

# Documentation Technique - Projet Pricing de Produits Structurés en Python

CHARBONNIER - DUFOUR - HELLOT - LE MASNE DE CHERMONT

Dauphine 272 - Avril 2025

## 1 Introduction

## 2 Pricing par Méthode de Monte Carlo

### 2.1 Principe Général

La méthode de Monte Carlo permet d'estimer le prix d'options en simulant des trajectoires du sous-jacent selon sa dynamique risque-neutre. Pour un payoff  $P(S_T)$ , le prix s'écrit :

$$C_0 = E^Q \left[ e^{-\int_0^T r(t)dt} P(S_T) \right] \quad (1)$$

#### 2.1.1 Algorithme Fondamental

1. Générer  $N$  trajectoires indépendantes  $\{S_t^{(i)}\}_{t=0}^T$
2. Calculer le payoff actualisé pour chaque trajectoire :

$$\hat{P}_i = e^{-\int_0^T r(t)dt} P(S_T^{(i)}) \quad (2)$$

3. Estimer le prix par la moyenne des payoffs actualisés (loi des grands nombres):

$$\hat{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{P}_i \quad (3)$$

### 2.2 Modélisation des Dynamiques

Pour modéliser le prix du sous-jacent on utilise une discrétisation des processus stochastiques. Dans le cadre de notre projet nous avons utilisé la dynamique Black-Scholes pour une volatilité constante ou la dynamique d'Heston pour modéliser une volatilité stochastique.

### 2.2.1 Modèle de Black-Scholes

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4)$$

Pour un pas de temps  $\Delta t = T/M$ , le schéma s'écrit :

$$S_{t_{i+1}} = S_{t_i} + \mu(S_{t_i}, t_i)\Delta t + \sigma(S_{t_i}, t_i)\Delta W_{t_i} \quad (5)$$

où  $\Delta W_{t_i} = W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$ .

### 2.2.2 Modèle d'Heston

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1 \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi \sqrt{v_t} dW_t^2 \\ d\langle W^1, W^2 \rangle = \rho dt \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} S_{t_{i+1}} &= S_{t_i} + rS_{t_i}\Delta t + \sqrt{v_{t_i}} S_{t_i} \Delta W_t^1 \\ v_{t_{i+1}} &= v_{t_i} + \kappa(\theta - v_{t_i})\Delta t + \xi \sqrt{v_{t_i}} \Delta W_t^2 \end{aligned}$$

**Attention** : Risque de valeurs négatives pour  $v_t$  nécessitant un traitement :

$$v_{t_i}^+ = \max(v_{t_i}, 0) \quad (7)$$

## 3 Modèles de Volatilité

Cette section présente les modèles de volatilité implémentés dans le projet, avec une analyse comparative de leurs propriétés théoriques et pratiques lors du calibrage.

Les modèles de volatilité représente un enjeu particulièrement important dans le pricing et sont donc des sujets à part entière. Ainsi, bien que nous ayons essayé de réaliser une implémentation rigoureuse des modèles cités ci dessous, il conviendrait d'y passer plus de temps pour qu'ils soit parfaitement adaptés à un usage réel.

### 3.1 Modèle SVI (Stochastic Volatility Inspired)

Le modèle SVI, introduit par Gatheral (2004), propose une paramétrisation explicite du smile de volatilité pour une maturité fixée. Nous présentons ici ses trois formulations paramétriques usuelles.

#### 3.1.1 Formulations Paramétriques

- **Formulation Raw SVI** (Paramétrisation originale) :

$$w(k) = a + b \left( \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right) \quad (8)$$

- **Formulation Natural SVI** (Paramétrisation centrée) :

$$w(k) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left( 1 + \zeta \rho(k - \mu) + \sqrt{(\zeta(k - \mu) + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right) \quad (9)$$

- **Formulation Jump-Wings SVI** (Paramétrisation asymétrique) :

$$w(k) = c + \frac{1}{2} \left( \alpha(k - \beta) + \sqrt{(\gamma(k - \beta) + \delta)^2 + \epsilon} \right) \quad (10)$$

### 3.1.2 Équivalence des Paramétrisations

Les paramètres entre les différentes formulations sont reliés par les transformations :

Raw	Natural	Jump-Wings	Relation
$a$	$\Delta - \frac{\omega}{2} \sqrt{1 - \rho^2}$	$c - \frac{\delta}{2\gamma} \sqrt{\epsilon}$	Système non-linéaire
$b$	$\frac{\omega\zeta}{2}$	$\frac{\alpha+\gamma}{2}$	
$\rho$	$\rho$	$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}$	
$m$	$\mu - \frac{\rho}{\zeta}$	$\beta - \frac{\delta}{\gamma^2 - \alpha^2}$	Transformation affine
$\sigma$	$\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\zeta}$	$\frac{\sqrt{4\gamma\epsilon - \delta^2}}{2(\gamma^2 - \alpha^2)}$	Dépend de la courbure

Table 1: Correspondance entre paramétrisations SVI

### 3.1.3 Conditions d’Absence d’Arbitrage

Pour garantir l’absence d’arbitrage statique, Gatheral décrit les conditions à imposer sur les paramètres :

1. **Condition de pente asymptotique** :

$$\limsup_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{w(k)}{|k|} \leq \frac{4}{T} \quad (11)$$

2. **Condition de convexité** :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial k^2} \geq \frac{(1 - \frac{k}{w} \frac{\partial w}{\partial k})^2}{4w} \quad (12)$$

3. **Condition ”Calendar Spread”**:

$$\frac{\partial w}{\partial T} \geq -\frac{(1 - \rho_{TT})^2}{4T} \sigma_{LV}^2 \quad (13)$$

Pour la formulation raw SVI, ces conditions se traduisent par :

$$\begin{aligned} b(1 + |\rho|) &\leq \frac{4}{T} \\ \frac{b}{\sqrt{(1 + |\rho|)\sigma}} &\leq \frac{2}{\sqrt{a + b\sigma\sqrt{1 - \rho^2}}} \end{aligned} \tag{14}$$

Dans la pratique, nous n'avons pas implémenté ces conditions d'arbitrage sur notre SVI pour faciliter la calibration.

### 3.1.4 Avantages et Inconvénients du SVI

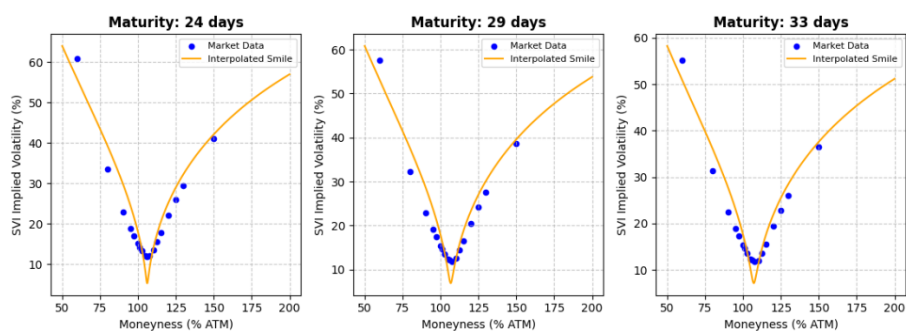
+ **Avantages :**

- Flexibilité d'ajustement aux smiles complexes car un SVI décrit une maturité (un smile)
- Formulation explicite du modèle donc peu gourmand en calculs
- Paramètres économiquement interprétables (surtout dans le cas de la paramétrisation Jump-Wings)

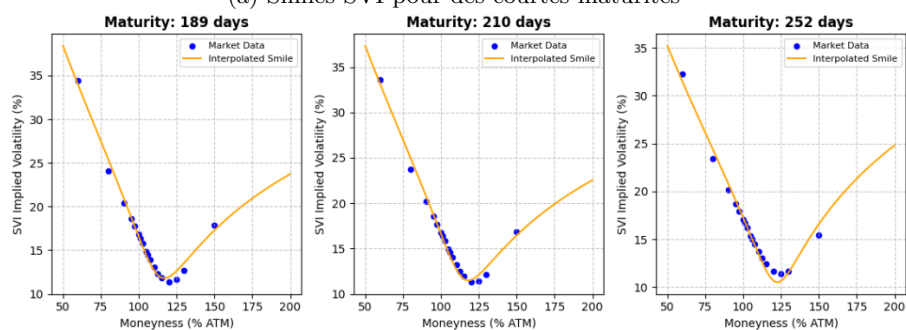
- **Inconvénients :**

- Calibration multi-paramétrique délicate (assurer l'absence d'arbitrage Calendar Spread par exemple)
- Risque d'overfitting si peu de données sur une slice (une maturité)

### 3.1.5 Illustrations en pratique

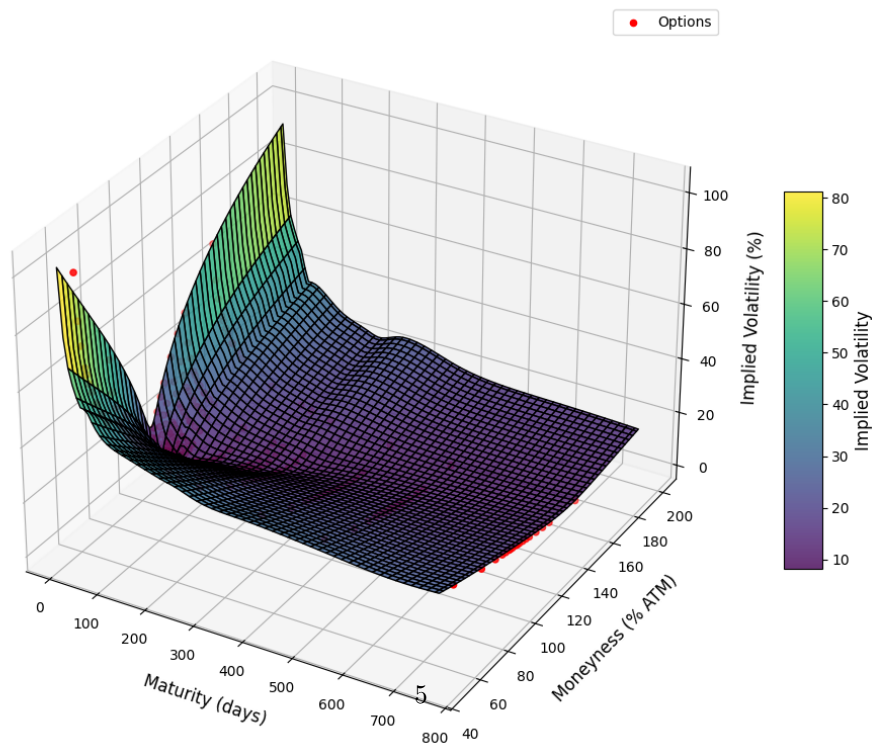


(a) Smiles SVI pour des courtes maturités



(b) Smiles SVI pour des longues maturités

#### SVI Implied Volatility Surface



(c) Surface de volatilité interpolée entre les SVI

### 3.2 Modèle SSVI (Surface Stochastic Volatility Inspired)

Le modèle SSVI, extension multi-maturités du SVI proposée par Gatheral et Jacquier (2014), construit une surface de volatilité cohérente temporellement. On arrive ici à modéliser l'ensemble de la surface, et non pas tranche par tranche comme pour SVI, à l'aide d'une formation paramétrique.

Ce modèle fait intervenir la notion de volatilité ATM comme étant un paramètre (ou plutôt un vecteur de paramètre car on a autant de vol ATM que de tranche). On introduit ici le concept de courbe de volatilité ATM, souvent regardé dans les modèles comme celui-ci mais que nous ne détaillerons pas.

#### 3.2.1 Formulations Paramétriques

- **Formulation Heston-like** (Paramétrisation standard) :

$$w(k, \theta_t) = \frac{\theta_t}{2} \left( 1 + \rho\phi(\theta_t)k + \sqrt{(\phi(\theta_t)k + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right) \quad (15)$$

avec  $\phi(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}}$  et  $\theta_t = \sigma_{ATM}^2 t$

- **Formulation Power-Law** (Formulation que nous avons retenue pour le projet) :

$$\phi(\theta) = \frac{\eta}{\theta^\gamma} \quad \text{où } \gamma \in [0, 1/2] \quad (16)$$

- **Formulation Simplifiée** (Pour calibration rapide) :

$$w(k, \theta_t) = \theta_t \left( \frac{1}{2} + \rho\psi(\theta_t)k + \sqrt{\psi^2(\theta_t)k^2 + \delta(\theta_t)} \right) \quad (17)$$

avec  $\psi(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}}$  et  $\delta(\theta) = \frac{1-\rho^2}{4}$

#### 3.2.2 Équivalence des Paramétrisations

Heston-like	Power-Law	Simplifiée	Contraintes
$\phi(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}}$	$\phi(\theta) = \eta\theta^{-\gamma}$	$\psi(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\theta}}$	$\gamma = 0.5$
$\rho$ constant	$\rho(\theta) = \rho_0\theta^\alpha$	$\rho$ constant	$\alpha = 0$
$\theta_t$ par bootstrap	$\theta_t$ paramétrique	$\theta_t$ donné	Cohérence ATM

Table 2: Correspondance entre formulations SSVI

#### 3.2.3 Conditions d'Absence d'Arbitrage

La surface SSVI est exempte d'arbitrage statique si :

1. **Condition de pente globale** (Gatheral, 2014) :

$$\phi(\theta) \leq \frac{4}{\theta(1 + |\rho|)} \quad \forall \theta > 0 \quad (18)$$

2. **Condition de monotonie temporelle** :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_{ATM}^2 t) \geq 0 \quad (\text{Croissance de la variance totale ATM}) \quad (19)$$

3. **Condition de convexité forward** :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial k^2} \geq \frac{(1 - \frac{k}{w} \frac{\partial w}{\partial k})^2}{4w} + \frac{\epsilon}{T^{3/2}} \quad \epsilon > 0 \quad (20)$$

Pour la formulation Heston-like, ces conditions impliquent :

$$\begin{aligned} \eta &\leq \frac{4}{\sqrt{\theta}(1 + |\rho|)} \\ \rho &\in (-1, 1) \\ \frac{d}{dt}(\sigma_{ATM}^2 t) &\geq \frac{\eta^2}{16}(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

Ici encore, nous n'avons pas implémenté ces contraintes.

### 3.2.4 Méthode de Calibration

La calibration s'effectue en trois phases :

1. **Calibration ATM (ou observation de la vol ATM si le point existe sur la tranche** :

$$\min_{\{\sigma_{ATM}(t_i)\}} \sum_{i=1}^N (\sigma_{mkt}^{ATM}(t_i) - \sigma_{ATM}(t_i))^2 \quad (21)$$

2. **Optimisation globale** :

$$\min_{\rho, \eta} \sum_{i,j} \left( \sigma_{mkt}(k_j, t_i) - \sqrt{\frac{w_{SSVI}(k_j, \theta_{t_i})}{t_i}} \right)^2 \quad (22)$$

### 3.2.5 Avantages et Inconvénients

+ **Avantages** :

- Garantie théorique d'absence d'arbitrage statique
- Cohérence temporelle inhérente

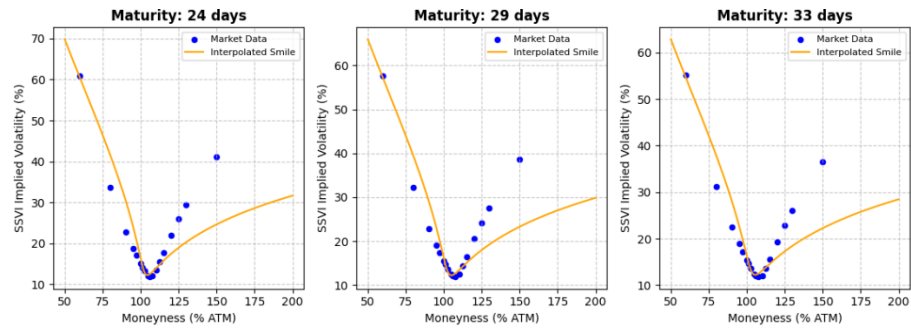
- Réduction du nombre de paramètres (2 paramètres globaux + courbe vol ATM)

- **Inconvénients :**

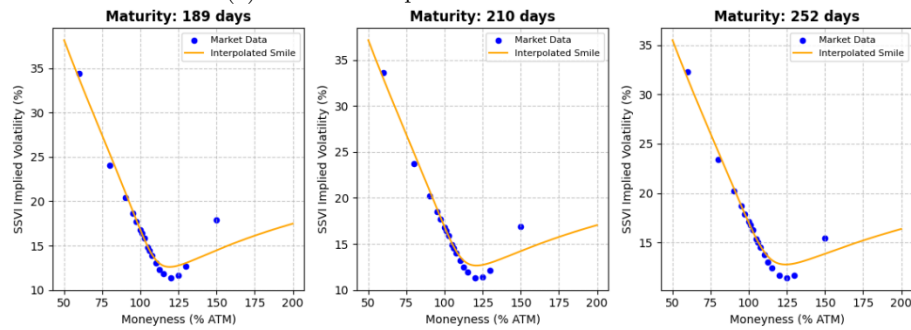
- Difficulté à reproduire les smiles très convexes
- Dépendance critique à la qualité des données ATM
- Rigidité relative de la paramétrisation pour des smiles très prononcé à faibles maturités et très plat à longue maturités



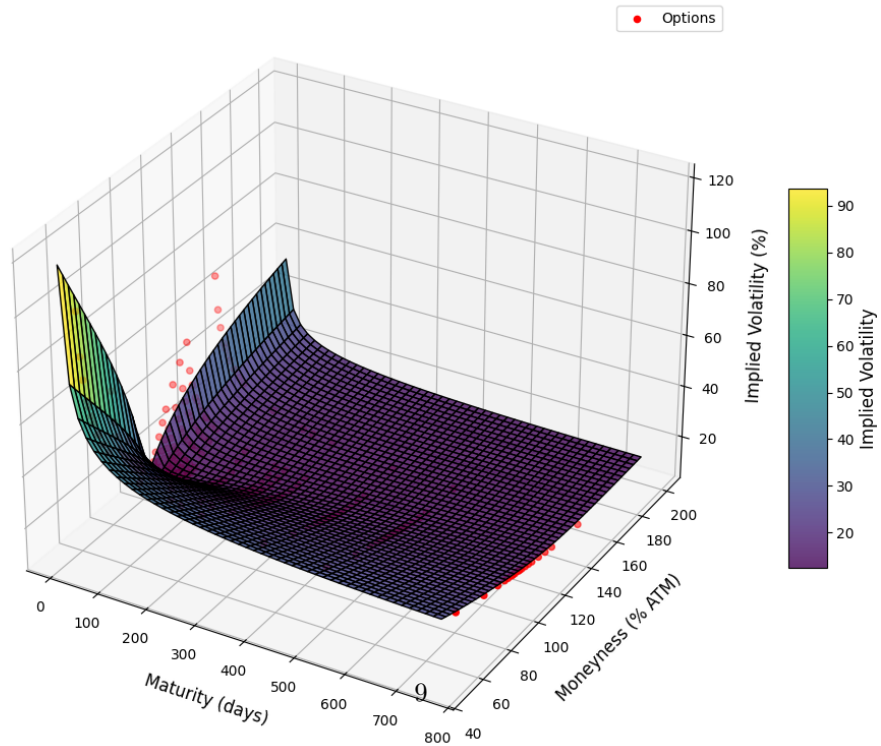
### 3.2.6 Illustrations en pratique



(a) Smiles SSVI pour des courtes maturités



(b) Smiles SSVI pour des longues maturités  
SSVI Implied Volatility Surface



(c) Surface de volatilité SSVI

### 3.3 Modèle de Volatilité Locale (Dupire)

Le modèle de volatilité locale, introduit par Dupire (1994) et Derman-Kani (1994), permet de reconstruire une surface de volatilité instantanée cohérente avec les prix de marché.

#### 3.3.1 Formulation Mathématique

- **Équation de Dupire** (Formulation directe) :

$$\sigma_{loc}^2(K, T) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} + qC}{\frac{1}{2}K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \quad (23)$$

où  $q$  est le taux de dividende.

- **Formulation stochastique** (EDP de Fokker-Planck) :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2}K^2 \sigma_{loc}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - (r - q)K \frac{\partial C}{\partial K} \quad (24)$$

#### 3.3.2 Méthode de Calibration

1. **Construction d'une surface implicite** :

- Modéliser  $\sigma_{BS}(K, T)$  via SVI, SSVI ou une autre méthode d'interpolation

2. **Calcul des dérivées partielles** :

Calculer les trois dérivées partielles via la méthode des différences finies par exemple :

- (a) La dérivée partielle par rapport au temps  $T$  :

$$\frac{\partial C}{\partial T}$$

- (b) La dérivée partielle par rapport au prix d'exercice  $K$  :

$$\frac{\partial C}{\partial K}$$

- (c) La dérivée seconde partielle par rapport au prix d'exercice  $K$  :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}$$

#### 3.3.3 Conditions d'Absence d'Arbitrage

- (a) **Positivité** :

$$\sigma_{loc}(K, T) > 0 \quad \forall K > 0, T > 0 \quad (25)$$

3. **Condition de croissance** (Monotonie temporelle) :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{2} K^2 \sigma_{loc}^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} \right) \geq 0 \quad (26)$$

4. **Condition de convexité** :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} > 0 \quad (\text{Butterfly arbitrage}) \quad (27)$$

### 3.3.4 Avantages et Inconvénients

+ **Avantages** :

- Unicité sous conditions de régularité
- Applicable aux produits exotiques path-dependent

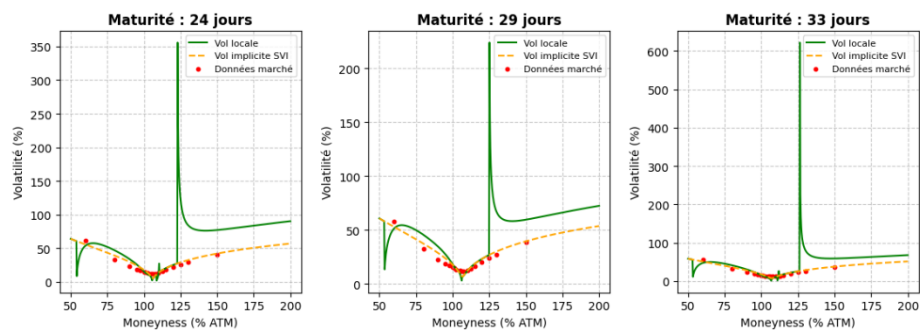
- **Inconvénients** :

- Instabilité numérique (dérivées secondes)
- Dépendance critique à l'interpolation initiale

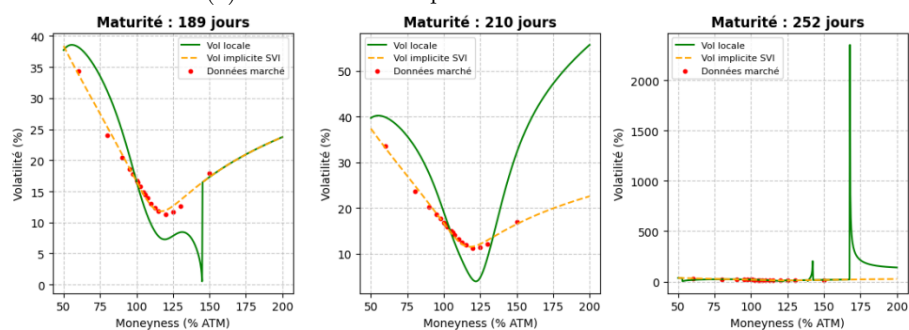
### 3.3.5 Illustrations en pratique

Comme on le voit sur les images ci-dessous, le calcul de la volatilité locale fonctionne mal. Ces résultats curieux sont dus aux calculs des dérivées partielles qui peuvent se montrer très instables.

Pour le moment, nous n'avons pas réussi à améliorer le calcul.

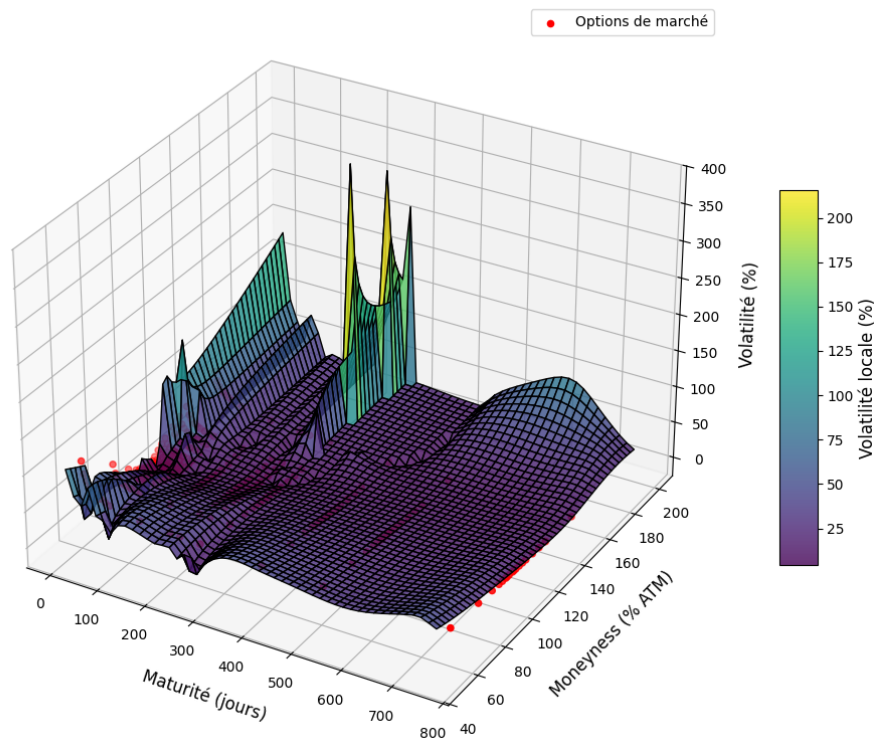


(a) Smiles vol locale pour des courtes maturités



(b) Smiles vol locale pour des longues maturités

### Surface de volatilité locale



(c) Surface de volatilité locale