Exercícios Discreta

Conteúdo

1 Elementos de Lógica

1. (a) Verdadeira.
   (b) Falsa.
   (c) Não é uma proposição.
2. (a) Verdadeira.

(b) Verdadeira.

(c) Verdadeira.

(d) Verdadeira.

3. (a) Verdadeira.

   (b) Falsa.

   (c) Verdadeira.

   (d) Não é uma proposição.

4. (a) Falsa. Intervalo $0 < x < 1$

   (b) Verdadeira.

   (c) Verdadeira.

   (d) Falsa.

5. (a) Sendo A uma proposição temos

$$F \implies A \equiv ((\text{não } F) \text{ ou } A) \equiv (V \text{ ou } A) \equiv V$$

   logo, $F \implies A$

   (b)

$$\begin{aligned} A \implies B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv \\ \equiv (A \text{ e } B) \vee (\neg A \wedge (B \vee \neg B)) \equiv \\ \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A) \equiv (A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg A) \equiv (\neg A) \vee B \end{aligned}$$

   (c) Temos que

$$(A \implies B) \equiv (\neg A) \vee B$$

   logo,

$$(\neg B \implies \neg A) \equiv \neg(\neg B) \vee \neg A \equiv B \vee \neg A$$

   Como $B \vee (\neg A) \equiv (\neg A) \vee B$ então

$$(A \implies B) \equiv (\neg B \implies \neg A)$$

   (d) Sendo A uma proposição, temos

$$(A \implies F) \equiv (\neg A) \vee F \equiv (\neg A)$$

   como queríamos provar.
   Portanto, $(A \implies F) \equiv (\neg A)$.

   (e) Sendo A, B e C proposições, temos

$$((A \implies B) \vee (A \implies C)) \equiv (((\neg A) \vee B) \vee ((\neg A) \vee C)) \equiv$$

$$\equiv \neg A \vee (B \vee C) \equiv (A \implies (B \vee C))$$

   Portanto, provamos que

$$((A \implies B) \vee (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \vee C))$$

(f) Sendo A, B e C proposições, temos

$$((A \implies B) \land (A \implies C)) \equiv (((\neg A) \lor B) \land ((\neg A) \lor C)) \equiv$$
$$\equiv \neg A \lor (B \land C) \equiv (A \implies (B \land C))$$

Portanto, provamos que

$$((A \implies B) \land (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \land C))$$

(g) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$((B \implies A) \lor (C \implies A)) \equiv ((B \land C) \implies A)$$

Sejam A, B e C proposições, temos:

$$((B \implies A) \lor (C \implies A)) \equiv ((\neg B \lor A) \lor (\neg C \lor A)) \equiv$$
$$\equiv ((\neg B \lor \neg C) \lor A) \equiv ((B \land C) \implies A)$$

como queríamos provar.
Portanto,

$$((B \implies A) \lor (C \implies A)) \equiv ((B \land C) \implies A)$$

(h) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$((B \implies A) \land (C \implies A)) \equiv ((B \lor C) \implies A)$$

Sejam A, B e C proposições, temos:

$$\begin{aligned} ((B \implies A) \land (C \implies A)) &\equiv ((\neg B \lor A) \land (\neg C \lor A)) \\ &\equiv ((\neg B \land \neg C) \lor A) \\ &\equiv ((B \lor C) \implies A) \end{aligned}$$

como queríamos provar.
Portanto,

$$((B \implies A) \land (C \implies A)) \equiv ((B \lor C) \implies A)$$

(i) Vamos provar que se A e B são proposições, então

$$((A \implies B) \land (A \implies \neg B)) \implies (\neg A)$$

Sejam A e B proposições, temos:

$$\begin{aligned} ((A \implies B) \land (A \implies \neg B)) &\implies (\neg A) \\ ((\neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)) &\implies (\neg A) \\ ((\neg A) \lor (B \land \neg B) &\implies (\neg A) \\ ((\neg A) \lor F) &\implies (\neg A) \\ (\neg A) &\implies (\neg A) \end{aligned}$$

como queríamos provar.
Portanto, $((A \implies B) \land (A \implies \neg B)) \implies (\neg A)$.

6. Considere os seguintes predicados:

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)) \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x) \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resposta: $g(x) = x$

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resposta: $g(x) = \sqrt{x}$

(c) satisfaz o predicado **não** ($P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$).
Resposta: $g(x) = \sqrt{x}$

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resposta: $g(x) = x$

(e) não satisfaz o predicado $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resposta: $g(x) = x$

(f) satisfaz o predicado **não** ($Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$).
Resposta: $g(x) = x$

2 Conjuntos e Inteiros

11. Podemos reescrever $A = (A - B) \cup B$ como

$$A \subseteq (A - B) \cup B$$

e

$$(A - B) \cup B \subseteq A$$

Logo, dividimos em duas partes:

(a) Como $A \subseteq (A - B) \cup B$, temos:

$$x \in A \implies x \in (A - B) \cup B$$

Sendo $x \in A$, temos 2 casos

i. $x \in B \implies x \in (A - B) \cup B$

ii. $x \notin B \implies x \in (A - B) \implies x \in (A - B) \cup B$

(b) Como $(A - B) \cup B \subseteq A$, temos:

$$x \in (A - B) \cup B \implies x \in A$$

Sendo $x \in (A - B) \cup B$, temos 2 casos

i. $x \in (A - B) \implies (x \in A) \cap (x \notin B) \implies x \in A$

ii. $x \notin (A - B) \implies \neg(x \in (A - B)) \implies \neg((x \in A) \cap (x \notin B)) \implies (x \notin A) \cup (x \in B) \implies x \in B \implies x \in A$

12. Sendo A, B e C finitos, dividimos a prova em 2 partes:

(a) $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$
Suponha $x \in (A \cup B) \cap C$, pela definição de intersecção temos

$$x \in (A \cup B) \cap C \implies ((x \in A) \textbf{ ou } (x \in B)) \textbf{ e } (x \in C) \implies$$

$$\implies (x \in (A \textbf{ e } C)) \textbf{ ou } (x \in (B \textbf{ e } C)) \implies x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

(b) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$
Suponha $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, pela definição de união temos

$$x \in ((A \cap C) \cup (B \cap C)) \implies x \in ((A \textbf{ e } C) \textbf{ ou } (B \textbf{ e } C)) \implies$$

$$\implies (x \in (A \textbf{ ou } B)) \textbf{ e } (x \in C) \implies x \in ((A \cup B) \cap C)$$

14. Dados $f, g : A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a) Não é verdade. Considerando $X = \{x_1, x_2, ..., x_{|X|}\}$, então

$$\begin{aligned}
\prod_{x\in X} c &= c \prod_{x\in X-\{x_1\}} c \\
&= c^2 \prod_{x\in X-\{x_1,x_2\}} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in X-\{x_1,x_2,...,x_{|X|}\}} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in X-X} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in\emptyset} c \\
&= c^{|X|} \neq c|X|
\end{aligned}$$

(b) Não é verdade.
Tome como exemplo $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 3$ e $X = \{2, 5\}$.
Dessa forma,

$$\prod_{x\in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x\in X} (2x + (x + 3)) = 162$$

enquanto

$$\prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x) = \prod_{x\in X} (2x) + \prod_{x\in X} (x + 3) = 80$$

Portanto, concluímos que

$$\prod_{x\in X} (f(x) + g(x)) \neq \prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x)$$

(c) Não é verdade.
Tome como exemplo $f(x) = 2x$, $g(x) = x + 3$ e $X = \{2, 5\}$.
Dessa forma,

$$\sum_{x\in X} f(x)g(x) = \sum_{x\in X} 2x(x + 3) = 130$$

enquanto

$$\left(\sum_{x\in X} f(x)\right)\left(\sum_{x\in X} g(x)\right) = \left(\sum_{x\in X} (2x)\right)\left(\sum_{x\in X} (x + 3)\right) = 182$$

3 Aproximação Assintótica

16. (a)

    (b) Prove que

    $$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

    Então, pela fórmula da soma de PA

    $$\lim \frac{\left(\frac{n(1+n)}{2}\right)}{\frac{n^2}{2}} = \lim \frac{\left(\frac{n+n^2}{2}\right)}{\frac{n^2}{2}} = \lim \frac{\cancel{\frac{n^2}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{\frac{n^2}{2}}} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

    Como queríamos provar.

    (c) A partir da aproximação de Stirling,

    $$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

    prove que

    $$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

    Resposta
    Substituindo $n!$

    $$\log_b n! = \log_b \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{\log_b 2\pi n}{2} + n \log_b \frac{n}{e} =$$

    $$\frac{\log_b 2\pi + \log_b n}{2} + n \log_b n - n \log_b e =$$

    $$n \log_b n \left(1 + \frac{\log_b 2\pi}{2n \log_b n} + \frac{1}{2n} - \frac{\log_b e}{\log_b n}\right)$$

17. Aproximação de Taylor

    $$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C}$$

    Vamos mostrar que

    $$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}$$

    FINALIZAR

18. Se $P(n) \approx a_k n^k$ então

    $$\lim \frac{P(n)}{a_k n^k} = 1$$

Logo

$$\begin{aligned}
\lim \frac{P(n)}{a_k n^k} &= \frac{a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + ... + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k}{a_k n^k} \\
&= \lim \frac{n^k \left(a_0/n^k + a_1/n^{k-1} + a_2/n^{k-2} + ... + a_{k-1}/n^1 + a_k/n^0 \right)}{a_k n^k} \\
&= \lim \frac{a_k n^k \left(\frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_2}{a_k n^{k-2}} + ... + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \frac{a_k}{a_k} \right)}{a_k n^k} \\
&= \lim \left(1 + \frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_2}{a_k n^{k-2}} + ... + \frac{a_{k-1}}{a_k n} \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Portanto, $P(n) \approx a_k n^k$

19. Queremos provar que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Então

$$\lim \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} = 1$$

Logo,

$$\lim \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \lim \frac{\cancel{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right)}{\cancel{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}} =$$

$$= \lim \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right) = \lim \left(1 - 0 \right) = 1$$

Portanto,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

como queríamos provar.

20. Queremos provar que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Então,

$$\lim \frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} = 1$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
\lim \frac{\cancel{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\left(\frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\right)\right)}{\cancel{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} &= \\
= \lim \frac{\left(\frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} &= \\
= \lim \frac{\cancel{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\left(\frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} + 1 - \left(\frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right)\right)}{\cancel{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}} & \\
= \lim \left(\frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} + 1 - \left(\frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right)\right) &
\end{aligned}$$

FINALIZAR

21. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$
Resposta Temos

$$\begin{aligned}
s(0) &= c^0 = 1 \\
s(1) &= c^0 + c^1 \\
s(2) &= c^0 + c^1 + c^2 \\
&\dots \\
s(n) &= c^0 + c^1 + \ldots + c^{n-1} + c^n
\end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $(c-1)$, temos

$$\begin{aligned}
s(n)(c-1) &= (c-1)\left(c^0 + c^1 + \ldots + c^{n-1} + c^n\right) \\
&= c^1 + c^2 + \ldots + c^n + c^{n+1} - c^0 - c^1 - \ldots - c^{n-1} - c^n \\
&= c^{n+1} - c^0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$s(n) = \frac{c^{n+1} - c^0}{c - 1}$$

Então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$ se

$$\lim \frac{s(n)}{\frac{c^{n+1}}{c-1}} = 1$$

Logo, temos que:

$$\lim \frac{s(n)}{\frac{c^{n+1}}{c-1}} = \lim \frac{\frac{c^{n+1}-c^0}{\cancel{c-1}}}{\frac{c^{n+1}}{\cancel{c-1}}} = \lim \frac{c^{n+1} - c^0}{c^{n+1}} = \lim \frac{\cancel{c^{n+1}}\left(1 - \frac{c^0}{c^{n+1}}\right)}{\cancel{c^{n+1}}} =$$

$$= \lim \left(1 - \frac{c^0}{c^{n+1}}\right) = 1$$

Portanto, se $c > 1$,

$$s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c - 1}$$

(b) se $0 < c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$
Resposta Se $0 < c < 1$, então **FAZER**

4 Piso e Teto

29. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resposta
Existe um único inteiro z no conjunto

$$\{y \in \mathbb{Z} \mid x \leq y < x + 1\}$$

Com isso, todo inteiro maior que z também é maior que x. Logo, z é o menor inteiro maior ou igual a x e, portanto, z $= \lceil x \rceil$.

30. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.
Resposta
Do Teorema 9 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$x + z \leq \lceil x \rceil + z < (x + 1) + z$$

$$x + z \leq \lceil x \rceil + z < (x + z) + 1$$

Como $\lceil x \rceil + z$ é inteiro, temos do Teorema 9 que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil$$

31. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

   (a) $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
   Resposta

      i. Se $n + 1$ é par, $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}$$

      Por outro lado, como $n \in \mathbb{N}$

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil \overset{1}{=} \frac{n+1}{2} + 0 = \frac{n+1}{2}$$

      $(1) \lceil -1/2 \rceil = 0$

ii. Se $n+1$ é ímpar, $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \stackrel{1}{=} \frac{n}{2} + 0 = \frac{n}{2}$$

(1) $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$
Por outro lado,

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$$

(b) $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
Resposta

i. Se n é par, $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil \stackrel{1}{=} \frac{n}{2}$$

(1) $\lceil -1/2 \rceil = 0$
Por outro lado,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$$

ii. Se n é ímpar, $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \frac{n-1}{2}$$

Por outro lado,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \stackrel{1}{=} \frac{n-1}{2}$$

(1) $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$

32. Sejam $n, m : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$n(a,b) = b - a + 1,$$
$$m(a,b) = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor.$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a+b$ é par s,e e somente se, $n(a,b)$ é ímpar.
Resposta
Supondo $a+b$ par. Como $a, b \in \mathbb{Z}$, podemos escrever

$$a + b = 2k$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, portanto

$$b = 2k - a.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1 \\ &= (2k - a) - a + 1 \\ &= 2k - 2a + 1 \\ &= 2(k - a) + 1 \end{aligned}$$

Como $k, a \in \mathbb{Z}$, então $(k - a) \in \mathbb{Z}$. Logo, $2(k - a)$ é **par** para todo $k, a \in \mathbb{Z}$. Portanto, $n(a,b) = 2(k - a) + 1$ é **ímpar** se, e somente se, $a + b$ é **par**.

Volta - Supondo $a + b$ ímpar. Como $a, b \in \mathbb{Z}$, podemos escrever

$$a + b = 2k + 1$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, portanto

$$b = 2k - a + 1.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1 \\ &= (2k - a + 1) - a + 1 \\ &= 2k - 2a + 2 \\ &= 2(k - a) + 2 \end{aligned}$$

Como $k, a \in \mathbb{Z}$, então $(k - a) \in \mathbb{Z}$. Logo, $2(k - a)$ é **par** para todo $k, a \in \mathbb{Z}$. Portanto, $n(a,b) = 2(k - a) + 2$ é **par** se, e somente se, $a + b$ é **ímpar**.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

Resposta

Organizando a equação, temos

$$n(a, m(a,b)) = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} \right\rfloor + 1 =$$

$$= \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a+1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Logo, temos duas situações:

i. Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2} \in \mathbb{Z}$ então

$$n(a, m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor =$$

E como $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro, temos que:

$$n(a, m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$$

ii. Se $n(a,b)$ é ímpar, $\frac{n(a,b)+1}{2} \in \mathbb{Z}$ então

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil$$

E como $\frac{n(a,b)}{2} \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$$

(c) $n(m(a,b)+1,b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

Resposta

Organizando a equação, temos

$$n(m(a,b)+1,b) = b - (m(a,b)+1) + 1 = b - \left(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + 1 \right) + 1 =$$

$$= b - \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor = b + \left\lceil -\frac{a+b}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2b}{2} - \frac{a+b}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{2} \right\rceil =$$

$$= \left\lceil \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

Logo, temos duas situações

i. Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2} \in \mathbb{Z}$ então

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$$

ii. Se $n(a,b)$ é ímpar, $\frac{n(a,b)-1}{2} \in \mathbb{Z}$ então

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$$

(d) $n(a,m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$.

Resposta

Organizando a equação, temos

$$n(a,m(a,b)-1) = (m(a,b)-1) - a + 1 = \left(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - 1 \right) - a + 1 =$$

$$= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - a \overset{1}{=} \left\lfloor \frac{a+b-2a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{b-a+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$(1) a \in \mathbb{Z}$ Portanto,

$$n(a,m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$$

Como queríamos provar.

33. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.
Resposta
Suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Logo, temos que

$$\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x + 1 \rfloor \implies \lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Consequentemente,

$$\lfloor x \rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor = 1 \textbf{ e } x \in (\lfloor x \rfloor ... \lfloor x \rfloor + 1)$$

Logo, temos que:

$$\lfloor x \rfloor + 1 - x < 1 \textbf{ e } x - \lfloor x \rfloor < 1$$

Portanto, $x - \lfloor x \rfloor < 1$, já que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Por outro lado, para $x \in \mathbb{Z}$, temos que $x = \lfloor x \rfloor$. Logo,

$$x - \lfloor x \rfloor = 0 < 1$$

Portanto, $x - \lfloor x \rfloor < 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.
Ademais, $x - \lfloor x \rfloor < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.
Resposta
Suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Logo, temos que

$$x < \lceil x \rceil < x + 1$$

Como $(x + 1) - x = 1$ **e** $\lceil x \rceil \in (x..x + 1)$, então

$$(x + 1) - \lceil x \rceil < 1 \textbf{ e } \lceil x \rceil - x < 1$$

Logo, $\lceil x \rceil - x < 1$ para todo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Entretanto, para $x \in \mathbb{Z}$, temos que $x = \lceil x \rceil$. Logo,

$$\lceil x \rceil - x = 0 < 1$$

Portanto, $\lceil x \rceil - x < 1$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Ademais, $\lceil x \rceil - x < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$.
Resposta Vamos provar que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \iff x \in \mathbb{Z}$.

i. $x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.
Seja $x \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor &= \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \\ &= \min\{x, x + 1, x + 2, \dots\} \\ &= x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor &= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} \\ &= \max\{x, x-1, x-2, \dots\} \\ &= x\end{aligned}$$

Portanto, $x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

ii. $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \implies x \in \mathbb{Z}$.
Temos que:

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

Apenas quando

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \cap \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

é um conjunto unitário. Logo,

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \cap \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} = \{x\}$$

Logo, $x \in \mathbb{Z}$. Portanto, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \implies x \in \mathbb{Z}$.

Ademais, $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \iff x \in \mathbb{Z}$.

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
Resposta
Suponha $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Logo, temos que:

$$\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil \implies \lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Como, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, temos

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = (\lfloor x \rfloor + 1) - \lfloor x \rfloor = 1$$

Portanto, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
Por outro lado, suponha $x \in \mathbb{Z}$. Temos:

$$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$$

Logo,

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = x - x = 0$$

Portanto, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

34. **FAZER** Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\min\{k \in Z \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x + 1$.
Resposta
Supondo $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, temos:

35. **FAZER** Prove que

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.
Resposta

38. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e crescente satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Resposta

40. Prove que

(a)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \approx n \lg n$$

Resposta

(b)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1 \approx n \lg n$$

Resposta

5 Indução

45. Prove que
$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que
$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para todo } k \in [0..a]$$
Passo da Indução: Vamos provar que
$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{(a+1)+1}-1}{c-1} = \frac{c^{a+2}-1}{c-1}$$
Temos que
$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1}$$
Pela Hipótese da Indução, temos que
$$\sum_{i=0}^{a} c^i = \frac{c^{a+1}-1}{c-1},$$
logo,
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a+1} c^i &= \left(\frac{c^{a+1}-1}{c-1}\right) + c^{a+1} \\ &= \frac{c^{a+1}-1+(c-1)c^{a+1}}{c-1} \\ &= \frac{\cancel{c^{a+1}}-1+c^{a+2}-\cancel{c^{a+1}}}{c-1} \\ &= \frac{c^{a+2}-1}{c-1}\end{aligned}$$
Portanto,
$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{a+2}-1}{c-1}$$
Base da Indução: Vamos provar que
$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para todo } k \in \{0\}$$

De um lado, temos que

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = 1$$

De outro lado,

$$\frac{c^{0+1}-1}{c-1} = \frac{c-1}{c-1} = 1, \text{ já que } c \neq 1.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para todo } k \in \{0\}$$

46. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} i2^i = 2^{k+1}(k-1)+2, \text{ para todo } k \in [0..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = 2^{(a+1)+1}((a+1)-1)+2 = 2^{(a+2)}a+2$$

Temos que

$$\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = \left(\sum_{i=0}^{a} i2^i\right) + (a+1)2^{a+1}$$

Pela Hipótese da Indução, temos que

$$\sum_{i=0}^{a} i2^i = 2^{a+1}(a-1)+2$$

logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a+1} i2^i &= \left(2^{a+1}(a-1)+2\right) + (a+1)2^{a+1} \\ &= 2^{a+1}a - \cancel{2^{a+1}} + 2 + 2^{a+1}a + \cancel{2^{a+1}} \\ &= 2^{a+2}a+2\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = 2^{a+2}a + 2.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{k} i2i = 2^{k+1}(k-1) + 2, \text{ para k} = 0.$$

De um lado, temos que

$$\sum_{i=0}^{k} i2i = 0$$

Por outro lado,

$$2^{0+1}(0-1) + 2 = 2(-1) + 2 = -2 + 2 = 0$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{k} i2i = 2^{k+1}(k-1) + 2, \text{ para k} = 0.$$

47. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} = 2^j, \text{ para todo } j \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{k=0}^{a+1} \binom{a+1}{k} = 2^{a+1}$$

Da definição de $\binom{n}{k}$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a+1}{k} &= \sum_{k=0}^{a+1}\left(\binom{a}{k}+\binom{a}{k-1}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{a+1}\binom{a}{k}+\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a}{k-1}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}+\binom{a}{a+1}\right)+\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a}{k-1}\\
&= \left(\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}+\binom{a}{a+1}\right)+\left(\binom{a}{-1}+\sum_{k=1}^{a+1}\binom{a}{k-1}\right)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}+0\right)+\left(0+\sum_{k=1}^{a+1}\binom{a}{k-1}\right)\\
&= 2\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}
\end{aligned}$$

Pela Hipótese da Indução, temos que

$$\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k} = 2^a$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{a+1}\binom{a+1}{k} = 2(2^a) = 2^{a+1}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} = 2^0$$

De um lado, temos

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} = 1$$

De outro, temos

$$2^0 = 1$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} = 2^0$$

48. Prove que
$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}.$$

Resposta

Hipótese da Indução: Seja $a \geq k$ tal que
$$\sum_{i=k}^{j} \binom{i}{k} = \binom{j+1}{k+1}, \text{ para todo } j \in [k..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que
$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \binom{a+1+1}{k+1} = \binom{a+2}{k+1}$$

Temos que
$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{a} \binom{i}{k} + \binom{a+1}{k}$$

Da H.I., temos
$$\sum_{i=k}^{a} \binom{i}{k} = \binom{a+1}{k+1}$$

Logo,
$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \binom{a+1}{k+1} + \binom{a+1}{k} = \binom{a+2}{k+1}$$

Portanto,
$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \binom{a+2}{k+1}$$

Base da Indução: Vamos provar que
$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{k} = \binom{b+1}{k+1}, \text{ para todo } b \leq k.$$

Se $b = k$, temos
$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = 1$$

Por outro lado,
$$\binom{b+1}{k+1} = 1$$

Se $b < k$, temos
$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{k} = 0 \text{ e } \binom{b+1}{k+1} = 0$$

Portanto,

$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{k} = \binom{b+1}{k+1}, \text{ para todo } b \leq k.$$

49. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.
Resposta:
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = (x+y)^k, \text{ para todo } k \in [1..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= \binom{a+1}{0} x^0 y^{a+1-(0)} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} \\
&= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \left(\binom{a}{i} + \binom{a}{i-1} \right) x^i y^{a+1-i} \\
&= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^{i+1} y^{a+1-(i+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \binom{a}{a+1} x^{a+1} y^{a+1-(a+1)} \\
&+ x \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i} \\
&= y \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i} + x \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i}.
\end{aligned}$$

Da hipótese da indução, temos que

$$\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i} = (x+y)^a$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = y(x+y)^a + x(x+y)^a$$
$$= (x+y)^a(x+y)$$
$$= (x+y)^{a+1}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^i y^{1-i} = (x+y)^1$$

De um lado,

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^i y^{1-i} = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = 1.1.y + 1.x.1 = x + y$$

Do outro lado,

$$(x+y)^1 = x + y$$

Finalmente, para concluir que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

basta tomar $x = y = 1$, e então

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n.$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

52. Prove por indução em n que

(a) $\sum_{j=0}^{n} (F(j))^2 = F(n)F(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{k} (F(j))^2 = F(k)F(k+1), \text{ para todo } k \in [0..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{j=0}^{a+1} (F(j))^2 = F(a+1)F(a+1+1) = F(a+1)F(a+2)$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{a+1}(F(j))^2 = \sum_{j=0}^{a}(F(j))^2 + (F(a+1))^2$$

Da Hipótese da Indução, temos que

$$\sum_{j=0}^{a}(F(j))^2 = F(a)F(a+1)$$

logo,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{a+1}(F(j))^2 &= F(a)F(a+1) + (F(a+1))^2 \\ &= F(a+1)(F(a) + F(a+1))\end{aligned}$$

e pela definição de F, temos que

$$F(a+1) + F(a) = F(a+2)$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{a+1}(F(j))^2 = F(a+1)F(a+2)$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{j=0}^{k}(F(j))^2 = F(k)F(k+1), \text{ para k} = 0.$$

De um lado, temos que

$$\sum_{j=0}^{0}(F(j))^2 = (F(0))^2 = 0$$

Por outro lado,

$$F(0)F(0+1) = F(0)F(1) = 0 \times 1 = 0$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{k}(F(j))^2 = F(k)F(k+1), \text{ para k} = 0.$$

(b) $\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{k} F(2j) = F(2k+1) - 1, \text{ para todo } k \in [0..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) = F(2(a+1)+1) - 1 = F(2a+3) - 1$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) = \sum_{j=0}^{a} F(2j) + F(2(a+1))$$

Pela Hipótese da Indução, temos que

$$\sum_{j=0}^{a} F(2j) = F(2a+1) - 1$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) = F(2a+1) - 1 + F(2a+2)$$

Da definição de F, temos

$$F(2a+2) + F(2a+1) = F(2a+3)$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) = F(2a+3) - 1$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{j=0}^{k} F(2j) = F(2(k)+1) - 1, \text{ para } k \in \{0\}$$

De um lado, temos que

$$\sum_{j=0}^{0} F(2j) = F(2(0)) = F(0) = 0$$

Por outro lado,

$$F(2(0)+1) - 1 = F(1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{k} F(2j) = F(2(k)+1) - 1, \text{ para } k \in \{0\}$$

(c) $\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k} F(2j-1) = F(2k), \text{ para todo } k \in [0..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) = F(2(a+1)) = F(2a+2)$$

Temos que

$$\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) = \sum_{j=1}^{a} F(2j-1) + F(2(a+1)-1)$$

Pela Hipótese da Indução, temos que

$$\sum_{j=1}^{a} F(2j-1) = F(2a)$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) = F(2a) + F(2(a+1)-1) = F(2a) + F(2a+1)$$

Da definição de F, temos

$$F(2a) + F(2a+1) = F(2a+2)$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) = F(2a+2)$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{j=1}^{k} F(2j-1) = F(2k), \text{ para } k \in \{0\}$$

De um lado, temos

$$\sum_{j=1}^{k} F(2j-1) = 0, \text{ pois não há nenhuma soma.}$$

Por outro lado, temos

$$F(2(0)) = F(0) = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{k} F(2j-1) = F(2k), \text{ para } k \in \{0\}$$

(d) $F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2 = (-1)^k, \text{ para todo } k \in [0..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$F(a+1+1)F(a+1-1) - (F(a+1))^2 = (-1)^{(a+1)}$$

$$F(a+2)F(a) - (F(a+1))^2 = (-1)^{(a+1)}$$

Pela definição de F, temos que

$$\begin{aligned}
F(a+2)F(a) - F(a+1)^2 &= (-1)^{a+1} \\
(F(a+1) + F(a))F(a) - F(a+1)^2 &= \\
F(a)^2 + F(a)F(a+1) - F(a+1)^2 &= \\
F(a)^2 + F(a+1)(F(a) - F(a+1)) &= \\
F(a)^2 + F(a+1)(\cancel{F(a)} - (\cancel{F(a)} + F(a-1))) &= \\
F(a)^2 - F(a+1)F(a-1) &=
\end{aligned}$$

Da Hipótese Indutiva, temos que

$$F(a+1)F(a-1) - (F(a))^2 = (-1)^a$$

Multiplicando os dois lados da H.I. por (-1), temos

$$F(a)^2 - F(a+1)F(a-1) = (-1)^{a+1}$$

Portanto, temos que

$$F(a+2)F(a) - (F(a+1))^2 = F(a)^2 - F(a+1)F(a-1) = (-1)^{a+1}$$

VERIFICAR ISSO COM O PROFESSOR
Base da Indução: Vamos provar que

$$F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2 = (-1)^k, \text{ para } k \in \{0\}$$

De um lado temos que

$$F(0+1)F(0-1) - (F(0))^2 = F(1)F(-1) - 0 = (1)(1) = 1$$

Por outro lado,

$$(-1)^0 = 1$$

Portanto,

$$F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2 = (-1)^k, \text{ para } k \in \{0\}$$

onde $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*.

53. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a *sequência de Fibonacci*.
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F(k+1) & F(k) \\ F(k) & F(k-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix}.$$

Temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pela Hipótese da Indução, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} = \begin{pmatrix} F(a+1) & F(a) \\ F(a) & F(a-1) \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} &= \begin{pmatrix} F(a+1) & F(a) \\ F(a) & F(a-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F(a+1)+F(a) & F(a+1) \\ F(a)+F(a-1) & F(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix}.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} F(k+1) & F(k) \\ F(k) & F(k-1) \end{pmatrix}, \text{ para } k \in \{0\}.$$

De um lado, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$\begin{pmatrix} F(0+1) & F(0) \\ F(0) & F(0-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(1) & F(0) \\ F(0) & F(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k} = \begin{pmatrix} F(k+1) & F(k) \\ F(k) & F(k-1) \end{pmatrix}, \text{ para } k \in \{0\}.$$

55. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo *MergeSort* para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta

Vamos provar, por indução em n, que

$$T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$T^-(k) \leq T(k) \leq T^+(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$T^-(a+1) \le T(a+1) \le T^+(a+1)$$

Para $a+1 \ge 2$, temos que

$$T^-(a+1) = 2T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + (a+1) - 1 = 2T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + a$$

e

$$\begin{aligned} T(a+1) &= T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + (a+1) - 1 \\ &= T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + a \end{aligned}$$

e

$$T^+(a+1) = 2T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + (a+1) - 1 = 2T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + a$$

Pela Hipótese da Indução, temos que

$$T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) \le T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) \le T^+\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right)$$

e

$$T^-\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \le T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \le T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} &T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T^-\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\qquad \le T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\qquad\qquad \le T^+\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \end{aligned}$$

Como T^- e T^+ são funções não-decrescentes,

$$\begin{aligned} &T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) \\ &\qquad \le T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T^-\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\qquad \le T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\qquad \le T^+\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\qquad\qquad \le T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&2T^-\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right)+a\\
&\qquad\le T\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right)+T\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right)+a\\
&\qquad\qquad\le 2T^+\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right)+a
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$T^-(a+1)\le T(a+1)\le T^+(a+1).$$

Base da Indução: Basta verificar que

$$T^-(0)\le T(0)\le T^+(0)$$

e

$$T^-(1)\le T(1)\le T^+(1).$$

57. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n}c^i=\frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ e todo $c\in\mathbb{C}-\{0,1\}$.
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a\in\mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{i=0}^{k}c^i=\frac{c^{k+1}-1}{c-1},\text{ para todo } k\in[0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1}c^i=\frac{c^{a+1+1}-1}{c-1}=\frac{c^{a+2}-1}{c-1}$$

Temos que

$$\sum_{i=0}^{a+1}c^i=\sum_{i=0}^{a}c^i+c^{a+1}$$

Pela Hipótese da Indução, temos que

$$\sum_{i=0}^{a}c^i=\frac{c^{a+1}-1}{c-1}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a+1} c^i &= \frac{c^{a+1}-1}{c-1} + c^{a+1} \\ &= \frac{c^{a+1}-1+(c-1)c^{a+1}}{c-1} \\ &= \frac{\cancel{c^{a+1}}-1+c^{a+2}-\cancel{c^{a+1}}}{c-1} \\ &= \frac{c^{a+2}-1}{c-1}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{a+2}-1}{c-1}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para } k \in \{0\}.$$

De um lado, temos

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = c^0 = 1$$

De outro lado, temos

$$\frac{c^{0+1}-1}{c-1} = \frac{c-1}{c-1}$$

Com $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.
Portanto,

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para } k \in \{0\}.$$

58. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|$$

Temos que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}| - \left|A_{a+1} \cap \bigcup_{i=1}^{a} A_i\right|$$

Da Hipótese Indutiva, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a} |A_i|$$

Logo,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a} |A_i| + |A_{a+1}| - \left|A_{a+1} \cap \bigcup_{i=1}^{a} A_i\right|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i| - \left|A_{a+1} \cap \bigcup_{i=1}^{a} A_i\right|$$

Como os conjuntos são distintos,

$$A_{a+1} \cap \bigcup_{i=1}^{a} A_i = \emptyset$$

Consequentemente,

$$\left|A_{a+1} \cap \bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| = 0$$

Portanto,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{1} |A_i|$$

Logo, temos que $A_1 = A_1$. Portanto,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

60. Prove por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

Resposta

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ e X o conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_a\}$, tal que

$$\prod_{x \in X_k} c = c^{|X_k|}, \text{ para todo } k \in [0..a], X_0 \subseteq X_k \subseteq X_a.$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\prod_{x \in X_{a+1}} c = c^{|X_{a+1}|}$$

Temos que

$$\prod_{x \in X_{a+1}} c = c \prod_{x \in X_a} c$$

Pela hipótese indutiva, temos

$$\prod_{x \in X_a} c = c^{|X_a|}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\prod_{x \in X_{a+1}} c &= (c)c^{|X_a|} \\ &= c^{|X_a|+1} \\ &= c^{|X_a \cup \{x_a+1\}|} \\ &= c^{|X_a+1|}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\prod_{x \in X_{a+1}} c = c^{|X_{a+1}|}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\prod_{x \in X_0} c = c^{|X_0|}$$

De um lado, temos

$$\prod_{x \in X_0} c = \prod_{x \in \emptyset} c = 1,$$

E,

$$c^{|X_0|} = c^{|\emptyset|} = c^0 = 1$$

Portanto,

$$\prod_{x \in X_0} c = c^{|X_0|}$$

61. Prove por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ e X o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_a\}$, tal que

$$\sum_{x \in X_k} c = c|X_k|, \text{ para todo } k \in [0..a], X_0 \subseteq X_k \subseteq X_a.$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c = c|X_{a+1}|$$

Temos que

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c = \sum_{x \in X_a} c + c$$

Pela Hipótese Indutiva, temos que

$$\sum_{x \in X_a} c = c|X_a|$$

Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X_{a+1}} c &= c|X_a| + c \\ &= c(|X_a| + 1) \\ &= c(|X_a \cup \{x_a + 1\}|) \\ &= c|X_{a+1}|\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{x \in X_{a+1}} c = c|X_{a+1}|$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X_0} c = c|X_0|$$

Temos

$$\sum_{x \in X_0} c = c|X_0|$$

Logo,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

62. **FAZER** Prove, por indução em $|X|$ que, se $f, g : A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Resposta:
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A||X| \in [0..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A||X| = a + 1$$

63. **FAZER**

64. **FAZER**

65. **FAZER**

66. **FAZER** Considere o seguinte algoritmo, conhecido como "busca binária". Fazendo $n = b - a + 1$, prove que o número de comparações na execução de $Busca(x, v, a, b)$ é no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ para todo $n \geq 1$.
Resposta
Seja B(n) o número de comparações na execução de $Busca(x, v, a, b)$ para $n = b - a + 1$.
Vamos provar por indução em n que

$$B(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Hipótese da Indução: Seja $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$B(k) \leq \lfloor \lg k \rfloor + 1, \text{ para todo } k \in [1..p].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$B(a + 1) \leq \lfloor \lg(a + 1) \rfloor + 1$$

67. **FAZER**

68. **FAZER**

5.1 Descrições Recursivas

78. **FAZER** Seja $M(n) : \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

    $M(n) :=$ posição do bit mais significativo na representação binária de n,

    sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

    (a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.
    Resposta

    $$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

    (b) Prove que a expressão proposta está correta.
    Resposta
    Vamos provar por indução que

    $$M(n) = f(n)$$

    Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

    $$M(k) = f(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$$

    Passo da Indução: Vamos provar que

    $$M(a+1) = f(a+1)$$

    Para $a + 1 > 0$, temos da definição de f que

    $$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

    Pela H.I., temos que

    $$M\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right)$$

    Logo,

    $$f(a+1) = M\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

79. Considere o algoritmo $Exp(x, n)$

    $$Exp(x,n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ Exp(x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)^2 \times x^{(n \bmod 2)}, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Execute $Exp(2, n)$ para $n \in 0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.
Resposta

$$
\begin{array}{rr}
Exp(2,0) = 1 & Mult(2,0) = 0 \\
Exp(2,1) = 2 & Mult(2,1) = 2 \\
Exp(2,2) = 4 & Mult(2,2) = 3 \\
Exp(2,5) = 32 & Mult(2,5) = 5 \\
Exp(2,11) = 2048 & Mult(2,11) = 7 \\
Exp(2,15) = 32768 & Mult(2,15) = 8 \\
Exp(2,16) = 65536 & Mult(2,16) = 6 \\
Exp(2,20) = 1048576 & Mult(2,20) = 7
\end{array}
$$

(b) Prove por indução em n que $Exp(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$Exp(x, k) = x^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$Exp(x, (a + 1)) = x^{(a+1)}$$

Temos que

$$Exp(x, (a + 1)) = Exp(x, \left\lfloor \frac{(a + 1)}{2} \right\rfloor)^2 \times x^{((a+1) \bmod 2)}$$

E como $0 < \left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor \leq n$, pela H.I. temos que

$$Exp(x, \left\lfloor \frac{(a + 1)}{2} \right\rfloor) = x^{\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor}$$

Logo,

$$Exp(x, (a + 1)) = x^{((a+1) \bmod 2)} (x^{\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor})^2$$

$$Exp(x, (a + 1)) = x^{((a+1) \bmod 2)} x^{2\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor}$$

Então, temos dois casos:

i. Se a+1 é par

$$
\begin{aligned}
Exp(x, (a + 1)) &= x^{((a+1) \bmod 2)} x^{2\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor} \\
&= x^0 x^{2\frac{(a+1)}{2}} \\
&= x^{a+1}
\end{aligned}
$$

ii. Se a+1 é ímpar

$$\begin{aligned} Exp(x,(a+1)) &= x^{((a+1)\bmod 2)} x^{2\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor} \\ &= x^1 x^{2\frac{a}{2}} \\ &= x^{a+1} \end{aligned}$$

Base da Indução: Vamos provar que:

$$Exp(x,0) = x^0$$

Pela definição, temos que

$$Exp(x,0) = 1$$

e

$$x^0 = 1.$$

Portanto, $Exp(x,n) = x^n$, para todo $x \neq 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $Exp(x,n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 77. **Resposta**
Escreveremos o número de multiplicações efetuadas por $Exp(x,n)$ como

$$m(n) \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ m(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$, e a função b como

$$b(n) \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ b(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Vamos provar por indução que

$$m(n) = \lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que

$$m(k) = \lfloor \lg(k) \rfloor + b(k) + 1, \text{ para todo } k \in [1..a]$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$m(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + b(a+1) + 1$$

Das definições de m e b, temos que

$$m(a+1) = m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1$$

e

$$b(a+1) = b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2)$$

e como $0 < \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq n$, pela Hipótese da Indução temos

$$\begin{aligned}
m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + 1 \\
&= \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + 1 \\
&= \lfloor \lg{(a+1)} - \lg 2 \rfloor + b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + 1 \\
&= \lfloor \lg{(a+1)} \rfloor - 1 + b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + 1 \\
&= \lfloor \lg{(a+1)} \rfloor + b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
m(a+1) &= m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&= \lfloor \lg{(a+1)} \rfloor + b(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&= \lfloor \lg{(a+1)} \rfloor + b(a+1) + 1
\end{aligned}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$m(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + b(1) + 1$$

Pela definição de m, temos

$$m(1) = m(\lfloor 1/2 \rfloor) + (1 \bmod 2) + 1 = m(0) + 1 + 1 = 2$$

Por outro lado,

$$\lfloor \lg 1 \rfloor + b(1) + 1 = 0 + b(0) + (1 mod 2) + 1 = 0 + 0 + 1 + 1 = 2$$

Portanto,

$$m(n) = \lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

(d) Prove que a execução de $Exp(x,n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

Resposta

Escreveremos o número de multiplicações efetuadas por $Exp(x,n)$ como

$$m(n) \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ m(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.
Vamos provar por indução em n que

$$m(n) \leq 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que

$$m(k) \leq 2(\lfloor \lg k \rfloor + 1), \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$m(a+1) \leq 2(\lfloor \lg (a+1) \rfloor + 1)$$

Temos que

$$m(a+1) = m(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1$$

e como $0 < \left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor \leq n$, pela H.I. temos

$$\begin{aligned}
m(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor) &\leq 2\left(\left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1\right) \\
&= 2\left(\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) \right\rfloor + 1\right) \\
&= 2\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) + 1 \right\rfloor \\
&= 2\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) + \lg 2 \right\rfloor \\
&= 2\left\lfloor \lg \left(2\left(\frac{a+1}{2}\right)\right) \right\rfloor \\
&= 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
m(a+1) &= m(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&\leq 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1
\end{aligned}$$

Então, ficamos com dois casos:

i. Se a+1 é par

$$\begin{aligned}
m(a+1) &\leq 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&= 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor + 0 + 1 \\
&= 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor + 1 \leq 2\left(\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor + 1\right)
\end{aligned}$$

ii. Se a+1 é ímpar

$$\begin{aligned} m(a+1) &\le 2\lfloor \lg(a+1) \rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\ &= 2\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1 + 1 \\ &= 2\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 2 \\ &= 2\left(\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1\right) \end{aligned}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$m(1) \le 2(\lfloor \lg(1) \rfloor + 1)$$

Pela definição de m, temos

$$m(1) = m(0) + (1 \bmod 2) + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$$

Por outro lado,

$$2(\lfloor \lg(1) \rfloor + 1) = 2(0+1) = 2$$

Portanto,

$$m(n) \le 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

80. **FAZER**

81. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$Fatorial(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ n \times Fatorial(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$Fatorial(k) = \prod_{i=1}^{k} i, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$Fatorial(a+1) = \prod_{i=1}^{a+1} i$$

Pela definição de fatorial, temos:

$$Fatorial(a+1) = (a+1)Fatorial(a)$$

Pela hipótese da indução, temos que

$$Fatorial(a) = \prod_{i=1}^{a} i$$

Logo,

$$\begin{aligned} Fatorial(a+1) &= (a+1)\prod_{i=1}^{a} i \\ &= \prod_{i=1}^{a+1} i \end{aligned}$$

Portanto,

$$Fatorial(a+1) = \prod_{i=1}^{a+1} i$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$Fatorial(0) = \prod_{i=1}^{0} i$$

De um lado,

$$Fatorial(0) = 1, \text{ pela definição de Fatorial}$$

Por outro lado,

$$\prod_{i=1}^{0} i = 1$$

Portanto,

$$Fatorial(0) = \prod_{i=1}^{0} i$$

82. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

$$A(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5 \times A(n-1) - 6 \times A(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Resposta
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$A(k) = 3^k - 2^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$A(a+1) = 3^{a+1} - 2^{a+1}$$

Temos que

$$A(a+1) = 5A(a) - 6A(a-1)$$

Pela hipótese da indução, temos que

$$A(a) = 3^a - 2^a \text{ e } A(a-1) = 3^{a-1} - 2^{a-1}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A(a+1) &= 5(3^a - 2^a) - 6(3^{a-1} - 2^{a-1}) \\
&= 5(3^a - 2^a) - 6(3^a 3^{-1} - 2^a 2^{-1}) \\
&= 5.3^a - 5.2^a - 6.3^a \frac{1}{3} + 6.2^a \frac{1}{2} \\
&= 5.3^a - 5.2^a - 2.3^a + 3.2^a \\
&= 3^a(5-2) - 2^a(5-3) \\
&= 3^a(3) - 2^a(2) \\
&= 3^{a+1} - 2^{a+1}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A(a+1) = 3^{a+1} - 2^{a+1}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$A(0) = 3^0 - 2^0$$

De um lado,

$$A(0) = 0, \text{ pela definição de } A.$$

Por outro lado,

$$3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

Portanto,

$$A(0) = 3^0 - 2^0$$

83. Considere o seguinte algoritmo

$$Multiplica(x, n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ Multiplica(2x, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + x(n \bmod 2), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove, por indução em n, que $Multiplica(x, n)$ devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
Resposta
Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$Multiplica(x, k) = kx, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$Multiplica(x, a+1) = (a+1)x$$

Temos que

$$Multiplica(x, a+1) = Multiplica(2x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + x((a+1) \bmod 2)$$

E como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela HI temos

$$Multiplica(2x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) = 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$$

Portanto,

$$Multiplica(x, a+1) = 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor + x((a+1) \bmod 2)$$

Se a é par, temos que

$$\begin{aligned} Multiplica(x, a+1) &= 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor + x \\ &= 2x \left\lfloor \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + x \\ &= 2x\frac{a}{2} + x \qquad\qquad = x(a+1) \end{aligned}$$

Se a é ímpar, temos

$$\begin{aligned} Multiplica(x, a+1) &= 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \\ &= 2x\frac{a+1}{2} \qquad\qquad = x(a+1) \end{aligned}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$Multiplica(x, 0) = (0)x$$

De um lado, temos

$$Multiplica(x, 0) = 0, \text{ pela definição de } Multiplica$$

Por outro lado,

$$(0)x = 0$$

Portanto,

$$Multiplica(x, 0) = (0)x$$

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por $Multiplica(x, n)$
Resposta

84. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de *Fibonacci*.

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.2 Funções Iteradas

92. Para cada função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

    (a) $h(x) = x - 2$
    Resposta
    Partindo de $h^1 = h^0 \circ h(x) = h(h^0(x)) = h(x)$, temos que h^2 é definido como

$$\begin{aligned} h^2 &= h^1 \circ h(x) = h(h^1(x)) = h(x-2) \\ &= (x-2) - 2 = x - 4 = x - 2 \times 2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} h^3 &= h^2 \circ h(x) = h(h^2(x)) = h(x-4) \\ &= (x-4) - 2 = x - 6 = x - 3 \times 2 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} h^4 &= h^3 \circ h(x) = h(h^3(x)) = h(x-6) \\ &= (x-6) - 2 = x - 8 = x - 4 \times 2 \end{aligned}$$

Logo, temos que a forma de h^n é

$$\begin{aligned} h^n &= h^{n-1} \circ h(x) = h(h^{n-1}(x)) = h(x - 2(n-1)) \\ &= (x - 2(n-1)) - 2 = x - 2n + 2 - 2 = x - 2n \end{aligned}$$

Vamos provar por indução que, se $h(x) = x - 2$, então

$$h^n = x - 2n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$h^k = x - 2k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$h^{a+1} = x - 2(a+1)$$

Temos que

$$h^{a+1} = h^a \circ h(x) = h(h^a(x))$$

Da H.I., temos que

$$h^a = x - 2a$$

Logo,

$$\begin{aligned} h^{a+1} &= h(h^a(x)) \\ &= h(x - 2a) \\ &= (x - 2a) - 2 \\ &= x - 2(a+1) \end{aligned}$$

Portanto,
$$h^{a+1} = x - 2(a+1)$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$h^0 = x - 2(0)$$

Por um lado,
$$h^0(x) = x$$

Por outro lado,
$$x - 2(0) = x - 0 = x$$

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$
Resposta
Partindo de $h^1 = h^0 \circ h(x) = h(h^0(x)) = h(x)$, temos que h^2 é definido como

$$\begin{aligned} h^2 &= h^1 \circ h(x) = h(h^1(x)) = h(x-s) \\ &= (x-s) - s = x - 2s \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} h^3 &= h^2 \circ h(x) = h(h^2(x)) = h(x-2s) \\ &= (x-2s) - s = x - 3s \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} h^4 &= h^3 \circ h(x) = h(h^3(x)) = h(x-3s) \\ &= (x-3s) - s = x - 4s \end{aligned}$$

Logo, temos que a forma de h^n é

$$\begin{aligned} h^n &= h^{n-1} \circ h(x) = h(h^{n-1}(x)) = h(x - s(n-1)) \\ &= (x - s(n-1)) - s = x - sn + s - s = x - sn \end{aligned}$$

Vamos provar por indução que, se $h(x) = x - s$, então

$$h^n = x - sn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

...

(c) $h(x) = 3x$
Resposta

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$
Resposta

(e) $h(x) = x/2$
Resposta

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$
Resposta

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$
Resposta

93. Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$

onde $k \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

Resposta
Vamos provar por indução que

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$

com $k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.
Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N} - \{0\}$, tal que

$$f^i(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^i} \right\rfloor, \text{ para todo } i \in [1..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$f^{a+1}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{a+1}} \right\rfloor$$

Temos que

$$f^{a+1} = f^a \circ f(x) = f(f^a(x))$$

Da Hipótese Indutiva, temos

$$f^a(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^a} \right\rfloor$$

Logo, temos

$$\begin{aligned}
f^{a+1} &= f(f^a(x)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{x}{k^a} \right\rfloor\right) \\
&= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{k^a} \right\rfloor}{k} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{x}{k^a k} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{x}{k^{a+1}} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$f^1(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^1} \right\rfloor$$

De um lado, temos

$$f^1(x) = f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

De outro lado, temos

$$\left\lfloor \frac{x}{k^1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$$

6 Recorrências

103. Resolva as seguintes recorrências

   (a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1$, para todo $n > 1$
   Resposta
   Do teorema 29, temos que, para todo $n \geq n_0$,

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)$$

   onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ h^k(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \\ m(n) &= 2 \\ s(n) &= 6n - 1 \\ n_0 &= 2 \\ u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} \end{aligned}$$

   Logo,

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{u-1} 2 + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 2 \right) \\ &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(6 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) 2^i \\ &= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i 6 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\ &= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i 6 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - (2^u - 1) \\ &= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 6 \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1 \end{aligned}$$

   Resta determinar o valor de u

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2 \right\} = \lfloor \lg n \rfloor$$

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 6\sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1 \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 6\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f(1) + 6\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1
\end{aligned}
$$

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2$, para todo $n > 1$
Resposta
Do teorema 29, temos que, para todo $n \geq n_0$,

$$
f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\
m(n) &= 2 \\
s(n) &= 3n + 2 \\
n_0 &= 2
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor
$$

e $h^k(n) < n_0$ se, e somente se,

$$
\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor &< 2 \\
\frac{n}{2^k} &< 2 \\
2^{k+1} &> n \\
\lg 2^{k+1} &> \lg n \\
k + 1 &> \lg n \\
k &> \lg n - 1
\end{aligned}
$$

Por isso,

$$
u = \min \{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \} = \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \lg n \rfloor
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{u-1} 2 + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 2 \right) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(3 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2\right) 2^i \\
&= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{u-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor 2^i + 2 \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\
&= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{u-1} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor 2^i + 2(2^u - 1) \\
&= 2^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2^{u+1} - 2
\end{aligned}
$$

Substituindo $u = \lfloor \lg n \rfloor$ na equação,

$$f(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 2$$

$$f(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 2 \right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1,$$

temos:

$$f(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} (f(1) + 2) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \left(2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \right) - 2$$

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3$, para todo $n > 1$
Resposta
Do teorema 29, temos que, para todo $n \geq n_0$,

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)$$

onde

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \\
m(n) &= 6 \\
s(n) &= 2n + 3 \\
n_0 &= 2
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor$$

e $h^k(n) < n_0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor &< 2\\
\frac{n}{6^k} &< 2\\
6^k &> \frac{n}{2}\\
\log_6 6^k &> \log_6 \frac{n}{2}\\
k &> \log_6 \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{u-1} 6 + \sum_{i=0}^{u-1} \left((2\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 3) \prod_{j=0}^{i-1} 6 \right)\\
&= 6^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} (2\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 3) 6^i\\
&= 6^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor\right) + 2\sum_{i=0}^{u-1} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 3\sum_{i=0}^{u-1} 6^i\\
&= 6^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor\right) + 2\sum_{i=0}^{u-1} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 3\left(\frac{6^u - 1}{5}\right)
\end{aligned}$$

Obs: $\sum_{i=0}^{u-1} 6^i$ é uma soma de PG.
Substituindo $u = \left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ na equação,

$$6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + 2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 3\left(\frac{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} - 1}{5}\right)$$

$$f(n) = 6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 2 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + 3\left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} - 1}{5}\right)$$

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1$, para todo $n > 1$
Resposta

A solução é

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \\ h^k(n) &= \left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor \\ m(n) &= 6 \\ s(n) &= 3n - 1 \\ n_0 &= 2 \\ u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} \end{aligned}$$

Como $h^k(n) = \lfloor \frac{n}{6^k} \rfloor$ e $h^k(n) < n_0$, temos:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor &< 2 \\ \frac{n}{6^k} &< 2 \\ 6^k &> \frac{n}{2} \\ k &> \log_6 \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} = \left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 6 = 6^u.$$

E,

$$s(h^i(n)) = 3h^i(n) - 1 = 3(\left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor) - 1.$$

E,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 6 = 6^i.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1}\left(s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))\right)\\
&= f(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor)6^u + \sum_{i=0}^{u-1} 6^i\left(3\left(\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor\right) - 1\right)\\
&= 6^u f(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor) + 3\sum_{i=0}^{u-1} 6^i\left(\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor\right) - \sum_{i=0}^{u-1} 6^i\\
&= 6^u f(\left\lfloor \frac{n}{6^u} \right\rfloor) + 3\sum_{i=0}^{u-1} 6^i\left(\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor\right) - \frac{6^u - 1}{5}\\
&= 6^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\rfloor + 1}}\right\rfloor\right) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\rfloor} 6^i\left(\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor\right) - \frac{6^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\rfloor + 1} - 1}{5}\\
&= 6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor} f(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor}}\right\rfloor) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\rfloor} 6^i\left(\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor\right) - \frac{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor} - 1}{5}
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
f(n) = 6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor} f(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor}}\right\rfloor) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\rfloor} 6^i\left(\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor\right) - \frac{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor} - 1}{5},
$$

para todo $n > 1$.

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor\right) + 2n - 1$, para todo $n > 1$
Resposta
A solução é

$$
f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1}\left(s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))\right)
$$

onde

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor\\
h^k(n) &= \left\lfloor \frac{n}{3^k}\right\rfloor\\
m(n) &= 4\\
s(n) &= 2n - 1\\
n_0 &= 2\\
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}
\end{aligned}
$$

Como $h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{3^k} \right\rfloor$ e $h^k(n) < n_0$, temos:

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{n}{3^k} \right\rfloor &< 2\\ \frac{n}{3^k} &< 2\\ 3^k &> \frac{n}{2}\\ k &> \log_3 \frac{n}{2}\end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} = \left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 4 = 4^u.$$

E,

$$s(h^i(n)) = 2h^i(n) - 1 = 2\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1.$$

E,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 4 = 4^i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1}\left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)\\ &= 4^u f\left(\left\lfloor \frac{n}{3^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 4^i \left(2\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right)\\ &= 4^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 1} 4^i \left(2\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right)\end{aligned}$$

Mas,

$$\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} + \log_3 3 \right\rfloor = \left\lfloor \log_3 \frac{3n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \log_3 n + \log_3 \frac{3}{2} \right\rfloor =$$

$$= \lfloor \log_3 n \rfloor + \left\lfloor \log_3 \frac{3}{2} \right\rfloor = \lfloor \log_3 n \rfloor$$

E,

$$\left\lfloor \frac{n}{3^{\lfloor \log_3 n \rfloor}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = 1$$

Ou seja,

$$f(n) = 4^{\lfloor \log_3 n \rfloor} f(1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_3 n \rfloor - 1} 4^i \left(2 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right),$$

para todo $n > 1$.

104. Resolva as seguintes recorrências

(a) $f(n) = f(n-1) + n$, para todo $n > 0$.
Resposta
A solução é

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 1 \\ s(n) &= n \\ n_0 &= 1 \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \end{aligned}$$

Como

$$h^2(n) = h(h(n)) = h(n-1) = (n-1) - 1 = n - 2$$

e

$$h^3(n) = h(h^2(n)) = h(n-2) = (n-2) - 1 = n - 3$$

Logo, temos que $h^k(n) = n - k$,
e como $h^k(n) < n_0$, temos:

$$\begin{aligned} n - k &< 1 \\ n - k &\leq 0 \\ n &\leq k \end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} = n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\
&= f(h^n(n)) + \sum_{i=0}^{n-1} s(h^i(n)) \\
&= f(n-n) + (n-1)\frac{n}{2} \\
&= f(0) + \frac{n^2-n}{2} \\
&= \frac{n^2-n}{2}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(n) = \frac{n^2-n}{2}, \text{ para todo } n > 0.$$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + 1$, para todo $n > 0$.
Resposta
A solução é

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)$$

onde

$$\begin{aligned}
h(n) &= n-1 \\
h^k(n) &= n-k \\
m(n) &= 2 \\
s(n) &= 1 \\
n_0 &= 1 \\
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}
\end{aligned}$$

Como $h^k(n) = n-k$ e $h^k(n) < n_0$, temos:

$$\begin{aligned}
n-k &< 1 \\
n-k &\leq 0 \\
n &\leq k
\end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} = n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1}\left(s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))\right)\\
&= f(n-u)\prod_{i=0}^{u-1} 2 + \sum_{i=0}^{u-1}\left(1\prod_{j=0}^{i-1} 2\right)\\
&= f(n-n)2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i\\
&= f(0)2^n + 2^n - 1\\
&= 2^n - 1
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n > 0.$$

(c) $f(n) = 2f(n-1) + n^2$, para todo $n \geq 1$.
Resposta
A solução é

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1}\left(s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))\right)$$

onde

$$\begin{aligned}
h(n) &= n-1\\
h^k(n) &= n-k\\
m(n) &= 2\\
s(n) &= n^2\\
n_0 &= 1\\
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}
\end{aligned}$$

Como $h^k(n) = n-k$ e $h^k(n) < n_0$, temos:

$$\begin{aligned}
n-k &< 1\\
n-k &\leq 0\\
n &\leq k
\end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} = n.$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

E,

$$s(h^i(n)) = (h^i(n) - 1)^2 = (n - i - 1)^2.$$

E,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right) \\
&= f(n-u)2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left((n-i-1)^2 2^i \right) \\
&= f(n-n)2^n + (-3 + 3(2^n) - 2n - n^2) \\
&= f(0)2^n - n^2 - 2n + 3(2^n) - 3
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(n) = f(0)2^n - n^2 - 2n + 3(2^n) - 3, \text{ para todo } n > 0.$$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n$, para todo $n > 1$.
Resposta
A solução é

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right)$$

onde

$$\begin{aligned}
h(n) &= n - 1 \\
h^k(n) &= n - k \\
m(n) &= 2 \\
s(n) &= n \\
n_0 &= 2 \\
u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}
\end{aligned}$$

Como $h^k(n) = n - k$ e $h^k(n) < n_0$, temos:

$$\begin{aligned}
n - k &< 2 \\
n - k &\leq 1 \\
n - 1 &\leq k
\end{aligned}$$

Por isso,

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\} = n - 1.$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

E,

$$s(h^i(n)) = h^i(n) - 1 = n - i - 1.$$

E,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \right) \\
&= f(n-u)2^u + \sum_{i=0}^{u-1} (n-i-1)2^i \\
&= f(n-(n-1))2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1)2^i \\
&= f(1)2^{n-1} + 2^n - 1 - n
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n > 0.$$

105. **FAZER** Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

   (a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.
   Resposta

   $$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

   (b) Resolva esta recorrência.
   Resposta

106. Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma progressão aritmética se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

   $$f(i+1) - f(i) = r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

   (b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

6.1 Recorrências Lineares Homogêneas

120. Resolva as seguintes recorrências

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Resposta
Seja $\mathcal{R}(3, -1, 3)$ o conjunto de funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita, de forma homogênea, como:

$$f(n) - 3f(n-1) + f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Logo, $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 3X^2 + X - 3.$$

Resta encontrar as raízes deste PC.
Tem-se que o PC é divisível por 3, i e -i, ou seja

$$X^3 - 3X^2 + X - 3 = (X - 3)(X - i)(X + i).$$

Então, o conjunto $\{n^0 3^n, n^0 i^n, n^0 (-i)^n\} = \{3^n, i^n, (-i)^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(3, -1, 3)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(3, -1, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 3^n, i^n, $(-i)^n$, isto é, existem a, b, $c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a3^n + bi^n + c(-i)^n.$$

Os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= a3^0 + bi^0 + c(-i)^0 = 3 \\ f(1) &= a3^1 + bi^1 + c(-i)^1 = 3 \\ f(2) &= a3^2 + bi^2 + c(-i)^2 = 7 \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ a &= 3 - b - c \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} 3a + bi + c(-i) &= 3 \\ 3(3 - b - c) + bi + c(-i) &= 3 \\ 9 - 3b - 3c + bi - ci &= 3 \\ b(i - 3) &= -6 + 3c + ci \\ b &= \frac{-6 + 3c + ci}{i - 3} \end{aligned}$$

E,

$$\begin{gathered}
\text{Substituindo a:}\\
9(3-b-c)+bi^2+ci^2=7\\
27-9b-9c+b1+c1=7\\
-8b-8c=-20\\
-8c=8b-20\\
c=\frac{20-8b}{8}\\
c=\frac{5}{2}-b\\
\text{Substituindo b:}\\
c=\frac{5}{2}-\frac{-6+3c+ci}{i-3}\\
c=
\end{gathered}$$

CONCLUIR
Portanto,

$$a=1, b=2, c=-1$$

E por isso,

$$f(n)=2^n+2n.2^n-n^2.2^n, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

(c)

$$f(n)=\begin{cases}1, & \text{se } n=0,\\ 4, & \text{se } n=1 \text{ ou } n=2,\\ 6f(n-1)-12f(n-2)+8f(n-3), & \text{se } n\geq 3.\end{cases}$$

Resposta
Seja $\mathcal{R}(6,-12,8)$ o conjunto de funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n\geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita, de forma homogênea, como:

$$f(n)-6f(n-1)+12f(n-2)-8f(n-3)=0.$$

Logo, $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3-6X^2+12X-8.$$

Resta encontrar as raízes deste PC.
Utilizando do dispositivo prático de Briot-Ruffini, determinaremos as raízes do polinômio

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -6 & 12 & -8\\ \hline
2 & 1 & -4 & 4 & 0\\
2 & 1 & -2 & 0 & \\
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

Então, tem-se que o PC é divisível por 2, 2 e 2, ou seja

$$X^3 - 6X^2 + 12X - 8 = (X-2)(X-2)(X-2) = (X-2)^3.$$

Então, o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 2^n\} = \{2^n, n2^n, n^2 2^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(6, -12, 8)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(6, -12, 8)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 2^n$, $n^1 2^n$ e $n^2 2^n$, isto é, existem a, b, $c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a2^n + bn2^n + cn^2 2^n.$$

Os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned}
f(0) &= a.2^0 + b.0.2^0 + c.0^2 2^0 = 1\\
f(1) &= a.2^1 + b.1.2^1 + c.1^2 2^1 = 4\\
f(2) &= a.2^2 + b.2.2^2 + c.2^2 2^2 = 4
\end{aligned}$$

Logo,

$$a + 0 + 0 = 1 \implies a = 1$$

$$2 + 2b + 2c = 4 \implies 2(1 + b + c) = 4 \implies b + c = 1 \implies b = 1 - c$$

$$4 + 8(1-c) + 16c = 4 \implies 4 + 8 - 8c + 16c = 4 \implies c = -1$$

Portanto,

$$a = 1, b = 2, c = -1$$

E por isso,

$$f(n) = 2^n + 2n.2^n - n^2.2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

121. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1,\\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta
Podemos reescrever a equação de recorrência como

$$\begin{aligned}
f(n) &= nf(n-1) + n(n-1)f(n-2)\\
&= \frac{n!}{(n-1)!}f(n-1) + \frac{n!}{(n-2)!}f(n-2)\\
&= n!\left(\frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{f(n-2)}{(n-2)!}\right)
\end{aligned}$$

se, e somente se

$$\frac{f(n)}{n!} = \frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{f(n-2)}{(n-2)!}.$$

Utilizando a transformação sugerida, temos:

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2).$$

A equação de recorrência pode ser reescrita, de forma homogênea, como:

$$g(n) - g(n-1) - g(n-2) = 0.$$

Logo, $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo polinômio característico (PC) é

$$X^2 - X - 1.$$

Resta encontrar as raízes deste PC.
Utilizando Bhaskara, temos

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Então, tem-se que as raízes do PC são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, podemos ser escrever $g(n)$ como uma combinação linear de r_1^n e r_2^n, isto é, existem a, $b \in \mathbb{C}$ tais que

$$g(n) = ar_1^n + br_2^n.$$

Os valores de a e b podem ser determinados pelo sistema

$$g(0) = ar_1^0 + br_2^0 = \frac{f(0)}{0!} = 0$$
$$g(1) = ar_1^1 + br_2^1 = \frac{f(1)}{1!} = 1$$

Logo,

$$a + b = 0 \implies a = -b$$

E,

$$\begin{gathered} ar_1 + br_2 = 1 \\ -br_1 + br_2 = 1 \\ b(r_2 - r_1) = 1 \\ b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{gathered}$$

Portanto,

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Logo,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

se, e somente se,

$$\frac{f(n)}{n!} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Portanto,

$$f(n) = \frac{n!}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(b) **FAZER**

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta

Podemos reescrever a equação de recorrência como

$$f(n)^2 = 1 + f(n-1)^2$$

Utilizando a transformação sugerida, temos:

$$g(n) = g(n-1) + 1.$$

$g(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)H,$$

onde H é o PC de uma RLH satisfeita por

$$h(n) = 1.$$

Como h satisfaz a recorrência

$$h(n) = h(n-1),$$

então h satisfaz uma RLH cujo PC é

$$H = (X - 1)$$

e daí, g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 1)$$

e então,

$$g(n) = a1^n + bn1^n = a + bn$$

onde a e b são dados por

$$\begin{aligned} g(0) &= a = 0 \\ g(1) &= a + b = 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = 0 \text{ e } b = 1$$

Ou seja,

$$g(n) = n.$$

Assim,

$$f(n) = \sqrt{g(n)} = \sqrt{n}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(d) **FAZER**

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta

122. Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

Resposta
Seja $\mathcal{R}(7, -19, 25, -16, 4)$ o conjunto de funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n > 4$. A equação de recorrência pode ser reescrita, de forma homogênea, como:

$$f(n) - 7f(n-1) + 19f(n-2) - 25f(n-3) + 16f(n-4) - 4f(n-5) = 0.$$

Logo, $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo polinômio característico (PC) é

$$X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4.$$

Resta encontrar as raízes deste PC.
Utilizando do dispositivo prático de Briot-Ruffini, determinaremos as raízes do polinômio

2	1	-7	19	-25	16	-4
2	1	-5	9	-7	2	0
1	1	-3	3	-1	0	
1	1	-2	1	0		
1	1	-1	0			
	1	0				

Então, tem-se que o PC é divisível por 2, 2, 1, 1 e 1 ou seja

$$X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4 =$$
$$(X-2)(X-2)(X-1)(X-1)(X-1) =$$
$$(X-2)^2(X-1)^3$$

Então, o conjunto

$$\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^0 1^n, n^1 1^n, n^2 1^n\} = \{2^n, n2^n, 1, n, n^2\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -19, 25, -16, 4)$.
Portanto, $f \in \mathcal{R}(7, -19, 25, -16, 4)$ pode ser escrita como uma combinação linear, isto é, existem a, b, c, d, $e \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a2^n + bn2^n + c + dn + en^2.$$

Os valores de a, b, c, d e e podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned}
f(0) &= a2^0 + b02^0 + c + d0 + e0^2 = 1,\\
f(1) &= a2^1 + b12^1 + c + d1 + e1^2 = 1,\\
f(2) &= a2^2 + b22^2 + c + d2 + e2^2 = 1,\\
f(3) &= a2^3 + b32^3 + c + d3 + e3^2 = 1,\\
f(4) &= a2^4 + b42^4 + c + d4 + e4^2 = 1
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f(0) &= a + c = 1,\\
f(1) &= 2a + 2b + c + d + e = 1,\\
f(2) &= 4a + 8b + c + 2d + 4e = 1,\\
f(3) &= 8a + 24b + c + 3d + 9e = 1,\\
f(4) &= 16a + 64b + c + 4d + 16e = 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a = 0, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0$$

E por isso,

$$f(n) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

6.2 Recorrências Lineares não Homogêneas

123. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^0 1^n.$$

cujo PC é

$$G = (X-1)$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1) = (X-1)^2$$

e então,

$$f(n) = a1^n + bn1^n = a + bn,$$

onde a e b são dados por

$$f(0) = a = 0$$
$$f(1) = a + b = 1$$

Portanto,

$$a = 0 \text{ e } b = 1$$

Assim,

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^0 1^n.$$

cujo PC é

$$G = (X - 1)$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 2)(X - 1)$$

e então,

$$f(n) = a1^n + b2^n = a + b2^n,$$

onde a e b são dados por

$$f(0) = a + b = 0$$
$$f(1) = a + 2b = 1$$

$$a = -b$$
$$-b + 2b = 1 \implies b = 1$$

Portanto,

$$a = -1 \text{ e } b = 1$$

Assim,

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Como ainda,

$$f(0) = 2^0 - 1 = 0,$$

então

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 1)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^1 1^n.$$

cujo PC é

$$G = (X - 1)^2$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 1)^2 = (X - 1)^3$$

e então,

$$f(n) = a1^n + bn1^n + cn^2 1^n = a + bn + cn^2,$$

onde a, b e c são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b0 + c0^2 = 0 \\ f(1) &= a + b + c = 1 \\ f(2) &= a + 2b + 4c = 3 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} a + 0 + 0 &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1 \\ b + c &= 1 \\ b &= 1 - c \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} a + 2b + 4c &= 3 \\ 2(1 - c) + 4c &= 3 \\ 2c &= 1 \\ c &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = 0, b = \frac{1}{2} \text{ e } c = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$f(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n > 0.$$

Como ainda,

$$f(0) = \frac{0(0+1)}{2} = 0,$$

então

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^1 1^n.$$

cujo PC é

$$G = (X-1)^2$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-2)(X-1)^2$$

e então,

$$f(n) = a2^n + b1^n + cn1^n = a2^n + b + cn,$$

onde a, b e c são dados por

$$f(0) = a2^0 + b + c0 = 0$$
$$f(1) = a2^1 + b + c = 1$$
$$f(2) = a2^2 + b + 2c = 4$$

Então,

$$a + b + 0 = 0$$
$$a = -b$$

E,

$$2a + b + c = 1$$
$$2(-b) + b + c = 1$$
$$-b = 1 - c$$
$$b = c - 1$$

E,

$$4a + b + 2c = 4$$
$$4(-b) + b + 2c = 4$$
$$-3b + 2c = 4$$
$$-3(c-1) + 2c = 4$$
$$-3c + 3 + 2c = 4$$
$$-c = 1$$
$$c = -1$$

Portanto,

$$a = 2, b = -2 \text{ e } c = -1$$

Assim,

$$f(n) = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n > 0.$$

Como ainda,

$$f(0) = 2^{0+1} - 0 - 2 = 2 - 2 = 0,$$

então

$$f(n) = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^2 1^n.$$

cujo PC é

$$G = (X - 1)^3$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 2)(X - 1)^3$$

e então,

$$f(n) = a2^n + b1^n + cn1^n + dn^2 1^n = a2^n + b + cn + dn^2,$$

onde a, b, c e d são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= a2^0 + b + c0 + d0^2 \\ f(1) &= a2^1 + b + c1 + d1^2 \\ f(2) &= a2^2 + b + c2 + d2^2 \\ f(3) &= a2^3 + b + c3 + d3^2 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b \\ 2f(0) + 1 &= 2a + b + c + d \\ 2f(1) + 4 &= 4a + b + 2c + 4d \\ 2f(2) + 9 &= 8a + b + 3c + 9d \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f(0) &= a+b \\
2f(0)+1 &= 2a+b+c+d \\
4f(0)+6 &= 4a+b+2c+4d \\
8f(0)+21 &= 8a+b+3c+9d
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(0) &= a+b \\
a &= f(0)-b
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
2f(0)+1 &= 2(f(0)-b)+b+c+d \\
1 &= -b+c+d
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
4f(0)+6 &= 4(f(0)-b)+b+2c+4d \\
6 &= -3b+2c+4d
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
8f(0)+21 &= 8(f(0)-b)+b+3c+9d \\
21 &= -7b+3c+9d
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a = f(0)+6, b=-6, c=-4 \text{ e } d=-1.$$

Então,

$$f(n) = (f(0)+6)2^n - 6 - 4n - n^2, \text{ para todo } n \geq 1.$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X^2-3)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^0 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

cujo PC é

$$G = \left(X - \frac{1}{3}\right)$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X^2 - 3)\left(X - \frac{1}{3}\right) = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})\left(X - \frac{1}{3}\right)$$

e então,

$$f(n) = a\sqrt{3}^n + b(-\sqrt{3})^n + c\left(\frac{1}{3}\right)^n = a\sqrt{3}^n + b(-\sqrt{3})^n + \frac{c}{3^n},$$

onde a, b e c são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= a\sqrt{3}^0 + b(-\sqrt{3})^0 + \frac{c}{3^0} = 1 \\ f(1) &= a\sqrt{3}^1 + b(-\sqrt{3})^1 + \frac{c}{3^1} = 1 \\ f(2) &= a\sqrt{3}^2 + b(-\sqrt{3})^2 + \frac{c}{3^2} = \frac{28}{9} \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= a + b + c = 1 \\ f(1) &= a\sqrt{3} - b\sqrt{3} + \frac{c}{3} = 1 \\ f(2) &= 3a + 3b + \frac{c}{9} = \frac{28}{9} \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = \frac{27}{26} - \frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}, b = \frac{243 - 79\sqrt{3}}{468} \text{ e } c = -\frac{1}{26}.$$

Então,

$$f(n) = \left(\frac{27}{26} - \frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}\right)\sqrt{3}^n + \left(\frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}\right)(-\sqrt{3})^n - \frac{1}{26 * 3^n}$$

para todo $n > 1$.
Como ainda,

$$f(0) = \left(\frac{27}{26} - \cancel{\frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}}\right) + \left(\cancel{\frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}}\right) - \frac{1}{26} = \frac{26}{26} = 1,$$

então

$$f(n) = \left(\frac{27}{26} - \frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}\right)\sqrt{3}^n + \left(\frac{243 - 79\sqrt{3}}{468}\right)(-\sqrt{3})^n - \frac{1}{26 * 3^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(g)
$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Resposta
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X^2 - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1n^0 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

cujo PC é

$$G = \left(X - \frac{1}{2}\right)$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X^2 - 2)\left(X - \frac{1}{2}\right) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})\left(X - \frac{1}{2}\right)$$

e então,

$$f(n) = a\sqrt{2}^n + b(-\sqrt{2})^n + c\left(\frac{1}{2}\right)^n = a\sqrt{2}^n + b(-\sqrt{2})^n + \frac{c}{2^n},$$

onde a, b e c são dados por

$$f(0) = a\sqrt{2}^0 + b(-\sqrt{2})^0 + \frac{c}{2^0} = 1$$
$$f(1) = a\sqrt{2}^1 + b(-\sqrt{2})^1 + \frac{c}{2^1} = 1$$
$$f(2) = a\sqrt{2}^2 + b(-\sqrt{2})^2 + \frac{c}{2^2} = \frac{9}{4}$$

isto é,

$$f(0) = a + b + c = 1$$
$$f(1) = a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + \frac{c}{2} = 1$$
$$f(2) = 2a + 2b + \frac{c}{4} = \frac{9}{4}$$

Portanto,

$$a = \frac{8}{7} - \frac{32 - 15\sqrt{2}}{56}, b = \frac{32 - 15\sqrt{2}}{56} \text{ e } c = -\frac{1}{7}$$

Assim,

$$f(n) = \left(\frac{8}{7} - \frac{32 - 15\sqrt{2}}{56}\right)\sqrt{2}^n + \left(\frac{32 - 15\sqrt{2}}{56}\right)(-\sqrt{2})^n - \frac{1}{7 * 2^n},$$

para todo $n > 1$.
Como ainda,

$$f(0) = \left(\frac{8}{7} - \cancel{\frac{32 - 15\sqrt{2}}{56}}\right) + \left(\cancel{\frac{32 - 15\sqrt{2}}{56}}\right) - \frac{1}{7} = 1,$$

então

$$f(n) = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

124.

6.3 Somatórios

131. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2$$

Resposta
Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n^2 = s(n-1) + n^2,$$

onde

$$g(n) = n^2,$$

e

$$g(n) = 1n^2 1^n.$$

Temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^3.$$

Logo, temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^3.$$

e então,

$$s(n) = a1^n + bn1^n + cn^2 1^n + dn^3 1^n = a + bn + cn^2 + dn^3,$$

onde a, b, c e d são dados por

$$\begin{aligned}
s(0) &= a + b0 + c0^2 + d0^3 = 0\\
s(1) &= a + b1 + c1^2 + d1^3 = 1\\
s(2) &= a + b2 + c2^2 + d2^3 = 5\\
s(3) &= a + b3 + c3^2 + d3^3 = 14
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
s(0) &= a = 0,\\
s(1) &= a + b + c + d = 1,\\
s(2) &= a + 2b + 4c + 8d = 5,\\
s(3) &= a + 3b + 9c + 27d = 14
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a = 0, b = \frac{1}{6}, c = \frac{1}{2} \text{ e } d = \frac{1}{3}$$

Assim,

$$s(n) = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n} i^3$$

Resposta
Como
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3 = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n^3 = s(n-1) + n^3,$$
onde
$$g(n) = n^3,$$
e
$$g(n) = 1n^3 1^n.$$
Temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é
$$G = (X-1)^4.$$
Logo, temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é
$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^4.$$
e então,

$s(n) = a1^n + bn1^n + cn^2 1^n + dn^3 1^n + en^4 1^n = a + bn + cn^2 + dn^3 + en^4,$

onde a, b, c, d e e são dados por
$$\begin{aligned} s(0) &= a + b0 + c0^2 + d0^3 + e0^4 = 0, \\ s(1) &= a + b1 + c1^2 + d1^3 + e1^4 = 1, \\ s(2) &= a + b2 + c2^2 + d2^3 + e2^4 = 9, \\ s(3) &= a + b3 + c3^2 + d3^3 + e3^4 = 36, \\ s(4) &= a + b4 + c4^2 + d4^3 + e4^4 = 100 \end{aligned}$$
isto é,
$$\begin{aligned} s(0) &= a = 0, \\ s(1) &= a + b + c + d + e = 1, \\ s(2) &= a + 2b + 4c + 8d + 16e = 9, \\ s(3) &= a + 3b + 9c + 27d + 81e = 36, \\ s(4) &= a + 4b + 16c + 64d + 256e = 100 \end{aligned}$$
Portanto,
$$a = 0, b = 0, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2} \text{ e } e = \frac{1}{4}$$
Assim,
$$s(n) = \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$$

Resposta
Como

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1) = \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i.$$

i. Como

$$s^{'}(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n^2 = s^{'}(n-1) + n^2,$$

onde

$$g(n) = n^2,$$

e

$$g(n) = 1n^2 1^n.$$

Temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^3.$$

Logo, temos que a função $s^{'}$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^3.$$

e então,

$$s^{'}(n) = a1^n + bn1^n + cn^2 1^n + dn^3 1^n = a + bn + cn^2 + dn^3,$$

onde a, b, c e d são dados por

$$\begin{aligned}
s^{'}(0) &= a + b0 + c0^2 + d0^3 = 0,\\
s^{'}(1) &= a + b1 + c1^2 + d1^3 = 1,\\
s^{'}(2) &= a + b2 + c2^2 + d2^3 = 5,\\
s^{'}(3) &= a + b3 + c3^2 + d3^3 = 14
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
s^{'}(0) &= a = 0,\\
s^{'}(1) &= a + b + c + d = 1,\\
s^{'}(2) &= a + 2b + 4c + 8d = 5,\\
s^{'}(3) &= a + 3b + 9c + 27d = 14
\end{aligned}$$

Portanto,

$$a = 0, b = \frac{1}{6}, c = \frac{1}{2} \text{ e } d = \frac{1}{3}$$

Assim,

$$s^{'}(n) = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}.$$

ii. Como

$$s^{"}(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n = s^{"}(n-1) + n,$$

onde

$$g(n) = n,$$

e

$$g(n) = 1n^1 1^n.$$

Temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^2.$$

Logo, temos que a função $s^{"}$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2.$$

e então,

$$s^{"}(n) = a1^n + bn1^n + cn^2 1^n = a + bn + cn^2,$$

onde a, b, c e d são dados por

$$\begin{aligned} s^{"}(0) &= a + b0 + c0^2 = 0, \\ s^{"}(1) &= a + b1 + c1^2 = 1, \\ s^{"}(2) &= a + b2 + c2^2 = 3 \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} s^{"}(0) &= a = 0, \\ s^{"}(1) &= a + b + c = 1, \\ s^{"}(2) &= a + 2b + 4c = 3 \end{aligned}$$

Portanto,

$$a = 0, b = \frac{1}{2} \text{ e } c = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$s^{"}(n) = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}.$$

Retornando a equação original, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i-1) &= \left(\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}\right) - \left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}\right)\\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}\\ &= \frac{n(n^2-1)}{3}\end{aligned}$$

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}$$

Resposta
Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + \frac{n}{2^n} = s(n-1) + \frac{n}{2^n},$$

onde

$$g(n) = \frac{n}{2^n},$$

e

$$g(n) = 1n^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Logo, temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)\left(X - \frac{1}{2}\right)^2.$$

e então,

$$s(n) = a1^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n + cn\left(\frac{1}{2}\right)^n = a + \frac{b}{2^n} + \frac{cn}{2^n},$$

onde a, b e c são dados por

$$\begin{aligned}s(0) &= a + \frac{b}{2^0} + \frac{c0}{2^0} = 0,\\ s(1) &= a + \frac{b}{2^1} + \frac{c1}{2^1} = \frac{1}{2},\\ s(2) &= a + \frac{b}{2^2} + \frac{c2}{2^2} = 1\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
s(0) &= a + b = 0, \\
s(1) &= a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}, \\
s(2) &= a + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} = 1
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$a = 2, b = -2 \text{ e } c = -1$$

Assim,

$$s(n) = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

7 Fundamentos de Contagem

142. Qual o número de

(a) múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100?
Resposta
O conjunto dos múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100 é

$$M_{3,100} = \{3, 6, ..., 3u\},$$

onde u é o maior inteiro menor ou igual a 100, isto é,

$$u = \max\{j \in \mathbb{N} \mid 3j \leq 100\}$$

O número de múltiplos de 3 menores ou iguais a 100 é $|M_{3,100}| = u$.
Como

$$u = \max\left\{j \in \mathbb{N} \mid j \leq \frac{100}{3}\right\}$$

então,

$$u = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor$$

ou seja,

$$|M_{3,100}| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$$

(b) múltiplos positivos de 4 menores ou iguais a 500?
Resposta
O conjunto dos múltiplos positivos de 4 menores ou iguais a 500 é

$$M_{4,500} = \{4, 8, ..., 4u\},$$

onde u é o maior inteiro menor ou igual a 500, isto é,

$$u = \max\{j \in \mathbb{N} \mid 4j \leq 500\}$$

O número de múltiplos de 4 menores ou iguais a 500 é $|M_{4,500}| = u$.
Como

$$u = \max\left\{j \in \mathbb{N} \mid j \leq \frac{500}{4}\right\}$$

então,

$$u = \left\lfloor \frac{500}{4} \right\rfloor$$

ou seja,

$$|M_{4,500}| = \left\lfloor \frac{500}{4} \right\rfloor = 125$$

(c) múltiplos positivos de n menores ou iguais a k?
Resposta
O conjunto dos múltiplos positivos de n menores ou iguais a k é

$$M_{n,k} = \{1n, 2n, ..., un\},$$

onde u é o maior inteiro menor ou igual a k, isto é,

$$u = \max\{j \in \mathbb{N} \mid jn \leq k\}$$

O número de múltiplos de n menores ou iguais a k é $|M_{n,k}| = u$.
Como

$$u = \max\left\{j \in \mathbb{N} \mid j \leq \frac{k}{n}\right\}$$

então,

$$u = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$$

ou seja,

$$|M_{n,k}| = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor.$$

8 União e Prod. Cartesiano

145. Quantos divisores naturais tem o número 360?
Resposta
Sendo D o conjunto dos divisores naturais de 360, queremos descobrir $|D|$. Os divisores primos de 360 são 2, 3 e 5, pois

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

Cada divisor de 360 corresponde a um trio de expoentes (a, b, c) onde

$$0 \leq a \leq 3,$$

$$0 \leq b \leq 2,$$

$$0 \leq c \leq 1,$$

isto é,

$$a \in [0..3],$$

$$b \in [0..2],$$

$$c \in [0..1],$$

ou seja,

$$(a, b, c) \in [0..3] \times [0..2] \times [0..1].$$

Noutras palavras, a função $(a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ é uma bijeção $[0..3] \times [0..2] \times [0..1] \mapsto D$ e consequentemente

$$|D| = |[0..3] \times [0..2] \times [0..1]| = |[0..3]| \cdot |[0..2]| \cdot |[0..1]| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

147. (a) Dê uma expressão para o número de divisores ímpares de um número dado n.
Resposta
A quantidade de divisores ímpares de um número é obtida somando-se uma unidade aos expoentes dos fatores primos ímpares e multiplicando os resultados.
Exemplo: $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$
Número de divisores ímpares $= (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4$.

(b) Dê uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n.
Resposta
A quantidade de divisores pares de um número é obtida somando-se uma unidade aos expoentes dos fatores primos ímpares e multiplicando os resultados pelo expoente do fator primo par.
Exemplo: $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$
Número de divisores ímpares $= (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot 3 = 12$.

(c) Generalize a resposta dos itens anteriores dando uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n que são e que não são múltiplos de um primo p, também dado.
Resposta

148. Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

Resposta
Sendo

$$I = \{n \in [1..1000] \mid n \text{ é ímpar}\},$$
$$Q = \{n \in [1..1000] \mid n \text{ é quadrado de inteiro}\},$$

queremos determinar $|I \cup Q|$.
Como

$$|I \cup Q| = |I| + |Q| - |I \cap Q|$$

e

$$|I| = \frac{|[1..1000]|}{2} = \frac{1000}{2} = 500$$

e $n \in Q \iff \sqrt{n} \leq \sqrt{1000}$ e

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{1000} < 32$$

ou seja,

$$Q = \{n \mid \sqrt{n} \in [1..31]\}.$$

Portanto, $|Q| = 31$ e

$$I \cap Q = \{n \in Q \mid n \in I\},$$

logo,

$$|I \cap Q| = \left\lfloor \frac{|[1..31]|}{2} \right\rfloor + 1 = 16,$$

daí,

$$|I \cup Q| = |I| + |Q| - |I \cap Q| = 500 + 31 - 16 = 515.$$

E a forma geral:

$$|I \cup Q| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \lfloor \sqrt{n} \rfloor - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} + 1 \right\rfloor.$$

149. Uma técnica de cálculo de números em ponto flutuante que permite um maior controle da propagação de erros de precisão é a chamada *aritmética intervalar*. Em vez de fazer os cálculos com números, usa-se intervalos fechados para os cálculos.

Por exemplo, em vez de computar $\pi + e$ e obter um valor aproximado do resultado, computa-se a soma

$$[3.140 \times 10^1, 3.141 \times 10^1] + [2.780 \times 10^1, 2.781 \times 10^1]$$

de intervalos que contém os somandos e obtém-se como resultado o intervalo $[5.920 \times 10^1, 5.922 \times 10^1]$ que seguramente contém $\pi + e$. Com isso sabe-se que qualquer número neste intervalo difere de no máximo 10^{-3} de $\pi + e$, ou seja, o erro de aproximação é controlado.

Se a quantidade de números distintos representáveis em ponto flutuante é n, quantos intervalos diferentes é possível representar?

Resposta
Seja F o conjunto dos números representáveis em ponto flutuante, então o conjunto de intervalos representáveis é

$$I = \{(a, b) \in F^2 \mid a \leq b\}.$$

Fazendo $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ com $a_1 < \ldots < a_n$, temos

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=i}^{n} \{(a_i, a_j)\},$$

e

$$|I| = \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{j=i}^{n} \{(a_i, a_j)\} \right| = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \bigcup_{j=i}^{n} \{(a_i, a_j)\} \right|,$$

NÃO ENTENDI

9 Sequências

153. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?

Resposta

O lançamento de uma moeda pode resultar em cara ou coroa. Logo, uma sequência de n lançamentos de uma moeda corresponde a uma sequência de tamanho n sobre o conjunto $\{K, C\}$, cujo tamanho é dado por

$$|\{K, C\}^n| = |\{K, C\}|^n = 2^n.$$

(b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

Resposta

Uma sequência de até n lançamentos de uma moeda corresponde a uma sequência de tamanho até n sobre o conjunto $\{K, C\}$, cujo tamanho é dado por

$$\frac{|\{K, C\}|^{n+1} - 1}{|\{K, C\}| - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

154. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de um dado?

Resposta

O lançamento de um dado pode resultar em 6 números diferentes. Logo, uma sequência de n lançamentos de um dado corresponde a uma sequência de tamanho n sobre o conjunto $\{1..6\}$, cujo tamanho é dado por

$$|\{1..6\}^n| = |\{1..6\}|^n = 6^n.$$

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

Resposta

Uma sequência de até n lançamentos de um dado corresponde a uma sequência de tamanho até n sobre o conjunto $\{1..6\}$, cujo tamanho é dado por

$$\frac{|\{1..6\}|^{n+1} - 1}{|\{1..6\}| - 1} = \frac{6^{n+1} - 1}{6 - 1} = \frac{6^{n+1} - 1}{5}.$$

155. O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

Resposta

Fazendo

$$A = \text{conjunto das letras do alfabeto},$$
$$V = \text{conjunto dos verbetes do dicionário}.$$

A quantidade de palavras com tamanho até 46 é dada por

$$\frac{|A|^{46+1}-1}{|A|-1} = \frac{26^{47}-1}{26-1} = \frac{26^{47}-1}{25} = 1,27 \times 10^{65} \text{ palavras.}$$

A probabilidade da palavra ser um verbete do dicionário é dada por:

$$\frac{|V|}{1,27 \times 10^{65}} = \frac{228500}{1,27 \times 10^{65}} = 1,8 \times 10^{-60}$$

156. Um palíndromo sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.
Resposta:
aaaa, abba, acca, baab, bbbb, bccb, caac, cbbc, cccc.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?
Resposta:
Cada palíndromo de tamanho k sobre um conjunto de n elementos corresponde a uma palavra de tamanho $\lceil k/2 \rceil$ sobre este conjunto. Existem portanto $n^{\lceil k/2 \rceil}$ tais palíndromos.

157. Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3 , diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 têm 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

Resposta:
Sendo

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{conjunto dos pacotes } T_1, \\ P_2 &= \text{conjunto dos pacotes } T_2, \\ P_3 &= \text{conjunto dos pacotes } T_3, \end{aligned}$$

temos que a quantidade de pacotes de cada tipo é dada por:

$$\begin{aligned} |P_1| &= |\{0,1\}^4| = |\{0,1\}|^4 = 2^4 = 16, \\ |P_2| &= |\{0,1\}^8| = |\{0,1\}|^8 = 2^8 = 256, \\ |P_3| &= |\{0,1\}^{10}| = |\{0,1\}|^{10} = 2^{10} = 1024, \end{aligned}$$

Portanto, a quantidade de pacotes distintos desse protocolo é

$$|P_1| + |P_2| + |P_3| = 16 + 256 + 1024 = 1306.$$

158. O endereço de um dispositivo na Internet (endereço IP) é um número de 4 bytes.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?
Resposta:
4 bytes são 4×8 bits $= 32$ bits. Logo, temos que o conjunto de IP possíveis tem tamanho dado por:

$$|\{0,1\}^{32}| = |\{0,1\}|^{32} = 2^{32} \text{ endereços de IP possíveis.}$$

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?
Resposta:
A primeira faixa tem variação nos 3 últimos bytes, ou seja, variação em 24 bits. Logo, o tamanho da faixa é dado por:

$$|\{0,1\}|^{24} = 2^{24} = 16777216.$$

A segunda faixa tem variação nos 2 últimos bytes e ainda nos 4 bits da direita no segundo byte, ou seja, variação em 20 bits. Logo, o tamanho da faixa é dado por:

$$|\{0,1\}|^{20} = 2^{20} = 1048576.$$

A terceira e quarta faixas tem variação nos 2 últimos bytes, ou seja, variação em 16 bits. Logo, o tamanho da faixa é dado por:

$$|\{0,1\}|^{16} = 2^{16} = 65536.$$

Logo, o número de IPs não-reservados é:

$$2^{32} - (2^{24} + 2^{20} + 2 \times 2^{16}) = 4294967296 - 17956864 = 4277010432.$$

159. Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como endereço MAC que é um número de 48 bits. Se a inclusão digital for um sucesso absoluto, quantas interfaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

Resposta:
Considerando que o planeta tenha 7 bilhões de pessoas e que podem existir 2^{48} endereços MAC distintos, temos

$$\frac{2^{48}}{7 \times 10^9} = 40210,711$$

Portanto, poderiam ser dados para cada habitante do planeta aproximadamente 40210 endereços MAC.

160. Em um jantar foram servidos:

- 2 tipos de entrada (pães com patês e salada),
- 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque),
- 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi),
- 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas).

Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

Resposta:
Seja C o conjuntos das combinações possíveis, sem restrições, temos que

$$|C| = 2 \times 3 \times 4 \times 2 = 48.$$

Seja R o conjunto das combinações que não satisfazem a restrição, ou seja, contém as combinações com salada e nhoque, temos que

$$|R| = 1 \times 1 \times 4 \times 2 = 8.$$

Logo, como cada convidado escolheu uma combinação diferente, temos que o número de convidados é $48 - 8 = 40$ convidados.

161. Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, que são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

(a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

Resposta:
Como o total de dias em um ano são 365 dias e é possível representar até 9999 anos, temos que é possível representar

$$365 \times 9999 = 3649635 \text{ datas válidas.}$$

(b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

Resposta:
A quantidade de sequências de 8 dígitos possível, é calculada por

$$|\{0..9\}^8| = |\{0..9\}|^8 = 10^8.$$

Logo, a probabilidade da data ser válida é calculada como

$$\frac{3649635}{10^8} = 0,03649635 \approx 3,65\%.$$

(c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

Resposta:
Se é gerada uma sequência a cada segundo, em 1 minuto são geradas 60 sequências. A probabilidade de não ter gerado nenhuma data é:

$$(1 - 0,0365)^{60} = (0,9635)^{60} = 0,10742445 \approx 10,74\%$$

162. A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguidas de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil?

Resposta:
A quantidade de licenças possíveis é

$$|\{a..z\}|^3 \times |\{0..9\}|^4 = 26^3 \times 10^4 = 175760000$$

163. Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0, ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

(a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

Resposta:
A quantidade de números de telefone com 8 dígitos possíveis é dada por

$$|\{1..9\}| \times |\{0..9\}|^7 = 9 \times 10^7 = 90000000.$$

A quantidade de números de telefone com 9 dígitos possíveis é dada por

$$|\{0..9\}|^8 = 10^8 = 100000000.$$

Somando os dois resultados, temos que a quantidade de números de telefone possíveis no Brasil é 190 milhões.

(b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo possíveis?

Resposta:
Com pouco menos de 15 milhões de diferença, existem mais números de telefone do que licenças de veículo possíveis.

164. Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 pixeis com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como "truecolor", isto é, cada pixel pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor para exibir todas as imagens possíveis?

Resposta:
O tamanho total do monitor é $640 \times 480 = 307200$ pixeis. A frequência

do monitor é de 60 Hz, ou seja, podem ser exibidas até 60 imagens por segundo.

O número de imagens diferentes que podem ser exibidas no monitor é dado por

$$2^{32} \times 307200 = 1,319413953 \times 10^{15}.$$

Logo, temos que o tempo para apresentar todas as imagens no monitor é

$$\frac{1,319413953 \times 10^{15}}{60} = 2,199023256 \times 10^{13} \text{ segundos.}$$

Ou 254516580 dias.
Ou 697305 anos.

165. **FAZER** O Secure Hash Algorithm 1 (SHA-1) é uma função de hashing que associa sequências de bytes de qualquer tamanho a sequências 160 bits.

Por exemplo, a imagem da sequência de bytes correspondente à cadeia "The quick brown fox jumps over the lazy dog" é a sequência de bits 2fd4e1c67a2d28fced849ee1bb76e7391b93eb12 em notação hexadecimal.

Um dos usos do SHA-1 é o de servir como uma espécie de "assinatura" de arquivos. Desde sua adoção em 1993 até 2017 não se conhecia nenhum exemplo de dois arquivos com o mesmo valor de SHA-1.

(a) Quanto espaço no mínimo seria necessário para armazenar um conjunto de arquivos que garantisse que ao menos dois deles tivessem o mesmo valor de SHA-1?

Resposta:
A quantidade de sequências possível é

$$2^160 = 1,46 \times 10^{48}\text{bits} = 1,83 \times 10^{47}\text{bytes} = 1,83 \times 10^{32}\text{TB}$$

(b) Supondo que estes arquivos estivessem disponíveis e que o tempo necessário para computar o valor de SHA-1 de um arquivo de n bytes seja $c_1 n$ e que o tempo necessário para comparar dois valores de SHA-1 seja c_2 (c_1 e c_2 são constantes medidas em "ciclos de processador"), qual o tempo necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

Resposta:

(c) Se a frequência do processador é de f Hz, quanto tempo seria necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

Resposta:

10 Funções

169. As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (-) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:

- 3 símbolos: (- , . , -);
- 4 símbolos: (- , . , - , .);
- 5 símbolos: (- , - , . , - , .).

Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos.

Resposta: Podemos calcular a quantidade de letras fazendo

$$\frac{|A|^{n+1}-1}{|A|-1} = \frac{|\{-,.\}|^{8+1}-1}{|\{-,.\}|-1} = \frac{2^9-1}{2-1} = 2^9-1 = 511 \text{ letras.}$$

170. Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é?

Resposta: Podemos calcular a quantidade de letras fazendo

$$\frac{|A|^{n+1}-1}{|A|-1} = \frac{|\{0,1\}|^{5+1}-1}{|\{0,1\}|-1} = \frac{2^6-1}{2-1} = 2^6-1 = 63 \text{ letras.}$$

10.1 Funções Injetoras (Arranjos)

172. Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

Resposta:
O primeiro dígito deve ser 2, 4 ou 8, enquanto o último dever ser 1, 5 ou 7. Sabendo que $n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$, temos:

$$\begin{aligned}
R &= 3 \times \sum_{i=0}^{4} 4_i \times 3 \\
&= 3 \times \left(\frac{4!}{(4-0)!} + \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{4!}{(4-2)!} + \frac{4!}{(4-3)!} + \frac{4!}{(4-4)!} \right) \times 3 \\
&= 9 \times \left(\frac{4!}{4!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{0!} \right) \\
&= 9 \times (1 + 4 + 12 + 24 + 24) \\
&= 9 \times 65 = 585
\end{aligned}$$

173. O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:

Resposta:
São 7 letras que podem ser arranjadas sem repetição em tamanho 3. Logo, temos, do Corolário 61:

$$7_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

174. Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quantos são divisíveis por 2?

Resposta:
Para ser divisível por 2, o número deve ser par, logo, terminar com algum número do conjunto $\{4, 6, 8\}$. O restante dos números, 6 algarismos, formam sequências sem repetição de tamanho 3. Logo, temos:

$$r = 6_3 \times 3 = \frac{6!}{(6-3)!} \times 3 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} \times 3 = 360$$

175. Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

Resposta:
Para que $200 < n < 800$, o primeiro algarismo deve ser 3, 5 ou 7. Enquanto os outros 4 algarismos formam sequências de tamanho 2. Logo,

$$r = 3 \times 4_2 = 3 \times \frac{4!}{(4-2)!} = 3 \times \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 36$$

10.2 Funções Bijetoras (Permutações)

177. Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação?

     Resposta:
     Os 4 filmes de não-ficção permutam sem restrição (4!) e os 3 filmes de ficção científica permutam entre si (3!). Mas os 3 filmes podem ocupar 5 posições na semana (5!), logo $4! \times 3! \times 5! = 720$.

178. Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. De quantas maneiras os livros podem ser empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos?

     Resposta:

     - Livros de algoritmos permutam entre si (4!);
     - Livros de arquitetura permutam entre si (2!);
     - Livros de cálculo permutam entre si (5!);
     - Os 3 tipos de livro permutam (3!).

     Logo, temos $4! \times 2! \times 5! \times 3! = 34560$.

179. **FAZER** A seguinte afirmação é verdadeira? Justifique.

     A probabilidade de obter uma permutação de cartas que nunca aconteceu antes ao embaralhar um baralho comum (52 cartas) é maior que 50%.

     Resposta:
     A quantidade de permutações possíveis é de $52! = 8,0658 \times 10^{67}$.

180. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

     Resposta:
     Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças. Do Teorema 67, o número de tais permutações é

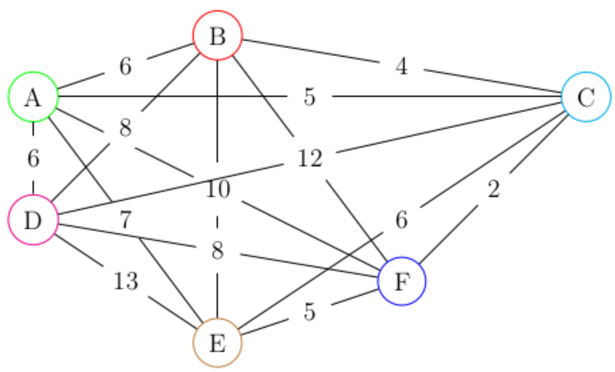
     $$(5-1)! = 4! = 24.$$

     O número de modos em que os meninos ficam juntos corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só. Se houvesse um só menino teríamos

     $$(4-1)! = 3! = 6$$

     modos diferentes de formar a roda. Para cada um destes, temos duas configurações possíveis, um deles à esquerda do outro e vice–versa. Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$ e o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é $24 - 12 = 12$.

181. João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEFA**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitando as cidades **B, C, D, E e F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEFA** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1mim20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possível no problema é de

Resposta:
O número total de sequências é dado por:

$$(6-1)! = 5! = 120$$

Como ele descarta os simétricos, temos que ele analisa $\frac{120}{2} = 60$ sequências. Logo, o tempo mínimo necessário para verificar as sequências é de

$$60 \times 80 = 4800 \text{ segundos} = 80 \text{ minutos}.$$

182. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

Resposta:
Como o pai e mãe devem ficar juntos, podem ser considerados como uma

pessoa. Logo, calcula-se a permutação circular:

$$(5-1)! = 4! = 24.$$

Entretanto, pai e mãe permutam-se entre si, logo

$$2 \times 24 = 48.$$

183. Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octogonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

Resposta:
Como as bandeiras de Brasil e Portugal devem ficar juntas, podem ser consideradas uma só, mas que permutam entre si (2!). Como trata-se de uma permutação circular, temos que:

$$r = 2 \times (7-1)! = 2 \times 720 = 1440.$$

11 Subconjuntos

Lembrando: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

185. O sorteio 2052 da mega-sena (23 de junho de 2018) ficou famoso porque pela primeira vez na história da loteria, todos os seis números sorteados (50, 51, 56, 57, 58 e 59) pertenciam à mesma dezena.

    Considerando todos os sorteios equiprováveis, qual a probabilidade de um sorteio da mega-sena (seis números entre 1 e 60) pertencerem à mesma dezena?

    Resposta:
    Chance de pegar 6 números entre:

    - 1 e 9: $\binom{9}{6}$;
    - (10 e 19) ou (20 e 29) ou (30 e 39) ou (40 e 49) ou (50 e 59): $\binom{10}{6}$.

    Logo, temos

$$\begin{aligned} r &= \frac{\binom{9}{6} + 5 \times \binom{10}{6}}{\binom{60}{6}} \\ &= \frac{\frac{9!}{6!3!} + 5 \times \frac{10!}{6!4!}}{\frac{60!}{6!54!}} \\ &= \frac{\frac{9\times8\times7}{6} + 5 \times \frac{10\times9\times8\times7}{24}}{\frac{60\times59\times58\times57\times56\times55}{720}} \\ &= \frac{84 + 5 \times 210}{50063860} \\ &= \frac{1134}{50063860} = \frac{81}{3575990} \end{aligned}$$

    Ou seja, a probabilidade é de 0,0023%.

187. Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou, como forma de parabenização, cada um de seus colegas exatamente uma vez. Quantos cumprimentos foram trocados?

    Resposta:
    Queremos encontrar os subconjuntos com 2 elementos. Para isso,

$$\binom{55}{2} = \frac{55!}{2!53!} = \frac{55 \times 54}{2} = 1485 \text{ cumprimentos.}$$

190. Numa sala há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé se

(a) as cadeiras são idênticas?

Resposta:

Apenas interessa se a pessoa está ou não sentada e a quantidade de pessoas sentadas.

$$\sum_{i=0}^{5} \binom{7}{i} = 120.$$

(b) as cadeiras são distintas?

Resposta:

Neste caso, haverá permutação dos sentados.

$$\sum_{i=0}^{5} \left(\binom{7}{i} \times i! \right) = 3620.$$

191. De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

Resposta:

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos conjuntos de 3 números naturais de 1 a 30 de modo cuja soma é par, ou seja,

$$\mathcal{S} = \left\{ T \in \binom{30}{3} \mid \sum_{t \in T} t \text{ é par} \right\}.$$

$\sum_{t \in T} t$ é par se, e somente se:

(a) um dos elementos de T é par;

(b) todos os elementos de T são pares.

Logo, temos que

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_P \cup \mathcal{S}_I,$$

onde

$$\mathcal{S}_P = \left\{ T \in \binom{30}{3} \mid \text{ todos os elementos de T são pares} \right\},$$

e

$$\mathcal{S}_I = \left\{ T \in \binom{30}{3} \mid \text{ um dos elementos de T é par} \right\}.$$

Como $\mathcal{S}_P$ e $\mathcal{S}_I$ são disjuntos,

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_P| + |\mathcal{S}_I|.$$

Sejam P e I os conjuntos dos pares e ímpares em [1..30], temos

$$P = \{2, 4, \ldots, 30\},$$
$$I = \{1, 3, \ldots, 29\}.$$

Então

(a) os elementos de $\mathcal{S}_P$ correspondem aos subconjuntos de tamanho 3 de P $\binom{P}{3}$, e

(b) os elementos de $\mathcal{S}_I$ correspondem aos pares (X, Y) de subconjuntos de $[1..30]$ onde

   i. $X \subseteq P$ e $|X| = 1$, e

   ii. $Y \subseteq I$ e $|Y| = 2$,

   isto é

   i. $X \in \binom{P}{1}$, e

   ii. $Y \in \binom{I}{2}$.

Logo,

$$\mathcal{S}_P = \binom{P}{3},$$
$$\mathcal{S}_I = \binom{P}{1} \times \binom{I}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}| &= \left|\binom{P}{3}\right| + \left|\binom{P}{1} \times \binom{I}{2}\right| \\
&= \binom{|P|}{3} + \binom{|P|}{1}\binom{|I|}{2} \\
&= \binom{15}{3} + \binom{15}{1}\binom{15}{2} \\
&= 455 + 15 \cdot 105 = 2030 \text{ maneiras.}
\end{aligned}$$

192. Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

Resposta:
Seja n o número de equipes, v o número de vitórias e e o número de empates no campeonato. Sabendo que um empate vale um ponto para cada time, temos que

$$3v + 2e = 35 \implies v = \frac{35 - 2e}{3}.$$

Como cada equipe joga contra os adversários apenas uma vez, temos

$$\binom{n}{2} = v + e = \frac{35 - 2e}{3} + e = \frac{35 + e}{3},$$

ou seja,

$$e = 3\binom{n}{2} - 35 = 3\frac{n!}{2!(n-2)!} - 35 = 3\frac{n(n-1)}{2} - 35.$$

Mas, temos que

$$\begin{aligned} 2e &< 35 \\ e &< \frac{35}{2} \\ 3\frac{n(n-1)}{2} - 35 &< \frac{35}{2} \\ 3n(n-1) &< 105 \end{aligned}$$

NÃO CONSEGUI

194. Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

Resposta:
É a probabilidade de ser de espada $\binom{13}{2}$ e de não estar no restante do baralho (estar na mão) $\binom{52-13}{52-13-2} = \binom{39}{37}$

$$\frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{37}}{\binom{52}{10}}$$

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

Resposta:
É a quantidade de ocorrências de 2 cartas para cada um dos 4 naipes,

$$\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2} = \binom{13}{2}^4,$$

ao mesmo tempo em que essas cartas não estejam no restante do baralho $\binom{39}{8}$

$$\binom{13}{2}^4\binom{39}{8}.$$

195. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

Resposta:

196. Dado $n \in \mathbb{N}$, um grafo de n vértices é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de vértice de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de aresta de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

   (a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?
   Resposta:

   (b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?
   Resposta:

   (c) Uma descrição de um grafo G é uma sequência de $2|G| + 1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências (3, 1, 2, 2, 3), (3, 2, 1, 2, 3) e (3, 2, 3, 1, 2) são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?
   Resposta:

12 Composições

197. Quantas composições admite um inteiro n?

Resposta:
Pode-se fazer composições de 1 até n. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

198. **???** De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

Resposta:

199. **???** De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

Resposta:

200. Quantas composições fracas com até n parcelas admite um inteiro n?

Resposta:
Pode-se fazer composições de 1 até n. Logo,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} = \binom{2n}{n-1}.$$

202. No jogo **Defense of the Ancients (DotA)** o *herói* tem três diferentes tipos de *orbs*. Cada combinação de três *orbs*, quaisquer que sejam seus tipos, resulta numa *arma*.

(a) De quantas diferentes *armas* dispõe o *herói*?
Resposta:
3-composição de 3.

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10.$$

(b) Responda à mesma pergunta para a versão generalizada onde existem k diferentes tipos de *orbs* e cada combinação de n *orbs* resulta numa *arma*.
Resposta:

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

13 Inclusão/Exclusão

203. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Resposta:
Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos denotar por M_p o conjunto dos números em [1000] que são divisíveis por p ou, equivalentemente, que são múltiplos de p.

Observe que

$$M_p = \left\{ p, 2p, \ldots, \left\lfloor \frac{1000}{p} \right\rfloor p \right\},$$

portanto,

$$|M_p| = \left\lfloor \frac{1000}{p} \right\rfloor.$$

Seja

$$\begin{aligned} A_1 &= M_3 \\ A_2 &= M_5 \\ A_3 &= M_7 \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{k=1}^{3} \left((-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right) \\
&= \sum_{I \in \binom{3}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \binom{3}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \binom{3}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&+ \sum_{I \in \{\{1,2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \left(\left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{3\}} A_i \right| \right) \\
&- \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{1,3\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2,3\}} A_i \right| \right) \\
&+ \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \right| \right) \\
&= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\
&- (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= (|M_3| + |M_5| + |M_7|) \\
&- (|M_3 \cap M_5| + |M_3 \cap M_7| + |M_5 \cap M_7|) \\
&+ |M_3 \cap M_5 \cap M_7| \\
&= \left(\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor \right) \\
&- \left(\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor \\
&= (333 + 200 + 142) - (66 + 47 + 28) + 9 \\
&= 675 - 141 + 9 = 543.
\end{aligned}
$$

Generalizando o raciocínio, dados os inteiros positivos $n, d_1, d_2, \ldots, d_k$, o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$ é

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} M_{d_i}\right| = \sum_{i=1}^{k}\left((-1)^{i+1}\sum_{I\in\binom{[k]}{i}}\left|\bigcap_{j\in I} M_{d_j}\right|\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{|D|}\left((-1)^{i+1}\sum_{I\in\binom{D}{i}}\left\lfloor\frac{n}{\prod_{d\in I} d}\right\rfloor\right)$$

onde
$$D = \{d_1, \ldots, d_k\}.$$

204. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

Resposta:
Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $M_{p,n}$ o conjunto dos números em $[n]$ que são divisíveis por p ou, equivalentemente, que são múltiplos de p.

Observe que
$$M_{p,n} = \left\{p, 2p, \ldots, \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor p\right\},$$
portanto,
$$|M_{p,n}| = \left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor.$$

Para contarmos quantos são os múltiplos inteiros e positivos de 3 ou de 4 mas não de 5 que são menores ou iguais à 2001, devemos contar todos aqueles que são múltiplos de 3 ou de 4 ou de 5, inclusive, e subtrair destes aqueles que são múltiplos de 5, isto é,

$$|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001}) - M_{5,2001}|$$

e como, $M_{5,2001} \subseteq (M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})$, temos

$$|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})| - |M_{5,2001}|$$

Basta calcular
$$|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})|.$$

Fazendo

$$A_1 = M_{3,2001}$$
$$A_2 = M_{4,2001}$$
$$A_3 = M_{5,2001}$$

logo, pelo princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{k=1}^{3} \left((-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right)$$

Como visto no Exercício 203, temos

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= (|M_{3,2001}| + |M_{4,2001}| + |M_{5,2001}|) \\
&- (|M_{3,2001} \cap M_{4,2001}| + |M_{3,2001} \cap M_{5,2001}| + |M_{4,2001} \cap M_{5,2001}|) \\
&+ |M_{3,2001} \cap M_{4,2001} \cap M_{5,2001}| \\
&= \left(\left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{5} \right\rfloor \right) \\
&- \left(\left\lfloor \frac{2001}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{20} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{2001}{60} \right\rfloor \\
&= (667 + 500 + 400) - (166 + 133 + 100) + 33 \\
&= 1567 - 399 + 33 = 1201.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})| - |M_{5,2001}| = 1201 - 400 = 801.$$

Portanto, temos 801 inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5.

205. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 10000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10?

Resposta:
Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos denotar por M_p o conjunto dos números em 10000 que são divisíveis por p ou, equivalentemente, que são múltiplos de p.

Observe que

$$M_p = \left\{ p, 2p, \ldots, \left\lfloor \frac{10000}{p} \right\rfloor p \right\},$$

portanto,

$$|M_p| = \left\lfloor \frac{10000}{p} \right\rfloor.$$

Basta calcular

$$|(M_4 \cup M_6 \cup M_{10})|.$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
A_1 &= M_4 \\
A_2 &= M_6 \\
A_3 &= M_{10}
\end{aligned}$$

logo, pelo princípio da Inclusão-Exclusão, temos

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{k=1}^{3} \left((-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right)$$

Do Exercício 203, temos

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= (|M_4| + |M_6| + |M_{10}|) \\
&\quad - (|M_4 \cap M_6| + |M_4 \cap M_{10}| + |M_6 \cap M_{10}|) \\
&\quad + |M_4 \cap M_6 \cap M_{10}| \\
&= \left(\left\lfloor \frac{10000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{10} \right\rfloor \right) \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{10000}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{30} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{10000}{60} \right\rfloor \\
&= (2500 + 1666 + 1000) - (833 + 500 + 333) + 166 \\
&= 5166 - 1666 + 166 = 3666.
\end{aligned}$$

Portanto, temos 3666 inteiros positivos menores ou iguais a 10000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10.

Obs: $|M_4 \cap M_6| = |M_{12}|$, pois 12 é o MMC de 6 e 4.

206. Qual o número de soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12,\ 0 \leq x_i \leq 5?$$

Resposta:

14 Pontos Fixos de Permutações e Desarranjos

211. (a) Qual o número de permutações sobre um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?

Resposta:

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $i \in [n]$, seja $G(n,i)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ cujo único ponto fixo é i, isto é,

$$G(n,i) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in [n]! \mid a_j \neq j \text{ para todo } j \neq i\}.$$

Então o conjunto das permutações sobre $[n]$ com exatamente um ponto fixo é

$$E_n := \bigcup_{i \in [n]} G(n,i).$$

Observe que existe uma bijeção natural entre $G(n,i)$ e o conjunto $D(n,i)$ dos desarranjos sobre $[n] - \{i\}$, dada por

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

e, consequentemente,

$$|G(n,i)| = |D(n,i)| \overset{T.90}{=} (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!},$$

para todo $i \in [n]$.

Como os conjuntos $G(n,i) : i \in [n]$ são dois a dois disjuntos entre si, então

$$\begin{aligned} |E_n| &= \left| \bigcup_{i \in [n]} G(n,i) \right| = \sum_{i \in [n]} |G(n,i)| = \sum_{i \in [n]} |D_{n-1}| = n|D_{n-1}| \\ &= n \left((n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\ &= n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

(b) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com exatamente k pontos fixos?

Resposta:

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$, seja $G(n,I)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ cujos pontos fixos são os elementos de I.

Como no item anterior, existe uma bijeção natural entre $G(n,I)$ e o conjunto $D(n,I)$ dos desarranjos sobre $[n] - I$, e daí,

$$|G(n,I)| = |D(n,I)| \overset{T.90}{=} (n - |I|)! \sum_{k=0}^{n-|I|} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

O conjunto das permutações sobre n com exatamente k pontos fixos então é

$$G(n,k) := \bigcup_{I \in \binom{[n]}{k}} G(n,I),$$

Como os conjuntos $G(n,I) : I \in \binom{[n]}{k}$ são dois a dois disjuntos entre si, então

$$\begin{aligned}
|G(n,k)| &= \left| \bigcup_{I \in \binom{[n]}{k}} G(n,I) \right| = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |G(n,I)| \\
&= \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-|I|)! \sum_{i=0}^{n-|I|} \frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= \left| \binom{[n]}{k} \right| (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \binom{n}{k} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \\
&= \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}$$

(c) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com pelo menos k pontos fixos?

Resposta:

(d) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com no máximo k pontos fixos?

Resposta:

(e) Mostre que o número de permutações sem ponto fixo e o número de permutações com exatamente um ponto fixo sobre um conjunto de n elementos difere de um para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

212. De quantas maneiras podemos arranjar os inteiros 1, 2, 3, …, 10 de forma que nenhum dos cinco primeiros (i.e. 1, 2, 3, 4, 5) apareçam em suas posições naturais/originais?

Resposta:

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $m \subseteq n$, seja $F(n,m)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ nas quais nenhum elemento de [m] é ponto fixo. Então

$$F(n,m) = [n]! - E(n,m),$$

onde E(n,m) é o conjunto das permutações sobre $[n]$ para as quais pelo menos um elemento de $[m]$ é ponto fixo. Consequentemente,

$$|F(n,m)| = |[n]! - E(n,m)| = |[n]!| - |E(n,m)| = [n]! - |E(n,m)|.$$

Por outro lado,

$$E(n,m) := \bigcup_{i=1}^{m} G(n,i)$$

onde $G(n,i)$ é o conjunto das permutações sobre $[n]$ cujo único ponto fixo é i. Consequentemente (T. 87),

$$|E(n,m)| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I}^{m} G(n,i)\right| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} |G(n,I)|,$$

onde

$$G(n,I) := \bigcap_{i\in I}^{m} G(n,i),$$

Observe que existe uma bijeção natural entre $G(n,I)$ e $([n]-I)!$, e daí

$$\begin{aligned}
|E(n,m)| &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} |G(n,I)| \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} (n-|I|)! \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (n-k)!,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|F(n,m)| = n! - |E(n,m)| &= n! - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} (n-k)! \\
&= n! + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k} \binom{m}{k} (n-k)!.
\end{aligned}$$

Para $n = 10$ e $m = 5$, temos

$$\begin{aligned}
|F(10,5)| &= 10! + \sum_{k=1}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (10-k)! \\
&= 10! + \left(-\binom{5}{1} 9! + \binom{5}{2} 8! - \binom{5}{3} 7! + \binom{5}{4} 6! - \binom{5}{5} 5! \right) \\
&= 10! + (-5 \cdot 9! + 10 \cdot 8! - 10 \cdot 7! + 5 \cdot 6! - 5!) \\
&= 3628800 - 1458120 = 2170680.
\end{aligned}$$

Portanto, temos 2170680 maneiras distintas de arranjar [10] de forma que os cinco primeiros números naturais não estejam em sua posição original.

213. (a) Quantas permutações sobre $[n]$ existem de forma que i nunca é seguido de $i + 1$ para nenhum $1 \leq i < n$?

Resposta:

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $i \subseteq [n]$, seja $G(n, i)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ nas quais i é seguido por i. Então

$G(n, i) := \{f \in [n]! \mid f(k) = i \text{ e } f(k+1) = i+1 \text{ para algum } k \in [n-1]\}$.

E(n) é o conjunto das permutações sobre $[n]$ para as quais i nunca é seguido por $i + 1$ para nenhum $i \in [n-1]$, ou seja

$$E(n) := [n]! - \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i}$$

Observe que

$$|E(n)| = \left| [n]! - \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i} \right| = |[n]!| - \left| \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i} \right| = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i} \right|.$$

Temos que

$$\left| \bigcup_{i \in [n-1]} G_{n,i} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n-1]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} G_{n,i} \right|.$$

Dado que $I \subseteq [n-1]$, temos

$$\bigcap_{i \in I} G_{n,i} =$$

(b) Como essa resposta muda, se incluirmos a restrição de que n não pode ser seguido de 1?

Resposta:

214. Suponha que numa disciplina de pós-graduação, a avaliação final é realizada por meio da entrega de um relatório técnico, em forma de artigo científico, sobre um trabalho prático desenvolvido com os conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina. O professor desta disciplina quer desenvolver em seus alunos/estudantes a capacidade de avaliação de artigos científicos e propõe que a avaliação dos relatórios seja feita pelos próprios alunos.

     Considerando que a turma é composta de apenas 5 alunos, de quantas maneiras distintas o professor pode distribuir os relatórios técnicos aos alunos de forma que um mesmo autor não avalie o seu artigo.

     Resposta:

215. Para a palavra UFPR, podemos formar quantos anagramas de forma que cada letra não apareça em sua posição original.

     Resposta:

216. Considere uma palavra formada por uma sequência de n letras A seguida de mais m letras B, quantos anagramas podemos formar dessa palavra de forma que nenhuma letra esteja em sua posição original.

     Resposta: