Polytech'Nice Sophia-Antipolis
Optimisation - MAM4 - Année 2022-2023

TP 2 : Méthode de gradient conjugué

Le but de ce TP est de programmer, valider et expérimenter l'algorithme du gradient conjugué GC, et des versions non-linéaires NLCG vues en cours : Fletcher-Reeves, Polack-Ribière et Dai-Yuan.

Etape 1.
Rappeler l'algorithme GC et l'implémenter. On pourra utilement se servir comme point de départ des codes de gradient développés en TP4. Effectuer les tests de validation rapide pour les fonctions quadratiques suivantes ($N = 10, 20, 40$):

$$J_1(v) = \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - 1)^2, \quad J_2(v) = \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - i)^2$$

Etape 2.
On considère les fonctions quadratiques suivantes (en dimension N):

$$J_3(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v), \quad J_4(v) = \frac{1}{2}(Bv, v) - (f, v)$$

avec $f = (1, \ldots, 1)$ et les matrices A et B sont des matrices bande données par :

$$A = tridiag[-1, 2, -1]; \quad B = pentadiag[-1, -1, 4, -1, -1]$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{et} \quad \text{même principe pour} \quad B$$

Minimiser les fonctions J_3 et J_4 par GC ($N = 20, 40, 80, 100, 200$), et comparer sur ces fonctions les performances de GC et de GF (avec un pas $t = 0.5$). On tracera sur un même graphique les courbes GC et GF de convergence du coût en fonction des itérations.

Etape 3.
Effectuer une étude du comportement de NLGC (Fletcher-Reeves à pas constant bien choisi) vis à vis du paramètre ϵ pour la fonction quadratique suivante ($N = 10, 20, 40$):

$$J_\epsilon(v) = \sum_{i=1}^{i=N} (v_i)^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{N-1} \{(v_i + v_{i+1} - N/2)\}^2$$

On fera l'étude pour $\epsilon > 0$ de plus en plus petit, par exemple $\epsilon = 10^{-p}, p = 0, 1, 2, 3$. Comparer la solution optimale calculée u^* ainsi que son coût $J_\epsilon(u^*)$ et son gradient à ceux du vecteur c défini par $c_i = N/4$ $(i = 1, ..., N)$. Interpréter les résultats obtenus.