne R_{th} est égale à la résistance du réseau vu de A et B (c'est à dire sans le résistor) quand tous les générateurs ont été passivés.

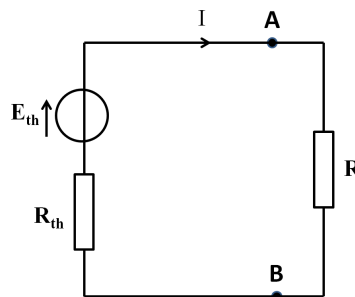
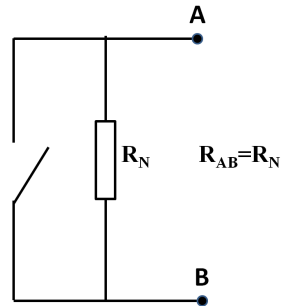
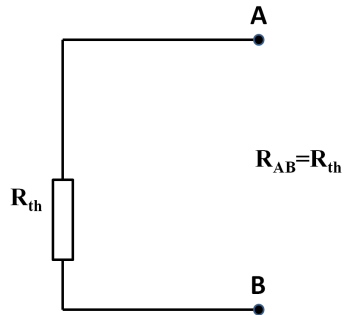
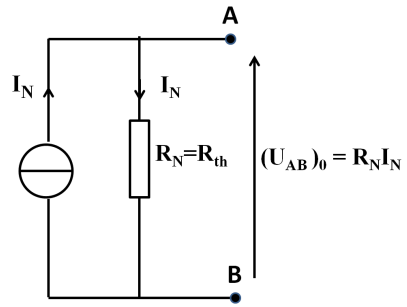
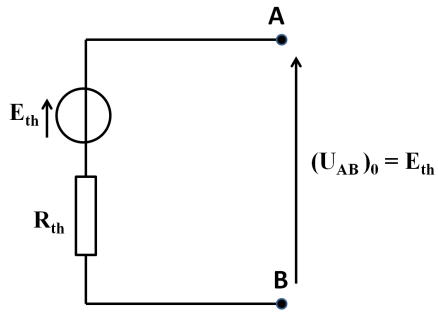


FIGURE 2.16 – Théorème de Thévenin

L'intensité I du courant qui parcourt le résistor branché entre A et B dans le circuit de la figure 2.16 est donnée par l'expression :

$$I = \frac{E_{th}}{R_{th} + R}$$

Ce théorème justifie les modélisations de Thévenin et de Norton vues précédemment car :



Deuxième partie

Mécanique du point matériel

Introduction, systèmes de coordonnées

La mécanique est le domaine de la physique consacré à l'étude des *mouvements* de systèmes matériels. On peut distinguer deux parties :

- **La cinématique** qui s'intéresse seulement à la description de ces mouvements.
- **La dynamique** qui se propose de relier les causes (forces appliquées) aux effets (déplacement d'un corps).

En L1, on ne traite que la mécanique du point matériel, c'est à dire d'un objet de masse m dont les dimensions sont telles qu'il peut être assimilé à chaque instant à un point M .

Remarques :

- un point matériel ne tourne pas sur lui-même.
- un solide peut être assimilé à un point matériel G si on limite l'étude de son mouvement à celui de son centre d'inertie.

On commence par la cinématique, or l'étude du mouvement d'un corps nécessite un repérage préalable dans l'espace et dans le temps.

1.1 Référentiel

Le mouvement d'un système dépend de l'observateur.

Exemple : la valve d'une roue de vélo qui avance en ligne droite.

- ★ Par rapport au vélo : la valve a un mouvement circulaire. La trajectoire est un cercle.
- ★ Par rapport à une personne immobile sur la terre : la valve a un mouvement cycloïdal. La trajectoire est une cycloïde.

Donc il faut toujours dire par rapport à quel observateur on définit le mouvement du système. L'observateur, appelé aussi solide de référence (S), est supposé parfaitement rigide. Le plus souvent c'est la Terre.

Pour décrire le mouvement du système, c'est-à-dire pour pouvoir dire "il est là, à tel instant", on a besoin de le repérer dans l'espace et d'une horloge.

Ce qui entraîne qu'à cet observateur, on attache :

- ▷ un repère : un point O et 3 axes fixes (Oxyz) par rapport à l'observateur = repère cartésien $R(O, B)$ où $B = \text{BOND}$ base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
 - ▷ plus une horloge : n'importe quel système physique au comportement périodique.
- L'ensemble observateur auquel on associe Repère + Horloge constitue le référentiel \mathfrak{R} .

Exemple de référentiel : le référentiel terrestre, on dit aussi référentiel du laboratoire.

Remarques :

- Il existe une infinité de repères liés à un observateur donné : toute origine fixe et toute base constituée de vecteurs constants pour cet observateur.
- En mécanique classique ($v \ll c$ avec $c = 3.10^8 \text{ ms}^{-1}$) le temps est le même dans tous les référentiels, ce qui n'est pas le cas en mécanique relativiste (cf. L2) donc un repère suffit en L1.
- $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une BOND : on applique la règle du tire-bouchon ou règle de la main droite : on place le tire-bouchon perpendiculairement au plan (\vec{u}_x, \vec{u}_y) , on tourne le tire-bouchon de \vec{u}_x vers \vec{u}_y . Il progresse selon \vec{u}_z (voir figure 1.1).

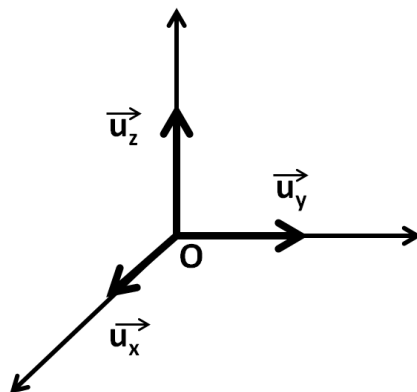


FIGURE 1.1 – $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une base orthonormée directe

1.2 Systèmes de coordonnées

Dans l'espace à trois dimensions, la position d'un mobile M est déterminée par le vecteur position qui, projeté dans une BOND $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3$$

où q_1, q_2, q_3 sont les coordonnées de M dans cette base. Ce sont des grandeurs algébriques.

Il existe différents systèmes de coordonnées : cartésien, cylindrique, polaire, sphérique (voir en S2) que l'on adoptera suivant la symétrie du problème posé.

