

Circuitos Digitais

Thiago Figueiredo Marcos

28 de maio de 2024

1 Introdução

Um computador digital pode ser descrito como aquilo que computa, ou aquilo que processa informação digital. A informação que é processada por um circuito digital é aquela que é **quantizada** ou **discretada** (de Oliveira et al., 2020).

No mundo comum, as informações são analógicas, ou seja, a onda que representa aquela informação possui uma gama de valores diferenciados. Já os sinais digitais podem ser representados apenas por dois valores, ou seja, uma lógica binária.(Tocci et al., 2019)

Os circuitos digitais são construídos por componentes eletrônicos e tem como entradas e saídas sinais digitais. Para usarmos informações do mundo analógico é preciso discretar essas informações, afim de convertelas à binária e geralmente é usado uma medida em Volts para determinar se uma informação é ligada ou desligada. Após convertida a informação e processada no circuito digital é preciso converter o sinal de saída do circuito que é digital, em analógico novamente.(Souza, 2020)

2 Conversão Analógico - Digital (Discretização)

Sinais discretos são frequências descontinuas no tempo, ou seja, definida apenas para determinados instantes. Representa aproximadamente o mundo real, entretanto, podem ser utilizadas várias técnicas para melhorar a representação, como as de processamento de sinais digitais.

Aqui também vale ressaltar que o processo de discretização de alguma informação está consequentemente ligada a perda de determinadas informações.

2.1 Principais propriedades da discretização

1. **Amostragem:** Discretização do sinal analógico no tempo.
2. **Quantização:** Discretização da amplitude do sinal amostrado em níveis.
3. **Codificação:** Atribuição de códigos, onde geralmente são binários às amplitudes do sinal quantizado.

3 Conversão Digital - Analógico (Linearização)

Se refere a o processo que transforma um sinal modelado por eventos discretos em um sinal contínuo, ou seja, o processo de integração de vários sinais discretos para simular um evento contínuo.

4 Processamento

O processamento de informação se refere a diversas operações realizadas por um circuito digital para transformar a entrada de dados em uma saída significativa de interesse. Isso pode ser calculos, manipular dados como agregação, separação e classificação ou ainda filtragem, entre outros. Além disso, no circuito digital é simplificado o armazenamento de informações bem como possui uma menor probabilidade de interferências.

5 Sistemas de numeração

Número nos remete a ideia de quantidade, já o numeral é a representação desta ideia, na prática, nos referimos a palavra número para qualquer tipo de representação numeral.

Exemplo: A quantidade **Quarenta e dois** é representada pelo numeral 42.

Sem o conhecimento da organização posicional dos números, como podemos representar todos eles? Poderíamos pensar em um símbolo para cada número, porém, existe uma infinidade de quantidades.

Há cerca de 3.000 anos atrás os **Egípcios** desenvolveram um sistema de numeração, entre esse sistema esta a base 10, na qual utilizamos até hoje. Os números representados por hieróglifos eram mais usados em monumentos e templos, pintados ou talhados em pedra. Há sete símbolos, representando os números 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000 e 1 000 000.(Asth, 2024)

Algarismos é um conjunto finito de símbolos numéricos que usamos para representar quantidades reais. Todo e qualquer número pode ser representado por uma combinação de algarismos, os mais conhecidos são os indo-arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sistema de numeração é a forma de atribuir uma representação única para cada número. O sistema de numeração posicional atribui valor ao algarismo conforme a sua posição, mais a esquerda ou mais a direita.

No sistema decimal de numeração posicional possuímos 10 algarismos, 0 .. 9, um cada um deles representa seu valor absoluto, ou seja, o valor 0 representa o nada, o valor 1 representa uma única unidade e assim por diante. Dependendo da posição que o valor estiver, seu valor absoluto pode variar, por exemplo: Imagine um número com 4 casas decimais, - - - -, o número que estiver na "casa" mais a esquerda não representara seu valor absoluto e sim o seu valor absoluto multiplicado por um milhão.

Exemplo: $4237 = 4*1000 + 2*100 + 3*10 + 7*1$, observe o seguinte:

$$\begin{aligned}
4 * 1000 &= 4.000 \\
2 * 100 &= 200 \\
3 * 10 &= 30 \\
7 * 1 &= 7
\end{aligned}$$

A soma de todos os valores resulta no valor original 4237.

Agora podemos sistematizar isso matematicamente, sabemos que um número inteiro A no sistema decimal é apresentado por N dígitos assim:

$$A_{n-1}A_{n-2}\dots A_2A_1A_0$$

Cada a_i é um algarismo decimal.

$$a_{n-1} * 10^{n-1} + a_{n-2} * 10^{n-2} + \dots + a_2 * 100 + a_1 * 10 + a_0 * 1$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i$$

Usando a mesma lógica, podemos representar os números racionais no sistema decimal

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * 10^{-i}$$

6 Truncamento

Vemos que à medida que caminhamos mais a direita depois da vírgula, o valor relativo a cada algarismo se torna cada vez menor, podemos fazer uma representação aproximada do número gerado, limitando o número de algarismos após a vírgula por uma constante M.

Essa aproximação chama-se truncamento. Com o truncamento há também um erro de aproximação que pode ser obtido com a diferença do número original com o número truncado.

Ao truncarmos um número com uma constante M para qualquer número real com n algarismos à esquerda da vírgula, e M algarismos à direita, assim:

$$a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\dots a_M$$

então temos que o erro de aproximação de qualquer número N será:

$$\text{err} < 10^{-M}$$

ou seja, aumentar M implica em diminuir o erro.

7 Bases não decimais

A quantidade de algarismos usados em um sistema de numeração posicional é chamada de base, por exemplo: O sistema decimal tem 10, o sistema binário tem 2 e assim por diante.

Acima fizemos uma representação matemática dos números posicionais racionais, a questão é que, em um sistema posicional em uma determinada base \mathbf{d} , pode ser representada da seguinte forma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i * d^i + \sum_{i=1}^{\infty} a_{-i} * d^{-i}$$

Para indicar a base em que um número está representado é comum a seguinte notação:

$$(a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0, a_{-1}a_{-2}\dots a_M)_d$$

8 Conversão de bases

Para converter um número \mathbf{n}_{10} para \mathbf{n}_d faremos divisões sucessivas entre o quociente e a base \mathbf{d} .

Existem algumas conversões que são triviais de realizar, como por exemplo da base 2 para base 16, ou ainda, da base 10 (até o 15) para base 16.

Da base 2 para base 16 por exemplo, pode-se seguir o padrão de contagem de 4 em 4 bits e ver qual a representação.

9 Operações Binárias

A base 2 é a base numérica mais utilizada na computação hoje em dia, em conjunto com a base 8, 16 e 64. Veremos futuramente que o computador realiza operações aritméticas na sua Unidade Lógica Aritmética (ULA), entenderemos agora como essas operações são realizadas na base binária.

9.1 soma

Antes de falarmos sobre a soma binária, precisamos relembrar o algoritmo da soma decimal, considere dois números A e B, sendo eles:

$$\begin{aligned} A &= a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0 \\ B &= b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0 \end{aligned}$$

O resultado da soma de A com B:

$$C = c_n c_{n-1} c_{n-2} \dots c_1 c_0 \text{ com } n + 1 \text{ algarismos.}$$

O mesmo método se aplica a somas binárias, exemplificado abaixo:

x	Y	Resultado	Vai um
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

9.2 Overflow

Agora considere a seguinte soma, $(111001)_2 + (110011)_2 = (1101100)_2$ repare que a soma de dois números binários de 6 bits, resultou em um número binário de 7 bits, se nossa memória fosse apenas de 6 bits, ocasionária um **overflow**.

Há também a possibilidade de fazer a representação em uma quantidade maior de bits, basta adicionar o zero a esquerda do número e ter memória suficiente para a representação.

Em complemento de dois, a verificação do overflow, pode ser verificada analisando o bit do sinal do resultado e comparar com o bit do sinal do número que está sendo adicionado.

Um **Overflow** / **Underflow** só ocorre quando somado dois números de mesmo sinal, seja eles positivos ou negativos. Quando temos este caso, devemos analisar se o resultado tem o mesmo sinal dos operadores, se for diferente, temos um **Overflow** / **Underflow**.

9.3 Subtração

Para realizar as subtrações binárias, usaremos o complemento de 1 e complemento de 2, para evitar, detalhamentos adicionais.

Complemento de 1: O complemento de 1, basicamente, é o processo de inversão do bit, se for 1 fica 0 e vice versa.

Complemento de 2: É o complemento de 1 de uma sequência de bit, adicionando uma unidade ao final, exemplificando:

\bar{B} : Complemento de 1

$\bar{B} + 1$: Complemento de 2

9.4 Multiplicação

O algoritmo da multiplicação binária é semelhante a ideia usada no decimal, e muito mais fácil, pois os operandos são somente 0 e 1.

Observe que se A tem n algarismos e B tem m algarismos o produto $A * B$ terá no máximo, $n + m$ algarismos.

9.5 Números Reais

Como fica as operações nos números reais? como sempre, podemos nos inspirar na base decimal, suponha os seguintes números:

$$A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0, a_{-1}\dots a_{-k}$$

$$B = b_{n-2}b_{n-2}\dots b_1b_0, b_{-1}\dots b_{-k}$$

se $a_{-k} \neq b_{-k}$, ou seja, se os valores depois da virgula de **a** forem diferentes da virgula de **b**. Na soma, subtração, e multiplicação podemos inicialmente ignorar a virgula, realizar a operação, logo em seguida, realocar a virgula **k** algarismos à direita.

10 Representações numéricas em computador digital

Em um computador digital, qualquer informação (dados), em última instância é representado por um número. Atualmente os números são representados em base 2 pela facilidade em fazer contas. Um computador digital possui espaço finito para guardar informações e o processamento dessas informações é feito em grupos de bits em vez de bit a bit, para uma melhor eficiência.

Como o processamento desses dados(informações) é feito em grupos de bits, damos um nome a esse grupo, que é chamado de **palavra de dado**, trata-se de uma sequência de bits de tamanho fixo que é processada em conjunto. Uma palavra por exemplo pode ter 16 bits ou 8 bits, depende...

Um conjunto de 8 bits é chamado de 1 byte, com essa relação explícita de 1 byte sendo 8 bits. Um sistema digital, pode padronizar o tamanho de suas **palavras**(operandos). Os mais comuns hoje são os processadores de 64 bits ou ainda os mais antigos de 32 bits, isso significa que na Unidade Lógica Aritmética (ULA) dentro do processador, os operandos podem ter no máximo 64 bits, ou 32 bits depende da arquitetura. veremos isso mais profundamente no futuro.

10.1 Estudos de melhoria de processamento de dados

Hoje existem pesquisadores tentando melhorar a capacidade de processamento, na computação clássica, uma melhor capacidade de processamento seria uma palavra maior ou ainda o processamento paralelo de palavras. Existe a computação quântica, que utiliza a sobreposição de estados nas partículas atômicas para definir 0 ou 1, ou ainda os 2 ao mesmo tempo, gerando uma espécie de processamento paralelo bem avançado, porém, probabilístico. Existem outros malucos, em outras áreas que pretendem futuramente usar sistemas orgânicos para realizar o processamento de informações. A melhora da capacidade de processamento dos dados na era da informação é uma quebra de barreiras e uma evidente elevação da fronteira do conhecimento.

11 Representação Binária

Podemos sistematizar a representação de números inteiros com **N** bits da seguinte forma: $2^n - 1$.

Exemplo: Com 3 bits podemos representar $2^3 - 1$ números inteiros.

$$2^3 - 1 = 7$$

Com esta sistematização podemos prever o próximo número e os anteriores, da seguinte forma:

O número atual é $2^n - 1$ o próximo seria: 2^n , logo, o anterior do atual é $2^n - 2$.

12 Extensões

Imagine a seguinte situação, um número **A** com **n** bits, porém, queremos fazer uma representação com **w** bits sendo **w** > **n**.

Se o número for um inteiro sem sinal, neste caso, basta adicionar os zeros a esquerda até **n** ficar igual a **w**.

12.1 Números com sinais

Para fazermos representações de números negativos, precisamos reservar um espaço na palavra para representar o sinal. Existem várias técnicas para fazer esta representação, como o sinal-magnitude, complementos de 1 e de 2, veremos adiante.

12.1.1 Sinal-Magnitude

O Sinal-Magnitude é a reserva do bit mais significativo da palavra, ou seja, o bit mais a esquerda, para representar o sinal do número:

O sinal + é representado pelo bit: 0

O sinal - é representado pelo bit: 1

Exemplo: $A = \frac{1}{0} a_{n-2} a_{n-3} \dots a_1 a_0$

Agora imagine que o bit $\frac{1}{0}$ é o bit de sinal, e queremos fazer a extensão da palavra. Neste caso nós conservamos o bit mais significativo mais a esquerda e acrescentamos com os zeros a esquerda.

Exemplo: $A = (a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_2$, temos aqui uma palavra de **n** bits, e queremos estender para **w** bits sendo **w** > **n**

logo, temos o seguinte: $A = (a_{n-1} 0 0 0 0 \dots k a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_2$

Essa técnica vale para qualquer sinal, seja positivo ou negativo.

12.1.2 Inclusões de sinais

A inclusão de sinal trata-se de uma forma simples de converter uma representação binária sem sinal para uma representação com sinal e para realizar a conversão basta converter os níveis lógicos do número:

Exemplo: Converter o número $2 - (\bar{0}10)$, aqui, vale ressaltar que o bit destacado é a representação do sinal, neste caso, temos um 2 positivo. Para termos o 2 negativo, invertamos os valores, ou seja: 101. Ou seja, basta tirar o complemento de 1 da palavra.

Palavra (010) \rightarrow Complemento de 1 \rightarrow (101), isso vale para qualquer número, inclusive o zero.

Deve-se tomar o devido cuidado quando for realizar operações com o complemento de 1, pode gerar confusões no percurso, por isso, vamos exemplificar:

Vamos considerar a seguinte subtração: (3 - 2)

A = 3 = 011, aqui o bit 0 significa que o número é positivo.

B = 2 = 010.

Tiramos o complemento de 1 do número B = 010

B = 2 = 010 = (101)_c1

Agora sim, podemos fazer a soma A + (-B), ou seja: 011 - 101

Inicialmente a conta parece não fazer muito sentido, porém, lembre-se que deve adicionar 1 no resultado da soma.

Usar o complemento de 1 para fazer as representações de sinais se torna problemática, pois haverá duas representações para o número zero, repare que temos o zero positivo: 000 e o zero negativo: 111. Ter duas representações para um mesmo número é algo que gera certo desconforto, por este motivo é mais saudável aos olhos e um alívio a máquina usar o complemento de 2.

As vantagens de se usar o complemento de 2 para representar os sinais é que teremos a representação de mais 1 número e também evitaremos duas representações para o número zero.

As relações ficam da seguinte forma, para uma palavra de 3 bits.

A - 000 = 0₁₀

B - 001 = +1₁₀

C - 010 = +2₁₀

D - 011 = +3₁₀

Complemento de 2

A - 111 = -1₁₀

B - 110 = -2₁₀

C - 101 = -3₁₀

D - 100 = -4₁₀

Apenas para enfatizar a diferença entre C1 e C2, deixo abaixo como fica C1:

Complemento de 1

A - 111 = -0₁₀

B - 110 = -1₁₀

C - 101 = -2₁₀

D - 100 = -3₁₀

Observe que se a palavra estiver em representação de complemento de 2, devemos ignorar o primeiro dígito mais significativo, pois este indica o sinal, devemos lembrar também que caso um número seja negativo, deve-se primeiro fazer a conversão para complemento de dois para depois trocar a base, isto é fundamental!

Uma das problemáticas para nós humanos é a comparação. Repare que $(001_2)_{c2} > (101_2)_{c2}$ não é nada intuitivo, porém, para o computador é indiferente.

12.1.3 Extensão em complemento de 2

Para representar uma palavra com sinal magnitude podemos apenas conservar o bit mais significativo, neste caso em complemento de dois, a técnica se altera, considere o seguinte:

$$A = ((a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_2 \ a_1 \ a_0)_2)_{c2}$$

O número A tem n bits e agora queremos w bits $\setminus w > n$

Neste caso, podemos apenas pegar o bit mais significativo e estender w bits a esquerda

$$A = ((a_w \ \dots \ a_{n-1} \ a_{n-1} \ a_{n-1} \ a_{n-1} \ a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_2 \ a_1 \ a_0)_2)_{c2}$$

Perceba que esse tipo de extensão é ligeiramente diferente das demais. Por fim, sempre que formos adicionar um sinal na representação do número, precisaremos de um bit a mais para representar o sinal.

13 Álgebra Booleana

A álgebra booleana foi descrita e conceituada por George Boole. Em 1854, publicou seu trabalho no qual fundamenta a álgebra que permite a construção de computadores modernos.

Formalmente, a Álgebra Booleana é um sistema matemático composto por um conjunto de elementos, e que se utiliza somente de dois algarismos para representar os números ou as proposições: O zero (0) e o um (1). Esse sistema de numeração é chamado binário e tem grande utilidade na Lógica e na Teoria dos Conjuntos.

Esse assunto é discutido formalmente na matemática discreta, aqui, pretendemos focar em utilidades da álgebra para aplicações em ciência da computação, como por exemplo, funções, fatorações (Mapas de Karnaugh), alguns postulados até chegarmos em circuitos combinacionais e por fim na máquina de estados.

Pretendo discurtir ligeiramente automatos finitos, máquina de Turing e linguagens formais. São assuntos nos quais me geram grande entusiasmo.

13.1 Princípios Básicos da Álgebra Booleana

São dois princípios fundamentais:

- **Princípio da não contradição:** Uma proposição não pode ser **verdadeira** e **falsa**;
- **Princípio do terceiro excluído:** Uma proposição só pode assumir um dos valores possíveis: ou é verdadeira ou é falsa, excluindo-se uma terceira hipótese.

13.2 Operações Básicas

Já visto em matemática discreta, porém, iremos reforçar:

Conjunção ou também Multiplicação booleana:

$(X \text{ e } Y)$ $(X \text{ and } Y)$ $(X \wedge Y)$ ou ainda $(X * Y)$

Disjunção ou também Produto booleano:

$(X \text{ ou } Y)$ $(X \text{ or } Y)$ $(X \vee Y)$ ou ainda $(X + Y)$

Negação ou também Complemento:

$(\text{Nao}X)$ $(\text{not}X)$ $(\neg X)$ ou ainda (\bar{X})

Todas essas expressões são também representadas em linguagens de programação.

13.3 Tabelas Verdade

Não nos aprofundaremos tanto nas tabelas verdades, são facilmente encontradas e também será tratada melhor em matemática discreta, aqui nos basta saber o seguinte:

Conjunção $(x \wedge y)$: Verdadeiro se e somente se (x,y) forem verdadeiros.

Disjunção $(x \vee y)$: Verdadeiro se pelo menos um operador $(x \text{ ou } y)$ for verdadeiro.

Negação (\bar{x}) : Verdadeiro se e somente se (x) for falso.

Disjunção Exclusiva $(x \oplus y)$: Verdadeiro se e somente se apenas um dos operandos for verdadeiro. Se os dois operandos forem verdadeiros o valor resultado será falso, pois, só um pode ser verdadeiro.

13.4 Expressões Lógicas

Como na álgebra comum, podemos combinar as operações, formando as expressões lógicas. O resultado de uma expressão lógica pode ser obtido aplicando-se cada operação, respeitando a ordem

de precedência dos operadores.

Operador	Precedência
\neg	1
\wedge	2
\vee, \oplus	3
$\longrightarrow, \longleftrightarrow$	4

Aqui vamos ter a convenção de que o valor verdadeiro é: (1) e o valor falso é: (0).

Exemplo de expressão:

$$\bar{1} \vee (0 \wedge 1)$$

$$\bar{1} \vee (0)$$

$$0 \vee 0$$

$$0$$

13.4.1 Variáveis Booleanas

Como na álgebra comum, podemos deixar valores indeterminados, esse valores são chamados de variáveis booleanas.

Exemplo: $\bar{x} \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$

Agora podemos substituir os valores de x e y e calcular a expressão.

13.5 Tabelas Verdade de Expressões Lógicas

Podemos construir as tabelas verdades de expressões lógicas, atribuindo todos os valores possíveis às variáveis.

Considere a seguinte expressão: $\neg X \wedge Y \vee X \wedge \neg Y$

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \wedge Y$	$X \wedge \neg Y$
0	0	1	1	$1 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 1 = 0$
0	1	1	0	$1 \wedge 1 = 1$	$0 \wedge 0 = 0$
1	0	0	1	$0 \wedge 0 = 0$	$1 \wedge 1 = 1$
1	1	0	0	$0 \wedge 1 = 0$	$1 \wedge 0 = 0$

Agora se nós juntarmos as duas últimas expressões, teremos o seguinte:

$(\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$, essa expressão é a já vista **Disjunção exclusiva**. A expressão toda pode ser escrita da seguinte forma: $(X \oplus Y)$, ou seja, a expressão é verdadeira, quando somente um dos valores é verdadeiro.

13.6 Funções Lógicas

Uma função lógica pode ser definida como um conjunto de entradas lógicas que terá como resultante uma expressão que será verdadeira ou falsa.

Considere a seguinte expressão: $F(A, B, C) = A \vee (\bar{B} \wedge C)$

Podemos observar na função F , que se o valor A for 1, a expressão $(\bar{B} \wedge C)$ é insignificante, observe que $(A \vee (N_{0,1}))$ o valor de N pode assumir 1 ou 0 que o valor da função continua sendo 1, pois, $(1 \vee N)$ é 1.

Existe a possibilidade de extrairmos uma função lógica de uma tabela verdade fornecida, observe:

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Referências

Asth, R. C. (2024). Sistema de numeração egípcio. *Toda Matéria*.

de Oliveira, D. A. G., Todt, E., and Alves, M. A. Z. (2020). Curso de circuitos digitais. *Laboratorio HiPPEs*.

Souza, P. (2020). Circuitos digitais. *Youtube*.

Tocci, R. J., Widmer, N. S., and Moss, G. L. (2019). *Sistemas Digitais: Principios e Aplicações*. Pearson, 12th edition.