

## TP4 : Illustration de théorèmes du cours avec R

**Exercice 1** Soit  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un échantillon de loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

1. On suppose dans un premier temps que  $\sigma$  est connu.
  - (a) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\mu}_n$  de l'espérance  $\mu$  et l'information de Fisher du modèle.
  - (b) Trouver un intervalle de confiance exact de  $\mu$  à 0.95.
  - (c) À l'aide de R, simuler 100 fois  $\hat{\mu}_{500}$  avec un  $\mu$  quelconque et  $\sigma^2 = 1$ . Combien de fois  $\mu$  est dans votre intervalle de confiance ?
2. Soit  $\hat{\sigma}^2$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\sigma^2$ .
  - (a) Calculer  $\hat{\sigma}^2$ .
  - (b) On admet que

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}(\hat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1). \quad (1)$$

En déduire un intervalle de confiance asymptotique à 0.95 de  $\hat{\mu}_n$  lorsque  $\sigma^2$  est inconnu.

- (c) À l'aide de R, simuler 100 fois  $\hat{\mu}_{500}$  avec un  $\mu$  et  $\sigma$  quelconques. Combien de  $\hat{\mu}_{500}$  sont dans votre intervalle de confiance ?
  - (d) À l'aide d'un histogramme, confirmer (1).

**Exercice 2** Soit  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un échantillon de loi uniforme  $\mathcal{U}([0, \theta])$ . Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_{EMV}$  de  $\theta$ , puis l'estimateur par la méthode des moments  $\hat{\theta}_m$  de  $\theta$ . Comparer à l'aide d'un plot la vitesse de convergence des deux estimateurs. Commenter.