

Méthodes de Monte Carlo et techniques de réduction de variance. Application au pricing d'options.

Sommaire

1	Modèle étudié et problématiques	2
2	Pricing des options européennes	2
2.1	Formule de Black-Scholes	2
2.2	Méthode de Monte Carlo	6
2.3	Échantillonnage préférentiel	12
2.4	Variables de contrôle	15
2.5	Variables antithétiques	19
2.6	Comparaison	22
3	Conclusion	23
A	Annexe A : Table de la loi Normale centrée réduite	1
B	Annexe B : Code Matlab et graphique de la section 2.2	1
C	Annexe C : Code Matlab et graphique de la section 2.3	1
D	Annexe D : Code Matlab et graphique de la section 2.4	1
E	Annexe E : Codes Matlab et graphique de la section 2.5	1

1 Modèle étudié et problématiques

Le but de ce projet est d'estimer le prix des options de type européen à l'instant $t = 0$ par la méthode de Monte Carlo et d'implémenter plusieurs méthodes de réduction de variance.

Au total nous allons voir 4 méthodes de Monte Carlo différentes et il faudra décider laquelle est la meilleure en comparant divers facteurs (variance, vitesse de convergence...).

On note C (resp. P) le prix de l'option d'achat (resp. de vente), à l'instant $t = 0$, c'est la prime. Ce sont donc C et P que l'on cherche à estimer dans ce projet : cela s'appelle le **pricing d'options**.

Les méthodes de Monte Carlo font parties des outils qui permettent de faire du pricing d'options, mais il va falloir nous intéresser également à la précision de ces méthodes pour juger s'il est intéressant ou non de les employer.

Pour répondre à ces problématiques, on se basera sur la formule de Black-Scholes :

$$C = \mathbb{E}[(\exp(\beta G) - K)_+],$$

où G est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite, $\beta > 1$, et K est le prix d'exercice.

On a aussi :

$$P = \mathbb{E}[(K - \exp(\beta G))_+].$$

Dans les sections qui vont suivre, on choisira toujours un intervalle de confiance au niveau 95% pour nos méthodes de Monte-Carlo.

2 Pricing des options européennes

2.1 Formule de Black-Scholes

1. Montrons que

$$C = e^{\frac{\beta^2}{2}} N\left(\beta - \frac{\log(K)}{\beta}\right) - K N\left(-\frac{\log(K)}{\beta}\right),$$

avec $N(x) = \mathbb{P}(G \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$, où G est une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Autrement dit, N est la fonction de répartition de G .

Avant de montrer ce résultat, voyons la proposition suivante qui nous sera utile pour la suite.

Proposition Soit G une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et N la fonction de répartition de G comme définie dans l'énoncé (et juste au-dessus également). Soit $\phi(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On a alors les deux égalités suivantes : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} N(-x) = 1 - N(x) & (1) \\ N(x) + \phi(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour (1) :

$$\begin{aligned} N(x) &= \mathbb{P}(G \leq x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(G \geq x) \\ \text{Car } G &\sim \mathcal{N}(0, 1) \rightarrow = 1 - \mathbb{P}(G \leq -x) \\ &= 1 - N(-x). \end{aligned}$$

Et donc on a bien $N(-x) = 1 - N(x)$.

Pour (2) :

$$\begin{aligned} N(x) + \phi(x) &= \mathbb{P}(G \leq x) + \mathbb{P}(G \geq x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(G \geq x) + \mathbb{P}(G \geq x) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Pour toute la section 2.1, on note G une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

On a $C = \mathbb{E}[(\exp(\beta G) - K)_+]$.

Donc en appliquant le théorème de transfert,

$$C = \int_{\mathbb{R}} (\exp(\beta x) - K)_+ \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} \exp(\beta x) - K \geq 0 &\Leftrightarrow \beta x \geq \ln(K) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln(K)}{\beta} \quad \text{car } \beta > 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C &= \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \exp((\beta x) - K) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \left[\exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2}\right) - K e^{-\frac{x^2}{2}} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2}\right) dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} K e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} I_1 := \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \frac{K e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_2 := \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2}\right) dx, \end{cases}$$

de tel sorte qu'on ait : $C = I_2 - I_1$.

Tout d'abord, on remarque que $\int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \mathbb{P}\left(G \geq \frac{\ln(K)}{\beta}\right)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \frac{K e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= K \mathbb{P} \left(G \geq \frac{\ln(K)}{\beta} \right) \\
&= K \left(1 - \mathbb{P} \left(G \leq \frac{\ln(K)}{\beta} \right) \right)
\end{aligned}$$

Par définition de $N \rightarrow = K \left(1 - N \left(\frac{\ln(K)}{\beta} \right) \right)$

D'après (1) $\rightarrow = K N \left(-\frac{\ln(K)}{\beta} \right)$.

On s'intéresse à présent au calcul de I_2 . En utilisant une identité remarquable de type $(a - b)^2$, on a :

$$I_2 = \int_{\frac{\ln(K)}{\beta}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2}(x - \beta)^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) dx.$$

On fait un changement de variable : on pose $y = x - \beta$, donc $dy = dx$.

Donc,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2}y^2 \right) \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) dy \\
&= \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \underbrace{\int_{\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2}y^2 \right) dy}_{= \mathbb{P} \left(G \geq \frac{\ln(K)}{\beta} - \beta \right)} \\
&= \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \left(1 - \mathbb{P} \left(G \leq \frac{\ln(K)}{\beta} - \beta \right) \right) \\
&= \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) \left(1 - N \left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta \right) \right)
\end{aligned}$$

D'après (1) $\rightarrow = \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) N \left(\beta - \frac{\ln(K)}{\beta} \right)$.

Finalement, on a :

$$C = I_2 - I_1 = -K N \left(-\frac{\ln(K)}{\beta} \right) + \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) N \left(\beta - \frac{\ln(K)}{\beta} \right).$$

2. Montrons que

$$P = K N \left(\frac{\log(K)}{\beta} \right) - e^{\frac{\beta^2}{2}} N \left(\frac{\log(K)}{\beta} - \beta \right).$$

On a $P = \mathbb{E}[(K - \exp(\beta G))_+]$.

Donc en appliquant le théorème de transfert,

$$P = \int_{\mathbb{R}} (K - \exp(\beta x))_+ \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned}
K - \exp(\beta x) &\geq 0 \Leftrightarrow \exp(\beta x) \leq K \\
&\Leftrightarrow \beta x \leq \ln(K) \\
&\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln(K)}{\beta} \quad \text{car } \beta > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
P &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} (K - \exp(\beta x)) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \left[K e^{-\frac{x^2}{2}} - \exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2}\right) \right] dx.
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} I_1 := \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \frac{K e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_2 := \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) dx, \end{cases}$$

de tel sorte que $P = I_1 - I_2$.

Tout d'abord, on remarque que $\int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = N\left(\frac{\ln(K)}{\beta}\right)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \frac{K e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= K N\left(\frac{\ln(K)}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

On s'intéresse à présent au calcul de I_2 . En utilisant une identité remarquable de type $(a - b)^2$, on a :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right) dx.$$

On fait un changement de variable : on pose $y = x - \beta$, donc $dy = dx$.

Donc,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) dy \\
&= \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy
\end{aligned}$$

$$\text{Par définition de } N \rightarrow = \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) N\left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta\right).$$

Finalement, on a :

$$P = I_1 - I_2 = K N\left(\frac{\ln(K)}{\beta}\right) - \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) N\left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta\right).$$

Remarque : On aurait pu aussi utiliser la formule de parité pour retrouver P .

3. On note $\phi(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$. D'après la proposition citée page 2, on a que :

$$\phi(x) \underset{(2)}{=} 1 - N(x) \underset{(1)}{=} N(-x).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{cases} C = -K\phi\left(\frac{\ln(K)}{\beta}\right) + \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right)\phi\left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta\right) \\ P = K\phi\left(-\frac{\ln(K)}{\beta}\right) - \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right)\phi\left(\beta - \frac{\ln(K)}{\beta}\right). \end{cases}$$

Pour la suite nous allons considérer $\beta = 1$ et $K = 1$.

2.2 Méthode de Monte Carlo

1. On a $C = \mathbb{E}[(\exp(\beta G) - K)_+] = \mathbb{E}[(\exp(G) - 1)_+]$ car $\beta = 1$ et $K = 1$, avec G une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite.
Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d) de loi normale centrée et réduite. Posons $(Y_i)_{i \geq 1} := \left((e^{X_i} - 1)_+\right)_{i \geq 1}$. $(Y_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d de même loi que $Y_1 = (e^{X_1} - 1)_+$ car les X_i sont des v.a.i.i.d (de loi normale centrée réduite).

On observe que :

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}\left[(e^{X_1} - 1)_+\right] = C.$$

Ainsi, on introduit naturellement l'estimateur suivant :

$$\hat{I}_n^{(C)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e^{X_i} - 1)_+,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de simulations.

Comme $\mathbb{E}[\hat{I}_n^{(C)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(e^{X_i} - 1)_+\right] = \frac{1}{n} \times nC = C$, l'estimateur est sans biais.

Montrons à présent que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont intégrables afin de pouvoir appliquer la loi forte des grands nombres :

On veut donc montrer que $\mathbb{E}[Y_1] = C < \infty$. Or, d'après l'exercice 1 - question 1, on a que :

$$C = \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right) N\left(\beta - \frac{\ln(K)}{\beta}\right) - K N\left(-\frac{\ln(K)}{\beta}\right) = e^{\frac{1}{2}} N(1) - N(0) \quad (3)$$

car on est dans le cas où $\beta = K = 1$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq N(x) \leq 1$ car $N(x) = \mathbb{P}(G \leq x)$. Donc $C < \infty$ et les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont intégrables.

Ainsi, en appliquant la loi forte des grands nombres on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n^{(C)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e^{X_i} - 1)_+ = C \text{ p.s et dans } L^1.$$

Montrons que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2 afin de pouvoir appliquer le théorème central limite (et donc de pouvoir par la suite écrire une méthode de Monte Carlo pour calculer C).

