Polytech'Nice Sophia-Antipolis
Optimisation - MAM4 - Année 2022-2023

TP 3 : Méthode de gradient à pas spectral

Le but de ce TP est de programmer, valider et expérimenter la méthode de gradient avec pas spectral.

On introduit les deux notations :

$$\left\{ \begin{array}{lcc} s^{(k-1)} & = & u^{(k)} - u^{(k-1)} \\ y^{(k-1)} & = & \nabla J(u^{(k)}) - \nabla J(u^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Etape 1.
Reprendre un algorithme de minimisation par gradient à pas variable (ou à pas constant) :

$$u^{(0)} \text{ donné}; \quad u^{(k+1)} = u^{(k)} - \rho_k \nabla J(u^{(k)}) \tag{1}$$

Modifier cet algorithme de sorte à ce que le pas ρ_k soit donné par l'une des deux variantes, dites de Barzilaï et Borwein :

$$\rho_k^1 = \frac{(s^{(k-1)}, s^{(k-1)})}{(y^{(k-1)}, s^{(k-1)})}; \qquad \rho_k^2 = \frac{(s^{(k-1)}, y^{(k-1)})}{(y^{(k-1)}, y^{(k-1)})}$$

Cet algorithme (noté BB1 et BB2 selon variante) nécessite donc un pré-calcul de $u^{(1)}$ avec un pas initial ρ_0 décidé par l'utilisateur.

Etape 2.
Effectuer les tests de validation pour les fonctions quadratiques suivantes ($N = 10$) :

$$J_1(v) = \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - 1)^2, \quad J_2(v) = \sum_{i=1}^{i=N} (v_i - i)^2$$

Etape 3.
On considère les fonctions suivantes (en dimension N) :

$$J_5(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v) + \sum_{i=1}^{i=N} (v_i)^2, \quad J_6(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (f, v) + \sum_{i=1}^{i=N} (v_i)^4$$

avec $f = (1, \ldots, 1)$ et la matrice $A = tridiag[-1, 2, -1]$ et la fonction de Rosenbrock

$$J_R(v) = \sum_{i=1}^{N-1} (v_{i+1} - v_i^2)^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (v_i - 1)^2$$

Minimiser les fonctions J_5, J_6 et J_R par BB1 et par BB2 ($N = 10, 20, 40, 80$), et comparer les performances de ces deux variantes. On tracera sur un même graphique les courbes BB1 et BB2 de $J(u^{(k)})$ en fonction des itérations k.

Etape 4.
Comparer sur les fonctions J_H (du TP1) et J_R les performances relatives des méthodes BB1 (ou BB2) et des algorithmes NLCG (au choix F-R, P-B ou D-Y) développés en TP2.