Matemática Discreta para Computação

Thiago Figueiredo Marcos

11 de junho de 2024

Resumo

Essa discplina será baseada na playlist Matemática Discreta (Fundamentos Matemáticos para Computação) disponível no youtube do canal Prof. Douglas Maioli que tem uma vasta experiência em `educação`. Prof. Douglas tem Mestrado e Doutorado em Matemática Aplicada pela UNICAMP, além da Graduação em Licenciatura em Matematica pela UNESP.

Matematica Para Computação, Matematica Discreta

1 Introdução à Lógica Proposicional

Uma proposição é uma sentença que pode assumir valores `Verdadeiro` ou `Falso`, não é necessário que se saiba o valor da sentença, apenas que seja possivel atribuir algum desses dois valores.

Sentenças que não são proposições, logicamente, não podem receber valores `Verdadeiros` ou `Falso`. Uma sentença declarativa que tenha dependencia de variáveis pode ser considerada proposição, dês de que os valores das variáveis sejam definidos.

Uma proposição segue três princípios:

Príncipio da Identidade : `"Uma proposição verdadeira é verdadeira uma proposição falsa é falsa."`

Príncipio da não-contradição : `"Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo."`

Príncipio do terceiro-excluído : `"Uma proposição ou será verdadeira ou será falsa: não há outra possibilidade."`

1.1 Conectivos lógicos e Proposições Compostas

Conectivos lógicos podem ser entendidos como: `E`, `OU`, `NÃO(NEGAÇÃO)`, `se ... então(IMPLICAÇÃO)`. Esses conectivos permitem formar proposições compostas.

Uma proposição composta, possui na sua estrutura, composições simples ou `atômica`.

1.1.1 Tabelas Verdade

Tabelas verdades são exemplificações gráficas das proposições e suas variáveis, conforme aumenta o número de variáveis aumenta o número de combinaçõs, abaixo segue alguns exemplos:

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figura 1: Conjunção

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figura 2: Disjunção

A	B	$A \veebar B$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figura 3: Disjunção Exclusiva

1.2 Notação para cálculo proposicional

A lógica proposicional é um formalismo que nos permite determinar o valor lógico das proposições. As letras minúsculas será a representação das proposições. Abaixo descreveremos os sinais dos conectivos lógicos `(operadores)`.

Conjunção : $p \wedge q$

Disjunção : $p \vee q$

Negação : $\neg p$ ou ainda $\bar{q}$

Condicional : $p \Rightarrow q$

Bicondicional : $p \iff q$

Disjunção Exclusiva : $p \oplus q$

A implicação é um dos mais importantes conectivos da lógica matemática. Descreve-se da seguinte forma:

`Hipotese, premissa ou antecedente` **Verdadeira** $\longrightarrow$ `Tese, conclusão ou consequência` **verdadeira**

1.3 Procedência dos operadores lógicos

Em uma proposição que usa dois ou mais operadores lógicos a ordem em que são aplicados é importante. Podemos aplicar parenteses nas proposições para indicar a maior precedência. Também há regras para indicar a maior precedência entre os operadores:

Operador	Precedência
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee, \oplus$	3
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	4

1.4 Tautologia e Contradições

Tautologia é uma proposição que é sempre verdadeira, para qualquer valor atômico que a componha, além disso uma cadeia que contenha uma expressão válida é denominada fórmula bem-formulada.

Pense na seguinte sentença: $P \vee \neg P$, neste caso, `P` pode assumir qualquer valor que sua resposta será sempre verdadeira e isso é uma tautologia. Veremos como isso é aplicado diretamente na computação na disciplina de circuitos digitais em algebra boolena.

Já a contradição é uma proposição composta que é sempre falsa, para qualquer valor atômico que a componha.

Análogo a sentença da tautologia, porém com outro operador podemos exemplificar a contradição, observe: $P \wedge \neg P$, ou seja, p pode assumir qualquer valor, que sua proposição será sempre falsa.

1.5 Equivalência Lógica ou Tautológica

Duas proposições são ditas equivalentes se possuirem valores lógicos iguais. Por exemplo: $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$ ou seja, operações com valores tautológicos, chegam a equivalências.

Para exemplificar ainda mais, se duas expressões com as mesmas variáveis assumirem os mesmos valores para operadores lógicos diferentes, essas duas expressões são `equivalentes`.

1.5.1 Leis de equivalência

`Leis do elemento identidade`:
$P \wedge 1 \Rightarrow P$
$P \vee 0 \Rightarrow P$
$P \Leftrightarrow 1 \Rightarrow P$
$P \oplus 0 \Rightarrow P$

`Leis da idempotência`:
$P \wedge P \Rightarrow P$
$P \vee P \Rightarrow P$

`Leis da comutatividade`:
$P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P$
$P \vee Q \Rightarrow Q \vee P$
$P \oplus Q \Rightarrow Q \oplus P$
$P \Leftrightarrow Q \Rightarrow Q \Leftrightarrow P$

`Lei da redução ao absurdo`:
$-Q \Rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge \neg Q) \Rightarrow 0)$

Existem outras leis como a de `De Morgan` que vai ser vista com profundidade na disciplina de circuitos digitais e não será comentada aqui. Outras como associatividade e distributivas também não será vista, pois, segue a mesma lógica que operações aritméticas.

1.6 Regras de Inferência

São regras de transformações de expressões que podem ser usadas para inferir uma conclusão a partir de premissas em forma de:

$$\text{Hipótese} \Rightarrow \text{Conclusão}$$

Repare que a hipótese condiciona a uma conclusão, essa conclusão deve, necessáriamente, ser verdadeira, para que a inferência, também seja.
i Observe que na condicional a variável verdadeira, só poderá condicionar uma verdade, caso contrário a condicional é falsa.

Para deixar mais concreto, considere a seguinte sentença da banda Charlie Brown Jr: `"Quem é de verdade sabe quem é de mentira"` na música `Pontes Indestrutíveis`. Aqui a variável verdadeira só pode condicinar verdades, do contrário, será falsa.
A condicional é fundamental para se ter uma inferência, observe sua tabela verdade:

$$(\neg A \wedge B) \Rightarrow (C)$$

Essa inferência só vai ser falsa se, e somente se o lardo esquerdo da expressão, ou seja, $(\neg A \wedge B)$ for verdadeiro e o lado direito da expressão, ou seja C for falso. Este é o único caso em que a inferência é falsa, e pode ser observado na tabela verdade da condicional.

Repare que, essas expressões, são um conjunto de combinações dos valores possíveis de cada

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figura 4: Condicional

variável, e determinada combinação para A, B e C fará com que a inferência seja falsa, e esses valores são respectivamente:

$$\neg A = 1, \text{B} = 1, \text{C} = 0$$

Agora considere a seguinte sentença:

$$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$$

Neste caso, podemos análisar primeiramente a sentença interna A $\Rightarrow$ B essa condicional só vai ser falsa se A for verdadeira e B for falsa.

Agora temos o operador lógico $\wedge$ e a sentença do lado esquerdo da inferência só vai ser falsa, se uma das variáveis for falsa.

Aqui podemos observar o seguinte, o lado esquerdo da sentença só vai ser verdadeiro se A e B forem verdadeiros ao mesmo tempo, isso quase que intuitivamente condiciona a sentença a uma verdade, essa estrutura é chamado de `Modus Ponens` ou `Mp.`

O seu inverso é chamado de `Modus Tollens` ou `Mt.` e pode ser observada do seguinte modo:

$$((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A)$$

1.7 Predicados e Quantificadores

A matemática discreta se concentra em estudar objetos discretos e pode ser aplicada aos mais diversos contextos da Biologia à Ciencias Sociais, ou seja, uma variável pode assumir diversos valores com base no seu conjunto universo, portanto, predicado é uma sentença em aberto, ou seja, as variáveis que compoem a sentença precisa necessáriamente estar fora de qualquer conjunto universo ou ainda, não se pode determinar o valor absoluto da variável para se tornar uma proposição.

Considere a seguinte sentença: $P(x) \mid x^2 \ < \ 9$

Observe que não é possivel definir se a sentença é verdadeira ou falsa, pois não foi determinado o seu conjunto universo, logo a sentença é um predicado e não uma proposição.

Iremos definir o conjunto universo de X iniciando com o `Quantificador Universal` ($\forall$), observe:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ P(x)$$

Agora x faz parte do conjunto dos números reais, então podemos definir se a sentença vai ser verdaira ou falsa, deixando de ser aberta e se tornando restrita a um determinado conjunto universo. Observe que o quantificador universal, signica para todo e qualquer elemento.

Já em contraponto com o universal, existe o quantificador de existência, que indica que pelo menos um elemento existe, ou seja, não necessariamente todos e quaisquer elementos mas pelo menos um, ele é caracterizado pelo caracter: $\exists$.

Podemos também quantificar um único elemento, da seguinte forma: $\exists!$

Agora observe a seguinte frase:

`Todas e qualquer discente de Ciência da Computação ou Informática Biomédica são legais`

Podemos discretar da seguinte forma:

A(x) é um aluno ou uma aluna
L(x) x estuda Ciência da Computação
N(x) x é legal
a(x) x estuda Informática Biomédica

$$(\forall x)[A(x) \wedge (L(x) \vee a(x)) \Rightarrow N(x)]$$