On montre donc que $\mathbb{E}[Y_1^2] < +\infty$. En appliquant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \mathbb{E} \left[\left((e^{X_1} - 1)_+ \right)^2 \right] = \int_{\mathbb{R}} ((e^x - 1)_+)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1^2] &= \int_0^{+\infty} (e^x - 1)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{2x} - 2e^x + 1) \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(e^{2x - \frac{x^2}{2}} - 2e^{x - \frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Identité remarquable de type } (a-b)^2 &\rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2} - 2e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \left(e^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} I_1 := \int_0^{+\infty} e^2 \frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_2 := \int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_3 := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \end{cases}$$

de tel sorte qu'on ait : $\mathbb{E}[Y_1^2] = I_1 - 2I_2 + I_3$.

— Calcul de I_1 :

On fait un changement de variable : on pose $y := x - 2$, donc $dy = dx$.

Donc,

$$I_1 = e^2 \int_{-2}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Par définition de $\phi \rightarrow = e^2 \phi(-2)$.

— Calcul de I_2 :

On fait un changement de variable : on pose $y := x - 1$, donc $dy = dx$.

Donc,

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Par définition de $\phi \rightarrow = e^{\frac{1}{2}} \phi(-1)$.

— Calcul de I_3 :

Par définition de ϕ , on a :

$$I_3 = \phi(0).$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1^2] &= I_1 - 2I_2 + I_3 \\ &= e^2 \phi(-2) - 2e^{\frac{1}{2}} \phi(-1) + \phi(0). \end{aligned}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \phi(x) \leq 1$ car $\phi(x) = \mathbb{P}(G \geq x)$. Donc $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$ et les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2.

On pose $\sigma^2 := \text{Var}(Y_1) = \mathbb{E}[Y_1^2] - C^2$.
On a immédiatement :

$$\text{Var}(\hat{I}_n^{(C)}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'application du théorème central limite implique que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{I}_n^{(C)} - C) \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0, 1),$$

et signifie intuitivement que, pour n très grand, $\hat{I}_n^{(C)} - C \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} G$, où G est une gaussienne centrée réduite. Il est donc naturel d'introduire l'erreur standard $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et l'erreur relative $\frac{1}{C} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Ici, la valeur exacte de C est connue (nous allons la déterminer après) et donc la variance σ^2 ne nous est pas inconnue (on la calculera après C). Cependant, nous appliquerons l'algorithme de Monte Carlo en remplaçant σ^2 par l'estimateur classique de la variance :

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{I}_n^{(C)} \right)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n(\hat{I}_n^{(C)})^2 \right).$$

On sait que s_n^2 converge p.s vers σ^2 . Pour estimer l'erreur standard et l'erreur relative, on remplace donc σ^2 par s_n^2 :

Nous allons donc utiliser les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Erreur standard} : e &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s_n}{\sqrt{n}} \\ \text{Erreur relative} : \frac{1}{C} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\approx \frac{1}{\hat{I}_n^{(C)}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

On peut maintenant donner des intervalles de confiance pour notre estimation, dans l'utilisation du théorème central limite, on remplace la variance σ^2 par son estimation s_n^2 :

$$\mathbb{P} \left(\left| \hat{I}_n^{(C)} - C \right| \leq \epsilon \right) = \mathbb{P} \left(\frac{\sqrt{n}}{s_n} \left| \hat{I}_n^{(C)} - C \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{s_n} \epsilon \right) \approx 2\Phi \left(\frac{\sqrt{n}}{s_n} \epsilon \right) - 1,$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

On décide de choisir un intervalle de confiance au niveau $\alpha = 95\%$. Donc :

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{s_n}\epsilon\right) - 1 = \alpha = 0.95 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{s_n}\epsilon\right) = \frac{\alpha + 1}{2} = 0.975,$$

et donc $\frac{\sqrt{n}}{s_n}\epsilon = 1.96$, ou encore $\epsilon = 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}$. L'intervalle de confiance de C au niveau 95% est donc :

$$\left[\hat{I}_n^{(C)} - 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n^{(C)} + 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right].$$

Avant de passer à l'algorithme de Monte Carlo, calculons la valeur exacte de C . D'après (3), on a :

$$C = e^{\frac{1}{2}} N(1) - N(0).$$

Or, d'après (1) (dans la proposition page 2), on a $N(0) = 1 - N(0)$, donc $N(0) = \frac{1}{2}$. Pour la valeur de $N(1)$, on se réfère à la table de la loi normale centrée réduite¹ (on aurait pu faire de même pour la valeur de $N(0)$) et on trouve que $N(1) = 0,8413$. On a donc :

$$C = e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2} \approx 0,8871.$$

Maintenant qu'on connaît la valeur exacte de C , on peut calculer la variance théorique $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}[Y_1^2] - C^2 \\ &= e^2 \phi(-2) - 2e^{\frac{1}{2}} \phi(-1) + \phi(0) - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2} \right)^2 \\ \phi(x) &= N(-x) \text{ et } \phi(0) = \frac{1}{2} \rightarrow = e^2 N(2) - 2e^{\frac{1}{2}} N(1) + \frac{1}{2} - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

On a vu précédemment que $N(1) = 0,8413$. Pour $N(2)$ on se réfère aussi à la table de la loi normale centrée réduite et on trouve que $N(2) = 0,9772$. On a donc :

$$\sigma^2 = e^2 \times 0,9772 - 2e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 + \frac{1}{2} - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2} \right)^2 \approx 4,1596.$$

Algorithme de Monte Carlo :

On peut écrire un algorithme de Monte Carlo car les hypothèses sont vérifiées (en particulier $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$). Le code Matlab de l'algorithme de Monte Carlo associé à ce point ainsi que le graphique correspondant et les valeurs que nous renvoie le programme est consultable en **Annexe B - pages 1, 2 et 3**.

J'ai exécuté le programme pour différentes valeurs de n :

	Nombre de simulations n		
	10 ³	10 ⁴	10 ⁶
Estimateur \hat{I}_n	0,8436	0,9098	0,8860
Estimateur de la variance s_n^2	3,7018	4,0392	4,2037
Erreur standard e	0,0608	0,0201	0,0021
Borne inférieure IC	0,7244	0,8704	0,8820
Borne supérieure IC	0,9629	0,9492	0,8900

1. cf. **Annexe A**

2. On a $P = \mathbb{E}[(K - \exp(\beta G))_+] = \mathbb{E}[(1 - \exp(G))_+]$ car $\beta = 1$ et $K = 1$, avec G une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite.

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a.i.i.d de loi normale centrée et réduite. Posons $(Y_i)_{i \geq 1} := \left((1 - e^{X_i})_+\right)_{i \geq 1}$.

$(Y_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d de même loi que $Y_1 = (1 - e^{X_1})_+$ car les X_i sont des v.a.i.i.d (de loi normale centrée réduite).

On observe que :

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E}\left[(1 - e^{X_1})_+\right] = P.$$

Ainsi, on introduit naturellement l'estimateur suivant :

$$\hat{I}_n^{(P)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - e^{X_i})_+,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de simulations.

Comme $\mathbb{E}[\hat{I}_n^{(P)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[(1 - e^{X_i})_+\right] = \frac{1}{n} \times nP = P$, l'estimateur est sans biais.

Montrons à présent que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont intégrables afin de pouvoir appliquer la loi forte des grands nombres :

On veut donc montrer que $\mathbb{E}[Y_1] = P < \infty$. Or, d'après le point 2. de la partie 2.1, on a que :

$$P = KN \left(\frac{\ln(K)}{\beta} \right) - \exp \left(\frac{\beta^2}{2} \right) N \left(\frac{\ln(K)}{\beta} - \beta \right) = N(0) - e^{\frac{1}{2}} N(-1) \quad (4)$$

car on est dans le cas où $\beta = K = 1$. Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq N(x) \leq 1$ car $N(x) = \mathbb{P}(G \leq x)$. Donc $P < \infty$ et les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont intégrables.

Ainsi, en appliquant la loi forte des grands nombres on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n^{(P)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - e^{X_i})_+ = P \text{ p.s et dans } L^1.$$

Montrons que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2 afin de pouvoir appliquer le théorème central limite.

On montre donc que $\mathbb{E}[Y_1^2] < +\infty$. En appliquant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \mathbb{E}\left[\left((1 - e^{X_1})_+\right)^2\right] = \int_{\mathbb{R}} ((1 - e^x)_+)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 - e^x \geq 0 &\Leftrightarrow \exp^x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1^2] &= \int_{-\infty}^0 (1 - e^x)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 (1 - 2e^x + e^{2x}) \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Par analogie au point 1. } \rightarrow &= e^2 N(-2) - 2e^{\frac{1}{2}} N(-1) + N(0) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

On pose $\sigma^2 := \text{Var}(Y_1) = \mathbb{E}[Y_1^2] - P^2$.

On a immédiatement :

$$\text{Var}(\hat{I}_n^{(P)}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'application du théorème central limite implique que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{I}_n^{(P)} - P) \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0, 1),$$

et signifie intuitivement que, pour n très grand, $\hat{I}_n^{(P)} - P \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}G$, où G est une gaussienne centrée réduite.

