Géométrie Différentielle

26 octobre 2012

Première partie
Variétés différencielles

Le concept de variété différentielle a été défini par Riemann au XIX^{em} siècle ; l'idée étant de définir une notion d'espace assez générale. L'idée est de considérer un espace (topologique) localement modelé sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$). C'est un domaine des mathématiques que l'on appelle "topologie différentielle".

Définition 1. *Soit M un espace topologique séparé à base dénombrable, une carte de M est un doublet (U, ϕ) où U est un ouvert de M et ϕ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*

- *Deux cartes sont dites $\mathcal{C}^k - compatibles$ si pour $(U, \phi), (V, \psi)$ telles que $U \cap V \neq \emptyset$, $\psi \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\phi(U \cap V), \psi(U \cap V))$.*
- *Un atlas sur M est une collection de cartes $\mathcal{A} = ((U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 2 à 2 compatibles telle que $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$.*
- *Une $variété\ différencielle$ est un espace topologique séparé à base dénombrable doté d'un atlas dont les cartes vont dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas n est la dimension de M.*

Le problème de cette définition est que la structure de variété dépend de l'atlas choisi, ce qui empèche un concept "général" de variété. Nous avons donc besoin de la notion d'atlas maximal :

Définition 2. *On dit que 2 atlas $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont compatibles si $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est encore un atlas (c'est à dire que toutes les cartes de $\mathcal{A}$ sont compatibles avec toutes les cartes de $\mathcal{A}'$).On dit qu'un atlas $\mathcal{A}$ est maximal, si pour tout atlas $\mathcal{A}'$ compatible avec $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.*

Remarque 1. *On a que tout atlas est inclu dans un unique atlas maximal.*

Définition 3. *Une structure de variété $\mathcal{C}^k$-différencielle sur M est la donnée d'un atlas maximal.*

Par abus de langage, on appellera souvent variété différencielle un espace topologique M doté d'une structure différencielle (et on oubliera généralement le $\mathcal{C}^k$).

Exemple 1.
- $\mathbb{R}^n$.
- *Les surfaces régulières.*
- *Les sous-variétés de* $\mathbb{R}^n$.
- *Les espaces projectifs.*
- *Les grassmanniennes.*

1 Applications Différenciables

La structure différencielle des variétés nous permet en particulier de donner une notion de différenciabilité aux applications continues entre variétés :

Définition 4. *Soient M et M' deux variétés différencielles, une application* $f : M \longrightarrow M'$ *est dite de classe* $\mathcal{C}^k$ *si :*

$$\forall m \in M, \exists (U,\phi) \in \mathcal{A}, (V,\psi) \in \mathcal{A}'/m \in U, f(m) \in V \text{ et } \psi \circ f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k(U,V)$$

Définition 5. *Deux structures différencielles* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *sont dites équivalentes si il existe un difféomorphisme :* $\psi : (M,\mathcal{A}) \longrightarrow (M,\mathcal{A}')$.

Remarque 2. *Il n'existe sur* S^3 *qu'une structure différentiable (à équivalence près), tandis qu'il en existe un continuum sur* S^4 *(à équivalence près) !*

Remarque 3.
- *L'application* $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$ *s'appelle expression de f dans les cartes* (U,ϕ),(U,ψ).
- *Soit* (U,x) *une carte,* $x = (x^1,...,x^n)$ *(ici les* x^i *sont des fonctions de U dans* $\mathbb{R}$*) est appelée système de coordonnées locales.*

2 Espace tangent et application différencielle

Soit $m \in M$, on note

$$\mathcal{F}(m) = \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ différenciable où } U \in \mathcal{V}(m)\}/\sim$$

où $f \sim g$ ssi $\exists W \in \mathcal{V}(m)$ tel que $f_{|W} = g_{|W}$.

Proposition 1. $\mathcal{F}(m)$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre.*

Définition 6.
- $\delta : \mathcal{F}(m) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une dérivation si* δ *est* $\mathbb{R}$*-linéaire et vérifie la condition de Leibniz :* $\delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$.
- $T_mM := Der_m(\mathcal{F}(m))$ *est l'espace tangent à M en p.*

Remarque 4. *On peut, de manière équivalente, définir* T_mM *comme l'ensemble des classes d'équivalences de courbes* γ *tracées sur M avec* $\gamma(0) = m$ *où l'on a* $\gamma \sim \gamma' \iff (\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \gamma')'(0)$ *pour une carte* (U,ϕ) *contenant m.*

Proposition 2. T_mM *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension n, et pour toute carte locale* $(U, x = (x^1,...,x^n))$*, une base de* T_mM *est* $\left((\frac{\partial}{\partial x^i})_m \right)_{i \in <1,n>}$

__Notation :__ Dans la suite, nous noterons $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_m = (\partial_i)_m$.

Définition 7. *Nous définissons aussi l'espace cotangent à M en m comme étant le dual de l'espace tangent. Nous le noterons $T^*_m M$; pour un système de coordonnées donné, il est généré par les vecteurs duaux que nous noterons $(dx^i)_m$.*

En particulier, ce formalisme nous permet de démontrer une formule de changement de base pour les vecteurs ; formule souvent utilisée en physique :

Proposition 3. *Soient $x_\alpha = (x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n})$ et $x_\beta = (x^{\beta_1}, ..., x^{\beta_n})$ deux systèmes de coordonnées locales sur un voisinage de m. On a alors la formule suivante :*

$$(\partial_{\alpha_i})_m = \sum_j (\partial_{\alpha_i} x^{\beta_j})_m (\partial_{\beta_j})_m$$

Définition 8. *Soit $TM = \coprod_{m \in M} T_m M$ le fibré tangent de M (de même, $T^*M = \coprod_{m \in M} T^*_m M$ le fibré cotangent).*

Proposition 4. *Le fibré tangent et cotangent sont des variétés de dimension $2n$.*

Définition 9. *Soit M et N deux variétés et $f \in \mathcal{F}(M, N)$, on définit la différencielle de f en m :*

$$f_{*m} : T_m M \longrightarrow T_{f(m)} N$$

qui envoit la classe $[\gamma]$ sur $[f \circ \gamma]$.

On définit de même l'application codifférencielle $f^* : T^*_{f(m)} N \longrightarrow T^*_m M$ duale de l'application différencielle.

Proposition 5.

- *Considérons deux cartes locales : (U, ϕ) de m et (V, ψ) de $f(m)$, elles nous définnissent des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $t_m M$ et $T_{f(m)} N$ (respesctivement), on a alors :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} f_{*m} = Jac(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$$

- *$(f_{*p} u) g = u(g \circ f)$ $\forall u \in T_p(M), g \in \mathcal{F}(f(p))$*
- *$(f \circ g)_{*p} = f_{*f(p)} \circ g_{*p}$*

Définition 10.

- *Un application $f \in \mathcal{F}(M, N)$ est dite non-singulière en $p \in M$ si $\ker(f_{*p}) = 0$.*
- *Un point $p \in M$ est dit régulier pour f si f_{*p} est surjective (critique sinon).*
- *Si p est critique pour f, $f(p)$ est appellée valeur critique.*
- *Le rang de f en p est le rang de sa différencielle en p.*
- *$f \in \mathcal{F}(M, N)$ est une immersion si elle est non-singulière en tout point de M.*
- *$f \in \mathcal{F}(M, N)$ est une submersion si elle est régulière en tout point de M.*

On peut maintenant définir la notion de sous-variété :

Définition 11. *Une sous-variété de M est une paire (N,f) où N est une variété et $f \in \mathcal{F}(N, M)$ est une immersion injective. On dit que f est un plongement si de plus f est un difféomorphisme sur son image (c'est à dire sur f(N) considéré avec sa structure différentielle relative à celle de M).*

Théorème 1 (Whitney). *Toute variété de dimension n se plonge dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{F}(M, N), q \in N$ tels que $P := f^{-1}\{q\} \neq \emptyset$; si tous les points de P sont réguliers pour f, alors il existe une unique structure différenciable sur P telle que (P,i) soit une sous-variété de dimension (m-n) plongée dans M.*

Exemple 2.
- *Les coniques non-dégénérée de $\mathbb{R}^2$.*
- *Les quadriques et les cubiques non dégénérée de $\mathbb{R}^3$.*
- *Un grand nombre de variétés algébriques (c'est à dire des variétés définis par les zéros de polynômes de plusieurs variables).*

Nous terminons cette section par un théorème fondamental :

Théorème 3 (de la fonction inverse). *Soit $f \in \mathcal{F}(M, N)$ et $p \in M$ tel que f_{*p} soit un isomorphisme ; alors il existe un voisinage ouvert U de p telle que $f_{|U}$ soit un difféomorphisme sur son image.*

3 Champs de vecteurs

Définition 12. *Un champs de vecteur sur M est une application différenciable X qui a un point $p \in M$ associe un vecteur $X_p \in T_pM$.*

On peut voir aussi un champs de vecteur comme une section du fibré tangent de M, i.e. une application $X : M \longrightarrow TM$ telle que $\pi \circ X = id_M$.

On notera $\chi(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M.

Remarque 5. *Soit $(U, x = (x^1, ..., x^n))$ une carte, alors les champs de vecteurs $(\partial_1, ..., \partial_n)$ forment une base des champs de vecteurs sur U. En particulier, on a :*

$$X = \sum_i X(x^i)\partial_i$$

Operations sur les champs : Soient X,Y deux champs sur M et $f, g \in \mathcal{F}(M)$, alors on a :
- $(fX + gY)_p = f(p)X_p + g(p)Y_p$ donc $(fX + gY) \in \chi(M)$.
- $(Xf)_p = X_pf$ donc $Xf \in \mathcal{F}(M)$.
- $[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf)$ donc $[X, Y] \in \chi(M)$

Proposition 6.
- $(\chi(M), +, \cdot_{\mathbb{R}}, [.,.])$ *est une algèbre de Lie réelle.*
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$

Définition 13. *Une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ est une courbe intégrale de $X \in \chi(U)$ (où U est un ouvert de M) si :*

- $\gamma(I) \subset U$.
- $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ $\forall t \in I$.

Remarque 6. *Pour $X \in \chi(M)$, il existe des courbes intégrales de X localement en tout point (par le problème de Cauchy).*

4 Tenseurs et formes

Définition 14. *Un champs tenseur différentiable r-covariant est une application $\mathcal{F}(M)$-multilinéaire différentiable :*

$$T : \chi(M) \times \chi(M) ... \times \chi(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

On note $T_r(M)$ l'ensemble des champs de tenseurs r-covariants sur M. On conviendra que $T_0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Remarque 7. *Un abus de langage fréquent consiste à appeller "tenseur" à un "champs de tenseur différenciable".*

Exemple 3.
- *Soit $f \in \mathcal{F}(M)$ une fonction, on définit $df : \chi(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ par $(df)X = Xf$. On remarque que df est un tenseur 1-covariant, il est appellé "différentielle de f".*
- *Soit $g \in T_2(M)$ tel que pour tout $p \in M$, $g_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une forme bilinéaire symmétrique définie positive (i.e. un produit scalaire sur T_pM), alors g est appellé métrique Riemannienne sur M, et (M,g) est une variété Riemannienne.*

Opérations :
- Soient $T, S \in T_r(M)$,$f, g \in \mathcal{F}(M)$, alors $(fT + gS) \in T_r(M)$
- Soient $T \in T_r(M), S \in T_s(M)$, et $X_1, ..., X_{r+s} \in \chi(M)$ on définit :

$$(T \otimes S)(X_1, ..., X_{r+s}) = T(X_1, ..., X_r).S(X_{r+1}, ..., X_{r+s})$$

On a donc $T \otimes S \in T_{r+s}(M)$.

Proposition 7 (structure)**.**
- $(T_r(M), +, ._{\mathbb{R}})$ *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
- $(T_r(M), +, ._{\mathcal{F}(M)})$ *est un $\mathcal{F}(M)$-module.*
- $(T(M) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} T_n(M), +, ._{\mathbb{R}}, \otimes)$ *est une algèbre associative non commutative avec unité. On l'appelle l'algèbre tensorielle de M.*

Remarque 8. *Soit (U, x) une carte locale, alors $T_r(U) =< dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_r} >$ en tant que $\mathcal{F}(U)$-module. On voit donc que $dim(T_r(U) = n^r$.*

Un problème des tenseurs est la non commutativité. Un tenseur 2-covariant T vérifiant $T(X,Y) = -T(Y,X)$ sera appellé tenseur alterné ou 2-formes. Cette définition se généralise :

Définition 15. *Un champs de r-forme sur M est une application $\mathcal{F}(M)$-multilinéaire alternée :*

$$\omega : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

L'ensemble des champs de r-formes sur M sera noté $\Lambda^r(M)$.

On remarque clairement que $\Lambda^r(M) \subset T_r(M)$; on va maintenant définir une opération permettant de transformer un tenseur en une forme :

Définition 16. *Soit $Alt : T_r(M) \longrightarrow \Lambda^r(M)$ définit par :*

$$Alt(T)(X_1, ..., X_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \epsilon(\sigma) T(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(r)})$$

On remarque facilement que Alt est une application $\mathcal{F}(M)$-linéaire telle que sa restricion sur $\Lambda^r(M)$ est égale à l'identité. Cette application nous permet de définir le produit extèrieur de deux formes; qui serait l'analogue au produit tensoriel sur les tenseurs :

Définition 17. *Soit $(\omega, \theta) \in \Lambda^r \times \Lambda^s$, alors on définit $\omega \wedge \theta = \dfrac{(r+s)!}{r!s!} Alt(\omega \otimes \theta)$: le produit extérieur de deux formes.*

Proposition 8.
- *Soient $\omega \in \Lambda^r(M), \theta \in \Lambda^s(M)$, alors $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega$. Par conséquent, si r est impair, $\omega \wedge \omega = 0$.*
- *Soit (U, x) une carte locale, alors la famille $\{dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} / 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq n\}$ est une base de $\Lambda^r(U)$ en tant que $\mathcal{F}(U)$-module.*
- *$dim(\Lambda^r(U)) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$.*

Proposition 9 (structure). *$(\Lambda(M) := \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(M), +, ._{\mathcal{F}(M)}, \wedge)$ est une algèbre associative non commutative avec élément unité appellée algèbre extèrieure de M.*

Définition 18. *Soit $f \in \mathcal{F}(M, N)$ une application et $T \in T_r(N)$, on définit $f^*T \in T_r(M)$ par $f^*T = T \circ f$ si $r = 0$ et par*

$$f^*T(X_1, ..., X_r)(p) = T(f_{*p}(X_1)_p, ..., f_{*p}(X_r)_p)(f(p))$$

pour $r \neq 0$. f^* est appellé le pull-back.

Proposition 10.
- *$f^* : T_r(N) \longrightarrow T_r(M)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.*
- *$f^*(gT) = (g \circ f) f^*T$ pour tout $T \in T(N)$ et $f \in \mathcal{F}(N)$.*
- *$f^*(T \otimes S) = f^*T \otimes f^*S$.*
- *$f^*(Alt(T)) = Alt(f^*(T))$.*
- *$f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$.*
- *$f^*(dg) = d(f^*g)$.*

Définition 19 (tenseurs mixtes)**.** *Un tenseur s-covariant et r-contravariant est une application $\mathcal{F}(M)$-multilinéaire :*

$$T : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \times \Lambda^1(M) \times ... \times \Lambda^1(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

On note $T^r_s(M)$ l'ensemble des tenseurs s-covariant et r-contravariant.

Remarque 9.

- *On a les mêmes opérations sur les tenseurs mixtes que sur les tenseurs "normaux".*
- *Soit (U,x) un slc, alors on a que :*

$$T = \sum_{indices} T(\partial_{i_1}, ..., \partial_{i_s}, dx^{j_1}, ..., dx^{j_r}) dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_s} \otimes \partial_{j_1} \otimes ... \otimes \partial_{j_r}$$

.

Remarque 10. *Soit une application $\mathcal{F}(M)$-multilinéaire*
$T : \chi(M) \times ... \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ *; on définit alors $K_T \in T^1_n(M)$ de la façon suivante :*

$$K_T(X_1, ..., X_n, \theta) = \theta(T(X_1, ..., X_n))$$

On a que l'application $T \longrightarrow K_T$ est un isomorphisme.

Morale : On peut voir un tenseur n-covariant et 1-contravariant comme une application multinéaire transformant n champs de vecteurs en un autre champs de vecteurs.

5 Opérateurs sur les formes

Définition 20.

- *Une dérivation sur l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $D : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ telle que :*

$$D(\omega \wedge \theta) = D\omega \wedge \theta + \omega \wedge D\theta \ \forall \omega, \theta \in \Lambda(M)$$

- *Une anti-dérivation sur l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $D : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$ telle que pour tout $\omega \in \Lambda^r(M)$ on ait :*

$$D(\omega \wedge \theta) = D\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge D\theta \ \forall \theta \in \Lambda(M)$$

Proposition 11. *Les dérivations et les anti-dérivations sont uniquement déterminées par leurs effets sur les 0-formes et sur les 1-formes.*

5.1 La différentielle extèrieure

Définition 21. *La différentielle extèrieure est l'anti-dérivation*
$d : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r+1}$ *définie par :*

$$d\omega(X_1, ..., X_{r+1}) := \sum_i (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, ..., \bar{X_i}, ..X_{r+1})$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, ..., \bar{X_i}, ..., \bar{X_j}, ..., X_{r+1})$$

Proposition 12. *d est l'unique anti-dérivation telle que $d^2 = 0$, $d : \Lambda^r(M) \to \Lambda^{r+1}(M)$ telle que $d(f) = df$ $\forall f \in \mathcal{F}(M)$.*

Définition 22.

Une forme ω est dite fermée si $d\omega = 0$. On note $\mathcal{Z}^r(M)$ l'ensemble des r-formes fermées sur M.

Une forme α est dite exacte si il existe une forme β telle que $\alpha = d\beta$. L'ensemble des r-formes exactes est noté $\mathcal{B}^r(M)$.

$\mathcal{H}^r(M) := \mathcal{Z}^r(M)/\mathcal{B}^r(M)$ est appellé r-ième groupe de cohomologie de De Rham.

Proposition 13. *$(\mathcal{H}(M) := \bigoplus_r \mathcal{H}^r(M), +, ., \wedge)$ est une algèbre associative appellée Algèbre de Cohomologie de De Rham.*

Théorème 4 (de Poincaré)**.** *Localement toute forme fermée est exacte.*

Proposition 14. *Si M et N sont deux variétés homéomorphes, alors tous les groupes de cohomologie de De Rham sont isomorphes.*

5.2 Le produit intérieur

Définition 23. *Soit M une variété et $X \in \chi(M)$, on définit le produit intérieur respectivement à X $i_X : \Lambda^r(M) \longrightarrow \Lambda^{r-1}(M)$ par :*
- *$i_X\omega = \omega(X)$ si $\omega \in \Lambda^1(M)$.*
- *$(i_X\omega)(X_1, ..., X_{r-1} = \omega(X, X_1, ..., X_{r-1})$ si $r > 1$.*

Proposition 15.
- *i_X est une anti-dérivation.*
- *$i_X^2 = 0$.*
- *$i_X(f\omega) = i_{fX}\omega$.*

5.3 La dérivée de Lie

Définition 24. *Soit $X \in \chi(M)$, on définit la dérivée de Lie par rapport à X : c'est l'application $L_X : T_r(M) \longrightarrow T_r(M)$ telle que $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ sur les formes (c'est une dérivation) et $L_X(T \otimes S) = L_XT \otimes S + T \otimes L_XS$.*