

Licence L2
Mathématiques pour l'informatique
Correction d'un exercice du TD 3

Exercice 21

1) Soit T un treillis, a et x deux éléments de T . Montrer que :

$$a \vee (x \wedge a) = a \text{ et } a \wedge (x \vee a) = a \text{ (propriété d'absorption)}$$

Montrons que $a \vee (x \wedge a) = a$:

On sait que $a \leq a \vee (x \wedge a)$ et que $x \wedge a \leq a$. Donc $a \vee (x \wedge a) \leq a$

Ainsi $a \vee (x \wedge a) = \max(a, x \wedge a) = a$

Montrons que $a \wedge (x \vee a) = a$:

On sait que $a \geq a \wedge (x \vee a)$ et que $x \vee a \geq a$. Donc $a \wedge (x \vee a) \geq a$

Ainsi $a \wedge (x \vee a) = \min(a, x \vee a) = a$

2) $\forall x, y, z \in T$, montrer que :

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$$

Quand a-t-on l'égalité?

D'une part $x \wedge z \leq z$ et $x \leq z$ donc $x \vee (y \wedge z) \leq z$ (a).

D'autre part, $y \wedge z \leq y$ donc $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$ (b).

Ainsi, d'après (a) et (b), on en déduit que $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$

3) Montrer les règles de distributivité "faibles" :

$$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \text{ (a)}$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z) \text{ (b)}$$

a) $y \wedge z \leq y$ et $y \wedge z \leq z$ donc $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$ et $x \vee (y \wedge z) \leq x \vee z$

Donc $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

b) $y \leq y \vee z$ et $z \leq y \vee z$ donc $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$ et $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$

Donc $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$

4) Montrer que si

$$\forall x, y, z \in T, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

alors on :

$$\forall x, y, z \in T, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

Soit $(x \vee y) \wedge (x \vee z) =$ (D'après l'hypothèse) $((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z)$

D'après 1) et également d'après l'hypothèse, on a :

$$= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$

Par association :

$$= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z)$$

Encore d'après 1), on a :

$$= x \vee (y \wedge z)$$