Il est donc naturel d'introduire l'erreur standard $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et l'erreur relative $\frac{1}{P} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

De même que pour le point 1., la valeur exacte de P est connue (nous allons la déterminer après) mais nous allons quand même remplacer σ^2 (qu'on calculera après P) par l'estimateur classique de la variance :

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{I}_n^{(P)})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n(\hat{I}_n^{(P)})^2 \right).$$

Nous allons utiliser les approximations suivantes (par analogie au point 1.) :

$$\text{Erreur standard : } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Erreur relative : } \frac{1}{P} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\hat{I}_n^{(P)}} \frac{s_n}{\sqrt{n}}.$$

Ici, comme pour le point 1., on décide de choisir un intervalle de confiance au niveau $\alpha = 95$ %. Ainsi, l'intervalle de confiance de P au niveau 95 % est :

$$\left[\hat{I}_n^{(P)} - 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n^{(P)} + 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right].$$

Avant de passer à l'algorithme de Monte Carlo, calculons la valeur exacte de P . D'après (4), on a :

$$P = N(0) - e^{\frac{1}{2}} N(-1)$$

$$\text{D'après (1)} \rightarrow = N(0) - e^{\frac{1}{2}} (1 - N(1))$$

$$\begin{aligned} \text{Car } N(0) = \frac{1}{2} \text{ (montré au point 1.)} &\rightarrow = \frac{1}{2} - e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} N(1) \\ &= \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} (N(1) - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Car } N(1) = 0,8413 \text{ (cf. Annexe A)} &\rightarrow = \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} (0,8413 - 1) \\ &= \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} \times (-0,1587) \end{aligned}$$

On a donc :

$$P = \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} \times (-0,1587) \approx 0,2383.$$

Maintenant qu'on connaît la valeur exacte de P , on peut calculer la variance théorique $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1)$:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[Y_1^2] - P^2$$

$$= e^2 N(-2) - 2e^{\frac{1}{2}} N(-1) + N(0) - \left(\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} \times (-0,1587) \right)^2$$

$$\text{D'après (1) et } N(0) = \frac{1}{2} \rightarrow = e^2 (1 - N(2)) - 2e^{\frac{1}{2}} (1 - N(1)) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} \times (-0,1587) \right)^2.$$

Ce qui nous donne, en remplaçant par les valeurs de $N(1)$ et $N(2)$:

$$\sigma^2 = e^2 (1 - 0,9772) - 2e^{\frac{1}{2}} (1 - 0,8413) + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}} \times (-0,1587) \right)^2 \approx 0,0884.$$

Algorithme de Monte Carlo :

On peut écrire un algorithme de Monte Carlo car les hypothèses sont vérifiées (en particulier $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$). Le code Matlab de l'algorithme de Monte Carlo associé à ce point ainsi que le graphique correspondant et les valeurs que nous renvoie le programme est consultable en **Annexe B - pages 4, 5 et 6**.

J'ai exécuté le programme pour différentes valeurs de n :

	Nombre de simulations n		
	10^3	10^4	10^6
Estimateur \hat{I}_n	0,2284	0,2420	0,2385
Estimateur de la variance s_n^2	0,0881	0,0882	0,0882
Erreur standard e	0,0094	0,0030	2,9696e-04
Borne inférieure IC	0,2100	0,2362	0,2380
Borne supérieure IC	0,2468	0,2478	0,2391

3. Dans les deux cas (pour le call et pour le put), on remarque d'après les deux graphiques que la méthode semble converger à partir d'environ 4000 simulations. Dans le cas du call, on observe que les variances estimées sont très élevées alors qu'elles sont beaucoup plus faibles dans le cas du put. Ainsi, l'erreur est donc plus élevée pour l'estimation de C que pour celle de P .

2.3 Échantillonnage préférentiel

1. Soit Y une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. On note f_Y la densité de Y , $f_Y(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
On a $C = \mathbb{E}[(\exp(G) - 1)_+]$, avec G une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.
En appliquant le théorème de transfert,

$$C = \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (e^x - 1) e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

On fait un changement de variable. On pose, $\forall x > 0$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2}{2} \quad (> 0) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2y \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{2y} \quad (\text{car } x > 0), \end{aligned}$$

et $dx = \frac{1}{\sqrt{2y}} dy$.

Donc,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2y}} e^{-y} dy$$

Regardons si l'intégrale est bien définie en 0 :

On sait que pour x petit on a $e^x - 1 \sim x$. Donc $\frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2y}} e^{-y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} e^{-y}$. Ainsi, il n'y a aucun problème en 0.

On a donc :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2y}} f_Y(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2y}} f_Y(y) \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}} \right], \end{aligned}$$

où le passage de la deuxième à la troisième ligne est justifié par l'utilisation du théorème de transfert.

2. D'après le point 1., on a :

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}} \right] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}} \right],$$

avec Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Soit $(Y_i)_{i \geq 1}$ des v.a.i.i.d de loi exponentielle de paramètre 1. Posons $(Z_i)_{i \geq 1} := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y_i}} - 1}{\sqrt{2Y_i}} \right)_{i \geq 1}$.

$(Z_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d de même loi que $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y_1}} - 1}{\sqrt{2Y_1}}$ car les Y_i sont des v.a.i.i.d (de loi exponentielle de paramètre 1).

On observe que :

$$\mathbb{E}[Z_1] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y_1}} - 1}{\sqrt{2Y_1}} \right] = C.$$

Ainsi, on introduit naturellement l'estimateur suivant :

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y_i}} - 1}{\sqrt{2Y_i}} \right),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de simulations.

Comme $\mathbb{E}[\hat{I}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y_i}} - 1}{\sqrt{2Y_i}} \right] = \frac{1}{n} \times nC = C$, l'estimateur est sans biais.

Les $(Z_i)_{i \geq 1}$ sont forcément intégrables car $\mathbb{E}[Z_1] = C$ et on a vu dans l'exercice 1 que $C < \infty$. Ainsi, d'après la loi forte des grands nombres on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y_i}} - 1}{\sqrt{2Y_i}} \right) = C \text{ p.s et dans } L^1.$$

Montrons que les $(Z_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2 afin de pouvoir appliquer le théorème central limite (Je n'ai pas réussi à le montrer : on le supposera donc).

On pose $\sigma^2 := \text{Var}(Z_1) = \mathbb{E}[Z_1^2] - C^2$.

On a immédiatement :

$$\text{Var}(\hat{I}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'application du théorème central limite implique que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{I}_n - C) \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0, 1).$$

De manière analogue à la section 2.1, on procède comme suit.

Nous allons remplacer σ^2 par l'estimateur classique de la variance :

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \hat{I}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Z_i^2 - n\hat{I}_n^2 \right).$$

Nous allons utiliser les approximations suivantes :

Erreur standard : $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s_n}{\sqrt{n}}$

Erreur relative : $\frac{1}{C} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\hat{I}_n} \frac{s_n}{\sqrt{n}}$.

L'intervalle de confiance de C au niveau 95 % est :

$$\left[\hat{I}_n - 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right].$$

Algorithme de Monte Carlo :

On peut écrire un algorithme de Monte Carlo car les hypothèses sont vérifiées (en particulier $\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$). Le code Matlab de l'algorithme de Monte Carlo associé à ce point ainsi que le graphique correspondant et les valeurs que nous renvoie le programme est consultable en **Annexe C**.

J'ai exécuté le programme pour différentes valeurs de n :

	Nombre de simulations n		
	10 ³	10 ⁴	10 ⁵
Estimateur \hat{I}_n	0,8910	0,8846	0,8871
Estimateur de la variance s_n^2	0,2448	0,1951	0,2068
Erreur standard e	0,0156	0,0044	4,5480e-04
Borne inférieure IC	0,8604	0,8759	0,8862
Borne supérieure IC	0,9217	0,8932	0,8880

3. Tout d'abord, on sait que la variance de la première méthode (celle de la section 2.1) est égale à 4,1596. Or, la variance de la méthode d'échantillonnage préférentiel semble valoir environ 0,2 en se référant aux trois estimations de la variance obtenue dans notre tableau de résultats présenté à la fin du point 2. ci-dessus. Ainsi, la méthode d'échantillonnage préférentiel est meilleure que la méthode utilisée dans la section 2.1.

Cela peut se voir aussi sur les graphes : on remarque tout de suite que la vitesse de convergence de la méthode d'échantillonnage préférentiel est bien plus grande que celle de la première méthode. En effet, on voit (cf. graphe **Annexe C - page 3**) qu'à partir d'environ 1500 simulations, la courbe de la valeur approchée de C semble se stabiliser vers la valeur exacte de C , contre 4000 simulations pour la première méthode.

2.4 Variables de contrôle

1. D'après la section 2.1 (points 1. et 2.), on a (on est toujours dans le cas $\beta = 1$ et $K = 1$) :

$$\begin{cases} C = e^{\frac{1}{2}}N(1) - N(0) \\ P = N(0) - e^{\frac{1}{2}}N(-1). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} C - P &= e^{\frac{1}{2}}N(1) - N(0) - N(0) + e^{\frac{1}{2}}N(-1) \\ \Leftrightarrow C &= e^{\frac{1}{2}}N(1) - 2 \times \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{2}}(1 - N(1)) + P \\ \Leftrightarrow C &= e^{\frac{1}{2}} - 1 + P, \end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième ligne est justifié par le fait que $N(0) = \frac{1}{2}$ et $N(-1) = 1 - N(1)$ d'après (1).

On peut donc estimer C en utilisant une valeur approchée de P . On va prendre la valeur de l'estimateur de C obtenu dans la méthode de Monte Carlo du point 2. de la section 2.2 après 10^6 simulations. On avait obtenu : $P \approx 0,2388$.

Ainsi, une estimation de C est :

$$C \approx e^{\frac{1}{2}} - 1 + 0,2383 \approx 0,8870.$$

2. On a vu au point précédent que $C = e^{\frac{1}{2}} - 1 + P$, et on sait que $P = \mathbb{E} \left[(1 - e^G)_+ \right]$, avec G une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. On a donc :

$$C = e^{\frac{1}{2}} - 1 + \mathbb{E} \left[(1 - e^G)_+ \right] = \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^G)_+ \right].$$

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d de loi normale centrée réduite. Posons $(Y_i)_{i \geq 1} := \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^{X_i})_+ \right)_{i \geq 1}$. $(Y_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d de même loi que $Y_1 = e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^{X_1})_+$ car les X_i sont des v.a.i.i.d (de loi normale centrée réduite).

On observe que :

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^{X_1})_+ \right] = C.$$

Ainsi, on introduit naturellement l'estimateur suivant :

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^{X_i})_+ \right),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de simulations.

Comme $\mathbb{E}[\hat{I}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^{X_i})_+ \right] = \frac{1}{n} \times nC = C$, l'estimateur est sans biais.

