Licence L2
Mathématiques pour l'informatique
Contrôle Continu (30min)
23 Septembre 2014

Exercice 1

On considère un ensemble $E = \mathbb{N}$, et une relation R sur E définie par :

$$xRy \Leftrightarrow \exists p, q \text{ tel que } p \geq 1 \text{ et } q \geq 1,\ y = px^q \text{ (avec } p, q \in \mathbb{N})$$

1) Tout en rappelant la définition de ces termes, vous montrerez si R est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

- Réflexivité : R est réflexive si et seulement si $\forall x \in E,\ xRx$. On considère $p = q = 1$. On a bien $\forall x \in \mathbb{N},\ xRx$. Donc R est réflexive.
- Symétrie : R est symétrique si et seulement si $\forall x, y \in E,\ xRy \Rightarrow yRx$. On considère $2R4$ mais on s'aperçoit que nous n'avons pas $4R2$. Donc R n'est pas symétrique.
- Anti-symétrie : R est anti-symétrique si et seulement si $\forall x, y \in E, xRy$ et $yRx \Rightarrow x = y$. Si on a xRy et yRy, alors on a $x \leq y$ et $y \leq x$. Ainsi, on a bien $x = y$. Donc R est anti-symétrique.
- Transitivité : R est transitive si et seulement si $\forall x, y, z \in E,\ xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz$. Soit xRy et yRz. Ainsi, $\exists p, q, a, b \geq 1$ tel que :

  $$y = px^q \text{ et } z = ay^b$$

  On en déduit :

  $$z = a(px^q)^b = (ap^b)x^{bq}$$

  Donc on a xRz et R est bien transitive.

2) Après avoir rappelé ce qu'est une relation d'équivalence, vous direz si R est une telle relation.

R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive, symétrique et transitive. On a montré que R n'était pas symétrique. Ainsi, R n'est pas une relation d'équivalence.

3) Même question pour le cas d'une relation d'ordre.

R est une relation d'ordre si et seulement si R est réflexive, anti-symétrique et transitive. On a montré que ces propriétés sont vrais. Donc R est bien une relation d'ordre.

Exercice 2

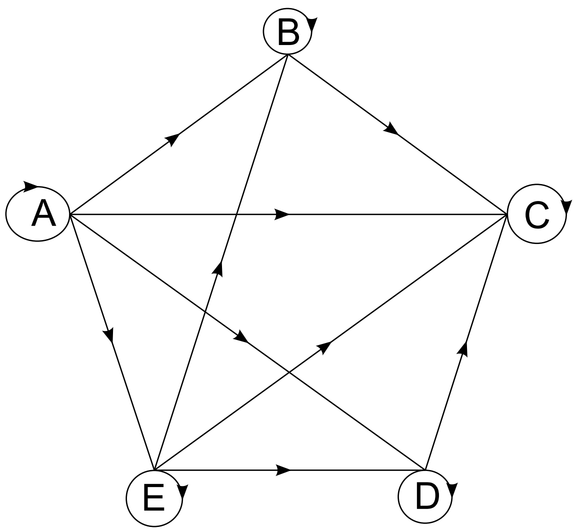
Soit un ensemble $F = \{\text{Alan}, \text{Bill}, \text{Charles}, \text{Donald}, \text{Edsger}\}$. On considère la relation d'ordre R sur F définie par les couples suivant :

$(\text{Alan}, \text{Alan})$, $(\text{Alan}, \text{Bill})$, $(\text{Alan}, \text{Charles})$, $(\text{Alan}, \text{Donald})$, $(\text{Alan}, \text{Edsger})$, $(\text{Bill}, \text{Bill})$, $(\text{Bill}, \text{Charles})$, $(\text{Charles}, \text{Charles})$, $(\text{Donald}, \text{Donald})$, $(\text{Donald}, \text{Charles})$, $(\text{Edsger}, \text{Bill})$, $(\text{Edsger}, \text{Charles})$, $(\text{Edsger}, \text{Donald})$, $(\text{Edsger}, \text{Edsger})$

1) Donner la matrice booléenne M_R associée à R.

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) En déduire le graphe orienté $\mathcal{G}_R$ de cette relation R (vous pourrez utiliser les initiales des prénoms).



3) Construire la diagramme de Hasse $\mathcal{D}_R$ associé.