1.2.1 Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

C'est le système le plus simple à définir, mais pas souvent, le plus adapté.

$$x = \overline{OH_1}$$

x est l'abscisse de M.

$$y = \overline{OH_2}$$

y est l'ordonnée de M.

$$z = \overline{OH_3}$$

z est la cote de M.

$$x, y, z \in]-\infty, +\infty[$$

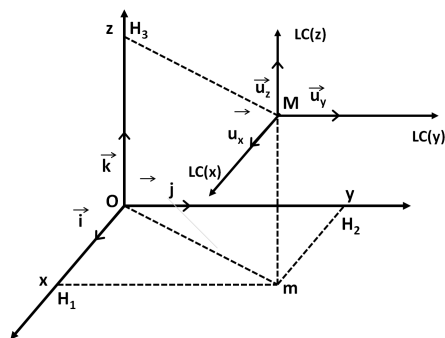


FIGURE 1.2 – Coordonnées cartésiennes (x, y, z)

On va imaginer un déplacement de M dans l'espace, en augmentant une seule coordonnée. La courbe obtenue s'appelle la ligne coordonnée $q_i : LC(q_i)$. Les vecteurs unitaires tangents à ces lignes coordonnées constituent la base locale en M : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Elle est confondue avec la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans cette base :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

1.2.2 Coordonnées cylindriques ou cylindro-polaires (r, θ, z)

Elles sont utilisées quand le problème considéré présente une symétrie cylindrique ou quand le mouvement est plan.

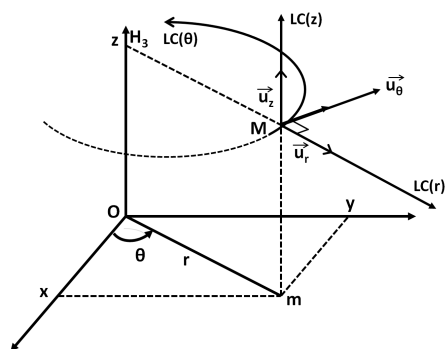


FIGURE 1.3 – Coordonnées cylindriques (r, θ, z)

$$r = Om = H_3M, r \in [0, +\infty[$$

$$\theta = (\widehat{Ox, Om}), \theta \in [0, 2\pi]$$

θ s'appelle l'angle polaire.

$$z = \overline{OH_3}, z \in]-\infty, +\infty[$$

z est la cote de M.

Ce système de coordonnées convient bien à l'étude des mouvements plans puisque dans un plan $z = \text{constante}$ l'étude se ramène alors à celle du mouvement de m en coordonnées polaires .

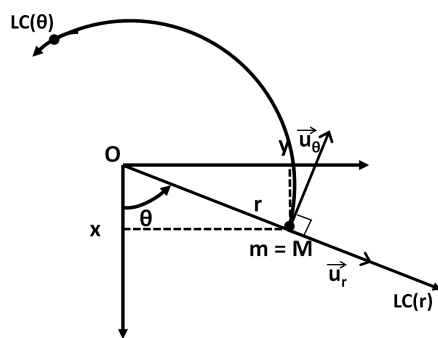


FIGURE 1.4 – Coordonnées polaires (r, θ)

- Formules de changement de coordonnées :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

- On imagine un déplacement de M dans l'espace en augmentant une seule coordonnée, ce qui donne : $LC(r)$, $LC(\theta)$ = cercle d'axe Oz, de centre H, de rayon r. D'où la base locale en M (BOND) : $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

\vec{u}_r est appelé vecteur radial

\vec{u}_θ est appelé vecteur orthoradial

\vec{u}_z est appelé vecteur axial

Dans cette base :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + m\vec{M} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

Applications :

- ★ Représenter la base polaire en M_1 , M_2 , M_3 sur la figure 1.5.
- ★ Tracer une courbe en repérage polaire avec une règle et un rapporteur ou avec du papier polaire pour les 2 cas suivants :

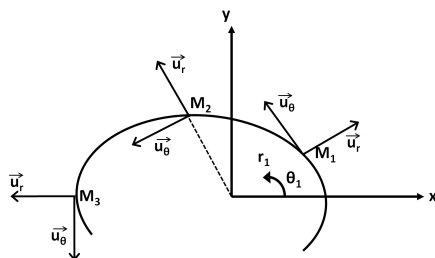


FIGURE 1.5 – Représenter la base polaire en M_1 , M_2 , M_3

1. $r = 2R \cos \theta$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ et avec $R = 2,0$ cm.

Comme $r(-\theta) = r(\theta)$ on limite l'étude de 0 à 90 degrés.

$\theta(^{\circ})$	0	20	40	60	80	90
r(cm)	4,0	3,8	3,1	2,0	0,7	0,0

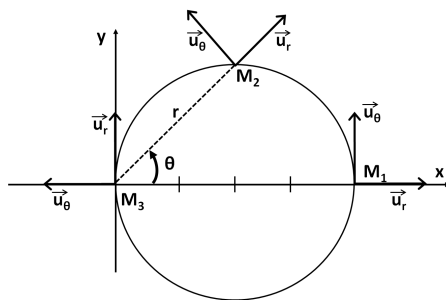


FIGURE 1.6 – Courbe d'équation polaire $r = 2R \cos \theta$

2. $r = k \exp \frac{\theta}{360}$ avec θ en degré, $k = 3,0$ cm et $\theta \in [-90, 360]$

$\theta(^{\circ})$	-90	-60	-30	0	30	60	90	120
r(cm)	2,3	2,5	2,8	3,0	3,3	3,5	3,9	4,2
$\theta(^{\circ})$	150	180	210	240	270	300	330	360
r(cm)	4,5	4,9	5,4	5,8	6,5	6,9	7,5	8,2

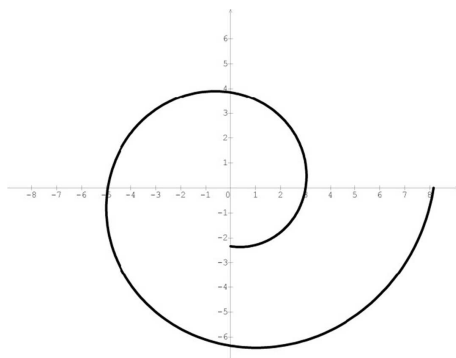


FIGURE 1.7 – Courbe d'équation polaire $r = k \exp \frac{\theta}{360}$

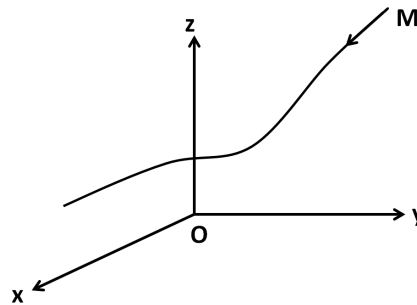
La courbe est une portion de spirale logarithmique.

Cinématique du point

2.1 Trajectoire d'un point M

Le mouvement d'un point M peut être repéré par la donnée de son vecteur position \overrightarrow{OM} considéré comme une fonction de l'instant t.

La trajectoire du point M dans son mouvement relativement au référentiel \mathfrak{R} est la courbe orientée décrite par le point M au cours du temps.



$R(O, x, y, z)$ est le repère attaché au référentiel \mathfrak{R} .

La trajectoire est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur \overrightarrow{OM} au cours du temps.

2.1.1 Équations paramétriques, cartésiennes, polaires de la trajectoire

Si M est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y, z :

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$

forment les équations paramétriques cartésiennes de la trajectoire.

Exemple :

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{cases}$$

a, b, ω sont des constantes positives.

Si on élimine le temps, on obtient l'équation cartésienne de la trajectoire : $f(x, y, z) = 0$.

Exemple : avec l'exemple précédent :

$$\frac{x}{a} = \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \frac{y}{b} = \sin(\omega t)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

La trajectoire est une ellipse de centre O, d'axes Ox et Oy, de demi-axes a et b représentée sur la figure 2.1.

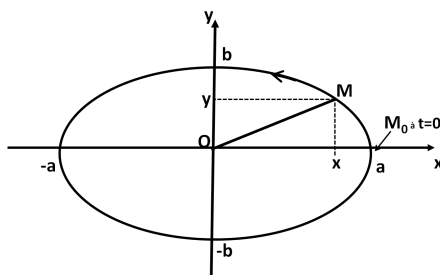


FIGURE 2.1 – Trajectoire d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Rq. : Si $a = b$ l'équation devient $x^2 + y^2 = R^2$. C'est l'équation d'un cercle de centre O, de rayon R.

Exemple : $r(t) = r_0 e^{\omega t}$ avec $\theta = \omega t$ soit $r(t) = r_0 e^{\theta}$.

La trajectoire est une spirale logarithmique (voir chapitre 1).

Exemple :

$$\overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x(t) = a \cos \omega t \\ y(t) = b \sin \omega t \\ z(t) = h \omega t \end{array} \right.$$

a, ω, h sont des constantes positives. En projetant dans le plan (xOy) on obtient $x^2 + y^2 = a^2$, m décrit donc un cercle (O, a).

z augmente proportionnellement à t. La trajectoire est une hélice inscrite sur un cylindre d'axe Oz, de rayon a.

Les équations paramétriques cylindriques de la trajectoire sont :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = a \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \omega t \\ z &= h \omega t \end{aligned}$$

2.1.2 Abscisse curviligne s

Lorsqu'on connaît la trajectoire décrite par un mobile, il est commode d'introduire l'abscisse curviligne s.

s est la longueur de l'arc décrit par M, comptée à partir d'une position M_0 .

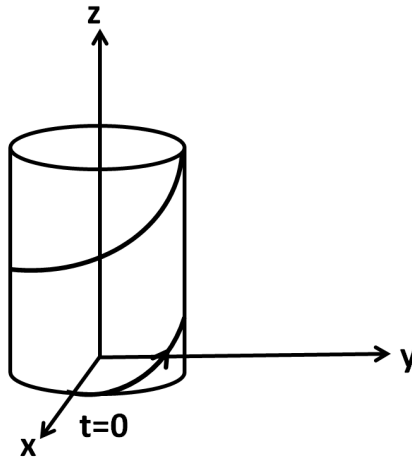


FIGURE 2.2 – La trajectoire est une hélice

2.2 Vecteur déplacement élémentaire

Rappel fondamental de mathématique :

$$f'(a) = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en $x = a$.

Donc quand x varie peu ($\Delta x \rightarrow 0$) on peut confondre la variation de f (Δf) avec la différentielle de f (df) :

$$\Delta f \approx df$$

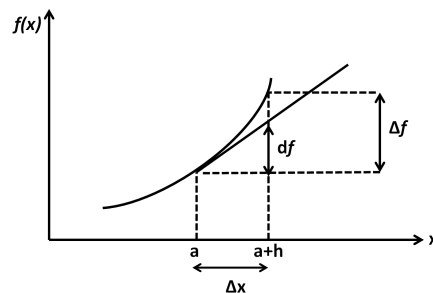


FIGURE 2.3 – $\Delta f \approx df$ quand x varie peu

En physique : On s'intéresse à un point qui se déplace dans l'espace à 3 dimensions au cours du temps : il occupe la position M à t et M' à $t + \Delta t$.

On prend une durée infinitésimale donc $\Delta t \approx dt$.

On a :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \Delta \overrightarrow{OM} \approx d\overrightarrow{OM}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ est donc peu différent de $d\overrightarrow{OM}$.

Pour exprimer ce vecteur dans les 2 systèmes de coordonnées vus, il suffit de sommer les 3 petits déplacements suivant chacune des lignes coordonnées.

- En coordonnées cartésiennes :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \overrightarrow{u}_x + dy \overrightarrow{u}_y + dz \overrightarrow{u}_z$$

- En coordonnées cylindro-polaires :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \overrightarrow{u}_r + r d\theta \overrightarrow{u}_\theta + dz \overrightarrow{u}_z$$

Remarque : on retrouve les expressions de $d\overrightarrow{OM}$ obtenues graphiquement en différentiant le vecteur \overrightarrow{OM} . On obtient en coordonnées cylindriques :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \overrightarrow{u}_r + r d\overrightarrow{u}_r + dz \overrightarrow{u}_z$$

On montrera plus loin que $d\overrightarrow{u}_r = d\theta \overrightarrow{u}_\theta$.

Lien avec l'abscisse curviligne :

$$\|d\overrightarrow{OM}\| = ds$$

Donc si on veut obtenir la longueur d'une trajectoire, il suffit d'exprimer ds et d'intégrer sur toute la trajectoire.

Exemple : soit l'équation paramétrique polaire (tracée précédemment) : $r = 2R \cos \theta$ avec $\theta = \omega t$ et $\omega = cte$. La trajectoire est un cercle (C,R).

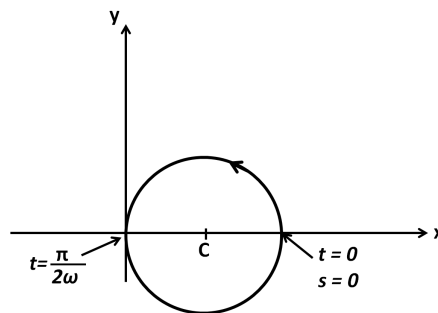


FIGURE 2.4 – Abscisse curviligne à $t = \frac{2\pi}{\omega}$

Déterminer la longueur L parcourue entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

À l'instant $t = \frac{\pi}{2\omega}$ on a $\theta = \frac{\pi}{2}$. On doit donc trouver $L = \pi R$.

$$d\overrightarrow{OM} = dr \overrightarrow{u}_r + r d\theta \overrightarrow{u}_\theta = 2R \sin \theta d\theta \overrightarrow{u}_r + 2R \cos \theta d\theta \overrightarrow{u}_\theta$$

Donc :

$$\|d\overrightarrow{OM}\| = ds = 2R d\theta = 2R \omega dt$$

et

$$s(t) = \int ds = \int_{t=0}^t 2R \omega dt = 2R \omega t$$

$$L = s\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 2R \omega \frac{\pi}{2\omega} = \pi R$$

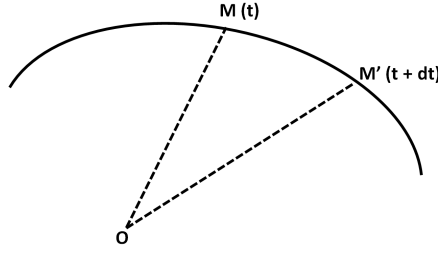


FIGURE 2.5 – Vitesse instantanée

2.3 Vecteur vitesse et vecteur accélération de M par rapport à un référentiel \mathfrak{R}

2.3.1 Définition intrinsèque (c'est à dire indépendante de la base de projection)

La vitesse instantanée de M, c'est à dire la vitesse de M à l'instant t, par rapport au référentiel \mathfrak{R} est par définition :

$$\vec{v}_{\mathfrak{R}}(M) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}}$$

La vitesse instantanée de M est donc la dérivée du vecteur position par rapport au temps dans \mathfrak{R} .