Montrons à présent que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont intégrables afin de pouvoir appliquer la loi forte des grands nombres :

On veut donc montrer que $\mathbb{E}[Y_1] = C < \infty$. On a :

$$\mathbb{E}[Y_1] = e^{\frac{1}{2}} - 1 + \mathbb{E} \left[(1 - e^{X_1})_+ \right].$$

Or, d'après le point 2. de la section 2.1, on a :

$$\mathbb{E} \left[(1 - e^{X_1})_+ \right] = P = N(0) - e^{\frac{1}{2}} N(-1).$$

Donc,

$$\mathbb{E}[Y_1] = e^{\frac{1}{2}} - 1 + N(0) - e^{\frac{1}{2}} N(-1) < +\infty.$$

Donc les $(Y_i)_{i \geq 1}$ sont intégrables.

Ainsi, en appliquant la loi forte des grands nombres on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^{X_i})_+ \right) = C \text{ p.s et dans } L^1.$$

Montrons que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2 afin de pouvoir appliquer le théorème central limite.

On montre donc que $\mathbb{E}[Y_1^2] < +\infty$. En appliquant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 + (1 - e^x)_+ \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 - e^x \geq 0 &\Leftrightarrow e^x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1^2] &= \int_{-\infty}^0 \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 + 1 - e^x \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx + \int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(e^{\frac{1}{2}} - e^x \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx. \end{aligned}$$

On a :

$$\left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \phi(0) = \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \frac{1}{2},$$

car $\phi(0) = \frac{1}{2}$.

Et,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 \left(e^{\frac{1}{2}} - e^x \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx &= \int_{-\infty}^0 \left(e^1 - 2e^{\frac{1}{2}+x} + e^{2x} \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \left(e^{1-\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}+x-\frac{x^2}{2}} + e^{2x-\frac{x^2}{2}} \right) dx \\
\text{Identité remarquable de type } (a-b)^2 &\rightarrow = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \left(e^1 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2+2} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \left(e^1 e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} + e^2 e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} \right) dx
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} I_1 := \int_{-\infty}^0 e^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_2 := \int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_3 := \int_{-\infty}^0 e^2 \frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \end{cases}$$

de tel sorte qu'on ait : $\mathbb{E}[Y_1^2] = I_1 - 2I_2 + I_3 + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \frac{1}{2}$.

— Calcul de I_1 :

Par définition de N , on a :

$$I_1 = e^1 N(0).$$

— Calcul de I_2 :

On fait un changement de variable : on pose $y := x - 1$, donc $dy = dx$.

Donc,

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Par définition de $N \rightarrow = e^1 N(-1)$.

— Calcul de I_3 :

On fait un changement de variable : on pose $y := x - 2$, donc $dy = dx$.

Donc,

$$I_3 = e^2 \int_{-\infty}^{-2} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Par définition de $N \rightarrow = e^2 N(-2)$.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_1^2] &= I_1 - 2I_2 + I_3 + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \frac{1}{2} \\
&= e^1 N(0) - 2e^{\frac{1}{2}} N(-1) + e^2 N(-2) + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^2 \frac{1}{2} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2.

On pose $\sigma^2 := \text{Var}(Y_1) = \mathbb{E}[Y_1^2] - C^2$.

On a donc :

$$\sigma^2 = e^1 N(0) - 2e^1 N(-1) + e^2 N(-2) + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 \frac{1}{2} - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{D'après (1)} \rightarrow = e^1 N(0) - 2e^1(1 - N(1)) + e^2(1 - N(2)) + \left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 \frac{1}{2} - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2}\right)^2$$

Et en remplaçant par les valeurs de $N(0)$, $N(1)$ et $N(2)$, on obtient :

$$\sigma^2 \approx 0,0884.$$

On a que :

$$\text{Var}(\hat{I}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'application du théorème central limite implique que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{I}_n - C) \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0, 1).$$

On remplace σ^2 par l'estimateur classique de la variance :

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{I}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\hat{I}_n^2 \right).$$

On utilise les approximations suivantes :

$$\text{Erreur standard : } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Erreur relative : } \frac{1}{C} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\hat{I}_n} \frac{s_n}{\sqrt{n}}.$$

On décide de choisir un intervalle de confiance au niveau $\alpha = 95\%$. Ainsi, l'intervalle de confiance de C au niveau 95% est :

$$\left[\hat{I}_n - 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right].$$

Algorithme de Monte Carlo :

On peut écrire un algorithme de Monte Carlo car les hypothèses sont vérifiées (en particulier $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$). Le code Matlab de l'algorithme de Monte Carlo associé à cette question ainsi que le graphique correspondant et les valeurs que nous renvoie le programme est consultable en **Annexe D**.

J'ai exécuté le programme pour différentes valeurs de n :

	Nombre de simulations n		
	10^3	10^4	10^6
Estimateur \hat{I}_n	0,8923	0,8877	0,8874
Estimateur de la variance s_n^2	0,0878	0,0882	0,0881
Erreur standard e	0,0094	0,0030	2,9688e-04
Borne inférieure IC	0,8739	0,8819	0,8868
Borne supérieure IC	0,9106	0,8935	0,8880

3. La variance de la méthode de Monte Carlo avec variables de contrôle est plus petite que celle de la méthode avec échantillonnage préférentiel ainsi que de la première méthode. La méthode avec variable de contrôles est donc la meilleure des trois qui ont été vues pour le moment. On remarque également sur le graphe de cette méthode (cf. **Annexe D - page 3**) que la vitesse de convergence est meilleure que celle des deux premières méthodes.

2.5 Variables antithétiques

Soit G une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. Comme G et $-G$ ont la même loi, on peut approcher C par $C \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[(e^{G_i} - 1)_+ + (e^{-G_i} - 1)_+ \right]$, où $(G_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi gaussienne centrée et réduite.

1. Justifions que l'on peut approcher C par la quantité donnée dans l'énoncé ci-dessus.

Posons $(Y_i)_{i \geq 1} := \left(\frac{1}{2} \left[(e^{G_i} - 1)_+ + (e^{-G_i} - 1)_+ \right] \right)_{i \geq 1}$. $(Y_i)_{i \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d de même loi que $Y_1 = \frac{1}{2} \left[(e^{G_1} - 1)_+ + (e^{-G_1} - 1)_+ \right]$ car les G_i sont des v.a.i.i.d (de loi normale centrée réduite).

On observe que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[Y_1] &= \frac{1}{2} \left[\mathbb{E} \left[(e^{G_1} - 1)_+ \right] + \mathbb{E} \left[(e^{-G_1} - 1)_+ \right] \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[2\mathbb{E} \left[(e^{G_1} - 1)_+ \right] \right] \quad \text{car } G_1 \text{ et } -G_1 \text{ ont la même loi et donc } \mathbb{E} \left[(e^{G_1} - 1)_+ \right] = \mathbb{E} \left[(e^{-G_1} - 1)_+ \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[(e^{G_1} - 1)_+ \right] \\
 &= C \quad \text{par définition de } C.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on introduit naturellement l'estimateur suivant :

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[(e^{G_i} - 1)_+ + (e^{-G_i} - 1)_+ \right] = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left[(e^{G_i} - 1)_+ + (e^{-G_i} - 1)_+ \right],$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ correspond au nombre de simulations. Et on retrouve bien la quantité de l'énoncé.

Comme $\mathbb{E}[\hat{I}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\mathbb{E} \left[(e^{G_i} - 1)_+ \right] + \mathbb{E} \left[(e^{-G_i} - 1)_+ \right] \right) = \frac{1}{n} \times nC = C$, l'estimateur est sans biais.

D'après la section 2.1 - point 1., on a que $\mathbb{E}[Y_1] < \infty$. Ainsi, en appliquant la loi forte des grands nombres on déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[(e^{G_i} - 1)_+ + (e^{-G_i} - 1)_+ \right] = C \text{ p.s et dans } L^1.$$

Montrons que les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2 afin de pouvoir appliquer le théorème central limite.

On montre donc que $\mathbb{E}[Y_1^2] < +\infty$. En appliquant le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{2} \left[(e^{G_1} - 1)_+ + (e^{-G_1} - 1)_+ \right] \right)^2 \right] = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}} \left((e^x - 1)_+ + (e^{-x} - 1)_+ \right)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

On a :

$$\begin{aligned} e^x - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} e^{-x} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{-x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow -x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 (e^{-x} - 1)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx + \int_0^{+\infty} (e^x - 1)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right)$$

Posons :

$$\begin{cases} I_1 := \int_{-\infty}^0 (e^{-x} - 1)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ I_2 := \int_0^{+\infty} (e^x - 1)^2 \times \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \end{cases}$$

de tel sorte qu'on ait : $\mathbb{E}[Y_1^2] = \frac{1}{4} (I_1 + I_2)$.

— Calcul de I_1 :

On fait un changement de variable : on pose $y := -x$, donc $dy = -dx$.

Donc,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} (e^y - 1)^2 \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

D'après le point 1. de la section 2.2, on a que $I_1 = e^2 \phi(-2) - 2e^{\frac{1}{2}} \phi(-1) + \phi(0)$.

— Calcul de I_2 :

On remarque que $I_2 = I_1$.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_1^2] &= \frac{1}{4}(I_1 + I_2) \\ &= \frac{1}{4}(2I_1) \\ &= \frac{1}{2}(I_1) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2\phi(-2) - 2e^{\frac{1}{2}}\phi(-1) + \phi(0)\right).\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$ et les $(Y_i)_{i \geq 1}$ admettent un moment d'ordre 2.

On pose $\sigma^2 := \text{Var}(Y_1) = \mathbb{E}[Y_1^2] - C^2$.

