PXL-DIGITAL

PXL - IT

Data Advanced Deel 1: COMBINATIELEER & KANSREKENEN

Lector(en)

Isabelle Godfrind

Kerstin Nys

Heidi Tans

1. Combinatieleer: Doel

De student:

- kan een vraagstuk over combinatieleer omzetten naar een concrete formule, gebruik makende van de beslissingsboom en/of tabel van groeperingen

- kan identificeren wat p (gekozen elementen) en n (verzameling keuzemogelijkheden) zijn, in de context van een vraagstuk rond combinatieleer

- kan een permutatie berekenen, m.b.v. de formule en een rekenmachine

- kan een variatie berekenen, m.b.v. de formule en een rekenmachine

- kan een herhalingsvariatie berekenen, m.b.v. de formule en een rekenmachine

- kan een combinatie berekenen, m.b.v. de formule en een rekenmachine

2. Combinatieleer: Inleiding

In heel wat problemen, vooral in het domein van de kansrekening, moeten we het aantal elementen van een verzameling tellen.

Willen we bvb. de kans berekenen om een aas te trekken uit een spel kaarten, dan tellen we het aantal azen en het totaal aantal kaarten in een kaartspel en vinden we als kans 4/52.

Het tellen van deze aantallen elementen is niet altijd even eenvoudig als in voorgaand geval en wordt daarom verduidelijkt in volgende paragraaf.

3. Combinatieleer: Soorten groeperingen

3.1 Permutaties

Voorbeeld 1

Een voetbaltornooi wordt georganiseerd met 4 ploegen: A, B, C en D

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB	ADBC	ADCB
BACD	BADC	BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Zijn de mogelijke eindrangschikkingen van dit tornooi.

We zien hier onmiddellijk dat ABCD een andere eindrangschikking is dan DCBA. Dit betekent dat de **volgorde** van **belang** is. Verder is AABB geen geldige eindrangschikking. **Herhaling** is **niet** mogelijk.

Definitie

Een **permutatie** van n elementen is een **geordend n - tal** van **verschillende** elementen gekozen uit een gegeven verzameling van n elementen.

P_n is het aantal permutaties uit n elementen en is gelijk aan:

$$P_n = n!$$

Oplossing voorbeeld 1:

$P_4 = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$

Voorbeeld 2

De code van de kluis (met de examenvragen) bestaat uit 6 verschillende klinkers. (a - e - i - o - u - y). Hoeveel mogelijkheden moet jij maximaal uitproberen om de code te kraken?

6!

Voorbeeld 3

a. Op hoeveel manieren kunnen vijf jongens en vier meisjes naast elkaar op een rij zitten?
b. Op hoeveel manieren kunnen ze naast elkaar zitten op een rij, als de jongens zowel als de meisjes gegroepeerd wensen te blijven?

a) 9!

b) 5! * 4! * 2

maal twee want de jongens en meisjes kunnen van plaats verwisselen

3.2 Variaties

Voorbeeld 4

Beschouw voetbalwedstrijden (uit- en thuismatchen) van vier verschillende ploegen: A, B, C en D.

AB	AC	AD
BA	BC	BD
CA	CB	CD
DA	DB	DC

zijn alle mogelijke verschillende wedstrijden die gespeeld kunnen worden (12).

We zien hier onmiddellijk dat AB een andere wedstrijd is dan BA; wat betekent dat de **volgorde van belang** is bij het tellen van alle mogelijke wedstrijden en dat AA niet kan voorkomen **(geen herhaling**).

We noemen dit een variatie van 2 elementen uit 4.

Definitie

Een **variatie** van p elementen uit n elementen **($p \leq n$)** is een **geordend** p - tal van p **verschillende** elementen gekozen uit de gegeven verzameling van n elementen.

$$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

Voorbeeld 5

20 voetbalploegen (A, B, … , T) nemen deel aan een tornooi. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om de top 3 te voorspellen? De winnaar krijgt een gouden medaille, de tweede een zilveren en de derde een bronzen.

ABC ABD ABE ABF … ABT

…

TAB TAC TAD TAE … TAF

Hieruit blijkt dat er nood is aan een algemene formule voor het tellen van dit soort variaties.

Definitie

V_n^p is het aantal **variaties** van *p* **verschillende** elementen uit *n* elementen en

$V_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ met $V_n^n = n!$ en $V_n^0 = 1$

Merk op: Een variatie van n elementen uit n is een permutatie: $V_n^n = P_n$

Oplossing voorbeeld 5:

$$\frac{20!}{(20-3)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$$

Voorbeeld 6

In een vergadering van 220 personen moet een bestuur van 4 personen gekozen worden uit 10 kandidaten. Ieder aanwezige moet stemmen voor 4 kandidaten in voorkeurvolgorde. Op hoeveel manieren kan elke stemgerechtigde zijn stembiljet geldig invullen?

$$V_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

3.3 Herhalingsvariatie

Definitie

Een **herhalingsvariatie** van *p* elementen uit *n* elementen is een **geordend** *p* - tal van elementen gekozen uit een gegeven verzameling van *n* elementen; waarbij hetzelfde element meermaals gekozen mag worden.

Merk op dat *p* hier groter kan zijn dan *n*.

$\bar{V}_n^p$ is het aantal herhalingsvariaties van *p* elementen uit *n* en is gelijk aan

$\bar{V}_n^p = n^p$ met $\bar{V}_n^0 = n^0 = 1$

Voorbeeld 7

A = {a, b, c}

- De herhalingsvariaties van 1 element uit *A* zijn: (a) (b) (c)

  Hun aantal is $\bar{V}_3^1 = 3^1 = 3$

- De herhalingsvariaties van 2 elementen uit A zijn:

  (a,a) (a,b) (a,c)

  (b,a) (b,b) (b,c)

  (c,a) (c,b) (c,c)

  Hun aantal is $\bar{V}_3^2 = 3^2 = 9$

- Het aantal herhalingsvariaties van 4 elementen uit A is: $\bar{V}_3^4 = 3^4 = 81$

Voorbeeld 8

Op hoeveel manieren kunnen we een test invullen als de test dertig vragen omvat en als er op elke vraag vier antwoorden mogelijk zijn?

$n = 4 \quad p = 30$

$\bar{V}_4^{30} = 4^{30} = 1.15 \cdot 10^{18}$

Voorbeeld 9

a. Een dobbelsteen wordt twee keer achtereen opgeworpen. Hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk?

b. Hoeveel mogelijkheden zijn er waarbij het aantal ogen op beide dobbelstenen gelijk is?

a) $\bar{V}_6^2 = 6^2 = 36$

b) $\bar{V}_6^1 = 6^1 = 6$

$V_6^1 = \frac{6!}{(6-1)!} = 6$

3.4 Combinatie

Voorbeeld 10

Er is een voetbalcompetitie met 16 ploegen. De eerste 5 ploegen mogen door naar de volgende ronde (ongeacht of je op plaats 1 of op plaats 5 eindigt). Op hoeveel verschillende manieren kan je een pronostiek maken van de eerste 5 ploegen?

$$C_{16}^{5} = \frac{16!}{5!(16-5)!} =$$

Definitie

Een combinatie van *p* elementen uit *n* elementen **(*p*≤*n*)** is een deelverzameling van *p* **verschillende** elementen gekozen uit een gegeven verzameling van *n* elementen waarbij de **volgorde niet** van belang is.

C_n^p is het aantal combinaties van *p* elementen uit *n* en is gelijk aan

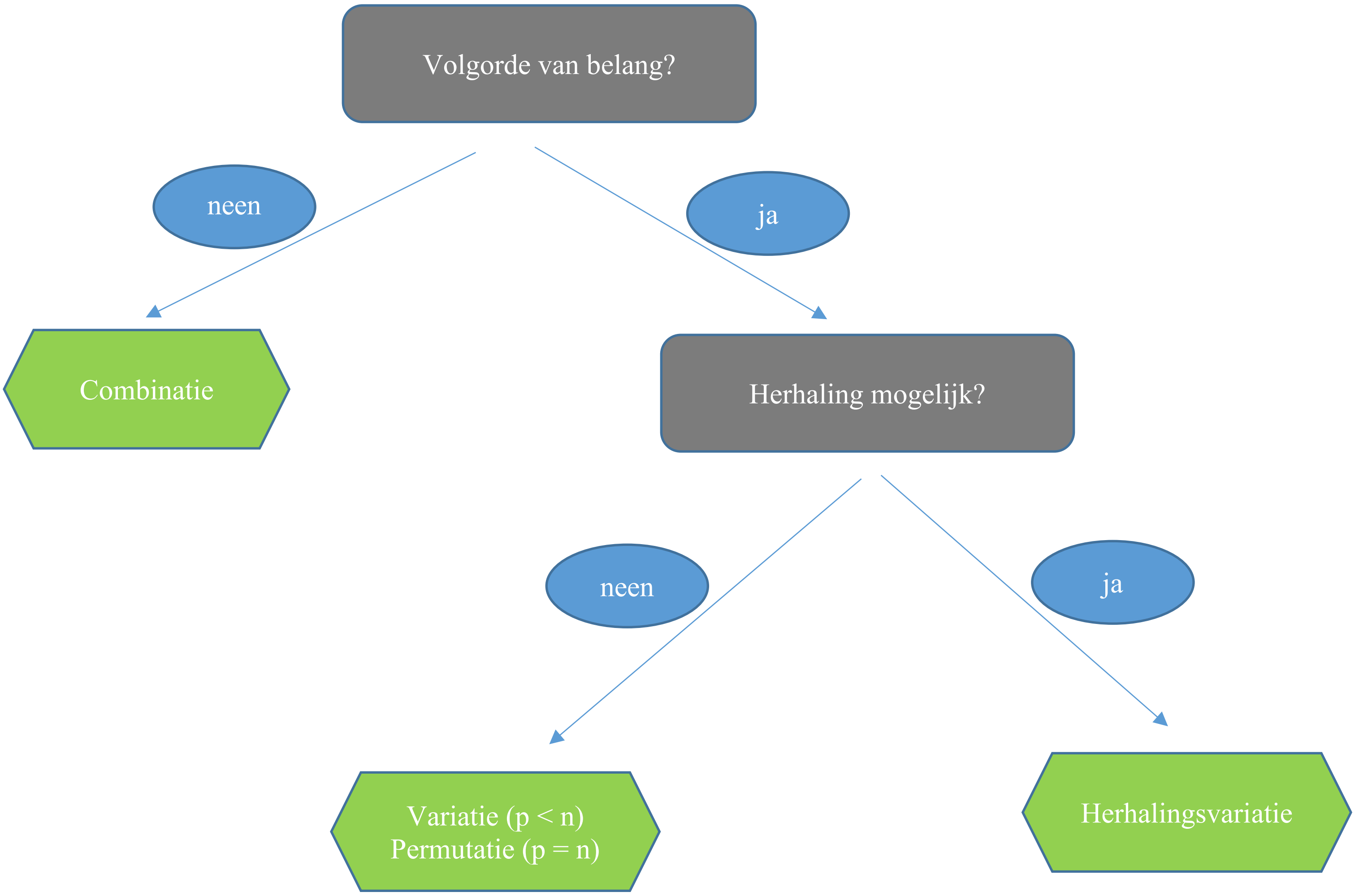
$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ met $C_n^0 = 1$ en $C_n^n = 1$.

Voorbeeld 11

Op hoeveel manieren kunnen we zeven kaarten trekken uit een spel van tweeënvijftig kaarten (de getrokken kaart wordt niet telkens terug gestoken)?

$$C_{52}^{7} = \frac{52!}{7!(52-7)!}$$

4. Combinatieleer samenvatting: Beslisboom



Combinatieleer samenvatting: tabel

Soort Groepering	**# gekozen elementen uit *n***	**Volgorde van belang?**	**Herhaling mogelijk**	**Berekening**
Permutatie	n	ja	neen	$P_n = n!$
Variatie	$p \leq n$	ja	neen	$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Herh. variatie	p willekeurig	ja	ja	$\overline{V}_n^p = n^p$
Combinatie	$p \leq n$	neen	neen	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

In de literatuur kan je andere soorten telproblemen tegenkomen oa. herhalingscombinaties, herhalingspermutaties…

5. Combinatieleer Oefeningen

Oefening 1

Bereken C_{10}^{5} ; P_9 ; V_4^0 ; $\overline{V}_7^2$

Oefening 2

Bij een kansspel komt het erop aan 6 verschillende cijfers te kiezen uit 42.

Hoeveel mogelijkheden zijn er?

$C_{42}^{6} = \frac{42}{6!(42-6)!}$

Oefening 3

Hoeveel getallen kan men vormen met 5 cijfers

a. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5}

b. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

c. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5} en zonder gelijke cijfers

d. gekozen uit {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} en zonder gelijke cijfers

Oefening 4

Aan de finale van de 110 meter horden doen 6 atleten mee.

a. Op hoeveel verschillende volgorden kunnen de plaatsen 1 tot en met 6 worden bezet? $P_6 = 6! = 720$

b. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de medailles voor de eerste, tweede en derde plaats worden verdeeld? $V_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$

c. De nummers 1 en 2 worden opgenomen in de Belgische selectie. Hoeveel verschillende tweetallen zijn er mogelijk?

$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

Oefening 5

a. Op hoeveel manieren kan men een commissie van drie personen kiezen uit 150 kandidaten?

b. Stel dat de Tweede kamer bestaat uit drie partijen: A, B en C, die ieder 50 leden hebben. Op hoeveel manieren kan men een commissie van drie personen kiezen als alle partijen één commissielid leveren.

c. Op hoeveel manieren kan men een commissie van zes personen kiezen als alle partijen twee vertegenwoordigers kiezen?

Oefening 6

Het sleutelwoord van een geheime code bestaat uit 6 verschillende letters (het woord hoeft geen betekenis te hebben). Hoeveel mogelijkheden zijn er met 26 letters?

$$V^6_{26} = \frac{26!}{(26-6)!} =$$

Oefening 7

Aan een paardenkoers nemen 8 paarden deel. Er wordt gevraagd de eerste 4 paarden in de juiste volgorde te geven. Hoeveel van dergelijke voorspellingen zijn er mogelijk?

Oefening 8

Een nummerplaat moet bestaan uit 1 cijfer (ofwel 1 ofwel 9) gevolgd door 3 letters gekozen uit het alfabet, gevolgd door 3 cijfers gekozen uit 0, … , 9. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

$$\bar{V}^3_{26} = 26^3 \qquad = 35\,152\,000$$

$\times$

$$\bar{V}^3_{10} = 10^3$$

$\times 2$

Oefening 9

Een groep van acht mannen en vier vrouwen wordt getraind op een ruimtevaartcentrum voor een bemande vlucht naar Mars. Uiteindelijk zullen later vijf personen (drie mannen en twee vrouwen) worden geselecteerd om de vlucht mee te maken. Een krant looft een grote prijs uit voor de persoon die precies voorspelt wie de vijf geselecteerde deelnemers zijn. Op hoeveel manieren kan hier een verschillend vijftal worden gekozen?

Oefening 10

Een examen bestaat uit 10 meerkeuzevragen, elk met 4 keuzemogelijkheden (slechts 1 antwoord is juist). Op hoeveel verschillende manieren kan een student dit examen beantwoorden (indien telkens 1 antwoord per vraag gegeven wordt)? Op hoeveel verschillende manieren kan een student een totaal verkeerd examen afleveren?

a) $V_4^{10} = 4^{10}$ b) $V_3^{10} = 3^{10}$

Oefening 11

Bij de finale 100 meter schoolslag op de Olympische Spelen doen acht deelnemers mee. Bereken het aantal verschillende manieren waarop de drie medailles verdeeld kunnen worden.

Oefening 12

Van een groep van 30 studenten worden drie studenten op basis van prestaties geselecteerd voor een studie in het buitenland. Bereken het aantal verschillende groepjes dat gevormd kan worden.

$C_{30}^{3} = \frac{30!}{3!(30-3)!}$

Oefening 13

Bij een onderwijsinstituut moeten studenten bij hun studieprogramma drie keuzevakken kiezen, namelijk een economievak, een vreemde taal en een kwantitatief vak. Wat het economievak betreft zijn er drie keuzemogelijkheden, voor de taal moet worden gekozen uit vier cursussen en voor het kwantitatieve vak zijn er drie keuzes voorhanden. Bereken het aantal verschillende pakketten van drie vakken dat studenten hieruit kunnen samenstellen.

Oefening 14

Hoeveel getallen van 3 symbolen kan men vormen in het hexadecimaal stelsel? (16-tallig)

15 . 16 . 16

Oefening 15

Hoeveel vlaggen met 3 verticale strepen van verschillende kleur kan men maken als men beschikt over 5 verschillende kleuren?

Oefening 16

a. Hoeveel getallen van 3 cijfers kunnen we vormen met de cijfers 0, 1, 2, 4, 5, 7, 9? 6 . 7 . 7

b. Hoeveel van die getallen beginnen met een 1?

1 . 7 . 7

Oefening 17

Het morsealfabet bevat twee tekens: punt en streep. Hoeveel tekens moet je minstens achter elkaar gebruiken om elke letter van het alfabet voor te kunnen stellen?
vb: wanneer je twee tekens achter mekaar zet, kan je 4 letters voorstellen. nl: . . / . - / - . / - - wat te weinig is...

Oefening 18

De code van het alarm van de PXL bestaat uit 2 cijfers gevolgd door 3 verschillende letters. Jij beschikt over volgende informatie: De eerste letter is een X. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er? cijfers: $\bar{V}^2_{10} = 10^2$

letters: $V^2_{25} = \frac{25!}{(25-2)!}$

Oefening 19

Een geheime code bestaat uit een rij van punten, driehoeken en strepen. Hoeveel verschillende codes kunnen er gevormd worden door een rij van hoogstens 4 tekens?

$3^4 + 3^3 + 3^2 + 3^1$

Oefening 20: moeilijker

Hoeveel “woorden" van vijf verschillende letters kunnen we vormen met acht gegeven medeklinkers en twee gegeven klinkers als ieder woord moet bestaan uit drie medeklinkers en twee klinkers.

6. Kansrekenen: Doel

De student kan:

- uitleggen wat een universum is en gebeurtenissen zijn
- uitleggen wat het complement van een gebeurtenis is
- uitleggen wat de lege verzameling is
- uitleggen wat unie, doorsnede en verschil van 2 verzamelingen betekenen en berekenen.
- het verband leggen tussen bewerkingen met verzamelingen en logische operatoren: and, or en not
- uitleggen wat disjuncte gebeurtenissen zijn
- m.b.v. kanswetten en combinatieleer basis kansen berekenen. Dit omvat:

  kans regel – somregel – complementregel – verschilregel
- het verschil tussen afhankelijke en onafhankelijke gebeurtenissen kennen en weten wat een voorwaardelijke kans is
- m.b.v. kanswetten en combinatieleer voorwaardelijke kansen berekenen. Dit omvat: voorwaardelijke kans regel - doorsnede regel - regel van Bayes
- m.b.v. kanswetten en combinatieleer de doorsnede van onafhankelijke kansen berekenen.
- de wet van de totale kans gebruiken
- een vraagstuk over kansrekenen omzetten naar een concrete formule, gebruik makende van kanswetten en combinatieleer

7. Kansrekenen: Inleiding

In het voorgaande leerden we het aantal elementen in een verzameling te tellen. Deze kennis kunnen we gebruiken om in dit hoofdstuk kansen van bepaalde gebeurtenissen te berekenen.

8. Kansrekenen: Experimenten en uitkomsten

Veel situaties uit ons dagelijks leven zijn onderhevig aan het toeval: we kunnen niet met zekerheid voorspellen wat er zal gebeuren.

Voorbeeld 1

Je gooit een dobbelsteen op. Hoeveel je gooit, is onderhevig aan het toeval.

Je trekt een kaart uit een kaartspel. Welke kaart je trekt is onderhevig aan het toeval. Je gooit een muntstuk op. Kop of munt is onderhevig aan het toeval.

Dit alles noemt men in de kansrekening een **(kans)experiment** = experiment waarvan het verloop door toeval bepaald wordt.

In veel gevallen kunnen we wel **alle** verschillende mogelijkheden (**uitkomsten**) opsommen. **De verzameling van alle mogelijke uitkomsten** van een kansexperiment noemen we het **universum** en stellen we voor door **U**.

Hoewel je niet altijd zekerheid hebt over het eindresultaat kan je, zeker voor eenvoudige experimenten, vooraf het universum opschrijven.

Voorbeeld 2

Experiment	**Universum**
Een munt opwerpen	U = { kop, munt }
Een voetbalwedstrijd spelen	U = { winnen, verliezen, gelijk }

Bij bovenstaande experimenten bevat het universum steeds een eindig aantal elementen. Er zijn uiteraard ook experimenten waarbij het aantal uitkomsten ∞ is.

Voorbeeld 3

Experiment	**Universum**
De productietijd in min van een bepaald product	$U = \{1, 2, 3, \dots\}$
Een reëel getal tussen 0 en 1 kiezen	$U = \{0 \leq x \leq 1\} = [0 , 1]$

Soms vermoeden we dat bepaalde uitkomsten meer waarschijnlijk zijn dan andere. Dit vermoeden wordt binnen kansberekening beschreven door de kans op een bepaalde uitkomst te berekenen en genoteerd door **P**.

Een **kans** is een numerieke maatstaf voor de waarschijnlijkheid dat een uitkomst zal plaatsvinden: **Voorbeeld dobbelsteen:** $P(3) = \frac{1}{6}$

9. Kansrekenen: Gebeurtenissen

Voor kansexperimenten is het vaak ook interessant naast de individuele uitkomsten, ook bepaalde **deelverzamelingen** van het universum U te beschouwen; we spreken van een gebeurtenis.

Definitie

Een **gebeurtenis** is een deelverzameling van het universum U.

Voorbeeld 4

Experiment	**Universum**	**Gebeurtenis**
Een dobbelsteen gooien	$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	A = Een even getal gooien $A = \{ 2, 4, 6 \}$

Indien een deelverzameling A van U correspondeert met het bezitten van een bepaalde eigenschap E, dan is het ook logisch de deelverzameling te beschouwen waarbij E niet opgaat.

Dit stemt overeen met het complement van gebeurtenis A : A^c

Definitie

Het complement van een gebeurtenis A zijn de uitkomsten die niet tot A behoren.

$A^c = U \setminus A$

Opmerking

Het complement van het universum U, is de verzameling die geen enkel element van U omvat = de lege verzameling (notatie: ϕ).

Voorbeeld 5

Als A de gebeurtenis is die zegt: een even getal gooien met een dobbelsteen

$A = \{ 2, 4, 6 \} \subset U$

Dan is A^c: een oneven getal gooien

$A^c = \{ 1, 3, 5 \} \subset U$

Definitie

Indien A en B twee deelverzamelingen zijn van het universum U, die corresponderen met het bezitten van de eigenschappen E_1 resp. E_2, dan bevat de **unie** van A en B alle uitkomsten die tot ***A* en/of *B*** behoren.

Notatie: $A \cup B$

Voorbeeld 6

Als A = een even getal gooien met een dobbelsteen, dan $A = \{ 2, 4, 6 \} \subset U$

En B = een 3 – voud gooien, dan $B = \{ 3, 6 \} \subset U$

Dan $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6 \} \subset U$

Definitie

Indien A en B twee deelverzamelingen zijn van het universum U, die corresponderen met het bezitten van de eigenschappen E_1 resp. E_2, dan bevat de **doorsnede** van A en B alle uitkomsten die tot ***A* en *B*** behoren.

Notatie: $A \cap B$

Voorbeeld (analoog aan voorbeeld 6)

$A \cap B = \{ 6 \} \subset U$

Definitie

Indien A en B twee deelverzamelingen zijn van het universum U, die corresponderen met het bezitten van de eigenschappen E_1 resp. E_2, dan bevat de verzameling A min B alle uitkomsten die tot A **maar niet tot** B behoren.

Notatie: $A \setminus B = A \cap B^c$

Definitie

Twee **elkaar uitsluitende (of disjuncte)** gebeurtenissen zijn gebeurtenissen die geen gemeenschappelijke uitkomsten hebben. Ze kunnen dus niet samen optreden.

Voorbeeld 7

A = een even getal gooien met een dobbelsteen, dan $A = \{ 2, 4, 6 \}$

B = een 3 – voud gooien, dan $B = \{ 3, 6 \}$

De gebeurtenissen A en B zijn niet disjunct, want A en B bevatten een gemeenschappelijk element, nl 6.

10. Kansrekenen: Kansen toekennen aan gebeurtenissen

Bij kansexperimenten zullen sommige gebeurtenissen meer optreden dan andere. We zeggen dat de kans op die gebeurtenis groter is. Voor gebeurtenis *A* wordt deze kans gedefinieerd door het getal *P(A)* (= kans op gebeurtenis *A*).

Hoe bepalen we deze kans?

Eerste methode

Experiment:	Een correcte dobbelsteen (= elk van de 6 uitkomsten zijn even waarschijnlijk) opgooien *U* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Gebeurtenis:	Een 3 – voud gooien : *A* = {3, 6}

Er zijn 6 verschillende mogelijke uitkomsten en die zijn allen even waarschijnlijk. Van deze 6 uitkomsten behoren er 2 tot gebeurtenis *A* (nl. 3 en 6); dit zijn de voor ons gunstige uitkomsten.

Vandaar dat *P(A)* = $\frac{2}{6} = \frac{\text{aantal gunstige gevallen voor } A}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}}$

Merk op dat deze definitie alleen gebruikt kan worden als het universum eindig is en als alle uitkomsten even waarschijnlijk zijn.

De vraag naar *P(A)* bij een getrukeerde dobbelsteen kan hiermee niet opgelost worden.

Voorbeeld 8:

We trekken gelijktijdig 3 kaarten uit een kaartspel (52 kaarten). Wat is de kans dat deze 3 kaarten alle drie azen zijn?

$4/52 \cdot 3/51 \cdot 2/50$

Voorbeeld 9:

We vragen aan twee personen hun verjaardag. Bereken de kans dat twee personen op een verschillende dag verjaren.

$$\frac{364}{365}$$

Tweede methode

Experiment: Een getrukeerde dobbelsteen : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ opgooien

Gebeurtenis: Een 3 – voud gooien : $A = \{3, 6\}$

Om dit probleem op te lossen gaan we als volgt te werk:

- we gooien de dobbelsteen 10 keer en noteren het aantal keer dat *A* zich voordoet
- we gooien de dobbelsteen 100 keer en noteren het aantal keer dat *A* zich voordoet
- …

We maken elke keer de verhouding $\frac{\text{aantal}(A)}{n}$ (met *n* het aantal keer dat het experiment uitgevoerd werd).

Experimenteel kunnen we dan vaststellen dat $\frac{\text{aantal}(A)}{n}$ naar een welbepaalde waarde streeft als *n* toeneemt. Deze waarde is $\frac{2}{6}$ bij een correcte dobbelsteen.

Alhoewel deze tweede methode veel algemener is dan de eerste, is deze methode praktisch gezien niet uitvoerbaar. (om zeker te zijn van je antwoord, moet je het experiment een ∞ aantal keer uitvoeren).

De enige manier om hieraan te ontkomen is het definiëren van een aantal basisvoorwaarden waaraan kansen moeten voldoen.

11. Kansrekenen: Basis - eigenschappen kansrekening

Eigenschap (basisvoorwaarden)

Veronderstel dat $U = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ het universum is van een bepaald (kans)experiment, dan moeten de volgende basisvoorwaarden gelden:

- $0 \le P(\omega_i) \le 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots = 1$
- P(U) = *1* *en* P(ϕ) = *0*

Eigenschap

De kans van een willekeurige gebeurtenis $A \subset U$ is de som van de kansen van alle uitkomsten die tot gebeurtenis *A* behoren:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i) \qquad\qquad 0 \le P(A) \le 1$$

Voorbeeld 10

Veronderstel dat we één kant van een dobbelsteen lichtjes verzwaard hebben zodat de kansen er als volgt uitzien:

P(1) = 0.12; *P(2)* = *P(3)* = *P(4)* = *P(5)* = 0.17; *P(6)* = 0.2

Stel dat *A* = minstens een 4 gooien. Bereken *P(A)*.

Oplossing:

P*(A)* = P({4, 5, 6}) = P(4) +P(5) + P(6) = 0.17 + 0.17 + 0.20 = 0.54

Eigenschap: Somregel voor disjuncte gebeurtenissen

Als A en B disjunctie gebeurtenissen zijn (dwz $A \cap B = \phi$)
dan is $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Als $A_1 , \ldots , A_n$ gebeurtenissen zijn die twee aan twee disjunct zijn
($A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i, j$ *met* $i \neq j$)
dan is $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$

Voorbeeld 11

Drie renners A, B en C nemen deel aan een wedstrijd op de piste. De kansen van A en B worden gelijk geacht en zij hebben dubbel zoveel kans als C.

Bereken de kans dat

a. A wint
b. B of C wint

Oplossing

Eigenschap: Algemene somregel

Zijn A en B twee willekeurige gebeurtenissen

dan is $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Eigenschap: Complementregel

$P(A^c) = 1 - P(A)$

Eigenschap

Als $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Eigenschap

De kans op het verschil van twee gebeurtenissen A en B is

$$P(A \setminus B) = P(A \cap B^c)$$

OF: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Voorbeeld 12

Uit een spel van tweeënvijftig kaarten wordt aselect een kaart getrokken. Bereken de kans op de volgende gebeurtenissen:

a. Een boer of een schoppen trekken

b. Een harten maar geen aas

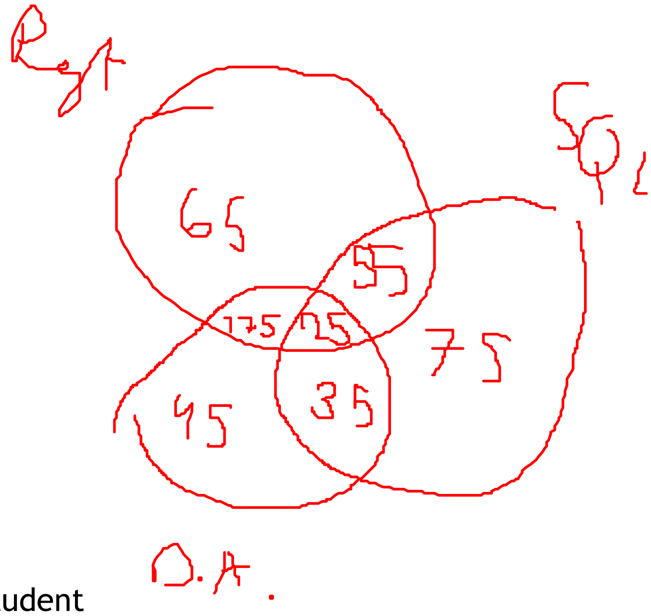
Oplossing

a) $4/52 + 13/52 - 1/52$

b) $P(h) - P(h \cap a) = 13/52 - 1/52$

Voorbeeld 13

Binnen de opleiding TIN moet elk van de 475 studenten minstens 1 van de cursussen Python, SQL of data adv volgen.



1. 320 studenten volgen Python
2. 190 studenten volgen SQL
3. 280 studenten volgen data adv
4. 80 studenten volgen Python en SQL
5. 200 studenten volgen Python en data adv
6. 60 studenten volgen SQL en data adv
7. 25 studenten volgen SQL, data adv en Python

Bereken de kans dat een willekeurige gekozen student

1. Python volgt maar geen data adv
2. data adv volgt maar geen SQL
3. Python of data adv volgt, maar geen SQL
4. Python volgt, maar geen SQL en geen data adv.

- Los op mbv verzamelingenleer

- Los op mbv logische operatoren: zie jupyter notebook: Kansrekenen Voorbeeld 13 pg 31

- Maak de extra opgaven in dit notebook

12. Kansrekenen: Voorwaardelijke kans

De kans van een gebeurtenis wordt dikwijls beïnvloed door een gerelateerde gebeurtenis.

Voorbeeld 14

Bij een loterij zijn 1000 loten verkocht met de nummers 000, 001, … , 999. Je hebt nummers 345, 367, 381 en 324.

De kans dat je de hoofdprijs wint (gebeurtenis A) is P(A) = 4/1000.

De trekking gebeurt niet eerlijk en je weet dat het eerste cijfer van het winnende nummer een 3 is. Door deze nieuwe informatie kunnen we de uitkomstenverzameling U : {000, …, 999} beperken tot B = {300, …, 399}.

We zien dus dat je kansen toenemen tot 4/100.

Dit noemen we een voorwaardelijke kans: Gegeven gebeurtenis B, wat is de kans op gebeurtenis A en noteren we als: $P(A|B)$

Definitie

De voorwaardelijke kans van een gebeurtenis A, gegeven dat een gebeurtenis B zich voorgedaan heeft, wordt genoteerd als $P(A|B)$ en wordt berekend als volgt:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{met} \quad P(B) > 0$$

analoog $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{met} \quad P(A) > 0$$

Definitie: Uit voorgaande definitie kunnen we de kans op een doorsnede bepalen:

$$P(A \cap B) = P(A|B) * P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) * P(A)$$

Op voorwaarde dat de voorwaardelijke kansen gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 15

Een vaas bevat 4 witte, 3 rode en 2 groene knikkers waaruit je er twee trekt **zonder** terugleggen.

a) Wat is de kans dat de tweede knikker rood is gegeven dat de eerste groen was?

b) Wat is de kans dat je twee witte knikkers trekt?

c) Wat is de kans dat je een witte en een rode knikker trekt?

Oplossing

Stel W = je trekt een witte knikker en R = je trekt een rode knikker.

Gebruik de notatie W_1 = de eerste knikker is wit,

R_2 = de tweede knikker is rood, …

a) $P(R_2 \mid G_1) = 3/8$

b) $P(W_1 \cap W_2) = P(W_2 \mid W_1) * P(W_1)$

$3/8 * 4/9$

c) $P(R_2 \mid W_1) * P(W_1) + P(W_2 \mid R_1) * P(R_1)$

$3/8 * 4/9 + 4/8 * 3/9$

13. Kansrekenen: Onafhankelijke gebeurtenissen

Als gebeurtenis *A* gebeurtenis *B* niet beïnvloedt, dan spreken we van onafhankelijke gebeurtenissen.

Definitie

Een gebeurtenis *A* heet **onafhankelijk** van een gebeurtenis *B* indien $P(A|B) = P(A)$

De voorwaardelijke kans is gelijk aan de onvoorwaardelijke kans.

Onafhankelijkheid is een symmetrische eigenschap, zodoende kunnen we kortweg spreken over onafhankelijke gebeurtenissen.

Eigenschap (Productregel voor onafhankelijke gebeurtenissen)

Twee gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Voorbeeld 16

Een vaas bevat 4 witte, 3 rode en 2 groene knikkers waaruit je er twee trekt met terugleggen.

a) Wat is de kans dat de tweede knikker rood is gegeven dat de eerste groen was? 3/9

b) Wat is de kans dat je twee witte knikkers trekt? 4/9 * 4/9

c) Wat is de kans dat je een witte en een rode knikker trekt?

P(eerst rood tweede wit) + P(eerste wit + tweede rood

3/9 * 4/9 + 4/9 * 3/9

14. Kansrekenen: De wet van de totale kans

Eigenschap

Als $U = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ met $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i, j \quad (i \neq j)$

Dan geldt voor elke gebeurtenis B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) * P(A_i)$$

Voorbeeld 17

Je hebt een vaas met 3 rode en 2 groene knikkers. Achtereenvolgens trek je twee knikkers uit deze vaas (zonder terugleggen). Bereken de kans dat de tweede knikker een rode is.

1) eerste knikker is rood
2) eerste knikker is groen

P(R2) = P(R2 | R1) * P(R1) + P(R2 | G1) * P(G1)
2/4 * 3/5 + 3/4 * 2/5
= 0.6

Voorbeeld 18

Een fabriek ontvangt onderdelen van twee verschillende leveranciers.

65% van de onderdelen wordt bij leverancier 1 gekocht, 35% bij leverancier 2.

De kwaliteit verschilt per leverancier. Uit gegevens uit het verleden blijkt dat de eerste leverancier 98% goede onderdelen levert en de tweede leverancier 95%. De onderdelen van beide leveranciers worden gebruikt in het productieproces.

Wat is de kans dat een machine uitvalt door een slecht onderdeel?

Oplossing

$$P(S) = P(S \mid L1) * P(L1) \quad + \quad P(S \mid L2) * P(L2)$$
$$= 0.02 * 0.65 + 0.35 * 0.05 = 0.0305$$

Voorbeeld 19

Gegeven zijn twee vazen: een witte, die 6 groene en 4 rode bollen bevat, en een zwarte, die 3 groene en 7 rode bollen bevat. Men trekt aselect een bol uit één van de vazen. Bereken de kans dat:

a. een groene bol getrokken wordt uit de witte vaas

b. een groene bol getrokken wordt uit om het even welke vaas

Oplossing

a)

0.5 * 6/10 = 0.3

b)

(uit witte vaas) (uit zwarte vaas)

0.5 * 6/10 + 0.5 * 3/10

=0.45

15. Kansrekenen: De regel van Bayes

De regel van Bayes geeft een methode om een voorwaardelijke kans te berekenen. Neem voorbeeld 18 van de leveranciers op pg 37. Waarschijnlijk zal men ook geïnteresseerd zijn in de volgende kans: Veronderstel dat een machine uitvalt door een slecht onderdeel, wat is dan de kans dat dit onderdeel geleverd werd door leverancier 1 (notatie $P(A_1|S)$) of door leverancier 2 (notatie $P(A_2|S)$)? Deze voorwaardelijke kansen kan je berekenen met behulp van de regel van Bayes.

Eigenschap (De regel van Bayes)

Als $U = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ met $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i, j \quad (i \neq j)$

Dan geldt voor elke gebeurtenis B met *P*(*B*) > 0:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) * P(A_i)}{P(B|A_1) * P(A_1) + \cdots + P(B|A_n) * P(A_n)}$$

Voorbeeld 20 (zie voorbeeld 18 pg 37)

De kans dat een slecht onderdeel van leverancier 1 komt is gelijk aan:

$P(L_1|S)$ = $\dfrac{P(S|L_1) * P(L_1)}{P(S)} = \dfrac{0{,}02 \times 0{,}65}{0{,}0305}$

Toon zelf aan dat de kans dat een slecht onderdeel van leverancier 2 komt is gelijk aan 0.5738. $1 - P(L_1|S)$

$P(L_2|S) = \dfrac{P(S|L_2) * P(L_2)}{P(S)} = \dfrac{0.05 \times 0{,}35}{0{,}0305}$

Voorbeeld 21

Een verzekeringsmaatschappij verdeelt haar klanten in twee soorten: zij die vaak een ongeval veroorzaken (groep E_1: 30%) en zij die zelden een ongeval veroorzaken (groep E_2: 70%). Een persoon uit groep E_1 heeft 25% kans om in de loop van een jaar een ongeval te veroorzaken terwijl iemand uit groep E_2 5% kans heeft.

- Zij A de gebeurtenis dat een verzekerde een ongeval veroorzaakt. Wat is de kans op A?
- Gegeven dat de verzekerde een ongeval veroorzaakte, wat is de kans dat hij tot groep E_1 behoort?

Oplossing

a) $P(A) = P(A \mid E1) * P(E1) + P(A \mid E2) * P(E2)$
$= 0.25 * 0.3 + 0.05 * 0.7 = 0.11$

b) $P(E_1 \mid A) = \dfrac{P(A \mid E_1) \times P(E_1)}{P(A)} = \dfrac{0{,}25 \times 0{,}3}{0{,}11}$

$= 0{,}6818$

Voorbeeld 22

Op PXL worden onder de middag extra lessen data advanced gegeven ter voorbereiding op het examen. Tachtig procent van de studenten die van plan zijn dit examen af te leggen volgt die lessen.

Uit de statistieken blijkt nu dat een student die de lessen gevolgd heeft 55% kans heeft om te slagen, terwijl 65% van diegenen die deze lessen links laat liggen niet slaagt.

a) Jan van PXL doet het examen mee. Wat is de kans dat hij slaagt?

b) Piet van PXL doet het examen mee en slaagt. Hoe groot is de kans dat hij die lessen volgde?

Oplossing

a) 0.55 * 0.8 + 0.35 * 0.2 = 0.51

b) $P(L|S) = \frac{P(S|L) \times P(L)}{P(S)} = \frac{0{,}55 \times 0{,}8}{0{,}51}$

$= 0{,}86$

16. Kansrekenen: Oefeningen

Oefening 1

Je trekt een kaart uit een spel kaarten. Wat is de kans dat de kaart een

- schoppen aas is?
- aas is?
- aas of harten 10 is?
- aas of een harten is?

Oefening 2

In een zak zitten 5 witte, 8 rode en 11 blauwe knikkers. Je neemt op een willekeurige wijze 1 knikker uit de zak. Bereken de kans dat de knikker

- wit is.
- niet wit is.
- wit of blauw is.

Oefening 3

Een pincode bestaat uit 4 cijfers. Wat is de kans dat de pincode van jouw bankkaart begint met een 8?

Oefening 4

Voor het schilderen van 5 lokalen beschikt met over 8 verschillende kleuren. Men kiest voor elk lokaal willekeurig een kleur. Wat is de kans dat elk lokaal een verschillende kleur krijgt? Let op: een blauw eerste lokaal is anders dan een rood eerste lokaal …

variatie 5 uit 8 / herhalingsvariata van 5 uit 8 = 0.2051

Oefening 5

a. Een urne bevat oorspronkelijk 8 ballen: 5 witte en 3 zwarte. Twee ballen worden uit een urne getrokken MET terugleggen. Wat is de kans dat:

- beide ballen wit zijn? 5/8 * 5/8 = 0.39
- beide ballen dezelfde kleur hebben? 0.39 + 3/8 * 3/8 = 0.53
- ten minste één van de ballen wit is? 1 - P(2 zwarte) = 1 - 3/8 * 3/8 = 0.86

b. Zelfde vraag maar nu wordt er getrokken ZONDER terugleggen.

b1) 5/8 * 4/7 = 0.36 b2) 0.36 + 3/8 * 2/7 = 0.46

b3) 1 - P(2 zwarte) = 1 - 3/8 * 2/7 = 0.89

Oefening 6

Urne A bevat 3 rode, 4 witte en 5 blauwe ballen. Urne B bevat 5 rode, 6 witte en 7 blauwe ballen. Men trekt uit beide urnen 1 bal. Wat is de kans dat beide wit zijn?

Wat is de kans dat beide dezelfde kleur hebben?

Oefening 7

Experimenteel werd vastgesteld dat de kans op een meisje 0.49 is en de kans op een jongen 0.51. Wat is de kans dat een gezin van 3 kinderen samengesteld is uit 2 meisjes en 1 jongen?

MMJ = 0.49*0.49*0.51
MJM = 0.49*0.51*0.49
JMM + 0.51*0.49*0.49

MMj + MJM + JMM = 0.3673

Oefening 8

Een vaas bevat 25 lotjes, genummerd van 1 tot 25. Er worden twee lotjes uit de vaas gehaald (zonder terugleggen) en we berekenen de som van de twee getallen op de lotjes. Bepaal de kans dat de som een even getal is.

13 oneven getallen, 12 even getallen

P(som is even) = P(2 oneven getallen) + P(2 even getallen) = 12/24*13/25 + 12/25*11/24 =0.48

Oefening 9

Als *A* en *B* gebeurtenissen zijn met $P(A) = 4/5$; $P(B) = 1/5$ en $P(B \mid A) = 3/20$, bereken $P(A \cup B) =$

Oefening 10

Een vriend kiest zijn vakantieverblijf lukraak in één van de landen A, B of C. De kans op regen is 1/3 in land A, 1/4 in land B en 1/6 in land C. Hij komt terug en vertelt dat het regende op vakantie. Wat is de kans dat hij land C bezocht heeft?

Oefening 11

Een inkoopagent heeft orders voor een bepaalde grondstof geplaatst bij twee leveranciers A en B (deze orders worden gelijkmatig verdeeld over A en B). Als één van beide orders niet binnen vier dagen binnenkomt, moet het productieproces worden stopgezet. De kans dat leverancier A de grondstof binnen de vier dagen levert is 0.55. De kans dat leverancier B de grondstof binnen de vier dagen levert is 0.35. Hoe groot is de kans dat het productieproces moet worden stopgezet wegens gebrek aan grondstoffen?

Oefening 12

De kans dat een man tijdens een periode van één jaar een auto-ongeluk krijgt is twee keer zo groot als voor een vrouw. Meer precies is de kans voor een man 0.113 en voor een vrouw 0.057. Neem aan dat 55% van de automobilisten in een bepaalde regio mannen zijn. In een enquête naar verkeersgedrag geeft iemand aan dat hij of zij het afgelopen jaar betrokken is geweest bij een auto-ongeluk. Hoe groot is de kans dat deze persoon een vrouw is?

$$P(Vr \mid ong) = \frac{0,057 \times 0,45}{0,057 \times 0,45 + 0,113 \times 0,55} \approx 0,2927$$

Oefening 13

Een verdeler van auto-onderdelen heeft vier bedienden A, B, C en D. Bij het invullen van bestelbonnen maakt persoon A één fout op honderd, B vier fouten op honderd, C zes fouten op honderd en D maakt twee fouten op honderd. A zorgt voor 20%, B voor 30%, C voor 10% en D voor 40% van de bestelbonnen.

- Wat is de kans dat een fout in een bestelbon kruipt?
- Wat is de kans dat A de schuldige is indien er een fout gemaakt is?

P(F) = P(F|A)*P(A) + P(F|B)*P(B) + P(F|C)+P(C) + P(F|D)+P(D) = 0.028

P(A|F) = (0.01 * 0.2) / 0.028 = 0.0714

Oefening 14

Thomas drinkt alle dagen voor hij slapen gaat een borreltje. Hij heeft dertig flessen whisky en twintig flessen cognac geërfd van zijn overgrootvader en wil die op die manier soldaat maken. Elke avond kiest hij lukraak een fles en drinkt. Hij weet echter dat hij van een borrel whisky in tachtig procent van de gevallen de volgende dag met hoofdpijn zal wakker worden, terwijl dit van een cognacje slechts in drie gevallen op tien gebeurt. Vanmorgen had Thomas barstende hoofdpijn. Wat is de kans dat hij gisterenavond een whisky heeft gedronken?

Oefening 15

Een urne bevat 3 zwarte en 5 bruine ballen. Een bal wordt blindelings gekozen. Als deze bal bruin is, wordt hij teruggeplaatst in de urne en bovendien worden twee bruine ballen toegevoegd. Is de bal echter zwart, dan wordt hij niet teruggeplaatst en wordt er niets toegevoegd. Wat is de kans dat de tweede willekeurig gekozen bal bruin is?

P(B2) = P(B2|Z1)*P(Z1) + P(B2|B1)+P(B1) = 5/7 *3/8 + 7/10*5/8 = 0.705

Oefening 16

Statistieken hebben berekend dat we gemiddeld in België tijdens de maand juni 15 dagen zonnig weer hebben, 10 dagen bewolkt en 5 dagen regen. Zonder enige andere informatie zouden we voor een bepaalde dag bv. 22 juni, het weer moeten voorspellen. Maar… de weerkundigen vergissen zich ook regelmatig. Ook hiervan werden statistieken opgesteld:

voor 10 dagen effectief zonnig weer werd 8 maal zonnig en 2 maal bewolkt weer voorspeld;

voor 10 dagen effectief bewolkt weer werd 3 maal zonnig weer voorspeld, 5 maal bewolkt en 2 maal regen voorspeld;

voor 10 effectieve regendagen werd 6 maal regen, 3 maal bewolkt en 1 maal zonnig voorspeld.

Onderstel dat de weerkundige zonnig weer voorspelt voor de 22ste juni, bereken dan de kans dat het ook effectief zonnig weer zal zijn.

Oefening 17

30 % van de computerprogramma's die je schrijft op een maandag (na een zwaar weekend) vertonen één of andere fout. Op dinsdag, woensdag en donderdag is dat slechts 5% en op vrijdag (je kijkt al uit naar het weekend) 15%.

Een klant klaagt dat je computerprogramma een fout vertoont. Al lachend verdedig je je door te zeggen dat het waarschijnlijk op een maandag geschreven is. Wat is de kans hiertoe?

Opm.: Op elke werkdag schrijf je evenveel computerprogramma's (in het weekend werk je niet).

$$P(M|F) = \frac{P(F|M)*P(M)}{P(F)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}2}{0.2*0.3 + 0.2*0.05 + 0.2*0.05 + 0.2*0.05 + 0.2*0.15} = 0{,}5$$

Oefening 18

Een urne bevat 4 groene en 5 blauwe knikkers. Een knikker wordt blindelings gekozen.
Als deze groen is, wordt hij teruggeplaatst en bovendien worden er 2 blauwe knikkers bijgevoegd.
Is de knikker echter blauw, dan wordt hij niet teruggeplaatst maar wordt er 1 groene knikker toegevoegd.
Bereken de kans dat de tweede gekozen knikker blauw is.

Oefening 19

Aan 80 mensen wordt gevraagd of ze een televisietoestel, een computer of een gsm bezitten. 72 hebben een televisietoestel, 45 een computer en 28 een gsm. 22 hebben een televisietoestel en een gsm, 39 bezitten een televisietoestel en een computer en 16 hebben een computer en een gsm. 10 personen hebben zowel een televisietoestel, een computer als een gsm.

Los volgende 3 vragen op met behulp van verzamelingen leer en daarna ook door gebruik te maken van logische operatoren in Python.

1. Bereken de kans dat een willekeurig persoon (van deze 80) geen van de 3 toestellen bezit
2. Bereken de kans dat een willekeurig persoon (van deze 80) een GSM heeft maar geen TV
3. Geef in woorden aan welke selectie wordt hier gemaakt wordt.

$$P[(TV \cap C \cap GSM)^c]$$

Oefening 20: Moeilijker: verjaardagenparadox

Bepaal de kans dat in een groep van 10 personen, minstens 2 personen op dezelfde dag verjaren (we veronderstellen dat zich geen tweelingen in de groep bevinden). Zelfde vraag maar voor een groep van 50 personen.