Elle a donc :

- ★ pour direction : la limite de la direction de $\overrightarrow{MM'}$ lorsque Δt tend vers 0, soit celle de la tangente à la trajectoire : sa direction est celle de \vec{T} .
- ★ pour sens : de M vers M' soit celui du déplacement effectif de M le long de la trajectoire.
- ★ pour norme : $v = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| = \frac{ds}{dt}$ soit la distance parcourue par unité de temps au cours d'une durée infinitésimale.

Donc : $\vec{v} = v \vec{T} = \frac{ds}{dt} \vec{T}$.

Pour le même point mobile M, les variations de son vecteur vitesse (en norme et en direction) au cours d'une durée infinitésimale définissent le vecteur accélération instantanée de M par rapport au référentiel \mathfrak{R} :

$$\vec{a}_{\mathfrak{R}}(M) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(M') - \vec{v}(M)}{\Delta t} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}} = \left(\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{\mathfrak{R}}$$

L'accélération instantanée de M est donc la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps dans \mathfrak{R} ou la dérivée seconde du vecteur position dans \mathfrak{R} .

2.3.2 Une remarque très importante : distinction entre référentiel et base de projection

$\vec{v}_{\mathfrak{R}}(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathfrak{R}}$ est la vitesse de M par rapport à \mathfrak{R} . Comme tout vecteur il peut être projeté dans n'importe quelle base : celle attachée à \mathfrak{R} (c'est-à-dire fixe par rapport à \mathfrak{R}) ou dans la base locale (cylindro-polaire, sphérique...). On choisira la base qui conduit à des calculs minimums.

2.3.3 Composantes cartésiennes et cylindriques des vecteurs vitesse et accélération

Il faut dériver le vecteur position \overrightarrow{OM} par rapport au temps dans \mathfrak{R} . Soit $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le repère lié à \mathfrak{R} .

Composantes cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

donc :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

car $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est fixe par rapport à \mathfrak{R} et

$$\vec{a} = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Composantes cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

\vec{u}_r varie au cours du temps, donc :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z} \vec{u}_z$$

Déterminons $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$: d'après la figure 2.6, on a :

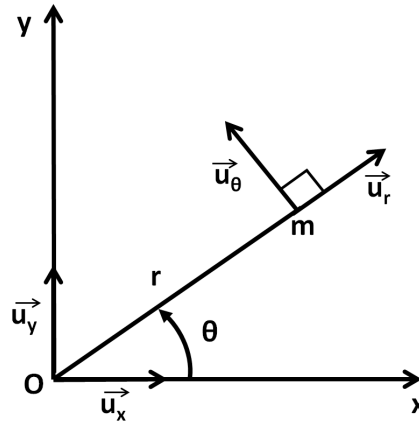


FIGURE 2.6 – Base polaire en m

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_x + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_y = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} &= -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= -\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y = -\vec{u}_r \end{aligned}$$

Remarque : on a montré $d\vec{u}_r = d\theta \vec{u}_\theta$.

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\dot{\theta} \vec{u}_r\end{aligned}$$

Donc, retenons : quand on dérive un vecteur tournant par rapport au temps on obtient le vecteur directement perpendiculaire multiplié par $\dot{\theta}$.

D'où :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

Pour l'accélération :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \ddot{z} \vec{u}_z \\ &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{u}_z \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

2.4 Mouvements particuliers

Définitions : un mouvement uniforme vérifie $v = \text{constante}$ (en norme, pas en vecteur) ; un mouvement uniformément varié vérifie $\frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{dv}{dt} = \text{cte}$

2.4.1 Mouvements rectilignes

Un mouvement rectiligne est évidemment défini par la nature de la trajectoire du mobile qui est une droite :

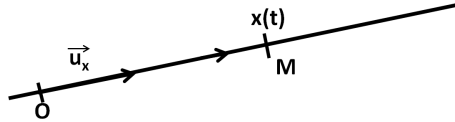


FIGURE 2.7 – Mouvement rectiligne

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= x(t) \vec{u}_x \\ \vec{v} &= \dot{x} \vec{u}_x \\ \vec{a} &= \ddot{x} \vec{u}_x\end{aligned}$$

Dans ce cas, la direction du vecteur vitesse est constante.

On distingue alors 3 types de mouvements rectilignes particuliers :

Mouvement rectiligne uniforme : $v = \text{cte}$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \text{ donc } dx = v_0 dt \text{ et } x = v_0 t + \text{cte}$$

Si à $t = 0$, $x = x_0$ alors $x_0 = 0 + \text{cte}$ donc $\text{cte} = x_0$ et donc $x = v_0 t + x_0$ et $\ddot{x} = 0$ donc $\vec{a} = \vec{0}$.

Avec $x(0) = 0$, on obtient les figures 2.8 et 2.9.

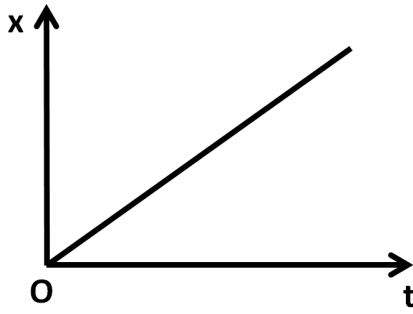


FIGURE 2.8 – $x = f(t)$

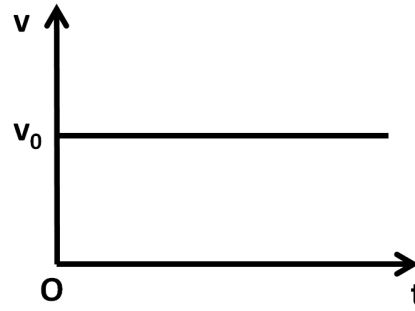


FIGURE 2.9 – $v = f(t)$

Mouvement rectiligne uniformément varié : $\frac{dv}{dt} = cte$

$$\ddot{x} = a_0 \text{ donc } d\dot{x} = a_0 dt \text{ donc } \dot{x} = a_0 t + cte$$

Si à $t = 0$ $\dot{x} = v_0$ et $x = x_0$ alors $\dot{x} = a_0 t + v_0 = \frac{dx}{dt}$ et donc $dx = (a_0 t + v_0)dt$ d'où $x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$.

Avec $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient les figures 2.10, 2.11 et 2.12 .

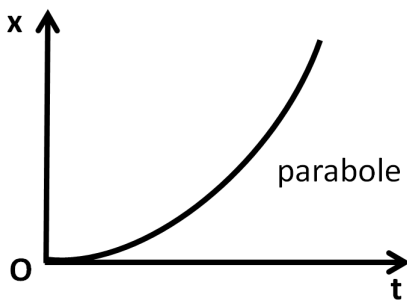


FIGURE 2.10 – $x = f(t)$

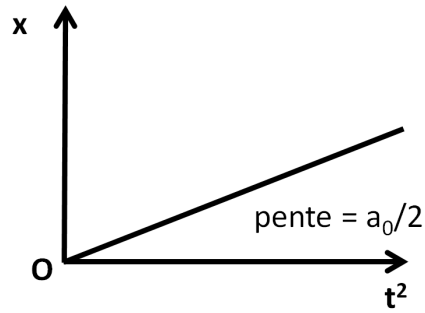


FIGURE 2.11 – $x = f(t^2)$

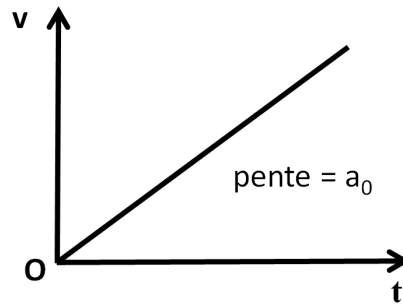


FIGURE 2.12 – $v = f(t)$

Mouvement rectiligne sinusoïdal

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

où

- ★ A est l'amplitude de x : A est toujours positive,
- ★ ω est la pulsation, elle est toujours positive, sa dimension est $[\omega] = T^{-1}$,
- ★ φ est la phase de x à l'instant $t = 0$, sa dimension est $[\varphi] = 1$

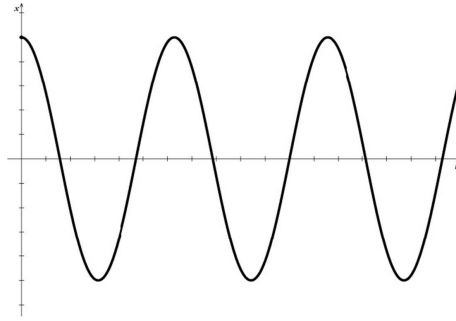


FIGURE 2.13 –

Rappel : Une fonction $x(t)$ périodique de période T vérifie :

$$x(t) = x(t + T)$$

Donc $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = x(t) = A \cos(\omega(t + T) + \varphi) = x(t) = A \cos(\omega t + \omega T + \varphi)$ D'où $\omega T = 2\pi$ et donc $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Le mobile oscille de part et d'autre de O sur le segment de longueur $2A$ comme sur la figure 2.14.

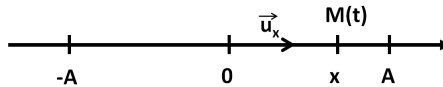


FIGURE 2.14 –

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x} &= -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \text{ donc } \vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

Retenons : $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ est solution de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Vérifier que $x(t) = K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)$ est aussi solution de cette équation.

2.4.2 Mouvements circulaires

Comme son nom l'indique, la trajectoire est un cercle ou une partie de celui-ci. On repère alors le point M par ses coordonnées polaires. O est le centre du cercle et $r = R$.

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r = R \vec{u}_r \quad \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

La direction du vecteur vitesse varie. \vec{v} n'a qu'une composante. \vec{a} a deux composantes : l'une radiale $a_r = -R\dot{\theta}^2 = -\frac{v^2}{R}$, l'autre orthoradiale : $a_\theta = R\ddot{\theta}$.

Remarques :

- ★ a_r est toujours négative : donc l'accélération radiale est toujours dirigée vers le centre du cercle (elle est centripète).
- ★ a_θ est du signe de $\ddot{\theta}$: elle est positive si le mouvement est accéléré, négative si le mouvement est décéléré et nulle si le mouvement est uniforme.

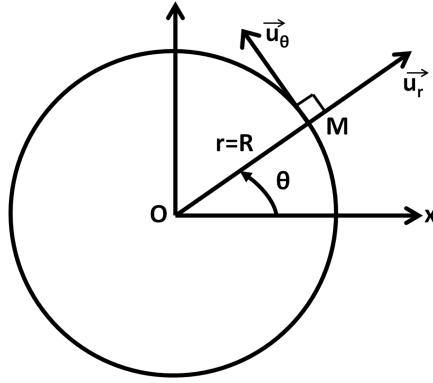


FIGURE 2.15 – Mouvement circulaire

Le vecteur vitesse d'un point M animé d'un mouvement circulaire uniforme n'est pas constant : $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Le vecteur accélération d'un point animé M d'un mouvement circulaire uniforme n'est pas nul : $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\dot{\theta}^2\vec{OM}$.

2.4.3 Les mouvements à accélération centrale

Parenthèse mathématique : le produit vectoriel entre deux vecteurs

★ Définition géométrique

Dans une BOND $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ le produit vectoriel de deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} faisant entre eux un angle $\alpha \in [0, \pi]$ est un vecteur $\vec{P} = \vec{A} \wedge \vec{B}$:

- de direction perpendiculaire au plan défini par \vec{A} et \vec{B} ,
- de sens tel que le trièdre $\vec{A}, \vec{B}, \vec{P}$ soit direct (règle du tire-bouchon, main droite, bon-homme d'Ampère).
- de norme $\|\vec{P}\| = \|\vec{A}\| \times \|\vec{B}\| \sin \alpha$.

Donc $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$.

Si $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une BOND alors : $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ $\vec{u}_3 \wedge \vec{u}_1 = \vec{u}_2$ $\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_3 = \vec{u}_1$
 $\vec{u}_i \wedge \vec{u}_i = \vec{0}$

★ Définition analytique

Soient A_1, A_2, A_3 les composantes de \vec{A} , B_1, B_2, B_3 les composantes de \vec{B} dans la BOND $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ -(A_1B_3 - A_3B_1) \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{vmatrix}$$

On effectue la différence des produits en croix. Attention pour la deuxième composante, mettre signe -.

★ Propriétés, applications

- Surface d'un triangle quelconque

Par définition : $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = A \times B \sin \alpha$ or d'après la figure 2.16 $\sin \alpha = \frac{h}{B}$ donc

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = Ah$$

soit base \times hauteur du triangle construit sur les vecteurs \vec{A} et \vec{B} . Donc

$$\|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = 2S_{\text{triangle}} = S_{\text{parallélogramme}}$$

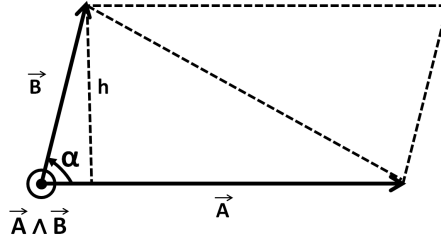


FIGURE 2.16 – Norme d'un produit vectoriel

- Conditions de colinéarité de deux vecteurs
Si $\vec{A} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$ alors $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ si et seulement si \vec{A} et \vec{B} sont colinéaires.
- Vecteur unitaire orthogonal à un plan donné
Soient deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} non colinéaires définissant un plan P. Alors le vecteur unitaire orthogonal à P a pour expression :

$$\vec{n} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$$

Définition d'un mouvement à accélération centrale

Le mouvement de M est dit à accélération centrale de pôle O lorsque $\vec{a}(M)$ passe constamment par un point fixe O dans \mathfrak{R} : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad \forall t$

Remarque : le mouvement circulaire uniforme (cf $\vec{a} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$) en est un exemple.

Propriétés de ces mouvements

- Le mouvement est plan.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Donc $(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})$ est un vecteur constant, on le notera \vec{C} .

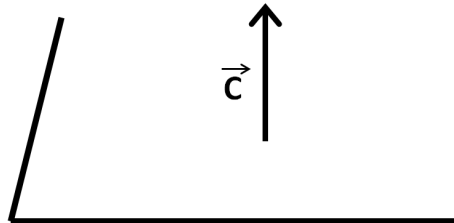


FIGURE 2.17 –

Donc \overrightarrow{OM} et \vec{v} sont constamment perpendiculaires à une direction fixe (celle de \vec{C}).

Donc le mouvement de M est plan et le plan du mouvement contient le pôle O.

- Le mouvement vérifie la loi des aires ou deuxième loi de Képler.

Démonstration :

Pour un mouvement plan, on définit la vitesse aréolaire $\frac{dA}{dt}$ comme étant la vitesse à laquelle le rayon vecteur \overrightarrow{OM} balaye l'aire du plan.
Or $dA \approx$ aire du triangle OMM', soit

$$dA = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MM'} \right\|$$

or

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt$$

donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \right\| = \frac{C}{2}$$

La vitesse aréolaire est constante.

D'où $dA = \frac{C}{2} dt$ et

$$\int_0^A dA = \int_{t_1}^{t_2} \frac{C}{2} dt = \frac{C}{2} (t_2 - t_1) = A$$

Ce qui donne la loi des aires ou deuxième loi de Képler : pendant des intervalles de temps égaux, le rayon vectoriel balaye des aires égales.

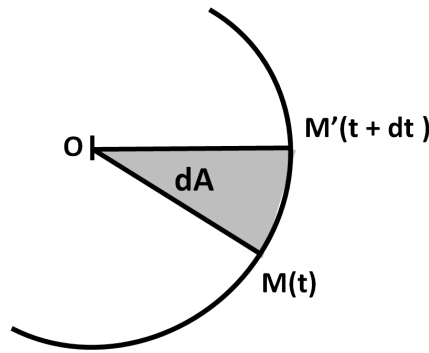


FIGURE 2.18 – Aire balayée par le rayon vecteur pendant dt

Détermination de C :

Le mouvement étant plan, on repère M par ses coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Donc

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = r \vec{u}_r \wedge (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

d'où la constante des aires C vaut $r^2 \dot{\theta}$. Donc, si au cours du mouvement r diminue, $\dot{\theta}$ augmente et inversement.

Exemple de mouvement à accélération centrale

Le mouvement des planètes autour du Soleil est un mouvement à accélération centrale car la force de gravitation exercée par le soleil est une force centrale.

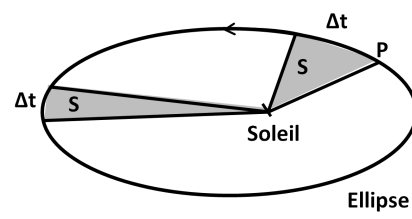


FIGURE 2.19 – Mouvement des planètes

Dynamique du point matériel

La dynamique est l'étude du mouvement des corps en liaison avec les causes, appelées forces, qui le produisent.

On se propose dans ce chapitre de recenser les différentes forces et d'exprimer leur action sur le mouvement. Ainsi, nous allons voir que par rapport à une catégorie particulière de référentiels, qualifiés de galiléens, la relation de causalité entre les forces et le mouvement est particulièrement simple.

3.1 Les forces

Elles sont les causes du mouvement. Ce sont des grandeurs vectorielles notées \vec{F} .

3.1.1 Forces à distance

Ces forces agissent à distance, par l'intermédiaire de champs divers.

Force de gravitation

- Cas général

Les forces de gravitation vérifient la loi de Newton (figure 3.1) :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}$$

avec $\mathcal{G} = 6,674.10^{-11}$ SI la constante de Newton.

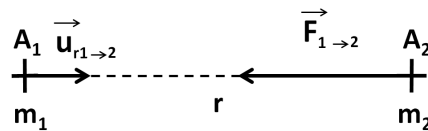


FIGURE 3.1 – Loi de Newton

On utilise le repérage sphérique (figure 3.2).

$$\vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{A_1 A_2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}$$

C'est une force qui est toujours attractive.

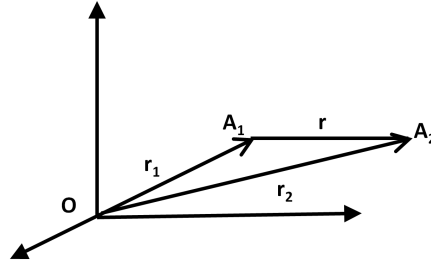


FIGURE 3.2 – Repérage sphérique

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

On définit le champ de gravitation créé par m_1 en A_2 par :

$$\vec{G}_1(A_2) = -\mathcal{G} \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}$$

Ainsi

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{G}_1$$

Le champ (ou la force) en $\frac{1}{r^2}$ est dit newtonien.

- L'objet 1 est la planète Terre

★ Champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre

$$\vec{G}_T = -\mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}$$

avec $M_T = 5,977 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6371$ km d'où $G_T = 9,828 \text{ ms}^{-2}$.

★ Champ de pesanteur terrestre, poids d'un corps

Le poids d'un corps, ou force de pesanteur terrestre qui s'exerce sur lui, est défini expérimentalement comme la force opposée à celle qui le maintient en équilibre par rapport au référentiel terrestre \mathfrak{R} . Concrètement, si l'on suspend une masselotte à l'extrémité d'un fil, son poids est l'opposé de la tension du fil à l'équilibre dans \mathfrak{R} .

On montre : $\vec{P} = m(\vec{G}_T(M) + \omega^2 \overline{HM})$ + terme de marée dû au mouvement elliptique de la Terre autour du soleil et aux champs de gravitation des autres astres).

ω est la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles ($\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$), et H est le projeté de M sur l'axe des pôles. On définit le champ de pesanteur terrestre

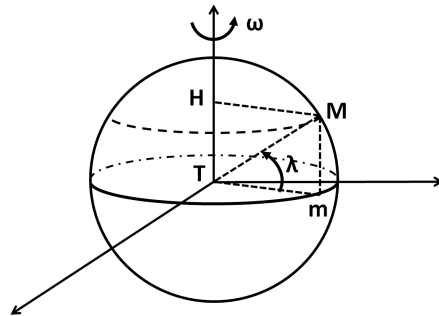


FIGURE 3.3 – Point M à la surface de la Terre

\vec{g} par

$$\vec{g}(M) = \frac{\vec{P}}{m}$$

et donc

$$\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Ainsi, même en l'absence de marées, la direction de \vec{P} , qui s'appelle la verticale, ne passe pas par le centre de la terre (excepté aux pôles et à l'équateur). Cependant le

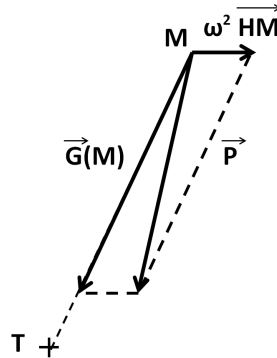


FIGURE 3.4 –

terme centrifuge dépend de la latitude λ du point M, il est nul aux pôles, il est maximal à l'équateur et vaut : $\omega^2 HM_{\max} = \omega^2 R_T = 0,034 \text{ ms}^{-2} \approx \frac{G_T}{289}$

Aux pôles : $g(N) = g(S) = G_T = \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} = 9,829 \text{ ms}^{-2}$

À l'équateur : $g(E) = G_T - \omega^2 R_T = 9,794 \text{ ms}^{-2}$

Donc, en dehors des expériences très fines (déviations vers l'Est, pendule de Foucault), on confond à la surface de la Terre le champ de pesanteur terrestre et le champ de gravitation terrestre pris égaux à $9,81 \text{ ms}^{-2}$:

$$\vec{g}(M) \approx \vec{G}_T(M)$$

(cf. exercices 1, 3)

Force électromagnétique de Lorentz

- Force électrostatique

Soient deux charges électriques ponctuelles au repos dans le vide (ou dans l'air).

Les forces électrostatiques vérifient la loi de Coulomb (figure 3.5) :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{r_{1 \rightarrow 2}}$$

avec $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ SI la permittivité diélectrique du vide.

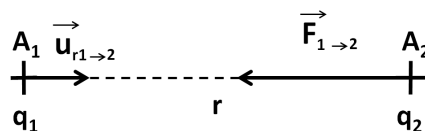


FIGURE 3.5 – Loi de Coulomb

La force électrostatique est analogue à la force de gravitation :

◇ la charge électrique est analogue à la masse

◇ $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ est analogue à $-\mathcal{G}$.

C'est une force qui peut être attractive ou répulsive (suivant que les charges sont de même signe ou de signe contraire).

On définit le champ électrostatique créé par q_1 en A_2 par :

$$\vec{E}_1(A_2) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \vec{u}_{r_1 \rightarrow 2}$$

Ainsi

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1$$

Remarque : une charge q placée dans \vec{E} est soumise à : $\vec{F} = q\vec{E}$.

- Force de Lorentz

Une charge q en mouvement à la vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel, située dans une région de l'espace où règne un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

(cf. exercices 6,7)

3.1.2 Forces de contact

Force de rappel d'un ressort

La tension d'un ressort, pour des petites déformations, vérifie la loi de Hooke :

$$\vec{F}_{ressort \rightarrow M} = -k(l - l_0) \vec{u}$$

l est la longueur du ressort à l'instant t , l_0 sa longueur à vide, k sa constante de raideur et



FIGURE 3.6 – Loi de Hooke : l_0 est la longueur à vide du ressort, k la constante de raideur (en Nm^{-1})

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$. Cette loi est valable pour des petites déformations, c'est-à-dire quand $|l - l_0| \ll l_0$. C'est une loi phénoménologique (c'est à dire déduite de l'expérience).

On fera systématiquement des schémas représentant le ressort à vide, étiré et éventuellement comprimé comme sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9.

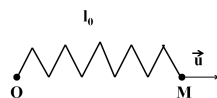


FIGURE 3.7 – Ressort à vide

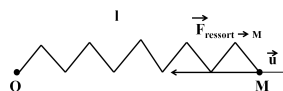


FIGURE 3.8 – Ressort étiré



FIGURE 3.9 – Ressort comprimé

(cf. exercice 5)

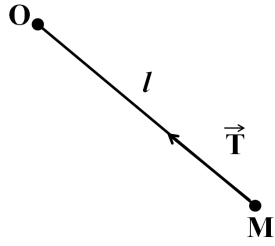


FIGURE 3.10 – Fil tendu

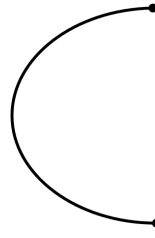


FIGURE 3.11 – Fil non tendu

Tension d'un fil inextensible et de masse négligeable

Le modèle choisi pour décrire le fil est celui d'un ressort de raideur k très élevée. Lorsqu'un tel fil est tendu (figure 3.10), son allongement est négligeable mais la force qu'il exerce ne l'est pas : celle-ci est dirigée le long de l'axe du fil, toujours dans le sens d'un rappel vers le point de fixation ($\Delta l > 0$), de norme T en général inconnue.

Si le fil n'est pas tendu (figure 3.11) : $T = 0$.

(cf. exercice 4)

Réaction d'un support (cf. TP)

Lorsqu'un objet M est en contact avec un support solide, la réaction \vec{R} exercée par le support sur M s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t$$

\vec{R}_n est la composante normale de la réaction, elle est perpendiculaire au support, dirigée du support vers l'objet (elle lutte contre l'enfoncement de l'objet dans le support). Elle s'appelle la réaction normale.

\vec{R}_t est la composante tangentielle de la réaction, elle est colinéaire et de sens opposé à \vec{v} s'il y a mouvement, ou dans le sens opposé à un glissement éventuel si $\vec{v} = \vec{0}$. Elle s'appelle la force de frottement solide.

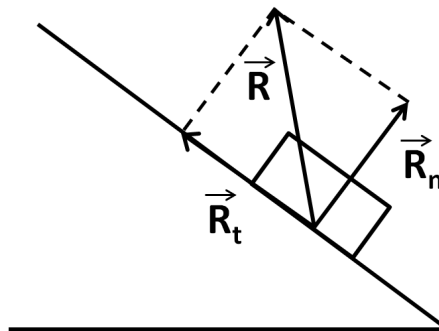


FIGURE 3.12 – Réaction d'un support

- ★ S'il n'y a pas de frottement : $\vec{R}_t = \vec{0}$ et alors $\vec{R} = \vec{R}_n$: la réaction est perpendiculaire au support.
 - ★ $\vec{R}_n = \vec{0}$ seulement lors du décollage de l'objet de son support.
- \vec{R}_t et \vec{R}_n vérifient des lois déduites de l'expérience énoncées pour la première fois par Coulomb :

Lois de Coulomb :

- ★ Dans le cas du frottement statique, soit si M ne glisse pas sur S alors

$$R_t < f_s R_n$$

f_s est le coefficient de frottement statique.

- ★ Dans le cas du frottement dynamique, soit si M glisse sur S alors

$$R_t = f_d R_n$$

f_d est le coefficient de frottement dynamique.

$f_d < f_s$ mais ils sont très proches. On prendra souvent $f_d \approx f_s = f$. Le coefficient de frottement solide f ne dépend que de la nature des surfaces (du mobile et du support) en contact.

(cf. exercice 4)

Force de frottement fluide

Si le point matériel est en mouvement dans un milieu fluide, par exemple l'eau ou l'air, ce dernier s'oppose au mouvement du point M en exerçant sur celui-ci une force opposée à son vecteur vitesse \vec{v} par rapport au référentiel lié au fluide. On distingue deux cas, selon la valeur de la vitesse :

- ★ pour des vitesses suffisamment faibles la force est proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v}$$

α est une constante positive appelée coefficient de frottement, elle dépend de la viscosité du fluide et de la forme de l'objet. Par exemple, pour un objet sphérique de rayon R plongé dans un fluide de viscosité η , α vaut $6\pi R\eta$ et donc :

$$\vec{F} = -6\pi R\eta \vec{v} : \text{c'est la loi de Stokes.}$$

(cf. exercice 2)

- ★ pour des vitesses plus grandes la force est proportionnelle à la vitesse au carré :

$$\vec{F} = -\beta v^2 \vec{u}_v \text{ avec } \vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{v}$$

Poussée d'Archimède

La poussée d'Archimède est la résultante des forces de pression exercée par un fluide au repos sur un corps immergé.

Théorème d'Archimède : la poussée d'Archimède est égale à l'opposé du poids des fluides déplacés, elle s'applique au centre de masse des fluides déplacés, en un point C appelé centre de poussée :

$$\vec{\pi}_a = -m_{\text{fluide}} \vec{g}$$

Remarque : si un solide homogène, de volume V , est complètement immergé alors C est confondu avec le centre de masse G du solide et

$$\vec{\pi}_a = -m_{\text{fluide}} \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V \vec{g}$$

(cf. exercice 2)

3.2 Les principes de la dynamique

On va citer les énoncés actuels et non les énoncés historiques donnés par Newton en 1687.

3.2.1 Principe d'inertie ou première loi de Newton

Il sert de définition d'un référentiel galiléen.

Énoncé actuel : Dans un référentiel galiléen, un système isolé ou pseudo isolé ($\sum \vec{F} = \vec{0}$) a un mouvement rectiligne uniforme, ou est au repos : $\vec{v} = c\vec{e}$.

On admet que tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Le référentiel du laboratoire, par rapport auquel les expériences sont conduites, peut être approximé galiléen si on néglige la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, donc, si la durée de l'expérience est négligeable devant 24 heures.

3.2.2 Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) ou deuxième loi de Newton

Il décrit les modifications du mouvement d'un point matériel relativement à un référentiel galiléen lorsqu'il n'est plus isolé.

Énoncé : Relativement à un référentiel galiléen \mathfrak{R} , le mouvement d'un point matériel de quantité de mouvement \vec{p} soumis à plusieurs forces de résultante \vec{F} satisfait à la relation :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Bigg|_{\mathfrak{R}} \quad \text{avec} \quad \vec{p} = m \vec{v}_{\mathfrak{R}}$$

Donc si $m = \text{constante}$, alors

$$\vec{F} = m \vec{a}_{\mathfrak{R}}$$

3.2.3 Principe des interactions réciproques ou troisième loi de Newton

Les forces $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ doivent vérifier :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

et sont portées par la droite passant par M_1 et M_2 (figure 3.13).

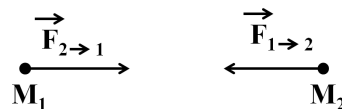


FIGURE 3.13 – Principe des interactions réciproques

3.3 Les diverses étapes du raisonnement de l'étude dynamique

- ★ Choisir le système à étudier.

- ★ Choisir le référentiel, galiléen ou non.
- ★ Faire le bilan des forces appliquées.
- ★ Écrire le PFD.
- ★ Projeter l'équation vectorielle sur des axes perpendiculaires, judicieusement choisis, c'est-à-dire : utiliser une base de projection adaptée.
- ★ Intégrer les équations différentielles obtenues en déterminant les constantes grâce aux conditions initiales (CI).

Exemple : Pendule simple dans le champ de pesanteur :

On attache une masselotte à l'extrémité d'un fil tendu, inextensible de longueur l , l'autre extrémité étant fixée en un point O fixe du référentiel terrestre \mathcal{R} . Si on écarte un tel pendule de sa position d'équilibre et qu'on le lâche, on observe des oscillations.

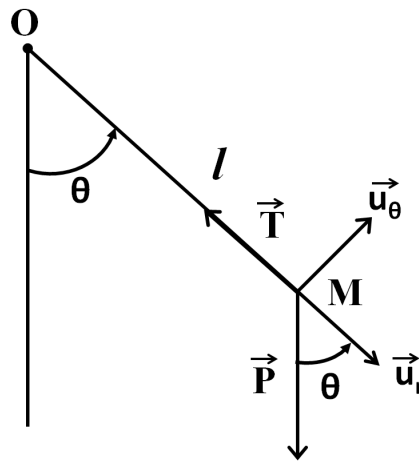


FIGURE 3.14 – Le pendule simple

Démonstration : Le système choisi est l'objet de masse m .

Le référentiel choisi est celui du laboratoire, approximé galiléen.

Les forces sont \vec{P} et \vec{T} donc :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Le mouvement est plan et la tension du fil est selon le fil mais elle est de valeur inconnue. On choisit donc la base polaire. Dans cette base :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= l\vec{u}_r & \vec{v} &= l\dot{\theta}\vec{u}_\theta & \vec{a} &= l\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - l\dot{\theta}^2\vec{u}_r \\ \vec{P} &= mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta & \vec{T} &= -T\vec{u}_r \end{aligned}$$

En projetant le PFD dans la base polaire, on obtient :

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

On obtient l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

On ne sait pas la résoudre dans le cas général mais si $\theta < 10^\circ$ alors $\sin\theta \approx \theta$ (avec θ en radian). Dans ce cas, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

On a vu que la solution d'une telle équation est du type :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Le pendule effectue donc des oscillations sinusoïdales à la période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ lorsque l'amplitude du pendule est faible.

Remarque : l'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ s'appelle équation d'un oscillateur harmonique en raison du caractère harmonique (sinusoïdal) de la solution.