On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{2}\left(e^2\phi(-2) - 2e^{\frac{1}{2}}\phi(-1) + \phi(0)\right) - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2N(2) - 2e^{\frac{1}{2}}N(1) + \frac{1}{2}\right) - \left(e^{\frac{1}{2}} \times 0,8413 - \frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Et en remplaçant par les valeurs de $N(0)$, $N(1)$ et $N(2)$, on obtient :

$$\sigma^2 \approx 1,6863.$$

La variance de la méthode de la section 2.2 - point 1. était égale à 4,1596. Pour que la méthode des variables antithétiques soit intéressante, il faut que $\sigma^2 < \frac{1}{2} \times 4,1596 = 2,0798$. Or, on a $\sigma^2 \approx 1,6863 < 2,0798$. Donc la méthode des variables antithétiques est intéressante à effectuer et la variance est bien réduite.

On a que :

$$\text{Var}(\hat{I}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'application du théorème central limite implique que, lorsque n tend vers l'infini,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\hat{I}_n - C) \text{ converge en loi vers } \mathcal{N}(0, 1),$$

On remplace σ^2 par l'estimateur classique de la variance :

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{I}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Y_i^2 - n\hat{I}_n^2 \right).$$

On utilise les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}\text{Erreur standard} : \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\approx \frac{s_n}{\sqrt{n}} \\ \text{Erreur relative} : \frac{1}{C} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\approx \frac{1}{\hat{I}_n} \frac{s_n}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

On décide de choisir un intervalle de confiance au niveau $\alpha = 95\%$. Ainsi, l'intervalle de confiance de C au niveau 95 % est :

$$\left[\hat{I}_n - 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \hat{I}_n + 1.96 \frac{s_n}{\sqrt{n}} \right].$$

2. Algorithme de Monte Carlo :

On peut écrire un algorithme de Monte Carlo car les hypothèses sont vérifiées (en particulier $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$). Le code Matlab de l'algorithme de Monte Carlo associé à ce point ainsi que le graphique correspondant et les valeurs que nous renvoie le programme est consultable en **Annexe E**.

J'ai exécuté le programme pour différentes valeurs de n :

	Nombre de simulations n		
	10^3	10^4	10^6
Estimateur \hat{I}_n	0,8612	0,8897	0,8895
Estimateur de la variance s_n^2	1,4359	1,7084	1,6949
Erreur standard e	0,0379	0,0131	0,0013
Borne inférieure IC	0,7869	0,8641	0,8869
Borne supérieure IC	0,9355	0,9154	0,8920

La variance de l'estimateur est donnée par $\text{Var}(\hat{I}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Pour $n = 10^4$:

$\text{Var}(\hat{I}_n) = \frac{1,6863}{10^4} \approx 1,6863 \times 10^{-4}$ et la valeur approchée de l'estimateur est : 0,8897.

- La variance de la méthode avec variables antithétiques est plus petite que la variance de la première méthode mais plus grande que celle de toutes les autres. Cette méthode semble converger à partir d'environ 3000 simulations (d'après le graphe de cette méthode - cf. **Annexe E - page 3**), ce qui est toujours mieux que la méthode de la section 2.1 mais évidemment moins bien que celle de la section 2.3 (cf. **Annexe C - page 3**) ou 2.4 (cf. **Annexe D - page 3**).

2.6 Comparaison

- Présentons les résultats que l'on a obtenu à travers les différentes méthodes de Monte Carlo pour le calcul de C utilisées dans ce projet. On présentera nos résultats pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$.

Tableau récapitulatif :

	Méthode standard Section 2.2			Échantillonnage préférentiel Section 2.3			Variables de contrôle Section 2.4			Variables antithétiques Section 2.5		
	10^3	10^4	10^6	10^3	10^4	10^6	10^3	10^4	10^6	10^3	10^4	10^6
Nombre d'estimations n												
Estimateur \hat{I}_n	0,8436	0,9098	0,8860	0,8910	0,8846	0,8871	0,8923	0,8877	0,8874	0,8612	0,8897	0,8895
Variance σ^2	4,1596			? ($\approx 0,2000$)			0,0884			1,6863		
Estimateur de la variance s_n^2	3,7018	4,0392	4,2037	0,2448	0,1951	0,2068	0,0878	0,0882	0,0881	1,4359	1,7084	1,6949

2. On voit clairement que la méthode ayant la plus petite variance est la méthode de Monte Carlo avec variables de contrôle de la section 2.4. Cette méthode est donc la meilleure de celles étudiées. On remarque également que la valeur de l'estimateur de C : \hat{I}_n est très proche de la valeur théorique de C (qui est égale à 0,8871) pour la méthode avec variables de contrôle, que ce soit aussi bien pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ ou encore $n = 10^6$.

La précision des méthodes des sections 2.3 et 2.5 semblent plutôt bonnes aussi mais c'est surtout dans la première méthode de Monte Carlo (celle de la section 2.2) que l'on observe une précision un peu plus médiocre.

Remarque concernant tout le projet : Pour chaque section, on a remplacé la variance σ^2 par l'estimateur s_n^2 . Or, comme on connaît la variance théorique σ^2 dans chaque section (sauf la section 2.3 où je n'ai pas réussi à la déterminer), il aurait été sûrement plus judicieux de conserver σ^2 pour nos méthodes de Monte Carlo, quitte à remplacer σ^2 par l'estimateur s_n^2 là où on n'arrive pas à calculer σ^2 , comme dans la section 2.3.

3 Conclusion

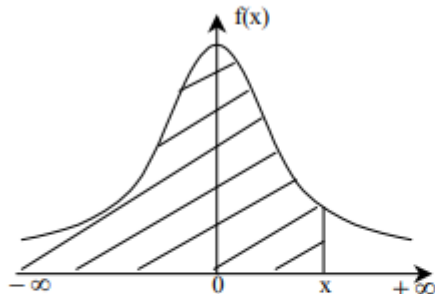
Finalement, parmi les 4 méthodes de Monte-Carlo que l'on a élaboré, nous avons réussi à en déterminer une meilleure que les autres. Cette méthode se trouve être celle avec variables de contrôle, qui est une méthode de réduction de variance. Pour comparer les différentes méthodes entre elles, on a regardé principalement leur variance respective puis on a comparé les variances : plus la variance de la méthode est petite et plus cette méthode est efficace.

De plus, on remarque que les méthodes de Monte-Carlo avec réduction de variance (dans ce projet ce sont celles des sections 2.3, 2.4 et 2.5) semblent assez précises dans l'estimation de C ou P , surtout quand le nombre de simulations est grand ($n = 10^4$, $n = 10^6$).

A Annexe A : Table de la loi Normale centrée réduite

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x .



$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

B Annexe B : Code Matlab et graphique de la section 2.2

Algorithme de Monte Carlo de la section 2.2 - point 1. (pour le call) :

```
function [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_C(n)
% retourne l'estimation du prix de l'option d'achat a t=0 (c'est-a-dire l'estimation de C) par Monte Carlo,
% l'estimateur de la variance, l'erreur standard, la borne inf de l'IC au niveau 95%,
% et la borne sup de l'IC au niveau 95% apres n simulations
% n : nombre de simulations
% I : valeur estimee de C
% e : erreur standard
S1=0; % S1 correspond a la somme des Y_i : on initialise S1 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
S2=0; % S2 correspond a la somme des (Y_i)^2 : on initialise S2 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
Ivect=[]; % Vecteur qui stocke l'estimateur de C pour chaque iteration de la simulation
B1=[]; % Vecteur qui stocke les bornes inferieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
B2=[]; % Vecteur qui stocke les bornes superieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
hold on; % Pour avoir tous les traces sur le meme graphe
for i=1:n
    x=sqrt(-2*log(rand()))*sin(2*pi*rand()); % On simule une v.a de loi normale centree et reduite (correspond a X_i)
    y=max(exp(x)-1, 0); % On simule une v.a de loi Y_1 (correspond a Y_i)
    S1=S1+y; S2=S2+y^2;
    I=S1/i;
    Ivect=[Ivect I];
    V=(S2-S1^2/i)/(i-1); % Estimateur de la variance pour i simulations
    e=sqrt(V/i); % Erreur standard pour i simulations
    B1=[B1 I-1.96*e];
    B2=[B2 I+1.96*e];
end
abscisses=[1:n];
plot(abscisses,Ivect); % On trace le graphe de la valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations
axis([1 n 0 2]);
C=exp(1/2)*0.8413-1/2; % Valeur de C donnee par la formule exacte (cf. Exo1-1.) (on est dans le cas ou beta=1 et K=1)
plot([0,n],[C,C]); % On trace une droite horizontale qui a pour ordonnee la valeur exacte de C
plot(abscisses,B1); % On trace le graphe de la valeur de la borne inferieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
plot(abscisses,B2); % On trace le graphe de la valeur de la borne superieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
xlabel("Nombre de simulations");
ylabel("Prix de C a t=0 (Prime)");
title("Valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations par la methode de Monte Carlo");
legend('Valeur approchee de C par Monte Carlo', 'Valeur exacte de C', 'Borne inferieure IC', 'Borne superieure IC');
V=(S2-S1^2/n)/(n-1); % Estimateur de la variance pour n simulations
e=sqrt(V/n); % Erreur standard pour n simulations
B1=I-1.96*e; % Borne inferieure de l'IC pour n simulations
B2=I+1.96*e; % Borne superieure de l'IC pour n simulations
end
```

Ce que retourne l'algorithme `montecarlo_C` pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$:

```
>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_C(10^3)                                >> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_C(10^4)

I =                                                                    I =
    0.8436                                                                0.9098

V =                                                                    V =
    3.7018                                                                4.0392

e =                                                                    e =
    0.0608                                                                0.0201

B1 =                                                                    B1 =
    0.7244                                                                0.8704

B2 =                                                                    B2 =
    0.9629                                                                0.9492

>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_C(10^6)

I =
    0.8860

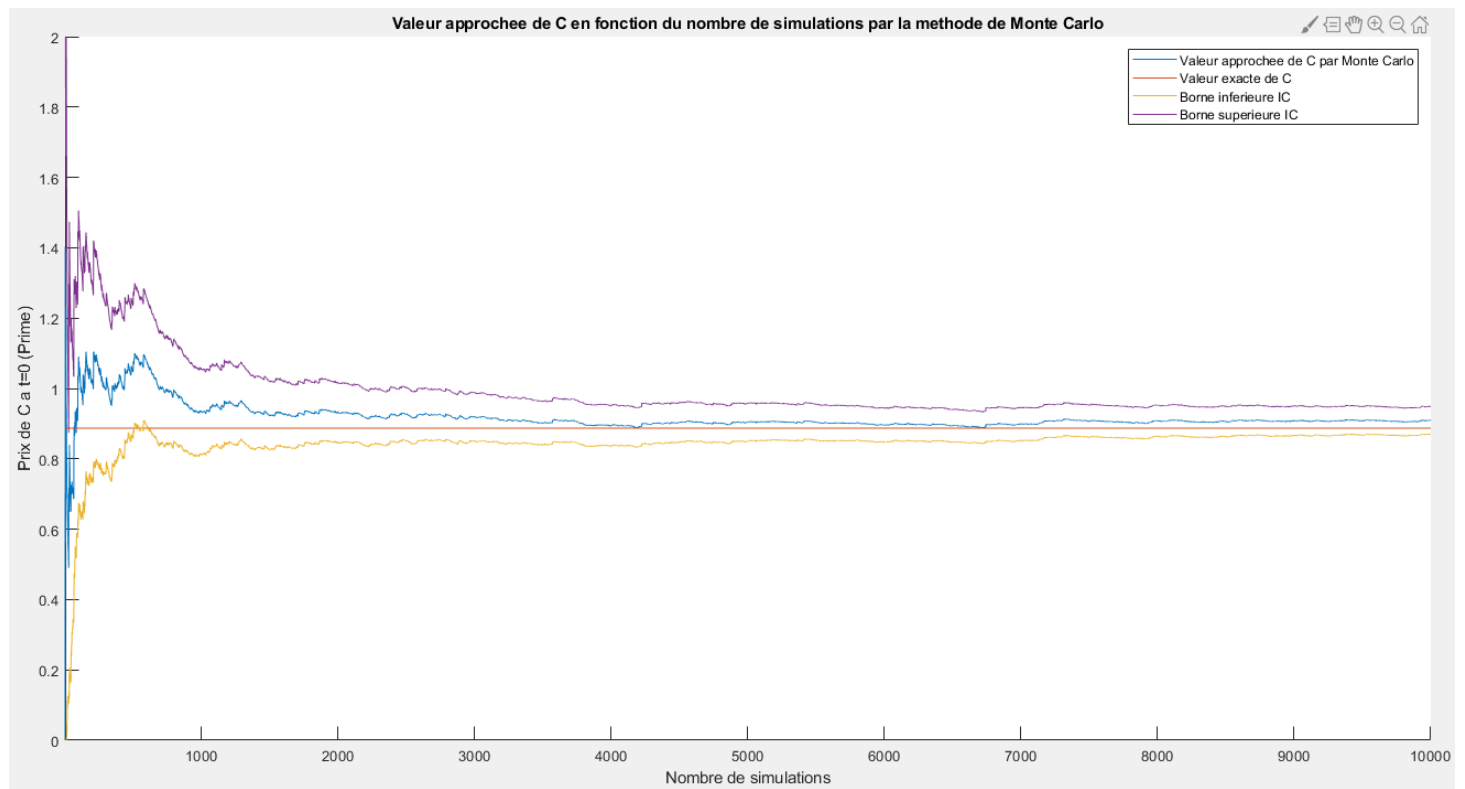
V =
    4.2037

e =
    0.0021

B1 =
    0.8820

B2 =
    0.8900
```

Graphique tracé par l'algorithme montecarlo_C pour $n = 10^4$:



Algorithme de Monte Carlo de la section 2.2 - point 2. (pour le put) :

```
function [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_P(n)
% retourne l'estimation du prix de l'option d'achat a t=0 (c'est-a-dire l'estimation de C) par Monte Carlo,
% l'estimateur de la variance, l'erreur standard, la borne inf de l'IC au niveau 95%,
% et la borne sup de l'IC au niveau 95% apres n simulations
% n : nombre de simulations
% I : valeur estimee de P
% e : erreur standard
S1=0; % S1 correspond a la somme des Y_i : on initialise S1 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
S2=0; % S2 correspond a la somme des (Y_i)^2 : on initialise S2 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
Ivect=[]; % Vecteur qui stocke l'estimateur de P pour chaque iteration de la simulation
B1=[]; % Vecteur qui stocke les bornes inferieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
B2=[]; % Vecteur qui stocke les bornes superieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
hold on; % Pour avoir tous les traces sur le meme graphe
for i=1:n
    x=sqrt(-2*log(rand()))*sin(2*pi*rand()); % On simule une v.a de loi normale centree et reduite (correspond a X_i)
    y=max(1-exp(x), 0); % On simule une v.a de loi Y_1 (correspond a Y_i)
    S1=S1+y; S2=S2+y^2;
    I=S1/i;
    Ivect=[Ivect I];
    V=(S2-S1^2/i)/(i-1); % Estimateur de la variance pour i simulations
    e=sqrt(V/i); % Erreur standard pour i simulations
    B1=[B1 I-1.96*e];
    B2=[B2 I+1.96*e];
end
abscisses=[1:n];
plot(abscisses,Ivect); % On trace le graphe de la valeur approchee de P en fonction du nombre de simulations
axis([1 n 0 0.5]);
P=1/2-exp(1/2)+exp(1/2)*0.8413; % Valeur de p donnee par la formule exacte (cf. Exo1-1.) (on est dans le cas ou beta=1 et
plot([0,n],[P,P]); % On trace une droite horizontale qui a pour ordonnee la valeur exacte de P
plot(abscisses,B1); % On trace le graphe de la valeur de la borne inferieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
plot(abscisses,B2); % On trace le graphe de la valeur de la borne superieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
xlabel("Nombre de simulations");
ylabel("Prix de P a t=0 (Prime)");
title("Valeur approchee de P en fonction du nombre de simulations par la methode de Monte Carlo");
legend('Valeur approchee de P par Monte Carlo', 'Valeur exacte de P', 'Borne IC', 'Borne superieure IC');
V=(S2-S1^2/n)/(n-1); % Estimateur de la variance pour n simulations
e=sqrt(V/n); % Erreur standard pour n simulations
B1=I-1.96*e; % Borne inferieure de l'IC pour n simulations
B2=I+1.96*e; % Borne superieure de l'IC pour n simulations
end
```

Remarque : Une petite partie du code est rognée mais c'est écrit la même chose que dans l'algorithme du point 1. de la section 2.1. : « (on est dans le cas où $\beta=1$ et $K=1$) ».

Ce que retourne l'algorithme `montecarlo_P` pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$:

```
>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_P(10^3)

I =
    0.2284

V =
    0.0881

e =
    0.0094

B1 =
    0.2100

B2 =
    0.2468

>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_P(10^4)

I =
    0.2420

V =
    0.0882

e =
    0.0030

B1 =
    0.2362

B2 =
    0.2478

>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_P(10^6)

I =
    0.2385

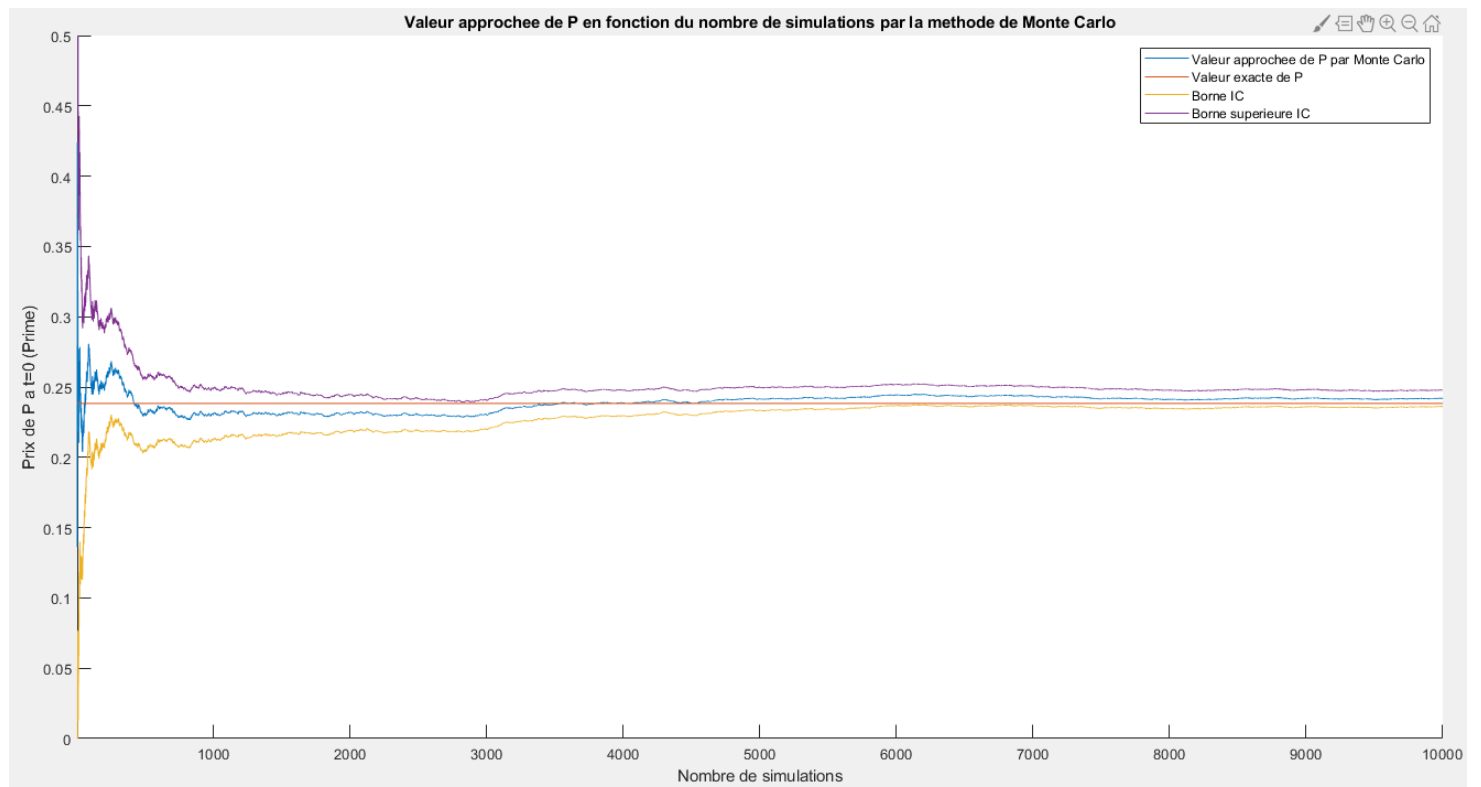
V =
    0.0882

e =
    2.9696e-04

B1 =
    0.2380

B2 =
    0.2391
```

Graphique tracé par l'algorithme `montecarlo_P` pour $n = 10^4$:



C Annexe C : Code Matlab et graphique de la section 2.3

Algorithme de Monte Carlo de la section 2.3 :

```
function [I,V,e,B1,B2] = Echantillonnage_pref(n)
% retourne l'estimation du prix de l'option d'achat a t=0 (c'est-a-dire l'estimation de C) par Monte Carlo,
% l'estimateur de la variance, l'erreur standard, la borne inf de l'IC au niveau 95%,
% et la borne sup de l'IC au niveau 95% apres n simulations
% n : nombre de simulations
% I : valeur estimee de C
% e : erreur standard
S1=0; % S1 correspond a la somme des Z_i : on initialise S1 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
S2=0; % S2 correspond a la somme des (Z_i)^2 : on initialise S2 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
Ivect=[]; % Vecteur qui stocke l'estimateur de C pour chaque iteration de la simulation
B1=[]; % Vecteur qui stocke les bornes inferieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
B2=[]; % Vecteur qui stocke les bornes superieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
hold on; % Pour avoir tous les traces sur le meme graphe
for i=1:n
    y=-log(rand()); % On simule une v.a de loi exponentielle de parametre 1 (correspond a Y_i)
    z=(1/sqrt(2*pi))*(exp(sqrt(2*y))-1)/sqrt(2*y); % On simule une v.a de loi Z_1 (correspond a Z_i)
    S1=S1+z; S2=S2+z^2;
    I=S1/i;
    Ivect=[Ivect I];
    V=(S2-S1^2/i)/(i-1); % Estimateur de la variance pour i simulations
    e=sqrt(V/i); % Erreur standard pour i simulations
    B1=[B1 I-1.96*e];
    B2=[B2 I+1.96*e];
end
abscisses=[1:n];
plot(abscisses,Ivect); % On trace le graphe de la valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations
axis([1 n 0 2]);
C=exp(1/2)*0.8413-1/2; % Valeur de C donnee par la formule exacte (cf. Exol-1.) (on est dans le cas ou beta=1 et K=1)
plot([0,n],[C,C]); % On trace une droite horizontale qui a pour ordonnee la valeur exacte de C
plot(abscisses,B1); % On trace le graphe de la valeur de la borne inferieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
plot(abscisses,B2); % On trace le graphe de la valeur de la borne superieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
xlabel("Nombre de simulations");
ylabel("Prix de C a t=0 (Prime)");
title("Valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations par la methode de Monte Carlo avec echantillonnage preferentiel");
legend('Valeur approchee de C par Monte Carlo', 'Valeur exacte de C', 'Borne inferieure IC', 'Borne superieure IC');
V=(S2-S1^2/n)/(n-1); % Estimateur de la variance pour n simulations
e=sqrt(V/n); % Erreur standard pour n simulations
B1=I-1.96*e; % Borne inferieure de l'IC pour n simulations
B2=I+1.96*e; % Borne superieure de l'IC pour n simulations
end
```

Remarque : Une petite partie du code est rognée à la fin. C'est écrit : « avec echantillonnage preferentiel »).

Ce que retourne l'algorithme `Echantillonnage_pref` pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$:

```
>> [I,V,e,B1,B2] = Echantillonnage_pref(10^3)      >> [I,V,e,B1,B2] = Echantillonnage_pref(10^4)

I =                                                I =
    0.8910                                         0.8846

V =                                                V =
    0.2448                                         0.1951

e =                                                e =
    0.0156                                         0.0044

B1 =                                               B1 =
    0.8604                                         0.8759

B2 =                                               B2 =
    0.9217                                         0.8932

>> [I,V,e,B1,B2] = Echantillonnage_pref(10^6)

I =
    0.8871

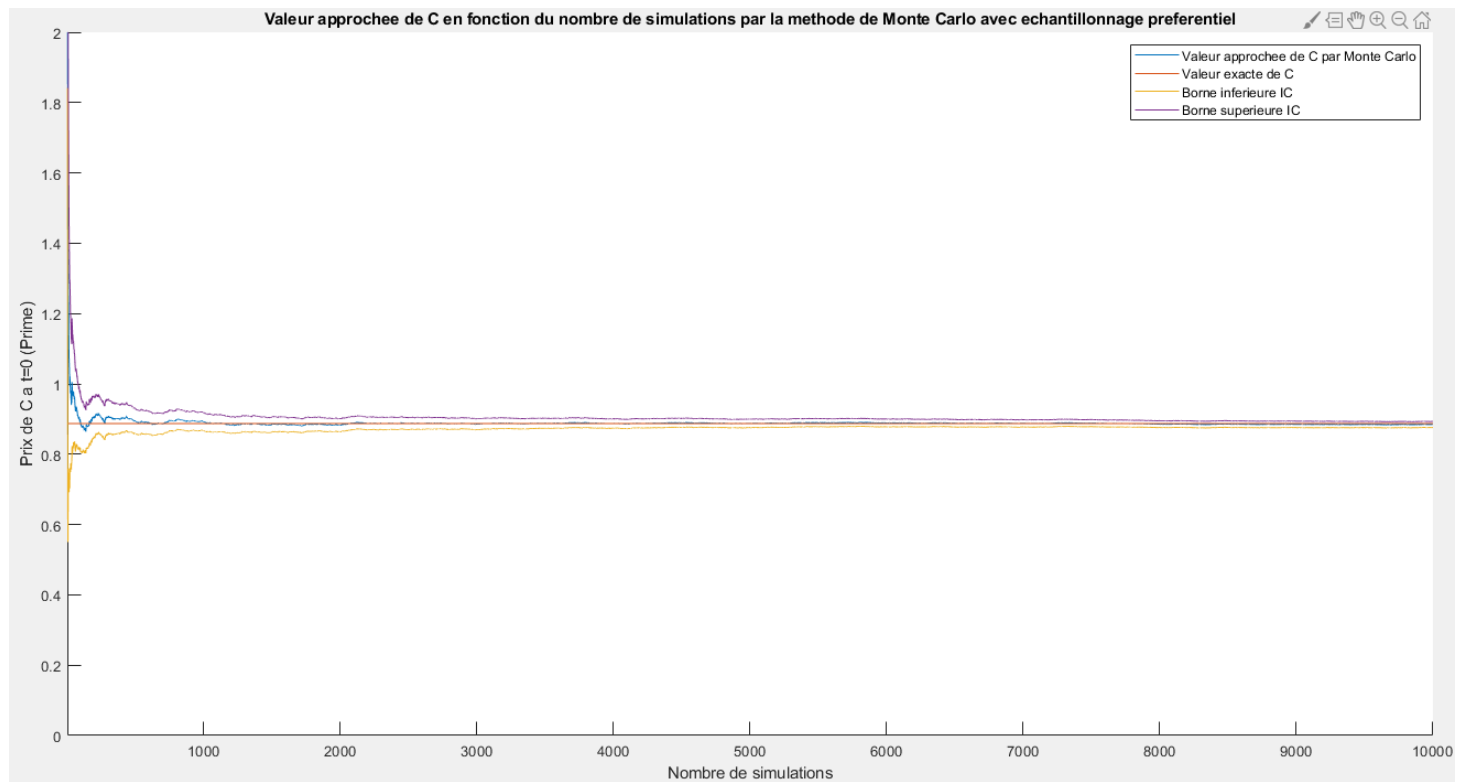
V =
    0.2068

e =
    4.5480e-04

B1 =
    0.8862

B2 =
    0.8880
```


Graphique tracé par l'algorithme Echantillonnage__pref pour $n = 10^4$:



D Annexe D : Code Matlab et graphique de la section 2.4

Algorithme de Monte Carlo de la section 2.4 :

```
function [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_varcontrol(n)
% retourne l'estimation du prix de l'option d'achat a t=0 (c'est-a-dire l'estimation de C) par Monte Carlo,
% l'estimateur de la variance, l'erreur standard, la borne inf de l'IC au niveau 95%,
% et la borne sup de l'IC au niveau 95% apres n simulations
% n : nombre de simulations
% I : valeur estimee de C
% e : erreur standard
S1=0; % S1 correspond a la somme des Y_i : on initialise S1 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
S2=0; % S2 correspond a la somme des (Y_i)^2 : on initialise S2 a 0 car on n'a pas encore fait de simulation a ce stade
Ivect=[]; % Vecteur qui stocke l'estimateur de C pour chaque iteration de la simulation
B1=[]; % Vecteur qui stocke les bornes inferieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
B2=[]; % Vecteur qui stocke les bornes superieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
hold on; % Pour avoir tous les traces sur le meme graphe
for i=1:n
    x=sqrt(-2*log(rand()))*sin(2*pi*rand()); % On simule une v.a de loi normale centree et reduite (correspond a X_i)
    y=exp(1/2)-1+max(1-exp(x), 0); % On simule une v.a de loi Y_1 (correspond a Y_i)
    S1=S1+y; S2=S2+y^2;
    I=S1/i;
    Ivect=[Ivect I];
    V=(S2-S1^2/i)/(i-1); % Estimateur de la variance pour i simulations
    e=sqrt(V/i); % Erreur standard pour i simulations
    B1=[B1 I-1.96*e];
    B2=[B2 I+1.96*e];
end
abscisses=[1:n];
plot(abscisses,Ivect); % On trace le graphe de la valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations
axis([1 n 0 2]);
C=exp(1/2)*0.8413-1/2; % Valeur de C donnee par la formule exacte (cf. Exo1-1.) (on est dans le cas ou beta=1 et K=1)
plot([0,n],[C,C]); % On trace une droite horizontale qui a pour ordonnee la valeur exacte de C
plot(abscisses,B1); % On trace le graphe de la valeur de la borne inferieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
plot(abscisses,B2); % On trace le graphe de la valeur de la borne superieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
xlabel("Nombre de simulations");
ylabel("Prix de C a t=0 (Prime)");
title("Valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations par la methode de Monte Carlo avec variables de controle");
legend('Valeur approchee de C par Monte Carlo', 'Valeur exacte de C', 'Borne inferieure IC', 'Borne superieure IC');
V=(S2-S1^2/n)/(n-1); % Estimateur de la variance pour n simulations
e=sqrt(V/n); % Erreur standard pour n simulations
B1=I-1.96*e; % Borne inferieure de l'IC pour n simulations
B2=I+1.96*e; % Borne superieure de l'IC pour n simulations
end
```

Remarque : Une petite partie du code est rognée à la fin. C'est écrit : « avec variables de controle » ; ».

Ce que retourne l'algorithme `montecarlo_varcontrol` pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$:

```
>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_varcontrol(10^3)           >> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_varcontrol(10^4)

I =                                                         I =
    0.8923                                                    0.8877

V =                                                         V =
    0.0878                                                    0.0882

e =                                                         e =
    0.0094                                                    0.0030

B1 =                                                         B1 =
    0.8739                                                    0.8819

B2 =                                                         B2 =
    0.9106                                                    0.8935

>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_varcontrol(10^6)

I =
    0.8874

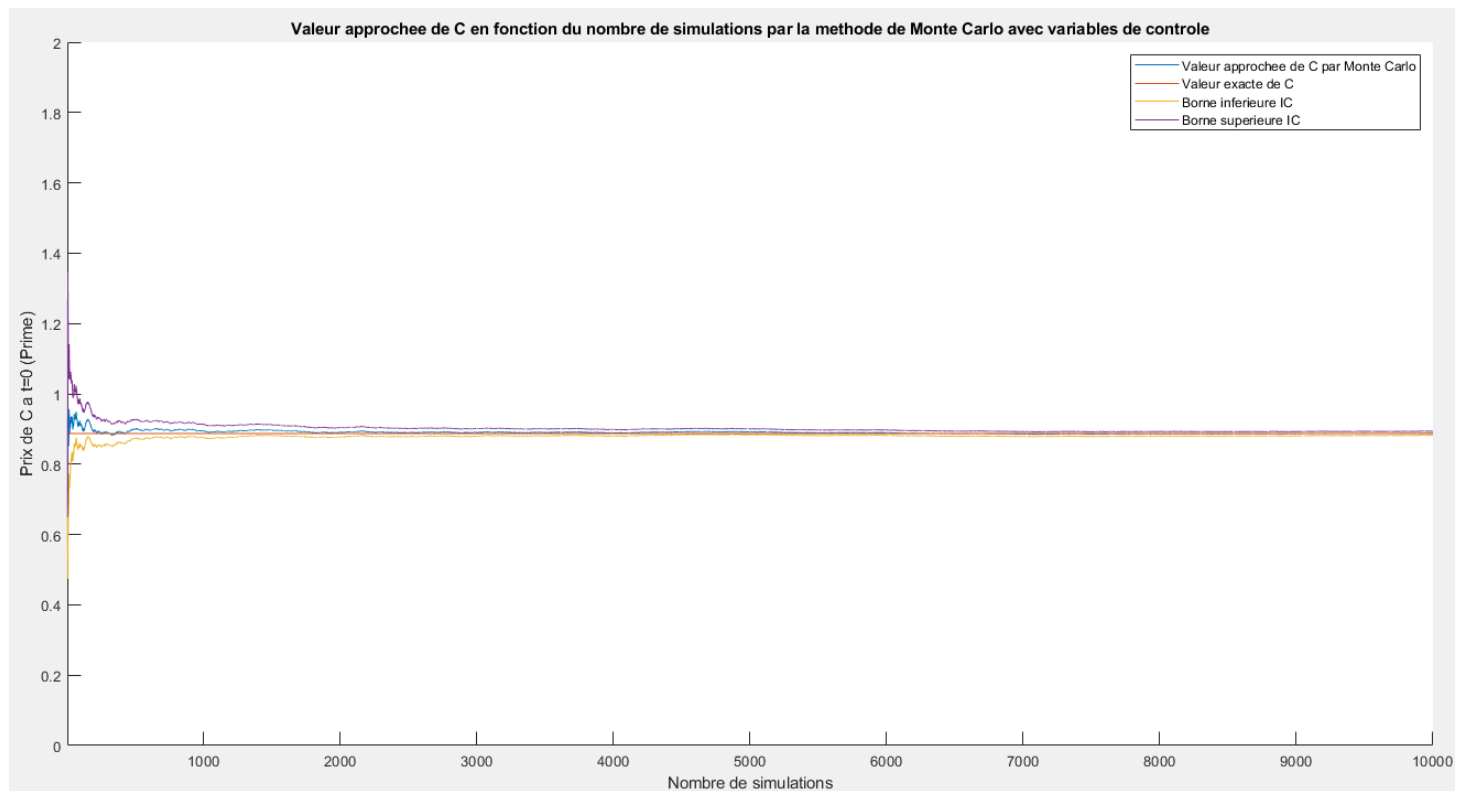
V =
    0.0881

e =
    2.9688e-04

B1 =
    0.8868

B2 =
    0.8880
```

Graphique tracé par l'algorithme `montecarlo_varcontrol` pour $n = 10^4$:



E Annexe E : Codes Matlab et graphique de la section 2.5

Algorithme de Monte Carlo de la section 2.5 :

```
function [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_var_antithetiques(n)
% retourne l'estimation du prix de l'option d'achat a t=0 (c'est-a-dire l'estimation de C) par Monte Carlo,
% l'estimateur de la variance, l'erreur standard, la borne inf de l'IC au niveau 95%,
% et la borne sup de l'IC au niveau 95% apres n simulations
% n : nombre de simulations
% I : valeur estimee de C
% e : erreur standard
S1=0; % S1 correspond a la somme des Y_i : on initialise S1 a 0 car on n'a pas encore fait de simulaion a ce stade
S2=0; % S2 correspond a la somme des (Y_i)^2 : on initialise S2 a 0 car on n'a pas encore fait de simulaion a ce stade
Ivect=[]; % Vecteur qui stocke l'estimateur de C pour chaque iteration de la simulation
B1=[]; % Vecteur qui stocke les bornes inferieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
B2=[]; % Vecteur qui stocke les bornes superieures des intervalles de confiance pour chaque iteration de la simulation
hold on; % Pour avoir tous les traces sur le meme graphe
for i=1:n
    x=sqrt(-2*log(rand()))*sin(2*pi*rand()); % On simule une v.a de loi normale centree et reduite (correspond a X_i)
    y=(1/2)*(max(exp(x)-1, 0) + max(exp(-x)-1, 0)); % On simule une v.a de loi Y_1 (correspond a Y_i)
    S1=S1+y; S2=S2+y^2;
    I=S1/i;
    Ivect=[Ivect I];
    V=(S2-S1^2/i)/(i-1); % Estimateur de la variance pour i simulations
    e=sqrt(V/i); % Erreur standard pour i simulations
    B1=[B1 I-1.96*e];
    B2=[B2 I+1.96*e];
end
abscisses=[1:n];
plot(abscisses,Ivect); % On trace le graphe de la valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations
axis([1 n 0 2]);
C=exp(1/2)*0.8413-1/2; % Valeur de C donnee par la formule exacte (cf. Exol-1.) (on est dans le cas ou beta=1 et K=1)
plot([0,n],[C,C]); % On trace une droite horizontale qui a pour ordonnee la valeur exacte de C
plot(abscisses,B1); % On trace le graphe de la valeur de la borne inferieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
plot(abscisses,B2); % On trace le graphe de la valeur de la borne superieure de l'IC en fonction du nombre de simulations
xlabel("Nombre de simulations");
ylabel("Prix de C a t=0 (Prime)");
title("Valeur approchee de C en fonction du nombre de simulations par la methode de Monte Carlo avec variables antithetiques");
legend('Valeur approchee de C par Monte Carlo', 'Valeur exacte de C', 'Borne inferieure IC', 'Borne superieure IC');
V=(S2-S1^2/n)/(n-1); % Estimateur de la variance pour n simulations
e=sqrt(V/n); % Erreur standard pour n simulations
B1=I-1.96*e; % Borne inferieure de l'IC pour n simulations
B2=I+1.96*e; % Borne superieure de l'IC pour n simulations
end
```

Remarque : Une petite partie du code est rognée à la fin. C'est écrit : « avec variables antithetiques"); ».

Ce que retourne l'algorithme `montecarlo_var_antithetiques` pour $n = 10^3$, $n = 10^4$ et $n = 10^6$:

```
>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_var_antithetiques(10^3) >> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_var_antithetiques(10^4)

I =                                I =
    0.8612                            0.8897

V =                                V =
    1.4359                            1.7084

e =                                e =
    0.0379                            0.0131

B1 =                               B1 =
    0.7869                            0.8641

B2 =                               B2 =
    0.9355                            0.9154

>> [I,V,e,B1,B2] = montecarlo_var_antithetiques(10^6)

I =
    0.8895

V =
    1.6949

e =
    0.0013

B1 =
    0.8869

B2 =
    0.8920
```

Graphique tracé par l'algorithme `montecarlo_var_antithetiques` pour $n = 10^4$:

