TIPE

T. Lestienne

1 Formalisation de la cryptographie

Définition 1: chiffre
Un *chiffre* défini sur $(\mathcal{K}, \mathcal{M}, \mathcal{C})$, avec $\mathcal{K}$ l'*espace des clés*, $\mathcal{M}$ l'*espace des messages*, et $\mathcal{C}$ l'*espace des messages chiffrés*, est une paire (E, D) telle que:

- $E : \mathcal{K} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C}$ est la fonction de chiffrement,
- $D : \mathcal{K} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ est la fonction de déchiffrement,
- $\forall m \in \mathcal{M}$, $\forall k \in \mathcal{K}$, $D(k, E(k, m)) = m$.

Exemple 1: Application au code de César
Le code de César consiste à associer à chaque lettre un nombre lié à sa position dans l'alphabet (voir tableau ci-dessous). Puis effectuer un décalage de k "vers la droite".

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	$\cdots$	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	24	25

Formellement : Le chiffre de César est défini sur $(\mathcal{K}, \mathcal{M}, \mathcal{C})$ avec $\mathcal{K} = [|0; 25|]$, $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{A, B, \ldots, Z\}$. Les fonctions de chiffrement E et de déchiffrement D sont définies par :

$$E : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K} \times \mathcal{M} & \to & \mathcal{C} \\ (k, m) & \mapsto & (m + k) \mod 26 \end{array} \right.$$

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K} \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{M} \\ (k, c) & \mapsto & (c - k) \mod 26 \end{array} \right.$$

On a bien $\forall m \in \mathcal{M}$, $\forall k \in \mathcal{K}$, $D(k, E(k, m)) = (m + k \mod 26) - k \mod 26 = m \mod 26 = m$

Application : Chiffrement de TEST avec $k = 10$:

- $T \to D \quad (19 + 10) \mod 26 = 3$,
- $E \to O \quad (4 + 10) \mod 26 = 14$,
- $S \to C \quad (18 + 10) \mod 26 = 2$,
- $T \to D \quad (19 + 10) \mod 26 = 3$.

Le message chiffré est donc DOCD.
Pour le déchiffrement, on utilise $D(k, c)$:

- $D \to T \quad (3 - 10) \mod 26 = 19$,
- $O \to E \quad (14 - 10) \mod 26 = 4$,
- $C \to S \quad (2 - 10) \mod 26 = 18$,
- $D \to T \quad (3 - 10) \mod 26 = 19$.

Le message déchiffré est donc TEST.

Remarque 1:
deux occurences de la même lettre seront encoder par la même lettre

Remarque 2:
Dans ce cas, les fonctions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ s'effectuent en $\mathcal{O}(1)$.

2 Formalisation des machines de Mealy

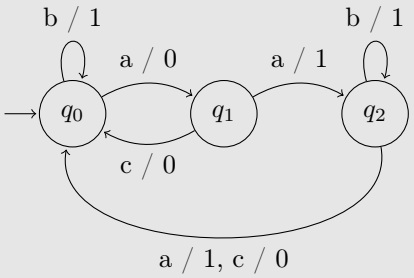
Définition 2: Transducteur
Un *transducteur* est un sextuplet $T = (\Sigma_1, \Sigma_2, Q, q_0, \delta)$ tel que :

- Σ_1 est l'alphabet d'entrée,
- Σ_2 est l'alphabet de sortie,
- Q est l'ensemble des états,
- $q_0 \in Q$ est l'état initial,
- $\delta : Q \times \Sigma_1 \to Q \times \Sigma_2$ est la fonction de transition.

Exemple 2: Representation graphique
Le transducteur $T = (\{a, b, c\}, \{0, 1\}, \{q_0, q_1, q_2\}, q_0, \delta)$ Avec δ

État actuel	Symbole lu	État suivant	Sortie
q_0	a	q_1	0
q_0	b	q_0	1
q_1	a	q_2	1
q_1	c	q_0	0
q_2	b	q_2	1
q_2	a	q_0	1
q_2	c	q_0	0

Peut être representé par



Définition 3: Machine de Mealy
une *machine de mealy* $M = (\Sigma)$ est un transducteur tel que

Théorème 1:
Soit Σ un alphabet et $N \in \mathbb{N}$ Il existe $(|\Sigma|! \times N^{|\Sigma|})^{|N|}$ Machines de Mealy a N états.

Démonstration 1:
Ainsi il y a $(|\Sigma|! \times N^{|\Sigma|})^{|N|}$

Remarque 3:

N	$(26! \times N^{26})^{\lvert N\rvert}$
1	4.03×10^{26}
2	7.32×10^{68}
3	1.08×10^{117}
4	1.09×10^{169}
5	7.84×10^{223}

Théorème 2:
Soit
A : Deux lettres successives dans le message original sont identique
B : Deux lettres successives dans le message chiffré sont identique

$N = \frac{|\Sigma| \times P(A) - 1}{|\Sigma| \times P(B) - 1}$

Démonstration 2:
$P(B|A) = 1/N + \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{|\Sigma|}$

$P(B|\overline{A}) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{|\Sigma|}$

$P(B) = P(A) \times P(B|A) + P(\overline{A}) \times P(B|\overline{A})$

$P(B) = (1/N + \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{|\Sigma|}) * P(A) + (\frac{N-1}{N} \times \frac{1}{|\Sigma|}) * P(\overline{A})$

$P(B) = \frac{1}{N} \times P(A) + \frac{N-1}{N|\Sigma|} \times (P(A) + P(\overline{A}))$

$P(B) = \frac{1}{N} \times P(A) + \frac{N-1}{N|\Sigma|}$

$P(B) = \frac{N-1+P(A)\times|\Sigma|}{N|\Sigma|}$

$N|\Sigma| \times P(B) = N - 1 + P(A) \times |\Sigma|$

$N(|\Sigma| \times P(B) - 1) = P(A) \times |\Sigma| - 1$

$N = \frac{|\Sigma| \times P(A) - 1}{|\Sigma| \times P(B) - 1}$

Remarque 4: synthese
Soit m un message sur Σ et k la clé choisie

Chiffre	**Complexité** deE	**Complexité** deD	**Complexité de l'attaque par force brute**