CI-1237 — Matemática Discreta

Notas de Aula

Renato Carmo

Segundo Período Especial de Ensino Emergencial Remoto

novembro de 2020 a março de 2021

Sumário

Apresentação

Estas notas de aula foram preparadas especialmente para a oferta da disciplina Matemática Discreta (CI–1237) durante o Segundo Período Especial de Ensino Emergencial Remoto da Universidade Federal do Paraná, na contingência da pandemia de CoViD-19.

A oferta da disciplina está organizada em torno deste texto. O texto, por sua vez, está dividido em Unidades. Cada unidade do texto é complementada por uma exposição em vídeo. Ao início de cada unidade estão indicados exercícios recomendados. A Lista de Exercícios é o Apêndice A destas Notas de Aula.

Na página da disciplina você encontra o cronograma que estabelece a distribuição das unidades ao longo do período letivo.

Na página você também encontra "links" para todo o material de apoio (vídeos expositivos, "slides", sala de vídeo-conferência etc). Para facilitar sua localização, os nomes dos arquivos dos vídeos e dos "slides" são iguais (a menos da extensão) e iniciam pelo número da unidade que complementam.

Este arquivo pdf é um hipertexto. Seus "links" são ativos permitindo navegação com um leitor apropriado.

Apesar do esforço para revisar o texto a fim de prepará-lo para uso dos alunos neste período, é praticamente inevitável que erros e imprecisões ainda restem. Caso detecte algum, por favor, comunique enviando mensagem a `renato.carmo.rc@gmail.com` para que possamos corrigir.

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

⋆: exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

Bom estudo!

Parte I

Indução

Unidade 1

Proposições e Conectivos

Exercícios 1 a 5

Uma *proposição* é uma afirmação. Toda proposição é verdadeira ou é falsa.

O fato de que duas proposições A e B tem o mesmo valor será denotado por $A \equiv B$.

Denotamos por $\underline{\mathsf{V}}$ e $\underline{\mathsf{F}}$, respectivamente, os valores de *verdadeiro* e *falso*.

1.1 Conectivos

1.1.1 Negação, Conjunção e Disjunção

Definição. *Se A e B são proposições então*

não A *é uma proposição, chamada a* negação *de A.*

> *A proposição* **não** A *é verdadeira quando a proposição A é falsa.*

A **e** B *é uma proposição, chamada a* conjunção *de A e B,*

> *A proposição A* **e** *B é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras.*

A **ou** B *é uma proposição, chamada a* disjunção *de A e B.*

> *A proposição A* **ou** *B é verdadeira quando ao menos uma dentre as proposições A e B é verdadeira.*

1.1.2 Implicação

Definição. *Se A e B são proposições então $A \implies B$ é uma proposição chamada* implicação *de A para B.*

Lê-se "se A então B" ou "A implica B".

A proposição A é chamada de antecedente *da implicação e a proposição B é chamada de* consequente *da implicação.*

A proposição $A \implies B$ é verdadeira quando A e B são ambas proposições verdadeiras ou quando A for uma proposição falsa, isto é,

$$A \implies B \equiv (A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (\textsf{ não } A).$$

Teorema 1. *A proposição $\underline{\mathsf{F}} \implies A$ é verdadeira qualquer que seja a proposição A.*

Demonstração. Exercício 5. □

1.1.3 Dupla Implicação

Definição. *Se A e B são proposições então $A \iff B$ é uma proposição chamada* dupla implicação *entre A e B.*

Lê-se "A se e somente se B".

A proposição $A \iff B$ é verdadeira se as implicações $(A \implies B)$ e $(B \implies A)$ forem ambas verdadeiras, ou seja,

$$A \iff B \equiv (A \implies B) \textsf{ e } (B \implies A).$$

Unidade 2

Predicados e Quantificadores

Exercícios 6 a 10

Um *predicado* é uma "proposição parametrizada". Por exemplo,

$P(x)$**:** $x \leq x^2$.

O símbolo x recebe o nome de *variável livre* do predicado.

Predicados podem ter várias variáveis livres.

$Q(x, y)$**:** $x \leq y^2$.

Predicados não são verdadeiros nem falsos.

Quando as variáveis livres de um predicado são "especificadas" ou "instanciadas", o resultado é uma proposição que, como tal, é verdadeira ou falsa.

2.1 Quantificadores

Definição. *Se $P(x)$ é um predicado e X é um conjunto, então*

- $P(x),$ *para todo* $x \in X$*, e*
- $P(x),$ *para algum* $x \in X$*,*

são proposições.

"$P(x),$ **para todo** $x \in X$" *é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para todo elemento $x \in X$.*

"$P(x),$ **para algum** $x \in X$" *é uma proposição verdadeira se a proposição $P(x)$ for verdadeira para algum elemento $x \in X$.*

Teorema 2. *Se $P(x)$ é um predicado, então*

$$\textit{não } (P(x), \ \textit{para todo } x \in X) \equiv (\ \textit{não } P(x)), \ \textit{para algum } x \in X,$$

e

$$\textit{não } (P(x), \ \textit{para algum } x \in X) \equiv (\ \textit{não } P(x)), \ \textit{para todo } x \in X.$$

Seja $P(x)$ um predicado qualquer e seja $X = \emptyset$.

Observe que

$$P(x), \ \text{para algum } x \in X,$$

é uma proposição falsa, pois não existe $x \in X$ tal que a proposição $P(x)$ seja verdadeira.

Do mesmo modo,

$$(\ \text{não } P(x)), \ \text{para algum } x \in X,$$

também é uma proposição falsa.

Consequentemente

$$\text{não } ((\ \text{não } P(x)), \ \text{para algum } x \in X),$$

é uma proposição verdadeira.

Como ()

$$\begin{aligned} \text{não } ((\ \text{não } P(x)), \ \text{para algum } x \in X) &\overset{\text{T. 2}}{\equiv} (\ \text{não } (\ \text{não } P(x)), \ \text{para todo } x \in X) \\ &\equiv P(x), \ \text{para todo } x \in X, \end{aligned}$$

então
$$P(x), \text{ para todo } x \in X,$$
é uma proposição verdadeira.

Corolário 3. *Se $X = \emptyset$, então, para qualquer predicado $P(x)$ temos*
$$P(x), \text{ para todo } x \in X \text{ é uma proposição verdadeira},$$
e
$$P(x), \text{ para algum } x \in X \text{ é uma proposição falsa.}$$

Unidade 3

Conjuntos, Inteiros, Somatórios e Produtórios

Exercícios 11 a 14

3.1 Conjuntos

A, B: conjuntos

Notação. $\emptyset$ *denota o conjunto vazio.*

$$
\begin{aligned}
a \in A &:= a \text{ é elemento do conjunto } A, \\
a \notin A &:= \textit{não } (a \in A), \\
A \subseteq B &:= a \in B, \ \textit{para todo } a \in A, \\
A \not\subseteq B &:= \textit{não } (A \subseteq B), \\
A = B &:= (A \subseteq B) \ \textit{e} \ (B \subseteq A), \\
A \cup B &:= \{x \mid x \in A \ \textit{ou} \ x \in B\}, \\
A \cap B &:= \{x \mid x \in A \ \textit{e} \ x \in B\}, \\
A - B &:= \{a \mid a \in A \ \textit{e} \ a \notin B\}, \\
|A| &:= \textit{número de elementos do conjunto } A.
\end{aligned}
$$

Exercício 11 [default,ex:diferenca-subconjunto]

Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

Resposta:

Podemos reescrever $A = (A - B) \cup B$ como

$$A \subseteq (A - B) \cup B$$

e

$$(A - B) \cup B \subseteq A.$$

Portanto, podemos dividir a prova de $A = (A - B) \cup B$ em duas partes:

1. Como $A \subseteq (A - B) \cup B$, tem-se que:

   $$x \in A \implies x \in ((A - B) \cup B)$$

   Seja $x \in A$, temos 2 casos:

   (a) $x \in B \implies x \in (A - B) \cup B$

   (b) $x \notin B \implies x \in (A - B) \implies x \in (A - B) \cup B$

2. Como $(A - B) \cup B \subseteq A$, tem-se que:

   $$x \in (A - B) \cup B \implies x \in A$$

   Seja $x \in (A - B) \cup B$, temos 2 casos:

   (a) $x \in (A - B) \implies x \in A \cap x \notin B \implies x \in A$

   (b) $x \notin (A - B) \implies \neg(x \in (A - B)) \implies x \notin A \cup x \in B \implies x \in B \implies x \in A$

3.2 Inteiros

A: conjunto,

z_1, z_2, z_3: inteiros,

$q \in \mathbb{Q}$,

$x \in \mathbb{R}$.

Definição. *O* intervalo inteiro *de* z_1 *a* z_2 *é o conjunto dos inteiros entre* z_1 *e* z_2*, ou seja*

$$[z_1..z_2] := \{z \in \mathbb{Z} \mid z_1 \leq z \leq z_2\}.$$

Definição. *Dado* $A \subseteq \mathbb{R}$*,*

- *o* mínimo *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \leq a, \ \textsf{\textit{para todo}}\ a \in A.$$

- *o* máximo *de* A *é um elemento* m *de* A *satisfazendo*

$$m \geq a, \ \textsf{\textit{para todo}}\ a \in A.$$

O mínimo e o máximo de A *são denotados* $\min A$ *e* $\max A$*, respectivamente.*

Conjuntos podem não ter mínimo ou máximo. Por exemplo,

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}.$$

Notação. $\lg x$ *denota* $\log_2 x$*.*

3.3 Somatórios e Produtórios

Sejam

$f\colon A \to \mathbb{C}$

X**:** subconjunto finito de A.

a, b**:** inteiros.

Notação.

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

denota a soma dos valores de $f(x)$ para cada $x \in X$.

Se $X = \emptyset$, então

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) := \sum_{x \in [a..b]} f(x).$$

Teorema 4. *Dados um conjunto finito X e $c \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Demonstração. Exercício 61 $\square$

Teorema 5. *Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ finito,*

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Demonstração. Exercício 62 $\square$

Teorema 6. *Dada $f \colon A \to \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ finito e $c \in \mathbb{C}$,*

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Demonstração. Exercício 63 $\square$

Notação.

$$\prod_{x \in X} f(x)$$

denota o produto dos valores de $f(x)$ para cada $x \in X$.

Se $X = \emptyset$, então

$$\prod_{x \in X} f(x) = 1.$$

$$\prod_{i=a}^{b} f(i) := \prod_{x \in [a..b]} f(x).$$

Unidade 4

Aproximação Assintótica

Exercícios 17 a 25

Dadas $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dizemos que f e g são *aproximadamente iguais* (cfr. Ex. 7) se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Denotamos o fato de que f e g são aproximadamente iguais por

$$f(n) \approx g(n).$$

Teorema 7. *As funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Demonstração. Exercício 23 $\square$

Unidade 5

Piso e Teto (1)

Exercícios 26 a 40

Definição. *Dado $x \in \mathbb{R}$,*

o piso *de x é o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja,*

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}.$$

o teto *de x é o menor inteiro maior ou igual a x, ou seja,*

$$\lceil x \rceil := \min \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}.$$

Teorema 8. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

É imediato que existe um único inteiro z no conjunto

$$\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}.$$

Consequentemente, todo inteiro maior que z será também maior que x.

Noutras palavras, z é o maior inteiro menor ou igual a x e, portanto, $z = \lfloor x \rfloor$. □

Teorema 9. *Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz*

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

Demonstração. Exercício 29 $\square$

Corolário 10. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

Do Teorema 8 temos que

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x,$$

e, portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z,$$

e, portanto,

$$(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z.$$

Como $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro, temos do Teorema 8 que

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor.$$

$\square$

Teorema 11. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor.$$

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{R}$. Vamos provar que

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor.$$

Do Teorema 9 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

e, portanto,

$$-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1),$$

ou seja,
$$(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x,$$
e daí, do Teorema 8 temos que
$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$

$\square$

Corolário 12. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*
$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil .$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que
$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil .$$

Temos que
$$z - \lfloor x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor - z).$$

Pelo Teorema 10 temos que
$$\lfloor x \rfloor - z = \lfloor x - z \rfloor$$
e, portanto,
$$z - \lfloor x \rfloor = -\lfloor x - z \rfloor ,$$
e daí, pelo Teorema 11
$$-\lfloor x - z \rfloor = \lceil -(x - z) \rceil = \lceil z - x \rceil .$$

$\square$

Teorema 13. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*
$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1$$

Demonstração. Seja $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

Observe (Ex. 34) que m é o único inteiro tal que
$$x < m \leq x + 1,$$
isto é,
$$(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1),$$
e daí (T. 8)
$$m = \lfloor x + 1 \rfloor \overset{\text{T. } 10}{=} \lfloor x \rfloor + 1.$$

$\square$

Teorema 14. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos*

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

Demonstração. A prova de que $\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$, para todo $x \in \mathbb{R}$ segue um argumento análogo em tudo a do Teorema 13 (Exercício 35) $\square$

Unidade 6

Piso e Teto (2)

Exercícios 38 a 44

$f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada (cfr. Ex. 6) em D se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in D.$$

Teorema 15. *Se $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função integralizada, contínua e crescente, em D então*

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor\,, \text{ e} \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil\,, \end{aligned}$$

para todo $x \in D$.

Demonstração. Seja $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integralizada, contínua e crescente em D e seja $x \in D$. Vamos provar que

1. $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$, e que
2. $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil$.

1. Vamos provar que

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor\,.$$

Se x é inteiro, então

$$\lfloor x \rfloor = x,$$

e portanto,

$$f(\lfloor x \rfloor) = f(x).$$

e

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$

ilustração aqui

Se x não é inteiro, então

$$\lfloor x \rfloor < x,$$

e como f é crescente, então

$$f(\lfloor x \rfloor) < f(x).$$

Além disso, não pode haver nenhum inteiro z tal que

$$f(\lfloor x \rfloor) < z < f(x),$$

pois como f é contínua, teríamos $z = f(a)$ para algum a tal que

$$\lfloor x \rfloor < a < x,$$

e como $f(a)$ é inteiro e f é integralizada, então a seria um inteiro entre $\lfloor x \rfloor$ e x, o que não é possível.

Como x não é inteiro e f é integralizada, então $f(x)$ não pode ser inteiro e então

$$\lfloor f(x) \rfloor < f(x),$$

Como $\lfloor f(x) \rfloor$ é inteiro e $f(\lfloor x \rfloor)$ não é necessariamente inteiro, então

$$\lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x),$$

e portanto,

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor \leq f(\lfloor x \rfloor) < f(x). \tag{6.1}$$

Finalmente, como $\lfloor f(x) \rfloor$ é um inteiro entre $f(\lfloor x \rfloor)$ e $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$, temos necessariamente

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor .$$

2. A prova de que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil ,$$

segue um argumento em tudo análogo (Exercício 38).

$\square$

Corolário 16. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo k*

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja k um inteiro positivo e seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Basta provar (Exercício 39) que f é uma função crescente e integralizada, e daí (T. 15) temos

$$\begin{aligned} \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f(x) \rfloor, \\ \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f(x) \rceil. \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor, \\ \left\lceil \frac{\lceil x \rceil}{k} \right\rceil &= \left\lceil \frac{x}{k} \right\rceil. \end{aligned}$$

□

Unidade 7

O Princípio da Indução Finita

Definição. *Se* $A \subseteq \mathbb{N}$ *satisfaz*

1. $0 \in A$ *e,*
2. $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A,$ *para todo* $a \in \mathbb{N}$*,*

então $A = \mathbb{N}$*.*

Formalmente,

$$((0 \in A) \text{ e } (([0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A), \text{ para todo } a \in \mathbb{N})) \implies (A = \mathbb{N})$$

Unidade 8

Demonstração por Indução (1)

Teorema 17.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ *para todo* } n \in \mathbb{N},$$

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$P(n) : \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vamos, então, provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que

1. $0 \in A$;

2. $[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

1. Vamos provar que $0 \in A$,

   ou seja,

   vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira,

   isto é,

   vamos provar que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

   Por um lado, temos que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

   Por outro lado,

   $$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

   E, portanto, é verdade que

   $$\sum_{i=1}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2}.$$

   Portanto, a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

   $$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

   Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

   Vamos provar que $a+1 \in A$,

   isto é,

   vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira

   ou seja,

   vamos provar que

   $$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}.$$

Por um lado, temos

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Como $[0..a] \subseteq A$, então $a \in A$,

ou seja,

a proposição $P(a)$ é verdadeira, isto é,

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1) \\
&= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) \\
&= \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+2)(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\,((a+1)+1)}{2}.$$

Portanto a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto $a+1 \in A$.

Portanto,

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Então $A = \mathbb{N}$, isto é,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\} = \mathbb{N},$$

e portanto a proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

é verdadeira, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Unidade 9

Demonstração por Indução (2)

Exercícios 46 a 57

Esquematicamente temos um predicado $P(n)$ e queremos uma prova da proposição

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

provando que

$$A = \mathbb{N},$$

onde

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) = V\}.$$

Vamos provar que $A = \mathbb{N}$ provando que,

1. $0 \in A$
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in A.$

1. Vamos provar que $0 \in A$.

   ...

   Portanto, $0 \in A$.

2. Vamos provar que

$$[0..a] \subseteq A \implies a+1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

   Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $[0..a] \subseteq A$.

   Vamos provar que $a+1 \in A$.

   ...

   Como $[0..a] \subseteq A$, então,

   ...

   Portanto, $a+1 \in A$.

Portanto,

$$A = \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Observe que o conjunto A é desnecessário, no sentido de que é possível reformular o raciocínio sem definí-lo explicitamente.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

provando que

1. A proposição $P(0)$ é verdadeira e,
2. $(P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1)), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$

1. Vamos provar que a proposição $P(0)$ é verdadeira.

   ...

   Portanto a proposição $P(0)$ é verdadeira.

2. Vamos provar que

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$.

Vamos provar que a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

...

Como a proposição $P(k)$ é verdadeira para todo $k \in [0..a]$, então,

...

Portanto, a proposição $P(a+1)$ é verdadeira.

Portanto,

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a] \implies P(a+1), \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

O esquema usual é o seguinte.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

1. Vamos provar que $P(0)$.

   ...

   Portanto, $P(0)$.

2. Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$.

   Vamos provar que $P(a+1)$.

   ...

   Como $P(k), \text{ para todo } k \in [0..a]$ então ...

   ...

   Portanto, $P(a+1)$.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Nesta disciplina, o esquema para uma prova de indução será o seguinte, para enfatizar o fato de que a Base da Indução só pode ser determinada *depois* que o Passo da Indução for estabelecido.

Demonstração. Vamos provar que

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$P(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que $P(a + 1)$.

...

Da hipótese de indução temos que ...

...

Portanto $P(a + 1)$.

Base da Indução: Vamos provar que $P(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ ao qual o argumento do Passo de Indução não se aplica.

...

Portanto $P(k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ ao qual o argumento do Passo de Indução não se aplica.

Portanto,

$$P(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Vamos reescrever a prova do Teorema 17 de acordo com este esquema.

Demonstração. Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

Hipótese da Indução: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Temos que

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1).$$

Pela Hipótese da Indução temos que

$$\sum_{i=1}^{a} i = \frac{a(a+1)}{2},$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{a+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{a} i\right) + (a+1) \\
&= \left(\frac{a(a+1)}{2}\right) + (a+1) \\
&= \frac{a(a+1) + 2(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+2)(a+1)}{2} \\
&= \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{(a+1)\left((a+1)+1\right)}{2}.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in \{0\}$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{0(0+1)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ para todo } k \in \{0\}.$$

$\square$

Unidade 10

Exemplos de Prova por Indução (1)

Exercícios 50 a 74

Exercício 50 [default,ex:2an¡n-fatorial]

Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4,$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \geq 4$ tal que

$$2^k < k!, \text{ para todo } k \in [4..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que $2^{a+1} < (a+1)!$.

Temos que

$$2^{a+1} = 2 \times 2^a.$$

Como $a \in [4..a]$, temos da H.I. que

$$2^a < a!,$$

e portanto,
$$2^{a+1} = 2 \times 2^a < 2 \times a!.$$

Por outro lado,
$$(a+1)! = (a+1) \times a!$$

e como $a \geq 4$ temos que

$$(a+1)! \geq (4+1) \times a! = 5 \times a!,$$

ou seja,
$$2^{a+1} < 2 \times a! < 5 \times a! \leq (a+1)!,$$

e portanto,
$$2^{a+1} < (a+1)!.$$

Base da Indução: Vamos provar que

$$2^4 < 4!.$$

Por um lado,
$$2^4 = 16.$$

e por outro lado,
$$4! = 24,$$

e portanto,
$$2^4 < 4!.$$

Unidade 11

Exemplos de Prova por Indução (2)

Definição. *A* sequência de Fibonacci *é a função* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dada por*

$$F(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ F(n-2) + F(n-1), & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Exercício 51 [default,ex:fibonacci:inducao]

A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

1. Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \textsf{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

2. Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

1. Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \text{ para todo } k \in [0..a],$$

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1}\right).$$

Pela definição de F temos que para todo $a > 1$,

$$F(a+1) = F(a) + F(a-1).$$

Como $a \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^a\right).$$

Como $a-1 \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right).$$

Então

$$
\begin{aligned}
F(a+1) &= F(a) + F(a-1) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1}\right).
\end{aligned}
$$

Base: Vamos provar que

$$F(b) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{b} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{b}\right), \ \textsf{para todo } b \in \{0,1\}$$

isto é, vamos provar que

$$
\begin{aligned}
F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right) \\
F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right).
\end{aligned}
$$

Por um lado,

$$
\begin{aligned}
F(0) &= 0, \\
F(1) &= 1.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}(1-1)=\frac{\sqrt{5}}{5}(0)=0,$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right)&\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5}{5}\\ &=1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F(0)&=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right)\\ F(1)&=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right),\end{aligned}$$

Portanto,

$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right),\ \text{para todo } n\in\mathbb{N},$$

2. Como
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\overset{\text{Ex. 19}}{\approx}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n},$$
então
$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+\epsilon(n))\right)^{n},$$
para alguma função $\epsilon\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim\epsilon(n)=0$.

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n (1+\epsilon(n))^n \, .$$

Como

$$\lim \epsilon(n) = 0,$$

então

$$\lim (1+\epsilon(n)) = 1,$$

e daí,

$$\lim (1+\epsilon(n))^n = 1,$$

e, consequentemente,

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Unidade 12

Exemplos de Prova por Indução (3)

Exercício 58 [default,ex:cor:uniao-disjunta-generalizada]

Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta:

Vamos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in [0..a]$, se $A_1, \ldots, A_k$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Passo: Vamos provar que se $A_1, \dots, A_{a+1}$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Sejam $A_1, \dots, A_{a+1}$, conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si. Como $a + 1 > 0$, então

$$\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}.$$

Se $a \geq 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela HI,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}|.$$

Como $a \in [0..a]$, da HI temos também

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a} |A_i|,$$

e daí,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a} |A_i| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Base: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = \sum_{i=1}^{b} |A_i|, \text{ para todo } b \in [0..2].$$

Se $b = 0$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = 0,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = 0.$$

Se $b = 1$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = |A_1|,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = |A_1|.$$

Se $b = 2$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = |A_1 \cup A_2|,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = |A_1| + |A_2|,$$

que é fato conhecido.

Unidade 13

Descrições Recursivas (1)

Exercícios 75 a 90

Seja $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n.

Queremos uma expressão para $l(n)$.

Idéia: descrever através de uma recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Temos,

n	$f(n)$	$l(n)$
1	1	1
2	2	2
3	2	2
4	3	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Será verdade que $f(n)$ é o número de dígitos na representação binária de n, para todo $n > 0$, isto é, será que

Teorema 18.

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

Demonstração. Exercício 75 □

Exercício 75 [default,ex:teo:comprimento:binario]

Sejam $l, f\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

e

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = f(k) \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = f(a+1)$$

Se $a + 1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e que

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a,$$

e daí, temos pela HI que

$$l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \ldots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é,

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = d_{m-1}2^0 + d_{m-2}2^1 + \ldots d_0 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i}.$$

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$

ou seja,

$$a+1 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} + 0 2^0 = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i},$$

para $d_m = 0$.

Noutras palavras,

$$d_0 d_1 \ldots d_m,$$

a representação binária de $a+1$, isto é,

$$l(a+1) = m+1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Por argumento análogo concluímos que, também quando $a+1$ é ímpar, $l(a+1) = f(a+1)$.

Base: Vamos provar que

$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.

Por outro lado, $f(1) = 1$.

Logo, é verdade $l(1) = f(1)$.

Unidade 14

Descrições Recursivas (2)

Exercícios 76 a 90

Teorema 19. *Se $l\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ é a função dada por*

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1, \end{cases}$$

então

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{\textit{para todo}}\ n > 0.$$

Demonstração. Exercicio 76 □

Exercício 76 [default,ex:teo:l=log]

Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \textsf{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo}\ n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \ \textsf{para todo}\ n > 0,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = \lfloor \lg k \rfloor + 1, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a + 1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$\begin{aligned} l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 15}}{=} \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + 1 \\ &\overset{\text{T 10}}{=} \lfloor \lg(a+1) \rfloor - 1 + 1 \\ &= \lfloor \lg(a+1) \rfloor . \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$l(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + 1.$$

Basta verificar que

$$l(1) = 1,$$

e que,

$$\lfloor \lg(1) \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Corolário 20. *Para todo $n > 0$, a representação binária de n tem $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ dígitos.*

Unidade 15

Descrições Recursivas (3)

Exercícios 77 a 90

Seja $b\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$b(n)$: número de dígitos 1 na representação binária de n.

Idéia:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{se } n \text{ é par}, \\ f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar}. \end{cases}$$

ou mais concisamente

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Teorema 21.

$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercício 77 □

Exercício 77 [default,ex:teo:numero:1s]

Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

1. Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

2. Prove que
$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

1. Vamos provar que

$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$b(k) = f(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a + 1 > 0$, temos da definição de f que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela H.I. temos

$$b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right).$$

ou seja,

$$f(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2).$$

Se $a+1$ é par, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Se $a+1$ é ímpar, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Base: Vamos provar que

$$b(0) = f(0).$$

Basta verificar que, pela definição de b,

$$b(0) = 0,$$

e que, pela definição de f,

$$f(0) = 0$$

2. Dos Exercícios 75 e 76 concluímos que o comprimento da representação binária de n é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n > 0$.

   Do item anterior concluímos que $f(n)$ é o número de 1s na representação binária de n, para todo $n > 0$.

   Segue imediatamente que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Unidade 16

Funções Iteradas (1)

Exercícios 92 a 99

O objetivo desta aula é exercitar a ideia de cálculo iterado de uma função que será intensivamente usada para resolver recorrências. Para resolver recorrências do tipo

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n),$$

é preciso saber determinar a expressão de $h^k(n)$, $s^k(n)$ e $m^k(n)$ a partir das expressões de $h(n)$, $s(n)$ e $m(n)$, respectivamente.

Definição. *Sejam A, B, C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$. A* composição *de f com g é a função $f \circ g\colon A \to C$ dada por*

$$f \circ g(x) := g(f(x)).$$

Definição. *Seja A um conjunto e $f\colon A \to A$ uma função. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^n\colon A \to A$ como*

$$f^n(a) = (\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n vezes})(a) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n vezes}(a))).$$

Mais precisamente,

$$f^n := \begin{cases} I, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1} \circ f, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

onde $I\colon A \to A$ denota a função identidade, dada por

$$I(a) = a \text{ para todo } a \in A.$$

Exercício 91 [default,ex:funcoes-iteradas]

Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

1. $f(x) = x + 1$.
2. $f(x) = x + 2$.
3. $f(x) = x + 3$.
4. $f(x) = x + s$.
5. $f(x) = 2x$.
6. $f(x) = 3x$.
7. $f(x) = mx$.
8. $f(x) = s + mx$.

Resposta:

1. $f(x) = x + 1$: $f^n(x) = x + n$
2. $f(x) = x + 2$: $f^n(x) = x + 2n$
3. $f(x) = x + 3$: $f^n(x) = x + 3n$
4. $f(x) = x + s$: $f^n(x) = x + ns$
5. $f(x) = 2x$: $f^n(x) = 2^n x$
6. $f(x) = 3x$: $f^n(x) = 3^n x$
7. $f(x) = mx$: $f^n(x) = m^n x$
8. $$f^n(x) = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i.$$

   Se $m = 1$,

   $$f^n(x) = 1^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = x + sn.$$

e, se $m \neq 1$ (Ex. 57),

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^i = \frac{m^n - 1}{m - 1},$$

e, portanto,

$$f^n(x) = m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Teorema 22. *Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = s + mx, \ \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

então, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração. Exercício 68 □

Unidade 17

Funções Iteradas (2)

Exercícios 92 a 99

Teorema 23. *Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.*

Demonstração. Exercício 41 (Cálculo I). □

Teorema 24. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Então $f \circ g\colon A \to C$ é crescente.*

Demonstração. Exercício 42 □

Teorema 25. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções integralizadas, isto é, satisfazendo*

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \\ g(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B. \end{aligned}$$

Então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

Demonstração. Exercício 44 □

Corolário 26. *Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas, crescentes e integralizadas. Então, para todo $x \in A$,*

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

Demonstração. Exercício 43. □

Corolário 27. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada. Então, para todo $x \in A$, e todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ e seja $f\colon A \to A$ uma função contínua, crescente e integralizada.

Seja $x \in A$. Vamos provar por indução em n que

$$\begin{aligned} \lfloor f^n(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f^n(x) \rfloor, \\ \lceil f^n(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f^n(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor, \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil, \end{aligned}$$

para todo $k \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

1. $\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^{a+1}(x) \rfloor$, e
2. $\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f^{a+1}(x) \rceil$.

1. Vamos provar que

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor.$$

Se $a + 1 > 0$, então

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f^a \circ f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(f^a(\lfloor x \rfloor)) \rfloor,$$

e como $1 \in [0..a]$ pela HI temos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(x) \right\rfloor$$

isto é

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$$

então

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(f^a(\lfloor x \rfloor)) \rfloor$$
$$= \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor .$$

Como $a \in [0..a]$, pela HI também temos que

$$\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f^a(x) \rfloor$$

e portanto,

$$\left\lfloor f^{a+1}(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor f^a(\lfloor x \rfloor) \rfloor) \rfloor$$
$$= \lfloor f(\lfloor f^a(x) \rfloor) \rfloor .$$

Finalmente, do Corolário 26 temos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor f^a(x) \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(f^a(x)) \right\rfloor = \left\lfloor f^{a+1}(x) \right\rfloor .$$

2. A prova de que

$$\left\lceil f^{a+1}(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^{a+1}(x) \right\rceil ,$$

segue um argumento em tudo análogo ao acima.

Base: Vamos provar que f^k satisfaz

$$\begin{aligned} \left\lfloor f^k(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor &= \left\lfloor f^k(x) \right\rfloor , \\ \left\lceil f^k(\lceil x \rceil) \right\rceil &= \left\lceil f^k(x) \right\rceil , \end{aligned}$$

para todo $k \leq 1$.

Para $k = 0$ temos

$$\left\lfloor f^0(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor ,$$

e

$$\left\lfloor f^0(x) \right\rfloor = \lfloor x \rfloor ,$$

e portanto,

$$\left\lfloor f^0(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^0(x) \right\rfloor .$$

Pelo mesmo argumento concluímos que

$$\left\lceil f^0(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^0(x) \right\rceil$$

Para $k = 1$ temos

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor,$$

e como a função f é contínua, crescente e integralizada, temos do Teorema 15 que

$$\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor.$$

Como

$$\left\lfloor f^1(x) \right\rfloor = \lfloor f(x) \rfloor,$$

concluímos que

$$\left\lfloor f^1(\lfloor x \rfloor) \right\rfloor = \left\lfloor f^1(x) \right\rfloor.$$

Pelo mesmo argumento concluímos que

$$\left\lceil f^1(\lceil x \rceil) \right\rceil = \left\lceil f^1(x) \right\rceil$$

□

Corolário 28. *Sejam $k \neq 0$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

Então

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Exercícios 93 □

Parte II

Recorrências

Unidade 18

Recorrências

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Queremos uma expressão não recursiva para $f(n)$.

Para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + 1 \\ &= (f((n-1)-1) + 1) + 1 = f(n-2) + 2 \\ &= (f((n-2)-1) + 1) + 2 = f(n-3) + 3 \\ &= \dots \\ &= f(n-u) + u, \end{aligned}$$

onde u é o menor inteiro tal que

$$n - u < 1,$$

ou seja,

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}.$$

Como

$$n - k < 1$$

se e somente se

$$n - k \leq 0$$

se e somente se

$$k \geq n,$$

então

$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} = n,$$

ou seja,

$$u = n,$$

e

$$f(n) = f(n-u) + u = f(n-n) + n = f(0) + n.$$

Em resumo, se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

então

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercício 100.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Para todo $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-2) + 1 \\ &= (f((n-2)-2)+1)+1 = f(n-4)+2 \\ &= (f((n-4)-2)+1)+2 = f(n-6)+3 \\ &= \ldots \\ &= f(n-2u)+u, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < 2\}.$$

Como

$$n - 2k < 2,$$

se e somente se

$$2k > n - 2,$$

ou seja,

$$k > \frac{n-2}{2},$$

então

$$u = \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-2k < 2\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{n-2}{2}\right\} \overset{\text{T 13}}{=} \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Então

$$f(n) = f(n-2u) + u = f\left(n - 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right) + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

Para n par, temos

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2},$$

e daí

$$f\left(n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = f\left(n - 2\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} = f(0) + \frac{n}{2}.$$

Para n ímpar, temos

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2},$$

e daí

$$f\left(n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor=f\left(n-2\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n-1}{2}=f(1)+\frac{n-1}{2}.$$

Então, para todo $n \geq 2$,

$$f(n)=\begin{cases} f(0)+\frac{n}{2}, & \textsf{se } n \text{ é par,}\\ f(1)+\frac{n-1}{2}, & \textsf{se } n \text{ é ímpar,}\end{cases}$$

ou seja,

$$f(n)=f(n \bmod 2)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, \textsf{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Em resumo, se

$$f(n)=f(n-2)+1, \textsf{ para todo } n\geq 2,$$

então

$$f(n)=f(n \bmod 2)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, \textsf{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $f, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + 1 \\
&= (f(h(h(n))) + 1) + 1 = f(h^2(n)) + 2 \\
&= (f(h(h^2(n)) + 1) + 2 = f(h^3(n)) + 3 \\
&= \dots \\
&= f(h^u(n)) + u,
\end{aligned}$$

Então,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Exercício 101 [default,ex:rec-log]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Fazendo

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

temos

$$\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\
n_0 &= 2
\end{aligned}$$

e (C. 27)

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u.$$

onde
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Inserir ilustracao de que: $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1 < 2$ e $\frac{n}{2^k} < 2$

Como
$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$
se e somente se
$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1,$$
se e somente se
$$\frac{n}{2^k} < 2,$$
ou seja,
$$2^{k+1} > n,$$
e portanto,
$$k + 1 > \lg n,$$
isto é
$$k > \lg n - 1,$$
então
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}$$
$$= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\}. \overset{\text{T.13}}{=} \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1$$
$$= \lfloor \lg n \rfloor .$$

Então,
$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor$$

Como (Ex. 37)
$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0,$$
então
$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor = f(1) + \lfloor \lg n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1,$$
ou seja,
$$f(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h(n)) + s(n) \\
&= f(h(h(n)) + s(n) + s(h(n)) \\
&= f(h^2(n)) + s(n) + s(h(n)) \\
&= f(h(h^2(n))) + s(n) + s(h(n)) + s(h^2(n)) \\
&= f(h^3(n)) + s(n) + s(h(n)) + s(h^2(n)) \\
&= \ldots \\
&= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Exercício 102 [default,ex:rec-b]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

A solução é (Ex. 97)

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\
s(n) &= n \bmod 2, \\
n_0 &= 1, \\
u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.
\end{aligned}$$

Então
$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$
e
$$h^k(n) < n_0,$$
se e somente se
$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 1,$$
ou seja,
$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0,$$
ou seja,
$$\frac{n}{2^k} < 1,$$
ou seja,
$$2^k > n,$$
e portanto,
$$k > \lg n.$$

Então
$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n\right\} \\ &\overset{\text{T. }13}{=} \lfloor \lg n + 1 \rfloor \\ &\overset{\text{T. }10}{=} \lfloor \lg n \rfloor + 1, \end{aligned}$$
e
$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor.$$

Então

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor + 1 - 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\
&= f(0) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right).
\end{aligned}
$$

Então

$$
f(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right), \text{ para todo } n \geq 1.
$$

Exercícios 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108.

Unidade 19

Mais Recorrências

1. formular e acrescentar o Exercício 18.
2. exemplo de contagem de permutações? injeções?
3. enriquecer com mais e mais variadas recorrências o Exercício 111
4. formular sugestões e acrescentar o Exercício 7

$$f(n) = m(n)f(h(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= m(n)f(h(n)) \\
&= m(n)m(h(n))f(h(h(n)) \\
&= m(n)m(h(n))f(h^2(n)) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h(h^2(n))) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) \\
&= \dots \\
&= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Exercício 109 [default,ex:recorrencia-pg]

Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. $$f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

2. $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

   onde

   $$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= q, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 1. \end{aligned}$$

   Então

   $$h^k(n) = n - k,$$

   e

   $$h^k(n) < n_0$$

   se e somente se

   $$n - k < 1,$$

   ou seja,

   $$k > n - 1$$

   e

   $$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \\ &= n, \end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = h^n(n) = n - n = 0,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(0) \prod_{i=0}^{n-1} q = f(0)q^n.$$

Exercício 110 [default,ex:pre-fibonacci]

Resolva as seguintes recorrências

1. $$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

2. $$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Resposta:

1. $$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

   onde

   $$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= 2, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

   Então
   $$h^k(n) = n - k,$$
   e
   $$h^k(n) < n_0$$
   se e somente se
   $$n - k < 2,$$
   ou seja,
   $$k > n - 2$$
   e

   $$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 2\} \\ &= n - 1, \end{aligned}$$

   e
   $$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(1) \prod_{i=0}^{(n-1)-1} 2 = f(1) \prod_{i=0}^{n-2} 2 = f(1) 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

2.

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ h(n) &= n - 2, \\ m(n) &= 2, \\ n_0 &= 2, \end{aligned}$$

e daí

$$h^k(n) = n - 2k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n - 2k < 2,$$

ou seja,

$$k > \frac{n-2}{2}$$

e

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < n_0\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{n-2}{2}\right\} \\ &= \left\lfloor \frac{n-2}{2} + 1 \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = h^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Se n é par, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n}{2}\right) = n - n = 0.$$

Se n é ímpar, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right) = n - (n-1) = 1.$$

Então

$$h^u(n) = n \bmod 2,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(n \bmod 2)\prod_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 2 = f(n \bmod 2)2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Se n é par, então

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\frac{n}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^n = (\sqrt{2})^n.$$

Se n é ímpar, então

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\frac{n-1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1}.$$

Então

$$f(n) = f(n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-(n \bmod 2)} = \frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}}(\sqrt{2})^n$$

Se n é par,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}}(\sqrt{2})^n = \frac{f(0)}{(\sqrt{2})^0}(\sqrt{2})^n = \frac{0}{1}(\sqrt{2})^n = 0.$$

Se n é ímpar,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}}(\sqrt{2})^n = \frac{f(1)}{(\sqrt{2})^1}(\sqrt{2})^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n-1}$$

Então

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n \text{ é par,} \\ (\sqrt{2})^{n-1}, & \textsf{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

ou seja

$$f(n) = (n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1}$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)(m(h(n))f(h^2(n) + s(h(n))) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))f(h^2(n) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))(m(h^2(n))f(h^3(n)) + s(h^2(n))) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= m(n)m(h(n))m(h^2(n))f(h^3(n)) + m(n)m(h(n))s(h^2(n)) + m(n)s(h(n)) + s(n) \\
&= \dots \\
&= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

Teorema 29. *Sejam* $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *e* $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Demonstração. Exercício 99. □

Resolver a recorrência de T^- no exercício abaixo.

Exercício 113 [default,ex:recorrencia-mergesort]

O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 55 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

1. Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.
2. Use as soluções obtidas e o Exercício 40 para concluir que $T(n) \approx n \lg n$.

Resposta:

1. Do Teorema 29, temos

$$T^-(n) = T^-(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n - 1, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$h^i(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor,$$

e

$$m(h^i(n)) = 2,$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^j(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

e

$$s(h^i(n)) = h^i(n) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Então

$$\begin{aligned}
T^-(n) = T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) 2^i \\
&= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\
&= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \frac{2^{(u-1)+1} - 1}{2 - 1} \\
&= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1,
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

ou seja,

$$n < 2^{k+1},$$

ou seja,

$$k + 1 > \lg n,$$

isto é,

$$k > \lg n - 1.$$

Então,

$$
\begin{aligned}
u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\} \\
= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\right\} \overset{\text{T. } 13}{=} \lfloor \lg n - 1 + 1 \rfloor \\
= \lfloor \lg n \rfloor .
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
T^-(n) &= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1 \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \\
&\overset{\text{Ex. } 37}{=} 2^{\lfloor \lg n \rfloor} T(1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1
\end{aligned}
$$

Por desenvolvimento análogo chegamos a

$$
T^+(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1.
$$

2. Do Exercício 55 temos

$$
T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
$$

Do Exercício 40 temo que

$$
\begin{aligned}
T^-(n) &\approx n \lg n, \\
T^+(n) &\approx n \lg n.
\end{aligned}
$$

Consequentemente (Ex. 22)

$$
T(n) \approx n \lg n.
$$

Exercícios 109, 110, 111, 112, 113, 114.

Unidade 20

Recorrências Lineares Homogêneas

1. formular o ex. 10
2. incorporar os resultados no apêndice

Definição. *Uma recorrência linear homogênea (RLH) é uma recorrência da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

Exemplo.

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Observe que se $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ são tais que

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$, e ainda,

$$f^-(0) = f(0) = f^+(0) = 0, \text{ e}$$
$$f^-(1) = f(1) = f^+(1) = 1,$$

então (Exercício 90)

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como (Exercício 110),

$$\begin{aligned} f^-(n) &= (n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1}, \\ f^+(n) &= 2^{n-1}, \end{aligned}$$

então

$$(n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1} \leq f(n) \leq 2^{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notação. *Se A e B são conjuntos, B^A denota o conjunto das funções $A \to B$.*

Definição. *Dados $z \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ definimos as funções $f+g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dadas por*

$$\begin{aligned}(f+g)(n) &= f(n)+g(n),\\ (zf)(n) &= zf(n).\end{aligned}$$

Exemplo.

$$\begin{aligned}f(n) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\\ g(n) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\\ z &= \frac{\sqrt{5}}{5},\\ f(n)+g(n) &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\\ zf(n) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\end{aligned}$$

Teorema 30. *$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.*

Demonstração. Exercício 115. □

Teorema 31. *$(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Exercício 115. □

Exemplo. *Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $z \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\begin{aligned}f(n) &= f(n-1)+f(n-2),\\ g(n) &= g(n-1)+g(n-2),\end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$.

Então, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}(f+g)(n) &= f(n)+g(n)\\ &= (f(n-1)+f(n-2))+(g(n-1)+g(n-2))\\ &= (f(n-1)+g(n-1))+(f(n-2)+g(n-2))\\ &= (f+g)(n-1)+(f+g)(n-2)\end{aligned}$$

e para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$(zf)(n) = z(f(n)) = z(f(n-1) + f(n-2)) = (zf)(n-1) + (zf)(n-2).$$

O conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ das funções que satisfazem a recorrência de Fibonacci é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ de dimensão 2.

Se $\{f_1, f_2\}$ é uma base de $\mathcal{F}$, então toda função que satisfaz a recorrência de Fibonacci pode ser escrita como combinação linear de f_1 e f_2, isto é, para todo $f \in \mathcal{F}$ existem $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $r \in \mathbb{C} - \{0\}$ e seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(n) = r^n.$$

Se f é uma função da base de $\mathcal{F}$, então f satisfaz a recorrência de Fibonacci, isto é,

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2,$$

ou seja

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e portanto,

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e portanto,

$$r^{n-2}(r^2 - r - 1) = 0, \text{ para todo } n \geq 2,$$

e como $r \neq 0$, então

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

ou seja,

$$r \in \left\{ r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Então as únicas funções não nulas do tipo

$$f(n) = r^n,$$

que satisfazem a recorrência de Fibonacci são

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\ f_2(n) &= r_2^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Como f_1 e f_2 são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ (Exercício 116) e $\mathcal{F}$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$, concluímos que o conjunto $\{f_1, f_2\}$ forma uma base de $\mathcal{F}$.

Consequentemente, toda função $F \in \mathcal{F}$ pode ser escrita como combinação linear das funções f_1 e f_2.

Noutras palavras, se F satisfaz a recorrência de Fibonacci, então existem $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$F = c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

ou seja,
$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar os valores de c_1 e c_2, temos que

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) \\ F(1) &= c_1 f_1(1) + c_2 f_2(1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} F(0) &= c_1 r_1^0 + c_2 r_2^0 \\ F(1) &= c_1 r_1^1 + c_2 r_2^1. \end{aligned}$$

No caso da sequência de Fibonacci temos

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 r_1 + c_2 r_2, \end{aligned}$$

e, portanto,
$$c_1 = -c_2,$$

e, consequentemente,

$$1 = -c_2 r_1 + c_2 r_2 = c_2(r_2 - r_1),$$

e, portanto,
$$c_2 = \frac{1}{r_2 - r_1},$$

e, consequentemente,
$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{r_1 - r_2}.$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$F(n) = c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) = \frac{1}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{1}{r_2 - r_1} r_2^n.$$

Como
$$r_2 > r_1,$$

fica melhor

$$F(n) = \frac{1}{r_2 - r_1} \left(r_2^n - r_1^n\right),$$

isto é,

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Exercícios 115, 116.

Unidade 21

Recorrências Lineares Homogêneas Passadas a Limpo

Definição. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, denotamos por $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k) := \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ & f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ & \text{para todo } n \geq k\}.\end{aligned}$$

Teorema 32. *Dados $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, o conjunto $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.*

Demonstração. Exercício 117 □

Definição. *O* polinômio característico *do espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ é o polinômio*

$$X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k.$$

Exemplo. *O conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo*

$$f(n) = 2f(n-1) - f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2,$$

é o espaço vetorial $\mathcal{R}(2, -1)$, cujo polinômio característico é $X^2 - 2X + 1$.

O conjunto $\{r_1^n, r_2^n\}$, onde r_1 e r_2 são as raízes de $X^2 - 2X + 1$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(2, -1)$.

Só que $r_1 = r_2$ ...

Teorema 33. *A função $n^{m-1}r^n$ pertence ao espaço vetorial $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ se e somente se $(X-r)^m$ divide o polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.*

Demonstração. $\boxed{\text{completar}}$ □

Teorema 34. *Se $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, então o conjunto*

$$\left\{n^j r^n \mid 0 \leq j < m\right\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Exemplo. *O conjunto $\{n^0 r_1^n, n^1 r_1^n\}$, é linearmente independente em $\mathcal{R}(2, -1)$.*

Então toda função $f \in \mathcal{R}(2, -1)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 r_1^n$ e $n^1 r_1^n$, isto é, existem $c_{1,0}, c_{1,1} \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = c_{1,0} n^0 r_1^n + c_{1,1} n^1 r_1^n.$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} r_1^n + c_{1,1} n r_1^n.$$

Os valores de $c_{1,0}$ e $c_{1,1}$ podem ser determinados pelo sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} r_1^0 + c_{1,1}(0) r_1^0, \\ f(1) &= c_{1,0} r_1^1 + c_{1,1}(1) r_1^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}, \\ f(1) &= c_{1,0} r_1 + c_{1,1} r_1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= f(0), \\ c_{1,1} &= \frac{f(1)}{r_1} - f(0), \end{aligned}$$

e portanto,

$$f = f(0) r_1^n + \left(\frac{f(1)}{r_1} - f(0)\right) n r_1^n = \left(f(0) + \left(\frac{f(1)}{r_1} - f(0)\right) n\right) r_1^n$$

No exemplo tínhamos $r_1 = 1$ e portanto,

$$f = (f(1) - f(0))n + f(0),$$

ou seja,

$$f(n) = (f(1) - f(0))n + f(0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário 35. *Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_l$ as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_l$, respectivamente. Então o conjunto*

$$\bigcup_{i=1}^{l} \{n^j r_i^n \mid 0 \leq j < m_i\}$$

é uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Corolário 36. *Se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ são as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_l$, respectivamente, e $\{c_{i,j} \mid 1 \leq i \leq l \text{ e } 0 \leq j < m_i\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} a^j r_i^a, 0 \leq a < k.$$

Exercício 118 [default,ex:exemplos-rlh]

Resolva as seguintes recorrências.

1. $$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

2. $$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

3.
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Resposta:

1.
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([5,-7,3],init=[(0,0),(1,1),(2,2)],
  verbose=sys.stdout)characteristic polynomial: X^3
  - 5*X^2 + 7*X - 3
roots and multiplicities: [(3, 1), (1, 2)]
generic solution: n |--> 3^n*c_1_0 + c_2_1*n +
  c_2_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 2)]
linear system: [0 == c_1_0 + c_2_0, 1 == 3*c_1_0 +
  c_2_0 + c_2_1, 2 == 9*c_1_0 + c_2_0 + 2*c_2_1]
particular solution: n |--> n
```

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{11}n1^n + c_{20}3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 0, \quad c_{11} = 1, \quad c_{20} = 0.$$

e portanto,

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2.
$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([9,-27,27],init=[(0,1),(1,9),(2,9)],
  verbose=sys.stdout)
```

$$f(n) = c_{10}3^n + c_{11}n3^n + c_{12}n^2 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 4, \quad c_{12} = -2.$$

e portanto,

$$f(n) = 3^n + 4n3^n - 2n^2 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3.
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([3,-1,3],init=[(0,3),(1,3),(2,7)],
  verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 7*X^2 + 16*X - 12
roots and multiplicities: [(3, 1), (2, 2)]
generic solution: n |--> 2^n*c_2_1*n + 3^n*c_1_0 +
  2^n*c_2_0
```

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{11}n2^n + c_{20}3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 1, \quad c_{20} = -1.$$

e portanto,

$$f(n) = 2^n + n2^n - 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercícios 105, 119, 120, 121.

Unidade 22

Recorrências Lineares não Homogêneas

- formular Ex 13 e Ex 14 em termos de
  1. enunciar o algoritmo
  2. tirar dele a recorrência
  3. resolver a recorrência
- Acrescentar um exercício sobre RLnH onde $g(n)$ é um polinômio com mais de um coeficiente não-nulo, por exemplo: $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + 6n + 3$, para explorar o seguinte resultado.

  Dados $c_1, \ldots, c_l, r_1, \ldots, r_l \in \mathbb{C}$ distintos e $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$, a função

  $$f(n) = c_1 n^{k_1} r_1^n + \ldots + c_l n^{k_l} r_l^n$$

  satisfaz uma RLH cujo PC é

  $$(X - r_1)^{k_1+1} \ldots (X - r_l)^{k_l+1}$$

  Corolário cor:g-geral.

Definição. *Uma* Recorrência Linear não Homogênea *(RLnH) é uma recorrência da forma*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

onde $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Teorema 37. *Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que*

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k,$$

Se g satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é G, então f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-2} X^2 - a_{k-1} X - a_k).$$

Exercício 122b [default,ex:rec-arvore-binaria-tamanho-maxima]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1.$$

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 2)$$

e então

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{20}2^n = c_{10} + c_{20}2^n$$

onde c_{10}, e c_{20} são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{20}2^0, \\ f(1) &= c_{10} + c_{20}2^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10} + c_{20}, \\ 2f(0) + 1 &= c_{10} + 2c_{20}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_{10} &= -c_{20}, \\ 1 &= -c_{20} + 2c_{20} = c_{20}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{10} = -1,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{10} + c_{20}2^n = -1 + 1 \times 2^n = 2^n - 1,$$

para todo $n > 0$.

Como ainda

$$2^0 - 1 = 0 = f(0),$$

então

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve(characteristic_polynomial([2])*(X-1),
  verbose=sys.stdout,init=[(0,0),(1,1)])
characteristic polynomial: (X - 2)*(X - 1)
roots and multiplicities: [(1, 1), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c20 + c10
particular solution: n |--> 2^n - 1
n |--> 2^n - 1
```

Corolário 38. *Dados $k \in \mathbb{N}$ e $c, r \in \mathbb{C}$, a função*

$$g(n) = cn^k r^n,$$

satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$(X - r)^{k+1}.$$

Demonstração. Imediato a partir do T. 33. □

Exemplo. *Na solução do Exercício 122b temos*

$$g(n) = 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e observamos que g satisfaz a RLH

$$g(n) = g(n - 1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

cujo PC é

$$X - 1.$$

Observando que

$$g(n) = 1n^0 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)^{0+1} = X - 1.$$

Exemplo. *Seja $g(n) = 3n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observando que*

$$g(n) = 3n = 3n^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)^{1+1} = (X - 1)^2.$$

Similarmente esboçar exemplo para $g(n) = n^2$ e $g(n) = 3n.2^n$.

Exercício 122c [default,ex:rec-linearizacao-matrizes]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Resposta:

$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = n.$$

Como

$$n = 1n^1 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^2,$$

e f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3,$$

e

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ f(1) &= c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ f(2) &= c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ f(0) + 1 &= c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ f(1) + 2 &= c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ 1 &= c_{11} + c_{12}, \\ 3 &= 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{12} = 1 - c_{11},$$

e

$$2c_{11} + 4(1 - c_{11}) = 3,$$

ou seja

$$-2c_{11} = -1,$$

e portanto,

$$c_{11} = \frac{1}{2},$$

e

$$c_{12} = 1 - c_{11} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$f(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $n > 0$.

Como ainda

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0 = f(0),$$

então

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve(characteristic_polynomial([1])*(X-1)
  ^2,verbose=sys.stdout,init=[(0,0),(1,1),(2,3)])
characteristic polynomial: (X - 1)^3
roots and multiplicities: [(1, 3)]
generic solution: n |--> c12*n^2 + c11*n + c10
particular solution: n |--> 1/2*n^2 + 1/2*n
n |--> 1/2*n^2 + 1/2*n
```

Corolário 39. *Se $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem recorrências lineares homogêneas cujos polinômios característicos são, respectivamente, F e G, então $f + g$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é FG.*

Demonstração. Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo recorrências lineares homogêneas cujos polinômios característicos são, respectivamente, F e G, de maneira que

$$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k.$$

Então, para todo $n \geq k$,

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n),$$

e, portanto (T. 37), $(f+g)(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k) = GF = FG.$$

□

Exercício 122k [default,ex:fibonacci+1]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X-1)(X^2 - X - 1),$$

e cujas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 36, temos

$$\begin{aligned} f(n) &= c_{1,0} r_1^n + c_{2,0} r_2^n + c_{3,0} r_3^n \\ &= c_{1,0} 1^n + c_{2,0} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{3,0} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= c_{1,0} + c_{2,0} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{3,0} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}
f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0,\\
f(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1,\\
f(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0},\\
1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\\
f(0) + f(1) + 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0},\\
1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right),\\
2 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= -1,\\
c_{2,0} &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10},\\
c_{3,0} &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

Exercício 122d [default,ex:rlnh-2]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0) + 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1) + 2 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}0 &= c_{1,0} + c_{2,0},\\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0},\\ 4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}c_{1,0} &= -2,\\ c_{1,1} &= -1,\\ c_{2,0} &= 2,\end{aligned}$$

e portanto,

$f(n) = c_{1,0}+c_{1,1}n+c_{2,0}2^n = 22^n-n-2, = 2^{n+1}-n-2,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: X=var('X')
sage: rsolve((X-1)**2*(X-2), init=[(0,0),(1,1)
  ,(2,4)], verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)^2*(X - 2)
roots and multiplicities: [(1, 2), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c_2_0 + c_1_1*n +
  c_1_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 4)]
particular solution: n |--> 2*2^n - n - 2
n |--> 2*2^n - n - 2
```

Exercícios 122, 123, 124, 125.

Unidade 23

Somatórios

1. acrescentar

   Se
   $$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i^k r^i$$
   então
   $$s(n) = c_o + \sum_{i=0}^{k} c_{i,j} n^i r^n$$
   onde ...

2. precisa de mais um exercício? Ex. 14?

Corolário 40. *Se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é F, então a função $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$$

satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é $(X-1)F$.

Demonstração. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que f satisfaz uma recorrência linear cujo polinômio característico é F e seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i).$$

A função s satisfaz a recorrência

$$s(n) = s(n-1) + f(n),$$

e daí (T. 37) s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)F$. $\square$

Exercício 126 [default,ex:sum-i]

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Resposta:

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1, 1, verbose=sys.stdout)
```

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

onde

$$g(n) = n,$$

e

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos do Corolário 38 que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2,$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2})$ é a solução do sistema

$$\begin{array}{rcl} s(0) & = & c_{1,0} + c_{1,1}0^1 + c_{1,2}0^2, \\ s(1) & = & c_{1,0} + c_{1,1}1^1 + c_{1,2}1^2, \\ s(2) & = & c_{1,0} + c_{1,1}2^1 + c_{1,2}2^2, \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{1,0}, \\ 1 & = & c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 & = & c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{array}$$

e portanto,

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 & = & 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{array}$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} c_{1,0} & = & 0, \\ c_{1,1} & = & \dfrac{1}{2}, \\ c_{1,2} & = & \dfrac{1}{2}, \end{array}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 = c_{1,0} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercício 127 [default,ex:recorrencia-pg-rlh]

Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[1] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

2. Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

3. Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Resposta:

1. $f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$

2. Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$ e daí,
   $$f(n) = c_{1,0}q^n,$$
   onde $c_{1,0}$ é dado por
   $$f(0) = c_{1,0}q^0,$$
   isto é
   $$c_{1,0} = f(0),$$
   e, portanto,
   $$f(n) = f(0)q^n$$

3. Como
   $$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

[1] cfr. Exercício 109

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-q)$. e daí (C. 36),

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{2,0}q^n = c_{1,0} + c_{2,0}q^n,$$

onde $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^0 = c_{1,0} + c_{2,0}, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^1 = c_{1,0} + c_{2,0}q, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

e portanto,

$$c_{2,0} = -c_{1,0},$$

e

$$f(0) = c_{1,0} + c_{2,0}q = c_{1,0} - c_{1,0}q,$$

e portanto,

$$c_{1,0} = f(0)/(1-q),$$

e

$$c_{2,0} = -c_{1,0} = -f(0)/(1-q)$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\ &= f(0)\frac{q^n-1}{q-1}. \end{aligned}$$

Exercício 128 [default,ex:recorrencia-pa-rlnh]

Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[2] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

1. Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.
2. Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.
3. Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Resposta:

1. $f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1.$
2. Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

   Como

$$g(n) = rn^0 1^n,$$

   temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1),$$

   e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-1) = (X-1)^2,$$

   e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0} n^0 1^n + c_{1,1} n^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

[2] cfr. Exercício 106

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1}, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}, \\ f(0) + r &= c_{1,0} + c_{1,1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_{1,1} = f(0) + r - c_{1,0} = f(0) + r - f(0) = r,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n = f(0) + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X-1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

e daí (C. 36),

$$s(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ s(1) &= c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ s(2) &= c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = c_{10},$$

e

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{11} + c_{12}, \\ f(0) + f(0) + r &= 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_{1,2} = f(0) - c_{1,1}$$

e

$$2f(0) + r = 2c_{1,1} + 4(f(0) - c_{1,1}) = -2c_{1,1} + 4f(0),$$

ou seja,

$$c_{1,1} = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c_{1,2} = f(0) - c_{1,1} = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2 - n)}{2} \\ &= f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r. \end{aligned}$$

Portanto,

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0.$$

O Exercício 28 sugere usar o fato de que

$$\sum_{j=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2,$$

para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

Exercício 129 [default,ex:sum-i2i]

Dê uma expressão[3] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Resposta:

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1, 2, verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 2)^2*(X - 1)
roots and multiplicities: [(1, 1), (2, 2)]
generic solution: n |--> 2^n*c21*n + 2^n*c20 + c10
initial conditions: [(0, 0), (1, 2), (2, 10)]
particular solution: n |--> 2*2^n*n - 2*2^n + 2
n |--> 2*2^n*n - 2*2^n + 2
```

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^1 2^n,$$

e daí, do Corolário 38 temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-2)^{1+1} = (X-2)^2,$$

e daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

[3] cfr. Exercício 46

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{2,0}n^0 2^n + c_{2,1}n^1 2^n = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1, \\ s(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}(1) + c_{2,1}(0)1, \\ 0 + 12^1 &= c_{1,0} + c_{2,0}(2) + c_{2,1}(1)2, \\ 0 + 12^1 + 22^2 &= c_{1,0} + c_{2,0}(4) + c_{2,1}2(4), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2 &= c_{1,0} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1}, \\ 10 &= c_{1,0} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 2, \\ c_{2,0} &= -2, \\ c_{2,1} &= 2. \end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

Exercícios 126 127, 128, 129, 130, 131, 132.

Unidade 24

Algumas Aplicações

Exercício 133 [default,ex:linearizacao-matrizes]

Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

1. Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

2. Resolva esta recorrência.

3. Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

completar com itens pedindo código em C implementando esta idéia.

Resposta:

1.
$$N(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ N(n-1) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

2. Esta recorrência é a mesma do Exercício 122c e sua solução é
$$N(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. Seja $p(i,j)$ a posição de v ocupada por $M[i,j]$, isto é

$$v[p(i,j)] = M[i,j], \text{ para todo } 1 \le i,j \le n.$$

Claramente

$$p(i,i) = N(i) - 1, \text{ para todo } 1 \le i \le n,$$

e, em geral,

$$p(i,j) = p(i-1,i-1) + j, \text{ para todo } 1 \le j \le i \le n,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} p(i,j) &= p(i-1,i-1) + j \\ &= N(i-1) - 1 + j \\ &= \frac{(i-1)((i-1)+1)}{2} + j - 1 \\ &= \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$p(i,j) = \frac{i(i-1)}{2} + j - 1,$$

para todo $1 \le j \le i \le n$.
Para $p^{-1}(n)$, seja i o único inteiro tal que

$$p(i-1,i-1) < n \le p(i,i).$$

Então o índice n representa uma entrada da linha i da matriz M, na coluna

$$j = n - p(i-1,i-1).$$

De

$$p(i-1,i-1) < n$$

temos

$$i^2 - i - 2 - 2n < 0,$$

ou seja

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2} < i < \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2}.$$

De

$$n \leq p(i,i)$$

temos

$$i^2 + i - 2 - 2n \geq 0,$$

ou seja

$$i \leq \frac{-1 - \sqrt{1+8(n+1)}}{2}$$

ou

$$i \geq \frac{-1 + \sqrt{1+8(n+1)}}{2}.$$

Mas como $i > 0$, então,

$$\frac{-1 + \sqrt{1+8(n+1)}}{2} \leq i < \frac{1 + \sqrt{1+8(n+1)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1+8(n+1)}}{2} + 1,$$

ou seja,

$$i = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1+8(n+1)}}{2} \right\rceil$$

e

$$j = n - p(i-1, i-1)$$

24.1 Árvores Binárias

Exercício 134 [default,ex:altura-arvore]

Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário} . \end{cases}$$

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

1. Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. Da definição de $h^+(n)$ temos

$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}.$$

Então,

$$h(T) \leq h^+(|T|), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned} h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\ &= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\ &= \max\{1 + \max\{h(E(T)), h(D(T))\} \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} \\ &= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\ &= 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\}. \end{aligned}$$

Como h^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = h^+(n-1),$$

e daí,

$$h^+(n) = 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = 1 + h^+(n-1),$$

ou seja

$$h^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1 + h^+(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

2. Esta é a mesma recorrência do Exercício 122a e sua solução é

$$h^+(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 41. *Para toda árvore binária T,*

$$h(T) \leq |T|.$$

Demonstração. Fazendo

$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}.$$

temos que

$$h(T) \leq h^+(|T|),$$

para toda árvore binária T, e daí (Ex. 134)

$$h(T) \leq |T|,$$

para toda árvore binária T. □

Exercício 135 [default,ex:nos-arvore]

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[1] de altura n.

1. Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. Da definição de $t^+(n)$ temos

$$t^+(n) = \max\{|T| \mid h(T) = n\}.$$

Então

$$|T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

e portanto,

$$h(T) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} &= \max\{|T| + |T| \mid h(T) < n\} \\
&= \max\{2|T| \mid h(T) < n\} \\
&= 2\max\{|T| \mid h(T) < n\} \\
&= 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\}.
\end{aligned}$$

Como t^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = t^+(n-1),$$

e daí,

$$\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} = 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = 2t^+(n-1).$$

e

$$\begin{aligned}
t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T))| + 1 \mid h(T) = n\} \\
&= \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} + 1 \\
&= 1 + 2t^+(n-1).
\end{aligned}$$

[1] Veja o Exercício 134.

Então
$$t^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2t^+(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

2. Esta é a mesma recorrência do Exercício 122b e sua solução é
$$t^+(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 42. *Para toda árvore binária T,*
$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \leq h(T) \leq |T|.$$

Demonstração. Fazendo
$$t^+(n) = \max \{|T| \mid h(T) = n\}.$$
temos,
$$|T| \leq t^+(h(T)),$$
para toda árvore binária T, e daí (Ex. 135)
$$|T| \leq 2^{h(T)} - 1,$$
para toda árvore binária T, e consequentemente,
$$\lg(|T| + 1) \leq h(T),$$
e portanto,
$$h(T) \geq \lg(|T| + 1),$$
e como $h(T)$ é inteiro, então
$$h(T) \geq \lceil \lg(|T| + 1) \rceil \stackrel{\text{Ex. 37}}{=} \lfloor \lg |T| \rfloor + 1.$$
□

24.2 Árvores AVL

Exercício 136 [default,ex:avl]

Seja AVL o conjunto das árvores binárias[2] T satisfazendo

$$\lambda \in \mathsf{AVL} \text{ e } E(T) \in \mathsf{AVL} \text{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

1. Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.
2. Resolva esta recorrência.

Resposta:

1. Da definição temos

$$t^-(n) = \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\}.$$

Como

$$\begin{aligned} t^-(n) &= \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\ &= \min\{|E(T)| + |D(T)| + 1 \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\ &= 1 + \min\{|E(T)| + |D(T)| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\} \\ &= 1 + \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-1\} \\ &\quad + \min\{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n-2\} \\ &= 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2), \end{aligned}$$

então

$$t^-(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ t^-(n-1) + t^-(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

2. t^- satisfaz uma RLnH cuja solução é (Ex. 122k)

$$t^-(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

[2] Veja o Exercício 134.

Teorema 43. *Para toda árvore* AVL *não trivial temos*

$$\lfloor \lg |T| \rfloor + 1 \leq h(T) < 1.4405 \lg |T|.$$

Demonstração. Fazendo

$$t^-(n) = \min \{|T| \mid T \in \mathsf{AVL} \text{ e } h(T) = n\}.$$

temos

$$t^-(h(T)) \leq |T|,$$

para toda árvore AVL T.

Como (Ex. 136)

$$\begin{aligned}
t^-(n) &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} + \frac{1}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right) \\
&= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)^n} + \frac{\frac{10}{5+3\sqrt{5}}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right) \\
&\approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Então, para toda árvore AVL T temos

$$|T| \geq t^-(h(T)) \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h(T)},$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\lg |T| &\geq \lg t^-(h(T)) \\
&\approx \lg\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h(T)}\right) \\
&= \lg \frac{5+3\sqrt{5}}{10} + h(T) \lg \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&> h(T) \lg \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Noutras palavras, existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) h(T) \leq \lg|T|, \text{ para todo } T \mid h(T) \geq h_0,$$

ou seja, para toda árvore AVL T tal que $h(T) \geq h_0$,

$$h(T) < \frac{1}{\lg\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \lg|T| < 1.4405 \lg|T|.$$

Fazendo os cálculos chegamos a $h_0 = 2$. $\square$

A altura de uma árvore AVL nunca é mais que 44.05% maior que a da árvore binária do mesmo tamanho de menor altura possível.

Unidade 25

Mais Aplicações

formular os exercícios 13, 14

25.1 Comparações no **QuickSort Aleatorizado**

quebrar as "mágicas" em exercícios

O QuickSort aleatorizado é a variante do QuickSort em que o índice do pivô é escolhido aleatoriamente de maneira uniforme.

Considere um vetor de n elementos distintos e seja

c: número de comparações na execução do QuickSort aleatorizado sobre um vetor de n elementos;

$C(n) := \mathbb{E}[c]$: número esperado de comparações na execução do QuickSort aleatorizado.

Se o pivô é o k-ésimo elemento do vetor, então o número de comparações será

$$c = (n-1) + C(k-1) + C(n-k)$$

O valor de k pode ser qualquer um de 1 a n. A média, que é o número esperado de comparações, será

$$\begin{aligned}
C(n) &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left((n-1)+C(k-1)+C(n-k)\right)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(n-1)+\sum_{k=1}^{n}C(k-1)+\sum_{k=1}^{n}C(n-k)\right) \\
&\overset{\text{j=n-k+1}}{=} \frac{1}{n}\left(n(n-1)+\sum_{k=1}^{n}C(k-1)+\sum_{j=1}^{n}C(j-1)\right) \\
&= n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}C(k-1) \\
&= n-1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}C(k).
\end{aligned}$$

Observe que, então,

$$nC(n) = n(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-1}C(k),$$

e

$$(n-1)C(n-1) = (n-1)(n-2)+2\sum_{k=0}^{n-2}C(k),$$

e daí,

$$\begin{aligned}
nC(n)-(n-1)C(n-1) &= n(n-1)+2\sum_{k=0}^{n-1}C(k)-\left((n-1)(n-2)+2\sum_{k=0}^{n-2}C(k)\right) \\
&= (n-1)(n-(n-2))+2\left(\sum_{k=0}^{n-1}C(k)-\sum_{k=0}^{n-2}C(k)\right) \\
&= 2(n-1)+2C(n-1),
\end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
C(n) &= \frac{(n-1)C(n-1)+2(n-1)+2C(n-1)}{n} \\
&= \frac{(n+1)C(n-1)+2(n-1)}{n} \\
&= \frac{(n+1)}{n}C(n-1)+\frac{2(n-1)}{n}
\end{aligned}$$

Exercício 137 [default,ex:quicksort]

Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n} C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Com a notação usual temos

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 1, \\ n_0 &= 2, \\ m(n) &= \frac{n+1}{n}, \text{ e} \\ s(n) &= \frac{2(n-1)}{n}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$n - k < 2,$$

isto é

$$k > n - 2,$$

e consequentemente,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 2\right\} = n - 1.$$

Como

$$C(n) = C(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

e

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$m(h^i(n)) = m(n-i) = \frac{n-i+1}{n-i}$$

e

$$s(h^i(n)) = s(n-i) = \frac{2(n-i-1)}{n-i}$$

então

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) &= \prod_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{n-i+1}{n-i} = \prod_{i=0}^{n-2} \frac{n-i+1}{n-i} \\
&= \frac{n-0+1}{n-0}\,\frac{n-1+1}{n-1} \cdots \frac{n-(n-3)+1}{n-(n-3)}\,\frac{n-(n-2)+1}{n-(n-2)} \\
&= \frac{n-0+1}{n-(n-2)} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \frac{n-0+1}{n-(i-1)} = \frac{n+1}{n-i+1}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) &= \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{2(n-i-1)}{n-i}\,\frac{n+1}{n-i+1} \\
&= 2(n+1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-i-1}{n-i}\,\frac{1}{n-i+1} \\
&\overset{\text{j=n-i}}{=} 2(n+1) \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j(j+1)} = 2(n+1) \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i(i+1)} \\
&= 2(n+1) \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i(i+1)} \right) \\
&= 2(n+1) \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right) \\
&= 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)
\end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1},$$

temos

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{2(n+1)}$$

e

$$\sum_{i=0}^{u-1}s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1}m(h^j(n))=2(n+1)\left(\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\right)$$
$$=2(n+1)\left(\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-\frac{n-1}{2(n+1)}\right)=2(n+1)\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-(n-1)$$
$$=2(n+1)\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-n+1.$$

Observando que

$$\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}=H(n+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}=H(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2},$$

temos

$$\sum_{i=0}^{u-1}s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1}m(h^j(n))=2(n+1)\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-n+1$$
$$=2(n+1)\left(H(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2}\right)-n+1$$
$$=2(n+1)H(n)+2-\frac{6(n+1)}{2}-n+1$$
$$=2(n+1)H(n)-3n-3-n+3$$
$$=2(n+1)H(n)-4n$$
$$=2nH(n)-4n+2H(n).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
C(n) &= C(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= C(1)\frac{n+1}{2} + 2nH(n) - 4n + 2H(n) \\
&= 2nH(n) - 4n + 2H(n) = 2nH(n)\left(1 - \frac{2}{H(n)} + \frac{1}{n}\right) \\
&\approx 2nH(n) \approx 2n\ln n = \frac{2}{\lg e} n \lg n \\
&< 1.39 n \lg n.
\end{aligned}$$

Exercício 114 [default,ex:master-method]

O "Master Method" ou "Master Theorem"[1] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 113 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+\left(\lceil n/b \rceil\right) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

Resposta:

Usando a notação do Teorema 29, temos

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor, \\ m(n) &= a, \\ s(n) &= f(n), \end{aligned}$$

e daí,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor,$$

e

$$T(n) = T(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\}. \end{aligned}$$

[1]Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

Como
$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor$$
e
$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} a = a^u,$$
e
$$\sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) = \sum_{i=0}^{u-1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right)$$
e
$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} a = a^i,$$
então,
$$T(n) = a^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right).$$
onde
$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \log_b \frac{n}{n_0}\right\} \\ &= \left\lfloor \log_b \frac{n}{n_0} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

completar

Unidade 26

Prova 2

Parte III

Contagem

1. quebrar a aula 29 em duas: funções sobrejetoras e partições. O que sai para essa aula entrar?
2. elaborar aula sobre Coeficientes Binomiais (CB), para ficar entre as atuais aulas 26 e 27. O que sai para essa aula entrar?
   (a) Partições e funções sobrejetoras?
3. incluir elementos de probabilidade discreta? esperança, variância etc?
4. exercicios
   (a) de (Mitzenmacher and Upfal, 2005, cap 1) vertidos em exercícios de contagem
   (b) número de configurações de jogos, algoritmos etc
      i. http://en.wikipedia.org/wiki/Endgame_tablebase
      ii. colisão de comunicação e espera aleatorizada:
         A. número esperado de colisões
         B. tempo esperado de sucesso
   (c) valorações de SAT
      i. a uma distância (de Hamming) fixa de uma valoração dada
   (d) jogo de damas
   (e) http://en.wikipedia.org/wiki/Draughts
   (f) jogo da velha (ver trabalho CI065 de ???)
5. trocar os desenvolvimentos sobre conjuntos genéricos para conjuntos $[n]$?
6. formular Ex. 23, 24, 21
7. usar a ideia de $f(n) \ll g(n)$ para comparar tamanhos de conjuntos assintoticamente.
8. coupon collector?
9. acoplar resultados de contagem com algoritmo para geração da estrutura correspondente (subconjuntos, funções, produtos cartesianos etc)?
10. aproximações assintóticas para os resultados de contagem?
11. resumão de contagem?

Unidade 27

Fundamentos de Contagem

1. formular Ex. 20
2. faltam exemplos e exercícios interessantes

27.1 Preliminares

$$[a..b] := \{z \in \mathbb{Z} \mid a \leq z \leq b\}.$$

$$[n] := [1..n].$$

Observe que

$$[0] = [1..0] = \{z \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq z \leq 0\} = \emptyset.$$

Uma *partição* de um conjunto A é um conjunto $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots\}$ de subconjuntos de A, dois a dois disjuntos entre si, tais que

$$\bigcup_{A_i \in \mathcal{P}} A_i = A.$$

Cada conjunto de $\mathcal{P}$ é chamado de uma *parte* da partição $\mathcal{P}$.

Se $\mathcal{P}$ é finito e tem k elementos, dizemos também que $\mathcal{P}$ é uma k*–partição* de A.

27.2 Contagem

Contagem significa contagem do número de elementos de um conjunto.

Os conjuntos que sabemos contar são os conjuntos $[n]\colon n \in \mathbb{N}$. A maneira de comparar a quantidade de elementos entre conjuntos é o estabelecimento de bijeções.

Seja $f\colon A \to B$ uma função.

A *imagem* de um elemento $a \in A$ pela função f é o elemento $f(a) \in B$.

A imagem da função f é o conjunto

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Para cada $b \in B$ definimos a *imagem inversa de b por f* como sendo o conjunto dos elementos de a cuja imagem é b, isto é

$$f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

O conjunto das imagens inversas de A por f é uma partição de A que é denotada A/f e é chamada de *quociente* de A por f, isto é

$$A/f := \left\{f^{-1}(b) \mid b \in f(A)\right\}.$$

Observe que, como A/f é uma partição de A, então

$$A = \bigcup_{C \in A/f} C,$$

ou, equivalentemente,

$$A = \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b).$$

Exemplo. $f\colon [3] \times [4] \to [4]$ *dada por* $f(a,b) = b$.

A função f é

injetora se $f(a) = f(b) \implies a = b, \text{ para todo } a, b \in A.$

sobrejetora se $f(A) = B$.

bijetora se é injetora e sobrejetora.

Uma *injeção* (*sobrejeção*, *bijeção*) é uma função *injetora* (*sobrejetora*, *bijetora*).

$A \sim B$ denota o fato de que existe bijeção entre A e B.

Para cada conjunto finito A existe um único inteiro $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim [n]$. Tal inteiro é chamado *tamanho* (ou *cardinalidade* ou *número de elementos*) do conjunto A e é denotado por $|A|$.

Definição. *Uma* enumeração *de um conjunto finito A é uma bijeção $f\colon [|A|] \to A$.*

Para cada $i \in [|A|]$,

- *i é chamado de* índice *de $f(i)$ em A segundo f, e*
- *$f(i)$ é o i-ésimo elemento de A segundo f.*

Exemplo. *Quais são os divisores naturais de 72?*

Fazendo

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n|72\}$$

temos

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\},$$

e

$$|D| = 12.$$

São enumerações do conjunto D dos divisores naturais de 72:

$f(i)$	1	2	3	4	6	8	9	12	18	24	36	72
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

$g(i)$	1	3	9	2	6	18	4	12	36	8	24	72
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Teorema 44. *A composição de bijeções é uma bijeção.*

Demonstração. Exercício 139 □

Corolário 45. *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. □

Corolário 46. *Dados conjuntos finitos A e B, temos que $|A| = |B|$ se e somente se $A \sim B$.*

Demonstração. Exercício 140 □

Exercícios 138, 139, 140, 141.

Unidade 28

União e Produto Cartesiano

1. exercícios combinando união e produto cartesiano
2. faltam exemplos e exercícios interessantes

Teorema 47. *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos disjuntos.

Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B|$ provando que $A \cup B \sim [|A| + |B|]$.

Sejam f e g enumerações de A e B, respectivamente, e seja $h\colon [|A|+|B|] \to A \cup B$ dada por

$$h(k) = \begin{cases} f(k), & \textsf{se } k \leq |A|, \\ g(k - |A|) & \textsf{se } k > |A|. \end{cases}$$

Para provar que $A \cup B \sim [|A|+|B|]$, basta provar que h é uma bijeção. □

Como a união de conjuntos é uma operação associativa (ex 24), denotamos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Para $n = 0$, convencionamos

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \emptyset.$$

Corolário 48 (Princípio Aditivo)**.** *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Demonstração. Exercício 58 □

Corolário 49 (Limitante da União)**.** *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então,*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Corolário 50. *Se A é um conjunto finito e $f \colon A \to B$ é uma função, então*

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $f \colon A \to B$ uma função. Como

$$A = \bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b),$$

então (C.46)

$$|A| = \left|\bigcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b)\right|$$

e como os conjuntos $f^{-1}(b) \mid b \in B$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Corolário 48)

$$|A| = \sum_{b \in f(A)} |f^{-1}(b)|.$$

□

Corolário 51. *Se A é um conjunto finito e $B \subseteq A$, então*

$$|A - B| = |A| - |B|.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Vamos provar que $|A - B| = |A| - |B|$.

Observe que, como $B \subseteq A$, então (Ex. 11)

$$A = (A - B) \cup B,$$

de forma que

$$|A| = |(A - B) \cup B|,$$

e como $A - B$ e B são disjuntos, então (Teorema 47)

$$|(A - B) \cup B| = |A - B| + |B|,$$

e portanto,

$$|A| = |A - B| + |B|,$$

ou seja

$$|A - B| = |A| - |B|.$$

$\square$

Corolário 52. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Observe que

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B),$$

e como A e $B - A \cap B$ são disjuntos, então (Teorema 47)

$$|A \cup B| = |A| + |B - (A \cap B)|.$$

Como $A \cap B \subseteq B$, temos (Corolário 51) que

$$|B - (A \cap B)| = |B| - |A \cap B|,$$

e consequentemente

$$|A \cup B| = |A| + |B - A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$\square$

28.1 Produtos Cartesianos

Teorema 53. *Se A é um conjunto finito e U é um conjunto com um único elemento, então,*

$$|U \times A| = |A|.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $U = \{u\}$ um conjunto com um único elemento.

Para provar que

$$|U \times A| = |A|,$$

basta provar que a função $(u, a) \mapsto a$ é uma bijeção $U \times A \to A$. $\square$

Teorema 54. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \times B| = |A||B|.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|A \times B| = |A||B|.$$

Seja $f\colon A \times B \to A$ a função dada por

$$f(a, b) = a.$$

Pelo Corolário 50 temos

$$A \times B = \bigcup_{a \in f(A \times B)} f^{-1}(a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a),$$

e para cada $a \in A$,

$$f^{-1}(a) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in B\} = \{a\} \times B \overset{\text{T. }53}{\sim} B,$$

e portanto,

$$|f^{-1}(a)| \overset{\text{C. }46}{=} |B|,$$

e consequentemente,

$$|A \times B| = \left|\bigcup_{a \in A} f^{-1}(a)\right| \overset{\text{C. }48}{=} \sum_{a \in A} |f^{-1}(a)| = \sum_{a \in A} |B| \overset{\text{T. }4}{=} |A||B|.$$

$\square$

$=$

Exercício 143 [default,ex:divisores-72]

Quantos divisores naturais tem o número 72?

Resposta:

Seja D o conjunto dos divisores naturais de 72. Queremos determinar $|D|$.

Os divisores primos de 72 são 2 e 3, pois

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Cada divisor de 72 corresponde a um par de expoentes (a, b) onde

$$\begin{gathered} 0 \leq a \leq 3, \ \texttt{e} \\ 0 \leq b \leq 2, \end{gathered}$$

isto é

$$\begin{gathered} a \in [0..3], \ \texttt{e} \\ b \in [0..2], \end{gathered}$$

ou seja,

$$(a, b) \in [0..3] \times [0..2].$$

Noutras palavras, a função $(a, b) \mapsto 2^a \, 3^b$ é uma bijeção $[0..3] \times [0..2] \to D$ e consequentemente (C. 46),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2]| = |[0..3]| \, |[0..2]| = 4 \times 3 = 12.$$

Definição. *Se $n > 0$ é um inteiro e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos, o* produto cartesiano *de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é o conjunto das n-uplas ordenadas de elementos de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectivamente, ou seja,*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n\}.$$

Denota-se

$$\prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n,$$

e convenciona-se que

$$\prod_{i=1}^{0} A_i := \{()\}.$$

Corolário 55 (Princípio Multiplicativo)**.** *Se $A_i \colon 1 \leq i \leq n$ são conjuntos finitos, então*

$$\left| \prod_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Demonstração. Exercício 142. □

Exercício 144 [default,ex:divisores-360]

Quantos divisores naturais tem o número 360?

Resposta:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exercício 143, temos

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1,$$

e daí, fazendo

$$D := \text{conjunto dos divisores naturais de } 360,$$

temos

$$D \sim [0..3] \times [0..2] \times [0..1],$$

e consequentemente (C. 46),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2] \times [0..1]| \overset{\text{C. } 55}{=} |[0..3]| \times |[0..2]| \times |[0..1]| = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

Teorema 56. *O número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é*

$$\prod_{i=1}^{k} (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

Demonstração. Exercício 145 $\square$

Exercícios 146, 147, 148.

Unidade 29

Sequências

1. trazer a discussão de funções para esta aula?
2. retirar as estimativas dos exemplos para "não assustar?". dm é fortemente favorável — assuta mesmo!!!
3. conferir e incluir ex 42
4. formular exercícios
   (a) ex 38, 41, 40, 39
   (b) contar sequências com configurações proibidas,
      - palavras que começam e terminam com 'a'
      - palavras sem vogais consecutivas
   (c) loops encaixados de algoritmos (enumerativos?)
5. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos

Definição. *Dados um conjunto A e um inteiro $n > 0$, o* conjunto das sequências *de tamanho n sobre A é o conjunto*

$$A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n vezes} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

A^0 denota o conjunto com a sequência de tamanho zero, isto é,

$$A^0 = \{()\}$$

Corolário 57. *Se $A \neq \emptyset$ é finito, então*

$$|A^n| = |A|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto finito não vazio, e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que

$$|A^n| = |A|^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se $n = 0$ temos que

$$|A^n| = |A^0| = |\{()\}| = 1 = |A|^0.$$

Se $n > 0$, temos que

$$|A^n| \overset{\text{C. 55}}{=} \prod_{i=1}^{n} |A| \overset{\text{Ex.60}}{=} |A|^n.$$

□

Sequências de tamanho n sobre um conjunto A são também conhecidas pelos nomes de

- *arranjos de n elementos de A tomados com repetição*, ou
- *palavras de tamanho n sobre o alfabeto A*, ou ainda
- *amostras ordenadas com reposição de tamanho n do conjunto A*.

Exercício 149 [default,ex:byte]

Um "bit" é um elemento de $\{0,1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

Resposta: Fazendo
$$B := \text{conjunto dos bytes.}$$

Como cada "byte" é uma sequência de 8 "bits", isto é, um elemento de de $\{0,1\}^8$, então
$$B \sim \{0,1\}^8$$
e consequentemente (C. 46),
$$|B| = |\{0,1\}^8| \overset{\text{C. } 57}{=} |\{0,1\}|^8 = 2^8 = 256.$$

Exercício 150 [default,ex:senhas-convencionais]

Um teclado convencional tem 47 “teclas que geram caracteres”. Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla “shift”. Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de “força bruta”, isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

1. Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

2. Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} T &:= \text{conjunto das teclas convencionais},\\ C &:= \text{conjunto dos caracteres convencionais},\\ S_n &:= \text{senhas convencionais de tamanho } n, \end{aligned}$$

temos

$$S_n = C^n.$$

1. Um dia tem 24.60.60 = 86 400 segundos e queremos

$$|S_n| > 86400.$$

Como

$$S_n = C^n,$$

então

$$|S_n| = |C^n| \overset{\text{C. 57}}{=} |C|^n$$

Como

$$C \sim \{0,1\} \times T,$$

então (C. 46),

$$|C| = |\{0,1\} \times T| \overset{\text{T.54}}{=} |\{0,1\}||T| = 2.47 = 94$$

e

$$|S_n| = |C|^n = 94^n.$$

Então, para ter

$$|S_n| > 86400,$$

precisamos ter

$$94^n > 86400,$$

ou seja

$$n \lg 94 > \lg 86400,$$

ou seja

$$n > \frac{\lg 86400}{\lg 94},$$

e portanto,

$$n = \left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\begin{array}{ccc} 16 & < \lg 86400 < & 17, \\ 6 & < \lg 94 < & 7, \end{array}$$

então

$$2 < \frac{16}{7} < \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{17}{6} < 3.$$

e então

$$\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil = 3.$$

2. Se o sistema atacante for um milhão (10^6) de vezes mais rápido, o número de tentativas num dia será um milhão de vezes maior, e precisamos de

$$|S_n| > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$94^n > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$n = \left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil .$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\frac{\lg(10^6.86400)}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6 + \lg 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94}$$

e

$$19 < \lg 10^6 < 20,$$

então

$$\frac{19}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} < \frac{20}{6}$$

e

$$5 = \frac{35}{7} = \frac{19}{7} + \frac{16}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{20}{6} + \frac{17}{6} = \frac{37}{6} < 7$$

e portanto

$$\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil = 6.$$

Corolário 58. *Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é*

$$\frac{|A|^{n+1}-1}{|A|-1}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1}-1}{|A|-1}.$$

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^{n} A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right|.$$

Como os conjuntos $A^i\colon 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left|\bigcup_{i=0}^{n} A^i\right| \overset{\text{C. 48}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A^i| \overset{\text{C. 57}}{=} \sum_{i=0}^{n} |A|^i \overset{\text{Ex. 57}}{=} \frac{|A|^{n+1}-1}{|A|-1}.$$

$\square$

Exercício 151 [default,ex:dvd]

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd ($4\,700\,372\,992$ bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$

temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 57}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 149}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 130f}}{=} \frac{256}{255}n256^n - \frac{256}{65025}256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid s(k) \leq d\}.$$

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k - 256^{k+1} \leq 255^2 d - 256$$

ou seja
$$255 \cdot 256^{k+1}k\left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta
$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2 d - 256$$
isto é
$$256^{k+1}k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d\left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$
ou seja
$$(k+1)\lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg\left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right).$$

Então basta
$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$
ou seja
$$8k + \lg k \leq \lg 255d - 9 = \lg 255 + \lg d - 9.$$

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta
$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$
ou seja
$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$
e portanto,
$$n = \max\left\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,\right\} \geq 3.$$

Efetivamente,
$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &< d,\\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &> d. \end{aligned}$$
e, portanto,
$$n = 3,$$
ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e
$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$
e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.

Exercícios 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164.

Unidade 30

Funções e Subconjuntos

1. Exercício: generalizar o problema dos aniversários
2. Ideia para um exemplo ou exercício: How long does it take to find large primes?
3. exercícios
   (a) passar ex 55 para cá? talvez seja necessário incluir uma sugestão: observe que os divisores de $D(n^2)$ podem ser descritos por $m.k = n^2$
   (b) não tem exercícios de subconjuntos.
4. Melhorar o exemplo de otimização combinatória
   (a) falar de um problema concreto. mochila? sat?
   (b) transformar em exercício resolvido?

Dados dois conjuntos finitos A e B, qual o número de funções $A \to B$?

Relembrando que o conjunto das funções $A \to B$ é denotado B^A, a pergunta é: qual o valor de $|B^A|$?

Teorema 59. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$B^A \sim B^{|A|}.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que $B^A \sim B^{|A|}$ exibindo uma bijeção $F\colon B^A \to B^{|A|}$.

Seja f uma enumeração de A e seja $F\colon B^A \to B^{|A|}$ a função dada por

$$F(h) = (h(f(1)), \ldots, h(f(|A|))).$$

Ilustração: $h \colon A \to B$

Basta provar que F é bijetora. $\square$

Corolário 60. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|B^A| = |B|^{|A|}.$$

Exercício 177 [default,ex:circuitos]

Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?

Resposta:

$$C(e,s) := \text{conjunto dos circuitos combinacionais com } e \text{ entradas e } s \text{ saídas}$$

Cada circuito em $C(e,s)$ implementa uma função $\{0,1\}^e \to \{0,1\}^s$, isto é,

$$C(e,s) \sim (\{0,1\}^s)^{(\{0,1\}^e)},$$

e, consequentemente,

$$|C(e,s)| = \left|(\{0,1\}^s)^{(\{0,1\}^e)}\right| \overset{\text{C. 60}}{=} |\{0,1\}^s|^{|\{0,1\}^e|} \overset{\text{C. 57}}{=} (|\{0,1\}|^s)^{|\{0,1\}|^e} \overset{\text{T. 62}}{=} (2^s)^{2^e} = 2^{s2^e}$$

Exercício 178 [default,ex:aniversarios]

De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

Resposta:

Se P é um conjunto de n pessoas, então cada maneira de acontecerem os aniversários das pessoas em P corresponde a uma função $a \colon P \to [365]$ que associa a cada pessoa $p \in P$ seu aniversário $a(p) \in [365]$.

Assim o número de maneiras diferentes de acontecerem os aniversários das pessoas em P é o número de funções $P \to [365]$, que é

$$\left|[365]^P\right| \overset{\text{C. 60}}{=} |[365]|^{|P|} = 365^n$$

30.1 Bolas e Urnas

Um contexto tradicional para a formulação de problemas de contagem é o conhecido pelo nome de “bolas e urnas”.

Diversos problemas fundamentais em contagem podem ser formulados em termos de maneiras de distribuir k bolas por n urnas de forma a satisfazer um conjunto de restrições. Cabem, neste contexto, variações nas quais as bolas e/ou as urnas sejam idênticas ou distintas.

Por exemplo, cada distribuição de k bolas distintas por n urnas distintas corresponde naturalmente a uma função $[k] \to [n]$.

Corolário 61. *Existem n^k maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas.*

30.2 Subconjuntos

Notação. *Denotamos por 2^A o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A, isto é*

$$2^A = \{S \mid S \subseteq A\}.$$

Qual o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos?

Exemplo. 2^A, $\{0,1\}^A$ *e* $\{0,1\}^{|A|}$ *para* $A = [3]$.

A *função característica* de um subconjunto S de um conjunto A é a função $\chi_S \colon A \to \{0,1\}$ dada por

$$\chi_S(s) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } s \in S, \\ 0, & \textsf{se } s \notin S. \end{cases}$$

Teorema 62. *Se A é um conjunto finito, então*

$$2^A \sim \{0,1\}^A.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $F \colon 2^A \to \{0,1\}^A$ a função dada por

$$F(S) = \chi_S.$$

Para provar que $2^A \sim \{0,1\}^A$, basta provar que F é uma bijeção. □

Corolário 63. *Se A é um conjunto finito, então*

$$|2^A| = 2^{|A|}.$$

Exemplo. *Muitos problemas de otimização podem ser formulados como segue.*

São dados um conjunto finito A e uma função $v \colon 2^A \to \mathbb{Q}$ que associa a cada subconjunto S de A um valor *numérico $v(S)$. O objetivo é determinar um subconjunto S de A de valor máximo.*

Suponha um programa de busca exaustiva que consegue analisar um subconjunto de A por segundo, isto é, computar um novo valor de S e de $v(S)$ a cada segundo.

Qual o maior tamanho de A para o qual o programa consegue resolver o problema em 1 dia?

Fazendo $n = |A|$, queremos

$$2^n \leq 86400,$$

ou seja

$$n \le \lg 86400,$$

isto é,

$$n = \lfloor \lg 86400 \rfloor = 16.$$

Se em vez de 1 *conjunto por segundo fosse* 1 *conjunto por ciclo de máquina, num processador de* $4GHz$*?*

Neste caso, em um dia temos

$$86400 \times 4 \times 10^9$$

ciclos, e queremos

$$2^n \le 86400 \times 4 \times 10^9,$$

ou seja

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9) \right\rfloor$$

$$\begin{aligned} n &\le \lg(86400 \times 4 \times 10^9) \\ &< \lg(2^{17}(2^2)(2 \times 5)^9) \\ &= \lg(2^{19}2^9 5^9) = \lg(2^{28}5^9) \\ &= \lg 2^{28} + \lg 5^9 = 28 + 3\lg 5^3 = 28 + 3\lg 125 \\ &< 28 + 3 \times 7 = 28 + 21 \\ &= 49, \end{aligned}$$

e portanto,

$$n \le 48.$$

A resposta exata é

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9) \right\rfloor = 48 = 3 \times 16.$$

E se em vez de esperar um dia estivéssemos dispostos a esperar um ano?

$$n \le \lg(86400 \times 4 \times 10^9 \times 365) = \lg(86400 \times 4 \times 10^9) + \lg 365 < 49 + \lg 365 < 49 + 9 = 58,$$

e portanto,

$$n \le 57.$$

A resposta exata é

$$n = \left\lfloor \lg(86400 \times 4 \times 10^9 \times 365) \right\rfloor = 56 = 48 + 8.$$

Um outro jeito de olhar para o mesmo problema.

Seja $n > 0$ e seja $f\colon 2^{[n]} \to \{0,1\}$ dada por

$$f(X) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \notin X, \\ 1, & \text{se } n \in X. \end{cases}$$

Pelo Corolário 50 temos

$$|2^{[n]}| = \sum_{b \in f([n])} |f^{-1}(b)| = |f^{-1}(0)| + |f^{-1}(1)|.$$

Como

$f^{-1}(0)$: subconjuntos de $[n]$ que não contém n, isto é

$$f^{-1}(0) := \{X \subseteq [n] \mid a \notin [n]\},$$

$f^{-1}(1)$: subconjuntos de $[n]$ que contém n, isto é

$$f^{-1}(1) := \{X \subseteq [n] \mid a \in [n]\},$$

É fácil verificar que a função $g\colon f^{-1}(1) \to f^{-1}(0)$ dada por

$$f(X) = X - \{n\},$$

é uma bijeção, e portanto,

$$f^{-1}(1) \sim f^{-1}(0),$$

de forma que (Corolário 46)

$$|f^{-1}(1)| = |f^{-1}(0)|,$$

e

$$|2^{[n]}| = |f^{-1}(0)| + |f^{-1}(1)| = 2|f^{-1}(0)|.$$

Como

$$f^{-1}(0) = 2^{[n]-\{n\}} = 2^{[n-1]},$$

então

$$|2^{[n]}| = 2 \times |2^{[n-1]}|.$$

Fazendo,

$$f(n) := |2^{[n]}|,$$

então

$$f(n) = 2f(n-1),$$

e portanto

$$f(n) \overset{\text{Ex. 110(a)}}{=} 2^n f(0) = 2^n |2^{[0]}| = 2^n |2^{\emptyset}| = 2^n |\{\emptyset\}| = 2^n \times 1 = 2^n.$$

Exercícios 179, 180, 181.

30.2.1 Número de Primos menores ou iguais a n

Seja

$$\pi(n) := \text{quantidade de números primos em } [n].$$

No que segue, vamos provar que

$$\pi(n) \geq \frac{\lg n}{2}$$

através de um elegante argumento de Paul Erdős[1].

Dado $n \in \mathbb{N}$, sejam

$$\begin{aligned} q(n) &:= \text{maior quadrado que divide } n, \\ f(n) &:= (q(n), n/q(n)). \end{aligned}$$

Basta provar que f é bijetora para concluir que

$$|[n]| = |f([n])|.$$

Como

$$f([n]) \subseteq Q(n) \times P(n)$$

onde

$$\begin{aligned} Q(n) &= \{\text{quadrados} \leq \text{n}\}, \\ P(n) &= \{\text{conjuntos de primos cujo produto é} \leq \text{n}\}, \end{aligned}$$

então

$$n = |[n]| = |f([n])| \leq |Q(n) \times P(n)| \overset{\text{T. 54}}{=} |Q(n)||P(n)| \leq \sqrt{n} \times 2^{\pi(n)}$$

e daí

$$\pi(n) \geq \lg \frac{n}{\sqrt{n}} = \lg \sqrt{n} = \frac{\lg n}{2}.$$

Teorema 64 (Teorema dos Números Primos, (Hadamard, 1896))**.**

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}.$$

Corolário 65. *Se $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a enumeração crescente dos números primos, então*

$$p(n) \approx n \ln n.$$

Corolário 66. *A probabilidade de um número escolhido uniformemente ao acaso em $[n]$ ser primo é aproximadamente $1/\ln n$, isto é,*

$$\mathbb{P}\left(p \in [n] \text{ \textit{é primo}}\right) \approx \frac{1}{\ln n}.$$

[1]De An elegant proof from Erdős

Unidade 31

Funções Injetoras

1. formular Ex 43, 44, 45
2. transformar o exemplo dos aniversários em exercício e generalizar (ver The birthday problem, and a generalization)
3. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
4. faltam melhores exercícios

Quantas são as sequências de tamanho k sobre $[n]$ sem elementos repetidos?

Dado um conjunto A e inteiros i e k, vamos denotar

$A_k :=$ conjunto das sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos.

$A_{k,i} :=$ conjunto das sequências sobre A de tamanho k sem elementos repetidos que começam com i.

$f(n,k) :=\ |[n]_k|$

Seja $F\colon [n]_k \to [n]$ a função que associa cada sequência de $[n]_k$ a seu primeiro elemento, isto é,

$$F(a_1, \ldots, a_k) = a_1.$$

temos

$$f(n,k) = |[n]_k| \overset{\text{C. } 50}{=} \sum_{i \in F([n]_k)} \left|F^{-1}(i)\right| = \sum_{i \in [n]} |[n]_{k,i}|\,.$$

Para cada $i \in [n]$, a função $G_i \colon [n]_{k,i} \to ([n] - \{i\})_{k-1}$ dada por

$$G_i(a_1 = i, a_2, \dots, a_k) = (a_2, \dots, a_k)$$

é uma bijeção, e portanto,

$$[n]_{k,i} \sim ([n] - \{i\})_{k-1}, \text{ para todo } i \in [n]$$

e consequentemente (Corolário 46)

$$|[n]_{k,i}| = |[n-1]_{k-1}|, \text{ para todo } i \in [n].$$

Então

$$f(n,k) = \sum_{i=1}^{n} |[n]_{k,i}| = \sum_{i=1}^{n} |[n-1]_{k-1}| \overset{\text{T 4}}{=} n|[n-1]_{k-1}| = nf(n-1,k-1).$$

Desenvolvendo a recorrência,

$$\begin{aligned} f(n,k) &= nf(n-1,k-1) \\ &= n(n-1)f(n-2,k-2) \\ &\dots \\ &= n(n-1)\dots(n-(u-1))f(n-u,k-u) \\ &= f(n-u,k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i). \end{aligned}$$

Notação. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$, o* fatorial descendente de n com k termos *é*

$$n_k := \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ \prod_{i=n-k+1}^{n} i, & \text{se } k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Observe que, se $k \leq n$, então

$$n_k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

e que se $k = n$, então

$$n_k = n_n = n!.$$

Então

$$f(n,k) = f(n-u, k-u)\prod_{i=0}^{u-1}(n-i) = f(n-u, k-u)n_u$$

onde

$$u = \min\{l \in \mathbb{N} \mid k - l \leq 0\},$$

ou seja

$$u = \min\{l \in \mathbb{N} \mid l \geq k\},$$

isto é,

$$u = k,$$

e

$$f(n,k) = f(n-u, k-u)n_u = f(n-k, k-k)n_k = f(n-k, 0)n_k.$$

Como

$$f(n-k, 0) = |[n-k]_0| = |\{()\}| = 1,$$

então

$$f(n,k) = f(n-k, 0)n_k = n_k.$$

Teorema 67. *O número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre $[n]$ é n_k.*

Corolário 68. *Se B é um conjunto finito, então o número de sequências sem elementos repetidos de tamanho k sobre um conjunto finito B é $|B|_k$, isto é,*

$$|B_k| = |B|_k.$$

Sequências de k elementos de um conjunto B são também conhecidas pelos nomes de

- *arranjos (sem repetição) de k elementos de B*, ou
- *sequências sem elementos repetidos de comprimento k sobre B*, ou ainda
- *amostras ordenadas sem reposição de tamanho k do conjunto B.*

Na correspondência natural entre sequências de $B^{|A|}$ e funções $A \to B$, sequências de $B^{|A|}$ sem repetições correspondem a funções injetoras $A \to B$.

Notação. *Se A e B são conjuntos, B_A denota o conjunto das funções injetoras $A \to B$.*

Corolário 69. *Se A e B são conjuntos finitos, o número de funções injetoras $A \to B$ é $|B|_{|A|}$, isto é,*

$$|B_A| = |B|_{|A|}.$$

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|B_A| = |B|_{|A|},$$

provando que

$$B_A \sim B_{|A|}.$$

Como na prova do Teorema 59, seja f uma enumeração de A e seja $F\colon B^A \to B^{|A|}$ a bijeção dada por

$$F(h) = (h(f(1)), \dots, h(f(|A|))).$$

Basta observar que se h é uma função injetora, então $F(h)$ será uma sequência sem elementos repetidos de tamanho $|A|$ sobre B, isto é,

$$F(B_A) = B_{|A|},$$

e daí, como F é bijetora,

$$B_A \sim B_{|A|}.$$

□

No modelo de bolas e urnas, funções injetoras correspondem a distribuições das bolas pelas urnas de maneira que nenhuma urna tenha mais que uma bola.

Mais precisamente, funções injetoras $B \to U$ correspondem a distribuições das bolas de B pelas urnas em U de maneira que nenhuma urna tenha mais que uma bola.

Corolário 70. *Existem n_k maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais que uma bola.*

Informalmente podemos fazer também o seguinte raciocínio.

Seja $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ o conjunto das bolas e seja U o conjunto das urnas e considere uma função injetora $f\colon B \to U$.

Temos $|U|$ "escolhas" para o valor de $f(b_1)$, $|U| - 1$ "escolhas" para o valor de $f(b_2)$, e assim por diante até que restam $|U| - (k-1) = |U| - k + 1$ "escolhas" para o valor de $f(b_k)$.

Como cada escolha é "independente das demais", então o número de "escolhas" é

$$|U|(|U|-1)(|U|-2)\ldots(|U|-(k-1)) = \prod_{i=0}^{k-1}(|U|-i) = |U|_k = |U|_{|B|}.$$

Exemplo. *Assumindo que as datas de aniversário de um grupo de n pessoas são equiprováveis, qual a probabilidade de duas delas terem aniversários coincidentes?*

Vimos num exemplo anterior que o número de maneiras de se distribuirem os aniversários de n pessoas é 365^n.

O número de maneiras de distribuir estes aniversários sem que haja coincidências é o número de funções injetoras $[n] \to 365$ que é 365_n.

Então a chance de não haver coincidência de aniversários num grupo de n pessoas é

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n}.$$

O "problema dos aniversários" é a resposta à seguinte pergunta.

> *Qual o menor valor de n necessário para que a probabilidade de um grupo de n pessoas ter coincidência de aniversários seja pelo menos 50%?*

ou seja, qual o valor de

$$\min\left\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) < \frac{1}{2}\right\}$$

Uma estimativa do valor de $p(n)$ pode ser obtida assim

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{365_n}{365^n} = \frac{365(365-1)\dots(365-(n-1))}{365(365)\dots(365)} \\ &= \frac{365}{365}\frac{365-1}{365}\dots\frac{365-(n-1)}{365} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1}\frac{365-i}{365} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{365}\right). \end{aligned}$$

Da série de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

temos, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x} = \frac{(-x)^0}{0!} + \frac{(-x)^1}{1!} + \frac{(-x)^2}{2!} + \dots = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots \geq 1 - x$$

e, portanto,

$$1 - x \leq e^{-x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Então

$$p(n) = \frac{365_n}{365^n} = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{365}\right) \leq \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/365} = e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365}.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{365} = \frac{1}{365}\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{365}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{730} > \frac{(n-1)^2}{730},$$

para todo $n > 0$, então

$$\frac{n(n-1)}{730}$$

então

$$p(n) \leq e^{-\sum_{i=0}^{n-1} i/365} < e^{-\frac{(n-1)^2}{730}}.$$

Então, para ter

$$p(n) < \frac{1}{2},$$

basta ter

$$e^{-\frac{(n-1)^2}{730}} \leq \frac{1}{2},$$

ou seja,
$$e^{\frac{(n-1)^2}{730}} \geq 2,$$
ou seja,
$$\frac{(n-1)^2}{730} \geq \ln 2$$
ou seja,
$$n \geq \sqrt{730 \ln 2} + 1 > 22 + 1 = 23.$$

Então, para ter
$$p(n) < \frac{1}{2},$$
basta ter
$$n \geq 24.$$

Na verdade,
$$0{,}49 < p(23) < \frac{1}{2} < p(22) < 0{,}52.$$

Exercícios 165, 166, 167, 168.

Unidade 32

Permutações

1. formular uma generalização para o Ex. 169
2. mudar o enunciado do ex. 173 para perguntar a probabilidade de os meninos se darem as mãos?
3. exercício sobre caixeiro viajante
4. cota inferior para ordenação
5. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
6. faltam melhores exercícios

Corolário 71. *Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, o número de funções bijetoras $A \to B$ é $|A|!$.*

Demonstração. Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos. Então cada função injetora $A \to B$ é bijetora e o número de tais funções é

$$|B_A| = |B|_{|A|} = |A|_{|A|} = |A|!$$

□

Bijeções $A \to A$ também são conhecidas pelo nome de *permutações* sobre A.

Corolário 72. *O número de permutações sobre um conjunto de n elementos é $n!$.*

O conjunto das permutações sobre um conjunto A será denotado $A!$.

Na correspondência natural entre funções $A \to A$ e sequências de $A^{|A|}$, funções bijetoras sobre A correspondem a sequências sobre A onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez. Sequências assim também são chamadas de *permutações* dos elementos de A.

No modelo de bolas e urnas, funções bijetoras $B \to U$ correspondem a distribuições das distintas bolas de B pelas distintas urnas em U de maneira que cada urna tenha exatamente uma bola.

Corolário 73. *Existem $n!$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de tal maneira que cada urna receba exatamente uma bola.*

Exercício 169 [default,ex:permutacoes-ordenadas]

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

Resposta:

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43 521 é

$$\begin{aligned} M = \{1\} \times \{2,3,4,5\}! \cup \{2\} \times \{1,3,4,5\}! \cup \{3\} \times \{1,2,4,5\}! \\ \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}! \\ \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}! \\ \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}! \end{aligned}$$

e daí,

$$
\begin{aligned}
|M| &= |\{1\} \times \{2,3,4,5\}! \cup \{2\} \times \{1,3,4,5\}! \cup \{3\} \times \{1,2,4,5\}! \\
&\quad \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}! \\
&\quad \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}! \\
&\quad \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}!| \\
&\overset{\text{C. 48}}{=} |\{1\} \times \{2,3,4,5\}!| + |\{2\} \times \{1,3,4,5\}!| + |\{3\} \times \{1,2,4,5\}!| \\
&\quad + |\{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}!| + |\{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}!| \\
&\quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}!| + |\{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}!| \\
&\quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}!| \\
&\overset{\text{C. 55}}{=} |\{1\}|\,|\{2,3,4,5\}!| + |\{2\}|\,|\{1,3,4,5\}!| + |\{3\}|\,|\{1,2,4,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{1\}|\,|\{2,3,5\}!| + |\{4\}|\,|\{2\}|\,|\{1,3,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{1\}|\,|\{2,5\}!| + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{2\}|\,|\{1,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{5\}|\,|\{1\}|\,|\{2\}!| \\
&\overset{\text{C. 72}}{=} 1 \times |\{2,3,4,5\}|! + 1 \times |\{1,3,4,5\}|! + 1 \times |\{1,2,4,5\}|! \\
&\quad + 1 \times 1 \times |\{2,3,5\}|! + 1 \times 1 \times |\{1,3,5\}|! \\
&\quad + 1 \times 1 \times 1 \times |\{2,5\}|! + 1 \times 1 \times 1 \times |\{1,5\}|! \\
&\quad + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times |\{2\}|! \\
&= 4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 2! + 2! + 1! \\
&= 3 \times 4! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1! \\
&= 89
\end{aligned}
$$

O lugar ocupado pelo número 43521 é, portanto, 90.

Exercícios 170, 171, 172.

32.1 Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre A são *circularmente equivalentes* se "preservam as vizinhanças".

Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes sobre $[5]$.

Mais formalmente, dizemos que duas sequências $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ são circularmente equivalentes se existe $k \in [0..n-1]$ tal que

$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que não são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das *permutações circulares* sobre A.

Qual o número de permutações sobre $[n]$ que não são circularmente equivalentes?

Seja $F\colon [n]! \to [n]_{n,1}$ a função que associa a cada permutação de $f \in [n]!$ a permutação circularmente equivalente a f que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

então

$$F(f) = (1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}).$$

Ilustração

Então, para cada permutação $f \in [n]!$, o conjunto $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$ é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a f e a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre $[n]$ não circularmente equivalentes.

Noutras palavras, o número de permutações não circularmente equivalentes sobre $[n]$ é $|[n]_{n,1}|$.

Do Corolário 50 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Teorema 74. *O número de permutações circulares sobre um conjunto de n elementos é $(n-1)!$*

Exercício 173 [default,ex:permut-roda-criancas]

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

Resposta:

Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças. O número de tais permutações é

$$(5-1)! = 4! = 24.$$

O número de modos em que os meninos ficam juntos corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só. Se houvesse um só menino teríamos

$$(4-1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda. Para cada um destes, temos duas configurações possíveis, a saber, um deles à esquerda do outro e vice–versa. Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$ e o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é $24 - 12 = 12$.

Exercícios 173, 174, 175, 176.

Unidade 33

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

1. exercício: qual a chance de um resultado da mega-sena se repetir?
2. falar de multiconjuntos?
3. não cabem todas as demonstrações. transformar algumas em exercícios?
4. passar para o final desta aula o tópico de composições e colocar na aula seguinte os coeficientes multinomiais, depois do PIE?
5. escolher exercícios sobre Permutações com Repetição
6. formular 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
7. Exercício: provar o T. 77 usando $F\colon \binom{A}{k} \to \{0,1\}$ dada por $F(X) = [a \in X]$ e o C. 50.
8. exercício: cartelas de bingo
9. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos

Quantos subconjuntos de k elementos tem um conjunto finito de n elementos?

Notação. *Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A será denotado $\binom{A}{k}$, isto é,*

$$\binom{A}{k} := \{S \subseteq A \mid |S| = k\},$$

A pergunta então é qual o valor de

$$\left|\binom{A}{k}\right|.$$

Teorema 75. *Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, então*

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}.$$

Demonstração. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F\colon A_k \to \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \ldots, a_k)) = \{a_1, \ldots, a_k\}.$$

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

e portanto

$$|F^{-1}(S)| = |S|! = k!,$$

e consequentemente (Corolário 50)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. } 72}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. } 4}{=} \left|\binom{A}{k}\right| k!$$

e portanto,

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \frac{|A_k|}{k!} \overset{\text{C. } 69}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{\frac{|A|!}{(|A|-k)!}}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k}.$$

□

Exercício 182 [default,ex:mega-sena]

A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

1. Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?
2. Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?
3. Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?
4. Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

Resposta:

1. Cada possível resultado de um sorteio é um subconjunto de 6 elementos de $[60]$. O número de possíveis resultados na mega–sena é
$$\left|\binom{[60]}{6}\right| = \binom{|[60]|}{6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{54!6!} = 50\,063\,860.$$
2. Este também é o número de apostas simples. A chance de ganhar com uma aposta simples, portanto, é
$$\frac{1}{50\,063\,860} < \frac{1}{50\,000\,000}.$$
3. Uma 7-aposta é um subconjunto de 7 elementos de $[60]$. O número de 7-apostas possíveis é
$$\left|\binom{[60]}{7}\right| = \binom{|[60]|}{7} = \binom{60}{7} = \frac{60!}{53! \times 7!} = 386\,206\,920.$$
A chance de ganhar com uma 7-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_7\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é
$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{7}{6} = \frac{7!}{1! \times 6!} = 7,$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma 7–aposta é

$$\frac{7}{\binom{60}{6}},$$

ou seja, 7 vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

4. Uma k-aposta é um subconjunto de k elementos de [60]. O número de k-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{k}\right| = \binom{|[60]|}{k} = \binom{60}{k}.$$

A chance de ganhar com uma k-aposta $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{k}{6},$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma k–aposta é

$$\frac{\binom{k}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{k_6}{60_6} = \frac{k_6}{36\,045\,979\,200},$$

ou $\binom{k}{6} = k_6/720$ vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

k	$\binom{k}{6}$
6	1
7	7
8	28
9	84
10	210
11	462
12	924
13	1716
14	3003
15	5005

Seja A um conjunto finito de n elementos. É evidente que

$$\bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k} = 2^A,$$

e como os conjuntos $\binom{A}{k} : 0 \leq k \leq |A|$ são dois a dois disjuntos entre si, então (Teorema 47)

$$\left| \bigcup_{k=0}^{|A|} \binom{A}{k} \right| = \sum_{k=0}^{|A|} \left| \binom{A}{k} \right| = \sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k},$$

e como

$$\left|2^A\right| = 2^{|A|},$$

temos

$$\sum_{k=0}^{|A|} \binom{|A|}{k} = 2^{|A|},$$

Corolário 76. *Para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Teorema 77. *Se A é um conjunto, então*

$$\binom{A}{k} = \binom{A - \{a\}}{k} \cup \left\{ S \cup \{a\} \mid S \in \binom{A - \{a\}}{k-1} \right\},$$

para todo $a \in A$.

Demonstração. Exercício 13. $\square$

Exercício 13 [default,ex:conj-rel-stifel]

Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

Resposta:

Vamos provar que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A}$$

provando que

$$\begin{aligned} \binom{A}{k} &\subseteq A^- \cup \overline{A}, \text{ e} \\ A^- \cup \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

Para provar que

$$A^- \cup \overline{A} \subseteq \binom{A}{k},$$

basta observar que decorre diretamente das respectivas definições de A^- e $\overline{A}$ que

$$\begin{aligned} A^- &\subseteq \binom{A}{k}, \text{ e} \\ \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

Resta então provar que

$$\binom{A}{k} \subseteq A^- \cup \overline{A},$$

ou seja, que

$$X \in \binom{A}{k} \implies X \in A^- \cup \overline{A}, \text{ para todo } X \in \binom{A}{k}.$$

Seja então $X \in \binom{A}{k}$. Vamos provar que

$$X \in A^- \cup \overline{A}.$$

No caso em que $X \in A^-$, não há mais nada a fazer.

Se, por outro lado, $X \notin A^-$, então é porque $a \in X$.

Neste caso, seja $X' = X - \{a\}$ e observe que $X' \subseteq A - \{a\}$ e que

$$|X'| = |X - \{a\}| = |X| - |\{a\}| = k - 1,$$

e portanto, $X' \in \binom{A-\{a\}}{k-1} = A^+$.

Consequentemente,

$$X = X' \cup \{a\} \in \overline{A}.$$

Corolário 78. *Para todo $n, k > 0$,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Demonstração. Sejam $n > 0$ e $k > 0$. Vamos provar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Do Teorema 77 temos que

$$\begin{aligned}\binom{[n]}{k} &= \binom{[n]-\{n\}}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n]-\{n\}}{k-1}\right\} \\ &= \binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\},\end{aligned}$$

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right|.$$

Como $\binom{[n]-\{n\}}{k}$ e $\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}$ são disjuntos entre si, então (Teorema 47)

$$\begin{aligned}\left|\binom{[n]}{k}\right| &= \left|\binom{[n-1]}{k}\right| + \left|\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \left|\binom{[n-1]}{k-1}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 79. *O número de maneiras de distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola é $\binom{n}{k}$.*

Demonstração. Cada distribuição de k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola corresponde à escolha de um subconjunto de k dentre as n urnas que receberão uma bola cada. $\square$

33.1 Coeficientes Multinomiais

Anagramas para “fruta” e “laranja”.

Dados $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ definimos o *coeficiente multinomial*

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2! \ldots n_k!}. = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Teorema 80. *Para todo $k \geq 2$,*

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}.$$

Demonstração. Exercício 56 □

Teorema 81. *O número de permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_k\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq k$ é*

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}$$

Demonstração. Por indução em k.

HI: Seja $t \in \mathbb{N}$ tal que, o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_p\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq p$ é

$$\binom{n_1 + \ldots + n_p}{n_1, \ldots, n_p},$$

para todo $p \in [1..t]$.

Passo: Vamos provar que o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_{t+1}\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq t+1$ é

$$\binom{n_1 + \ldots + n_{t+1}}{n_1, \ldots, n_{t+1}}.$$

Seja $n := n_1 + \ldots + n_{t+1}$ e seja P^+ o conjunto das permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_{t+1}\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq t+1$.

Do mesmo modo, seja P o conjunto das permutações distintas de elementos de $\{a_1, \ldots, a_t\}$ quando há n_i exemplares de a_i para cada $1 \leq i \leq t$.

Seja então $F\colon P^+ \to P \times \binom{[n]}{n_{t+1}}$ a função dada por

$$F(x_1, \ldots, x_n) := ((y_1, \ldots, y_{n-n_{t+1}}), \{i_1, \ldots, i_{n_{t+1}}\})$$

onde

1. $\{i_1, \ldots, i_{n_{t+1}}\}$ são os índices de $(x_1, \ldots, x_n)$ onde a_{t+1} ocorre, isto é,
$$x_{i_j} = a_{t+1}, \text{ para todo } j \in \{i_1, \ldots, i_{n_{t+1}}\}.$$
2. $(y_1, \ldots, y_{n-n_{t+1}})$ é a sequência obtida de $(x_1, \ldots, x_n)$ retirando as ocorrências de a_{t+1}, isto é
$$(y_1, \ldots, y_{n-n_{t+1}}) = (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_{n_{t+1}}-1}, x_{i_{n_{t+1}}+1}, \ldots, x_n)$$

Basta provar que F é bijeção para concluir que

$$\begin{aligned}
|P^+| &= \left| P \times \binom{[n]}{n_t} \right| \\
&= |P| \left| \binom{[n]}{n_{t+1}} \right| \overset{\text{HI}}{=} \binom{n_1 + \ldots + n_t}{n_1, \ldots, n_t} \binom{n}{n_{t+1}} \\
&= \binom{n_1 + \ldots + n_t}{n_1, \ldots, n_t} \binom{n_1 + \ldots + n_{t+1}}{n_{t+1}} \\
&\overset{\text{T. 80}}{=} \binom{n_1 + \ldots + n_{t+1}}{n_1, \ldots, n_{t+1}}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1\}$ quando há n_1 exemplares de a_1 é

$$\binom{n_1}{n_1}.$$

Basta observar que o número de permutações distintas de elementos de $\{a_1\}$ quando há n_1 exemplares de a_1 é 1 e que

$$\binom{n_1}{n_1} = 1.$$

□

Exemplo. *Quantos anagramas existem para a palavra "banana"?*

Anagramas da palavra "banana" são permutações sobre $\{a, b, n\}$ *com* 1 *repetição de '`b`',* 2 *repetições de '`n`' e* 3 *repetições de '`a`' e portanto são*

$$\frac{(1+2+3)!}{1!2!3!} = \frac{6!}{1 \times 2 \times 6} = \frac{720}{12} = 60$$

Exercícios 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193.

Unidade 34

Composições de Inteiros e o Princípio da Inclusão/Exclusão

1. Incluir Ex.202
2. Usar o Ex. 207 como exemplo em sala?
3. ex 201 é composição de inteiros? parece partição de inteiros.
4. acrescentar um exemplo simples de aplicação do PIE
5. a prova do T. 82 via sequências de $\{1,+\}^{n-1}$ com $k-1$ sinais de $+$ talvez fique mais natural
6. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
7. mastigar o enunciado do ex. 210 com itens e/ou sugestões.
8. (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.6) apresenta o Ex. 55 como um exercício de Inclusão/Exclusão.
9. formular Ex. 56.
10. prova do PIE em (Andreescu and Feng, 2004, T. 6.1, p. 119) é melhor?
11. Incluir generalização do PIE para funções $2^A \to \mathbb{R}$ de (Andreescu and Feng, 2004, T. 6.2, 6.3, p.120)?
12. exercícios de Tuffley (2009): exemplo 1, exercícios 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10

34.1 Composições de Inteiros

Dados $n \geq k \in \mathbb{N}$, uma k*–composição* de n é uma decomposição de n em k parcelas positivas.

Mais formalmente, uma k*–composição* é uma sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Por exemplo, $(1, 2, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$ e $(2, 2, 1)$ são 3–composições de 5.

Uma k–composição de n também é conhecida pelo nome de *solução inteira positiva de*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Quantas k–composições admite um inteiro n?

Existe uma única n–composição de n que é $(1, \ldots, 1)$.

Escrevendo-a na forma

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

é fácil ver que uma k–composição fica definida de maneira única ao "pintar" $k - 1$ dos sinais de $+$ "de vermelho" e depois efetuar as somas que não são vermelhas. O resultado será uma expressão da forma

$$x_1 + \ldots + x_k = n,$$

com

$$x_i \geq 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

Por exemplo, $5 = 1{\color{red}+}1 + 1 + 1{\color{red}+}1 = 1{\color{red}+}3{\color{red}+}1$ que é uma 3–composição de 5.

Noutras palavras, o número de k–composições de n é o número de maneiras diferentes de pintar $k - 1$ sinais de $+$ de vermelho na expressão

$$1 + 1 + \ldots + 1 = n,$$

que é o número de maneiras de escolher $k - 1$ sinais de $+$ dentre os $n - 1$ sinais de $+$ presentes na expressão, que é

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Teorema 82. *Dados $k, n \in \mathbb{N}$, o número de k–composições de n é*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $C(n, k)$ o conjunto das k–composições de n, isto é,

$$C(n,k) := \left\{ (x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k \mid \sum_{i=1}^{k} x_i = n \right\}.$$

Seja $F\colon \binom{[n-1]}{k-1} \to C(n,k)$ a função dada por

$$F(\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}),$$

sendo

$$a_i < a_{i+1}, \ \text{para todo } 1 \leq i < k-1.$$

Basta provar que F é bijetora e daí

$$|C(n,k)| \overset{\text{C. 46}}{=} \left| \binom{[n-1]}{k-1} \right| \overset{\text{T. 75}}{=} \binom{|[n-1]|}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Cada k–composição de n corresponde a uma distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas onde nenhuma urna fica vazia.

Observe que, ao contrário da convenção até aqui, agora n é o número de bolas e k é o número de urnas.

Corolário 83. *Existem $\binom{n-1}{k-1}$ maneiras de distribuir n bolas idênticas por k urnas distintas de maneira que nenhuma urna fique vazia.*

34.2 Composições Fracas

Dados $n \geq k \in \mathbb{N}$, uma *k–composição fraca* de n é uma decomposição de n em k parcelas não–negativas.

Mais formalmente, uma k–*composição fraca* é uma sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Por exemplo, $(1, 2, 2)$, $(0, 2, 3)$, $(1, 3, 1)$ e $(4, 0, 1)$ são 3–composições fracas de 5.

Uma k–composição fraca de n também é conhecida pelo nome de *solução inteira não–negativa de*

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$$

Teorema 84. *O número de k–composições fracas de $n \in \mathbb{N}$ é*

$$\binom{n+k-1}{k-1}.$$

Demonstração. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos denotar por $C(n, k)$ o conjunto das k–composições de n e por $F(n, k)$ o conjunto das k–composições fracas de n.

Seja $G\colon F(n, k) \to C(n + k, k)$ a função dada por

$$G((a_1, \dots, a_k)) = (a_1 + 1, \dots, a_k + 1).$$

Basta provar que G é bijetora e daí

$$|F(n, k)| = |C(n + k, k)| = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

□

Cada k–composição fraca de n corresponde a uma distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas.

Corolário 85. *Existem $\binom{n+k-1}{k-1}$ maneiras de distribuir n bolas idênticas por k urnas distintas.*

Exercícios 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201.

34.3 O Princípio da Inclusão/Exclusão

Teorema 86. *A interseção de conjuntos é uma operação associativa.*

Demonstração. Exercício 25 □

Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos e $I = \{i_1, \ldots i_k\} \subseteq [n]$, definimos

$$\bigcap_{i \in I} A_i := A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}.$$

Do Corolário 52 temos que se A_1 e A_2 são conjuntos finitos, então

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Como fica a conta para 3 conjuntos?

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| \overset{\text{C. 52}}{=} |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.$$

Como

$$(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = B_1 \cup B_2,$$

onde

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \cap A_3, \\ B_2 &:= A_2 \cap A_3. \end{aligned}$$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |B_1 \cup B_2|.$$

Como (C. 52)

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|,$$

e

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

então

$$\begin{aligned}|B_1 \cup B_2| &= |B_1| + |B_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

Como (C. 52)

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|,$$

então

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

E para 4 conjuntos?

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4| \\ &\overset{\text{C. 52}}{=} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4|\end{aligned}$$

Como

$$(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4) = B_1 \cup B_2 \cup B_3,$$

onde

$$\begin{aligned}B_1 &:= A_1 \cap A_4, \\ B_2 &:= A_2 \cap A_4, \\ B_3 &:= A_3 \cap A_4.\end{aligned}$$

Então

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| - |B_1 \cup B_2 \cup B_3|$$

Como vimos há pouco,

$$|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B_1| + |B_2| + |B_3| - (|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3|) + |B_1 \cap B_2 \cap B_3|.$$

Observe que

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_4,$$

e

$$B_1 \cap B_3 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap A_3 \cap A_4,$$

e

$$B_2 \cap B_3 = (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

de forma que

$$|B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + |B_2 \cap B_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Do mesmo modo,

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 = (A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4) = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4,$$

de forma que

$$
\begin{aligned}
|B_1 \cup B_2 \cup B_3| = {} & |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
& - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3| + |A_4| \\
& - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
& \ - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& \ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|),
\end{aligned}
$$

Como vimos há pouco

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|,$$

e daí,

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
& - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_4| \\
& - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
& \ - (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& \ + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
= {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
& - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
& + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
& - (|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
& + (|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
= {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
& - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| \\
& \ + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\
& + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\
& \ + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\
& - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.
\end{aligned}
$$

O que leva a desconfiar que a forma geral seja

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup \ldots \cup A_n| \\
&\qquad = |A_1| + \ldots + |A_n| \\
&\qquad\quad - (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_1 \cap A_n| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) \\
&\qquad\quad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_1 \cap A_2 \cap A_n| + \ldots \\
&\qquad\quad\ + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) \\
&\qquad\quad - \ldots + \ldots + |A_1 \cap \ldots \cap A_n| \\
&\qquad = \sum_{\{i_1\} \in \binom{[n]}{1}} |A_{i_1}| - \sum_{\{i_1, i_2\} \in \binom{[n]}{2}} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\
&\qquad\quad + \sum_{\{i_1, i_2, i_3\} \in \binom{[n]}{3}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \\
&\qquad\quad - \ldots + \ldots \sum_{\{i_1, \ldots, i_n\} \in \binom{[n]}{n}} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}| \\
&\qquad = \sum_{I \in \binom{[n]}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \binom{[n]}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&\qquad\quad + \sum_{I \in \binom{[n]}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \ldots + \ldots \sum_{I \in \binom{[n]}{n}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \right) \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (-1)^{k+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&\qquad = \sum_{I \in 2^{[n]}} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&\qquad = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.
\end{aligned}
$$

Teorema 87 (Princípio da Inclusão–Exclusão)**.** *Se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos* *finitos, então*

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Exercícios 203, 204, 205, 147, 206, 207, 208, 209, 210.

Unidade 35

Pontos Fixos de Permutações e Desarranjos

Bernoulli-Euler Formula for misaddressed letters

Dizemos que a é *ponto fixo* de uma permutação f sobre um conjunto A se $f(a) = a$.

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $I \in [n]$, vamos definir

$F(n, I) :=$ permutações sobre $[n]$ para as quais todo elemento de I é ponto fixo.

Teorema 88. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$. O número de permutações sobre $[n]$ para as quais todo elemento de I é ponto fixo é*

$$(n - |I|)!$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$.

Basta provar que a função $F(n, I) \to ([n] - I)!$, que associa cada $f \in F(n, I)$ à função $\overline{f} \in ([n] - I)!$ dada por

$$\overline{f}(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I,$$

é bijetora e daí (C. 46)

$$|F(n, I)| \overset{??}{=} |([n] - I)!| \overset{??}{=} (|[n]| - |I|)! = (n - |I|)!$$

$\square$

Teorema 89. *O número de permutações com algum ponto fixo sobre $[n]$ é* $n! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$.

Demonstração. Seja $F(n)$ conjunto das permutações sobre n com algum ponto fixo.

Como

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\}),$$

então (C. 46)

$$|F(n)| = \left| \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, i) \right|.$$

Como

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) = F(n, I),$$

então

$$\begin{aligned}
|F(n)| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |F(n, I)| \overset{\text{T. } 88}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)! \overset{??}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} \\
&= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!},
\end{aligned}$$

□

35.1 Desarranjos

Um *desarranjo* sobre um conjunto A é uma permutação sobre A sem pontos fixos.

Dado $n \in \mathbb{N}$, vamos definir

$$F(n) := \text{conjunto das permutações sobre } [n] \text{ com algum ponto fixo.}$$

de modo que o conjunto dos desarranjos sobre $[n]$ é

$$D(n) = [n]! - F(n),$$

e

$$
\begin{aligned}
|D(n)| &= |[n]! - F(n)| = |[n]|! - |F(n)| = n! - n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n!\left(1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right) \\
&= n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right) = n!\left(\frac{(-1)^0}{0!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right) \\
&= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}.
\end{aligned}
$$

Lembrando a série de Taylor para e^x

$$e^x = \sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{k!},$$

temos

$$e^{-1} = \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!},$$

e portanto,

$$\lim \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e},$$

ou seja,

$$|D(n)| \approx \frac{n!}{e} < 36.79\%\, n!$$

Teorema 90. *O número de desarranjos sobre $[n]$ é*

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}$$

Corolário 91. *O número de desarranjos sobre um conjunto finito A é*

$$|A|!\sum_{k=0}^{|A|}\frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{|A|!}{e}$$

Corolário 92. *O número de maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de maneira que cada urna receba exatamente uma bola e nenhuma bola caia na "sua" urna é*

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}.$$

Corolário 93. *A probabilidade de uma permutação sobre um conjunto de n elementos escolhida uniformemente ao acaso não ter ponto fixo é*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{1}{e}$$

Observe que

$$36\% < \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} < 37\%, \text{ para todo } n \geq 5.$$

Exercícios 211, 212, 213, 214, 215, 216.

Unidade 36

Funções Sobrejetoras e Partições

1. reorganizar a sequência de resultados como na aula de desarranjos.
2. formular Ex. 222
3. formular Ex. 57
4. padronizar as respostas dos exercícios resolvidos
5. faltam exemplos e exercícios

Dados conjuntos finitos A e B, qual o número de funções sobrejetoras $A \to B$?

Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos definir

$S(k,n)$: conjunto das funções sobrejetoras $[k] \to [n]$,

$N(k,n)$: conjunto das funções não sobrejetoras $[k] \to [n]$.

Então,

$$[n]^{[k]} = S([k],[n]) \cup N([k],[n]),$$

e

$$S([k],[n]) = [n]^{[k]} - N([k],[n]),$$

e consequentemente (C. 46)

$$
\begin{aligned}
|S([k],[n])| &= |[n]^{[k]} - N([k],[n])| \\
&\overset{\text{C. }51}{=} |[n]^{[k]}| - |N([k],[n])| \overset{\text{T. }59}{=} |[n]|^{|[k]|} - |N([k],[n])| \\
&= n^k - |N([k],[n])|
\end{aligned}
$$

Para cada $i \in [n]$, seja $N(k,n,i)$ o conjunto das funções $[k] \to [n]$ para as quais i não é imagem de nenhum elemento de $[k]$, isto é,

$$N(k,n,i) := \left\{ f \in [n]^{[k]} \mid f^{-1}(i) = \emptyset \right\}.$$

Então

$$N([k],[n]) = \bigcup_{i=1}^{n} N(k,n,i),$$

e daí (Corolário 46)

$$
\begin{aligned}
|N([k],[n])| &= \left| \bigcup_{i=1}^{n} N(k,n,i) \right| \\
&\overset{\text{T. }87}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{i}} \left| \bigcap_{j \in I} N(k,n,j) \right|.
\end{aligned}
$$

Dado $I \subseteq [n]$, temos

$$\bigcap_{j \in I} N(k,n,j) = \bigcap_{j \in I} \left\{ f \in [n]^{[k]} \mid f^{-1}(j) = \emptyset \right\} = \left\{ f \in [n]^{[k]} \mid f^{-1}(I) = \emptyset \right\}$$

isto é, o conjunto $\bigcap_{j \in I} N(k,n,j)$ é o conjunto das funções $[k] \to [n]$ para as quais os elementos de I não são imagem de nenhum elemento de $[k]$.

Fazendo

$$N(k,n,I) := \bigcap_{j \in I} N(k,n,j).$$

temos

$$|N([k],[n])| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{i}} \left| \bigcap_{j \in I} N(k,n,j) \right|. = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{i}} |N(k,n,I)|.$$

Existe uma bijeção natural entre $N(k,n,I)$ e $([n] - I)^{[k]}$ que associa cada $f \in N(k,n,I)$ à função $\overline{f} \colon [k] \to [n] - I$ dada por

$$\overline{f}(j) = f(j), \text{ para todo } j \in [k].$$

Ilustração???

Consequentemente (Corolário 46)

$$|N(k,n,I)| = \left|([n]-I)^{[k]}\right| \overset{\text{T. } 59}{=} |[n]-I|^{|[k]|} \overset{\text{C. } 51}{=} (|[n]|-|I|)^k = (n-|I|)^k\,.$$

Então

$$\begin{aligned}
|N([k],[n])| &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{i}}|N(k,n,I)| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{i}}(n-|I|)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{i}}(n-i)^k \\
&\overset{\text{T. } 4}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\left|\binom{[n]}{i}\right|(n-i)^k \\
&\overset{\text{T. } 77}{=} \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{|[n]|}{i}(n-i)^k \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(n-i)^k \\
&\overset{\text{j=n-i}}{=} \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j+1}\binom{n}{n-j}j^k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1}\binom{n}{n-i}i^k \\
&\overset{?}{=} \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1}\binom{n}{i}i^k,
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
|S([k],[n])| &= n^k - |N([k],[n])| \\
&= n^k - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1}\binom{n}{i}i^k \\
&= n^k + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k \\
&= (-1)^{n-n}\binom{n}{n}n^k + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k.
\end{aligned}
$$

Teorema 94. *O número de funções sobrejetoras* $[k] \to [n]$ *é*

$$
\begin{cases} 0, & \text{se } k < n, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k, & \text{se } k \geq n. \end{cases}
$$

Corolário 95. *Se A e B são conjuntos finitos, o número de funções sobrejetoras $A \to B$ é*

$$
\begin{cases} 0, & \text{se } |A| < |B|, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{|B|}(-1)^{|B|-i}\binom{|B|}{i}i^{|A|}, & \text{se } |A| \geq |B|. \end{cases}
$$

Corolário 96. *O número de sequências de tamanho k sobre um conjunto finito A onde todos os elementos de A aparecem é* $\displaystyle\sum_{i=0}^{|A|}(-1)^{|A|-i}\binom{|A|}{i}i^k$.

Corolário 97. *O número de maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna fique vazia é* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^k$.

Exercícios 217, 218, 219, 220, 221, 222.

36.1 Partições

Quantas k-partições tem um conjunto finito A?

Toda sobrejeção $f\colon A \to [k]$ define uma k-partição de A, a saber, o quociente

$$A/f := \{f^{-1}(i) \mid i \in [k]\}.$$

Dados $k, n \in \mathbb{N}$, vamos definir

$S(n,k)$**:** conjunto das sobrejeções $[n] \to [k]$,

$\left\{ {[n] \atop k} \right\}$**:** conjunto das k-partições de $[n]$,

Seja $F\colon S(n,k) \to \left\{ {[n] \atop k} \right\}$ a função que associa cada função $f \in S(n,k)$ ao quociente $[n]/f \in \left\{ {[n] \atop k} \right\}$, de maneira que (T. 50)

$$S(n,k) = \bigcup_{P \in [n]/f} F^{-1}(P),$$

e consequentemente (C. 46)

$$|S(n,k)| = \left| \bigcup_{P \in [n]/f} F^{-1}(P) \right| \stackrel{?}{=} \sum_{P \in [n]/f} |F^{-1}(P)|.$$

Seja $P = \{C_1, \ldots, C_k\} \in \left\{ {[n] \atop k} \right\}$ uma k–partição de $[n]$ e seja $f_P\colon\ [n] \to [k]$ a função que associa cada $i \in [n]$ ao índice $j \in [k]$ do conjunto $C_j \in P$ ao qual i pertence, isto é,

$$f_P(i) = j \in [k] \mid i \in C_j.$$

É evidente que

$$F(f_P) = P,$$

isto é,

$$[n]/f_P = P.$$

Além disso, também é claro que se $g \in [k]!$ é uma permutação sobre $[k]$, então $f_P \circ g \in S([n],k)$ também é uma sobrejeção $[n] \to [k]$ e

$$F(f_P \circ g) = P,$$

isto é,

$$[n]/(f_P \circ g) = P.$$

Em outras palavras, dada uma partição P de $[n]$, para cada permutação g sobre $[k]$ temos uma sobrejeção $f = f_P \circ g \in S([n], [k])$ tal que

$$[n]/(f_P \circ g) = [n]/f_P = P.$$

Então, o número de sobrejeções $f\colon [n] \to [k]$ satisfazendo $F(f) = P$ corresponde ao número de permutações sobre $[k]$, isto é,

$$|F^{-1}(P)| \stackrel{?}{=} |[k]!| \stackrel{?}{=} |[k]|! \stackrel{?}{=} k!,$$

e consequentemente,

$$|S(n,k)| = \sum_{P \in [n]/f} |F^{-1}(P)| = \sum_{P \in [n]/f} k! \stackrel{?}{=} \left| \left\{ {[n] \atop k} \right\} \right| k!,$$

ou seja

$$\left| \left\{ {[n] \atop k} \right\} \right| = \frac{|S([n],k)|}{k!} \stackrel{\text{T. }94}{=} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

O número de k-partições de $[n]$ é conhecido como *número de Stirling do segundo tipo* e é denotado $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

Teorema 98. *O número de k-partições de $[n]$ é*

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Corolário 99. *O número de k-partições de um conjunto finito A é*

$$\left\{ {|A| \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^{|A|}.$$

Corolário 100. *O número de maneiras de distribuir k bolas distintas por n urnas idênticas sem que nenhuma urna fique vazia é*

$$\frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k.$$

Corolário 101. *O número de partições de $[n]$ é*

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

O número de partições de $[n]$ é conhecido como *número de Bell*.

Corolário 102. *O número de partições de um conjunto finito A é*

$$\sum_{k=1}^{|A|} \left\{ {|A| \atop k} \right\}.$$

Corolário 103. *O número de relações de equivalência sobre um conjunto finito A é*

$$\sum_{k=1}^{|A|} \left\{ {|A| \atop k} \right\}.$$

Apêndice A

Exercícios

A.1 Elementos de Lógica

1$^{@}$. [default,ex:proposicoes]

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".

(b) "$10 > 20$".

(c) "$x^2 \leq x$".

Resposta:

(a) "$2 \leq 3$" é uma proposição verdadeira.

(b) "$10 > 20$" é uma proposição falsa.

(c) "$x^2 \leq x$" não é uma proposição, porque não é verdadeira nem falsa, uma vez que "não sabemos" o valor de x.

2$^{@}$. [default,ex:implicacoes]

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,

(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,

(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,

(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

Resposta:

Todas são verdadeiras.

$3^{@}$. [default,ex:predicados]

Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.
(c) $Q(1,1)$.
(d) $R(t) = Q(1,t)$.

Resposta:

(a) $P(2)$ é uma proposição verdadeira: "$2 \leq 2^2$".
(b) $P(1/2)$ é uma proposição falsa: "$1/2 \leq (1/2)^2$".
(c) $Q(1,1)$ é uma proposição verdadeira: "$1 \leq 1^2$".
(d) $R(t) = Q(1,t)$ não é uma proposição. É o predicado "$1 \leq t^2$", com uma variável livre.

$4^{@}$. [default,ex:ex-quantificadores]

Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

Resposta:

(a) a proposição $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é falsa.

(b) a proposição $P(x)$, $\textsf{para algum}$ $x \in \mathbb{R}$ é verdadeira.

(c) a proposição $P(x)$, $\textsf{para todo}$ $x \geq 1$ é verdadeira.

(d) a proposição $P(x)$, $\textsf{para algum}$ $0 < x < 1$ é falsa.

5*. [default,ex:implicacao]

Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $A \implies B \equiv (\textsf{ não } A) \textsf{ ou } B$.

(c) $(A \implies B) \equiv ((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\textsf{ não } B) \implies (\textsf{ não } A))$.

(d) $(A \implies F) \equiv \textsf{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(e) $((A \implies B) \textsf{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \textsf{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(f) $((A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(g) $((B \implies A) \textsf{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \textsf{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((B \implies A) \textsf{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \textsf{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(i) $((A \implies B) \textsf{ e } (A \implies (\textsf{ não } B))) \implies (\textsf{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

Resposta:

(a) Vamos provar que $F \implies A$.
Seja A uma proposição. Temos, então, que

$$(F \implies A) \equiv ((\textsf{ não } F) \textsf{ ou } A) \equiv (V \textsf{ ou } A) \equiv (V)$$

e, logo, $F \implies A$.

(b) Vamos provar que $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.
Sejam A e B duas proposições. Temos que

$$(A \implies B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } B)$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)) &\equiv ((\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A)) \\ &\equiv (B \text{ ou } (\text{ não } A)).\end{aligned}$$

Como $((\text{ não } A) \text{ ou } B) \equiv (B \text{ ou } (\text{ não } A))$, então

$$(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)).$$

Logo, $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(c) Vamos provar que se A é uma proposição, então

$$(A \implies F) \equiv (\text{ não } A).$$

Seja A uma proposição. Então,

$$\begin{aligned}(A \implies F) &\equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } F) \\ &\equiv (\text{ não } A),\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.
Portanto, $(A \implies F) \equiv (\text{ não } A)$.

(d) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$(A \implies B) \text{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Então,

$$(A \implies B) \text{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$$

é equivalente a

$$(V \implies B) \text{ ou } (V \implies C) \equiv (V \implies (B \text{ ou } C)),$$

que é equivalente a

$$(B \text{ ou } C) \equiv (B \text{ ou } C).$$

Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$(A \implies B) \textsf{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \textsf{ ou } C))$$

é equivalente a

$$(F \implies B) \textsf{ ou } (F \implies C) \equiv (F \implies (B \textsf{ ou } C)),$$

que é equivalente a

$$(V \textsf{ ou } V) \equiv (V),$$

que é equivalente a

$$(V) \equiv (V).$$

Portanto, se A, B e C são proposições, então

$$(A \implies B) \textsf{ ou } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \textsf{ ou } C)).$$

(e) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$(A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Então,

$$(A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C))$$

é equivalente a

$$(V \implies B) \textsf{ e } (V \implies C) \equiv (V \implies (B \textsf{ e } C)),$$

que é equivalente a

$$(B \textsf{ e } C) \equiv (B \textsf{ e } C).$$

Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$(A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C))$$

é equivalente a

$$(F \implies B) \textsf{ e } (F \implies C) \equiv (F \implies (B \textsf{ e } C)),$$

que é equivalente a

$$(V \textsf{ e } V) \equiv (V),$$

que é equivalente a

$$(V) \equiv (V).$$

Portanto, se A, B e C são proposições, então

$$(A \implies B) \textsf{ e } (A \implies C) \equiv (A \implies (B \textsf{ e } C)).$$

(f) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A).$$

Sejam A, B e C proposições. Temos que

$$\begin{aligned}
((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) &\equiv (((\neg B) \text{ ou } A) \text{ ou } ((\neg C) \text{ ou } A)) \\
&\equiv ((\neg B) \text{ ou } A \text{ ou } (\neg C) \text{ ou } A) \\
&\equiv (((\neg B) \text{ ou } (\neg C)) \text{ ou } A) \\
&\equiv (\neg(B \text{ e } C) \text{ ou } A) \\
&\equiv ((B \text{ e } C) \implies A),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

(g) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A).$$

Sejam A, B e C proposições. Temos que

$$\begin{aligned}
((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) &\equiv (((\neg B) \text{ ou } A) \text{ e } ((\neg C) \text{ ou } A)) \\
&\equiv (A \text{ ou } ((\neg B) \text{ e } (\neg C))) \\
&\equiv (\neg(B \text{ ou } C) \text{ ou } A) \\
&\equiv ((B \text{ ou } C) \implies A),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

6⋆. [default,ex:funcao-integralizada]

Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\
P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\
Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x).
\end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) satisfaz o predicado não $(P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R})$.

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) não satisfaz o predicado $Q(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(f) satisfaz o predicado $\text{ não } (Q(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R})$.

Resposta:

(a) Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz o predicado $P(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

$$P(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

é o predicado

$$I(x) \implies I(g(x)), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$x \in \mathbb{Z} \implies g(x) \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

que é satisfeito pela função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$. Efetivamente, neste caso, ficamos com a proposição

$$x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

que é verdadeira.

(b) Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não satisfaz o predicado $P(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.
Uma função não satisfaz o predicado

$$P(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

se e somente se satisfaz o predicado

$$\begin{aligned}
&\text{não } (P(g, x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}) \\
&\equiv \text{ não } P(g, x), \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \\
&\equiv \text{ não } (I(x) \implies I(g(x))), \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \\
&\equiv \text{ não } ((\text{ não } I(x)) \text{ ou } (I(g(x)))), \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \\
&\equiv (\text{ não } (\text{ não } I(x))) \text{ e } (\text{ não } I(g(x))), \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \\
&\equiv I(x) \text{ e } (\text{ não } I(g(x))), \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \\
&\equiv x \in \mathbb{Z} \text{ e } (\text{ não } (g(x) \in \mathbb{Z})), \text{ para algum } x \in \mathbb{R} \\
&\equiv x \in \mathbb{Z} \text{ e } g(x) \notin \mathbb{Z}, \text{ para algum } x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

que é satisfeito para $g(x) = \sqrt{x}$ e $x = 2$.

(c) Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz o predicado $\textsf{não}\ (P(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R})$.

Satisfazer o predicado $\textsf{não}\ (P(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R})$ é, por definição, não satisfazer o predicado $P(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R}$.

A resposta é a mesma que a do item anterior.

(d) Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz o predicado $Q(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R}$.

$$Q(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R},$$

é o predicado

$$I(g(x)) \implies I(x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R},$$

ou seja

$$g(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z},\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R},$$

que é satisfeito pela função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$.

Efetivamente, neste caso, ficamos com a proposição

$$x \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z},\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R},$$

que é verdadeira.

(e) Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que não satisfaz o predicado $Q(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R}$.

Uma função não satisfaz o predicado

$$Q(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R},$$

se e somente se satisfaz o predicado

$$\begin{aligned}
&\textsf{não}\ (Q(g,x),\ \textsf{para todo}\ x \in \mathbb{R})\\
&\equiv\ \textsf{não}\ Q(g,x),\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R})\\
&\equiv\ \textsf{não}\ (I(f(x)) \implies I(x)),\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R})\\
&\equiv\ \textsf{não}\ ((\ \textsf{não}\ I(f(x)))\ \textsf{ou}\ I(x)),\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R})\\
&\equiv (\ \textsf{não}\ (\ \textsf{não}\ I(f(x))))\ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ I(x)),\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R})\\
&\equiv I(f(x))\ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ I(x)),\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R}\\
&\equiv f(x) \in \mathbb{Z}\ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ x \in \mathbb{Z}),\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R}\\
&\equiv f(x) \in \mathbb{Z}\ \textsf{e}\ x \notin \mathbb{Z},\ \textsf{para algum}\ x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

que é satisfeito para $g(x) = x^2$ e $x = \sqrt{2}$.

(f) Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz o predicado $\textsf{não } (Q(g,x), \textsf{ para todo } x \in \mathbb{R})$.

Satisfazer o predicado $\textsf{não } (Q(g,x), \textsf{ para todo } x \in \mathbb{R})$ é, por definição, não satisfazer o predicado $P(g,x), \textsf{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

A resposta é a mesma que a do item anterior.

7#. [default,ex:aproximacao]

Considere os seguintes predicados.

$$
\begin{aligned}
L(f) &\equiv \lim f(n) = 0,\\
P(n,f,g,h) &\equiv f(n) = g(n)(1+h(n)),\\
B(f,g,h) &\equiv L(h) \textsf{ e } (P(n,f,g,h), \textsf{ para todo } n \in \mathbb{N}),\\
A(f,g) &\equiv B(f,g,h), \textsf{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f,g)$.

(b) não satisfazem $A(f,g)$.

Resposta:

(a) $f(n) = n$, $g(n) = n + 1$

(b) $f(n) = n$, $g(n) = n^2$

8#. [default,ex:O-como-predicado]

Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \textsf{ para algum } k > 0), \textsf{ para algum } c > 0), \textsf{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

Resposta:

(a) É verdadeira. Basta tomar $c = k = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, (n \geq 2) \implies |f(n)| \leq 2 &\equiv \forall n \geq 2, |f(n)| \leq 2\\ &\equiv \forall n \geq 2, |\frac{n}{n-1}| \leq 2\\ &\equiv \forall n \geq 2, n \leq 2n-2 \quad \equiv V.\end{aligned}$$

(b) É falsa. Como prova, suponha que existam $c > 0$ e $k > 0$ satisfazendo

$$n \geq k \implies n \leq c.$$

Então, independente de n, c limita $f(n) = n$. Como c é constante, tome $k \leq f(n) = n = \lfloor c \rfloor + 1$.

Assim, se $n \geq k$, então $n \leq c \equiv \lfloor c \rfloor + 1 \leq c$, o que deriva uma contradição.

Logo, não existem $c > 0$ e $k > 0$ satisfazendo

$$n \geq k \implies n \leq c.$$

Portanto, (não $O(n)$).

(c) É verdadeira. Basta tomar $k = 1$ e $c = 11$. Assim,

$$10 + 1/n \leq 11, \text{ para todo } n \geq 1,$$

que é equivalente a

$$n \geq 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

como queríamos demonstrar.

(d) É falsa. Como prova, suponha que existam tais $c > 0$ e $k > 0$ satisfazendo

$$n \geq k \implies |f(n)| \leq c;$$

isto é, a partir de um certo k, c limita $|f(n)|$, independente de $|f(n)|$. Entretanto, $|f(n)|$ não é limitada, pois

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|f(n)|}{c} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{c}\\ &= \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} \log n\\ &= \infty.\end{aligned}$$

Portanto, (não $O(\log n)$).

(e) É verdadeira. Tome $k = 1$ e $c = 42$. Assim, $|f(n)|$ é limitada por 42, para todo $n \geq 1$.

9$^{\#}$. [default,ex:notacao-assintotica]

Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.
(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.
(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.
(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

Resposta:

(a) É verdadeira. Basta tomar $c = 1$ e $k = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2, (n \geq 2) \implies |f(n)| \leq 1.|g(n)| &\equiv \forall n \geq 2, |f(n)| \leq |g(n)| \\
&\equiv \forall n \geq 2, n \leq n^2 \\
&\equiv \forall n \geq 2, 1 \leq n \equiv \underline{V}
\end{aligned}$$

(b) É falsa. Como prova, suponha que existam $c > 0$ e $k \geq 1$ tal que

$$n \geq k \implies n^2 \leq c.n.$$

Assim, se $n \geq k \geq 1$, então $n^2 \leq c.n \equiv n \leq c$;
isto é, a partir de um certo k, $c.n$ limita n^2, independente de n^2.
Entretanto, n^2 não é limitada, pois

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{c.n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{c} &= \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} n \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, (não $O(g, f)$).

(c) É verdadeira. Basta tomar $c = 1$ e $k = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, (n \geq 1) \implies |f(n)| \leq 1.|g(n)| &\equiv \forall n \geq 1, n/2 \leq n \\ &\equiv \forall n \geq 1, 1/2 \leq 1 \equiv \underline{V}\end{aligned}$$

(d) É verdadeira. Basta tomar $c = 4$ e $k = 1$. Assim,

$$\begin{aligned}\forall n \geq 1, (n \geq 1) \implies |f(n)| \leq 4.|g(n)| &\equiv \forall n \geq 1, n \leq 4.n/2 \\ &\equiv \forall n \geq 1, n \leq 2.n \\ &\equiv \forall n \geq 1, 1 \leq 2 \equiv \underline{V}\end{aligned}$$

$10^{\#}$. [default,ex:limite-como-predicado]

Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Resposta: Seja f uma função definida num intervalo aberto I.

(a)

$$\begin{aligned}L_1(f, a, l) =& ((((D(x, a, \delta) > 0) \implies D(f(x), l, \varepsilon)), \\ & \text{para todo } x \in I), \text{ para algum } \delta > 0), \text{ para todo } \varepsilon > 0\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}L_2(f, l) =& (((M(x, c) \implies D(f(x), l, \varepsilon)), \\ & \text{para todo } x \in I), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } \varepsilon > 0\end{aligned}$$

(c)

$$L_3(f,a) = ((((D(x,a,\delta) > 0) \implies M(f(x),l)), \text{ para todo } x \in I), \text{ para algum } \delta > 0), \text{ para todo } l > 0$$

(d)

$$L_4(f) = ((M(x,c) \implies M(f(x),l)), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } l > 0$$

A.2 Conjuntos e Inteiros

11$^{@}$. [default,ex:diferenca-subconjunto]
Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

Resposta:
Podemos reescrever $A = (A - B) \cup B$ como

$$A \subseteq (A - B) \cup B$$

e

$$(A - B) \cup B \subseteq A.$$

Portanto, podemos dividir a prova de $A = (A-B) \cup B$ em duas partes:

(a) Como $A \subseteq (A - B) \cup B$, tem-se que:

$$x \in A \implies x \in ((A - B) \cup B)$$

Seja $x \in A$, temos 2 casos:
   i. $x \in B \implies x \in (A - B) \cup B$
   ii. $x \notin B \implies x \in (A - B) \implies x \in (A - B) \cup B$

(b) Como $(A - B) \cup B \subseteq A$, tem-se que:

$$x \in (A - B) \cup B \implies x \in A$$

Seja $x \in (A - B) \cup B$, temos 2 casos:
   i. $x \in (A - B) \implies x \in A \cap x \notin B \implies x \in A$

ii. $x \notin (A - B) \implies \neg(x \in (A - B)) \implies x \notin A \cup x \in B \implies x \in B \implies x \in A$

12$^{\#}$. [default,ex:distributiva-intersecao2]

Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

Resposta:

Temos que provar que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

ou seja, que

$$(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

e

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C.$$

Vamos provar que $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$**:** Temos que provar que

$$x \in (A \cup B) \cap C \implies x \in (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$\text{para todo } x \in (A \cup B) \cap C.$$

Seja $x \in (A \cup B) \cap C$. Então, $x \in A$ ou $x \in B$. Sem perda de generalidade podemos assumir $x \in A$.

Além disso, se $x \in (A \cup B) \cap C$, então $x \in C$ e, daí, $x \in (A \cap C)$ e, consequentemente, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Vamos provar que $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$**:** Temos que provar que

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \implies x \in (A \cup B) \cap C,$$
$$\text{para todo } x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Seja $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Então, $x \in A \cap C$ ou $x \in B \cap C$. Sem perda de generalidade podemos assumir $x \in A \cap C$ e, consequentemente, $x \in A$ e $x \in C$. Daí, temos que $x \in A \cup B$ e, consequentemente, $x \in (A \cup B) \cap C$.

13$^{\#}$. [default,ex:conj-rel-stifel]

Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

Resposta:

Vamos provar que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A}$$

provando que

$$\begin{aligned} \binom{A}{k} &\subseteq A^- \cup \overline{A}, \text{ e} \\ A^- \cup \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

Para provar que

$$A^- \cup \overline{A} \subseteq \binom{A}{k},$$

basta observar que decorre diretamente das respectivas definições de A^- e $\overline{A}$ que

$$\begin{aligned} A^- &\subseteq \binom{A}{k}, \text{ e} \\ \overline{A} &\subseteq \binom{A}{k}. \end{aligned}$$

Resta então provar que

$$\binom{A}{k} \subseteq A^- \cup \overline{A},$$

ou seja, que

$$X \in \binom{A}{k} \implies X \in A^- \cup \overline{A}, \text{ para todo } X \in \binom{A}{k}.$$

Seja então $X \in \binom{A}{k}$. Vamos provar que

$$X \in A^- \cup \overline{A}.$$

No caso em que $X \in A^-$, não há mais nada a fazer.

Se, por outro lado, $X \notin A^-$, então é porque $a \in X$.

Neste caso, seja $X' = X - \{a\}$ e observe que $X' \subseteq A - \{a\}$ e que

$$|X'| = |X - \{a\}| = |X| - |\{a\}| = k - 1,$$

e portanto, $X' \in \binom{A-\{a\}}{k-1} = A^+$.

Consequentemente,

$$X = X' \cup \{a\} \in \overline{A}.$$

14$^{\#}$. [default,ex:produtorio]

Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)
$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

Resposta:

(a) Não é verdade. Seja $X = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}\right\}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\prod_{x\in X} c &= c \prod_{x\in X-\{x_1\}} c \\
&= c^2 \prod_{x\in X-\{x_1,x_2\}} c \\
&= \ldots \\
&= c^k \prod_{x\in X-\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}} c \\
&= \ldots \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in X-\{x_1,x_2,\ldots,x_{|X|}\}} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in X-X} c \\
&= c^{|X|} \prod_{x\in\emptyset} c \\
&= c^{|X|} \\
&\neq c|X|
\end{aligned}
$$

e, portanto, $\prod_{x\in X} c \neq c|X|$.

(b) Não é verdade. Tome, por contra-exemplo,

$$f(x) = 2x, g(x) = x^2 \text{ e } X = \{2, 3\}.$$

Dessa forma,

$$\prod_{x\in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x\in\{2,3\}} \left(2x + x^2\right) = 120,$$

enquanto

$$\prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x) = \prod_{x\in\{2,3\}} (2x) + \prod_{x\in\{2,3\}} \left(x^2\right) = 60$$

e, portanto, não pode ser que

$$\prod_{x\in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x\in X} f(x) + \prod_{x\in X} g(x).$$

(c) Não é verdade. Tomando, novamente,

$$f(x) = 2x, g(x) = x^2 \text{ e } X = \{2, 3\},$$

obtemos

$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \sum_{x \in \{2,3\}} \left(2x^3\right) = 70$$

e, por outro lado,

$$\left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right) = \left(\sum_{x \in \{2,3\}} 2x\right)\left(\sum_{x \in \{2,3\}} x^2\right)$$
$$= (10)\,(13) = 130$$

e, portanto,

$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) \neq \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right).$$

A.3 Aproximação Assintótica

$15^@$. [default,ex:harmonicos]

A *Série Harmônica* é a série dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como *constante de Euler–Mascheroni*, isto é,

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.577215664901532860606512090082402431042159335939 92\ldots$$

Prove que

$$H(n) \approx \ln n.$$

Resposta:

Fazendo

$$f(n) = H(n) - \ln n - \gamma,$$

temos
$$\lim f(n) = 0,$$
e
$$H(n) = \ln n + \gamma + f(n) = \ln n \left(1 + \frac{\gamma + f(n)}{\ln n}\right),$$
e portanto,
$$H(n) \approx \ln n.$$

16$^{@}$. [default,ex:approx]

Prove que

(a) [default,ex:approx-binom2]

Prove que
$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

Resposta:
$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$
e
$$\lim -\frac{1}{n} = 0.$$

(b) [default,ex:approx-sum]
$$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

Resposta:
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
e
$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

(c) [default,ex:approx:lognfat]
A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

Resposta:
Como

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

ou seja

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon(n)),$$

para alguma função $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Então, para todo $b > 1$,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= \log_b \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon(n))\right) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n(\log_b n - \log_b e) + \log_b(1+\varepsilon(n)) \\
&= \log_b \sqrt{2\pi n} + n\log_b n - n\log_b e + \log_b(1+\varepsilon(n)) \\
&= n\log_b n\left(1 - \frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n\log_b n} + \frac{\log_b(1+\varepsilon(n))}{n\log_b n}\right),
\end{aligned}$$

e como

$$\lim -\frac{\log_b e}{\log_b n} + \frac{\log_b \sqrt{2\pi n}}{n\log_b n} + \frac{\log_b(1+\varepsilon(n))}{n\log_b n} = 0,$$

então

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

(d) [default,ex:approx:sumlog-nlogn]
Use o resultado do Exercício 16c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

Resposta:
Para todo $b > 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i = \log_b \left(\prod_{i=1}^{n} i \right) = \log_b n!,$$

e do Exercício 16c, temos

$$\log_b n! \approx n \log_b n.$$

(e) [default,ex:approx:piso-teto-lgn]

$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

Resposta:
Pelo Teorema 8, temos que

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n$$

e pelo Teorema 9, temos que

$$\lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$$

e então,

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1.$$

Dividindo todos por $\lg n$, temos

$$\frac{\lg n - 1}{\lg n} < \frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} \leq \frac{\lg n}{\lg n} \leq \frac{\lceil \lg n \rceil}{\lg n} < \frac{\lg n + 1}{\lg n},$$

e então,

$$1 - \frac{1}{\lg n} < \frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} \leq 1 \leq \frac{\lceil \lg n \rceil}{\lg n} < 1 + \frac{1}{\lg n},$$

Então

$$\frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} \approx 1 \approx \frac{\lceil \lg n \rceil}{\lg n}.$$

Portanto

$$\lfloor \lg n \rfloor \approx \lg n \approx \lceil \lg n \rceil.$$

17$^-$. [default,ex:taylor-aprox]

A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

conclua que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

Resposta:

18$^\#$. [default,ex:polinomio-assintotico]

Seja $P \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$

com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que

$$P(n) \approx a_k n^k.$$

Resposta:

Vamos provar que $P(n) \approx a_k n^k$.

Como

$$\begin{aligned} a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_{k-1} n^{k-1} + a_k n^k \\ = a_k n^k \left(1 + \frac{a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_{k-1} n^{k-1}}{a_k n^k}\right) \\ = a_k n^k \left(1 + \frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{a_{k-1} n^1}\right), \end{aligned}$$

e

$$\lim \frac{a_0}{a_k n^k} + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{a_{k-1} n^1} = 0,$$

então (T. 7),

$$P(n) \approx a_k n^k.$$

19$^{\#}$. [default,ex:fib-approx]

Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

Observe que

$$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < \left|\frac{1-2}{2}\right| < 1,$$

e

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+2}{2} > 1,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \lim\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= 0, \text{ e} \\ \lim\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n &= \infty. \end{aligned}$$

Então,

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right)$$

20$^{\#}$. [default,ex:soma-fib-approx]

Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Resposta:

Do Ex. 19, temos que

$$\begin{aligned}\lim \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n &= 0, \text{ e}\\ \lim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n &= \infty.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1\\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 - \frac{\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} - \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}\right).\end{aligned}$$

Como

$$\lim -\frac{\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} - \frac{1}{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} = 0$$

então (T. 7),

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

21*. [default,ex:soma-pg-assintotica]
Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $0 < c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

Resposta:

Em ambos os casos, $s(n)$ é a soma dos $n+1$ termos iniciais da progressão geométrica de razão c iniciada em $c^0 = 1$ e daí, (cfr. Exercício 57)

$$s(n) = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1}.$$

(a) Se $c > 1$, então

$$s(n) = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} = \frac{c^{n+1}}{c - 1}\left(1 - \frac{1}{c^{n+1}}\right)$$

e como

$$\lim -\frac{1}{c^{n+1}} = 0,$$

então (T. 7),

$$s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c - 1}.$$

(b) Se $c < 1$, então

$$s(n) = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1} = \frac{1}{c - 1}\left(c^{n+1} - 1\right) = \frac{1}{1 - c}\left(1 - c^{n+1}\right),$$

e como

$$\lim -c^{n+1} = 0,$$

então (T. 7),

$$s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c - 1}.$$

$22^{\#}$. [default,ex:approx-sanduiche]

Sejam $F, f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

Resposta:

Como

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

e $F(n) \approx f(n)$ e $F(n) \approx h(n)$,

$$F \approx g, \text{ se } f \approx g \approx h.$$

E portanto,

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = \lim \frac{g(n)}{h(n)} = 1,$$

pois

$$\lim \frac{F(n)}{f(n)} = \lim \frac{h(n)}{F(n)} = 1.$$

Portanto,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

conferir (dm)

23#. [default,ex:teo:approx=lim-1]

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Resposta:

Temos que $f(n) \approx g(n)$ se

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Tome

$$\varepsilon(n) = \frac{f(n)}{g(n)} - 1.$$

e como consequência

$$\lim \varepsilon(n) = \lim \left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1 \right) = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\lim \frac{f(n)}{g(n)} &= \lim \frac{g(n)(1+\varepsilon(n))}{g(n)} \\
&= \lim\,(1+\varepsilon(n)) \\
&= \lim \left(1 + \frac{f(n)}{g(n)} - 1)\right) \\
&= \lim 1 + \lim \left(\frac{f(n)}{g(n)} - 1\right) \\
&= 1 + 0 = 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(n) \approx g(n).$$

conferir (dm) - não estou seguro da prova, :(

24$^{\#}$. [default,ex:approx-equiv]

Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Resposta:

Sejam $f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl}
f(n) & \approx & g(n), \\
g(n) & \approx & h(n).
\end{array}$$

$\approx$ é reflexiva: $f(n) \approx f(n)$ pois

$$\lim \frac{f(n)}{f(n)} = 1.$$

$\approx$ é simétrica: como $f(n) \approx g(n)$, então

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

e daí

$$\lim \frac{g(n)}{f(n)} = 1,$$

e, portanto, $g(n) \approx f(n)$.

$\approx$ **é transitiva:** como $f(n) \approx g(n)$, então

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Como $g(n) \approx h(n)$, então (Ex. 23)

$$g(n) = h(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

para alguma $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

Então,

$$h(n) = \frac{g(n)}{1 + \varepsilon(n)}$$

e

$$\frac{f(n)}{h(n)} = \frac{f(n)}{\frac{g(n)}{1+\varepsilon(n)}} = \frac{f(n)}{g(n)}(1 + \varepsilon(n))$$

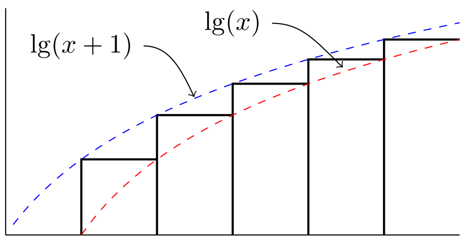
e daí

$$\lim \frac{f(n)}{h(n)} = \lim \frac{f(n)}{g(n)}(1+\varepsilon(n)) = \lim \frac{f(n)}{g(n)} \lim(1+\varepsilon(n)) = 1\times 1 = 1,$$

e portanto, $f(n) \approx h(n)$

25$^{\#}$. [default,ex:quase-stirling]

A partir da observação de que



$$\int_1^n \log_b(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} \log_b i \leq \int_0^n \log_b(x+1)dx.$$

prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n.$$

Resposta:

Primeiramente vamos provar que

$$\int_1^n \log_b (x)dx \approx \int_0^n \log_b (x+1)dx,$$

e daí concluir que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx \int_1^n \log_b (x)dx.$$

Em seguida, vamos provar que

$$\int_1^n \log_b (x)dx \approx n \log_b n,$$

para concluir que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n.$$

Como

$$\int_1^n \log_b (x)dx = \log_b \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n e \right) = n(\log_b n - \log_b e) + \log_b e$$

e

$$\begin{aligned}\int_0^n \log_b (x+1)dx = \log_b \left(\left(\frac{n+1}{e}\right)^{(n+1)} e \right)\\
= (n+1)(\log_b(n+1) - \log_b e) + \log_b e\\
= (n+1)\log_b(n+1) - (n+1)\log_b e\\
= (n+1)\log_b n(1+1/n) - (n+1)\log_b e\\
= (n+1)(\log_b n + \log_b(1+1/n)) - (n+1)\log_b e\\
= n\log_b n - n\log_b e + \log_b n + (n+1)\log_b(1+1/n) - \log_b e\\
= n(\log_b n - \log_b e) + \log_b e + \log_b n + (n+1)\log_b(1+1/n) - 2\log_b e,\end{aligned}$$

então

$$\int_0^n \log_b (x+1)dx = \left(\int_1^n \log_b (x)dx\right)\left(1 + \frac{\log_b n + (n+1)\log_b(1+1/n) - 2\log_b e}{n(\log_b n - \log_b e) + \log_b e}\right)$$

e como

$$\lim \frac{\log_b n + (n+1)\log_b(1+1/n) - 2\log_b e}{n(\log_b n - \log_b e) + \log_b e} = 0,$$

concluímos que

$$\int_1^n \log_b(x)dx \approx \int_0^n \log_b(x+1)dx.$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned}\int_1^n \log_b(x)dx &= n(\log_b n - \log_b e) + \log_b e \\ &= n\log_b n - (n-1)\log_b e \\ &= n\log_b n\left(1 - \frac{(n-1)\log_b e}{n\log_b n}\right).\end{aligned}$$

e

$$\lim \frac{(n-1)\log_b e}{n\log_b n} = 0,$$

concluímos que

$$\int_1^n \log_b(x)dx \approx n\log_b n,$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n\log_b n.$$

A.4 Piso e Teto

26⁻. [default,ex:piso-approx]

É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

Resposta:

Não é verdade. Por exemplo, considere

$$f(n) = \begin{cases} n + \frac{9}{10}, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \\ n, & \text{se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Neste caso

$$\frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)} = \begin{cases} \frac{10}{9(1+10/9n)}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 1, & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

e $\lim \frac{\lfloor f(n) \rfloor}{f(n)}$ sequer está definido.

27^{-}. [default,ex:piso-approx-soma]

É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

Resposta:

Não é verdade.

Por exemplo para $f(n) = 1/2$ temos $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(n) \rfloor = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} f(n) = n/2$.

28$^{\#}$. [default,ex:soma-piso-log]

A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{A.1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação.

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = k \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (A.1).

(c) Prove que[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

[1]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 37 e o fato de que $\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2$.

(e) Prove que[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

Resposta:

conferir ERE2

(a) Vamos provar que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor \text{ para todo } i \in [2^{\lfloor \lg k \rfloor}..2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1],$$

considerando os seguintes casos

i **é potência de** 2**,** isto é,

$$i = 2^{\lg i},$$

Como $2^{\lfloor \lg k \rfloor}$ é a única potência de 2 no intervalo $[2^{\lfloor \lg k \rfloor}..2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1]$, então, também,

$$i = 2^{\lfloor \lg k \rfloor},$$

e daí, como a função 2^x é injetora,

$$2^{\lg i} = 2^{\lfloor \lg k \rfloor},$$

e, portanto,

$$\lg i = \lfloor \lg k \rfloor.$$

i **não é potência de** 2**:** neste caso

$$2^{\lfloor \lg k \rfloor} < i < 2^{\lfloor \lg ki \rfloor + 1},$$

e, portanto

$$\lg 2^{\lfloor \lg k \rfloor} < \lg i < \lg 2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1},$$

e portanto,

$$\lfloor \lg k \rfloor < \lg i < \lfloor \lg k \rfloor + 1,$$

isto é, $\lg i$ não é inteiro e daí,

$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor.$$

[2]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 37

(b) Seja $n > 0$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor =$$

$$\begin{gathered}
\lfloor \lg 1 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 2 \rfloor + \lfloor \lg 3 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 4 \rfloor + \lfloor \lg 5 \rfloor + \lfloor \lg 6 \rfloor + \lfloor \lg 7 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 8 \rfloor + \ldots + \lfloor \lg 15 \rfloor \\
+ \\
\lfloor \lg 16 \rfloor + \ldots + \lfloor \lg 31 \rfloor \\
+ \\
\vdots \\
+ \\
\left\lfloor \lg 2^{j} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \lg 2^{j+1} - 1 \right\rfloor \\
+ \\
\vdots \\
\left\lfloor \lg 2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \lg 2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1 + 1} - 1 \right\rfloor \\
\left\lfloor \lg 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \right\rfloor + \ldots + \lfloor \lg n \rfloor \\
= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \sum_{i=2^{j}}^{2^{j+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=2^{\lfloor \lg n \rfloor}}^{n} \lfloor \lg n \rfloor
\end{gathered}$$

(c) Seja $n > 0$. Então (do Exercício 28b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor &= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=2^{\lfloor \lg n \rfloor}}^{n} \lfloor \lg n \rfloor \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} (2^{j+1} - 1 - 2^j + 1) j + (n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1) \lfloor \lg n \rfloor \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} j 2^j + (n + 1 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor
\end{aligned}$$

Da sugestão (Ex. 46) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} j 2^j &= ((\lfloor \lg n \rfloor - 1) - 1) 2^{(\lfloor \lg n \rfloor - 1) + 1} + 2 \\
&= (\lfloor \lg n \rfloor - 2) 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 2 \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2, \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} (\lfloor \lg n \rfloor - 2) + 2
\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor &= \sum_{j=1}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} j 2^j + (n + 1 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} (\lfloor \lg n \rfloor - 2) + 2 + (n + 1 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor \\
&= (n + 1 + 2^{\lfloor \lg n \rfloor} - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2 \\
&= (n + 1) \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2 \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + \lfloor \lg n \rfloor + 2.
\end{aligned}$$

(d) Tome

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \le \sum_{i=1}^{n} \lg i < \sum_{i=1}^{n} (\lfloor \lg i \rfloor + 1),$$

e, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \le \sum_{i=1}^{n} \lg i < \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + n.$$

Como
$$\sum_{i=1}^{n} \lg i < \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + n,$$
e (resultado do Ex. 28c)
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lfloor \lg n \rfloor$$
tem-se que
$$\begin{aligned} \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + n}{\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor} &= \lim \left(1 + \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor}\right) \\ &= \lim \left(1 + \frac{n}{n \lfloor \lg n \rfloor}\right) \\ &= \lim \left(1 + \frac{1}{\lfloor \lg n \rfloor}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$
Portanto
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Do Ex. 28c, temos que
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + \lfloor \lg n \rfloor + 2.$$
Então, podemos reescrever
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor &= n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + \lfloor \lg n \rfloor + 2 \\ &= n \lg n \left(\frac{\lfloor \lg n \rfloor}{\lg n} - \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}}{n \lg n} + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lg n} \right). \end{aligned}$$
Pelo Ex. 16e, temos que
$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor,$$
e, como
$$\lim \left(-\frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}}{n \lg n} + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lg n} \right) = 0,$$
portanto
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lg n$$

(f) Tomando a aproximação de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

e aplicando lg em ambos os lados, temos:

$$\begin{aligned}
\lg n! &\approx \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\\
&\approx \lg\sqrt{2\pi n} + \lg\left(\frac{n}{e}\right)^n\\
&\approx \lg\sqrt{2\pi n} + n\lg\left(\frac{n}{e}\right)\\
&\approx \lg\sqrt{2\pi n} + n\lg n - n\lg e\\
&\approx n\lg n\left(1 + \frac{\lg\sqrt{2\pi n}}{n\lg n} - \frac{n\lg e}{n\lg n}\right)\\
&\approx n\lg n\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\lg\sqrt{2\pi n}}{\lg n}\right) - \frac{\lg e}{\lg n}\right)\\
&\approx n\lg n\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\lg\sqrt{2\pi} + \lg\sqrt{n}}{\lg n}\right) - \frac{\lg e}{\lg n}\right)\\
&\approx n\lg n\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\lg\sqrt{2\pi}}{\lg n} + \frac{\lg\sqrt{n}}{\lg n}\right) - \frac{\lg e}{\lg n}\right)\\
&\approx n\lg n\left(1 + \frac{1}{n}\left(\frac{\lg\sqrt{2\pi}}{\lg n} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\lg e}{\lg n}\right)\\
&\approx n\lg n.
\end{aligned}$$

(g) Como a mudança da base do logaritmo implica apenas na multiplicação por uma constante do logaritmo da nova base (b) e a base considerada (2), isto é, sejam $n \in \mathbb{N}$ e $b \in bN$ e $b > 1$ tais que

$$\lg n = \frac{\log_b n}{\log_b 2} = \frac{1}{\log_b 2}\log_b n = (\log_2 b)\log_b n$$

podemos generalizar as proposições acima para outras bases, tais que $b \in bN$ e $b > 1$, tomando cuidado de substituir a base 2 por b quando conveniente.

29*. [default,ex:teo:ceil]

Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resposta:

Vamos provar que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz $x \leq \lceil x \rceil < x + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $I = \{y \in \mathbb{R} \colon x \leq y < x + 1\}$.

Esta prova tem dois casos: (a) quando $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$; e, (b) quando $x \in \mathbb{Z}$.

(a) Suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Então,

$$x \neq \lceil x \rceil$$

e, consequentemente,

$$x < \lceil x \rceil < x + 1$$

e, daí,

$$\lceil x \rceil - 1 < x < \lceil x \rceil < x + 1 < \lceil x \rceil + 1.$$

Como o intervalo I tem comprimento 1, uma vez que $(x+1)-(x) = 1$, e os vizinhos de $\lceil x \rceil$, que são $\lceil x \rceil - 1$ e $\lceil x \rceil + 1$, não são elementos de I, porque

$$\lceil x \rceil + 1 > x + 1 \text{ e } \lceil x \rceil - 1 < x,$$

conforme a última sequência de inequações, então, segue que o único inteiro em I é $\lceil x \rceil$.

(b) Suponha que $x \in \mathbb{Z}$.
Então,

$$x = \lceil x \rceil$$

e, consequentemente,

$$x = \lceil x \rceil < x + 1$$

e, daí,

$$\lceil x \rceil - 1 < x = \lceil x \rceil < x + 1 = \lceil x \rceil + 1.$$

Como o intervalo I tem comprimento 1 e os vizinhos de $\lceil x \rceil$ não são elementos de I, então, só pode ser que $\lceil x \rceil$ seja o único inteiro em I.

Logo, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro em I.

Portanto, $\lceil x \rceil$ é o único inteiro satisfazendo

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

30*. [default,ex:ceil-x+z]Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

Resposta: Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil.$$

Do Teorema 9 temos que

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

e, portanto, para todo $z \in \mathbb{Z}$,

$$x + z \leq \lceil x \rceil + z < (x + 1) + z,$$

e, portanto,

$$(x + z) \leq \lceil x \rceil + z < (x + z) + 1.$$

Do Teorema 9, podemos escrever

$$(x + z) \leq \lceil x + z \rceil < (x + z) + 1,$$

Como $\lceil x \rceil + z$ é inteiro, temos que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil.$$

31*. [default,ex:n+-1/2]

Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Resposta:

Basta considerar separadamente os casos em que n é par e ímpar.

32*. [default,ex:n/2]

Sejam $n, m \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1, \\ m(a,b) &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b)+1, b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$.

[3]

Resposta:

(a) Vamos provar que $a + b$ é par se, e somente se, $n(a,b)$ é ímpar, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.
Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então

$$a + b + n(a,b) = a + b + b - a + 1 = 2b + 1,$$

[3]**Sugestão:** Use o Exercício 31

que é ímpar, independentemente dos valores de a e b.

Logo, $a+b$ e $n(a,b)$ tem paridades contrárias, independentemente dos valores de a e b. Noutras palavras, $a+b$ é par se, e somente se, $n(a,b)$ é ímpar.

(b) Vamos provar que,

$$n(a,m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil, \text{ para todo } a,b \in \mathbb{Z}.$$

Temos que

$$\begin{aligned} n(a,m(a,b)) &= n\left(a, \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor\right) = \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - a + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{2}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a+1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)+1}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Então, temos duas situações.

i. Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor.$$

E, como $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil.$$

ii. Se $n(a,b)$ é ímpar, $\frac{n(a,b)+1}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil,$$

E, como $\frac{n(a,b)+1}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(a,m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil.$$

(c) Vamos provar que,

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor, \text{ para todo } a,b \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} n(m(a,b)+1,b) &= n\left(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + 1, b\right) = b - \left(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor + 1\right) + 1 \\ &= b - \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor = b + \left\lceil -\frac{a+b}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil b - \frac{a+b}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Então, temos duas situações.

i. Se $n(a,b)$ é par, $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil,$$

E, como $\frac{n(a,b)}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor.$$

ii. Se $n(a,b)$ é ímpar, $\frac{n(a,b)-1}{2}$ é inteiro e, portanto:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

E, como $\frac{n(a,b)-1}{2}$ é inteiro, tem-se que:

$$n(m(a,b)+1,b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor.$$

(d) Vamos provar que

$$n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor, \text{ para todo } a,b \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned}
n(a, m(a,b)-1) &= n\left(a, \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - 1\right) = \left(\left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor - 1\right) - a + 1\\
&= \left\lfloor \frac{a+b}{2} - \frac{2a}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a}{2} \right\rfloor\\
&= \left\lfloor \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{b-a+1}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor\\
&= \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} - \frac{1}{2} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Portanto

$$n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \frac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor.$$

33*. [default,ex:floor:ceil]

Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

Resposta:

(a) Vamos provar que $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, para todo x real.
Suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. De imediato temos que

$$\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

e, consequentemente,

$$(\lfloor x \rfloor + 1) - (\lfloor x \rfloor) = 1 \text{ e } x \in (\lfloor x \rfloor \,..\, \lfloor x \rfloor + 1),$$

o que os leva a crer que

$$\lfloor x \rfloor + 1 - x < 1 \text{ e } x - \lfloor x \rfloor < 1$$

e, logo, $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, uma vez que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Por outro lado, suponha que $x \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, $x = \lfloor x \rfloor$. Assim,

$$x - \lfloor x \rfloor = x - x = 0 \leq 1$$

e, portanto, $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, sempre que $x \in \mathbb{Z}$.
Dessarte, $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$, para todo x real.

(b) Vamos provar que $\lceil x \rceil - x \leq 1$, para todo x real.
Suponha que x é inteiro. Então, $x = \lceil x \rceil$ e, consequentemente,

$$\lceil x \rceil - x = x - x = 0 \leq 1$$

e, logo, $\lceil x \rceil - x \leq 1$.
Agora, suponha que x é um real não-inteiro. Nesse caso,

$$x < \lceil x \rceil < x + 1.$$

Como $(x+1) - (x) = 1$, então

$$(x+1) - (\lceil x \rceil) < 1 \text{ e } (\lceil x \rceil) - (x) < 1$$

porque $\lceil x \rceil$ é elemento do intervalo contínuo $(x..x+1)$.
Como

$$\lceil x \rceil - x < 1 \text{ e } x \neq \lceil x \rceil,$$

então $\lceil x \rceil - x \leq 1$ e, logo, $\lceil x \rceil - x \leq 1$.
Portanto, para todo x real, $\lceil x \rceil - x \leq 1$.

(c) Vamos provar que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$, provando que

$$x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$$

e

$$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \implies x \in \mathbb{Z}$$

em (i) e (ii), respectivamente.

i. Vamos provar que $x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.
Seja x um inteiro. Então,

$$\begin{aligned}\lfloor x \rfloor &= \min\{k \in \mathbb{Z} \colon k \geq x\} \\ &= \min\{x, x+1, x+2, \ldots\} \\ &= x\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lceil x \rceil &= \max\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\} \\ &= \max\{x, x-1, x-2, \ldots\} \\ &= x.\end{aligned}$$

Logo, $x \in \mathbb{Z}$ é suficiente para $\lfloor x \rfloor = x$ e $x = \lceil x \rceil$ e, portanto,

$$x \in \mathbb{Z} \implies \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil.$$

ii. Vamos provar que $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \implies x \in \mathbb{Z}$.
Temos que

$$\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

só é verdade se

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \cap \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

for um conjunto unitário. De fato,

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq x\} \cap \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\} = \{x\}$$

e, portanto, $x \in \mathbb{Z}$.
Dessarte, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor \implies x \in \mathbb{Z}$.

Portanto, $x \in \mathbb{Z}$ se e somente se $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

(d) Vamos provar que $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, para todo x real.
Inicialmente, suponha que $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Consequentemente,

$$\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil;$$

ou ainda $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Como $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, então

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = (\lfloor x \rfloor + 1) - \lfloor x \rfloor = 1.$$

Logo, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.
Por outro lado, suponha que x é inteiro. Daí vem que

$$\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$$

e, consequentemente, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = x - x = 0$. Logo,

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}.$$

Portanto, $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$, para todo x real.

$34^\star$. [default,ex:piso+1]

Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x + 1$.

Resposta:

(a) existe um único inteiro z em $\{y \in \mathbb{R} \mid x < y \leq x + 1\}$

(b) todo inteiro $< z$ também é $< x$

(c) z é o menor inteiro $> x$

35*. [default,ex:teto-1]

Prove que

$$\max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resposta:

Seja $m := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 9, $z \in \mathbb{Z}$ é o único inteiro tal que

$$x \leq z < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se m é inteiro e

$$(x - 1) \leq m < (x - 1) + 1,$$

então, pelo Teorema 9

$$x - 1 \leq \lceil x - 1 \rceil < x,$$

tem-se que:

$$m = \lceil x - 1 \rceil.$$

36@. [default,ex:lg:floor:ceil:desigualdade]

Prove que

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

Resposta:

Seja $n \in \mathbb{N}$.

Como

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil,$$

então (T. 8 e 9)

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1.$$

Como 2^x é uma função crescente, então

$$2^{\lg n - 1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \le 2^{\lg n} \le 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n + 1},$$

ou seja,

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \le n \le 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n.$$

37*. [default,ex:lg:floor:ceil]

(a)

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \le 1 \le \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$$

(b)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0.$$

(c)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \text{ se e somente se } x > \lg n.$$

(d)

$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor \text{ se e somente se } n \text{ é potência de } 2.$$

(e)

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de } 2.$$

(f)

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Resposta:

(a) Seja n um inteiro positivo.
Como (Ex.36)

$$n/2 < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \le n \le 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n.$$

Dividindo cada membro da desigualdade por n, temos

$$1/2 < 2^{\lfloor \lg n \rfloor}/n \le 1 \le 2^{\lceil \lg n \rceil}/n < 2.$$

Invertendo as frações, temos

$$2 > n/2^{\lfloor \lg n \rfloor} \ge 1 \ge n/2^{\lceil \lg n \rceil} > 1/2.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \le 1 \le \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2.$$

(b) Como (Exercício 37),

$$1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0.$$

(c) Se $x > \lfloor \lg n \rfloor$, então

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor$$

completar

e, portanto,

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0.$$

Por outro lado, seja $x > 0$ tal que

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0.$$

Então

$$0 \leq \frac{n}{2^x} < 1,$$

ou seja

$$2^x > n = 2^{\lg n}$$

e, portanto,

$$x > \lg n \geq \lfloor \lg n \rfloor .$$

(d) Vamos provar que

i. se $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ então n é potência de 2, para todo $n > 0$.

ii. n é potência de 2, então $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1)) \rfloor$, para todo $n > 0$.

i. Vamos provar que se $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ então n é potência de 2.
Seja $n > 0$ tal que

$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor .$$

Como $\lfloor \lg n \rfloor$ e $\lfloor \lg(n-1) \rfloor$ são inteiros, então

$$\lfloor \lg n \rfloor \geq 1 + \lfloor \lg(n-1) \rfloor ,$$

e daí, (Teorema 10)

$$\lfloor \lg n \rfloor \geq \lfloor 1 + \lg(n-1) \rfloor = \lfloor \lg 2(n-1) \rfloor,$$

e como 2^x é uma função crescente,

$$2^{\lfloor \lg n \rfloor} \geq 2^{\lfloor \lg 2(n-1) \rfloor}.$$

Do Exercício 36 temos que

$$\begin{aligned} 2^{\lfloor \lg n \rfloor} &\leq n, \\ 2^{\lfloor \lg 2(n-1) \rfloor} &> \frac{2(n-1)}{2} = n - 1, \end{aligned}$$

ou seja

$$n - 1 < 2^{\lfloor \lg 2(n-1) \rfloor} \leq 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n.$$

Como $2^{\lfloor \lg n \rfloor}$ é inteiro, concluímos que

$$n = 2^{\lfloor \lg n \rfloor},$$

ou seja,

$$2^{\lg n} = 2^{\lfloor \lg n \rfloor},$$

e portanto,

$$\lg n = \lfloor \lg n \rfloor,$$

e portanto, $\lg n$ é inteiro, isto é, n é potência de 2.

ii. Suponha que n seja uma potência de 2.
É imediato que existe um $a \in \mathbb{N}$ de modo que $n = 2^a$ e, assim,

$$\lfloor \lg n \rfloor = \lg n = \lceil \lg n \rceil,$$

pois $a = \lg n$.
Entretanto, como lg é função crescente, então $\lg(n-1) < \lg n$ e, também,

$$\lg \frac{n}{2} < \lg(n-1) < \lg n.$$

Como a potenciação é uma função crescente quando a base $1 < b = 2$ dessa potenciação é maior que o elemento neutro da multiplicação, então

$$2^{\lfloor \lg \frac{n}{2} \rfloor} = 2^{\lg \frac{n}{2}} < 2^{\lg(n-1)} < 2^{\lg n} = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$$

e, consequentemente,

$$\lfloor \lg n \rfloor - 1 < \lg(n-1) < \lfloor \lg n \rfloor.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lfloor \lg(n-1) \rfloor &= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \lg(n-1)\} \\
&= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k < \lg(n-1)\} \\
&= \max\{k \in \mathbb{Z} \mid \lfloor \lg n \rfloor - 1 \leq k < \lg(n-1) < \lfloor \lg n \rfloor\} \\
&= \lfloor \lg n \rfloor - 1
\end{aligned}$$

e, logo,

$$\lfloor \lg(n-1) \rfloor < \lfloor \lg n \rfloor .$$

Portanto, se n é potência de 2, então

$$\lfloor \lg(n-1) \rfloor < \lfloor \lg n \rfloor .$$

Portanto, n é potência de 2 se, e somente se, $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$.

(e) Vamos provar que

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2}$$

provando as duas implicações da equivalência.

i. Vamos provar que

$$n \text{ é potência de 2} \implies \lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil .$$

Suponha que $n = 2^k$ para algum k natural.
O primeiro termo da equação que queremos provar,

$$\lceil \lg n \rceil = \left\lceil \lg 2^k \right\rceil = \lceil k \lg 2 \rceil = \lceil k \rceil = k,$$

é menor que o segundo termo da mesma equação,

$$0 < 1 < 2^k \Rightarrow \left\lceil \lg(2^k + 1) \right\rceil = \left\lceil \lg 2^k + 1 \right\rceil = 1 + \left\lceil \lg 2^k \right\rceil = 1 + k$$

e, logo,

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \implies n \text{ é potência de 2.}$$

ii. Vamos provar que

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \implies n \text{ é potência de 2.}$$

Da trivial relação

$$0 < \lg(n+1) - \lg n \leq 1$$

segue, também trivialmente, que

$$\lg n < \lg(n+1) < \lg n + 1.$$

De

$$\lg n \in \mathbb{N} \text{ se e somente se } n = 2^k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}$$

e da relação $\lg n < \lg(n+1)$ só pode ser que

$$\lceil \lg n \rceil < \lg(n+1) \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

Portanto,

$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(f) Seja n um inteiro positivo.
Vamos provar que

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$$

nos casos de: (i) n uma potência de 2; (ii) n não ser uma potência de 2.

i. Suponha que n seja uma potência de 2 inteira. Então, é claro que existe um a satisfazendo $n = 2^a$ e, imediatamente, temos que
$$\lfloor \lg n \rfloor = \lg n = \lceil \lg n \rceil .$$
Por um lado, se $n = 1$, então $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.
Por outro lado, se $n > 1$, então $\lg(n+1)$ não é inteiro e, consequentemente,

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg(n+1) < \lg 2n = \lfloor \lg 2n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Como $\lfloor \lg 2n \rfloor - \lg n = 1$, então só pode ser que

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lg 2n = \lfloor \lg 2n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Logo, $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg(n+1) \rceil$, sempre que n é uma potência de 2.

ii. Suponha que n não seja uma potência de 2. Então, $\lg n \notin \mathbb{Z}$ e, consequentemente,

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg n < \lceil \lg n \rceil .$$

Repare também que $\lceil \lg n \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$. Para que $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$ resta mostrar que

$$\lceil \lg n \rceil = \lceil \lg(n+1) \rceil,$$

quando: (A) $n+1$ é potência de 2; e, (B) $n+1$ não é potência de 2.

A. Se $n+1$ é potência de 2, tendo em vista que n não é potência de 2, então

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg n < \lceil \lg n \rceil$$

e

$$\lfloor \lg(n+1) \rfloor = \lg(n+1) = \lceil \lg(n+1) \rceil.$$

Como $\lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg n \rceil$ e, além do mais, $\lfloor \lg n \rfloor = \lg(n+1) - 1$, então temos que $\lceil \lg n \rceil = \lg(n+1)$ e, consequentemente, $\lceil \lg n \rceil = \lceil \lg(n+1) \rceil$.

B. Se $n+1$ não é potência de 2, então

$$\lg(n+1) < \lfloor \lg n \rfloor + 1 = \lceil \lg n \rceil$$

e, como

$$\lfloor \lg n \rfloor < \lg(n+1) < \lceil \lg n \rceil,$$

então

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lceil \lg n \rceil.$$

Portanto, se n não é potência de 2, então

$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

Portanto, $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n \geq 1$.

38*. [default,ex:teo:piso-teto]

Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Resposta:

Vamos provar que
$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil .$$
Se x é inteiro, então
$$\lceil x \rceil = x,$$
e portanto,
$$f(\lceil x \rceil) = f(x).$$
e
$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil .$$
Se x não é inteiro, então
$$x < \lceil x \rceil ,$$
e como f é crescente, então
$$f(x) < f(\lceil x \rceil).$$
Além disso, não pode haver nenhum inteiro z tal que
$$f(x) < z < f(\lceil x \rceil),$$
pois como f é contínua, teríamos $z = f(a)$ para algum a tal que
$$x < a < \lceil x \rceil ,$$
e como $f(a)$ é inteiro e f é integralizada, então a seria um inteiro entre x e $\lceil x \rceil$, o que não é possível.

Como x não é inteiro e f é integralizada, então $f(x)$ não pode ser inteiro e então
$$f(x) < \lceil f(x) \rceil ,$$
Como $\lceil f(x) \rceil$ é inteiro, então
$$f(x) < f(\lceil x \rceil) \leq \lceil f(x) \rceil ,$$
e portanto,
$$f(x) < f(\lceil x \rceil) \leq \lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$$
Finalmente, como $\lceil f(x) \rceil$ é um inteiro entre $f(\lceil x \rceil)$ e $\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, temos necessariamente
$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil .$$

39$^{\#}$. [default,ex:cor:piso-teto]

Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

Resposta:

(a) Vamos provar que f é contínua em todo seu domínio.
Sejam $x, p \in \mathbb{R}$.
Temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to p} \frac{x}{k} &= \left(\lim_{x\to p} \frac{1}{k}\right)\left(\lim_{x\to p} x\right) \\ &= \frac{1}{k}p \\ &= \frac{p}{k} \end{aligned}$$

e, logo, f é contínua em p.
Logo, f é contínua em p, para todo $p \in \mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua.

(b) Vamos provar que f é crescente em todo seu domínio.
Temos que f é crescente se e somente se

$$x < y \implies f(x) < f(y), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Como f é diferenciável, então, f é crescente se e somente se

$$\frac{d}{dx}(f(x)) > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

e

$$\frac{1}{k} > 0,$$

então, só pode ser que f seja crescente em todo seu domínio.

Portanto, f é uma função crescente.

(c) Vamos provar que $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

Seja $x \in \mathbb{R}$.

Temos que se

$$\frac{x}{k} \in \mathbb{Z},$$

então,

$$x = zk, \text{ para algum } z \in \mathbb{Z},$$

porque, do contrário, $\frac{x}{k}$ não pode ser inteiro.

Como $k, z \in \mathbb{Z}$, então, $kz \in \mathbb{Z}$ e, consequentemente, $x \in \mathbb{Z}$, já que $x = zk$.

Portanto,

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

40#. [default,ex:recorrencia-mergesort-approx]

Prove que

(a)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \approx n \lg n$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1 \approx n \lg n$$

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned}
T^-(n) &:= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1, \\
T^+(n) &:= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1
\end{aligned}$$

(a) Dados $i, n \in \mathbb{N}$, temos (T. 8)

$$\frac{n}{2^i} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \frac{n}{2^i},$$

e daí,

$$2^i \left(\frac{n}{2^i} - 1 \right) < 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq 2^i \frac{n}{2^i},$$

isto é,

$$n - 2^i < 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq n,$$

e daí,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} \left(n - 2^i\right) < \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} n,$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} n - \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i < \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq n \lfloor \lg n \rfloor,$$

ou seja,

$$n \lfloor \lg n \rfloor - (2^{\lfloor \lg n \rfloor} - 1) < \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \leq n \lfloor \lg n \rfloor,$$

e daí,

$$n \lfloor \lg n \rfloor - (2^{\lfloor \lg n \rfloor} - 1) - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 < \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \leq n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1,$$

ou seja,

$$n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 2 < T^-(n) \leq n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1,$$

isto é,

$$n \lfloor \lg n \rfloor \left(1 - \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}}{n \lfloor \lg n \rfloor} + \frac{2}{n \lfloor \lg n \rfloor} \right) < T^-(n) \leq n \lfloor \lg n \rfloor \left(1 - \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor}}{n \lfloor \lg n \rfloor} + \frac{1}{n \lfloor \lg n \rfloor} \right)$$

donde concluímos (Ex. 22)

$$T^-(n) \approx n \lfloor \lg n \rfloor,$$

e como (Ex. 16e)

$$n \lfloor \lg n \rfloor \approx n \lg n,$$

temos

$$T^-(n) \approx n \lg n.$$

(b) Por argumento semelhante chegamos a

$$T^+(n) \approx n \lg n,$$

41$^-$. [default,ex:teo:composicao-continua]

Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

Resposta:

conferir ERE2

Demonstração. Sejam A, B e C conjuntos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas. Vamos provar que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

Duas formas:

(a) Vamos provar a continuidade em um ponto $c \in A$. Como $f\colon A \to B$ é continua em c, temos que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

E, como a função $g\colon B \to C$ é contínua em $f(c) \in B$, temos que

$$\lim_{y \to f(c)} g(y) = g(f(c)),$$

onde $g(f(c)) \in C$.

E pelo teorema sobre limites de funções compostas, temos que

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(f(c)).$$

o que mostra que $f \circ g\colon A \to C$ é contínua em c.

(b) (i) Sejam $c > 0$ e $x \in A$, vamos provar que:

$$|x - y| < a \implies |g(f(x)) - g(f(y))| < c,$$

para todo $y \in A$ e para algum $a > 0$, dado que:

(ii) Sejam $b > 0$ e $z \in A$

$$|z - w| < d \implies |f(z) - f(w)| < b,$$

para todo $w \in A$ e para algum $d > 0$, e

(iii) Sejam $e > 0$ e $u \in B$

$$|u - v| < f \implies |g(u) - g(v)| < e,$$

para todo $v \in B$ e para algum $f > 0$.

Como $|g(u) - g(v)| < e$ (iii) e $|g(f(x)) - g(f(y))| < c$ (i) então para o caso em que $e = c$, temos $u = f(x)$. Para converter v em $f(y)$, precisamos mudar a proposição: "para todo $v \in B$ e para algum $f > 0$, $P(v)$" em "para todo $y \in A$ e para algum $f > 0$, $P(f(y))$".

E a partir de (ii), fazendo $z = x$ e $b = f$ e renomeando w como y e d como a, temos

(iv) Sejam $f > 0$ e $x \in A$

$$|x - y| < a \implies |f(x) - f(y)| < f.$$

para todo $y \in A$ e para algum $a > 0$.

E finalmente, temos, sejam $c > 0$ e $x \in A$,

$$|x - y| < a \implies |g(f(x)) - g(f(y))| < c,$$

para todo $y \in A$ e para algum $a > 0$.

$\square$

42^{-}. [default,ex:teo:composicao-crescente]

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função crescente.

Resposta:

Demonstração. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Vamos provar que $f \circ g\colon A \to C$ é crescente, isto é, que

$$x < y \implies f \circ g(x) < f \circ g(y), \text{ para todo } x, y \in A.$$

Sejam $x, y \in A$ tais que $x < y$. Vamos provar que

$$f \circ g(x) < f \circ g(y).$$

Como f é crescente e $x < y$, então

$$f(x) < f(y).$$

Como g é crescente e $f(x) < f(y)$, então

$$g(f(x)) < g(f(y)),$$

ou seja,

$$f \circ g(x) < f \circ g(y).$$

$\square$

43$^-$. [default,ex:cor:composicao-piso-teto]

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to C$ funções contínuas e crescentes satisfazendo

$$\begin{aligned} f(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \text{ e} \\ g(x) \in \mathbb{Z} &\implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B. \end{aligned}$$

Prove que

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$.

Resposta:

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to C$ funções contínuas, crescentes e integralizadas.

Pelos Exercícios 41, 42 e 44 temos que a função $f \circ g \colon A \to C$ também é contínua, crescente e integralizada, e daí, pelo Teorema 15 temos que

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$.

44$^-$. [default,ex:teo:fx-in-bz]

Dizemos que uma função $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g \colon A \to C$ é uma função integralizada.

Resposta:

Demonstração. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções integralizadas. Vamos provar que $f \circ g\colon A \to C$ é integralizada.

Seja $x \in A$ tal que $f \circ g(x) \in \mathbb{Z}$. Vamos provar que $x \in \mathbb{Z}$.

Como $f \circ g(x) = g(f(x))$ e g é integralizada, concluímos que $f(x) \in \mathbb{Z}$.

Como $f(x) \in \mathbb{Z}$ e f é integralizada, concluímos que $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

A.5 Indução

45@. [default,ex:soma:potencias]

Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

Resposta:

Seja $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$. Vamos provar por induçao em n que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1}-1}{c-1}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{(a+1)+1}-1}{c-1}.$$

Temos

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1},$$

Como $a \in [0..a]$, então temos da H.I. que

$$\left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) = \frac{c^{a+1}-1}{c-1},$$

e daí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} c^i i &= \frac{c^{a+1}-1}{c-1} + c^{a+1} = \frac{c^{a+1}-1+c^{a+1}(c-1)}{c-1} \\
&= \frac{c^{a+1}(1+c-1)-1}{c-1} = \frac{c^{a+1}(c)-1}{c-1} = \frac{c^{a+2}-1}{c-1} \\
&= \frac{c^{(a+1)+1}-1}{c-1}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = \frac{c^{0+1}-1}{c-1}.$$

Basta verificar que, como $c \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = c^0 = 1,$$

e como $c \neq 1$,

$$\frac{c^{0+1}-1}{c-1} = \frac{c-1}{c-1} = 1.$$

46*. [default,ex:sum-i2i:inducao]

Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} i2^i = 2^{(k+1)}(k-1)+2, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = 2^{(a+1)+1}((a+1)-1)+2.$$

Como
$$\sum_{i=0}^{a+1} i2^i = \left(\sum_{i=0}^{a} i2^i\right) + (a+1)2^{(a+1)},$$
e $a \in [0..a]$, então pela HI temos
$$\sum_{i=0}^{a} i2^i = 2^{(a+1)}(a-1) + 2,$$
e portanto
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} i2^i &= \left(\sum_{i=0}^{a} i2^i\right) + (a+1)2^{(a+1)} \\
&= 2^{(a+1)}(a-1) + 2 + (a+1)2^{(a+1)} \\
&= a2^{(a+1)} - 2^{(a+1)} + 2 + a2^{(a+1)} + 2^{(a+1)} \\
&= 2a2^{(a+1)} + 2 \\
&= a2^{(a+1)+1} + 2 \\
&= 2^{(a+1)+1}((a+1)-1) + 2.
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que
$$\sum_{i=0}^{b} i2^i = 2^{b+1}(b-1) + 2,$$
para $b = 0$.
Basta verificar que
$$\sum_{i=0}^{0} i2^i = 2^{0+1}(0-1) + 2.$$
Como
$$\sum_{i=0}^{0} i2^i = 0.2^0 = 0,$$
e
$$2^{0+1}(0-1) + 2 = 2^1(-1) + 2 = -2 + 2 = 0.$$

47*. [default,ex:soma-binomial-inducao]

Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \textsf{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \textsf{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} = 2^{a+1}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} &= \sum_{i=0}^{a+1} \left(\binom{a}{i} + \binom{a}{i-1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i} + \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i-1} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} + \binom{a}{a+1} \right) + \left(\binom{a}{-1} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} \right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} + 0 \right) + \left(0 + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} \right) \\
&= 2 \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}.
\end{aligned}$$

Como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} = 2^a,$$

e daí

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} = 2(2^a) = 2^{a+1}.$$

Base: Basta provar que

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} = 2^0.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=0}^{0} \binom{0}{i} = 1,$$

por outro, temos que

$$2^0 = 1.$$

Dessarte, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, para todo n natural.

48*. [default,ex:soma-binomial-parcial]

Prove que (cfr. Exercício 47

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

Seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos provar por indução em n que

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

HI: Seja $a \geq k$ tal que

$$\sum_{i=k}^{l} \binom{i}{k} = \binom{l+1}{k+1}, \text{ para todo } l \in [k..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \binom{(a+1)+1}{k+1}.$$

Como

$$\sum_{i=k}^{a+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{a} \binom{i}{k} + \binom{a+1}{k} \overset{\text{HI}}{=} \binom{a+1}{k+1} + \binom{a+1}{k} = \binom{a+2}{k+1}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{b} = \binom{b+1}{k+1}, \text{ para todo } b \leq k.$$

Se $b = k$, temos

$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{b} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}.$$

Se $b < k$, temos

$$\sum_{i=k}^{b} \binom{i}{b} = 0 = \binom{b}{k+1}.$$

49*. [default,ex:teorema-binomial]

Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [4].

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

[4] **Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 47

Resposta:

Sejam $x, y \in \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = (x+y)^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= \binom{a+1}{0} x^0 y^{a+1-0} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} \\
&= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \left(\binom{a}{i} + \binom{a}{i-1} \right) x^i y^{a+1-i} \\
&= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^{i+1} y^{a+1-(i-1)} \\
&= \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \binom{a}{a+1} x^{a+1} y^{a+1-(a+1)} \\
&\quad + x \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i} \\
&= y \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i} + x \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i}.
\end{aligned}$$

Como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i)} = (x+y)^a,$$

e daí

$$\sum_{i=0}^{a+1}\binom{a+1}{i}x^iy^{a+1-i} = y(x+y)^a+x(x+y)^a = (y+x)(x+y)^a = (x+y)^{a+1}.$$

Base: Basta provar que

$$(x+y)^0 = \sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}x^iy^{0-i}.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=0}^{0}\binom{0}{i}x^iy^{0-i} = \binom{0}{0}x^0y^0 = 1,$$

por outro, temos que

$$(x+y)^0 = 1.$$

Finalmente, para concluir que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n,$$

basta tomar $x = y = 1$.

50$^@$. [default,ex:2an¡n-fatorial]

Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4,$$

por indução em n.

Hipótese de Indução: Seja $a \geq 4$ tal que

$$2^k < k!, \text{ para todo } k \in [4..a].$$

Passo da Indução: Vamos provar que $2^{a+1} < (a+1)!$.

Temos que
$$2^{a+1} = 2 \times 2^a.$$

Como $a \in [4..a]$, temos da H.I. que
$$2^a < a!,$$

e portanto,
$$2^{a+1} = 2 \times 2^a < 2 \times a!.$$

Por outro lado,
$$(a+1)! = (a+1) \times a!$$

e como $a \geq 4$ temos que
$$(a+1)! \geq (4+1) \times a! = 5 \times a!,$$

ou seja,
$$2^{a+1} < 2 \times a! < 5 \times a! \leq (a+1)!,$$

e portanto,
$$2^{a+1} < (a+1)!.$$

Base da Indução: Vamos provar que
$$2^4 < 4!.$$

Por um lado,
$$2^4 = 16.$$

e por outro lado,
$$4! = 24,$$

e portanto,
$$2^4 < 4!.$$

$51^{@}$. [default,ex:fibonacci:inducao]

A *sequência de Fibonacci* é a função $F \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por
$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Resposta:

(a) Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right), \text{ para todo } k \in [0..a],$$

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1}\right).$$

Pela definição de F temos que para todo $a > 1$,

$$F(a+1) = F(a) + F(a-1).$$

Como $a \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^a\right).$$

Como $a - 1 \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a-1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right).$$

Então

$$\begin{aligned}
F(a+1) &= F(a) + F(a-1) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{a+1}\right).
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$F(b) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{b} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{b}\right), \text{ para todo } b \in \{0,1\}$$

isto é, vamos provar que

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0}\right) \\
F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}\right).
\end{aligned}$$

Por um lado,

$$\begin{aligned}
F(0) &= 0, \\
F(1) &= 1.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}(1-1)=\frac{\sqrt{5}}{5}(0)=0,$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)&\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\\ &=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5}{5}\\ &=1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}F(0)&=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right)\\ F(1)&=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right),\end{aligned}$$

Portanto,

$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ \textsf{para todo } n\in\mathbb{N},$$

(b) Como

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\overset{\text{Ex. 19}}{\approx}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

então

$$F(n)=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}(1+\epsilon(n))\right)^n,$$

para alguma função $\epsilon\colon\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim\epsilon(n)=0$.

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n (1+\epsilon(n))^n.$$

Como

$$\lim \epsilon(n) = 0,$$

então

$$\lim(1+\epsilon(n)) = 1,$$

e daí,

$$\lim(1+\epsilon(n))^n = 1,$$

e, consequentemente,

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

52*. [default,ex:fibonacci]

Prove, por indução em n, que

(a) $\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(d) $F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n$, para todo $n > 0$

onde $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*[5].

retirada porque ninguém achou uma solução "fácil": $F(n+1)F(n) - F(n-1)F(n-2) = F(2n-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

podemos acrescentar $F_{3n} = F_{2n}F_{n+1} + F_{2n-1}F_n$?

por que estas foram retiradas?

(a) $\sum_{j=0}^{2n-1} F(j)F(j+1) = \big(F(n)\big)^2$

(b) $\sum_{j=0}^{2n} F(j)F(j+1) = \big(F(2n+1)\big) - 1$

Resposta:

[5]Veja o Exercício 51

(a) Vamos provar que $\sum_{j=0}^{n}\big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n{+}1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hipótese Indutiva: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=0}^{k}\big(F(j)\big)^2 = F(k)F(k+1),\ \text{para todo } k \in [0..a]\,.$$

Passo Indutivo: Vamos provar que

$$\sum_{j=0}^{a+1}\big(F(j)\big)^2 = F((a+1))((a+1)+1) = F(a+1)F(a+2).$$

Temos que

$$\sum_{j=0}^{a+1}\big(F(j)\big)^2 = \sum_{j=0}^{a}\big(F(j)\big)^2 + (F(a+1))^2,$$

Como $a \in [0..a]$, pela *HI* vem que:

$$\sum_{j=0}^{a}\big(F(j)\big)^2 = F(a)F(a+1),$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{a+1}\big(F(j)\big)^2 &= \sum_{j=0}^{a}\big(F(j)\big)^2 + F((a+1))^2\\ &= F(a)F(a+1) + (F(a+1))^2\\ &= F(a+1)(F(a)+F(a+1))\\ &= F(a+1)F(a+2).\end{aligned}$$

Base: Basta provar que

$$\sum_{j=0}^{b}\big(F(j)\big)^2 = F(b)F(b+1),$$

para $b = \{0,1\}$.
Para $b = 0$, por um lado

$$\sum_{j=0}^{0}\big(F(j)\big)^2 = F(0) = 0,$$

por outro lado,
$$(0)(1) = 0.$$
Para $b = 1$, por um lado
$$\sum_{j=0}^{1} \big(F(j)\big)^2 = (F(0))^2 + (F(1))^2 = 0^2 + 1^2 = 1,$$
por outro
$$F(1)F(1+1) = (1)(1) = 1.$$
Portanto, temos que
$$\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Vamos provar que
$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hipótese Indutiva: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que
$$\sum_{j=0}^{k} F(2j) = F(2k+1) - 1, \text{ para todo } k \in [0..a]\,.$$

Passo Indutivo: Vamos provar que
$$\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) = F(2(a+1)+1) - 1 = F(2a+3) - 1.$$

Temos que
$$\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) = \sum_{j=0}^{a} F(2j) + F(2(a+1)).$$

Como $a \in [0..a]$, pela *HI* vem que:
$$\sum_{j=0}^{a} F(2j) = F(2a+1) - 1$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{a+1} F(2j) &= \sum_{j=0}^{a} F(2j) + F(2a+2)\\ &= F(2a+1) + F(2a+2) - 1\\ &= F(2a+3) - 1 = F(2(a+1)+1) - 1.\end{aligned}$$

Base: Basta provar que

$$\sum_{j=0}^{0} F(2j) = F(2(0)+1) - 1.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{j=0}^{0} F(2j) = F(2(0)) = F(0) = 0.$$

por outro lado, temos que

$$F(2(0)+1) - 1 = F(1) - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Portanto,

$$\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Vamos provar, por indução em n, que

$$\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Hipótese Indutiva: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k} F(2j-1) = F(2k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo Indutivo: Vamos provar que

$$\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) = F(2(a+1)) = F(2a+2).$$

Temos que

$$\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) = F(2(a+1)) = F(2a+2).$$

Como $a \in [0..a]$, pela HI vem que:

$$\sum_{j=1}^{a} F(2j-1) = F(2a)$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{a+1} F(2j-1) &= \sum_{j=1}^{a} F(2j-1) + F(2(a+1)-1) \\ &= F(2a) + F(2a+2-1) \\ &= F(2a) + F(2a+1) = F(2a+2) = F(2(a+1)).\end{aligned}$$

Base: Basta provar que

$$\sum_{j=1}^{b} F(2j-1) = F(2(b)).$$

para $b = \{0, 1\}$.
Para $b = 0$, por um lado, temos que

$$\sum_{j=1}^{0} F(2j-1) = 0.$$

por outro lado, temos que

$$F(2(0)) = F(0) = 0.$$

Para $b = 1$, por um lado, temos que

$$\sum_{j=1}^{1} F(2j-1) = F(2(1)-1) = F(2-1) = F(1) = 1.$$

por outro lado, temos que

$$F(2(1)) = F(2) = 1.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(d) Vamos provar que

$$F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n,$$

para todo $n > 0$ por indução em n.

Hipótese Indutiva: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k+1)F(k-1) - (F(k))^2 = (-1)^k, \text{ para todo } k \in [1..a]\,.$$

Passo Indutivo: Vamos provar que

$$F((a+1)+1)F((a+1)-1) - (F(a+1))^2 = (-1)^{a+1}.$$

ou ainda que

$$(F(a+1))^2 = F(a+2)F(a) - (-1)^{a+1} = F(a+2)F(a) + (-1)^a.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}(F(a+1))^2 &= (F(a) + F(a-1))^2 \\ &= (F(a))^2 + 2F(a)F(a-1) + (F(a-1))^2.\end{aligned}$$

Como $a-1 > 0$ ($a = 1$ na base) e $a-1 \in [1..a]$, pela *HI* vem que:

$$F((a-1)+1)F((a-1)-1) - (F(a-1))^2 = F(a)F(a-2) - (F(a-1))^2 = (-1)^{a-1},$$

ou

$$(F(a-1))^2 = F(a)F(a-2) - (-1)^{a-1} = F(a)F(a-2) + (-1)^a.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}(F(a+1))^2 &= (F(a))^2 + 2F(a)F(a-1) + F(a)F(a-2) + (-1)^a \\ &= F(a)(F(a) + 2F(a-1) + F(a-2)) + (-1)^a \\ &= F(a)(F(a) + F(a-1) + F(a-1) + F(a-2)) + (-1)^a \\ &= F(a)(F(a+1) + F(a)) + (-1)^a \\ &= F(a)F(a+2) + (-1)^a.\end{aligned}$$

Base: Basta provar que $(b = 1)$

$$F(1+1)F(1-1) - (F(1))^2 = (-1)^1.$$

Por um lado, temos

$$F(1+1)F(1-1)-(F(1))^2 = F(2)F(0)-F(1)^2 = 1.0-(1)^2 = (-1),$$

por outro lado, temos

$$(-1)^1 = (-1).$$

Portanto

$$F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

53*. [default,ex:fibonacci-matricial]

Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 51)[6].

Resposta:

Vamos provar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}$$

para todo $n > 0$ por indução em n.

HI: Seja $a > 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F(k+1) & F(k) \\ F(k) & F(k-1) \end{pmatrix} \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} &= \begin{pmatrix} F((a+1)+1) & F(a+1) \\ F(a+1) & F((a+1)-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[6] Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

Como
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
e $a \in [1..a]$, então pela HI temos
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} = \begin{pmatrix} F(a+1) & F(a) \\ F(a) & F(a-1) \end{pmatrix}.$$
e portanto
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F(a+1) & F(a) \\ F(a) & F(a-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F(a+1)+F(a) & F(a+1) \\ F(a)+F(a-1) & F(a) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F(a+2) & F(a+1) \\ F(a+1) & F(a) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{1} = \begin{pmatrix} F(2) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} F(3) & F(2) \\ F(2) & F(1) \end{pmatrix}$$

Basta verificar que

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
e que,
$$\begin{pmatrix} F(2) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
e que,
$$\begin{pmatrix} F(3) & F(2) \\ F(2) & F(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

conferir (dm)

54^{-}. [default,ex:limitantes-fibonacci]

Prove por indução em n que

$$(\sqrt{2})^n \leq F(n+1) \leq 2^n \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $F(n)$ denota a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 51).

Resposta:

55*. [default,ex:recorrencia-mergesort-inducao]

O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Vamos provar que

$$T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^-(k) \leq T(k) \leq T^+(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$T^-(a+1) \leq T(a+1) \leq T^+(a+1).$$

Para $a+1 \geq 2$, temos que

$$T^-(a+1) = 2T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + (a+1) - 1 = 2T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + a,$$

e

$$\begin{aligned} T(a+1) &= T\left(\left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil\right) + (a+1) - 1 \\ &= T\left(\left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil\right) + a \end{aligned}$$

e

$$T^+(a+1) = 2T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + (a+1) - 1 = 2T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) + a.$$

Pela HI,

$$T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) \leq T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) \leq T^+\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right)$$

e

$$T^-\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \leq T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \leq T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} T^-\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &+ T^-\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\leq T\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right) \\ &\leq T^+\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + T^+\left(\left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil\right). \end{aligned}$$

Como T^- e T^+ são funções não-decrescentes,

$$\begin{aligned}
T^-\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right) + T^-\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right) \\
&\leq T^-\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right) + T^-\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right) \\
&\leq T\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right) \\
&\leq T^+\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right) + T^+\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right) \\
&\leq T^+\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right) + T^+\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right),
\end{aligned}$$

e, consequentemente

$$2T^-\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right)+a \leq T\left(\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor\right)+T\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right)+a \leq 2T^+\left(\left\lceil\frac{a+1}{2}\right\rceil\right)+a,$$

ou seja,

$$T^-(a+1) \leq T(a+1) \leq T^+(a+1).$$

Base: Basta verificar que

$$T^-(0) \leq T(0) \leq T^+(0)$$

e

$$T^-(1) \leq T(1) \leq T^+(1),$$

56^-. [default,ex:teo:rec-multinomial]

Dados $n_1, \ldots, n_k$ O *coeficiente multinomial* é definido por

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Observe que o coeficiente multinomial é uma generalização do coeficiente binomial, pois

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}.$$

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}}\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}, \text{ para todo } k \geq 2.$$

Resposta:

Por indução em k.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_p}{n_1, \ldots, n_p} = \binom{n_1 + \ldots + n_{p-1}}{n_1, \ldots, n_{p-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_p}{n_p}, \text{ para todo } p \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_{a+1}}{n_1, \ldots, n_{a+1}} = \binom{n_1 + \ldots + n_a}{n_1, \ldots, n_a} \binom{n_1 + \ldots + n_{a+1}}{n_{a+1}}$$

Fazendo

$$n := n_1 + \ldots + n_{a+1},$$

temos,

$$\begin{aligned}
\binom{n_1 + \ldots + n_{a+1}}{n_1, \ldots, n_{a+1}} &= \frac{(n_1 + \ldots + n_{a+1})!}{n_1! n_2! \ldots n_{a+1}!} \\
&= \frac{(n_1 + \ldots + n_a)!}{n_1! n_2! \ldots n_a!} \frac{n(n-1) \ldots (n - n_{a+1} + 1)}{n_{a+1}!} \\
&= \binom{n_1 + \ldots + n_a}{n_1, n_2, \ldots, n_a} \frac{n!}{n_{a+1}!(n - n_{a+1})!} \\
&= \binom{n_1 + \ldots + n_a}{n_1, n_2, \ldots, n_a} \binom{n}{n_{a+1}} \\
&= \binom{n_1 + \ldots + n_a}{n_1, n_2, \ldots, n_a} \binom{n_1 + \ldots + n_{a+1}}{n_{a+1}}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\binom{n_1 + n_2}{n_1, n_2} = \binom{n_1}{n_1} \binom{n_1 + n_2}{n_2}$$

Basta observar que

$$\binom{n_1 + n_2}{n_1, n_2} = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} = \binom{n_1 + n_2}{n_2} = \binom{n_1}{n_1} \binom{n_1 + n_2}{n_2}$$

57⋆. [default,ex:soma:potencias]

Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Resposta:

Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Vamos provar por induçao em n que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} c^i = \frac{c^{k+1} - 1}{c - 1}, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \frac{c^{(a+1)+1} - 1}{c - 1}.$$

Temos

$$\sum_{i=0}^{a+1} c^i = \left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) + c^{a+1},$$

Como $a \in [0..a]$, então temos da H.I. que

$$\left(\sum_{i=0}^{a} c^i\right) = \frac{c^{a+1} - 1}{c - 1},$$

e daí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} c^i i &= \frac{c^{a+1} - 1}{c - 1} + c^{a+1} = \frac{c^{a+1} - 1 + c^{a+1}(c - 1)}{c - 1} \\
&= \frac{c^{a+1}(1 + c - 1) - 1}{c - 1} = \frac{c^{a+1}(c) - 1}{c - 1} = \frac{c^{a+2} - 1}{c - 1} \\
&= \frac{c^{(a+1)+1} - 1}{c - 1}
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = \frac{c^{0+1}-1}{c-1}.$$

Basta verificar que, como $c \neq 0$,

$$\sum_{i=0}^{0} c^i = c^0 = 1,$$

e como $c \neq 1$,

$$\frac{c^{0+1}-1}{c-1} = \frac{c-1}{c-1} = 1.$$

58⋆. [default,ex:cor:uniao-disjunta-generalizada]

Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta:

Vamos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in [0..a]$, se $A_1, \ldots, A_k$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|.$$

Passo: Vamos provar que se $A_1, \dots, A_{a+1}$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Sejam $A_1, \dots, A_{a+1}$, conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si. Como $a + 1 > 0$, então

$$\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}.$$

Se $a \geq 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela HI,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}|.$$

Como $a \in [0..a]$, da HI temos também

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| = \sum_{i=1}^{a} |A_i|,$$

e daí,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a} |A_i| + |A_{a+1}| = \sum_{i=1}^{a+1} |A_i|.$$

Base: Vamos provar que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = \sum_{i=1}^{b} |A_i|, \text{ para todo } b \in [0..2].$$

Se $b = 0$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = 0,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = 0.$$

Se $b = 1$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = |A_1|,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = |A_1|.$$

Se $b = 2$, temos

$$\left|\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right| = |A_1 \cup A_2|,$$

e

$$\sum_{i=1}^{b} |A_i| = |A_1| + |A_2|,$$

que é fato conhecido.

59$^@$. [default,ex:distributiva-intersecao]

Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

Resposta: Vamos provar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{a+1} (A_i \cap B).$$

Temos que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right) \cap B.$$

Se $a > 2$, então $2 \in [0..a]$ e daí, pela H.I. temos

$$\left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cup A_{a+1}\right) \cap B = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cap B\right) \cup (A_{a+1} \cap B),$$

e portanto,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cap B\right) \cup (A_{a+1} \cap B),$$

e como $a \in [0..a]$, então, novamente, pela HI temos

$$\left(\bigcup_{i=1}^{a} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{a} (A_i \cap B),$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{a+1} A_i\right) \cap B &= \bigcup_{i=1}^{a} (A_i \cap B) \cup (A_{i+1} \cap B)\\ &= \bigcup_{i=1}^{a+1} (A_i \cap B).\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{b} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{b} (A_i \cap B), \text{ para todo } b \in \{0, 1, 2\}.$$

$b = 0$: basta verificar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{0} A_i\right) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{0} (A_i \cap B) = \emptyset.$$

$b = 1$**:** basta verificar que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right) \cap B = A_1 \cap B.$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{1} (A_i \cap B) = A_1 \cap B.$$

$b = 2$**:** como

$$\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B,$$

e

$$\bigcup_{i=1}^{2} (A_i \cap B) = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B),$$

temos que provar que

$$(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B),$$

o que é feito em Ex. 12

60*. [default,ex:produtorio:constante]

Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

Resposta:

Seja X um conjunto finito e seja $c \in \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

por indução em $|X|$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}$$

para todo X tal que $|X| \in [0..a]$.

Passo: Seja X um conjunto tal que

$$|X| = a + 1$$

e seja $y \in X$.

Como

$$\prod_{x \in X} c = \left(\prod_{x \in X - \{y\}} c \right) c.$$

e $|X - \{y\}| = |X| - 1 \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\begin{aligned} \prod_{x \in X - \{y\}} c &= c^{|X - \{y\}|} = c^{|X|-1} \\ &= c^{(a+1)-1} = c^a, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \prod_{x \in X} c &= \left(\prod_{x \in X - \{y\}} c \right) c \\ &= c^{|X - \{y\}|}.c = c^{|X|-1}.c \\ &= c^{(a+1)-1}.c \\ &= c^a.c = c^{a+1} \\ &= c^{|X|}. \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\prod_{x \in X_0} c = c^{|X_0|}.$$

Basta verificar que

$$\prod_{x \in X_0} c = \prod_{x \in \emptyset} c = 1,$$

e que

$$c^{|X_0|} = c^{|\emptyset|} = c^0 = 1.$$

conferir (dm)

61*. [default,ex:teo:somatorio:constante]

Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então
$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Vamos provar que se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então,
$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Sejam $c \in \mathbb{C}$ e X o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de n elementos.

Inicialmente, temos que
$$\sum_{x \in X_0} c = \sum_{x \in \emptyset} c = 0$$
e
$$c|X_0| = c|\emptyset| = 0.$$
Logo, $\sum_{x \in X_0} c = c|X_0|$.

Suponha que exista um n natural de modo que, para todo $0 \leq k \leq n$,
$$\sum_{x \in X_k} c = c|X_k|.$$

Então, temos que
$$\sum_{x \in X_n} c = c|X_n|$$
é equivalente a
$$c + \sum_{x \in X_n} c = c + c|X_n|$$
que é equivalente a
$$\begin{aligned}\sum_{x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}} c &= c(|X_n| + 1)\\ &= c(|X_n \cup \{x_{n+1}\}|)\end{aligned}$$

que é equivalente a
$$\sum_{x\in X_{n+1}} c = c|X_{n+1}|$$
Assim, se $\sum_{x\in X_n} c = c|X_n|$, então
$$\sum_{x\in X_{n+1}} c = c|X_{n+1}|.$$
Como $\sum_{x\in X_0} c = c|X_0|$, então
$$\begin{gathered}\sum_{x\in X_0} c = c|X_0|\\ \sum_{x\in X_1} c = c|X_1|\\ \sum_{x\in X_2} c = c|X_2|\\ \sum_{x\in X_3} c = c|X_3|\\ \vdots\end{gathered}$$
isto é,
$$\sum_{x\in X_n} c = c|X_n|, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

62⋆. [default,ex:teo:somatorio:associativo]

Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f,g\colon A\to\mathbb{C}$ e $X\subseteq A$ é um conjunto finito, então
$$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x).$$

Resposta:

Sejam $f,g\colon A\to\mathbb{C}$. Vamos provar que
$$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x), \text{ para todo } X\subseteq A,$$
por indução em $|X|$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| \in [0..a]$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

Seja $X \subseteq A \mid |X| = a + 1$.
Como $a + 1 > 0$, então $X \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ de forma que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)).$$

Como $|X - \{y\}| = |X| - 1 = (a + 1) - 1 = a \in [0..a]$, temos da HI que

$$\sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x),$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) &= \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x) + (f(y) + g(y)) \\
&= \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + f(y) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x) + g(y) \\
&= \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x),
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = 0.$$

Se $|X| = 0$, então $X = \emptyset$ e

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = 0,$$

e

$$\sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x) = 0 + 0 = 0.$$

63*. [default,ex:teo:somatorio:distributivo]

Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Resposta:

Sejam $c \in \mathbb{C}$ e $f\colon A \to \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x), \text{ para todo } X \subseteq A,$$

por indução em $|X|$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| \in [0..a]$$

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a + 1.$$

Seja $X \subseteq A \mid |X| = a + 1$.
Como $a + 1 > 0$, então $X \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ de forma que

$$\sum_{x \in X} cf(x) = \sum_{x \in X - \{y\}} cf(x) + cf(y).$$

Como $|X - \{y\}| = |X| - 1 = (a + 1) - 1 = a \in [0..a]$, temos da HI que

$$\sum_{x \in X - \{y\}} cf(x) = c \sum_{x \in X - \{y\}} f(x),$$

e daí,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X} cf(x) &= \sum_{x \in X - \{y\}} cf(x) + cf(y) \\ &= c \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + cf(y) = c \left(\left(\sum_{x \in X - \{y\}} f(x) \right) + f(y) \right) \\ &= c \sum_{x \in X} f(x).\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = 0.$$

Se $|X| = 0$, então $X = \emptyset$ e

$$\sum_{x \in X} cf(x) = 0,$$

e

$$c \sum_{x \in X} f(x) = c \times 0 = 0.$$

64*. [default,ex:cedulas]

Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

Resposta:

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

Vamos provar que, para todo $n \geq 4$, existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que existem $d_k, c_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$k = 2d_k + 5c_k, \text{ para todo } k \in [4..a].$$

Passo: Vamos provar que existem $d_{a+1}, c_{a+1} \in \mathbb{N}$ tais que

$$a + 1 = 2d_{a+1} + 5c_{a+1}.$$

Como $a \in [4..a]$, então, pela HI, existem $d_a, c_a \in \mathbb{N}$ tais que

$$a = 2d_a + 5c_a.$$

Se $c_a > 0$, então podemos fazer

$$\begin{aligned} d_{a+1} &:= d_a + 3, \text{ e} \\ c_{a+1} &:= c_a - 1, \end{aligned}$$

e daí

$$2d_{a+1} + 5c_{a+1} = 2(d_a + 3) + 5(c_a - 1) = 2d_a + 5c_a + 1 = a + 1.$$

Se, por outro lado, $c_a = 0$, então, como $a \geq 4$, temos $d_a \geq 2$ e podemos fazer

$$\begin{aligned} d_{a+1} &:= d_a - 2, \text{ e} \\ c_{a+1} &:= 1, \end{aligned}$$

e daí

$$2d_{a+1} + 5c_{a+1} = 2(d_a - 2) + 5(1) = 2d_a + 1 = a + 1.$$

Base: Basta fazer

$$\begin{aligned} d_4 &:= 2, \text{ e} \\ c_4 &:= 0, \end{aligned}$$

e temos

$$4 = 2d_4 + 5c_4 = 2(2) + 5(0) = 4.$$

65*. [default,ex:impar-divisivel-8]

Prove, por indução em n, que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Vamos provar que $n^2 - 1$ é divisível por 8, para todo n ímpar positivo, provando que $(2n + 1)^2 - 1$ é divisível por 8, para todo n natural.

Inicialmente, suponha que n seja par. Como consequência temos que $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e, assim,

$$\begin{aligned} (2n + 1)^2 - 1 &= (2(2k) + 1)^2 - 1 \\ &= (4k + 1)^2 - 1 \\ &= 16k^2 + 8k + 1 - 1 \\ &= 8(2k^2 + k), \end{aligned}$$

que é divisível por 8.

Agora, suponha que n seja ímpar. Então, $n = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, e, assim,

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - 1 &= (2(2k+1)+1)^2 - 1\\ &= (4k+3)^2 - 1\\ &= 16k^2 + 24k + 9 - 1\\ &= 8(2k^2 + 3k + 1),\end{aligned}$$

que também é divisível por 8.

Dessarte, 8 sempre divide $(2n+1)^2 - 1$, sempre que n seja natural.

Portanto, $n^2 - 1$ é divisível por 8, para todo n ímpar positivo.

66*. [default,ex:pior-caso-busca-binaria]

Considere o seguinte algoritmo, conhecido pelo nome de "busca binária".

```
Busca(x, v, a, b)
---------------------------------
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x = v[m]
      Devolva m
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Fazendo $n = b-a+1$, prove que o número de comparações na execução de Busca(x, v, a, b) é no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ para todo $n \geq 1$.

Resposta:

Seja $B(n)$ o número de comparações na execução de Busca(x, v, a, b) para $n = b - a + 1$

Vamos provar por indução em n que

$$B(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1 \text{ para todo } n \geq 1.$$

HI: Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(k) \leq \lfloor \lg k \rfloor + 1 \text{ para todo } k \in [1..p].$$

Passo: Vamos provar que

$$B(p+1) \leq \lfloor \lg(p+1) \rfloor + 1.$$

Do Algoritmo $\mathsf{Busca}(x, v, a, b)$ temos que, para $a > b$,

$$B(b-a+1) = 1+\max\left\{B\left(\left(\left\lfloor\frac{a+b}{2}\right\rfloor - 1\right) - b + 1\right), B\left(b - \left\lfloor\frac{a+b}{2}\right\rfloor + 1\right)\right\},$$

.

Fazendo $p+1 = b-a+1$, fica (Ex. 32),

$$\begin{aligned} B(p+1) &= 1 + \max\left\{B\left(\left\lfloor\frac{p+1-1}{2}\right\rfloor\right), B\left(\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor\right)\right\} \\ &= 1 + \max\left\{B\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right), B\left(\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor\right)\right\}. \end{aligned}$$

Para $\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor \in [1..p]$, temos da HI

$$B\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right) \leq \left\lfloor \lg\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right\rfloor + 1 \overset{\text{T 15}}{=} \left\lfloor \lg\frac{p}{2}\right\rfloor + 1 = \lfloor \lg p - 1 \rfloor + 1 \overset{\text{T 10}}{=} \lfloor \lg p \rfloor - 1 + 1 \, \lfloor \lg p \rfloor,$$

e, do mesmo modo,

$$B\left(\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor\right) \leq \lfloor \lg(p+1) \rfloor,$$

e, portanto,

$$\max\left\{B\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right), B\left(\left\lfloor\frac{p+1}{2}\right\rfloor\right)\right\} \leq \max\left\{\lfloor \lg p\rfloor, \lfloor \lg(p+1)\rfloor\right\} = \lfloor \lg(p+1) \rfloor,$$

e, consequentemente,

$$B(p+1) \leq \lfloor \lg(p+1) \rfloor + 1.$$

Base: Do Algoritmo $\mathsf{Busca}(x, v, a, b)$ temos que

$$B(1) = 0,$$

e daí

$$\lfloor \lg 1 \rfloor + 1 = 1 > 0 = B(1).$$

67*. [default,ex:correcao-busca-binaria]

Considere o seguinte algoritmo.

```
Busca(x, v, a, b)
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Prove que Busca(x, v, a, b) é o único inteiro em $[a - 1..b]$ satisfazendo

$$x < v[i] \text{ para todo } i \in [\text{Busca}(x, v, a, b) + 1..b]$$

Resposta:

68*. [default,ex:teo:fn-x+sn]

Sejam $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

fazer por indução, como na resposta do Exercício 57

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f^k(x) = m^k x + s\left(\frac{m^n - 1}{m - 1}\right).$$

Temos que

$$
\begin{aligned}
f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) \\
&= m^n(s+mx) + s\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + sm^n + s\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^n-1}{m-1} + m^n\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^n-1+(m-1)m^n}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^n-1+mm^n-m^n}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{-1+m^{n+1}}{m-1}\right) \\
&= m^{n+1}x + s\left(\frac{m^{n+1}-1}{m-1}\right).
\end{aligned}
$$

Além de que

$$f^0(x) = x = m^0x + s\left(\frac{m^0-1}{m-1}\right) = x + s(0) = x.$$

Portanto, para todo n natural,

$$f^n(x) = m^n x + s\left(\frac{m^n-1}{m-1}\right).$$

$69^{\#}$. [default,ex:fn+1]

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Seja n um natural e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0) + k.$$

É claro que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 1 \\ &= (f(0) + n) + 1 \\ &= f(0) + (n+1) \end{aligned}$$

e, logo, $f(n+1) = f(0) + (n+1)$.

Como consequência, temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(0) + (n+1) \text{ se } f(n) = f(0) + n \\ f(n+2) &= f(0) + (n+2) \text{ se } f(n+1) = f(0) + n + 1 \\ f(n+3) &= f(0) + (n+3) \text{ se } f(n+2) = f(0) + n + 2 \\ f(n+4) &= f(0) + (n+4) \text{ se } f(n+3) = f(0) + n + 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Além disso, temos que função f não recorrente é satisfeita para o menor elemento do domínio de f. Isto é, $f(u) = f(n-u) + u$, onde

$$\begin{aligned} u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\ &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n; \end{aligned}$$

ou seja, $f(0) = f(0) + 0$.

Portanto, $f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0$.

70#. [default,ex:fn+a]

Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

[7]Observe que este exercício generaliza o Exercício 69.

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a função dada por $f(n) = f(n-1)+a$, para todo $n > 0$.
Seja n um natural qualquer e suponha que

$$f(k) = f(0) + ka, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n \text{ natural.}$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n+1-1) + a \\ &= f(n) + a \\ &= (f(0) + na) + a \\ &= f(0) + (n+1)a, \end{aligned}$$

o que demonstra o passo da indução.
A base da indução também é trivial:

$$f(0) \quad = \quad \underbrace{f(0) + 0a}_{=f(0)},$$

o que completa a prova.

71$^{\#}$. [default,ex:fn+s]

Sejam $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

[8]Observe que este exercício generaliza o Exercício 70.

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a função $f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n > 0.$
Vamos provar que $f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$
Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0) + \sum_{i=1}^{k} s(i).$$

É claro que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + s(n+1) \\ &= \left(f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i) \right) + s(n+1) \\ &= f(0) + \sum_{i=1}^{n+1} s(i). \end{aligned}$$

Assim, para todo $n \geq 0$,

$$f(n+1) = f(0) + \sum_{i=1}^{n+1} s(i) \text{ desde que } f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i).$$

Além disso, $f(0) = f(0) + \sum_{i=1}^{0} s(i) = f(0) + 0$ e, então,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + \sum_{i=1}^{0} s(i) \\ f(1) &= f(0) + \sum_{i=1}^{1} s(i) \\ f(2) &= f(0) + \sum_{i=1}^{2} s(i) \\ f(3) &= f(0) + \sum_{i=1}^{3} s(i) \\ f(4) &= f(0) + \sum_{i=1}^{4} s(i) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

$72^{\#}$. [default,ex:afn]

Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ a função $f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n > 0.$

Seja n um natural e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = a^k f(0).$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= af(n) \\ &= a(a^n f(0)) \\ &= a^{n+1} f(0). \end{aligned}$$

Além disso, $f(n-u) = a^{n-u} f(0)$, onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n; \end{aligned}$$

isto é, $f(0) = a^0 f(0)$.

Então,

$$f(n) = a^n f(0) \implies f(n+1) = a^{n+1} f(0), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

bem como $f(0) = a^0 f(0)$.

Portanto, para todo n natural, $f(n) = a^n f(0)$.

73#. [default,ex:gfn]

Sejam $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[9], por indução em n, que

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dada por $f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n > 0.$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0)\prod_{i=1}^{k} m(i)$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= m(n)f(n) \\ &= m(n)\left(f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i)\right) \\ &= f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i). \end{aligned}$$

Então, $f(n+1) = f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i)$ desde que

$$f(k) = f(0)\prod_{1 \leq i \leq k} m(i), \text{ para todo } 0 \leq k \leq n.$$

Além disso, $f(n-u) = f(0)\prod_{i=1}^{n-u} m(i)$, onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n; \end{aligned}$$

[9]Observe que este exercício generaliza o Exercício 72.

isto é, $f(0) = f(0)\prod_{i=1}^{0} m(i) = f(0)(1)$.
Portanto, $f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

74#. [default,ex:gfn+h]
Sejam $f, s, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[10]

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Seja

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\longmapsto m(n)f(n-1) + s(n). \end{aligned}$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$f(k) = f(0)\prod_{i=1}^{k} m(i) + \sum_{j=1}^{k}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{k} m(i)\right)$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(n+1) &= m(n+1)f(n) + s(n+1) \\ &= m(n+1)\left(f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right)\right) + s(n+1) \\ &= f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i) + m(n+1)\sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right) + s(n+1) \\ &= f(0)\prod_{i=1}^{n+1} m(i) + \sum_{j=1}^{n+1}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n+1} m(i)\right). \end{aligned}$$

[10] Observe que este exercício generaliza o Exercício 73.

Além disso,

$$f(n-u) = f(0)\prod_{i=1}^{n-u} m(i) + \sum_{j=1}^{n-u}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n-u} m(i)\right),$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n; \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0)\prod_{i=1}^{0} m(i) + \sum_{j=1}^{0}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{0} m(i)\right) \\ &= f(0)(1) + \sum_{j=1}^{0}(s(j)(1)) \\ &= f(0) + 0 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

A.5.1 Descrições Recursivas

75@. [default,ex:teo:comprimento:binario]
Sejam $l, f \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n) :$ tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

e

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n

H.I.: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$l(k) = f(k)$ para todo $k \in [1..a]$.

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = f(a+1)$$

Se $a + 1 > 1$, da definição de f temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e que

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a,$$

e daí, temos pela HI que

$$l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1$$

Seja então

$$m = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

e seja

$$d_0 d_1 \ldots d_{m-1},$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é,

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = d_{m-1}2^0 + d_{m-2}2^1 + \ldots d_0 2^{m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i}.$$

Se $a + 1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{(m-1)-i},$$

ou seja,

$$a+1 = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} = \sum_{i=0}^{m-1} d_i 2^{m-i} + 02^0 = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i},$$

para $d_m = 0$.
Noutras palavras,

$$d_0 d_1 \ldots d_m,$$

a representação binária de $a+1$, isto é,

$$l(a+1) = m+1 = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Por argumento análogo concluímos que, também quando $a+1$ é ímpar, $l(a+1) = f(a+1)$.

Base: Vamos provar que

$$l(1) = f(1).$$

Por um lado, $l(1) = 1$ pois a representação binária de 1 tem 1 dígito.
Por outro lado, $f(1) = 1$.
Logo, é verdade $l(1) = f(1)$.

76@. [default,ex:teo:l=log]
Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

Vamos provar que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$l(k) = \lfloor \lg k \rfloor + 1, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$l(a+1) = \lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1.$$

Se $a + 1 > 1$, então

$$l(a+1) = l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então pela H.I. temos

$$\begin{aligned}
l\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) &= \left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1 \\
&\overset{\mathrm{T}\,15}{=} \left\lfloor \lg \frac{a+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor \lg(a+1) - 1 \rfloor + 1 \\
&\overset{\mathrm{T}\,10}{=} \lfloor \lg(a+1) \rfloor - 1 + 1 \\
&= \lfloor \lg(a+1) \rfloor .
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$l(1) = \lfloor \lg(1) \rfloor + 1.$$

Basta verificar que

$$l(1) = 1,$$

e que,

$$\lfloor \lg(1) \rfloor + 1 = 0 + 1 = 1.$$

77[@]. [default,ex:teo:numero:1s]

Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

Resposta:

(a) Vamos provar que

$$b(n) = f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$b(k) = f(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$b(a+1) = f(a+1)$$

Para $a + 1 > 0$, temos da definição de f que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2),$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela H.I. temos

$$b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right).$$

ou seja,

$$f(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2).$$

Se $a + 1$ é par, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Se $a+1$ é ímpar, sabemos que

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1,$$

ou seja

$$b(a+1) = b\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + ((a+1) \bmod 2)$$

e, portanto,

$$f(a+1) = b(a+1).$$

Base: Vamos provar que

$$b(0) = f(0).$$

Basta verificar que, pela definição de b,

$$b(0) = 0,$$

e que, pela definição de f,

$$f(0) = 0$$

(b) Dos Exercícios 75 e 76 concluímos que o comprimento da representação binária de n é $\lfloor \lg n \rfloor + 1$, para todo $n > 0$.
Do item anterior concluímos que $f(n)$ é o número de 1s na representação binária de n, para todo $n > 0$.
Segue imediatamente que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

78*. [default,ex:bit-mais-significativo]
Seja $M(n) \colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

(a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

(b) Prove que a expressão proposta está correta.

Resposta:

(a)

$$M(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ M\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(b) Seja $f\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Vamos provar por indução em n que

$$f(n) = M(n), \text{ para todo } n > 0.$$

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(k) = M(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = M(a+1).$$

Para $a + 1 > 1$ temos que

$$f(a+1) = f\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1.$$

Se $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, então, pela HI temos

$$f(a+1) = M\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1.$$

Fazendo

$$m := M\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right),$$

seja

$$d_m \dots d_0 \colon d_i \in \{0, 1\}, 0 \leq i < m$$

a representação binária de $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$, isto é

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i}.$$

Se $a+1$ é par, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a+1}{2} = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i}$$

e

$$a+1 = \sum_{i=1}^{m+1} d_i 2^{m-i+1} + 0 \times 2^0,$$

ou seja, a representação binária de $a+1$ é

$$d_{m+1} d_m \ldots d_1 0,$$

e, portanto,

$$M(a+1) = m+1 = M\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Se $a+1$ é ímpar, então

$$\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \frac{a}{2} = \sum_{i=0}^{m} d_i 2^{m-i}$$

e

$$a+1 = \sum_{i=1}^{m+1} d_i 2^{m-i+1} + 1 \times 2^0,$$

ou seja, a representação binária de $a+1$ é

$$d_{m+1} d_m \ldots d_1 1,$$

e, portanto,

$$M(a+1) = m+1 = M\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 1 = f(a+1).$$

Base: Vamos provar que

$$f(b) = M(b) \text{ para todo } b \in \{1\}.$$

Por definição, temos $f(b) = 0$.
Por outro lado, $M(b) = 0$ pois a representação binária de 1 é 1.

79*. [default,ex:exp]

Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

$\mathsf{Exp}(x,n)$

```
Se n = 0
    Devolva 1
e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)
e ← e × e
Se n é par
    Devolva e
Devolva x × e
```

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 77.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

Resposta:

(a)
$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
Exp(2,0) & = & 1, & Mult(2,0) & = & 0 \\
Exp(2,1) & = & 2, & Mult(2,1) & = & 2 \\
Exp(2,2) & = & 4, & Mult(2,2) & = & 3 \\
Exp(2,5) & = & 32, & Mult(2,5) & = & 5 \\
Exp(2,11) & = & 2048, & Mult(2,11) & = & 7 \\
Exp(2,15) & = & 32768, & Mult(2,15) & = & 8 \\
Exp(2,16) & = & 65536, & Mult(2,16) & = & 6 \\
Exp(2,20) & = & 1048576, & Mult(2,20) & = & 7.
\end{array}$$

(b) Inicialmente, vamos descrever $\mathsf{Exp}(x, n)$, isto é,

$$\mathsf{Exp}(x, n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ x^{(n \bmod 2)} \mathsf{Exp}(x, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)^2, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $x \neq 0$. Vamos provar por indução em n que

$$\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathsf{Exp}(x, k) = x^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\mathsf{Exp}(x, a+1) = x^{a+1}.$$

Temos que

$$\mathsf{Exp}(x, a+1) = x^{(n \bmod 2)}\mathsf{Exp}\left(x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right)^2$$

e como $0 < \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq n$, pela HI temos

$$\mathsf{Exp}(x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) = x^{\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mathsf{Exp}(x, a+1) &= x^{((a+1) \bmod 2)}\mathsf{Exp}\left(x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right)^2 \\
&= x^{((a+1) \bmod 2)}\left(x^{\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor}\right)^2 \\
&= x^{((a+1) \bmod 2)}x^{2\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor}
\end{aligned}$$

Então, temos dois casos:

i. Se $a+1$ é par

$$\begin{aligned}
\mathsf{Exp}(x, a+1) &= x^{((a+1) \bmod 2)}x^{2\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor} \\
&= x^0 x^{2\frac{a+1}{2}} \\
&= x^{a+1}.
\end{aligned}$$

ii. Se $a+1$ é ímpar

$$\begin{aligned}
\mathsf{Exp}(x, a+1) &= x^{((a+1) \bmod 2)}x^{2\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor} \\
&= x^1 x^{2\frac{a}{2}} = x^1 x^a \\
&= x^{a+1}.
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\mathsf{Exp}(x, 0) = x^0.$$

Basta observar pela definição que

$$\mathsf{Exp}(x, 0) = 1,$$

e que

$$x^0 = 1.$$

Portanto, $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ para todo } x \neq 0.$

(c) Inicialmente, vamos descrever o número de multiplicações efetuadas por $\mathsf{Exp}(x, n)$ como

$$m(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ m(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$, e o número de 1's em n, i.e., $b \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, como a função definida no Exercício 77, i.e.,

$$b(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ b\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Vamos provar por indução em n que

$$m(n) = \lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1,$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

HI: Sejam $x > 0$ e $a > 0$ tal que

$$m(k) = \lfloor \lg(k) \rfloor + b(k) + 1, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$m(a + 1) = \lfloor \lg(a + 1) \rfloor + b(a + 1) + 1.$$

Temos que

$$m(a + 1) = m(\left\lfloor \frac{a + 1}{2} \right\rfloor) + ((a + 1) \bmod 2) + 1,$$

e

$$b(a + 1) = b(\left\lfloor \frac{a + 1}{2} \right\rfloor) + ((a + 1) \bmod 2),$$

e como $0 < \lfloor \frac{a+1}{2} \rfloor \leq n$, pela HI temos

$$
\begin{aligned}
m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) &= \left\lfloor \lg(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor) \right\rfloor + b(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor)) + 1 \\
&= \left\lfloor \lg \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor + b(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor)) + 1 \\
&= \lfloor \lg (a+1) - lg2 \rfloor + b(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor)) + 1 \\
&= \lfloor \lg (a+1) \rfloor - 1 + b(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor)) + 1 \\
&= \lfloor \lg (a+1) \rfloor + b(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor))
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
m(a+1) &= m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&= \lfloor \lg (a+1) \rfloor + b(\left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&= \lfloor \lg (a+1) \rfloor + b(a+1) + 1
\end{aligned}
$$

Base: Vamos provar que

$$m(1) = \lfloor \lg 1 \rfloor + b(1) + 1.$$

Basta observar pela definição que

$$m(1) = m(\lfloor 1/2 \rfloor) + (1 \bmod 2) + 1 = m(0) + 1 + 1 = 2,$$

e que

$$\lfloor \lg 1 \rfloor + b(1) + 1 = 0 + 1 + 1 = 2.$$

Portanto,

$$m(n) = \lfloor \lg n \rfloor + b(n) + 1, \text{ para todo } n > 0, \text{ para todo } x > 0.$$

conferir (dm)

(d) Inicialmente, vamos descrever o número de multiplicações efetuadas por $\mathsf{Exp}(x, n)$ como

$$m(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ m(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.
Vamos provar por indução em n que

$$m(n) \leq 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1),$$

para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

HI: Sejam $x > 0$ e $a > 0$ tal que

$$m(k) \leq 2(\lfloor \lg k \rfloor + 1), \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$m(a+1) \leq 2(\lfloor \lg (a+1) \rfloor + 1)$$

Temos que

$$m(a+1) = m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1$$

e como $0 < \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq n$, pela HI temos

$$\begin{aligned}
m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) &\leq 2\left(\left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1\right) \\
&= 2\left(\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) \right\rfloor + 1\right) \\
&= 2\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) + 1 \right\rfloor \\
&= 2\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) + \lg 2 \right\rfloor \\
&= 2\left\lfloor \lg \left(2\left(\frac{a+1}{2}\right)\right) \right\rfloor \\
&= 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
m(a+1) &= m(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\
&\leq 2\left\lfloor \lg (a+1) \right\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1.
\end{aligned}$$

Então, temos dois casos:

i. Se $a+1$ é par

$$\begin{aligned} m(a+1) &\leq 2\lfloor\lg(a+1)\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\ &= 2\lfloor\lg(a+1)\rfloor + 0 + 1 \\ &= 2\lfloor\lg(a+1)\rfloor + 1 \\ &\leq 2(\lfloor\lg(a+1)\rfloor + 1). \end{aligned}$$

ii. Se $a+1$ é ímpar

$$\begin{aligned} m(a+1) &\leq 2\lfloor\lg(a+1)\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\ &= 2\lfloor\lg(a+1)\rfloor + 1 + 1 \\ &= 2\lfloor\lg(a+1)\rfloor + 2 \\ &= 2(\lfloor\lg(a+1)\rfloor + 1). \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$m(1) \leq 2(\lfloor\lg 1\rfloor + 1).$$

Basta observar pela definição que

$$m(1) = m(\lfloor 1/2\rfloor) + (1 \bmod 2) + 1 = m(0) + 1 + 1 = 2,$$

e que

$$2(\lfloor\lg 1\rfloor + 1) = 2(0+1) = 2.$$

Portanto, $m(n) \leq 2(\lfloor\lg n\rfloor + 1)$, para todo $n > 0$, para todo $x > 0$.

80[@]. [default,ex:minimo]

Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
---------------------------------
Se a = b
    Devolva a
m ← ⌊(a+b)/2⌋
m₁ ← Mínimo(v, a, m)
m₂ ← Mínimo(v, m + 1, b)
Se v[m₁] ≤ v[m₂]
    Devolva m₁
Devolva m₂
```

Prove por indução em n que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de Mínimo$(v, a, a+n-1)$ faz $n-1$ comparações entre elementos de v, para todo $n \geq 1$.

Resposta:

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$C(n) :=$ número de comparações na execução de $\mathsf{Minimo}(v, a, a+n-1)$.

Vamos provar que

$$C(n) = n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$C(k) = k - 1, \text{ para todo } k \in [1..p].$$

Passo: Vamos provar que

$$C(p+1) = (p+1) - 1 = p.$$

Do Algoritmo $\mathsf{Minimo}()$ temos que, se $p + 1 > 0$, então

$C(p+1) = C(m-a+1) + C((a+((p+1)-1))-(m+1)+1)+1 = C(m-a+1)+C(a+p-m)$

onde

$$m = \left\lfloor \frac{a + (a + (p+1) - 1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a+p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a + \frac{p}{2} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$$

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

e

$$a + p - m = a + p - \left(a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) = a + p - a - \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$$

e daí

$$C(n) = C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) + C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) + 1.$$

Se $1 \leq \left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \leq p$ e $1 \leq \left\lceil \frac{p-1}{2} \right\rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned} C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\ C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1, \end{aligned}$$

e daí

$$C(n) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1 + 1 = p.$$

Base: Vamos provar que $C(p) = p - 1$ para todo $p \in \{1\}$.

Do Algoritmo $\mathsf{Minimo}()$ temos que, se $p = 1$, então

$$C(1) = 0 = p - 1.$$

81*. [default,ex:fatorial]

Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

```
Fatorial(n)
---------------------------
Se n = 0
    Devolva 1
Devolva n × Fatorial(n − 1)
```

Resposta:

Vamos provar por indução em n que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathsf{Fatorial}(n) = \prod_{i=1}^{k} n.$$

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathsf{Fatorial}(k) = \prod_{i=1}^{k} i, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\mathsf{Fatorial}(a+1) = \prod_{i=1}^{a+1} i.$$

Pela recursão do algoritmo, temos que

$$\mathsf{Fatorial}(a+1) = (a+1)\mathsf{Fatorial}(a)$$

Como $a \in [0..a]$, pela H.I. temos que

$$\mathsf{Fatorial}(a) = \prod_{i=1}^{a} i.$$

E daí,

$$\begin{aligned}\mathsf{Fatorial}(a+1) &= (a+1)\mathsf{Fatorial}(a)\\ &= (a+1)\prod_{i=1}^{a} i\\ &= \prod_{i=1}^{a+1} i\end{aligned}$$

Base: Por um lado $\mathsf{Fatorial}(0) = 1$, por outro $\prod_{i=1}^{0} i = 1$ e, logo,

$$\mathsf{Fatorial}(0) = \prod_{i=1}^{0} i.$$

Portanto

$$\text{Fatorial}(n) = \prod_{i=1}^{n} i, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

82*. [default,ex:rec:3:2]

Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

```
A(n)
  Se n ≤ 1
     Devolva n
  Devolva 5 × A(n − 1) − 6 × A(n − 2)
```

Resposta:

reformatar como na resposta do Exercício 57

Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$\mathsf{A}(k) = 3^k - 2^k.$$

Temos que, se $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}(n+1) &= 5\mathsf{A}(n) - 6\mathsf{A}(n-1)\\
&= 5(3^n - 2^n) - 6(3^{n-1} - 2^{n-1})\\
&= 5(3^n - 2^n) - 6(\frac{3^n}{3} - \frac{2^n}{2})\\
&= 5(3^n - 2^n) - 2(3^n) + 3(2^n)\\
&= 5(3^n) - 2(3^n) - 5(2^n) + 3(2^n)\\
&= 3(3^n) - 2(2^n)\\
&= 3^{n+1} - 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathsf{A}(1) = 1 = 3^1 - 2^1 \text{ e } \mathsf{A}(0) = 0 = 3^0 - 2^0.$$

Portanto, para todo n natural,

$$\mathsf{A}(n) = 3^n - 2^n.$$

83*. [default,ex:multiplica]

Considere o seguinte algoritmo

Multiplica(x,n)

Se $n = 0$
    Devolva 0
Se n *é par*
    Devolva *Multiplica*$(x + x, \frac{n}{2})$
Devolva *Multiplica*$(x + x, \frac{n-1}{2}) + x$

(a) Prove, por indução em n, que Multiplica(x, n) devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por Multiplica(x, n)[11].

Resposta:

[11] **Sugestão:** compare este exercício com o Exercício 79.

(a) Vamos provar por indução em n que

$$\mathsf{Multiplica}(x, n) = xn, \text{ para todo } x \in \mathbb{C} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

Pelo algoritmo descrito, seja $x \in \mathbb{C}$ e considere que

$$\mathsf{Multiplica}(x, n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \mathsf{Multiplica}(2x, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + x(n \bmod 2), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathsf{Multiplica}(x, k) = xk,$$

para todo $k \in [0..a]$.

Passo: Vamos provar que

$$\mathsf{Multiplica}(x, (a+1)) = x(a+1).$$

Temos que

$$\mathsf{Multiplica}(x, (a+1)) = \mathsf{Multiplica}(2x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + x((a+1)n \bmod 2),$$

e como $\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \in [0..a]$, pela HI temos

$$\mathsf{Multiplica}(2x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) = 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathsf{Multiplica}(x, (a+1)) &= \mathsf{Multiplica}(2x, \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + x((a+1) \bmod 2) \\ &= 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor + x((a+1)n \bmod 2) \end{aligned}$$

Se a é par, temos que

$$\begin{aligned} \mathsf{Multiplica}(x, (a+1)) &= 2x \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor + x((a+1) \bmod 2) \\ &= 2x\frac{a}{2} + x(1) = xa + x \\ &= x(a+1); \end{aligned}$$

já se n é ímpar, então

$$\begin{aligned}\mathsf{Multiplica}(x,(a+1)) &= 2x\left\lfloor\frac{a+1}{2}\right\rfloor + x((a+1) \bmod 2)\\ &= 2x\frac{a+1}{2} + x(0) = x(a+1) + 0\\ &= x(a+1),\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\mathsf{Multiplica}(x,0) = x(0).$$

Basta observar pelo algoritmo que

$$\mathsf{Multiplica}(x,0) = 0,$$

e que

$$x(0) = x.0 = 0.$$

Portanto,

$$\mathsf{Multiplica}(x,n) = xn,$$

para todo $x \in \mathbb{C}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Inicialmente, vamos descrever o número de somas efetuadas por $\mathsf{Multiplica}(x,n)$ como

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0,\\ s(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor) + (n \bmod 2) + 1, & \text{se } n > 0.\end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n > 0$.

Um limite superior, s^+, para o número de somas efetuadas por $\mathsf{Multiplica}(x,n)$, pode ser descrito como

$$s^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0,\\ s^+(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor) + 2, & \text{se } n > 0.\end{cases}$$

Tal situação ocorre se considerarmos que sempre duas somas serão efetuadas para cada chamada de $\mathsf{Multiplica}(x,n)$, com $n > 0$.

A solução para esta recorrência é

$$s^+(n) = 2\left\lfloor \lg n\right\rfloor + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, o número de somas efetuadas por $\mathsf{Multiplica}(x, n)$ para computar xn, dada por

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ s(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n > 0$.
Um limite superior para s é $2\lfloor \lg n \rfloor + 1$, ou seja, $\mathsf{Multiplica}(x, n)$ efetua no máximo $2\lfloor \lg n \rfloor + 1$ somas para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n > 0$.
Vamos provar por indução em n que

$$s(n) \leq 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1),$$

para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n > 0$.

HI: Sejam $x \in \mathbb{C}$ e $a > 0$ tal que

$$s(k) \leq 2(\lfloor \lg k \rfloor + 1), \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$s(a+1) \leq 2(\lfloor \lg (a+1) \rfloor + 1)$$

Temos que

$$s(a+1) = s(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1$$

e como $0 < \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq n$, pela HI temos

$$\begin{aligned} s(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) &\leq 2\left(\left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1\right) \\ &= 2\left(\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) \right\rfloor + 1\right) \\ &= 2\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) + 1 \right\rfloor \\ &= 2\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) + \lg 2 \right\rfloor \\ &= 2\left\lfloor \lg \left(2\left(\frac{a+1}{2}\right)\right) \right\rfloor \\ &= 2\lfloor \lg (a+1) \rfloor. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(a+1) &= s(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor) + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\ &\le 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1. \end{aligned}$$

Então, temos dois casos:

i. Se $a+1$ é par

$$\begin{aligned} s(a+1) &\le 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\ &= 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + 0 + 1 \\ &= 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + 1 \\ &\le 2(\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + 1). \end{aligned}$$

ii. Se $a+1$ é ímpar

$$\begin{aligned} s(a+1) &\le 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + ((a+1) \bmod 2) + 1 \\ &= 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + 1 + 1 \\ &= 2\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + 2 \\ &= 2(\left\lfloor \lg{(a+1)} \right\rfloor + 1). \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$s(1) \le 2(\lfloor \lg 1 \rfloor + 1).$$

Basta observar pela definição que

$$s(1) = s(\lfloor 1/2 \rfloor) + (1 \bmod 2) + 1 = s(0) + 1 + 1 = 2,$$

e que

$$2(\lfloor \lg 1 \rfloor + 1) = 2(0+1) = 2.$$

Portanto, $s(n) \le 2(\lfloor \lg n \rfloor + 1), \text{ para todo } n > 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{C}.$
Observe que a prova apresentada acima é bem similar aquela apresenta em Exercício 79d.

conferir (dm)

84[@]. [default,ex:operacoes-fibonacci-recursivo]

O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
---------------------------
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

Resposta:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

Passo: Vamos provar que $S(a+1) \geq F(a+1)$.

Do algoritmo temos que, se $a+1 \geq 2$, então

$$S(a+1) = S(a) + S(a-1) + 1,$$

Se $a-1 \geq 2$, ou seja, $a+1 \geq 4$ temos da HI

$$\begin{aligned} S(a) &\geq F(a), \text{ e} \\ S(a-1) &\geq F(a-1), \end{aligned}$$

e, portanto

$$S(a+1) \geq F(a) + F(a-1) + 1 \geq F(a+1) + 1 > F(a+1).$$

Base: Vamos provar que

$$S(b) \geq F(b), \text{ para todo } b \in \{2, 3\}.$$

Basta verificar que

$$\begin{aligned} S(2) &= 1 = F(2), \\ S(3) &= 2 = F(3). \end{aligned}$$

85*. [default,ex:fibonacci-eficiente]

(a) Combine as informações dos Exercícios 53, 77 e 79 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

(b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 84.

Resposta:

(a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

O Exercício 79 propõe o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ que computa o valor de x^n.

Combinando estas informações obtemos o seguinte algoritmo.

```
F(n)
────────────────────────────
Se n ≤ 1
    Devolva n
M ← Exp(((1 1),(1 0)), n)
Devolva M[1,2]
```

(b) Segue imediatamente do Exercício 79 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M, onde b é a função do Exercício 77.

Cada multiplicação matricial efetuada, por sua vez, envolve 4 somas, de forma que

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1, \\ 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Do Exercício 77, temos que

$$b(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

e, consequentemente,

$$s(n) = 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1) \leq 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + \lfloor \lg n \rfloor + 1 + 1) = 8 \lfloor \lg(n) \rfloor + 8,$$

para todo $n > 0$.

(c) Do Exercício 84 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.

Na verdade, $s(8) \leq 32 < S(8) = 33$.

Mais importante,

$$\lim \frac{s(n)}{S(n)} = 0,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$s(n) \leq \varepsilon S(n).$$

86*. [default,ex:analise-insercao]

Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

```
Ordena(v, a, b)
---
Se a ≥ b
    Devolva v
Ordena(v, a, b − 1)
Insere(v, a, b)
Devolva v
```

onde Busca(x, v, a, b) é o algoritmo do Exercício 67, e

```
Insere(v, a, b)
---
p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
i ← b
Enquanto i ≥ p + 1
    Troca(v, i, i − 1)
    i ← i − 1
Devolva v
```

e Troca(v, a, b) troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado dos Exercícios 28 e 66 para estabelecer um limitante superior para o número de comparações na execução de Ordena$(v, a, a+n-1)$ em função do valor de n.

Resposta:

Fazendo

B(n): número máximo de comparações na execução de Busca$(x, v, a, a+n-1)$,

I(n): número máximo de comparações na execução de Insere$(v, a, a+n-1)$,

O(n): número máximo de comparações na execução de $\mathsf{Ordena}(v, a, a+n-1)$,

temos, para $n > 1$,

$$O(n) = O(n-1) + I(n),$$

e

$$I(n) = B(n).$$

Então

$$\begin{aligned}
O(n) &= O(n-1) + I(n) \\
&= O(n-1) + B(n) = O(n-2) + B(n-1) + B(n) \\
&= \ldots \\
&= O(n-(n-0)) + B(n-(n-1)) + B(n-(n-2)) + \ldots + B(n-1) + B(n) \\
&= O(0) + B(1) + B(2) + \ldots + B(n-1) + B(n) \\
&= O(0) + \sum_{i=1}^{n} B(i).
\end{aligned}$$

Do *Algoritmo* $\mathsf{Ordena}(v, a, b)$ temos que $O(0) = 0$ e do item anterior temos que

$$B(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

de forma que

$$\begin{aligned}
O(n) &\leq 0 + \sum_{i=1}^{n} (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \\
&\overset{\text{T 5}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg n \rfloor + \sum_{i=1}^{n} 1 \overset{\text{T 4}}{=} n + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg n \rfloor \overset{\text{ex. 28}}{=} n + n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right) \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor + n + \lfloor \lg n \rfloor + 2 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} \overset{\text{ex. 28}}{\leq} n \lfloor \lg n \rfloor + n + \lfloor \lg n \rfloor + 2 - n = n \lfloor \lg n \rfloor + \lfloor \lg n \rfloor + 2 \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor \left(1 + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lfloor \lg n \rfloor}\right) \approx n \lfloor \lg n \rfloor
\end{aligned}$$

Como

$$1 + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} \leq \frac{5}{2},$$

para todo $n \geq 2$, então

$$O(n) \leq \frac{5}{2} n \lfloor \lg n \rfloor, \text{ para todo } n \geq 2.$$

87$^{\#}$. [default,ex:bit-k]

Proponha uma expressão recursiva para a função $B\colon \mathbb{N} - \{0\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$B(n,k) := k\text{-ésimo bit na representação binária de } n.$$

Prove que a expressão proposta está correta.

Resposta:

$$B(n,k) = \begin{cases} n \bmod 2, & \text{se } k = 1, \\ B\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, k-1\right), & \text{se } 1 < k \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \\ 0, & \text{se } k > \lfloor \lg n \rfloor + 1. \end{cases}$$

falta a prova por indução

88$^{\#}$. [default,ex:algoritmo-coeficiente-binomial]

Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
  Se k = 0
      Devolva 1
  Devolva nB(n−1,k−1)/k
```

Resposta:

Vamos provar que se $0 \leq k \leq n$, então

$$B(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \in [0..m]$, então

$$B(m,k) = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \text{ para todo } m \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que se $k \in [0..a+1]$, então

$$B(a+1,k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

Seja $k \in [0..a+1]$.
Se $k = 0$, então

$$B(a+1,k) = 1.$$

e

$$\frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!} = \frac{(a+1)!}{(a+1)!} = 1,$$

de modo que

$$B(a+1,k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!},$$

Se $k > 0$, então

$$B(a+1,k) = \frac{a+1}{k} B((a+1)-1, k-1) = \frac{a+1}{k} B(a, k-1),$$

e como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$B(a,k-1) = \frac{a!}{(k-1)!(a-(k-1))!},$$

e daí,

$$B(a+1,k) = \frac{a+1}{k} \frac{a!}{(k-1)!(a-(k-1))!} = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

Base: Basta verificar que

$$B(0,0) = \frac{0!}{0!(0-0)!}$$

cfr. (Stolfi and Gomide, 2011, 10.3.4).

89. [default,ex:juros]

Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

Resposta:

Seja $C(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, o saldo da aplicação ao final de n meses, dada por

$$C(n) = \begin{cases} s, & \textsf{se } n = 0, \\ lC(n-1), & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

onde $l = 1 + j$ e j a taxa de juros mensal, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} C(n) &= lC(n-1) \\ &= l(lC(n-2)) = l^2C(n-2) \\ &= l^2(lC(n-3)) = l^3C(n-3) \\ &= ... \\ &= l^uC(n-u). \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} C(n) &= l^uC(n-u) \\ &= l^nC(n-n) = l^nC(0) \\ &= l^ns. \end{aligned}$$

ou ainda

$$C(n) = s(1+j)^n$$

conferir (dm)

90. [default,ex:sanduiche-fibonacci]

Sejam $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e}$$
$$f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1).$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^-(k) \leq f(k) \leq f^+(k), \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f^-(a+1) \leq f(a+1) \leq f^+(a+1).$$

Temos que

$$f^-(a+1) = f^-(a-1) + f^-(a-1) = 2f^-(a-1),$$

e pela HI,

$$f^-(a+1) = 2f^-(a-1) \leq 2f(a-1) \leq f(a-1) + f(a) = f(a+1).$$

Do mesmo modo,

$$f^+(a+1) = f^+(a) + f^+(a) = 2f^+(a),$$

e pela HI,

$$f^+(a) = 2f^+(a) \geq 2f(a) \geq f(a) + f(a-1) = f(a+1).$$

e portanto

$$f^-(a+1) \leq f(a+1) \leq f^+(a+1).$$

Base: Bastaria provar que

$$f^{-}(0) \leq f(0) \leq f^{+}(0), \text{ e}$$
$$f^{-}(1) \leq f(1) \leq f^{+}(1),$$

o que é dado por hipótese.

completar

91[@]. [default,ex:funcoes-iteradas]

Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

(a) $f(x) = x + 1$.
(b) $f(x) = x + 2$.
(c) $f(x) = x + 3$.
(d) $f(x) = x + s$.
(e) $f(x) = 2x$.
(f) $f(x) = 3x$.
(g) $f(x) = mx$.
(h) $f(x) = s + mx$.

Resposta:

(a) $f(x) = x + 1$: $f^n(x) = x + n$
(b) $f(x) = x + 2$: $f^n(x) = x + 2n$
(c) $f(x) = x + 3$: $f^n(x) = x + 3n$
(d) $f(x) = x + s$: $f^n(x) = x + ns$
(e) $f(x) = 2x$: $f^n(x) = 2^n x$
(f) $f(x) = 3x$: $f^n(x) = 3^n x$
(g) $f(x) = mx$: $f^n(x) = m^n x$
(h)
$$f^n(x) = m^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} m^i.$$

Se $m = 1$,

$$f^n(x) = 1^n x + s \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = x + sn.$$

e, se $m \neq 1$ (Ex. 57),

$$\sum_{i=0}^{n-1} m^i = \frac{m^n - 1}{m - 1},$$

e, portanto,

$$f^n(x) = m^n x + s\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

92*. [default,ex:mais-funcoes-iteradas]

Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

Resposta:

(a) $h^n(x) = x - 2n$,

(b) $h^n(x) = x - sn$,

(c) $h^n(x) = 3^n x$,

(d) $h^n(x) = m^n x$,

(e) $h^n(x) = x/2^n$,

(f) $h^n(x) = \lceil x/k^n \rceil$,

(g) $h^n(x) = \lfloor \sqrt[(k^n)]{x} \rfloor$.

93*. [default,ex:piso/k-iterado]

Prove que
$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$
onde $k \neq 0$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

Resposta:

Seja $k \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Vamos provar que
$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor,$$
para todo $n > 0$, por indução em n, e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

HI: Sejam $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que
$$f^l(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^l} \right\rfloor,$$
para todo $l \in [1..a]$.

Passo: Vamos provar que
$$f^{a+1}(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^{(a+1)}} \right\rfloor.$$

Como
$$f^{a+1}(x) = f(f^a(x)).$$
e $a \in [1..a]$, então pela HI temos
$$f^a(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^a} \right\rfloor,$$
e portanto
$$\begin{aligned} f^{a+1}(x) &= f(f^a(x)) \\ &\overset{\text{H.I.}}{=} f(\left\lfloor \frac{x}{k^a} \right\rfloor) \\ &= \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{k^a} \right\rfloor}{k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x}{k^a k} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x}{k^{(a+1)}} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$f^1(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^1} \right\rfloor .$$

Basta verificar que,

$$f^1(x) = f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor ,$$

e,

$$\left\lfloor \frac{x}{k^1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor .$$

conferir (dm)

94⋆. [default,ex:teto:raiz:k-iterado]

Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^n)]{x} \right\rfloor , \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor .$$

Resposta:

Seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos provar que

$$f^n(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^n)]{x} \right\rfloor$$

para todo $n > 0$, por indução em n, e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor .$$

HI: Sejam $a > 0$, $a \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^l(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^l)]{x} \right\rfloor ,$$

para todo $l \in [1..a]$.

Passo: Vamos provar que

$$f^{a+1}(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^{a+1})]{x} \right\rfloor .$$

Como

$$f^{a+1}(x) = f(f^a(x)).$$

e $a \in [1..a]$, então pela HI temos

$$f^a(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^a)]{x} \right\rfloor,$$

e portanto

$$\begin{aligned} f^{a+1}(x) &= f(f^a(x)) \\ &\overset{\text{H.I.}}{=} f(\left\lfloor \sqrt[(k^a)]{x} \right\rfloor) \\ &= \left\lfloor \sqrt[k]{\left\lfloor \sqrt[(k^a)]{x} \right\rfloor} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \sqrt[(k^a k)]{x} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \sqrt[(k^{a+1})]{x} \right\rfloor \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$f^1(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^1)]{x} \right\rfloor.$$

Basta verificar que,

$$f^1(x) = f(x) = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor,$$

e,

$$\left\lfloor \sqrt[(k^1)]{x} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor.$$

conferir (dm)

95#. [default,ex:rec:n-5]

Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n c_{10} + c_{20} + c_{21} n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

Resposta:

(a) Vamos provar por indução em n que

$$f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(k) = f(k \bmod 2) + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f((a+1) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor.$$

Temos que

$$f(a+1) = f(a-1) + 1,$$

e como $(a-1) \in [0..a]$, pela HI temos

$$\begin{aligned}
f(a-1) &= f((a-1) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a-1)}{2} \right\rfloor \\
&= f((a-1+2) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a-1)}{2} \right\rfloor + 1 - 1 \\
&= f((a+1) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a-1)}{2} + 1 \right\rfloor - 1 \\
&= f((a+1) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor - 1
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
f(a+1) &= f(a-1) + 1 \\
&= \left(f((a+1) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor - 1 \right) + 1 \\
&= f((a+1) \bmod 2) + \left\lfloor \frac{(a+1)}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$f(0) = f(0 \bmod 2) + \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor.$$

Basta observar que

$$f(0) = f(0),$$

e que

$$f(0 \bmod 2) + \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = f(0) + \lfloor 0 \rfloor = f(0).$$

Portanto,

$$f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

conferir (dm)

(b) Vamos provar por indução em n que

$$f(n) = (-1)^n c_{1,0} + c_{2,0} + c_{2,1} n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(k) = (-1)^k c_{10} + c_{20} + c_{21} k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = (-1)^{(a+1)} c_{10} + c_{20} + c_{21}(a+1).$$

Temos que

$$f(a+1) = f(a-1) + 1,$$

e como $(a-1) \in [0..a]$, pela HI temos

$$\begin{aligned} f(a-1) &= (-1)^{(a-1)} c_{10} + c_{20} + c_{21}(a-1) \\ &= (-1)^{(a-1+2)} c_{10} + c_{20} + c_{21}(a-1) + 2c_{21} - 2c_{21} \\ &= (-1)^{(a+1)} c_{10} + c_{20} + c_{21}(a-1+2) - 2c_{21} \\ &= (-1)^{(a+1)} c_{10} + c_{20} + c_{21}(a+1) - 2c_{21}, \end{aligned}$$

como $c_{21} = 1/2$, temos que

$$\begin{aligned} f(a-1) &= (-1)^{(a+1)}c_{10} + c_{20} + c_{21}(a+1) - 2c_{21} \\ &= (-1)^{(a+1)}c_{10} + c_{20} + c_{21}(a+1) - 1 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(a-1) + 1 \\ &= \big((-1)^{(a+1)}c_{10} + c_{20} + c_{21}(a+1) - 1\big) + 1 \\ &= (-1)^{(a+1)}c_{10} + c_{20} + c_{21}(a+1). \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$f(0) = (-1)^0 c_{10} + c_{20} + c_{21}(0).$$

Basta observar que

$$f(0) = f(0),$$

e que

$$\begin{aligned} (-1)^0 c_{10} + c_{20} + c_{21}(0) &= c_{10} + c_{20} \\ &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4} + \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{f(0)}{2} + \frac{f(0)}{2} - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(n) = (-1)^n c_{1,0} + c_{2,0} + c_{2,1}n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

conferir (dm)

(c) Vamos provar por indução em n que

$$f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil,$$

para $n \geq 5$.

HI: Seja $a \geq 5$ tal que

$$f(k) = f(4 + k \bmod 2) + \left\lceil \frac{k-5}{2} \right\rceil, \text{ para todo } k \in [5..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(4 + (a+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a+1)-5}{2} \right\rceil.$$

Temos que

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(a-1) + 1 \\ &= \left(f(4 + (a-1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a-1)-5}{2} \right\rceil \right) + 1. \end{aligned}$$

e como $(a-1) \in [0..a]$, pela HI temos

$$\begin{aligned} f(a-1) &= f(4 + (a-1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a-1)-5}{2} \right\rceil \\ &= f(4 + (a-1+2) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a-1)-5}{2} \right\rceil + 1 - 1 \\ &= f(4 + (a+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a-1)-5}{2} + 1 \right\rceil - 1 \\ &= f(4 + (a+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a-1)-5+2}{2} \right\rceil - 1 \\ &= f(4 + (a+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a+1)-5}{2} \right\rceil - 1 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(a-1) + 1 \\ &= \left(f(4 + (a+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a+1)-5}{2} \right\rceil - 1 \right) + 1 \\ &= f(4 + (a+1) \bmod 2) + \left\lceil \frac{(a+1)-5}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$f(5) = f(4 + 5 \bmod 2) + \left\lfloor \frac{5-5}{2} \right\rfloor,$$

Basta observar que

$$f(5) = f(5)$$

e que

$$f(5) = f(4+1) + \left\lfloor \frac{5-5}{2} \right\rfloor = f(5) + \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = f(5).$$

Portanto, para $n \geq 5$,

$$f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{n-5}{2} \right\rceil.$$

96$^{\#}$. [default,ex:teo:rec:1]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Vamos provar que

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \geq n_0$ tal que, para todo $l \in [n_0..a]$,

$$f(l) = f(h^u(l)) + u,$$

onde

$$u = \min\big\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(l) < n_0\big\},$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(h^u(a+1)) + u.$$

onde

$$u = \min\big\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\big\}.$$

Como $a + 1 \geq n_0$, então

$$f(a+1) = f(h(a+1)) + 1,$$

e além disso,

$$h(a+1) < a+1,$$

ou seja,

$$h(a+1) \leq a,$$

e daí, pela HI,

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'}(h(a+1))) + u',$$

onde

$$u' = \min\big\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(h(a+1)) < n_0\big\},$$

ou seja,

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'+1}(a+1)) + u'$$

onde

$$u' = \min\big\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\big\}.$$

Se $u' = 0$, então

$$\begin{aligned} f(h^{u'+1}(a+1)) + u' &= f(h^{0+1}(a+1)) + 0 \\ &= f(h(a+1)) + 0 = f(h(a+1)). \end{aligned}$$

Se $u' > 0$, por outro lado, então

$$\begin{aligned} u' &= \min\big\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\big\} \\ &= \min\big\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\big\} - 1 = u - 1, \end{aligned}$$

onde
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\},$$
e portanto,
$$u = u' + 1.$$
Então
$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) + u' \\ &= f(h^u(a+1)) + (u-1), \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(h(a+1)) + 1 \\ &= f(h^u(a+1)) + (u-1) + 1 \\ &= f(h^u(a+1)) + u, \end{aligned}$$
onde
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\}.$$

Base: Vamos provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que
$$h(b) < n_0,$$
temos
$$f(b) = f(h^u(b)) + u.$$
onde
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$
Basta provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$ temos
$$f(b) = f(h^u(b)) + u.$$
onde
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$
Seja então $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$. Neste caso,
$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\} = 0,$$
e
$$\begin{aligned} f(h^u(b)) + u &= f(h^0(b)) + 0 \\ &= f(b) + 0 = f(b). \end{aligned}$$

97$^{\#}$. [default,ex:teo:rec:2]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Vamos provar que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \geq n_0$ tal que,

$$f(l) = f(h^u(l)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(l)), \text{ para todo } l \in [n_0..a],$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(l) < n_0\right\}.$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(h^u(a+1)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(a+1)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\}.$$

Se $a+1 \geq n_0$, então

$$f(a+1) = f(h(a+1)) + s(a+1).$$

Se, além disso,

$$h(a+1) < a+1,$$

ou seja,

$$h(a+1) \leq a,$$

então, pela HI,

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'}(h(a+1))) + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^i(h(a+1))),$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(h(a+1)) < n_0\right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^{i+1}(a+1)) \\ &= f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^i(a+1)), \end{aligned}$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\}.$$

Se $u' = 0$, então

$$\begin{aligned} f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^i(a+1)) &= f(h^{0+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{0} s(h^i(a+1)) \\ &= f(h(a+1)) + 0 = f(h(a+1)). \end{aligned}$$

Se $u' > 0$, por outro lado, então

$$\begin{aligned} u' &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\} \\ &\overset{\text{k+1=j}}{=} \min\left\{j-1 \in \mathbb{N} \mid h^{j}(a+1) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{j \in \mathbb{N} \mid h^{j}(a+1) < n_0\right\} - 1 = u - 1, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\},$$

e portanto,

$$u = u' + 1.$$

Então

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^i(a+1)) \\ &= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^i(a+1)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(h(a+1)) + s(a+1) \\ &= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^i(a+1)) + s(h^0(a+1)) \\ &= f(h^{u}(a+1)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(a+1)), \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\}.$$

Base: Vamos provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} b < n_0 &\quad (\text{pois } a+1 \geq n_0), \qquad \textsf{ou} \\ h(b) < n_0 &\quad (\text{pois } h(a+1) \geq n_0), \end{aligned}$$

temos

$$f(b) = f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(b) < n_0\right\}.$$

Basta provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$ temos

$$f(b) = f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Seja então $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$. Neste caso,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} f(h^u(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)) &= f(h^0(b)) + \sum_{i=0}^{0-1} s(h^i(b)) \\ &= f(b) + \sum_{i=0}^{-1} s(h^i(b)) \\ &= f(b) + 0 = f(b). \end{aligned}$$

98$^{\#}$. [default,ex:teo:rec:3]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução em n) que, para todo $n \geq n_0$

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Vamos provar que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \geq n_0$ tal que, para todo $l \in [n_0..a]$,

$$f(l) = f(h^u(l)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(l)),$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(l) < n_0 \right\},$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(h^u(a+1)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(a+1)).$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0 \right\}.$$

Como $a + 1 \geq n_0$, então

$$f(a+1) = m(a+1) f(h(a+1)),$$

e além disso,

$$h(a+1) < a+1,$$

ou seja,

$$h(a+1) \leq a,$$

e daí, pela HI,

$$f(h(a+1)) = f(h^{u'}(h(a+1))) \prod_{i=0}^{u'-1} m(h^i(h(a+1))),$$

onde

$$u' = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(h(a+1)) < n_0 \right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=0}^{u'-1} m(h^{i+1}(a+1)) \\ &= f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{u'} m(h^{i}(a+1)), \end{aligned}$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\}.$$

Se $u' = 0$, então

$$\begin{aligned} f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{u'} m(h^{i}(a+1)) &= f(h^{0+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{0} m(h^{i}(a+1)) \\ &= f(h(a+1))1 = f(h(a+1)). \end{aligned}$$

Se $u' > 0$, por outro lado, então

$$\begin{aligned} u' &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\} - 1 = u - 1, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\},$$

e portanto,

$$u = u' + 1.$$

Então

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{u'} m(h^{i}(a+1)) \\ &= f(h^{u}(a+1)) \prod_{i=1}^{u-1} m(h^{i}(a+1)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f(h(a+1))m(a+1) \\ &= \left(f(h^{u}(a+1)) \prod_{i=1}^{u-1} m(h^{i}(a+1))\right) m(h^{0}(a+1)) \\ &= f(h^{u}(a+1)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^{i}(a+1)), \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\}.$$

Base: Vamos provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{array}{rl} b < n_0 & (\text{pois } a+1 \geq n_0), \quad \text{ou} \\ h(b) < n_0 & (\text{pois } h(a+1) \geq n_0), \end{array}$$

temos

$$f(b) = f(h^u(b)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Basta provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$ temos

$$f(b) = f(h^u(b)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(b)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Seja então $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$. Neste caso,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\} = 0,$$

e

$$\begin{aligned} f(h^u(b)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(b)) &= f(h^0(b)) \prod_{i=0}^{0-1} m(h^i(b)) \\ &= f(b) \prod_{i=0}^{-1} m(h^i(b)) \\ &= f(b).1 = f(b) \end{aligned}$$

conferir (dm)

99#. [default,ex:teo:rec]

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Resposta:

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, scolon\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} h(n) & < & n, \\ f(n) & = & m(n)f(h(n)) + s(n), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Vamos provar que

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \geq n_0$ tal que, para todo $l \in [n_0..a]$,

$$f(l) = f(h^u(l))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(l)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(l))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(l)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(l) < n_0\right\},$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = f(h^u(a+1))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(a+1))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(a+1)).$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(a+1) < n_0\right\}.$$

Como $a+1 \geq n_0$, então

$$f(a+1) = m(a+1)f(h(a+1)) + s(a+1),$$

e além disso,

$$h(a+1) < a+1,$$

ou seja,

$$h(a+1) \leq a,$$

e daí, pela HI,

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) = f(h^{u'}(h(a+1))) \prod_{i=0}^{u'-1} m(h^i(h(a+1))) \\ + \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^i(h(a+1))) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(h(a+1))), \end{aligned}$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(h(a+1)) < n_0\right\},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=0}^{u'-1} m(h^{i+1}(a+1)) \\ &+ \sum_{i=0}^{u'-1} s(h^{i+1}(a+1)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^{j+1}(a+1)) \\ &= f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{u'} m(h^i(a+1)) \\ &+ \sum_{i=1}^{u'} s(h^i(a+1)) \prod_{j=1}^{i-1} m(h^j(a+1)), \end{aligned}$$

onde

$$u' = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\}.$$

Se $u' = 0$, então

$$f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{u'} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^i(a+1)) \prod_{j=1}^{i-1} m(h^j(a+1))$$

$$= f(h^{0+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{0} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=1}^{0} s(h^i(a+1)) \prod_{j=1}^{i-1} m(h^j(a+1))$$

$$= f(h(a+1))1 + 0 = f(h(a+1)).$$

Se $u' > 0$, por outro lado, então

$$\begin{aligned} u' &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k+1}(a+1) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\} - 1 = u - 1, \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\},$$

e portanto,

$$u = u' + 1.$$

Então

$$\begin{aligned} f(h(a+1)) &= f(h^{u'+1}(a+1)) \prod_{i=1}^{u'} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=1}^{u'} s(h^i(a+1)) \prod_{j=1}^{i-1} m(h^j(a+1)) \\ &= f(h^{u}(a+1)) \prod_{i=1}^{u-1} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^i(a+1)) \prod_{j=1}^{i-1} m(h^j(a+1)), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(a+1) =& f(h(a+1))m(a+1) + s(a+1) \\ =& \left(f(h^{u}(a+1)) \prod_{i=1}^{u-1} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=1}^{u-1} s(h^i(a+1)) \prod_{j=1}^{i-1} m(h^j(a+1)) \right) \\ & m(h^0(a+1)) + s(h^0(a+1)) \\ =& f(h^{u}(a+1)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(a+1)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(a+1)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(a+1)) \end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(a+1) < n_0\right\}.$$

Base: Vamos provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} b &< n_0 \quad \text{(pois } a+1 \geq n_0\text{),} \qquad \textsf{ou} \\ h(b) &< n_0 \quad \text{(pois } h(a+1) \geq n_0\text{),} \end{aligned}$$

temos

$$f(b) = f(h^u(b)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(b)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Basta provar que, para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$ temos

$$f(b) = f(h^u(b)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(b)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\}.$$

Seja então $b \in \mathbb{N}$ tal que $h(b) < n_0$. Neste caso,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(b) < n_0\right\} = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
&f(h^u(b)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(b)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(b)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(b)) \\
&= f(h^0(b)) \prod_{i=0}^{0-1} m(h^i(b)) + \sum_{i=0}^{0-1} s(h^i(b)) \prod_{j=0}^{0-1} m(h^j(b)) \\
&= f(b) \prod_{i=0}^{-1} m(h^i(b)) + \sum_{i=0}^{-1} s(h^i(b)) \prod_{j=0}^{-1} m(h^j(b)) \\
&= f(b).1 + 0 = f(b)
\end{aligned}$$

conferir (dm)

A.6 Recorrências

A.6.1 Recorrências

100@. [default,ex:rec-2+1]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Resposta:

Fazendo

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

temos

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 2, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então (Ex. 92a)

$$h^k(n) = n - 2k,$$

e portanto,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f(n - 2u) + u,$$

onde

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < 2\}.$$

Como

$$n - 2k < 2,$$

se e somente se

$$n - 2k \leq 1,$$

se e somente se

$$2k \geq n - 1,$$

ou seja,

$$k \geq \frac{n-1}{2},$$

então (pela Def. 5)

$$\min \{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k \leq 1\} = \min \left\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq \frac{n-1}{2}\right\} = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil,$$

ou seja

$$u = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil.$$

Então

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-2u)+u \\ &= f\left(n-2\left(\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right)\right)+\left(\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right) \\ &= f\left(n-2\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right)+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil. \end{aligned}$$

Para n par, temos

$$\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil = \frac{n}{2},$$

e daí

$$f\left(n-2\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right)+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil = f\left(n-2\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{2} = f(0)+\frac{n}{2}.$$

Para n ímpar, temos

$$\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil = \frac{n-1}{2},$$

e daí

$$f\left(n-2\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil\right)+\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil = f\left(n-2\frac{n-1}{2}\right)+\frac{n-1}{2} = f(1)+\frac{n-1}{2}.$$

Então, para todo $n \geq 2$,

$$f(n) = \begin{cases} f(0)+\frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par}, \\ f(1)+\frac{n-1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar}, \end{cases}$$

ou seja,

$$f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

101@. [default,ex:rec-log]

Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Fazendo

$$f(n) = f(h(n)) + 1, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

temos

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ n_0 &= 2 \end{aligned}$$

e (C. 27)

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Inserir ilustracao de que: $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1 < 2$ e $\frac{n}{2^k} < 2$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 1,$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

ou seja,

$$2^{k+1} > n,$$

e portanto,

$$k + 1 > \lg n,$$

isto é

$$k > \lg n - 1,$$

então

$$\begin{aligned} u = \min&\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\right\}. \overset{\text{T.13}}{=} \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 \\ &= \lfloor \lg n \rfloor. \end{aligned}$$

Então,
$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + u = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor$$

Como (Ex. 37)
$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0,$$

então
$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \lfloor \lg n \rfloor = f(1) + \lfloor \lg n \rfloor = \lfloor \lg n \rfloor + 1,$$

ou seja,
$$f(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

102$^{@}$. [default,ex:rec-b]

Resolva a seguinte recorrência.
$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

A solução é (Ex. 97)
$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)),$$

onde
$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ s(n) &= n \bmod 2, \\ n_0 &= 1, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}. \end{aligned}$$

Então
$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

e
$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 1,$$

ou seja,

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \leq 0,$$

ou seja,

$$\frac{n}{2^k} < 1,$$

ou seja,

$$2^k > n,$$

e portanto,

$$k > \lg n.$$

Então

$$\begin{aligned}
u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \\
&= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n\right\} \\
&\overset{\text{T. }13}{=} \lfloor \lg n + 1 \rfloor \\
&\overset{\text{T. }10}{=} \lfloor \lg n \rfloor + 1,
\end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor.$$

Então

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor + 1 - 1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\
&= f(0) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2\right).
\end{aligned}$$

Então
$$f(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \bmod 2 \right), \text{ para todo } n \geq 1.$$

103*. [default,ex:recorrencias-1]

Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1,$ para todo $n > 1$,

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2,$ para todo $n > 1$,

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3,$ para todo $n > 1$,

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1,$ para todo $n > 1$,

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1,$ para todo $n > 1$,

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5,$ para todo $n > 1$,

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n,$ para todo $n > 1$,

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1$,

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2,$ para todo $n > 1$,

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7,$ para todo $n > 1$,

(k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2,$ para todo $n > 1$,

(l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5,$ para todo $n > 1$,

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1,$ para todo $n > 3$,

(n) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 3n + 2,$ para todo $n > 1$,

(o) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3,$ para todo $n > 1$,

(p) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1$,

(q) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n - 1,$ para todo $n > 1$,

(r) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1,$ para todo $n > 1$,

(s) $f(n) = 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1,$ para todo $n > 1$,

(t) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil\right) + k,$ para todo $n > 1$ e para todo $k \in \mathbb{N}$,

Resposta:

acrescentar a resolução às respostas

.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1,$ para todo $n > 1$,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 2 \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left(6 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i 6 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 6 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor} - 1\right) \\
&= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) - 1\right) + 6 \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 1. \qquad = 2^{\lfloor \lg n \rfloor} (f(1) - 1) + 6 \sum_{i=}^{\lfloor \lg n}
\end{aligned}
$$

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2,$ para todo $n > 1$,

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\
m(n) &= 2, \\
s(n) &= 3n + 2, \\
n_0 &= 2,
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

ou seja,

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

isto é,

$$2^{k+1} > n,$$

ou seja

$$k > \lg n - 1$$

e

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\} = \lfloor \lg n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \lg n \rfloor .$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right)\prod_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor\right)\prod_{j=0}^{i-1} 2$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right)2^{\lfloor \lg n\rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i\left(3\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor + 2\right)$$

$$= 2^{\lfloor \lg n\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i 3\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^{i+1} = 2^{\lfloor \lg n\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right)$$

$$+ 3\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor + 2\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i$$

$$= 2^{\lfloor \lg n\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor + 2\left(2^{\lfloor \lg n\rfloor} - 1\right)$$

$$= 2^{\lfloor \lg n\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor + 2^{\lfloor \lg n\rfloor+1} - 2$$

$$= 2^{\lfloor \lg n\rfloor}\left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right) + 2\right) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor - 2.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor = \dots$$

então,

$$f(n) = 2^{\lfloor \lg n\rfloor}\left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n\rfloor}}\right\rfloor\right) + 2\right) + 3\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n\rfloor-1} 2^i\left\lfloor \frac{n}{2^i}\right\rfloor - 2$$

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6}\right\rfloor\right) + 2n + 3,$ para todo $n > 1,$

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor, \\ m(n) &= 6, \\ s(n) &= 2n+3, \\ n_0 &= 2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor < 2,$$

ou seja,

$$\frac{n}{6^k} < 2,$$

isto é,

$$6^k > \frac{n}{2},$$

ou seja

$$k > \log_6 \frac{n}{2},$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right)\prod_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1-1} 6 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1-1}\left(2\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor + 3\right)\prod_{j=0}^{i-1} 6$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor}\left(2\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor + 3\right)6^i$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right) + 2\sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor} 6^i\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor + 3\sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor} 6^i$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right) + 2\sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor} 6^i\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor + 3\left(\frac{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}-1}{5}\right)$$

$$= 6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor}}\right\rfloor\right) + 2\sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor} 6^i\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor + 3\left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor}-1}{5}\right).$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor}}\right\rfloor = \begin{cases} 0, & \text{se } n \bmod 12 < 6,\\ 1, & \text{se } n \bmod 12 \geq 6, \end{cases} \overset{\text{prova?}}{=} \left\lfloor \frac{n \bmod 12}{6}\right\rfloor,$$

então,

$$f(n) = 6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n \bmod 12}{6}\right\rfloor\right) + 2\sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2}\right\rfloor} 6^i\left\lfloor \frac{n}{6^i}\right\rfloor + 3\left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n\rfloor}-1}{5}\right).$$

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6}\right\rfloor\right) + 3n - 1$, para todo $n > 1$,

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{6}\right\rfloor,\\ m(n) &= 6,\\ s(n) &= 3n-1,\\ n_0 &= 2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{6^k} \right\rfloor < 2,$$

ou seja,

$$\frac{n}{6^k} < 2,$$

isto é,

$$6^k > \frac{n}{2},$$

ou seja

$$k > \log_6 \frac{n}{2},$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Então

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n))$$

$$= f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 1} 6 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - 1} \left(3 \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor - 1\right) \prod_{j=0}^{i-1} 6$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(3 \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor - 1\right) 6^i$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i$$

$$= 6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor - \left(\frac{6^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1} - 1}{5}\right)$$

$$= 6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor}} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \right\rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor - \left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} - 1}{5}\right).$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor}} \right\rfloor = \begin{cases} 0, & \text{se } n \bmod 12 < 6, \\ 1, & \text{se } n \bmod 12 \geq 6, \end{cases} \stackrel{\text{prova?}}{=} \left\lfloor \frac{n \bmod 12}{6} \right\rfloor,$$

então,

$$f(n) = 6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n \bmod 12}{6} \right\rfloor\right) + 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \log_6 \frac{n}{2} \rfloor} 6^i \left\lfloor \frac{n}{6^i} \right\rfloor - \left(\frac{6^{\lfloor \log_6 3n \rfloor} - 1}{5}\right).$$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \log_3 n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \log_3 n \rceil - 1} 4^i \left(2 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right)$$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \log_3 n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \log_3 n \rceil - 1} 4^i \left(3 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor - 1\right)$$

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor\right)$$

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor^2 - 2 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor + 1\right)$$

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2\right)$$

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7,\ \textsf{para todo}\ n > 1,$

$$f(n) = 3^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 3^i \left(5 \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 7\right)$$

(k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2,\ \textsf{para todo}\ n > 1,$

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n),\ \textsf{para todo}\ n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor, \\ m(n) &= 4, \\ s(n) &= n^2, \\ n_0 &= 2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{3^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{3^k} \right\rfloor < 2,$$

ou seja,

$$\frac{n}{3^k} < 2,$$

isto é,

$$3^k > \frac{n}{2},$$

ou seja

$$k > \log_3 \frac{n}{2}$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Então

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right)\prod_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1-1} 4 + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1-1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{3^i}\right\rfloor\right)\prod_{j=0}^{i-1} 4 \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right) 4^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor} 4^i\left(\left\lfloor \frac{n}{3^i}\right\rfloor\right)^2 \\
&= 4^{\left\lfloor \log_3 \frac{3n}{2}\right\rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}}\right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor} 4^i\left(\left\lfloor \frac{n}{3^i}\right\rfloor\right)^2.
\end{aligned}
$$

Como

$$\log_3 \frac{n}{2} - 1 < \left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor \leq \log_3 \frac{n}{2}$$

e multiplicando por -1, temos

$$-\log_3 \frac{n}{2} \leq -\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor < -\log_3 \frac{n}{2} + 1,$$

e subtraindo -1, temos

$$-\log_3 \frac{n}{2} - 1 \leq -\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor - 1 < -\log_3 \frac{n}{2},$$

se, e somente se,

$$3^{-\log_3 \frac{n}{2} - 1} \leq 3^{-\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor - 1} < 3^{-\log_3 \frac{n}{2}},$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{3^{\log_3 \frac{n}{2}+1}} \leq \frac{1}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}} < \frac{1}{3^{\log_3 \frac{n}{2}}},$$

e, multiplicando por n, vem que

$$\frac{n}{3^{\log_3 \frac{3n}{2}}} \leq \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}} < \frac{n}{3^{\log_3 \frac{n}{2}}},$$

e daí,

$$\frac{n}{\frac{3n}{2}} \leq \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2}\right\rfloor+1}} < \frac{n}{n/2},$$

e então,

$$\frac{2}{3} \leq \frac{n}{3^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} < 2.$$

Mas

$$0 < \frac{2}{3} < 1,$$

e portanto

$$\left\lfloor \frac{n}{3^{\left\lfloor log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor = 0 \text{ ou } \left\lfloor \frac{n}{3^{\left\lfloor log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}} \right\rfloor = 1.$$

e como $f(0) = 1$ e $f(1) = 1$, então,

$$\begin{aligned} f(n) &= 4^{\left\lfloor \log_3 \frac{3n}{2} \right\rfloor}(1) + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor} 4^i \left(\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor \right)^2 \\ &= 4^{\left\lfloor \log_3 \frac{3n}{2} \right\rfloor} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \log_3 \frac{n}{2} \right\rfloor} 4^i \left(\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor \right)^2. \end{aligned}$$

(l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5, \text{ para todo } n > 1,$

$$f(n) = 4^{\lceil \lg n \rceil} f(1) + \sum_{i=0}^{\lceil \lg n \rceil - 1} 4^i \left(\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor^2 - 7 \left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor + 5 \right)$$

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \sqrt{n} + 1, \text{ para todo } n > 3,$

$$f(n) = 4^{\left\lceil \log_3 \frac{n}{3} \right\rceil} f(3) + \sum_{i=0}^{\left\lceil \log_3 \frac{n}{3} \right\rceil} 4^i \left(1 + \sqrt{\left\lfloor \frac{n}{3^i} \right\rfloor} \right)$$

(n)

(o)

(p)

(q)

(r)

(s)

(t)

104*. [default,ex:recorrencias-2]

Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n,$ para todo $n > 0.$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + 1,$ para todo $n > 0$

(c) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n \geq 1$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

(e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

(f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

(g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$

(i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$

(k) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$

(l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$

(m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$

(n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$

(o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(p) $f(n) = 3f(n-1) + n,$ para todo $n \geq 1.$

(q) $f(n) = 3f(n-2) + n^2,$ para todo $n \geq 2.$

(r) $f(n) = 2f(n-2) + 2n - 2,$ para todo $n \geq 2.$

(s) $f(n) = 2f(n-3) + 3n - 2,$ para todo $n \geq 3.$

(t) $f(n) = 3f(n-3) + 3n - 3,$ para todo $n \geq 3.$

Resposta:

acrescentar a resolução às respostas.

(a) $\frac{n(n+1)}{2},$ para todo n natural

(b) $f(n) = 2^n - 1,$ para todo n natural

(c) $f(n) = (f0 + 6) * 2^n - n^2 - 4 * n - 6$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1} - n - 2$$

(e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)3^{n-1} + 3^{n-1} - 1$$

(f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)3^{n-1} - \frac{5}{2} \cdot 3^n + 15/2$$

(g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0) + \frac{n^2}{2} - n/2$$

(h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0) + n^2 - 2n + 1$$

(i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 2^n - n - 1$$

(j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 5 \cdot 2^n - 3n - 7$$

(k) $f(n) = f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = f(0)2^{n-1} + 11 \cdot 2^{n-1} - n^2 - 4n - 6$$

(l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = \begin{cases} f(0) + \frac{7}{2} \cdot n + \frac{3}{4} \cdot n^2, & \text{se } n \text{ é par} \\ f(1) + \frac{7}{2} \cdot n + \frac{3}{4} \cdot n^2 - \frac{17}{4}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = \begin{cases} f(0) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{4}, & \text{se } n \text{ é par} \\ f(1) + \frac{n^2}{4} - \frac{3}{4}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$ (Muito comlicado.) Para n múltiplo de 3, devemos ter

$$f(n) = f(3) - \frac{3}{2}n^2 - 144n + 117.$$

(o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = 2^{n-1}f(1) + \sum_{i=0}^{n-2} 2^i \left((n-i)^2 - 2(n-i) + 1\right)$$

(p) $f(n) = nf(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

$$f(n) = n!f(1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n!}{(n-i)!}$$

105*. [default,ex:seq-bin]

Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2f(n-1), & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

(b) Definimos $A(n)$ como sendo a famosa série geométrica $\sum_{n \geq 0} x^n$. Multiplicando por x^n e somando sobre todo o domínio de f, $\mathbb{N}$, temos a equação

$$\sum_{n \geq 0} f(n+1)\, x^n = \sum_{n \geq 0} 2\, f(n)\, x^n$$

que, em termos de $A(n)$, o primeiro termo é

$$\frac{A(n) - f(0)}{x} = \frac{A(n) - 1}{x},$$

enquanto o segundo termo é $2A(n)$. Isso nos conta que

$$\frac{A(n) - 1}{x} = 2xA(n) \qquad \text{se e somente se} \qquad A(n) = \frac{1}{1-2x}.$$

Sabemos que $A(n)$ converge para $1/(1-x)$ quando $|x| < 1$ e, logo,

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n \geq 0} (2x)^n = \sum_{n \geq 0} \underbrace{2^n}_{f(n)} x^n.$$

Fazendo a operação inversa à do primeiro parágrafo, i.e. extraindo o coeficiente de x^n —denotado por $[x^n]$—, temos, então, que

$$[x^n]\frac{1}{1-2x} = 2^n = f(n), \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

106*. [default,ex:recorrencia-pa]

Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Resposta:

(a) $f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1.$

(b) Do Exercício 97, temos

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 1, \\ s(n) &= r, \\ n_0 &= 1, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}. \end{aligned}$$

e então

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\right\} \\ &= n. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\
&= f(h^n(n)) + \sum_{i=0}^{n-1} s(n-(n-i)) \\
&= f(n-n) + \sum_{i=0}^{n-1} s(i) \\
&= f(0) + (n-1-0+1)r \\
&= f(0) + nr.
\end{aligned}$$

Portanto

$$f(n) = f(0) + nr, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

107⋆. [default,ex:contagem-operacoes-algoritmo-coeficiente-binomial]

Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações/divisões efetuadas na execução de $B(n,k)$, o algoritmo do Exercício 88.

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$m(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ m(n-1,k-1) + 2, & \text{se } k \geq 1. \end{cases}$$

(b)

$$m(n,k) = m(n-u,k-u) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(k)),$$

onde

$$\begin{aligned}
h(k) &= k-1, \\
s(k) &= 2, \\
u &= \min\left\{j \in \mathbb{N} \mid h^j(k) < 1\right\}.
\end{aligned}$$

e portanto,

$$u = k,$$

e

$$m(n,k) = m(n-k, k-k) + \sum_{i=0}^{k-1} 2 = m(n-k, 0) + 2k.$$

108. [default,ex:rec-bit-k]

Resolva a recorrência do Exercício 87.

Resposta:

$$B(n,k) = \begin{cases} n \bmod 2, & \text{se } k = 1, \\ B\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, k-1\right), & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Então, para todo $k > 1$,

$$B(n,k) = B(g^u(n), h^u(k)),$$

onde

$$\begin{aligned} g(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ h(k) &= k-1, \\ u &= \min\left\{ j \in \mathbb{N} \mid h^j(k) \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$h^j(k) = k - j,$$

e

$$h^j(k) \leq 1$$

se e somente se

$$k - j \leq 1,$$

isto é

$$j \geq k-1,$$

e portanto,

$$u = k - 1,$$

e

$$\begin{aligned} B(n,k) &= B(g^{k-1}(n), h^{k-1}(k)) \\ &= B\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor, k-(k-1)\right) = B\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor, 1\right) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor \bmod 2. \end{aligned}$$

109@. [default,ex:recorrencia-pg]

Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)
$$f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

(b)
$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ m(n) &= q, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 1. \end{aligned}$$

Então
$$h^k(n) = n - k,$$

e
$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se
$$n - k < 1,$$

ou seja,
$$k > n - 1$$

e

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-1\} \\ &= n, \end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = h^n(n) = n - n = 0,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(0) \prod_{i=0}^{n-1} q = f(0)q^n.$$

110$^@$. [default,ex:pre-fibonacci]

Resolva as seguintes recorrências

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Resposta:

(a)

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= n - 1, \\ m(n) &= 2, \\ u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n - k < 2,$$

ou seja,

$$k > n - 2$$

e

$$\begin{aligned} u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq n_0\} \\ &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 2\} \\ &= n - 1, \end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(1) \prod_{i=0}^{(n-1)-1} 2 = f(1) \prod_{i=0}^{n-2} 2 = f(1)2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

(b)

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$\begin{array}{rcl} u & = & \min \left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ h(n) & = & n - 2, \\ m(n) & = & 2, \\ n_0 & = & 2, \end{array}$$

e daí

$$h^k(n) = n - 2k,$$

e

$$h^k(n) < n_0$$

se e somente se

$$n - 2k < 2,$$

ou seja,

$$k > \frac{n-2}{2}$$

e

$$\begin{aligned} u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - 2k < n_0\} \\ &= \min \left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \frac{n-2}{2}\right\} \\ &= \left\lfloor \frac{n-2}{2} + 1 \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

e

$$h^u(n) = h^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Se n é par, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n}{2}\right) = n - n = 0.$$

Se n é ímpar, então

$$n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - 2\left(\frac{n-1}{2}\right) = n - (n-1) = 1.$$

Então

$$h^u(n) = n \bmod 2,$$

e

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = f(n \bmod 2)\prod_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} 2 = f(n \bmod 2)2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}.$$

Se n é par, então

$$2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = 2^{\frac{n}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^n = (\sqrt{2})^n.$$

Se n é ímpar, então

$$2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = 2^{\frac{n-1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1}.$$

Então

$$f(n) = f(n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-(n \bmod 2)} = \frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}}(\sqrt{2})^n$$

Se n é par,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}}(\sqrt{2})^n = \frac{f(0)}{(\sqrt{2})^0}(\sqrt{2})^n = \frac{0}{1}(\sqrt{2})^n = 0.$$

Se n é ímpar,

$$\frac{f(n \bmod 2)}{(\sqrt{2})^{n \bmod 2}}(\sqrt{2})^n = \frac{f(1)}{(\sqrt{2})^1}(\sqrt{2})^n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^n = (\sqrt{2})^{n-1}$$

Então

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par,} \\ (\sqrt{2})^{n-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

ou seja

$$f(n) = (n \bmod 2)(\sqrt{2})^{n-1}$$

111*. [default,ex:recorrencias-3]

Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = f\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor\sqrt[3]{n}\right\rfloor\right) + n, \text{ para todo } n > 1.$

Resposta:

(a) Do Teorema 29, temos

$$f(n) = f(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

para todo $n \geq n_0$, onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

e

$$\begin{array}{rcl} h(n) & = & n-1, \\ m(n) & = & n, \\ s(n) & = & n, \\ n_0 & = & 2. \end{array}$$

Então,

$$h^k(n) = n - k,$$

e

$$h^u(n) = n - u.$$

Como

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 2\}, \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 2\}, \\ &= n - 1, \end{aligned}$$

então,

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n - (n-1) = 1,$$

e

$$f(h^u(n)) = f(1).$$

Além disso, para todo $i \in [0..u-1] = [0..n-2]$,

$$h^i(n) = n - i,$$

e

$$m(h^i(n)) = m(n-i) = n - i,$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{(n-1)-1} m(n-i) = \prod_{i=0}^{n-2}(n-i) = n!.$$

Ainda, para todo $j \in [0..i-1]$,

$$h^j(n) = n - j,$$

e

$$m(h^j(n)) = m(n-j) = n - j,$$

e também para todo $i \in [0..u-1] = [0..n-2]$

$$h^i(n) = n - i,$$

e

$$s(h^i(n)) = s(n-i) = n - i,$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) &= \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\prod_{j=0}^{i-1}(n-j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\left(n.(n-1).\ldots.(n-(i-2)).(n-(i-1))\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\frac{n!}{(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{n!}{(n-(i+1))!} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n!}{(n-i)!}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n))\prod_{i=0}(n-i) + \sum_{i=0}^{n-2}(n-i)\prod_{j=0}^{i-1}(n-j) \\
&= f(1)n! + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n!}{(n-i)!}
\end{aligned}$$

(b) Do Exercício 97, temos

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))$$

para todo $n \geq n_0$, onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor, \\ s(n) &= n^2, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então,

$$h^k(n) = \left\lfloor \sqrt[2^k]{n} \right\rfloor = \left\lfloor n^{1/2^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^u(n) = \left\lfloor \sqrt[2^u]{n} \right\rfloor = \left\lfloor n^{1/2^u} \right\rfloor.$$

Como

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \sqrt[2^k]{n} \right\rfloor < 2\right\}, \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg\lg n\}, \\ &= \lfloor \lg\lg n \rfloor + 1, \end{aligned}$$

então,

$$h^u(n) = h^{(\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1)}(n) = \left\lfloor n^{1/2^{(\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1)}} \right\rfloor.$$

Observe que, pela própria escolha de u, temos necessariamente $h^u(n) < 2$ e, por outro lado, se tivéssemos $h^u(n) < 1$, teríamos

$$n^{1/2^{(\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1)}} < 1,$$

e, consequentemente,

$$\left(n^{1/2^{(\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1)}}\right)^{\left(2^{\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1}\right)} < 1^{\left(2^{\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1}\right)},$$

isto é,

$$n < 1.$$

Logo, $1 \le h^u(n) < 2$, para todo $n > 1$ e, consequentemente

$$\left\lfloor n^{1/2^{(\lfloor \lg\lg n \rfloor + 1)}} \right\rfloor = 1,$$

e

$$f(h^u(n)) = f(1).$$

Além disso, para todo $i \in [0..u-1] = [0..\lfloor \lg\lg n \rfloor]$,

$$h^i(n) = \left\lfloor n^{1/2^i} \right\rfloor,$$

e

$$s(h^i(n)) = [h^i(n)]^2 = \left\lfloor n^{1/2^i} \right\rfloor^2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \\ &= f(1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg\lg n \rfloor} \left\lfloor n^{1/2^i} \right\rfloor^2. \end{aligned}$$

(c) Do Teorema 29, temos

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

para todo $n \ge n_0$, onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \sqrt[3]{n} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então,

$$h^k(n) = \left\lfloor \sqrt[3^k]{n} \right\rfloor = \left\lfloor n^{1/3^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^u(n) = \left\lfloor \sqrt[3^u]{n} \right\rfloor = \left\lfloor n^{1/3^u} \right\rfloor.$$

Como

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}, \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \sqrt[3^k]{n} \right\rfloor < 2\right\}, \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \log_3 \lg n\right\}, \\ &= \lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1, \end{aligned}$$

então,

$$h^u(n) = h^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}(n) = \left\lfloor n^{1/3^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}} \right\rfloor,$$

Observe que, pela própria escolha de u, temos necessariamente $h^u(n) < 2$ e, por outro lado, se tivéssemos $h^u(n) < 1$, teríamos

$$n^{1/3^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}} < 1,$$

e, consequentemente,

$$\left(n^{1/3^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}}\right)^{\left(3^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}\right)} < 1^{\left(3^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}\right)}$$

isto é,

$$n < 1.$$

Logo, $1 \le h^u(n) < 2$, para todo $n > 1$ e, consequentemente

$$\left\lfloor n^{1/3^{(\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1)}} \right\rfloor = 1,$$

e

$$f(h^u(n)) = f(1).$$

Além disso, para todo $i \in [0..u-1] = [0..\lfloor \log_3 \lg n \rfloor]$,

$$h^i(n) = \left\lfloor n^{1/3^i} \right\rfloor,$$

e

$$m(h^i(n)) = 2,$$

e

$$s(h^i(n)) = h^i(n) = \left\lfloor n^{1/3^i} \right\rfloor.$$

Ainda, para todo $j \in [0..i-1]$,

$$h^j(n) = \left\lfloor n^{1/3^j} \right\rfloor,$$

e

$$m(h^j(n)) = 2.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\ &= f(1) \prod_{i=0}^{\lfloor \log_3 \lg n \rfloor} 2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_3 \lg n \rfloor} \left\lfloor n^{1/3^i} \right\rfloor \prod_{j=0}^{i-1} 2 \\ &= f(1) 2^{\lfloor \log_3 \lg n \rfloor + 1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_3 \lg n \rfloor} \left\lfloor n^{1/3^i} \right\rfloor 2^i. \end{aligned}$$

conferir (rc)

112*. [default,ex:rec-hanoi]

O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
---
  Se n = 0
      Termine
  Hanoi(n − 1, a, c, b)
  mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
  Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Descreva $M(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$M(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n = 0, \\ 2M(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) $M(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1.$$

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-2)(X-1)$$

e então

$$M(n) = a1^n + b2^n = a + b2^n$$

onde a, e b são dados por

$$\begin{aligned} M(0) &= a + b2^0 = a + b, \\ M(1) &= a + b2^1 = a + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 1 &= a + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -b, \\ 1 &= (-b) + 2b, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} a &= -1, \\ b &= 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$M(n) = a + b2^n = -1 + 12^n = 2^n - 1.$$

Portanto

$$M(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in N.$$

conferir (dm)

113@. [default,ex:recorrencia-mergesort]

O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 55 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.

(b) Use as soluções obtidas e o Exercício 40 para concluir que $T(n) \approx n \lg n$.

Resposta:

(a) Do Teorema 29, temos

$$T^-(n) = T^-(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\},$$

e

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n - 1, \\ n_0 &= 2. \end{aligned}$$

Então, dado $i \in \mathbb{N}$,

$$h^i(n) = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor,$$

e

$$m(h^i(n)) = 2,$$

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^j(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} 2 = 2^u.$$

e

$$s(h^i(n)) = h^i(n) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} 2 = 2^i.$$

Então

$$\begin{aligned}
T^-(n) &= T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) 2^u + \sum_{i=0}^{u-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 1\right) 2^i \\
&= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \\
&= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - \frac{2^{(u-1)+1} - 1}{2 - 1} \\
&= 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1,
\end{aligned}$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}.$$

Como

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2,$$

se e somente se

$$\frac{n}{2^k} < 2,$$

ou seja,

$$n < 2^{k+1},$$

ou seja,

$$k + 1 > \lg n,$$

isto é,

$$k > \lg n - 1.$$

Então,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < 2\right\}$$
$$= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \lg n - 1\} \overset{\text{T. 13}}{=} \lfloor \lg n - 1 + 1 \rfloor$$
$$= \lfloor \lg n \rfloor .$$

Então

$$T^-(n) = 2^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^u + 1$$
$$= 2^{\lfloor \lg n \rfloor} T\left(\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1$$
$$\overset{\text{Ex. 37}}{=} 2^{\lfloor \lg n \rfloor} T(1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1$$
$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1$$

Por desenvolvimento análogo chegamos a

$$T^+(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1.$$

(b) Do Exercício 55 temos

$$T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Do Exercício 40 temo que

$$\begin{aligned} T^-(n) &\approx n \lg n, \\ T^+(n) &\approx n \lg n. \end{aligned}$$

Consequentemente (Ex. 22)

$$T(n) \approx n \lg n.$$

114@. [default,ex:master-method]

O “Master Method” ou “Master Theorem”[12] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de “algoritmos de divisão e conquista”.

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 113 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

Resposta:

Usando a notação do Teorema 29, temos

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor, \\ m(n) &= a, \\ s(n) &= f(n), \end{aligned}$$

e daí,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor,$$

e

$$T(n) = T(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\}. \end{aligned}$$

Como

$$h^u(n) = \left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor$$

[12] Popularizado com este nome por Cormen et al. (2009).

e

$$\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) = \prod_{i=0}^{u-1} a = a^u,$$

e

$$\sum_{i=0}^{u-1} f(h^i(n)) = \sum_{i=0}^{u-1} f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right)$$

e

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \prod_{j=0}^{i-1} a = a^i,$$

então,

$$T(n) = a^u T\left(\left\lfloor \frac{n}{b^u} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{u-1} a^i f\left(\left\lfloor \frac{n}{b^i} \right\rfloor\right).$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \left\lfloor \frac{n}{b^k} \right\rfloor < n_0\right\} \\ &= \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k > \log_b \frac{n}{n_0}\right\} \\ &= \left\lfloor \log_b \frac{n}{n_0} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

completar

A.6.2 Recorrências Lineares Homogêneas

115$^-$. [default,ex:CN-vetorial]

Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Resposta:

conferir

(a) Vamos provar que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ preserva as propriedades de fechamento, associatividade, pertinência dos elementos neutro e inverso de $+$ e a comutatividade; i.e., que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo abeliano.
Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Temos que:

i. (fecho)
$$(a + b)(n) = a(n) + b(n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

ii. (associatividade)
$$\begin{aligned}((a + b) + c)(n) &= (a + b)(n) + c(n)\\ &= a(n) + b(n) + c(n)\\ &= a(n) + (b + c)(n)\\ &= (a + (b + c))(n).\end{aligned}$$

iii. (identidade) O elemento neutro, e, é elemento de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
$$(e + a)(n) = e(n) + a(n) = a(n) + e(n) = (a + e)(n),$$
onde $e(n) = 0,$ para todo n natural.

iv. (inverso) Toda função a admite um elemento inverso b que são complementares ao elemento neutro,
$$(a + b)(n) = (b + a)(n) = e(n) = 0.$$
Para satisfazer a propriedade acima, basta tomar $b(n) = -a(n)$.

v. (comutatividade)
$$(a + b)(n) = a(n) + b(n) = b(n) + a(n) = (b + a)(n).$$

(b) Para provarmos que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial, basta recorrermos ao fato de que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo abeliano e provar as seguintes propriedades sobre o operador multiplicativo:

i. (associatividade da multiplicação por escalares) Se $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, então
$$\begin{aligned}(c_1(c_2a))(n) &= c_1(c_2a)(n)\\ &= c_1c_2a(n)\\ &= (c_1c_2)a(n).\end{aligned}$$

ii. (distributiva da soma de escalares)

$$\begin{aligned}((c_1+c_2)a)(n) &= (c_1+c_2)a(n)\\ &= c_1a(n)+c_2a(n)\\ &= (c_1a)(n)+(c_2a)(n).\end{aligned}$$

iii. (distributiva da soma de vetores)

$$\begin{aligned}(c_1(a+b))(n) &= c_1(a+b)(n)\\ &= c_1a(n)+c_1b(n)\\ &= (c_1a)(n)+(c_1b)(n).\end{aligned}$$

iv. (escalar neutro da multiplicação)

$$(1a)(n) = 1a(n) = a(n).$$

116⁻. [default,ex:exponenciais:li]

Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n,\\ f_2(n) &= r_2^n,\end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

Resposta:

conferir

Vamos provar as duas implicações ($\Leftarrow$ e $\Rightarrow$) dessa equivalência.

(a) ($\Leftarrow$) Suponha que $r_1 \neq r_2$. Vamos provar que $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.
Decorre que não existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ que satisfaça

$$f_1(n) = c \cdot f_2(n);$$

i.e., não existe $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$r_1^n = c \cdot r_2^n$$

porque $c = (r_1/r_2)^n$ não é constante, uma vez que $0 \neq (r_1/r_2)^n \neq 1$.
Assim, $f_1(n)$ não pode ser escrita como uma combinação linear de $f_2(n)$ e, pelo mesmo motivo, também não podemos escrever $f_2(n)$ como combinação linear de $f_1(n)$.
Portanto, $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

(b) ($\Rightarrow$) Suponha que r_1^n e r_2^n sejam linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

Vamos provar que, sob essa condição, $r_1 \neq r_2$.

Como r_1^n e r_2^n são linearmente independentes, então não deve existir um $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$r_1^n = c \cdot r_2^n, \text{ para todo } n \text{ natural;}$$

i.e., não deve existir uma constante $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo

$$c = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n.$$

Contudo, quando $r_1 = r_2$, temos $c = 1^n = 1$, que é constante, o que iria contradizer nossa hipótese inicial.

Portanto, $f_1(n)$ e $f_2(n)$ são linearmente independentes implica $r_1 \neq r_2$.

117$^-$. [default,ex:cor:rec:subespaco]

Sejam[13] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

[13]Este exercício usa a notação do Exercício 115

Resposta:

(a)

$$\begin{aligned} g(n) + h(n) &= a_1 g(n-1) + \cdots + a_k g(n-k) + a_1 h(n-1) + \cdots + a_k h(n-k) \\ &= a_1(g(n-1) + h(n-1)) + \cdots + a_k(g(n-k) + h(n-k)) \\ &= a_1(g+h)(n-1) + \cdots + a_k(g+h)(n-k) \\ &= (g+h)(n). \end{aligned}$$

(b) Suponha que $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \ \text{para todo } n \geq k;.$$

Então, para todo $n \geq k$,

$$(zf)(n) = zf(n) = za_1 f(n-1) + \cdots + za_k f(n-k).$$

Como $za_1, \cdots, za_k$ são todas constantes complexas, segue que zf satisfaz a referida recorrência.

(c) Basta provarmos as 8 seguintes propriedades. Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

i. (Comutatividade da adição de funções)

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = g(n) + f(n) = (g+f)(n).$$

ii. (Associatividade da adição de funções)

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)(n) &= (f+g)(n) + h(n) \\ &= f(n) + g(n) + h(n) \\ &= f(n) + (g+h)(n) \\ &= (f + (g+h))(n). \end{aligned}$$

iii. (Identidade aditiva)

$$\begin{aligned} (0+f)(n) &= 0 + f(n) \\ &= f(n) \\ &= f(n) + 0 \\ &= (f+0)(n). \end{aligned}$$

iv. (Existência da inversa aditiva) Tomando $I(n) := (-f)(n)$, temos

$$f(n) + I(n) = f(n) + (-f)(n) = f(n) - f(n) = 0.$$

v. (Associatividade da multiplicação de escalares)

$$\begin{aligned}(c_1(c_2f))(n) &= c_1(c_2f)(n)\\ &= c_1c_2f(n)\\ &= (c_1c_2)f(n)\\ &= ((c_1c_2)f)(n).\end{aligned}$$

vi. (Distributividade da soma de escalares)

$$\begin{aligned}((c_1+c_2)f)(n) &= (c_1+c_2)f(n)\\ &= c_1f(n)+c_2f(n)\\ &= (c_1f)(n)+(c_2f)(n).\end{aligned}$$

vii. (Distributividade da soma de funções)

$$\begin{aligned}(c_1(f+g))(n) &= c_1(f+g)(n)\\ &= c_1f(n)+c_1g(n)\\ &= (c_1f)(n)+(c_1g)(n).\end{aligned}$$

viii. (Elemento neutro da multiplicação por escalar)

$$(1f)(n) = 1f(n) = f(n).$$

$118^{@}$. [default,ex:exemplos-rlh]

Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2\\ 5f(n-1)-7f(n-2)+3f(n-3), & \text{se } n \geq 3.\end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0\\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2\\ 9f(n-1)-27f(n-2)+27f(n-3), & \text{se } n \geq 3.\end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1\\ 3, & \text{se } n = 2\\ 7f(n-1)-16f(n-2)+12f(n-3), & \text{se } n \geq 3.\end{cases}$$

Resposta:

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([5,-7,3],init=[(0,0),(1,1),(2,2)],
  verbose=sys.stdout)characteristic polynomial: X^3
  - 5*X^2 + 7*X - 3
roots and multiplicities: [(3, 1), (1, 2)]
generic solution: n |--> 3^n*c_1_0 + c_2_1*n +
  c_2_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 2)]
linear system: [0 == c_1_0 + c_2_0, 1 == 3*c_1_0 +
  c_2_0 + c_2_1, 2 == 9*c_1_0 + c_2_0 + 2*c_2_1]
particular solution: n |--> n
```

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{11}n1^n + c_{20}3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 0, \quad c_{11} = 1, \quad c_{20} = 0.$$

e portanto,

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([9,-27,27],init=[(0,1),(1,9),(2,9)],
  verbose=sys.stdout)
```

$$f(n) = c_{10}3^n + c_{11}n3^n + c_{12}n^2 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 4, \quad c_{12} = -2.$$

e portanto,

$$f(n) = 3^n + 4n3^n - 2n^2 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([3,-1,3],init=[(0,3),(1,3),(2,7)],
  verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 7*X^2 + 16*X - 12
roots and multiplicities: [(3, 1), (2, 2)]
generic solution: n |--> 2^n*c_2_1*n + 3^n*c_1_0 +
  2^n*c_2_0
```

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{11}n2^n + c_{20}3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 1, \quad c_{20} = -1.$$

e portanto,

$$f(n) = 2^n + n2^n - 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

119*. [default,ex:recorrencias-lineares-homogeneas]

Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 0, \\ 2, & \textsf{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(n)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(o)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \textsf{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(p)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \textsf{se } n = 0 \\ 6, & \textsf{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(q)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \textsf{se } n < 2, \\ f(n-2), & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

(a) conferir respostas via sage com as respostas humanas (b) colocar todas as soluções de RLHs num mesmo formato

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1 \\ 7, & \text{se } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([3,-1,3],init=[(0,3),(1,3),(2,7)],
  verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 3*X^2 + X - 3
roots and multiplicities: [(-I, 1), (I, 1), (3, 1)]
generic solution: n |--> (-I)^n*c_1_0 + I^n*c_2_0 +
   3^n*c_3_0
initial conditions: [(0, 3), (1, 3), (2, 7)]
linear system: [3 == c_1_0 + c_2_0 + c_3_0, 3 == -I
  *c_1_0 + I*c_2_0 + 3*c_3_0, 7 == -c_1_0 - c_2_0 +
  9*c_3_0]
particular solution: n |--> 3^n + I^n + (-I)^n
n |--> 3^n + I^n + (-I)^n
```

$$f(n) = c_{10}3^n + c_{20}i^n + c_{30}(-i)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$\begin{aligned} c_{10} &= 1, \\ c_{20} &= 1, \\ c_{30} &= 1. \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = 3^n + i^n + (-i)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([3/2,-3/2,1/2],init=[(0,0),(1,1),(2,2)
  ],verbose=sys.stdout)
```

$$f(n) = -\left(\frac{2+i\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{2-i\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \frac{4}{3}(1/2)^n,$$

para todo n natural.

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([6,-12,8],init=[(0,1),(1,4),(2,4)],
  verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 6*X^2 + 12*X - 8
roots and multiplicities: [(2, 3)]
generic solution: n |--> 2^n*c_1_2*n^2 + 2^n*c_1_1*
  n + 2^n*c_1_0
initial conditions: [(0, 1), (1, 4), (2, 4)]
linear system: [1 == c_1_0, 4 == 2*c_1_0 + 2*c_1_1
  + 2*c_1_2, 4 == 4*c_1_0 + 8*c_1_1 + 16*c_1_2]
particular solution: n |--> -2^n*n^2 + 2*2^n*n + 2^
  n
n |--> -2^n*n^2 + 2*2^n*n + 2^n
```

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{11}n2^n + c_{12}n^2 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 2, \quad c_{12} = -1.$$

e portanto,

$$f(n) = 2^n + 2n2^n - n^2 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([3,-1,-2],init=[(0,1),(1,sqrt(5)+2)
  ,(2,sqrt(5)+4)],verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 3*X^2 + X + 2
roots and multiplicities: [(-1/2*sqrt(5) + 1/2, 1),
   (1/2*sqrt(5) + 1/2, 1), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c_3_0 + c_2_0*(1/2*
  sqrt(5) + 1/2)^n + c_1_0*(-1/2*sqrt(5) + 1/2)^n
```

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{20}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{30}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 1, \quad c_{20} = -1.$$

e portanto,

$$f(n) = 2^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([6,-11,6],init=[(0,0),(1,2),(2,4)],
  verbose=sys.stdout)
```

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{20}2^n + c_{30}3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = -3, \quad c_{20} = 4, \quad c_{30} = -1.$$

e portanto,

$$f(n) = 4.2^n - 3^n - 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([10,-31,30],init=[(0,0),(1,3),(2,9)],
  verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 10*X^2 + 31*X - 30
roots and multiplicities: [(2, 1), (3, 1), (5, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c_1_0 + 3^n*c_2_0 + 5^
  n*c_3_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 3), (2, 9)]
linear system: [0 == c_1_0 + c_2_0 + c_3_0, 3 == 2*
  c_1_0 + 3*c_2_0 + 5*c_3_0, 9 == 4*c_1_0 + 9*c_2_0
  + 25*c_3_0]
particular solution: n |--> -5^n + 6*3^n - 5*2^n
n |--> -5^n + 6*3^n - 5*2^n
```

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{20}3^n + c_{30}5^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = -5, \quad c_{20} = 6, \quad c_{30} = -1.$$

e portanto,

$$f(n) = -5.2^n + 6.3^n - 5^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([8,-21,18],init=[(0,0),(1,1),(2,2)],
  verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: X^3 - 8*X^2 + 21*X - 18
roots and multiplicities: [(2, 1), (3, 2)]
```

$$f(n) = c_{10}3^n + c_{11}n3^n + c_{20}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 4, \quad c_{11} = -1, \quad c_{20} = -4.$$

e portanto,

$$f(n) = 4.3^n - n3^n - 4.2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([5,-6],init=[(0,0),(1,1)],verbose=sys.
  stdout)
characteristic polynomial: X^2 - 5*X + 6
roots and multiplicities: [(3, 1), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c20 + 3^n*c10
initial conditions: [(0, 0), (1, 1)]
```

$$f(n) = 3^n - 2^n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([4,3],init=[(0,0),(1,1)],verbose=sys.
  stdout)
characteristic polynomial: X^2 - 4*X - 3
roots and multiplicities: [(-sqrt(7) + 2, 1), (sqrt
  (7) + 2, 1)]
```

$$f(n) = \frac{\sqrt{7}}{14}\left((2+\sqrt{7})^n - (2-\sqrt{7})^n\right), \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve ([2,4],init=[(0,1),(1,2)], verbose=sys
  .stdout)
characteristic polynomial: X^2 - 2*X - 4
roots and multiplicities: [(-sqrt(5) + 1, 1), (sqrt
  (5) + 1, 1)]
generic solution: n |--> c_2_0*(sqrt(5) + 1)^n +
  c_1_0*(-sqrt(5) + 1)^n
initial conditions: [(0, 1), (1, 2)]
```

$$f(n) = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)(1+\sqrt{5})^n - \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)(1-\sqrt{5})^n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([2,-1],init=[(0,0),(1,1)],verbose=sys.
  stdout)
```

```
characteristic polynomial: X^2 - 2*X + 1
roots and multiplicities: [(1, 2)]
generic solution: n |--> c11*n + c10
particular solution: n |--> n
n |--> n
```

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
```

$$f(n) = 1, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
```

$$f(n) = \frac{i\sqrt{3}}{3}\left(\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(n)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([4,-4],init=[(0,0),(1,1)],verbose=sys.
  stdout)
characteristic polynomial: X^2 - 4*X + 4
```

$$f(n) = c_{10}2^n + c_{11}n2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = -1/2.$$

e portanto,

$$f(n) = 2^n - \frac{1}{2}n2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(o)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([0,4],init=[(0,0),(1,4)],verbose=sys.
  stdout)
characteristic polynomial: X^2 - 4
```

$$f(n) = c_{10}(-2)^n + c_{20}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = -1, \quad c_{20} = 1.$$

e portanto,

$$f(n) = 2^n - (-2)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(p)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([6,-9],init=[(0,3),(1,6)],verbose=sys.
  stdout)
characteristic polynomial: X^2 - 6*X + 9
roots and multiplicities: [(3, 2)]
```

```
generic solution: n |--> 3^n*c_1_1*n + 3^n*c_1_0
initial conditions: [(0, 1), (1, 6)]
linear system: [1 == c_1_0, 6 == 3*c_1_0 + 3*c_1_1]
particular solution: n |--> 3^n*n + 3^n
n |--> 3^n*n + 3^n
```

$$f(n) = c_{10}3^n + c_{11}n3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = 1, \quad c_{11} = 1.$$

e portanto,

$$f(n) = 3^n + n3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(q)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([0,1],init=[(0,0),(1,2)],verbose=sys.
  stdout)
```

$$f(n) = c_{10}(-1)^n + c_{20}1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde

$$c_{10} = -1, \quad c_{20} = 1.$$

e portanto,

$$f(n) = -(-1)^n + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

120*. [default,ex:outras-recorrencias]

Resolva as seguintes recorrências.

(a) [14]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) [15]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(c) [16]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) [17]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

colocar todas as soluções de RLHs num mesmo formato

(a) No caso de recorrente de

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

---

[14]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[17]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

temos

$$\begin{aligned} f(n) &= nf(n-1) + n(n-1)f(n-2) \\ &= \frac{n!}{(n-1)!}f(n-1) + \frac{n!}{(n-2)!}f(n-2) \\ &= n!\left(\frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{f(n-2)}{(n-2)!}\right) \end{aligned}$$

se e somente se

$$\frac{f(n)}{n!} = \frac{f(n-1)}{(n-1)!} + \frac{f(n-2)}{(n-2)!}.$$

Usando a transformação sugerida, obtemos

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2).$$

Cada chamada de g em

$$g(n) - g(n-1) - g(n-2) = 0$$

configura um eixo no espaço vetorial cujo polinômio característico característico é

$$x^2 - x - 1.$$

Com as raízes da equação característica —que, elevadas à n-ésima potência, formam uma base para supracitado espaço vetorial—,

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \textsf{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

podemos reescrever $g(n)$ como uma combinação linear de cada um dos eixos (r_1^n e r_2^n), como segue.

$$g(n) = c_{10}r_1^n + c_{20}r_2^n.$$

As identidades

$$g(0) = \frac{f(0)}{0!} = 0 \quad \textsf{e} \quad g(1) = \frac{f(1)}{1!} = 1$$

nos fornecem os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, por onde g passa, e são suficientes para determinarem g através do sistema linear

$$\begin{pmatrix} r_1^0 & r_2^0 \\ r_1^1 & r_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que por sinal são

$$c_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}} = -c_{20}$$

e, logo,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

se e somente se

$$f(n) = \frac{n!}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(b)

$g(n) = 2-2\,(1/2)^n$ se e somente se $f(n) = 2^{2-2(1/2)^n}$, para todo n natural.

Expressão acima provavelmente está errada, a correta deve ser a apresentada baixo

```
g = p.Function('g')
n = sp.Symbol('n',integer=True)
gr = g(n) -0.5*g(n-1) -0.5*g(n-2)
```

$g(n) = -\frac{2}{3}\,(-1/2)^n + \frac{2}{3}$ se e somente se $f(n) = 2^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-1/2)^n}$, para todo n natural.

conferir (dm)

(c) Do caso recorrente de

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1+f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

temos que

$$f(n)^2 = 1 + f(n-1)^2$$

que, usando a transformação sugerida, nos fornece

$$\begin{aligned} g(n) &= 1 + g(n-1) \\ &= g(n-1) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= n. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(n) = \sqrt{g(n)} = \sqrt{n}, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(d)

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

se e somente se

$$f(n) = 2^{\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)}.$$

121*. [default,ex:rlh-grande]

Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

Resposta:

$\boxed{\text{substituir os valores iniciais na resposta}}$

A recorrência

$$f(n) = 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5)$$

define o subespaço $\mathcal{R}(7, -19, 25, -16, 4)$ cujo polinômio característico é

$$X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4 = (X-1)^3(X-2)^2,$$

que tem $l = 2$ raízes distintas,

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= 2, \end{aligned}$$

com multiplicidades

$$\begin{aligned} m_1 &= 3, \\ m_2 &= 2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Pelo Corolário 36, temos que

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n \\
&= \sum_{j=0}^{m_1-1} c_{1,j} n^j r_1^n + \sum_{j=0}^{m_2-1} c_{2,j} n^j r_2^n \\
&= \sum_{j=0}^{2} c_{1,j} n^j 1^n + \sum_{j=0}^{1} c_{2,j} n^j 2^n \\
&= c_{1,0} n^0 1^n + c_{1,1} n^1 1^n + c_{1,2} n^2 1^n + c_{2,0} n^0 2^n + c_{2,1} n^1 2^n \\
&= c_{1,0} + c_{1,1} n + c_{1,2} n^2 + c_{2,0} 2^n + c_{2,1} n 2^n,
\end{aligned}
$$

onde $c_{i,j} \colon 1 \leq i \leq 2, 0 \leq j < m_i$ são determinados pelo sistema

$$
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & c_{1,0} + c_{1,1}0 + c_{1,2}0^2 + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0 \\
f(1) & = & c_{1,0} + c_{1,1}1 + c_{1,2}1^2 + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1 \\
f(2) & = & c_{1,0} + c_{1,1}2 + c_{1,2}2^2 + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2 \\
f(3) & = & c_{1,0} + c_{1,1}3 + c_{1,2}3^2 + c_{2,0}2^3 + c_{2,1}32^3 \\
f(4) & = & c_{1,0} + c_{1,1}4 + c_{1,2}4^2 + c_{2,0}2^4 + c_{2,1}42^4,
\end{array}
$$

ou seja,

$$
\begin{array}{rcl}
f(0) & = & c_{1,0} + c_{2,0} \\
f(1) & = & c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1} \\
f(2) & = & c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1} \\
f(3) & = & c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 8c_{2,0} + 24c_{2,1} \\
f(4) & = & c_{1,0} + 4c_{1,1} + 16c_{1,2} + 16c_{2,0} + 64c_{2,1}.
\end{array}
$$

cuja solução é

$$
\begin{array}{rcl}
c_{1,0} & = & 8f(0) - 24f(1) + 30f(2) - 16f(3) + 3f(4), \\
c_{1,1} & = & \dfrac{4f(0) - 20f(1) + 29f(2) - 16f(3) + 3f(4)}{2}, \\
c_{1,2} & = & \dfrac{4f(0) - 12f(1) + 13f(2) - 6f(3) + f(4)}{2}, \\
c_{2,0} & = & -7f(0) + 24f(1) - 30f(2) + 16f(3) - 3f(4), \\
c_{2,1} & = & \dfrac{2f(0) - 7f(1) + 9f(2) - 5f(3) + f(4)}{2}.
\end{array}
$$

A.6.3 Recorrências Lineares não Homogêneas

122$^{@}$. [default,ex:recorrencias-lineares-nao-homogeneas]
Resolva as seguintes recorrências.

(a) [default,ex:rec-arvore-binaria-altura-maxima]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X-1)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1.$$

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n-1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-1) = (X-1)^2$$

e então

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{11}n1^n = c_{10} + c_{11}n$$

onde c_{10}, e c_{11} são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{11}0, \\ f(1) &= c_{10} + c_{11}1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ f(0) + 1 &= c_{10} + c_{11}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_{10} &= 0, \\ c_{11} &= 1 + 0 = 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = c_{10} + c_{11}n = 0 + 1n = n.$$

Como ainda

$$0 = f(0)$$

então

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \in N.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve(characteristic_polynomial([1])*(X-1),
  verbose=sys.stdout,init=[(0,0),(1,1)])
characteristic polynomial: (X - 1)^2
roots and multiplicities: [(1, 2)]
generic solution: n |--> c_1_1*n + c_1_0
```

(b) [default,ex:rec-arvore-binaria-tamanho-maxima]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:
$f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é

$$(X - 2)G,$$

onde G é o PC de uma RLH satisfeita por

$$g(n) = 1.$$

Como g satisfaz a recorrência

$$g(n) = g(n - 1),$$

então g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1),$$

e daí, f satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)(X-2)$$

e então

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{20}2^n = c_{10} + c_{20}2^n$$

onde c_{10}, e c_{20} são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{20}2^0, \\ f(1) &= c_{10} + c_{20}2^1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10} + c_{20}, \\ 2f(0)+1 &= c_{10} + 2c_{20}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_{10} &= -c_{20}, \\ 1 &= -c_{20} + 2c_{20} = c_{20}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{10} = -1,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{10} + c_{20}2^n = -1 + 1 \times 2^n = 2^n - 1,$$

para todo $n > 0$.

Como ainda

$$2^0 - 1 = 0 = f(0),$$

então

$$f(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve(characteristic_polynomial([2])*(X-1),
  verbose=sys.stdout,init=[(0,0),(1,1)])
characteristic polynomial: (X - 2)*(X - 1)
roots and multiplicities: [(1, 1), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c20 + c10
particular solution: n |--> 2^n - 1
n |--> 2^n - 1
```

(c) [default,ex:rec-linearizacao-matrizes]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \textsf{se } n > 0 \end{cases}$$

Resposta:
$f(n)$ satisfaz uma $\textsf{RLnH}$ cujo $\textsf{PC}$ é

$$(X-1)G,$$

onde G é o $\textsf{PC}$ de uma $\textsf{RLH}$ satisfeita por

$$g(n) = n.$$

Como

$$n = 1n^1 1^n,$$

então g satisfaz uma $\textsf{RLH}$ cujo $\textsf{PC}$ é

$$G = (X-1)^2,$$

e f satisfaz uma $\textsf{RLH}$ cujo $\textsf{PC}$ é

$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3,$$

e

$$f(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$

onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ f(1) &= c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ f(2) &= c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ f(0) + 1 &= c_{10} + c_{11} + c_{12}, \\ f(1) + 2 &= c_{10} + 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{10}, \\ 1 &= c_{11} + c_{12}, \\ 3 &= 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$c_{12} = 1 - c_{11},$$

e

$$2c_{11} + 4(1 - c_{11}) = 3,$$

ou seja

$$-2c_{11} = -1,$$

e portanto,

$$c_{11} = \frac{1}{2},$$

e

$$c_{12} = 1 - c_{11} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

e portanto,

$$f(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

para todo $n > 0$.

Como ainda

$$\frac{0(0+1)}{2} = 0 = f(0),$$

então

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve(characteristic_polynomial([1])*(X-1)
  ^2,verbose=sys.stdout,init=[(0,0),(1,1),(2,3)])
characteristic polynomial: (X - 1)^3
roots and multiplicities: [(1, 3)]
generic solution: n |--> c12*n^2 + c11*n + c10
particular solution: n |--> 1/2*n^2 + 1/2*n
n |--> 1/2*n^2 + 1/2*n
```

(d) [default,ex:rlnh-2]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^2(X-2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0)+1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1)+2 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0}, \\ 4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -2, \\ c_{1,1} &= -1, \\ c_{2,0} &= 2, \end{aligned}$$

e portanto,

$f(n) = c_{1,0}+c_{1,1}n+c_{2,0}2^n = 22^n-n-2, = 2^{n+1}-n-2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: X=var('X')
sage: rsolve((X-1)**2*(X-2), init=[(0,0),(1,1)
  ,(2,4)], verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)^2*(X - 2)
roots and multiplicities: [(1, 2), (2, 1)]
generic solution: n |--> 2^n*c_2_0 + c_1_1*n +
  c_1_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 4)]
particular solution: n |--> 2*2^n - n - 2
n |--> 2*2^n - n - 2
```

(e) [default,ex:rlnh-n2]

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

Resposta:

```
sage: %attach lib/rsolve.py
rsolve((X-2)*(X-1)^3,verbose=sys.stdout,init=[(0,f0
  ),(1,2*f0+1^2),(2,2*(2*f0+1^2)+2^2),(3,2*(2*(2*f0
  +1^2)+2^2)+3^2)])
characteristic polynomial: (X - 2)*(X - 1)^3
roots and multiplicities: [(1, 3), (2, 1)]
generic solution: n |--> c12*n^2 + 2^n*c20 + c11*n
  + c10
initial conditions: [(0, f0), (1, 2*f0 + 1), (2, 4*
  f0 + 6), (3, 8*f0 + 21)]
```

```
particular solution: n |--> (f0 + 6)*2^n - n^2 - 4*
  n - 6
n |--> (f0 + 6)*2^n - n^2 - 4*n - 6
```

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n^2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^2 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{2+1} = (X-1)^3,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-2) = (X-1)^3(X-2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{1,2}n^2 1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1} + 0c_{1,2} + c_{2,0}2^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1} + 1c_{1,2} + c_{2,0}2^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + c_{2,0}2^2, \\ f(3) &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + c_{2,0}2^3, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2f(0)+1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + 2c_{2,0}, \\ 2f(1)+4 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 4c_{2,0}, \\ 2f(2)+9 &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 8c_{2,0}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\
2f(0) + 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + 2c_{2,0}, \\
4f(0) + 6 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 4c_{2,0}, \\
8f(0) + 21 &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 8c_{2,0}.
\end{aligned}
$$

Tomando como pivo $c_{2,0}$, temos

$$
\begin{aligned}
f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\
1 &= -c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2}, \\
6 &= -3c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \\
21 &= -7c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2},
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
c_{1,0} &= -6, \\
c_{1,1} &= -4, \\
c_{1,2} &= -1, \\
c_{2,0} &= f(0) - c_{1,0},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
f(n) &= c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2} + c_{2,0}2^n \\
&= (6 + f(0))2^n - 6 - 4n - n^2
\end{aligned}
$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

conferir (dm)

(f) [default,ex:rlnh-3f2+13n]

$$
f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}
$$

Resposta:

$$
f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}
$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve((X**2-3)*(X-1/3), init=[(0,1),(1,1),(2,3+1/9)]
characteristic polynomial: 1/3*(X^2 - 3)*(3*X - 1)
roots and multiplicities: [(-sqrt(3), 1), (sqrt(3), 1), (1/
generic solution: n |--> 3^(1/2*n)*c_2_0 + (1/3)^n*c_3_0 +
initial conditions: [(0, 1), (1, 1), (2, 28/9)]
particular solution: n |--> 1/468*3^(1/2*n)*(79*sqrt(3) + 2
n |--> 1/468*3^(1/2*n)*(79*sqrt(3) + 243) - 1/468*(-sqrt(3)
```

$$f(n) = c_{10}(\sqrt{3})^n + c_{20}(-\sqrt{3})^n + c_{30}(1/3)^n,$$

$$f(n) = \frac{1}{468}\left((79\sqrt{3}+243)(\sqrt{3})^n - (79\sqrt{3}-243)(-\sqrt{3})^n\right) - \frac{1}{26}(1/3)^n,$$

para todo n natural,

(g) [default,ex:rlnh-2f2+12n]

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Resposta:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve((X**2-2)*(X-1/2), init=[(0,1),(1,1),(2,2+1/4)]
characteristic polynomial: 1/2*(X^2 - 2)*(2*X - 1)
roots and multiplicities: [(-sqrt(2), 1), (sqrt(2), 1), (1/
generic solution: n |--> 2^(1/2*n)*c_2_0 + (1/2)^n*c_3_0 +
initial conditions: [(0, 1), (1, 1), (2, 9/4)]
particular solution: n |--> 1/56*2^(1/2*n)*(15*sqrt(2) + 32
n |--> 1/56*2^(1/2*n)*(15*sqrt(2) + 32) - 1/56*(-sqrt(2))^n
```

$$f(n) = c_{10}(\sqrt{2})^n + c_{20}(-\sqrt{2})^n + c_{30}(1/2)^n,$$

$$f(n) = \frac{1}{56}\left((15\sqrt{2}+32)(\sqrt{2})^n - (15\sqrt{2}-32)(-\sqrt{2})^n\right) - \frac{1}{7}(1/2)^n,$$

para todo n natural,

(h) [default,ex:rlnh+f1+2n-1]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Resposta: resolver - similar a Ex. 122d

(i) [default,ex:rlnh+2f1+2n-1]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Resposta: resolver - similar a Ex. 122d

(j) [default,ex:rlnh+f1+n2n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

Resposta: resolver - similar a Ex. 122e

$$g(n) = g(n-1) + 2n - 1, \text{ se } n \geq 1$$

(k) [default,ex:fibonacci+1]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:
Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X-1)(X^2 - X - 1),$$

e cujas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Pelo Corolário 36, temos

$$\begin{aligned} f(n) &= c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{3,0}r_3^n \\ &= c_{1,0}1^n + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \end{aligned}$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0, \\ f(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1, \\ f(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\ f(0)+f(1)+1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \\
2 &= c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

cuja solução é

$$
\begin{aligned}
c_{1,0} &= -1, \\
c_{2,0} &= \frac{5-3\sqrt{5}}{10}, \\
c_{3,0} &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
f(n) = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.
$$

(l) [default,ex:rlnh+7f1-12f2+2n]

$$
f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}
$$

Resposta:

```
sage: X=var("X")
sage: rsolve((X-3)*(X-4)*(X-1)^2, init=[(0,f0),(1,
  f1),(2,f2),(3,f3)], verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)^2*(X - 3)*(X -
  4)
roots and multiplicities: [(1, 2), (3, 1), (4, 1)]
generic solution: n |--> 3^n*c_2_0 + 4^n*c_3_0 +
  c_1_1*n + c_1_0
```

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 7, \\
a_2 &= -12, \\
g(n) &= 2n, \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Como

$$g(n) = g(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-1)^2$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - 7X + 12) = (X-1)^2(X-3)(X-4),$$

e, portanto, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{3,0}r_3^n + c_{3,1}nr_3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0}, c_{3,1}\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{3,0}r_3^a + c_{3,1}ar_3^a, 0 \leq a < 3,$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0 + c_{3,1}0r_3^0, \\ f(1) & = & c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1 + c_{3,1}1r_3^0, \\ f(2) & = & c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2 + c_{3,1}2r_3^0, \\ f(3) & = & c_{1,0}r_1^3 + c_{2,0}r_2^3 + c_{3,0}r_3^3 + c_{3,1}3r_3^0. \end{array}$$

Como

$$f(2) = ??$$

fica

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & ??, \\ f(1) & = & ??, \\ f(0) + f(1) + 2.2 & = & ??, \\ f(1) + f(2) + 2.3 & = & ??, \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & ??, \\ f(1) & = & ??, \\ f(0) + f(1) + 2.2 & = & ??, \\ f(1) + f(2) + 2.3 & = & ??, \end{array}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} r_1 &= 3, \\ r_2 &= 4, \\ r_3 &= 1, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} 1 &= ?? \\ 2 &= ?? \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -\frac{7}{2}, \\ c_{2,0} &= \frac{23}{9}, \\ c_{3,0} &= \frac{17}{18}, \\ c_{3,1} &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = -\frac{7}{2}3^n + \frac{23}{9}4^n + \frac{17}{18} + \frac{1}{3}n$$

(m) [default,ex:rlnh+5f1-6f2+n3n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta: Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 5, \\ a_2 &= -6, \\ g(n) &= n.3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = n.3^n, \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-3)^2$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - 5X + 6) = (X-3)^2(X-2)(X-3) = (X-2)(X-3)^3,$$

e, portanto, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{2,1}nr_2^n + c_{2,2}n^2r_2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{2,2}\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{2,1}nr_2^a + c_{2,2}n^2 2^a, 0 \leq a < 3,$$

e

$$\begin{aligned} f(2) &= 5f(1) - 6f(0) + 2.3^2 = 23, \\ f(3) &= 5f(2) - 6f(1) + 3.3^3 = 190. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & c_{1,0}2^0 + c_{2,0}3^0 + c_{2,1}03^0 + c_{2,2}0^23^0, \\ f(1) & = & c_{1,0}2^1 + c_{2,0}3^1 + c_{2,1}13^1 + c_{2,2}1^23^1, \\ f(2) & = & c_{1,0}2^2 + c_{2,0}3^2 + c_{2,1}23^2 + c_{2,2}2^23^2, \\ f(3) & = & c_{1,0}2^3 + c_{2,0}3^3 + c_{2,1}33^3 + c_{2,2}3^23^3. \end{array}$$

ou seja ???

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 & = & 2c_{1,0} + 3c_{2,0} + 3c_{2,1} + 3c_{2,2}, \\ 23 & = & 4c_{1,0} + 9c_{2,0} + 18c_{2,1} + 36c_{2,2}, \\ 190 & = & 8c_{1,0} + 27c_{2,0} + 81c_{2,1} + 243c_{2,2}. \end{array}$$

cuja solução é

$$\begin{array}{cc} c_{1,0} = -10, & c_{2,0} = +10, \\ c_{2,1} = -\dfrac{9}{2}, & c_{2,2} = \frac{3}{2}, \end{array}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} f(n) &= -10.2^n + 10.3^n - \frac{9}{2}n3^n + \frac{3}{2}n^23^n \\ &= -10.2^n + 10.3^n - \frac{n3^{n+2}}{2} + \frac{n^23^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

```
sage: X=var("X")
sage: rsolve((X-2)*(X-3)^3, init=[(0,0),(1,1)
  ,(2,23),(3,190)], verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 2)*(X - 3)^3
roots and multiplicities: [(2, 1), (3, 3)]
generic solution: n |--> 3^n*c_2_2*n^2 + 3^n*c_2_1*
  n + 2^n*c_1_0 + 3^n*c_2_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 23), (3,
  190)]
```

(n) [default,ex:rlnh+7f1-10f2+n5n]

$$f(n) = \begin{cases} 5n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:
Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 7, \\ a_2 &= -10, \\ g(n) &= n.5^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = n.5^n, \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-5)^2$$

Pelo Teorema 37 temos que f satisfaz uma RLnH cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - 7X + 10) = (X-2)^2(X-5)(X-5)^2 = (X-2)(X-5)^3,$$

e, portanto, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{2,1}nr_2^n + c_{2,2}n^2r_2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $r_1 = 2$, $r_2 = 5$, $\{c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1}, c_{2,2}\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{2,1}nr_2^a + c_{2,2}n^2 2^a, 0 \leq a < 3,$$

e

$$f(2) = 7f(1) - 10f(0) + 2.5^2 = 7.1 - 10.0 + 50 = 57,$$
$$f(3) = 7f(2) - 10f(1) + 3.5^3 = 7.57 - 10.1 + 3.125 = 764.$$

Então,

$$\begin{array}{rcl} f(0) &=& c_{1,0}2^0 + c_{2,0}5^0 + c_{2,1}05^0 + c_{2,2}0^25^0, \\ f(1) &=& c_{1,0}2^1 + c_{2,0}5^1 + c_{2,1}15^1 + c_{2,2}1^25^1, \\ f(2) &=& c_{1,0}2^2 + c_{2,0}5^2 + c_{2,1}25^2 + c_{2,2}2^25^2, \\ f(3) &=& c_{1,0}2^3 + c_{2,0}5^3 + c_{2,1}35^3 + c_{2,2}3^25^3. \end{array}$$

ou seja

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 1 &=& 2c_{1,0} + 5c_{2,0} + 5c_{2,1} + 5c_{2,2}, \\ 57 &=& 4c_{1,0} + 25c_{2,0} + 50c_{2,1} + 100c_{2,2}, \\ 764 &=& 8c_{1,0} + 125c_{2,0} + 375c_{2,1} + 1125c_{2,2}. \end{array}$$

cuja solução é

$$c_{1,0} = +\frac{16}{27}, \quad c_{2,0} = +\tfrac{16}{27},$$
$$c_{2,1} = -\frac{5}{18}, \qquad c_{2,2} = \tfrac{5}{6},$$

e portanto,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{16}{27}.2^n - \frac{16}{27}.5^n - \frac{5}{18}n5^n + \frac{5}{6}n^25^n \\ &= \frac{16}{27}.2^n - \frac{16}{27}.5^n - \frac{n5^{n+1}}{18} + \frac{n^25^{n+1}}{6} \end{aligned}$$

```
sage: var('X')
sage: rsolve((X**2-7*X+10)*(X-5)**2, init=[(0,0)
  ,(1,1),(2,57),(3,764)], verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X^2 - 7*X + 10)*(X - 5)
  ^2
roots and multiplicities: [(5, 3), (2, 1)]
generic solution: n |--> 5^n*c_1_2*n^2 + 5^n*c_1_1*
  n + 5^n*c_1_0 + 2^n*c_2_0
```

```
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 57), (3,
  764)]
linear system: [0 == c_1_0 + c_2_0, 1 == 5*c_1_0 +
  5*c_1_1 + 5*c_1_2 + 2*c_2_0, 57 == 25*c_1_0 + 50*
  c_1_1 + 100*c_1_2 + 4*c_2_0, 764 == 125*c_1_0 +
  375*c_1_1 + 1125*c_1_2 + 8*c_2_0]
particular solution: n |--> 5/6*5^n*n^2 - 5/18*5^n*
  n - 16/27*5^n + 16/27*2^n
n |--> 5/6*5^n*n^2 - 5/18*5^n*n - 16/27*5^n +
  16/27*2^n
```

(o) [default,ex:rlnh+8f1-15f2+n3n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta: Resolver e acertar $f(0)$ e $f(1)$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: var('X')
sage: rsolve((X**2-8*X+15)*(X-3)**2, init=[(0,0),(1,??),(2
```

(p) [default,ex:rlnh+5f1-6f2+n5n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Resolver

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: var('X')
sage: rsolve((X**2-5*X+6)*(X-5)**2, init=[(0,0),(1,??),(2,
```

(q) [default,ex:rlnh+7f1-10f2+n3n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Resolver

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: var('X')
sage: rsolve((X**2-7*X+10)*(X-3)**2, init=[(0,0),(1,??),(2
```

(r) [default,ex:rlnh+8f1-15f2+n2n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 8f(n-1) - 15f(n-2) + n.2^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Resolver

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: var('X')
sage: rsolve((X**2-8*X+15)*(X-3)**2, init=[(0,0),(1,??),(2
```

(s) [default,ex:rlnh+f1+f2+6n+3]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 6n + 3, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 6n + 3, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n = 0, \\ g(n-1) + 6, & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X-1)^2$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X-1)^2(X^2 - X - 1),$$

e, portanto, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}r_1^n + c_{1,1}nr_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{3,0}r_3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}, c_{3,0}\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = c_{1,0}r_1^a + c_{1,1}nr_1^a + c_{2,0}r_2^a + c_{3,0}r_3^a, 0 \leq a < 4,$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & c_{1,0}r_1^0 + c_{1,1}0r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\
f(1) & = & c_{1,0}r_1^1 + c_{1,1}1r_1^0 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\
f(2) & = & c_{1,0}r_1^2 + c_{1,1}2r_1^0 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \\
f(3) & = & c_{1,0}r_1^3 + c_{1,1}3r_1^0 + c_{2,0}r_2^3 + c_{3,0}r_3^3.
\end{array}$$

Como

$$f(2) = f(1) + f(0) + g(2) = f(1) + f(0) + 6.2 + 3,$$
$$f(3) = f(2) + f(1) + g(3) = f(2) + f(1) + 6.3 + 3,$$

fica

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & c_{1,0}r_1^0 + c_{1,1}0r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\
f(1) & = & c_{1,0}r_1^1 + c_{1,1}1r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\
f(1) + f(0) + 15 & = & c_{1,0}r_1^2 + c_{1,1}2r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \\
f(2) + f(1) + 21 & = & c_{1,0}r_1^3 + c_{1,1}3r_1^3 + c_{2,0}r_2^3 + c_{3,0}r_3^3,
\end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl}
f(0) & = & c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\
f(1) & = & c_{1,0}r_1 + c_{1,1}r_1 + c_{2,0}r_2 + c_{3,0}r_3, \\
f(1) + f(0) + 15 & = & c_{1,0}r_1^2 + 2c_{1,1}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2, \\
f(2) + f(1) + 21 & = & c_{1,0}r_1^3 + 3c_{1,1}r_1^3 + c_{2,0}r_2^3 + c_{3,0}r_3^3.
\end{array}$$

Fazendo

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{2,0}\frac{1-\sqrt{5}}{2} + c_{3,0}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ 16 &= c_{1,0} + 2c_{1,0} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2, \\ 38 &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + c_{2,0}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 + c_{3,0}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= -21, \\ c_{1,1} &= -6, \\ c_{2,0} &= \frac{21-7\sqrt{5}}{2}, \\ c_{3,0} &= \frac{21+7\sqrt{5}}{2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{21-7\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{21+7\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 21 - 6n.$$

(t) [default,ex:rlnh+5f1-4f2+2n5n]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n.5^n + 2, & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Resolver

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 5, \\
a_2 &= -4, \\
g(n) &= 2n.5^n + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

123*. [default,ex:cantor]

O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$
\begin{array}{lllllll}
(0,0) & & & & & & \\
(0,1) & (1,0) & & & & & \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) & & & & \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) & & & \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) & & \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) & \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}
$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

  i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

  ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

  i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

  ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

Resposta:

(a) i.

$$l(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ l(n-1) + 1, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

ii.

$$l(n) = n, \text{ para todo } n \text{ natural.}$$

(b) Supondo que $t(n)$ seja o número de pares até a n-ésima linha, exclusive, temos

i.

$$t(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ t(n-1) + l(n), & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

ii.

$$t(n) = \sum_{k=0}^{n} l(k) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(c)

$$p(i,j) = t(i) + (j) = \frac{i(i+1)}{2} + j$$

124*. [default,ex:algoritmo-fibonacci]

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$, o algoritmo do Exercício 84.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

Resposta:

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1 \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = c_{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_{20} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - 1,$$

onde

$$c_{10} = \frac{1}{10} \left(5 + \sqrt{5} \right) \quad \text{e} \quad c_{20} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

125*. [default,ex:cubo]

Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a)

$$P(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2P(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(n) &= 2P(n-1) \\ &= 2^2 P(n-2) \\ &= 2^3 P(n-3) \\ &= 2^4 P(n-4) \\ &\vdots \\ &= 2^u P(n-u), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n-k \leq 0\} \\ &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n \end{aligned}$$

e, logo,

$$P(n) = 2^n P(n-n) = 2^n.$$

(c)

$$L(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2L(n-1) + P(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(d)

$$\begin{aligned} L(n) &= \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2L(n-1) + P(n-1), & \text{se } n > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2L(n-1) + 2^{n-1}, & \text{se } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Iterando L, temos

...

e, logo,

$$L(n) = 2^{n-1}L(n-n) + n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

A.6.4 Somatórios

126@. [default,ex:sum-i]

Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

Resposta:

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1, 1, verbose=sys.stdout)
```

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

onde

$$g(n) = n,$$

e

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos do Corolário 38 que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-1)^{1+1} = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2,$$

onde $(c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,2})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{1,1}0^1 + c_{1,2}0^2, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{1,1}1^1 + c_{1,2}1^2, \\ s(2) &= c_{1,0} + c_{1,1}2^1 + c_{1,2}2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0}, \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 1 &= c_{1,1} + c_{1,2}, \\ 3 &= 2c_{1,1} + 4c_{1,2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 0, \\ c_{1,1} &= \frac{1}{2}, \\ c_{1,2} &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 = c_{1,0} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$127^{@}$. [default,ex:recorrencia-pg-rlh]

Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[18] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Resposta:

(a) $f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$

(b) Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$ e daí,

$$f(n) = c_{1,0}q^n,$$

onde $c_{1,0}$ é dado por

$$f(0) = c_{1,0}q^0,$$

isto é

$$c_{1,0} = f(0),$$

e, portanto,

$$f(n) = f(0)q^n$$

(c) Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-q)$. e daí (C. 36),

$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{2,0}q^n = c_{1,0} + c_{2,0}q^n,$$

[18] cfr. Exercício 109

onde $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^0 = c_{1,0} + c_{2,0}, \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^1 = c_{1,0} + c_{2,0}q, \end{aligned}$$

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

e portanto,

$$c_{2,0} = -c_{1,0},$$

e

$$f(0) = c_{1,0} + c_{2,0}q = c_{1,0} - c_{1,0}q,$$

e portanto,

$$c_{1,0} = f(0)/(1-q),$$

e

$$c_{2,0} = -c_{1,0} = -f(0)/(1-q)$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= c_{1,0} + c_{2,0}q^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\ &= f(0)\frac{q^n-1}{q-1}. \end{aligned}$$

128$^{@}$. [default,ex:recorrencia-pa-rlnh]

Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[19] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

[19] cfr. Exercício 106

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Resposta:

(a) $f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1.$

(b) Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como
$$g(n) = rn^0 1^n,$$
temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é
$$G = (X-1),$$
e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X-1) = (X-1)^2,$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{1,1}n^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,
$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}\}$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0} + 0c_{1,1}, \\ f(1) &= c_{1,0} + 1c_{1,1}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= c_{1,0}, \\ f(0) + r &= c_{1,0} + c_{1,1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_{1,1} = f(0) + r - c_{1,0} = f(0) + r - f(0) = r,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n = f(0) + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Como
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$
e $f(n)$ satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X-1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é
$$(X-1)(X-1)^2 = (X-1)^3.$$
e daí (C. 36),
$$s(n) = c_{10}1^n + c_{11}n^1 1^n + c_{12}n^2 1^n = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2,$$
onde c_{10}, c_{11} e c_{12} são dados por
$$\begin{aligned} s(0) &= c_{10} + c_{11}0 + c_{12}0^2, \\ s(1) &= c_{10} + c_{11}1 + c_{12}1^2, \\ s(2) &= c_{10} + c_{11}2 + c_{12}2^2, \end{aligned}$$
ou seja,
$$0 = c_{10},$$
e
$$\begin{aligned} f(0) &= c_{11} + c_{12}, \\ f(0) + f(0) + r &= 2c_{11} + 4c_{12}, \end{aligned}$$
ou seja,
$$c_{1,2} = f(0) - c_{1,1}$$
e
$$2f(0) + r = 2c_{1,1} + 4(f(0) - c_{1,1}) = -2c_{1,1} + 4f(0),$$
ou seja,
$$c_{1,1} = (2f(0) - r)/2$$
e
$$c_{1,2} = f(0) - c_{1,1} = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$
e
$$s(n) = c_{10} + c_{11}n + c_{12}n^2 = 0 + \frac{2(f(0)-r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2-n)}{2}$$
$$= f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r.$$
Portanto,
$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0.$$

129@. [default,ex:sum-i2i]

Dê uma expressão[20] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Resposta:

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1, 2, verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 2)^2*(X - 1)
roots and multiplicities: [(1, 1), (2, 2)]
generic solution: n |--> 2^n*c21*n + 2^n*c20 + c10
initial conditions: [(0, 0), (1, 2), (2, 10)]
particular solution: n |--> 2*2^n*n - 2*2^n + 2
n |--> 2*2^n*n - 2*2^n + 2
```

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^1 2^n,$$

e daí, do Corolário 38 temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X-2)^{1+1} = (X-2)^2,$$

e daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}n^0 1^n + c_{2,0}n^0 2^n + c_{2,1}n^1 2^n = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n$$

onde $(c_{1,0}, c_{2,0}, c_{2,1})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned}
s(0) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^0 + c_{2,1}02^0, \\
s(1) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^1 + c_{2,1}12^1, \\
s(2) &= c_{1,0} + c_{2,0}2^2 + c_{2,1}22^2,
\end{aligned}$$

[20]cfr. Exercício 46

isto é,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}(1) + c_{2,1}(0)1, \\ 0 + 12^1 &= c_{1,0} + c_{2,0}(2) + c_{2,1}(1)2, \\ 0 + 12^1 + 22^2 &= c_{1,0} + c_{2,0}(4) + c_{2,1}2(4), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} + c_{2,0}, \\ 2 &= c_{1,0} + 2c_{2,0} + 2c_{2,1}, \\ 10 &= c_{1,0} + 4c_{2,0} + 8c_{2,1}, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} c_{1,0} &= 2, \\ c_{2,0} &= -2, \\ c_{2,1} &= 2. \end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = c_{1,0} + c_{2,0}2^n + c_{2,1}n2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n = 2^{n+1}(n-1) + 2.$$

130*. [default,ex:somatorios]

Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

(f)

$$\sum_{i=0}^{n} i256^i.$$

(g)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

(h)

$$\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1}.$$

(i)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

(j)

$$\sum_{i=0}^{n} i(2^i - i).$$

Resposta:

(a) conferir respostas via sage com as respostas humanas

(b) colocar todas as soluções de RLnHs num mesmo formato

(a)

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(2, 1, verbose=sys.stdout)
```

Usando a notação do Corolário 40 temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

com

$$g(n) = n^2.$$

Como
$$g(n) = n^2 1^n$$
podemos concluir que a função f satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)^3$.
Pelo Corolário 40, a função
$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} n^2,$$
satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é
$$(X-1)^3(X-1) = (X-1)^4.$$
Pelo Teorema 36, temos
$$s(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n^1 1^n + c_{1,2}n^2 1^n + c_{1,3}n^3 1^n = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{1,2}n^2 + c_{1,3}n^3,$$
onde
$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0} \\ s(1) &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\ s(2) &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\ s(3) &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3}. \end{aligned}$$
Da definição de s temos
$$\begin{aligned} s(0) &= \sum_{i=0}^{0} i^2 = 0 \\ s(1) &= \sum_{i=0}^{1} i^2 = 0 + 1 = 1 \\ s(2) &= \sum_{i=0}^{2} i^2 = 0 + 1 + 4 = 5 \\ s(3) &= \sum_{i=0}^{3} i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 = 14, \end{aligned}$$
então temos
$$\begin{aligned} 0 &= c_{1,0} \\ 1 &= c_{1,0} + c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\ 5 &= c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\ 14 &= c_{1,0} + 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
1 &= c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} \\
5 &= 2c_{1,1} + 4c_{1,2} + 8c_{1,3} \\
14 &= 3c_{1,1} + 9c_{1,2} + 27c_{1,3},
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= \frac{1}{6} \\
c_{1,2} &= \frac{1}{2} \\
c_{1,3} &= \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
s(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2 &= \frac{n}{6}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} \\
&= \frac{2n(n^2+\frac{3}{2}n+\frac{1}{2})}{6} = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

(b)

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(3, 1, verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)^5
roots and multiplicities: [(1, 5)]
```

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

(c)

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(2, 1, verbose=sys.stdout)-ssolve(1, 1,
   verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)^4
roots and multiplicities: [(1, 4)]
generic solution: n |--> c13*n^3 + c12*n^2 + c11*n
  + c10
initial conditions: [(0, 0), (1, 1), (2, 5), (3,
  14)]
```

```
particular solution: n |--> 1/3*n^3 + 1/2*n^2 +
  1/6*n
characteristic polynomial: (X - 1)^3
roots and multiplicities: [(1, 3)]
generic solution: n |--> c12*n^2 + c11*n + c10
```

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i(i-1) &= \sum_{i=0}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i \\ &= \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) - \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) \\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \\ &= \frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

(d)

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1, 1/2, verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: 1/4*(X - 1)*(2*X - 1)^2
roots and multiplicities: [(1/2, 2), (1, 1)]
```

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \left(\frac{n+2}{2^n}\right).$$

(e)

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(2, 3, verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)*(X - 3)^3
roots and multiplicities: [(1, 1), (3, 3)]
generic solution: n |--> 3^n*c_2_2*n^2 + 3^n*c_2_1*
  n + 3^n*c_2_0 + c_1_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 3), (2, 39), (3,
  282)]
particular solution: n |--> 3/2*3^n*n^2 - 3/2*3^n*n
   + 3/2*3^n - 3/2
n |--> 3/2*3^n*n^2 - 3/2*3^n*n + 3/2*3^n - 3/2
```

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i = \frac{3}{2}\left(3^n\left(n^2 - n + 1\right) - 1\right).$$

(f)

$$\begin{aligned}\frac{256}{255}n256^n - \frac{256}{65025}256^n + \frac{256}{65025} \\ = \frac{n256^{n+1}}{255}\left(1 - \left(\frac{1}{255n} - \frac{1}{256^n \times 255n}\right)\right) \\ = \frac{n2^{8(n+1)}}{255}(1 - \varepsilon(n))\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{255n} + \frac{1}{2^{8n} \times 255n}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1,256,verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 256)^2*(X - 1)
roots and multiplicities: [(1, 1), (256, 2)]
generic solution: n |--> 256^n*c21*n + 256^n*c20 +
  c10
initial conditions: [(0, 0), (1, 256), (2, 131328)]
particular solution: n |--> 256/255*256^n*n -
  256/65025*256^n + 256/65025
n |--> 256/255*256^n*n - 256/65025*256^n +
  256/65025
```

(g) resolver

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1,??,verbose=sys.stdout)
```

(h) resolver

$$\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: (1/2)*ssolve(1,2,verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X - 1)*(X - 2)^2
roots and multiplicities: [(1, 1), (2, 2)]
generic solution: n |--> 2^n*c_2_1*n + 2^n*c_2_0 + c_1_0
initial conditions: [(0, 0), (1, 2), (2, 10)]
linear system: [0 == c_1_0 + c_2_0, 2 == c_1_0 + 2*c_2_0 +
particular solution: n |--> 2*2^n*n - 2*2^n + 2
n |--> 2^n*n - 2^n + 1
```

(i) resolver

$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1,??,verbose=sys.stdout)
```

(j) resolver

$$\sum_{i=0}^{n} i(2^i-i).$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: ssolve(1,??,verbose=sys.stdout)
```

131*. [default,ex:busca-binaria]

A *média*[21] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[22]

$$\begin{aligned}\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots \\ + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

[21] Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[22] Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[23] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

Resposta:

Temos

$$n\mu(n) = s(n) + (l(n) + 1)(n - t(n)),$$

onde

$$\begin{aligned} l(n) &= \lfloor \lg n \rfloor, \\ s(n) &= \sum_{i=1}^{l(n)} i2^{i-1}, \\ t(n) &= \sum_{i=0}^{l(n)-1} 2^i. \end{aligned}$$

Do Exercício 46 temos

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

de forma que

$$s(n) = \sum_{i=1}^{l(n)} i2^{i-1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l(n)} i2^i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l(n)} i2^i = \frac{1}{2}\left((l(n)-1)2^{l(n)+1} + 2\right) = (l(n)-1)2^{l(n)}+1$$

Do Exercício 57 temos

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

de forma que

$$t(n) = \sum_{i=0}^{l(n)-1} 2^i = 2^{l(n)-1+1} - 1 = 2^{l(n)} - 1.$$

[23] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 57 e 46

Então,

$$
\begin{aligned}
n\mu(n) &= s(n) + (l(n)+1)(n - t(n)) \\
&= (l(n)-1)2^{l(n)} + 1 + (l(n)+1)(n - (2^{l(n)} - 1)) \\
&= l(n)2^{l(n)} - 2^{l(n)} + 1 + (l(n)+1)(n - 2^{l(n)} + 1) \\
&= l(n)2^{l(n)} - 2^{l(n)} + 1 + nl(n) - l(n)2^{l(n)} + l(n) + n - 2^{l(n)} + 1 \\
&= nl(n) + n - 2^{l(n)+1} + l(n) + 2,
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\begin{aligned}
\mu(n) &= l(n) + 1 - \frac{2^{l(n)+1}}{n} + \frac{l(n)}{n} + \frac{2}{n} \\
&= l(n)\left(1 + \frac{1}{l(n)} - \frac{2^{l(n)+1}}{nl(n)} + \frac{1}{n} + \frac{2}{nl(n)}\right) \\
&= l(n)\left(1 - \left(\frac{2^{l(n)+1} - 2}{nl(n)} - \frac{1}{l(n)} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lfloor \lg n \rfloor \left(1 - \left(\frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{\lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&\approx \lfloor \lg n \rfloor .
\end{aligned}
$$

Observe que se n é uma potência de 2, então

$$
\begin{aligned}
\mu(n) &= \lfloor \lg n \rfloor \left(1 - \left(\frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{\lfloor \lg n \rfloor} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lg n \left(1 - \left(\frac{2^{\lg n + 1} - 2}{n \lg n} - \frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lg n \left(1 - \left(\frac{2n - 2}{n \lg n} - \frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lg n \left(1 - \left(\frac{2}{\lg n} - \frac{2}{n \lg n} - \frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \lg n \left(1 - \left(\frac{1}{\lg n} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n \lg n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

132*. [default,ex:soma-fibonacci]

Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[24].

Resposta:

```
sage: %attach lib/rsolve.py
var('X')
sage: rsolve((X-1)*(X**2-X-1), init=[(0,0),(1,1)
  ,(2,2)],verbose=sys.stdout)
characteristic polynomial: (X^2 - X - 1)*(X - 1)
```

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

onde

$$g(n) = F(n),$$

e

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ F(n-1) + F(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

isto é,

$$g(n) = g(n-1) + g(n-2)$$

temos que a função g satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X^2 - X - 1)$.

e pelo Corolário 40, a função

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(n),$$

satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é

$$(X-1)(X^2 - X - 1).$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = c_{1,0}r_1^n + c_{2,0}r_2^n + c_{3,0}r_3^n,$$

onde $(c_{1,0}, c_{2,0}, c_{3,0})$ é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= c_{1,0}r_1^0 + c_{2,0}r_2^0 + c_{3,0}r_3^0, \\ s(1) &= c_{1,0}r_1^1 + c_{2,0}r_2^1 + c_{3,0}r_3^1, \\ s(2) &= c_{1,0}r_1^2 + c_{2,0}r_2^2 + c_{3,0}r_3^2. \end{aligned}$$

[24]Veja o Exercício 51.

Como

$$\begin{aligned}
s(0) &= F(0) = 0, \\
s(1) &= s(0) + F(1) = 0 + F(1) = 1, \\
s(2) &= s(1) + F(2) = 1 + F(2) = 1 + (F(0) + F(1)) = 2,
\end{aligned}$$

fica

$$\begin{aligned}
s(0) &= c_{1,0} r_1^0 + c_{2,0} r_2^0 + c_{3,0} r_3^0, \\
s(1) &= c_{1,0} r_1^1 + c_{2,0} r_2^1 + c_{3,0} r_3^1, \\
s(2) &= c_{1,0} r_1^2 + c_{2,0} r_2^2 + c_{3,0} r_3^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\
1 &= c_{1,0} r_1 + c_{2,0} r_2 + c_{3,0} r_3, \\
2 &= c_{1,0} r_1^2 + c_{2,0} r_2^2 + c_{3,0} r_3^2,
\end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1, \\
r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\
r_3 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2},
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
0 &= c_{1,0} + c_{2,0} + c_{3,0}, \\
1 &= c_{1,0} + c_{2,0} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + c_{3,0} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \\
2 &= c_{1,0} + c_{2,0} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_{3,0} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2,
\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned}
c_{1,0} &= -1, \\
c_{2,0} &= \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}, \\
c_{3,0} &= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10},
\end{aligned}$$

e portanto,

$$s(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1.$$

conferir(dm)

A.6.5 Algumas Aplicações

133@. [default,ex:linearizacao-matrizes]

Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n) - 1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i, j]$?

completar com itens pedindo código em C implementando esta idéia.

Resposta:

(a)

$$N(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ N(n-1) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) Esta recorrência é a mesma do Exercício 122c e sua solução é

$$N(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Seja $p(i,j)$ a posição de v ocupada por $M[i,j]$, isto é

$$v[p(i,j)] = M[i,j], \text{ para todo } 1 \le i,j \le n.$$

Claramente

$$p(i,i) = N(i) - 1, \text{ para todo } 1 \le i \le n,$$

e, em geral,

$$p(i,j) = p(i-1,i-1) + j, \text{ para todo } 1 \le j \le i \le n,$$

e portanto,

$$\begin{aligned} p(i,j) &= p(i-1,i-1) + j \\ &= N(i-1) - 1 + j \\ &= \frac{(i-1)((i-1)+1)}{2} + j - 1 \\ &= \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, \end{aligned}$$

e portanto,

$$p(i,j) = \frac{i(i-1)}{2} + j - 1,$$

para todo $1 \le j \le i \le n$.
Para $p^{-1}(n)$, seja i o único inteiro tal que

$$p(i-1,i-1) < n \le p(i,i).$$

Então o índice n representa uma entrada da linha i da matriz M, na coluna

$$j = n - p(i-1,i-1).$$

De

$$p(i-1,i-1) < n$$

temos

$$i^2 - i - 2 - 2n < 0,$$

ou seja

$$\frac{1 - \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2} < i < \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2}.$$

De

$$n \leq p(i,i)$$

temos

$$i^2 + i - 2 - 2n \geq 0,$$

ou seja

$$i \leq \frac{-1 - \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2}$$

ou

$$i \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2}.$$

Mas como $i > 0$, então,

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2} \leq i < \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2} + 1,$$

ou seja,

$$i = \left\lceil \frac{-1 + \sqrt{1 + 8(n+1)}}{2} \right\rceil$$

e

$$j = n - p(i-1, i-1)$$

134$^{@}$. [default,ex:altura-arvore]

Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \textsf{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \textsf{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) Da definição de $h^+(n)$ temos

$$h^+(n) = \max\{h(T) \mid |T| = n\}.$$

Então,

$$h(T) \leq h^+(|T|), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Para todo $n > 0$, temos

$$\begin{aligned}
h^+(n) &= \max\{h(T) \mid |T| = n\} \\
&= \max\{\max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1 \mid |T| = n\} \\
&= \max\{1 + \max\{h(E(T)), h(D(T))\} \mid |T| = n\} \\
&= 1 + \max\{h(E(T)), h(D(T)) \mid |T| = n\} \\
&= 1 + \max\{h(T) \mid |T| < n\} \\
&= 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\}.
\end{aligned}$$

Como h^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = h^+(n-1),$$

e daí,

$$h^+(n) = 1 + \max\left\{h^+(k) \mid k < n\right\} = 1 + h^+(n-1),$$

ou seja

$$h^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1 + h^+(n-1), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b) Esta é a mesma recorrência do Exercício 122a e sua solução é

$$h^+(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

135$^@$. [default,ex:nos-arvore]

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[25] de altura n.

[25] Veja o Exercício 134.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) Da definição de $t^+(n)$ temos

$$t^+(n) = \max\{|T| \mid h(T) = n\}.$$

Então

$$|T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B},$$

e portanto,

$$h(T) \leq |T| \leq t^+(h(T)), \text{ para todo } T \in \mathcal{B}.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} &= \max\{|T| + |T| \mid h(T) < n\}\\ &= \max\{2|T| \mid h(T) < n\}\\ &= 2\max\{|T| \mid h(T) < n\}\\ &= 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\}.\end{aligned}$$

Como t^+ é uma função crescente, então

$$\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = t^+(n-1),$$

e daí,

$$\max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} = 2\max\left\{t^+(k) \mid k < n\right\} = 2t^+(n-1).$$

e

$$\begin{aligned}t^+(n) &= \max\{|T| \mid h(T) = n\}\\ &= \max\{|E(T)| + |D(T))| + 1 \mid h(T) = n\}\\ &= \max\{|E(T)| + |D(T))| \mid h(T) = n\} + 1\\ &= 1 + 2t^+(n-1).\end{aligned}$$

Então

$$t^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0,\\ 2t^+(n-1) + 1, & \text{se } n > 0.\end{cases}$$

(b) Esta é a mesma recorrência do Exercício 122b e sua solução é

$$t^+(n) = 2^n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

136@. [default,ex:avl]

Seja AVL o conjunto das árvores binárias[26] T satisfazendo

$$\lambda \in \text{AVL e } E(T) \in \text{AVL e } D(T) \in \text{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

Resposta:

(a) Da definição temos

$$t^-(n) = \min \{|T| \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n\}.$$

Como

$$\begin{aligned} t^-(n) = &\ \min \{|T| \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n\} \\ = &\ \min \{|E(T)| + |D(T)| + 1 \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n\} \\ = &\ 1 + \min \{|E(T)| + |D(T)| \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n\} \\ = &\ 1 + \min \{|T| \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n - 1\} \\ &\ + \min \{|T| \mid T \in \text{AVL e } h(T) = n - 2\} \\ = &\ 1 + t^-(n-1) + t^-(n-2), \end{aligned}$$

então

$$t^-(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ t^-(n-1) + t^-(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) t^- satisfaz uma RLnH cuja solução é (Ex. 122k)

$$t^-(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

[26] Veja o Exercício 134.

137[@]. [default,ex:quicksort]

Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resposta:

Com a notação usual temos

$$\begin{aligned} h(n) &= n-1, \\ n_0 &= 2, \\ m(n) &= \frac{n+1}{n}, \text{ e} \\ s(n) &= \frac{2(n-1)}{n}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$h^k(n) = n-k,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$n-k < 2,$$

isto é

$$k > n-2,$$

e consequentemente,

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > n-2\} = n-1.$$

Como

$$C(n) = C(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)),$$

e

$$h^u(n) = h^{n-1}(n) = n-(n-1) = 1,$$

e

$$m(h^i(n)) = m(n-i) = \frac{n-i+1}{n-i}$$

e

$$s(h^i(n)) = s(n-i) = \frac{2(n-i-1)}{n-i}$$

então

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) &= \prod_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{n-i+1}{n-i} = \prod_{i=0}^{n-2} \frac{n-i+1}{n-i} \\
&= \frac{n-0+1}{n-0}\,\frac{n-1+1}{n-1} \cdots \frac{n-(n-3)+1}{n-(n-3)}\,\frac{n-(n-2)+1}{n-(n-2)} \\
&= \frac{n-0+1}{n-(n-2)} = \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) = \frac{n-0+1}{n-(i-1)} = \frac{n+1}{n-i+1}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) &= \sum_{i=0}^{(n-1)-1} \frac{2(n-i-1)}{n-i}\,\frac{n+1}{n-i+1} \\
&= 2(n+1) \sum_{i=0}^{n-2} \frac{n-i-1}{n-i}\,\frac{1}{n-i+1} \\
&\overset{\text{j=n-i}}{=} 2(n+1) \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j(j+1)} = 2(n+1) \sum_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i(i+1)} \\
&= 2(n+1) \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i(i+1)} \right) \\
&= 2(n+1) \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i+1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right) \\
&= 2(n+1) \left(\sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \right)
\end{aligned}$$

Observando que

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1},$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=\frac{n-1}{2(n+1)}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{u-1}s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1}m(h^j(n)) &= 2(n+1)\left(\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}\right)\\ &= 2(n+1)\left(\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-\frac{n-1}{2(n+1)}\right)=2(n+1)\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-(n-1)\\ &= 2(n+1)\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-n+1.\end{aligned}$$

Observando que

$$\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}=H(n+1)-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}=H(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2},$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{u-1}s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1}m(h^j(n)) &= 2(n+1)\sum_{i=3}^{n+1}\frac{1}{i}-n+1\\ &= 2(n+1)\left(H(n)+\frac{1}{n+1}-\frac{3}{2}\right)-n+1\\ &= 2(n+1)H(n)+2-\frac{6(n+1)}{2}-n+1\\ &= 2(n+1)H(n)-3n-3-n+3\\ &= 2(n+1)H(n)-4n\\ &= 2nH(n)-4n+2H(n).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
C(n) &= C(h^u(n))\prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n))\prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= C(1)\frac{n+1}{2} + 2nH(n) - 4n + 2H(n) \\
&= 2nH(n) - 4n + 2H(n) = 2nH(n)\left(1 - \frac{2}{H(n)} + \frac{1}{n}\right) \\
&\approx 2nH(n) \approx 2n\ln n = \frac{2}{\lg e} n \lg n \\
&< 1.39 n \lg n.
\end{aligned}$$

A.7 Fundamentos de Contagem

138. [default,ex:estimativas]Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

(a) Tempo, em segundos[27]:

i. $n =$ uma hora.

ii. $n =$ um dia.

iii. $n =$ uma semana.

iv. $n =$ um mês.

v. $n =$ um ano.

vi. $n =$ sua idade.

vii. $n =$ tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970[28].

viii. $n =$ um século.

ix. $n =$ um milênio.

x. $n =$ um milhão de anos.

xi. $n =$ idade estimada da Terra[29].

xii. $n =$ idade estimada da Via Láctea[30].

xiii. $n =$ idade estimada do universo observável[31].

(b) Distância, em metros[32]:

i. $n =$ maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra[33].

---

[27] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Second

[28] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix)

[29] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age

[30] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way

[31] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe

[32] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Metre

[33] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

ii. n = distância da Terra ao Sol[34].
iii. n = um ano-luz.
iv. n = diâmetro estimado da Via Láctea[35].

(c) Velocidade, em metros por segundo:

i. n = de um homem.
ii. n = de um animal.
iii. n = de um veículo terrestre.
iv. n = de um veículo aquático.
v. n = de um veículo aéreo.
vi. n = da Terra em relação ao Sol[36].
vii. n = da luz[37].

(d) Massa, em gramas:

i. n = de um homem.
ii. n = de um carro.
iii. n = de um elefante adulto[38].
iv. n = de um Boeing-737.
v. n = água na Terra[39].
vi. n = da Terra[40].
vii. n = do Sol[41].
viii. n = da Via Láctea[42].
ix. n = da Lua[43].
x. n = do universo observável[44].

(e) Volume, em litros:

i. n = de um homem.
ii. n = de um carro.

[34] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[35] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[36] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[37] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[38] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant
[39] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere
[40] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[41] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[42] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[43] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[44] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

iii. $n =$ da água oceânica na Terra[45].
iv. $n =$ da Terra[46].
v. $n =$ da Lua[47].
vi. $n =$ do Sol[48].
vii. $n =$ do universo observável[49].

(f) Outras quantidades:

i. $n =$ população de Curitiba.
ii. $n =$ população do Paraná.
iii. $n =$ população do Brasil.
iv. $n =$ população da Terra.
v. $n =$ número de estrelas no universo observável[50].
vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável[51].
vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

Resposta: Observe inicialmente que

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$

se e somente se

$$d \leq \log n < d + 1,$$

ou seja

$$d = \lfloor \log n \rfloor .$$

Do mesmo modo

$$2^k \leq n < 2^{k+1},$$

se e somente se

$$k = \lfloor \lg n \rfloor .$$

(a) Tempo, em segundos:

[45]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean
[46]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[47]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[48]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[49]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[50]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[51]veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

i. $n =$ uma hora.
Uma hora tem 60 minutos. Um minuto tem 60 segundos. Assim, $n = 3600$, e,

$$\begin{aligned} d &= \lfloor \log 3600 \rfloor = 3, \\ k &= \lfloor \lg 3600 \rfloor = 11. \end{aligned}$$

simplificar as demais soluções como no item acima

.

ii. $n =$ um dia.
Um dia tem 24 horas. Assim, um dia tem $n = 24 \times 3600 = 86400$ segundos.

$$\begin{aligned} d &= \lfloor \log 86400 \rfloor = 11, \\ k &= \lfloor \lg 86400 \rfloor = 16. \end{aligned}$$

iii. $n =$ uma semana.
Uma semana tem 7 dias. Portanto, de 138(a)ii $n = 7 \times 86400 = 604800$

$$\begin{aligned} d &= \lfloor \log 604800 \rfloor = 13, \\ k &= \lfloor \lg 604800 \rfloor = 19. \end{aligned}$$

iv. $n =$ um mês

$$28 \times 86400 = 2419200 \leq n \leq 31 \times 2678400$$

$$\begin{aligned} d &= \lfloor \log 2419200 \rfloor = \lfloor \log 2678400 \rfloor = 14, \\ k &= \lfloor \lg 2419200 \rfloor = \lfloor \lg 2678400 \rfloor = 21. \end{aligned}$$

v. $n =$ um ano.

$$n = 365 \times 86400 + 6 \times 3600 = 31557600.$$

$$\begin{aligned} d &= \lfloor \log 31557600 \rfloor = 17, \\ k &= \lfloor \lg 31557600 \rfloor = 24. \end{aligned}$$

vi. $n =$ sua idade.

$$16 \times 31557600 = 504921600 \leq n \leq 31 \times 31557600 = 1009843200.$$

$$d = \lfloor \log 504921600 \rfloor = \lfloor \log 978285600 \rfloor = 20,$$
$$k = \lfloor \lg 504921600 \rfloor = \lfloor \lg 978285600 \rfloor = 29.$$

vii. $n =$ tempo decorrido desde 1 de janeiro de 1970.
É óbvio que já se passou mais de 30 anos, mais de 32, menos de 40 e menos de 38. De 138(a)v, temos que

$$n \geq 30 \cdot 1812 \cdot 10^5 \geq 5436 \cdot 10^6 \geq 1000 \cdot 10^6 = 10^9$$
$$n \geq 32 \cdot 2937 \cdot 2^{16} \geq 2937 \cdot 2^{21} \geq 2048 \cdot 2^{21} = 2^{32}$$
$$n < 40 \cdot 242 \cdot 10^6 < 968 \cdot 10^7 < 1000 \cdot 10^7 = 10^{10}$$
$$n < 38 \cdot 1065 \cdot 2^{17} < 20235 \cdot 2^{18} < 32768 \cdot 2^{18} = 2^{33}$$

Assim, $d = 9$ e $k = 31$. Possivelmente, se usássemos um `unsigned int` ocorreria um *overflow*.

139$^-$. [default,ex:composicao-bijecoes]

Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

Resposta:

Demonstração. Sejam A, B e C conjuntos finitos e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções. Vamos provar que se f e g são bijeções, então $f \circ g$ é uma bijeção.

Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são bijeções, então $A \sim B$ e $B \sim C$.

Como $\sim$ é uma relação de equivalência, temos que a relação $\sim$ é transitiva e então $A \sim C$.

Portanto, como $A \sim C$, $f \circ g\colon A \to C$ é uma bijeção.

$\square$

(conferir (dm)

140^{-}. [default,ex:cor:equiv:equivalencia]

Prove que a relação $\sim$ sobre conjuntos finitos dada por

$$A \sim B := |A| = |B|,$$

é uma relação de equivalência.

Resposta:

Vamos provar que $\sim$ é uma relação de equivalência, isto é, que

(a) a relação $\sim$ é reflexiva,

(b) a relação $\sim$ é simétrica, e

(c) a relação $\sim$ é transitiva.

(a) Vamos provar que a relação $\sim$ é reflexiva, isto é que se A é um conjunto finito, então $A \sim A$, ou seja, que existe bijeção $A \to A$.

Para tanto, basta observar que a função identidade $\iota \colon A \to A$, dada por

$$\iota(a) = a, \text{ para todo } a \in A,$$

é uma bijeção.

(b) Vamos provar que a relação $\sim$ é simétrica, isto é, que dados conjuntos finitos A e B tais que $A \sim B$, então $B \sim A$.

Sejam então A e B conjuntos finitos tais que $A \sim B$. Vamos provar que $B \sim A$, isto é, que existe bijeção $B \to A$.

Como $A \sim B$, então existe bijeção $f \colon A \to B$. Consequentemente, a função $f^{-1} \colon B \to A$ é uma bijeção e, portanto, $B \to A$.

(c) Vamos provar que a relação $\sim$ é transitiva, isto é, que dados conjuntos finitos A, B e C tais que $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Sejam então A, B e C conjuntos finitos tais que $A \sim B$ e $B \sim C$. Vamos provar que $A \sim C$, isto é, que existe bijeção $A \to C$.

Como $A \sim B$, então existe bijeção $f \colon A \to B$.

Como $B \sim C$, então existe bijeção $g \colon B \to C$.

Então (T. 44) $f \circ g \colon A \to C$ é uma bijeção e, portanto, $A \sim C$.

141*. [default,ex:numero-multiplos]

Qual o número de

(a) múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100?

(b) múltiplos positivos de 4 menores ou iguais a 500?

(c) múltiplos positivos de n menores ou iguais a k?

Resposta:

O conjunto dos múltiplos positivos de n menores ou iguais a k é

$$M_{n,k} = \{1n, 2n, \ldots, un\},$$

onde u é o maior inteiro menor ou igual a k, isto é,

$$u = \max\{j \in \mathbb{N} \mid jn \leq k\}.$$

O número múltiplos positivos de n menores ou iguais a k é $|M_{n,k}| = u$.
Como

$$u = \max\left\{j \in \mathbb{N} \mid j \leq \frac{k}{n}\right\},$$

então,

$$u = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor,$$

ou seja,

$$|M_{n,k}| = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor.$$

A.8 União e Produto Cartesiano

142#. [default,ex:cor:produto-cartesiano-generalizado]

Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos então,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Resposta:

Vamos provar que

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|,$$

para todo $n > 0$ por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\left|\prod_{i=1}^{(a+1)} A_i\right| = \prod_{i=1}^{(a+1)} |A_i|,$$

Temos que

$$\left|\prod_{i=1}^{(a+1)} A_i\right| = \left|\left(\prod_{i=1}^{a} A_i\right) \times A_{(a+1)}\right|$$
$$\overset{\text{def. acima}}{=} \left|\prod_{i=1}^{a} A_i\right| \left|A_{(a+1)}\right|,$$

e como $a \in [0..a]$, então pela HI temos

$$\left|\prod_{i=1}^{a} A_i\right| = \prod_{i=1}^{a} |A_i|,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\left|\prod_{i=1}^{(a+1)} A_i\right| &= \left|\prod_{i=1}^{a} A_i\right| \left|A_{(a+1)}\right| \\ &\overset{\text{H.I.}}{=} \left(\prod_{i=1}^{a} |A_i|\right) \left|A_{(a+1)}\right| \\ &= \prod_{i=1}^{(a+1)} |A_i| \,.\end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$\left|\prod_{i=1}^{b} A_i\right| = \prod_{i=1}^{b} |A_i| \,,$$

$b = 1$**:** basta verificar que

$$\left|\prod_{i=1}^{1} A_i\right| = |A_1| \,.$$

e

$$\prod_{i=1}^{1} |A_i| \,, = |A_1| \,.$$

$b = 2$**:** como

$$\left|\prod_{i=1}^{2} A_i\right| = |A_1 \times A_2| \,.$$

e

$$\prod_{i=1}^{2} |A_i| = |A_1| \times |A_1| \,,$$

que é dado.

conferir (dm)

143@. [default,ex:divisores-72]

Quantos divisores naturais tem o número 72?

Resposta:

Seja D o conjunto dos divisores naturais de 72. Queremos determinar $|D|$.

Os divisores primos de 72 são 2 e 3, pois

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

Cada divisor de 72 corresponde a um par de expoentes (a, b) onde

$$\begin{gathered} 0 \leq a \leq 3, \ \texttt{e} \\ 0 \leq b \leq 2, \end{gathered}$$

isto é

$$\begin{gathered} a \in [0..3], \ \texttt{e} \\ b \in [0..2], \end{gathered}$$

ou seja,

$$(a, b) \in [0..3] \times [0..2].$$

Noutras palavras, a função $(a, b) \mapsto 2^a\, 3^b$ é uma bijeção $[0..3] \times [0..2] \to D$ e consequentemente (C. 46),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2]| = |[0..3]|\,|[0..2]| = 4 \times 3 = 12.$$

144*. [default,ex:divisores-360]

Quantos divisores naturais tem o número 360?

Resposta:

Seguindo o mesmo raciocínio do Exercício 143, temos

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1,$$

e daí, fazendo

$$D := \text{conjunto dos divisores naturais de 360},$$

temos

$$D \sim [0..3] \times [0..2] \times [0..1],$$

e consequentemente (C. 46),

$$|D| = |[0..3] \times [0..2] \times [0..1]| \overset{\text{C. 55}}{=} |[0..3]| \times |[0..2]| \times |[0..1]| = 4 \times 3 \times 2 = 24.$$

145#. [default,ex:teo:numero-divisores]

Prove que o número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^{k}(m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

Resposta:

Seja D o conjunto de todos os divisores naturais de um um inteiro $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que

$$|D| = \prod_{i=1}^{k}(m_i + 1), \text{ onde } \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos provando que

$$D \sim \prod_{i=1}^{k}(m_i + 1).$$

Como todo inteiro $n \in \mathbb{N}$ pode ser decomposto em fatores primos $p_1, p_2, ..., p_k$ tal que

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k},$$

cada divisor de n corresponde a uma tupla de expoentes $(q_1, q_2, \dots, q_k)$ e

$$\begin{gathered} 0 \le q_1 \le m_1, \\ 0 \le q_2 \le m_2, \\ \dots \\ 0 \le q_k \le m_k, \end{gathered}$$

isto é

$$
\begin{aligned}
q_1 &\in [0..m_1],\\
q_2 &\in [0..m_2],\\
&\dots\\
q_k &\in [0..m_k],
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$(q_1, q_2, \dots, q_k) \in [0..q_1] \times [0..q_2] \times \dots \times [0..q_k].$$

Noutras palavras,

$$
\begin{aligned}
D &\sim [0..m_1] \times [0..m_2] \times \dots \times [0..m_k]\\
&= \prod_{i=1}^{k} [0..m_i]\\
&= \prod_{i=1}^{k} [m_i + 1]
\end{aligned}
$$

pela bijeção dada por

$$(q_1, q_2, \dots, q_k) \ \mapsto \ p_1^{m_1} \ p_2^{m_2} \ \dots \ p_k^{m_k}.$$

Consequentemente (C. 46),

$$
\begin{aligned}
|D| &= \left| \prod_{i=1}^{k} [m_i + 1] \right|\\
&\overset{\text{Ex. 142}}{=} \prod_{i=1}^{k} |[m_i + 1]|\\
&= \prod_{i=1}^{k} |(m_i + 1)| \,.
\end{aligned}
$$

conferir (dm)

146⋆. [default,ex:divisores-impares-pares]

(a) Dê uma expressão para o número de divisores ímpares de um número dado n.

(b) Dê uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n.

(c) Generalize a resposta dos itens anteriores dando uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n que são e que não são múltiplos de um primo p, também dado.

Resposta:

(a) A quantidade de divisores ímpares de um número é obtida somando-se uma unidade aosexpoentes dos fatores primos ímpares e multiplicando os resultados. Exemplo: $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ n.º de divisores ímpares $= (1 + 1).(1 + 1) = 4$

(b) A quantidade de divisores pares de um número é obtida somando-se uma unidade aos expoentesdos fatores primos ímpares e depois multiplicando o resultado pelo expoente do fator primo par.Exemplo: $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ N.º de divisores pares $= (1 + 1).(1 + 1).3 = 12$

(c)

147*. [default,ex:impares-quadrados]

Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} I &:= \{n \in [1000] \mid n \text{ é ímpar}\}, \\ Q &:= \{n \in [1000] \mid n \text{ é quadrado de inteiro}\}, \end{aligned}$$

queremos determinar $|I \cup Q|$.

Como

$$|I \cup Q| = |I| \cup |Q| - |I \cap Q|,$$

e

$$|I| = \frac{|[1000]|}{2} = \frac{1000}{2} = 500,$$

e $n \in Q$ se e somente se $\sqrt{n} \leq 1000$ e

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{1000} < 32,$$

isto é

$$Q = \{n^2 \mid n \in [31]\},$$

e, portanto, $|Q| = 31$ e

$$I \cap Q = \{n \in Q \mid \sqrt{n} \in I\},$$

e daí,

$$|I \cap Q| = \frac{|[30]|}{2} + 1 = 16,$$

e

$$|I \cup Q| = |I| \cup |Q| - |I \cap Q| = 500 + 31 - 16 = 515.$$

E a forma geral, seria

$$|I \cup Q| = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{2} - 1 \right\rfloor.$$

148*. [default,ex:aritmetica-intervalar]

Uma técnica de cálculo de números em ponto flutuante que permite um maior controle da propagação de erros de precisão é a chamada *aritmética intervalar*. Em vez de fazer os cálculos com números, usa-se intervalos fechados para os cálculos.

Por exemplo, em vez de computar $\pi + e$ e obter um valor aproximado do resultado, computa-se a soma $[3.140 \times 10^1, 3.141 \times 10^1] + [2.780 \times 10^1, 2.781 \times 10^1]$ de intervalos que contém os somandos e obtem-se como resultado o intervalo $[5.920 \times 10^1, 5.922 \times 10^1]$ que seguramente contém $\pi + e$. Com isso sabe-se que qualquer número neste intervalo difere de no máximo 10^{-3} de $\pi + e$, ou seja, o erro de aproximação é controlado.

Se a quantidade de números distintos representáveis em ponto flutuante é n, quantos intervalos diferentes é possível representar?

Resposta:

Seja F é o conjunto dos números representáveis em ponto flutuante.

Então o conjunto de intervalos representáveis é

$$I = \{(a, b) \in F^2 \mid a \leq b\}.$$

Fazendo $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ com $a_1 < \ldots < a_n$ temos

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=i}^{n} \{(a_i, a_j)\},$$

e

$$
\begin{aligned}
|I| &= \left|\bigcup_{i=1}^{n-1}\bigcup_{j=i}^{n}\{(a_i,a_j)\}\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\left|\bigcup_{j=i}^{n}\{(a_i,a_j)\}\right| = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n}|\{(a_i,a_j)\}| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n}1 = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1) = \sum_{i=1}^{n-1}n - \sum_{i=1}^{n-1}i + \sum_{i=1}^{n-1}1 \\
&= n(n-1) - \frac{(n-1))(n-1)+1}{2} + ((n-1)+1) = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

A.9 Sequências

149[@]. [default,ex:byte]

Um "bit" é um elemento de $\{0, 1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

Resposta: Fazendo

$$B := \text{conjunto dos bytes.}$$

Como cada "byte" é uma sequência de 8 "bits", isto é, um elemento de de $\{0, 1\}^8$, então

$$B \sim \{0, 1\}^8$$

e consequentemente (C. 46),

$$|B| = |\{0, 1\}^8| \overset{\text{C. 57}}{=} |\{0, 1\}|^8 = 2^8 = 256.$$

150[@]. [default,ex:senhas-convencionais]

Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

(a) Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

(b) Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned}
T &:= \text{conjunto das teclas convencionais,}\\
C &:= \text{conjunto dos caracteres convencionais,}\\
S_n &:= \text{senhas convencionais de tamanho } n,
\end{aligned}$$

temos

$$S_n = C^n.$$

(a) Um dia tem 24.60.60 = 86 400 segundos e queremos

$$|S_n| > 86400.$$

Como

$$S_n = C^n,$$

então

$$|S_n| = |C^n| \overset{\text{C. 57}}{=} |C|^n$$

Como

$$C \sim \{0,1\} \times T,$$

então (C. 46),

$$|C| = |\{0,1\} \times T| \overset{\text{T.54}}{=} |\{0,1\}||T| = 2.47 = 94$$

e

$$|S_n| = |C|^n = 94^n.$$

Então, para ter

$$|S_n| > 86400,$$

precisamos ter

$$94^n > 86400,$$

ou seja

$$n \lg 94 > \lg 86400,$$

ou seja

$$n > \frac{\lg 86400}{\lg 94},$$

e portanto,

$$n = \left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\begin{array}{lcl} 16 & < \lg 86400 < & 17, \\ 6 & < \lg 94 < & 7, \end{array}$$

então

$$2 < \frac{16}{7} < \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{17}{6} < 3.$$

e então

$$\left\lceil \frac{\lg 86400}{\lg 94} \right\rceil = 3.$$

(b) Se o sistema atacante for um milhão (10^6) de vezes mais rápido, o número de tentativas num dia será um milhão de vezes maior, e precisamos de

$$|S_n| > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$94^n > 10^6 \times 86400,$$

ou seja

$$n = \left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil.$$

Para estimar o valor de $\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil$, observe que

$$\frac{\lg(10^6.86400)}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6 + \lg 86400}{\lg 94} = \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94}$$

e

$$19 < \lg 10^6 < 20,$$

então

$$\frac{19}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} < \frac{20}{6}$$

e

$$5 = \frac{35}{7} = \frac{19}{7} + \frac{16}{7} < \frac{\lg 10^6}{\lg 94} + \frac{\lg 86400}{\lg 94} < \frac{20}{6} + \frac{17}{6} = \frac{37}{6} < 7$$

e portanto

$$\left\lceil \frac{\lg(10^6 \times 86400)}{\lg 94} \right\rceil = 6.$$

151$^@$. [default,ex:dvd]

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

Resposta:

Fazendo

$$\begin{aligned} d &:= 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109, \\ s(n) &:= \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n, \end{aligned}$$

temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \overset{\text{C. 57}}{=} |B|^n \overset{\text{Ex. 149}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} i|A(i)| = \sum_{i=0}^{n} i256^i \overset{\text{Ex. 130f}}{=} \frac{256}{255} n256^n - \frac{256}{65025} 256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid s(k) \leq d\}.$$

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255} k256^k - \frac{256}{255^2} 256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k - 256^{k+1} \leq 255^2 d - 256$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2 d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2 d - 256$$

isto é

$$256^{k+1}k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right)$$

ou seja

$$(k+1)\lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2 d}\right).$$

Então basta

$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$

ou seja

$$8k + \lg k \leq \lg 255d - 9 = \lg 255 + \lg d - 9.$$

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

ou seja

$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$

e portanto,

$$n = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d, \right\} \geq 3.$$

Efetivamente,

$$\begin{aligned} s(3) = 50\,462\,976 &\quad < \quad d, \\ s(4) = 17\,230\,332\,160 &\quad > \quad d. \end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3. Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.

152*. [default,ex:moedas]

Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?

(b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

Resposta:

(a) Uma sequência de n lançamentos de uma moeda corresponde a uma sequência de tamanho n sobre o conjunto $\{K, C\}$, cujo tamanho é

$$|\{K, C\}^n| = |\{K, C\}|^n = 2^n =$$

(b) Uma sequência de até n lançamentos de uma moeda corresponde a uma sequência de tamanho até n sobre o conjunto $\{K, C\}$, cujo tamanho é

$$\frac{|\{K, C\}|^{n+1} - 1}{|\{K, C\}| - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

153*. [default,ex:dados]

Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de um dado?

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

Resposta:

(a) 6^n resultados possíveis.

(b) $\sum_{k=1}^{n} 6^k = \frac{6^{n+1}-1}{5}$ resultados possíveis.

154*. [default,ex:dicionario]

O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

Resposta:

(a) 26^k palavras de tamanho k

(b) $\sum_{k=1}^{46} 26^k = \frac{26^{46+1}}{26-1} - 1 = \frac{26^{46+1}-1-26+1}{25} = \frac{26^{47}-26}{25} > 1.27 \times 10^{65}$ palavras de tamanho até 46

(c) $\frac{228500}{\frac{26^{47}}{25}} < 1.80 \times 10^{-60}$

155*. [default,ex:palindromos]

Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \dots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?

Resposta:

(a) aaaa, abba, acca, baab, bbbb, bccb, caac, cbbc, cccc.

(b) aaaaa, ababa, acaca, baaab, bbabb, bcacb, caaac, cbabc, ccacc
aabaa, abbba, acbca, babab, bbbbb, bcbcb, cabac, cbbbc, ccbcc
aacaa, abcba, accca, bacab, bbcbb, bcccb, cacac, cbcbc, ccccc.

(c) Cada palíndromo de tamanho k sobre um conjunto de n elementos corresponde a uma palavra de tamanho $\lceil k/2 \rceil$ sobre este conjunto. Existem portanto $n^{\lceil k/2 \rceil}$ tais palíndromos.

156*. [default,ex:protocolo]

Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3, diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem, 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

Resposta:

completar

157*. [default,ex:ipv4]

O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

Resposta:

(a) $2^{32} = 4.294.967.296$ endereços IP possíveis.

(b) Respectivamente temos:
$1 \times 256 \times 256 \times 256 = 167.772.219$
$(1 \times 16 \times 256 \times 256) - 1 = 1.048.576$
$1 \times 1 \times 256 \times 256 = 65.536$
$1 \times 1 \times 256 \times 256 = 65.536$
Ou seja,
No total temos $4.294.967.296 - 168.951.867 = 4.126.015.429$ endereços IP não-reservados.

158*. [default,ex:mac]

Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits[52]. Se a inclusão digital for um sucesso absoluto, quantas intefaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

Resposta:

Estima-se que existam 7,162 bilhões de habitantes no planeta (dados do *United States Census Bureau* em março de 2014).
O *endereço MAC* pode ter 2^{48} identificações diferentes.
Ou seja, cada habitante poderia receber, aproximadamente:

$$\frac{2,814749767 \times 10^{14}}{7.162.000.000} = 39.301,16960$$

endereços MAC.

159*. [default,ex:jantar]

Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

Resposta:

Sendo T o conjunto das combinações, sem a restrição, temos que

$$|T| = 2 \times 3 \times 4 \times 2 = 48.$$

O conjunto de combinações que não satisfazem a restrição, R, contém as combinações com salada e nhoque. Ou seja, temos que

$$|R| = 1 \times 1 \times 4 \times 2 = 8.$$

O conjunto de combinações que satisfazem a restrição, S, é a diferença entre T e R, ou seja

[52] Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *FireWire*, *IPv6*, *802.15.4*).

$$|S| = |T \setminus R| = |T| - |R| = 48 - 8 = 40,$$

já que $R \subseteq T$.

Como o número de convidados não pode exceder o número de combinações que satisfazem a restrição, então o número máximo de convidados é 40.

160*. [default,ex:datas]

Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, onde d_1d_2, m_1m_2 e $a_1a_2a_3a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

(a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

(b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

(c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

Resposta:

(a) cada data corresponde a um par em $[365] \times [9999]$, logo são $365 \times 9999 = 3\,649\,635$ datas.

(b) existem 10^8 sequências de 8 dígitos. A probabilidade é $\frac{3649635}{10^8} = \frac{729927}{20000000} = 3.649635\%$.

(c) Serão geradas 60 sequências em um minuto. A probabilidade de nenhuma ser uma data é

$$\left(1 - \frac{3649635}{10^8}\right)^{60} = 10.744887007416733\%.$$

161*. [default,ex:carros]

A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 138(f)iii.

Resposta:

$$26^3 \times 10^4 = 175.760.000$$

162⋆. [default,ex:telefones]

Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

(a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

(b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo[53] possíveis?

Resposta:

(a) $1 \times 10^7 =$ 10.000.000

(b) Existem mais números de licenças de veículos disponíveis.

163⋆. [default,ex:todas-as-imagens]

Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como "truecolor", isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor[54] para exibir todas as imagens possíveis?

Resposta:

O monitor pode exibir, no total:
$640 \times 480 \times 2^{32} = 1,319413953 \times 10^{15}$ imagens.
Para exibir todas as imagens serão necessários, aproximadamente:
$2,199023256 \times 10^{13}$ minutos.
Ou 366.503.875.925,34 horas.
Ou 15.270.994.830,23 dias.
Ou 41.838.342 anos com 365 dias.

164⋆. [default,ex:sha1]

O Secure Hash Algorithm 1 (SHA-1) é uma função de hashing que associa sequências de bytes de qualquer tamanho a sequências 160 bits.

Por exemplo, a imagem da sequência de bytes correspondente à cadeia "The quick brown fox jumps over the lazy dog" é a sequência de bits

[53] Veja o Exercício 161

[54] Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

`2fd4e1c67a2d28fced849ee1bb76e7391b93eb12` em notação hexadecimal.

Um dos usos do SHA-1 é o de servir como uma espécie de "assinatura" de arquivos. Desde sua adoção em 1993 até 2017 não se conhecia nenhum exemplo de dois arquivos com o mesmo valor de SHA-1.

(a) Quanto espaço no mínimo seria necessário para armazenar um conjunto de arquivos que garantisse que ao menos dois deles tivessem o mesmo valor de SHA-1?

(b) Supondo que estes arquivos estivessem disponíveis e que o tempo necessário para computar o valor de SHA-1 de um arquivo de n bytes seja $c_1 n$ e que o tempo necessário para comparar dois valores de SHA-1 seja c_2 (c_1 e c_2 são constantes medidas em "ciclos de processador"), qual o tempo necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

(c) Se a frequência do processador é de f Hz, quanto tempo seria necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

Resposta:

(a) Para garantir que um conjunto de arquivos contenha dois com o mesmo valor de SHA-1 seria necessário ter um conjunto de pelo menos $2^{160} + 1$ arquivos.

Como existem 256^k arquivos diferentes de tamanho k, precisamos determinar o menor valor de n tal que

$$\sum_{k=0}^{n} 256^k \geq 2^{160} + 1.$$

Como

$$\sum_{k=0}^{n} 256^k = \frac{256^{n+1} - 1}{256 - 1} = \frac{256^{n+1} - 1}{255}$$

queremos o menor valor de n tal que

$$\frac{256^{n+1} - 1}{255} \geq 2^{160} + 1$$

ou seja, o menor valor de n tal que

$$256^{n+1} \geq 255 \times 2^{160} + 255 + 1 = 2^{160}\left(255 + \frac{256}{2^{160}}\right)$$

ou seja, o menor valor de n tal que

$$(n+1)\lg 256 \geq 160 + \lg\left(255 + \frac{256}{2^{160}}\right)$$

ou seja, o menor valor de n tal que

$$8n + 8 \geq 160 + \lg\left(255 + \frac{256}{2^{160}}\right)$$

ou seja, o menor valor de n tal que

$$8n \geq 152 + \lg\left(255 + \frac{256}{2^{160}}\right)$$

ou seja, o menor valor de n tal que

$$n \geq 19 + \frac{\lg\left(255 + \frac{256}{2^{160}}\right)}{8}$$

ou seja,

$$\left\lceil 19 + \frac{\lg\left(255 + \frac{256}{2^{160}}\right)}{8} \right\rceil = 20.$$

Então são necessários todos os arquivos de tamanho até 19 mais

$$2^{160} + 1 - \sum_{k=0}^{19} 256^k$$

arquivos de tamanho 20, o que ocupa (em bytes)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{19} k256^k + 20\left(2^{160} + 1 - \sum_{k=0}^{19} 256^k\right)& \\
&= 20 \times 2^{160} + 20 - 19 \times \sum_{k=0}^{19} k256^k \\
&\overset{\text{Ex. 130f}}{=} 20 \times 2^{160} + 20 - 19 \times \frac{19 \times 256^{19}}{255}(1 + \varepsilon_1),
\end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_1 = 1 - \left(\frac{1}{255 \times 19} - \frac{1}{19 \times 256^{19} \times 255}\right).$$

Como

$$
\begin{aligned}
20 \times 2^{160} + 20 - 19 \times \frac{19 \times 256^{19}}{255}(1+\varepsilon) \\
= 5 \times 2^{162} + 20 - \frac{19^2 \times 2^{152}}{255}(1+\varepsilon) \\
= 5 \times 2^{162}(1+\varepsilon_2),
\end{aligned}
$$

onde

$$
\varepsilon_2 = \frac{1}{2^{160}} - \frac{19^2(1+\varepsilon_1)}{1275 \times 2^{10}},
$$

então são necessários $5 \times 2^{162}(1+\varepsilon_2)$ bytes.

Observe que os valores de SHA-1 de $2^{160}+1$ arquivos ocupam

$$
20(2^{160}+1) = 5 \times 2^{162}\left(1 + \frac{1}{2^{160}}\right) > 5 \times 2^{162}(1+\varepsilon_2)
$$

bytes.

(b) Para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1 seria necessário computar o valor de SHA-1 de cada um deles e depois compará-los.

O tempo para computar o valor de SHA-1 de todos os arquivos seria

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{19} k256^k c_1 + 20\left(2^{160} + 1 - \sum_{k=0}^{19} 256^k\right) c_1 \\
= \left(\sum_{k=0}^{19} k256^k + 20\left(2^{160} + 1 - \sum_{k=0}^{19} 256^k\right)\right) c_1 \\
= 5 \times 2^{162}(1+\varepsilon_2)c_1
\end{aligned}
$$

ciclos.

O tempo para comparar todos os SHA-1 entre si seria

$$
\binom{2^{160}+1}{2} c_2 = \frac{(2^{160}+1)2^{160}}{2} c_2 = (2^{319}+2^{159})c_2 = 2^{319}\left(1 + \frac{1}{2^{160}}\right) c_2
$$

ciclos.

A.9.1 Funções Injetoras (Arranjos)

165⋆. [default,ex:seqnorep-impar-comeca-par]

(VITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

Resposta:

$$\begin{aligned}
Resp &= 3.3\sum_{i=0}^{4}[4]_{[i]} = 9\sum_{i=0}^{4}4_i \\
&= 9(\frac{4!}{0!}+\frac{4!}{1!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{4!}) \\
&= 9(4.3.2.1+4.3.2+4.3+4+1) = 9(24+24+12+4+1) = 9.65 \\
&= 585
\end{aligned}$$

166⋆. [default,ex:seqnorep-portugal-4letras]

(VUDESC) O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:

Resposta:

Considerando que o anagrama começa com a letra G, temos que ele será completado com sequências das demais 7 letras de tamanho 3, isto é

$$7_3 = \frac{7!}{4!} = 7.6.5 = 210$$

167⋆. [default,ex:seqnorep-divisivel2-4algsde7]

(VUFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, quantos são divisíveis por 2?

Resposta:

Considerando que os números devem terminar em algarismo pares, dos quais temos {4,6,8}, os números deverão ser completados por sequências sem repetição de tamanho 3 sobre o conjunto de elementos formados pelos demais 6 elementos, i.e.,

$$3.[6]_{[3]} = 3.\frac{6!}{3!} = 3.6.5.4 = 360$$

168*. [default,ex:seqnorep-entre200e800-3algsde5]

(UFCE) Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

Resposta:

Estes números de três algarismo devem começar por 3, 5 ou 7, e então serem completados por sequências sem repetição de tamanho 2 sobre o conjunto de elementos formado pelos demais 4 elementos, i.e.,

$$3.[4]_{[2]} = 3.\frac{4!}{2!} = 3.4.3 = 36$$

A.9.2 Funções Bijetoras (Permutações)

169@. [default,ex:permutacoes-ordenadas]

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

Resposta:

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43 521 é

$$\begin{aligned} M = \{1\} \times \{2,3,4,5\}! \cup \{2\} \times \{1,3,4,5\}! \cup \{3\} \times \{1,2,4,5\}! \\ \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}! \\ \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}! \\ \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}! \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
|M| &= |\{1\} \times \{2,3,4,5\}! \cup \{2\} \times \{1,3,4,5\}! \cup \{3\} \times \{1,2,4,5\}! \\
&\quad \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}! \\
&\quad \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}! \\
&\quad \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}!| \\
&\overset{\text{C. }48}{=} |\{1\} \times \{2,3,4,5\}!| + |\{2\} \times \{1,3,4,5\}!| + |\{3\} \times \{1,2,4,5\}!| \\
&\quad + |\{4\} \times \{1\} \times \{2,3,5\}!| + |\{4\} \times \{2\} \times \{1,3,5\}!| \\
&\quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2,5\}!| + |\{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1,5\}!| \\
&\quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}!| \\
&\overset{\text{C. }55}{=} |\{1\}|\,|\{2,3,4,5\}!| + |\{2\}|\,|\{1,3,4,5\}!| + |\{3\}|\,|\{1,2,4,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{1\}|\,|\{2,3,5\}!| + |\{4\}|\,|\{2\}|\,|\{1,3,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{1\}|\,|\{2,5\}!| + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{2\}|\,|\{1,5\}!| \\
&\quad + |\{4\}|\,|\{3\}|\,|\{5\}|\,|\{1\}|\,|\{2\}!| \\
&\overset{\text{C. }72}{=} 1 \times |\{2,3,4,5\}|! + 1 \times |\{1,3,4,5\}|! + 1 \times |\{1,2,4,5\}|! \\
&\quad + 1 \times 1 \times |\{2,3,5\}|! + 1 \times 1 \times |\{1,3,5\}|! \\
&\quad + 1 \times 1 \times 1 \times |\{2,5\}|! + 1 \times 1 \times 1 \times |\{1,5\}|! \\
&\quad + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times |\{2\}|! \\
&= 4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 2! + 2! + 1! \\
&= 3 \times 4! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1! \\
&= 89
\end{aligned}$$

O lugar ocupado pelo número 43521 é, portanto, 90.

170⋆. [default,ex:permut-semana-cinema]

Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação.

Resposta:

De http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/simulados/matematica-analise-shtml

Os 4 filmes de não-ficção permutam livremente (sem restrição) de 4! maneiras; já os 3 filmes de ficção permutam entre si de 3! maneiras;

mas esses 3 filmes consecutivos podem ocupar ainda 5 posições no decorrer da semana; portanto, como tudo ocorre ao mesmo tempo vale o princípio multiplicativo, ou seja: $4!3!5 = 720$.

outra forma de apresentar

Cada possível programação corresponde a uma tripla (o, f, p) onde f é a sequência em que serão exibidos os filmes de ficção científica, o é a sequência em que serão exibidos os outros filmes e p é a posição em que os filmes de ficção científica serão "encaixados" dentro da sequência dos demais.

Então o conjunto das possíveis programações é

$$P = O \times F \times P, \tag{A.2}$$

onde

$$\begin{aligned} F &:= \text{sequências dos filmes de ficção científica,} \\ O &:= \text{sequências dos outros filmes,} \\ P &:= \text{posições na sequência dos outros.} \end{aligned}$$

e

$$|P| = |O \times F \times P| = |O||F||P|.$$

Cada sequência de filmes de ficção científica corresponde a uma permutacao sobre o conjunto destes filmes e, portanto, $|F| = 3!$.

Do mesmo modo, cada sequência dos outros filmes corresponde a uma permutacao sobre o conjunto destes filmes e, portanto, $|O| = (7-3)! = 4!$.

Finalmente, cada possível posição na sequência dos outros filmes corresponde a uma posição numa sequência de tamanho 3 e, portanto, $|P| = |\{0, 1, 2, 3, 4\}| = 5$.

Então

$$|P| = |O||F||P| = 4!3!5 = 720.$$

171*. [default,ex:permut-livros]

Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. De quantas maneiras os livros podem ser empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos?

Resposta:

formalizar

$$P3.P4.P2.P5 = 6.24.2.120 = 34560$$

172*. [default,ex:baralho]

A seguinte afirmação é verdadeira? Justifique.

> A probabilidade de obter uma permutação das cartas que nunca aconteceu antes ao embaralhar um baralho comum é maior que 50%.

Resposta:

173@. [default,ex:permut-roda-criancas]

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

Resposta:

Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças. O número de tais permutações é

$$(5-1)! = 4! = 24.$$

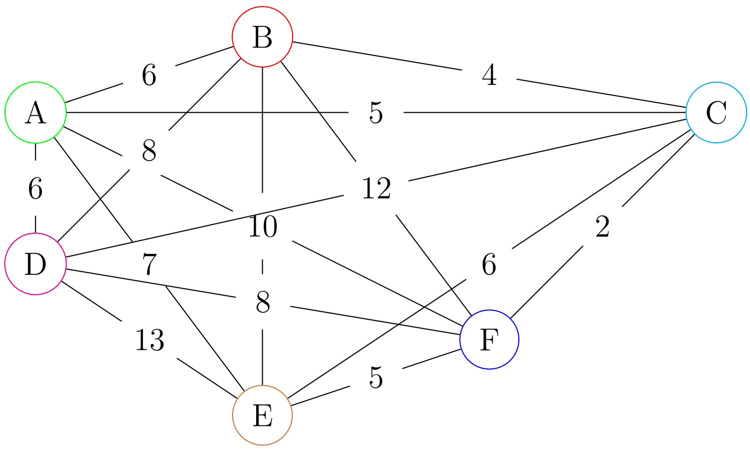
O número de modos em que os meninos ficam juntos corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só. Se houvesse um só menino teríamos

$$(4-1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda. Para cada um destes, temos duas configurações possíveis, a saber, um deles à esquerda do outro e vice–versa. Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$ e o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é $24 - 12 = 12$.

174*. [default,ex:permut-caixeiro-viajante]

(ENEM) João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEFA**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitante as cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamente entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEFA** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1mim20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

Resposta:

formalizar

$$\frac{P(5)}{2} = \frac{5!}{2} = 60caminhos$$

portanto, ele gasta

$$60caminhos \times 1min30s = 90min$$

175*. [default,ex:permut-familia-restaurante]

Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentres essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

Resposta:

Exraído de: http://www.tutorbrasil.com.br/estudo_matematica_online/faq_matematica/comb01_2.php

Como pai e mãe devem ficar juntos, vamos tratá-los como se fossem uma única pessoa.

O número de permutações circulares sobre um conjunto de 5 elementos é

$$(5-1)! = 4! = 24.$$

Para cada uma destas permutações, temos duas configurações possíveis, a saber, a mãe à esquerda do pai e vice–versa.

Assim, a quantidade de disposições diferentres essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos é $2 \times 24 = 48$.

176*. [default,ex:permut-bandeiras-praca]

(VUFU-MG (1996)) Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octagonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

Resposta:

$$Pc(7).P(2) = 6!2! = 720.2 = 1440$$

A.10 Funções

177@. [default,ex:circuitos]

Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?

Resposta:

$C(e,s) :=$ conjunto dos circuitos combinacionais com e entradas e s saídas

Cada circuito em $C(e,s)$ implementa uma função $\{0,1\}^e \to \{0,1\}^s$, isto é,

$$C(e,s) \sim \left(\{0,1\}^s\right)^{(\{0,1\}^e)},$$

e, consequentemente,

$$|C(e,s)| = \left|\left(\{0,1\}^s\right)^{(\{0,1\}^e)}\right| \overset{\text{C. 60}}{=} |\{0,1\}^s|^{|\{0,1\}^e|} \overset{\text{C. 57}}{=} \left(|\{0,1\}|^s\right)^{|\{0,1\}|^e} \overset{\text{T. 62}}{=} (2^s)^{2^e} = 2^{s2^e}$$

178@. [default,ex:aniversarios]

De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

Resposta:

Se P é um conjunto de n pessoas, então cada maneira de acontecerem os aniversários das pessoas em P corresponde a uma função $a\colon P \to [365]$ que associa a cada pessoa $p \in P$ seu aniversário $a(p) \in [365]$.

Assim o número de maneiras diferentes de acontecerem os aniversários das pessoas em P é o número de funções $P \to [365]$, que é

$$\left|[365]^P\right| \overset{\text{C. 60}}{=} |[365]|^{|P|} = 365^n$$

179#. [default,ex:recorrencia-numero-funcoes]

Deduza que existem n^k funções $[k] \to [n]$ através dos seguintes passos.

(a) Defina $f(k,n) :=$ número de funções $[k] \to [n]$.

(b) Observe que cada função $f\colon [k] \to [n]$ corresponde a um par (x,g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g\colon [k-1] \to [n]$ corresponde às imagens de $1, \ldots k-1$ por f.

(c) Use esta observação para descrever $f(k,n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

Resposta:

A recorrência é

$$f(k,n) = \begin{cases} n, & \text{se } k = 1, \\ nf(k-1,n), & \text{se } k > 1. \end{cases}$$

Desenvolvendo, chegamos a

$$f(k,l) = \ldots = n^u f(k-u,n),$$

onde

$$u = \min\{l \in \mathbb{N} \mid k - l \leq 1\}$$

ou seja

$$u = k-1,$$

e

$$f(k,n) = n^{k-1} f(k-(k-1),n) = n^{k-1} f(1,n) = n^{k-1} n = n^k.$$

180⋆. [default,ex:subconj-morse]

As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (_) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:

- 3 símbolos: (_ , . , _)
- 4 símbolos: (. , . , _ , .)
- 5 símbolos: (_ , _ , . , _ , .)

Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos?

Resposta:

formalizar

$$\sum_{i=1}^{8} |\{\_,.\}^i| = \sum_{i=1}^{8} |\{\_,.\}|^i = \sum_{i=1}^{8} 2^i = (2^{8+1}-1)-1 = 512-2 = 510$$

181*. [default,ex:subconj-palavras]

(VUNESP-04) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

Resposta:

$$2^{n+1} - 2 = 2^{5+1} - 2 = 2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$$

resolver usando $B = \{0, 1\}$ e $\sum_{i=1}^{n} |B^i| = |2^A| - 1$

A.11 Subconjuntos

182$^{@}$. [default,ex:mega-sena]

A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma k-*aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

(a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?

(b) Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?

(c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

(d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

Resposta:

(a) Cada possível resultado de um sorteio é um subconjunto de 6 elementos de [60]. O número de possíveis resultados na mega–sena é

$$\left|\binom{[60]}{6}\right| = \binom{|[60]|}{6} = \binom{60}{6} = \frac{60!}{54!6!} = 50\,063\,860.$$

(b) Este também é o número de apostas simples. A chance de ganhar com uma aposta simples, portanto, é

$$\frac{1}{50\,063\,860} < \frac{1}{50\,000\,000}.$$

(c) Uma 7-aposta é um subconjunto de 7 elementos de [60]. O número de 7-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{7}\right| = \binom{|[60]|}{7} = \binom{60}{7} = \frac{60!}{53! \times 7!} = 386\,206\,920.$$

A chance de ganhar com uma 7-aposta $A = \{a_1, \dots, a_7\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{7}{6} = \frac{7!}{1! \times 6!} = 7,$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma 7–aposta é

$$\frac{7}{\binom{60}{6}},$$

ou seja, 7 vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

(d) Uma k-aposta é um subconjunto de k elementos de $[60]$. O número de k-apostas possíveis é

$$\left|\binom{[60]}{k}\right| = \binom{|[60]|}{k} = \binom{60}{k}.$$

A chance de ganhar com uma k-aposta $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ é a chance de que algum subconjunto de 6 elementos de A seja o sorteado. O número de tais subconjuntos é

$$\left|\binom{A}{6}\right| = \binom{|A|}{6} = \binom{k}{6},$$

e, portanto, a chance de ganhar com uma k–aposta é

$$\frac{\binom{k}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{k_6}{60_6} = \frac{k_6}{36\,045\,979\,200},$$

ou $\binom{k}{6} = k_6/720$ vezes maior que a chance de ganhar com uma aposta simples.

k	$\binom{k}{6}$
6	1
7	7
8	28
9	84
10	210
11	462
12	924
13	1716
14	3003
15	5005

183⋆. [default,ex:sena-dezena]

O sorteio 2052 da mega-sena (23 de junho de 2018) ficou famoso porque pela primeira vez na história da loteria, todos os seis números sorteados (50, 51, 56, 57, 58 e 59) pertenciam à mesma dezena.

Considerando todos os sorteios equiprováveis, qual a probabilidade de um sorteio da mega-sena (seis números entre 1 e 60) pertencerem à mesma dezena?

Resposta:

$$\frac{\binom{9}{6} + 5 \times \binom{10}{6}}{\binom{60}{6}} = \frac{81}{3\,575\,990} < 0.0023\%$$

184#. [default,ex:complemento-binomial]

Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A| - k}.$$

Resposta:

185⋆. [default,ex:cumprimentos]

Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

Resposta:

O primeiro aluno cumprimenta 54 alunos; o segundo, 53; o terceiro, 52; etc. São $\sum_{i=0}^{54} i = 1485$ cumprimentos.

186#. [default,ex:complemento-binomial-inteiro]

Prove[55] que

$$\binom{[n]}{k} \sim \binom{[n]}{n - k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

Resposta:

[55]**Sugestão:** use o Exercício 184

187$^{\#}$. [default,ex:sequencias-binarias-k-1s]

Quantas são as sequências binárias de n dígitos com

- exatamente k dígitos 1s?
- pelo menos k dígitos 1s?
- no máximo k dígitos 1s?

Resposta:

As posições dos 1's de uma sequência binária identificam unicamente a sequência. Então o número de sequências binárias de n dígitos com exatamente k dígitos 1 corresponde ao número de k-subconjuntos de $[n]$, que é

$$\binom{n}{k}.$$

188*. [default,ex:pessoas-na-sala]

Numa sala[56] há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé se

(a) as cadeiras são idênticas?

(b) as cadeiras são distintas?

Resposta:

Cada modo de essas 7 pessoas ocuparem a sala é uma escolha de quais ficarão sentadas. Chamando de P o conjunto das 7 pessoas e entendendo que os lugares em que as pessoas estão sentadas ou em pé são indiferentes, queremos saber o número de elementos do conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \subset P \mid |X| \leq 5\}.$$

Como

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{5} \{X \subset P \mid |X| = k\} = \bigcup_{k=0}^{5} \binom{P}{k},$$

temos

$$|\mathcal{S}| = \sum_{i=0}^{5} \left| \binom{P}{i} \right| = \sum_{i=0}^{5} \binom{|P|}{i} = \sum_{i=0}^{5} \binom{7}{i} = 120.$$

[56]Questão de vestibular da PUC-SP; contribuição de Gabriel Gugik

189*. [default,ex:triplas-somando-30]

De quantas maneiras[57] podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

Resposta:

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos conjuntos de 3 números naturais de 1 a 30 de modo cuja soma é par, isto é,

$$\mathcal{S} = \left\{ T \in \binom{[30]}{3} \mid \sum_{t \in T} t \text{ é par} \right\},$$

Dado $T \in \binom{[30]}{3}$, temos que $\sum_{t \in T} t$ é par se e somente se

(a) todos os elementos de T são pares, ou

(b) um dos elementos de T é par,

e portanto

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_P \cup \mathcal{S}_I,$$

onde

$$\mathcal{S}_P = \left\{ T \in \binom{[30]}{3} \mid \text{ todo } t \in T \text{ é par} \right\},$$

e

$$\mathcal{S}_I = \left\{ T \in \binom{[30]}{3} \mid \text{ somente um } t \in T \text{ é par} \right\}.$$

Como $\mathcal{S}_P$ e $\mathcal{S}_I$ são disjuntos,

$$|\mathcal{S}| \stackrel{???}{=} |\mathcal{S}_P| + |\mathcal{S}_I|.$$

Sejam P e I os conjuntos dos pares e ímpares em $[30]$, respectivamente, isto é,

$$\begin{aligned} P &= \{2, 4, \dots, 30\} \\ I &= \{1, 3, \dots, 29\}. \end{aligned}$$

Então

(a) os elementos de $\mathcal{S}_P$ correspondem aos subconjuntos de tamanho 3 de P, e

[57] Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

(b) os elementos de $\mathcal{S}_I$ correspondem aos pares (X, Y) de subconjuntos de $[30]$ onde

   i. $X \subseteq P$ e $|X| = 1$, e
   ii. $Y \subseteq I$ e $|Y| = 2$,

   isto é

   i. $X \in \binom{P}{1}$, e
   ii. $Y \in \binom{I}{2}$.

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_P &= \binom{P}{3}, \\ \mathcal{S}_I &\equiv \binom{P}{1} \times \binom{I}{2}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}| = |\mathcal{S}_P| + |\mathcal{S}_I| = \left|\binom{P}{3}\right| + \left|\binom{P}{1} \times \binom{I}{2}\right| = \binom{|P|}{3} + \binom{|P|}{1}\binom{|I|}{2} \\ = \frac{|P|_3}{3!} + \frac{|P|_1}{1!}\frac{|I|_2}{2!} = \frac{15_3}{3!} + \frac{15_1}{1!}\frac{15_2}{2!} \\ = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} + \frac{15}{1}\frac{15 \times 14}{2 \times 1} = (5 \times 7 \times 13) + 15(15 \times 7) \\ = (5 \times 7)(13 + 15 \times 3) = 35(13 + 45) = 35 \times 58 = 2030. \end{aligned}$$

190⋆. [default,ex:campeonato-de-futebol]

Ao final de um campeonato de futebol[58], somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

Resposta:

Sejam n, j, v, e e respectivamente o número total de equipes, jogos, vitórias e empates no campeonato.

Sabemos que cada vitória vale 3 pontos, cada empate vale 1 ponto, que derrotas não pontuam e que a soma do total de pontos é 35, isto é

$$3v + 2e = 35,$$

[58]Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

e, portanto,

$$v = \frac{35 - 2e}{3}.$$

Por outro lado, para cada jogo temos uma vitória ou dois empates, isto é,

$$j = v + \frac{e}{2},$$

e, portanto,

$$j = \frac{35 - 2e}{3} + e = \frac{35 + e}{3}$$

isto é,

$$e = 3j - 35.$$

Não pode haver mais que 35 empates, isto é,

$$e \leq 35,$$

e, portanto,

$$3j - 35 \leq 35,$$

isto é,

$$j \leq 70/3 < 24.$$

Como o número de empates é um inteiro não negativo, temos que ter

$$e = 3j - 35 \geq 0,$$

isto é,

$$j \geq 35/3 > 11.$$

e, portanto,

$$11 < j < 24,$$

ou seja

$$12 \leq j \leq 23.$$

Como cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez, temos

$$j = \binom{n}{2},$$

e, portanto,

$$12 \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \leq 23,$$

isto é,

$$24 \leq n(n-1) \leq 46,$$

ou seja

$$0 \leq n^2 - n - 24 \leq 22,$$

e, consequentemente,

$$e \in \{10, 28\}$$

Como

$$v = \frac{35 - 2e}{3},$$

temos que $35 - 2e$ tem que ser múltiplo de 3, o que permite concluir que

$$e = 10.$$

191$^{\#}$. [default,ex:soma-binomial-combinatoria]

Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

Resposta:

Temos

$$2^{[n]} = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k},$$

e portanto

$$\left|2^{[n]}\right| = \left|\bigcup_{k=0}^{n} \binom{[n]}{k}\right|,$$

ou seja,

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

192*. [default,ex:hipergeometrica-baralho]

Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

Resposta:

(a) Num universo de $\binom{52}{10}$ mãos possíveis, são exatamente as ocorrências em que essas 2 cartas sejam de espadas, $\binom{52/4}{2}$, e, ainda, que elas não estejam no restante do baralho (i.e., estejam na mão), $\binom{52-52/4}{(52-52/4)-2}$.
Assim, a supracitada probabilidade é

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{37}}{\binom{52}{10}}.$$

(b) É a quantidade de ocorrências de 2 cartas para cada um dos 4 naipes,

$$\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2} = \binom{13}{2}^4,$$

no mesmo evento em que essas 8 cartas não estejam no restante do baralho, $\binom{39}{8}$. Ou seja, $\binom{13}{2}^4\binom{39}{8}$.

193*. [default,ex:hipergeometrica]

Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

Resposta:

Seja B o conjunto das bolas e seja $A \subseteq B$ o conjunto das bolas azuis em B. Cada amostra de n bolas de B com exatamente k bolas azuis corresponde a um par (X, Y) de subconjuntos de B onde

(a) $X \subseteq A$ e $|X| = k$,

(b) $Y \subseteq B - A$ e $|Y| = n - k$,

isto é,

(a) $X \in \binom{A}{k}$ e

(b) $Y \in \binom{B-A}{n-k}$.

Consequentemente o número de tais amostras é o tamanho do conjunto

$$S = \binom{A}{k} \times \binom{B-A}{n-k},$$

isto é $\boxed{\text{justificar cada passagem}}$

$$\begin{aligned}
|S| &= \left|\binom{A}{k} \times \binom{B-A}{n-k}\right| = \left|\binom{A}{k}\right|\left|\binom{B-A}{n-k}\right| \\
&= \binom{|A|}{k}\binom{|B-A|}{n-k} = \binom{|A|}{k}\binom{|B|-|A|}{n-k} \\
&= \binom{a}{k}\binom{(a+v)-a}{n-k} = \binom{a}{k}\binom{v}{n-k}
\end{aligned}$$

194*. [default,ex:grafo]

Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

(a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?

(b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?

(c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G| + 1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências $(3, 1, 2, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 2, 3)$ e $(3, 2, 3, 1, 2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

Resposta:

(a) Cada grafo de n vértices é um subconjunto de $\binom{[n]}{2}$. Existem $2^{\binom{n}{2}}$ tais subconjuntos.

(b) Cada grafo de n vértices e m arestas é um subconjunto de tamanho m de $\binom{[n]}{2}$. Existem

$$\binom{\binom{n}{2}}{m} = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{m}$$

tais subconjuntos.

(c) Cada descrição de um grafo G arestas corresponde a um par (p, s) onde p é uma permutação de G e s é uma função $G \to \{0, 1\}$ indicando se a aresta $\{u, v\}$ está escrita em ordem crescente ou não.

O número de representações, portanto, é

$$|G! \times \{0,1\}^G| = |G!||\{0,1\}^G| = |G|!|\{0,1\}|^{|G|} = m!2^m.$$

A.12 Composições

195*. [default,ex:composicoes]

Quantas composições admite um inteiro n?

Resposta:

O número de composições de n é

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

196*. [default,ex:composicoes-fracas]

Quantas composições fracas com até n parcelas admite um inteiro n?

Resposta:

O número de composições fracas de n com até n parcelas é

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} = \binom{2n}{n+1}$$

197*. [default,ex:bolas-identicas-e-urnas-nao-m-vazias]

De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

Resposta:

Cada distribuição k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas corresponde a uma distribuição de $k - nm$ bolas idênticas por n urnas distintas, onde depois acrescentamos m bolas a cada urna.

O número de distribuições de b bolas idênticas por u urnas distintas é o número de u composições fracas de b e é (ref?)

$$\binom{b+u-1}{u-1}.$$

O número de distribuições de $k-nm$ bolas idênticas por n urnas distintas, portanto é

$$\binom{n+(k-nm)-1}{n-1} = \binom{k-n(m-1)-1}{n-1}.$$

198*. [default,ex:bolas-identicas-e-urnas-nao-f-vazias]

De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

Resposta:

Sendo $[n]$ o conjunto das urnas e

$$s = \sum_{u=1}^{n} m(u),$$

cada distribuição corresponde a uma distribuição de $k-s$ bolas idênticas por n urnas distintas, onde depois acrescentamos $m(u)$ bolas a cada urna $u \in [n]$, e portanto temos

$$\binom{n+(k-s)-1}{n-1} = \binom{n+k-1-\sum_{u=1}^{n} m(u)}{n-1}.$$

199#. [default,ex:solucoes-sum-xi]

Em função dos valores de k e n, quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq n.$

Resposta:

(a) Estas são as k-composições fracas de n cujo número é $\binom{n+k-1}{k-1}$.

(b) Para cada $p \in [0..n]$, o número de soluções inteiras não negativas distintas de

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = p$$

é

$$\binom{p+k-1}{k-1}.$$

O número de soluções inteiras não negativas distintas de

$$0 \leq \sum_{i=1}^{k} x_i \leq n,$$

então é

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{p+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}.$$

```
sage: %attach lib/rsolve.py
sage: rsolve([3,-1,3],init=[(0,3),(1,3),(2,7)],
  verbose=sys.stdout)
sage: var("k,p,n")
(k, p, n)

sage: sum(binomial(p+k-1,k-1),p,a=0,b=n)
binomial(k + n, k)
```

(Jukna, 2001, exerc. 1.7) sugere provar a igualdade acima "via triângulo de Pascal".

$200^{\#}$. [default,ex:combinacoes-lineares]

Seja $k, n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$ de quantas maneiras distintas podemos escrever n como sendo uma *combinação linear* de k inteiros positivos ($x_i \in \mathbb{N}$ e $x_i < n$, com $i \in [k]$) multiplicados por constantes também inteiras positivas ($a_i \in \mathbb{N}$ e $a_i < n$, com $i \in [k]$), isto é

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n.$$

Resposta:

---

rc se os coeficientes tem que ser positivos, é bom chamar isso de "combinação linear"?

rc Para $k = 2$ e $n = 3$ a resposta é 2?
$1 \times 2 + 2 \times 1$ e $2 \times 1 + 1 \times 2$?
a resposta diz $\binom{2\times3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$.

A multiplicação de k inteiros $x_i \mid x_i \in X$ e $|X| = k$ por constantes $a_i \mid a_i \in \mathbb{N}$, corresponde a distribuição de $n+(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i)$ bolas idênticas por k urnas distintas, sem restrição, e portanto

$$\binom{n + (\sum_{i=1}^{k} a_i x_i) - 1}{k-1} = \binom{2n-1}{k-1}$$

$201^{\#}$. [default,ex:moedas-5-2]

Num certo país, as moedas são só de dois tipos: 2 e 5 centavos. De quantas maneiras é possível trocar

(a) 12 centavos
(b) 20 centavos
(c) 92 centavos
(d) N centavos

por moedas de 2 e/ou de 5 centavos?

Resposta:

Neste caso, estamos procurando soluções inteiras para

$$2.a + 5.b = N,$$

onde $a, b \in \mathbb{N}$ representam a quantidade de moedas de 2 e 5 centavos, respectivamente, que vamos utilizar para realizar o troco de 12, 20 e 92 centavos.

Podemos reescrever a equação acima apenas em função de b, isto é,

$$a(b) = (N - 5b)/2.$$

Como N é *par* nos três casos mencionados, temos que $a(b) \in \mathbb{N}$, apenas quando b for *par* ($b = 2k, k \in \mathbb{N}$) **e** $N - 5b \geq 0$ ou $N - 5.2k \geq 0$, onde $k + 1$ representa o número de b's que são pares, incluindo zero.

Então, o número de maneiras distintas que podemos trocar N centavos, com N *par*, usando moedas de 2 e 5 centavos, é o tamanho do conjunto de todos os pares ordenados $\{(a(b), b) = (a(2k), 2k) \in \mathbb{N}^2 \mid a(2k) = (N - 5.2k)/2\}$ que é o valor do maior k possível mais uma unidade.

O maior valor de k pode ser calculado como

$$\begin{aligned} k^* &= \max\{l \in \mathbb{N} \mid N - 5.2l \geq 0\} \\ &= \max\{l \in \mathbb{N} \mid l \leq N/10\} \\ &= \lfloor N/10 \rfloor \end{aligned}$$

(a) para $N = 12$, temos que $k^* = \lfloor 12/10 \rfloor = 1$ e portanto o número de trocas possíveis é 2 com $b = \{0, 2\}$ e $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ e $(2, 5, 5)$.

(b) para $N = 20$, temos que $k^* = \lfloor 20/10 \rfloor = 2$ e portanto o número de trocas possíveis é 3 com $b = \{0, 2, 4\}$.

(c) para $N = 92$, temos que $k^* = \lfloor 92/10 \rfloor = 9$ e portanto o número de trocas possíves é 10 com $b = \{0, 2, ..., 9\}$

(d) Para todo N *par*, a expressão determinada anteriormente é valida. Agora considere o caso em que N é *ímpar*, então $a(b)$ será inteiro se, e somente se, b for ímpar ($b = 2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}$) e

$$(N - 5b)/2 = (N - 5(2k + 1))/2$$

também for inteiro.

Então, o número de maneiras distintas que podemos trocar N centavos, com N *ímpar*, usando moedas de 2 e 5 centavos, é o tamanho do conjunto de todos os pares ordenados $\{(a(b), b) = (a(2k + 1), 2k + 1) \in \mathbb{N}^2 \mid a(2k + 1) = (N - 5.2(k + 1))/2\}$ que é o valor do maior k possível mais uma unidade.

O maior valor de k^* pode ser calculado como

$$\begin{aligned} k^* &= \max\{l \in \mathbb{N} \mid N - 5.(2l + 1) \geq 0\} \\ &= \max\{l \in \mathbb{N} \mid l \leq (N - 5)/10\} \\ &= \lfloor (N - 5)/10 \rfloor \end{aligned}$$

Por exemplo

- se $N = 5$, temos que $k^* = \lfloor (5 - 5)/10 \rfloor = 0$, e então, temos 1 troca possível
- se $N = 15$, temos que $k^* = \lfloor (15 - 5)/10 \rfloor = 1$, e então, temos 2 trocas possíveis

- se $N = 57$, temos que $k^* = \lfloor (57-5)/10 \rfloor = 5$, e então, temos 6 trocas possíveis

Dessa forma, o número de trocas possíveis de N centavos em moedas de 2 e 5 centavos é

$$nt(N) = \begin{cases} 1 + \lfloor N/10 \rfloor, & \text{se } N \text{ é par} \\ 1 + \lfloor (N-5)/10 \rfloor, & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

conferir (dm) - nada elegante - pode ser simplificado

202. [default,ex:dota]

No jogo Defense of the Ancients (DotA) o *herói* tem três diferentes tipos de *orbs*. Cada combinação de três *orbs*, quaisquer que sejam seus tipos, resulta numa *arma*.

(a) De quantas diferentes *armas* dispõe o *herói*?

(b) Responda à mesma pergunta para a versão generalizada onde existem k diferentes tipos de *orbs* e cada combinação de n *orbs* resulta numa *arma*.

Resposta:

(a) Trata-se do número de soluções não negativas de

$$o_1 + o_2 + o_3 = 3,$$

que é

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10.$$

(b) Trata-se do número de soluções não negativas de

$$o_1 + \ldots + o_n = k,$$

que é

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

A.13 Inclusão/Exclusão

203[@]. [default,ex:multiplos]

Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

Resposta:

Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos denotar por M_p o conjunto dos números em [1000] que são divisíveis por p ou, equivalentemente, que são múltiplos de p.

Observe que

$$M_p = \left\{ p, 2p, \ldots, \left\lfloor \frac{1000}{p} \right\rfloor p \right\},$$

e portanto

$$|M_p| = \left\lfloor \frac{1000}{p} \right\rfloor.$$

Fazendo

$$\begin{aligned} A_1 &= M_3, \\ A_2 &= M_5, \\ A_3 &= M_7, \end{aligned}$$

temos

$$
\begin{aligned}
|M_3 \cup M_5 \cup M_7| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= (-1)^{1+1} \sum_{I \in \binom{3}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{2+1} \sum_{I \in \binom{3}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{3+1} \sum_{I \in \binom{3}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \{\{1,2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \left(\left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{3\}} A_i \right| \right) \\
&\quad - \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{1,3\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2,3\}} A_i \right| \right) \\
&\quad + \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \right| \right) \\
&= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= (|M_3| + |M_5| + |M_7|) - (|M_3 \cap M_5| + |M_3 \cap M_7| + |M_5 \cap M_7|) \\
&\quad + (|M_3 \cap M_5 \cap M_7|) \\
&= (|M_3| + |M_5| + |M_7|) - (|M_{15}| + |M_{21}| + M_{35}|) + (|M_{105}|) \\
&= \left(\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor \right) \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor \right) \\
&= (333 + 200 + 142) - (66 + 47 + 28) + (9) \\
&= 675 - 141 + 9 = 543
\end{aligned}
$$

Generalizando o raciocínio, dados um inteiros positivos $n, d_1, d_2, \ldots, d_k$, o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$ é

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{k} M_{d_i}\right| &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[k]}{i}} \left|\bigcap_{j \in I} M_{d_j}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[k]}{i}} \left|M_{\prod_{j \in I} d_j}\right| \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{[k]}{i}} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{j \in I} d_j} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=1}^{|D|}(-1)^{i+1} \sum_{I \in \binom{D}{i}} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{d \in I} d} \right\rfloor,
\end{aligned}$$

onde

$$D := \{d_1, \ldots, d_k\}.$$

204*. [default,ex:multiplos-3-4-5]

Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, ex 6.1)

Inicialmente, vamos estabelecer uma forma para contar os múltiplos de um inteiro p menores ou iguais em $[n]$.

Dado $p \in \mathbb{N}$, vamos denotar $M_{p,n}$ o conjunto dos números em $[n]$ que são múltiplo de p. Observe que

$$M_{p,n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k.p \in \mathbb{N} \text{ e } k.p \leq n\}$$

onde o último elemento, $k.p \leq n$, pode ser determinado da seguinte forma

$$\begin{aligned}
k &= \max\{l \in \mathbb{N} \mid l.p \leq n\} \\
&= \max\{l \in \mathbb{N} \mid l \leq n/p\} \\
&= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.
\end{aligned}$$

Então,

$$M_p = \left\{1p, 2p, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor p\right\}$$

e, portanto

$$|M_p| = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor .$$

Para contarmos quantos são os múltiplos inteiros e positivos de 3 ou de 4 mas não são de 5 que são menores ou iguais à 2001, devemos contar todos aqueles que são múltiplos de 3 ou de 4 ou de 5, inclusive, e subtrair destes aqueles que são múltiplos de 5, isto é,

$$|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001}) - M_{5,2001}|$$

e como $M_{5,2001} \subseteq (M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})$ temos que

$$|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001}) - M_{5,2001}| = |(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})| - |M_{5,2001}|$$

Basta então calcular

$$|M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001}|$$

Fazendo

$$\begin{aligned} A_1 &= M_{3,2001}, \\ A_2 &= M_{4,2001}, \\ A_3 &= M_{5,2001}, \end{aligned}$$

temos

$$
\begin{aligned}
|M_3 \cup M_4 \cup M_5| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= (-1)^{1+1} \sum_{I \in \binom{3}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{2+1} \sum_{I \in \binom{3}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{3+1} \sum_{I \in \binom{3}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \{\{1,2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \left(\left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{3\}} A_i \right| \right) \\
&\quad - \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{1,3\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2,3\}} A_i \right| \right) \\
&\quad + \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \right| \right) \\
&= (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&\quad + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= (|M_{3,2001}| + |M_{4,2001}| + |M_{5,2001}|) \\
&\quad - (|M_{3,2001} \cap M_{4,2001}| + |M_{3,2001} \cap M_{5,2001}| + |M_{4,2001} \cap M_{5,2001}|) \\
&\quad + (|M_{3,2001} \cap M_{4,2001} \cap M_{5,2001}|) \\
&= (|M_{3,2001}| + |M_{4,2001}| + |M_{5,2001}|) \\
&\quad - (|M_{12,2001}| + |M_{15,2001}| + M_{20,2001}|) \\
&\quad + (|M_{60,2001}|) \\
&= \left(\left\lfloor \frac{2001}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{5} \right\rfloor \right) \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{2001}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2001}{20} \right\rfloor \right) \\
&\quad + \left(\left\lfloor \frac{2001}{60} \right\rfloor \right) \\
&= (667 + 500 + 400) - (166 + 133 + 100) + (33) \\
&= 1567 - 399 + 33 = 1201.
\end{aligned}
$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}|(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001}) - M_{5,2001}| &= |(M_{3,2001} \cup M_{4,2001} \cup M_{5,2001})| - |M_{5,2001}| \\ &= 1201 - \left\lfloor \frac{2001}{5} \right\rfloor \\ &= 1201 - 400 = 801\end{aligned}$$

Portanto temos 801 números que são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5.

205*. [default,ex:multiplos-4-6-10]

Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 10 000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10?

Resposta:

Seja $p \in \mathbb{N}$ e

$$|M_p| = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

o tamanho do conjunto dos números em $[n]$ que são múltiplos de p.

Para contarmos quantos são os múltiplos inteiros e positivos de 4 ou de 6 ou de 10 que são menores ou iguais à 10 000, basta tomar a união dos conjuntos dos múltiplos de cada conjunto

$$|M_{4,10000} \cup M_{6,10000} \cup M_{10,10000}|.$$

E para calcular o tamanho deste conjunto, basta aplicarmos o princípio da inclusão-exclusão, fazendo

$$\begin{aligned} A_1 &= M_{4,10000}, \\ A_2 &= M_{6,10000}, \\ A_3 &= M_{10,10000}, \end{aligned}$$

temos

$$
\begin{aligned}
|M_4 \cup M_6 \cup M_{10}| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= (-1)^{1+1} \sum_{I \in \binom{3}{1}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{2+1} \sum_{I \in \binom{3}{2}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + (-1)^{3+1} \sum_{I \in \binom{3}{3}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\
&= \sum_{I \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \in \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| + \sum_{I \in \{\{1,2,3\}\}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
|M_4 \cup M_6 \cup M_{10}| = &\left(\left| \bigcap_{i \in \{1\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{3\}} A_i \right| \right) \\
&- \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{1,3\}} A_i \right| + \left| \bigcap_{i \in \{2,3\}} A_i \right| \right) \\
&+ \left(\left| \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i \right| \right) \\
= &(|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) \\
&+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3|)
\end{aligned}
$$

Ou ainda,

$$
\begin{aligned}
|M_4 \cup M_6 \cup M_{10}| = &(|M_{4,10000}| + |M_{6,10000}| + |M_{10,10000}|) \\
&- (|M_{4,10000} \cap M_{6,10000}| + |M_{4,10000} \cap M_{10,10000}| + |M_{6,10000} \cap M_{10,10000}|) \\
&+ (|M_{4,10000} \cap M_{6,10000} \cap M_{10,10000}|)
\end{aligned}
$$

É importante observar que

$$
\begin{aligned}
M_{4,10000} \cap M_{6,10000} &= M_{12,10000}, \\
M_{4,10000} \cap M_{10,10000} &= M_{20,10000}, \\
M_{6,10000} \cap M_{10,10000} &= M_{30,10000}, \\
M_{4,10000} \cap M_{6,10000} \cap M_{10,10000} &= M_{60,10000},
\end{aligned}
$$

e, portanto

$$
\begin{aligned}
|M_4 \cup M_6 \cup M_{10}| &= (|M_{4,10000}| + |M_{6,10000}| + |M_{10,10000}|) \\
&\quad - (|M_{12,10000}| + |M_{20,10000}| + M_{30,10000}|) \\
&\quad + (|M_{60,10000}|) \\
&= \left(\left\lfloor \frac{10000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{10} \right\rfloor \right) \\
&\quad - \left(\left\lfloor \frac{10000}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10000}{30} \right\rfloor \right) \\
&\quad + \left(\left\lfloor \frac{10000}{60} \right\rfloor \right) \\
&= (2500 + 1666 + 1000) - (833 + 500 + 333) + (166) \\
&= 5166 - 1666 + 166 = 3666.
\end{aligned}
$$

Portanto temos 3666 números que são os inteiros positivos menores ou iguais a 10000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10.

conferir (dm)

206*. [default,ex:solucoes-inteiras-limitadas]

Qual o número de soluções inteiras de[59]

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5?$$

Resposta:

Seja R o conjunto das soluções inteiras de

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12\colon\ 0 \leq x_i \leq 5.$$

Então

$$R = S - G$$

[59]**Sugestão:** Para cada $i \in [3]$, considere o conjunto

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1+x_2+x_3 = 12$ e $G \subseteq S$ é o conjunto das soluções em que $x_i > 5$ para algum $i \in [3]$. Consequentemente,

$$|R| = |S - G| \stackrel{???}{=} |S| - |G| \stackrel{???}{=} \binom{12+3-1}{3-1} - |G| = \binom{14}{2} - |G| = 91 - |G|.$$

Fazendo

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

temos

$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|G| &= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{3}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} G_i \right| \\
&= |G_1| + |G_2| + |G_3| - (|G_1 \cap G_2| + |G_1 \cap G_3| + |G_2 \cap G_3|) + |G_1 \cap G_2 \cap G_3|
\end{aligned}$$

Seja agora $(x_1, x_2, x_3) \in G_1$ e seja

$$x := x_1 - 6.$$

Como $x_1 > 5$, então

$$x + x_2 + x_3 = 6, \tag{A.3}$$

e portanto, existe uma bijeção entre G_1 e o conjunto das soluções inteiras não negativas de (A.3), e portanto (C. ??)

$$|G_1| = \binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28.$$

Por raciocínio análogo concluímos que

$$|G_1| = |G_2| = |G_3| = 28.$$

Observe ainda que se

$$(x_1, x_2, x_3) \in G_1 \cap G_2,$$

então necessariamente

$$x_1 = x_2 = 6,$$

e consequentemente,

$$x_3 = 0,$$

e portanto,

$$|G_1 \cap G_2| = 1,$$

e, pelo mesmo raciocínio

$$|G_1 \cap G_2| = |G_1 \cap G_3| = |G_2 \cap G_3| = 1.$$

Mais ainda, concluímos também que

$$|G_1 \cap G_2 \cap G_3| = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
|R| &= 91 - |G| \\
&\overset{\text{C. ??}}{=} 91 \\
&- (|G_1| + |G_2| + |G_3| - (|G_1 \cap G_2| + |G_1 \cap G_3| + |G_2 \cap G_3|) + |G_1 \cap G_2 \cap G_3|) \\
&= 91 - (3 \times 28 - 3 \times 1 + 0) = 91 - 84 + 3 \\
&= 10.
\end{aligned}$$

207#. [default,ex:primos-leq-111]

Usando o princípio da Inclusão/Exclusão e o fato de que os números compostos (i.e., $a = b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} - 1$ não é composto nem primo) menores ou iguais a n são divisíveis por algum número primo menor ou igual a k tal que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, determine:

(a) O número de primos que são menores ou iguais a 111

(b) O número de primos menores ou iguais a n

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, p. 118, exemplo 6.2)

(a) We want to find a systematic method rather than just list all primes that are less than 111. Let t be the number of composite numbers in the set $A = \{1, 2, ..., 111\}$. Then we are looking for $111 - t - 1$ (since 1 is neither prime nor composite). If b is a factor of some $a \in A$, then $111 \geq a = bc$, where c is also an integer. Hence one of b or c is less than or equal to $\lfloor \sqrt{111} \rfloor$, where

$\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer less than or equal to x. Thus all composite numbers in A are divisible by at least one of the primes $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, and $p_4 = 7$. Let A_{p_i} be the subset of multiples of p_i in A. We have to determine the cardinality of the union of the four sets A_2, A_3, A_5, and A_7.

We count the composite numbers in the following manner. First we count all multiples of 2, then the multiples of 3, and so on. Since numbers of the form $p_i p_j m$ $(i \neq j)$, such as 6 and 10, are counted twice, we take out the multiples of 6, 10, 15, and so on. But then the numbers of the form $p_i p_j p_k m$, such as 30 and 42, are not counted at all, since each was counted 3 times in the first step and then was taken out three times in the second step, so we have to add the multiples of 30, 42, and so on. Finally, we have consider the numbers of the form $p_1 p_2 p_3 p_4 m$, which have been counted 4 times in the first step, taken out 6 times in the second step, and counted 4 times in the third step, so that we need to take them out one more time. Note that there are $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ multiples of m in the set $\{1, 2, ..., n\}$. It follows that

$$\begin{aligned}
&|A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\
&= \left\lfloor \frac{111}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{7} \right\rfloor \\
&\quad - \left\lfloor \frac{111}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{14} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{111}{35} \right\rfloor \\
&\quad + \left\lfloor \frac{111}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{42} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{70} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{105} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{111}{210} \right\rfloor \\
&= 55 + 37 + 22 + 15 \\
&\quad - 18 - 11 - 7 - 7 - 5 - 3 \\
&\quad + 3 + 2 + 1 + 1 - 0 \\
&= 85
\end{aligned}$$

Hence we find that the set $\{1, 2, ..., 111\}$ contains exactly $111 + 4 - 1 - 85 = 29$ prime numbers (here we add 4 because we have counted p_1, p_2, p_3, and p_4 as being composite).

(b) (Andreescu and Feng, 2004, p. 119)

More generally, let n be a positive integer greater than 1. We want to determine the number of primes in the set $S = \{1, 2, ..., n\}$. Let us observe that every composite number in S is a multiple of at least one prime less than or equal to $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Let $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_k$ be the sequence of primes less than or equal to $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. For each p_i in this sequence we denote by A_{p_i} the subset of multiples of p_i in A. Then the number of primes less than or equal to n is

$$n + k - 1 - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_{p_i}\right|,$$

onde k indica a quantidade de números primos que é menor ou igual a $\sqrt{n}$ e p_i é o i-ésimo menor número primo, com $p_1 = 2$.

208#. [default,ex:dado-repetido]

Em um jogo, um dado de 6 faces numeradas é jogado 5 vezes e o jogador ganha se o resultado da última jogada for igual ao de pelo menos uma das jogadas anteriores. Qual é a probabilidade de ganhar neste jogo?[60]

Resposta:

Uma série de k jogadas de um dado de n faces pode ser representada por uma sequência de $(r_1, \dots, r_k) \in [n]^k$ onde cada $r_i \colon i \in [k]$ representa o resultado da i–ésima jogada.

Assim, as sequências que representam vitória do jogador são as sequências

$$V(n,k) := \left\{(r_1, \dots, r_k) \in [n]^k \mid r_k = r_i \text{ para algum } 1 \leq i < k\right\},$$

e a probabilidade de uma vitória é

$$p(n,k) = \frac{|V(n,k)|}{|[n]^k|} = \frac{|V(n,k)|}{n^k}.$$

Para cada $i \in [k-1]$, seja $G(n,k,i)$ o conjunto das sequências que são vencedoras porque o resultado da última jogada é igual ao da i–ésima, isto é,

$$G(n,k,i) := \left\{(r_1, \dots, r_k) \in [n]^k \mid r_k = r_i\right\},$$

de forma que

$$V(n,k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} G(n,k,i),$$

[60]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 4)

e

$$|V(n,k)| = \left|\bigcup_{i=1}^{k-1} G(n,k,i)\right| = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[k-1]}{i}} \left|\bigcap_{j\in I} G(n,k,j)\right|$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[k-1]}{i}} |G(n,k,I)|,$$

onde

$$G(n,k,I) := \bigcap_{j\in I} G(n,k,j) = \bigcap_{j\in I} \left\{(r_1,\ldots,r_k)\in[n]^k \mid r_k = r_j\right\}$$
$$= \left\{(r_1,\ldots,r_k)\in[n]^k \mid r_k = r_j \text{ para todo } j\in I\right\},$$

Observando que existe uma correspondência entre $G(n,k,I)$ e $[n]^{[k]-I}$, que se expressa formalmente pela função que associa cada $(r_1,\ldots,r_k)\in G(n,k,I)$ à função $[k]-I\to[n]$ dada por

$$j\mapsto r_j \text{ para todo } j\in[k]-I,$$

temos que

$$|G(n,k,I)| = \left|[n]^{[k]-I}\right| = |[n]|^{|[k]-I|} = n^{|[k]|-|I|} = n^{k-|I|},$$

e

$$|V(n,k)| = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[k-1]}{i}} |G(n,k,I)|, = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[k-1]}{i}} n^{k-|I|}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1} \sum_{I\in\binom{[k-1]}{i}} n^{k-i} = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\left|\binom{[k-1]}{i}\right| n^{k-i}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\binom{|[k-1]|}{i} n^{k-i} = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\binom{k-1}{i} n^{k-i}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\binom{k-1}{k-1-i} n^{k-i} \overset{\text{j=k-i}}{=} \sum_{j=k-1}^{1}(-1)^{k-j+1}\binom{k-1}{j-1} n^{j}$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{k-i+1}\binom{k-1}{i-1} n^{i}.$$

Para $n = 6$ e $k = 5$, temos

$$\begin{aligned}
|V(6,5)| &= \sum_{i=1}^{5-1}(-1)^{5-i+1}\binom{5-1}{i-1}6^i = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{6-i}\binom{4}{i-1}6^i = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i}\binom{4}{i-1}6^i \\
&= (-1)^1\binom{4}{1-1}6^1 + (-1)^2\binom{4}{2-1}6^2 + (-1)^3\binom{4}{3-1}6^3 + (-1)^4\binom{4}{4-1}6^4 \\
&= -\binom{4}{0}6^1 + \binom{4}{1}6^2 - \binom{4}{2}6^3 + \binom{4}{3}6^4 = -1\times 6^1 + 4\times 6^2 - 6\times 6^3 + 4\times 6^4 \\
&= 6(-1 + 4\times 6^1 - 6\times 6^2 + 4\times 6^3) = 6(-1 + 24 + 6^3(-1+4)) \\
&= 6(23 + 3\times 6^3) = 6\,(23 + 3\times 216) = 6\times 671 \\
&= 4026
\end{aligned}$$

e

$$p(6,5) = \frac{|V(6,5)|}{6^5} = \frac{4026}{6^5} = \frac{671}{6^4} = \frac{671}{1296} > 51.77\%.$$

209#. [default,ex:re-emparelhamento]

Uma classe tem $2n$ estudantes agrupados em n duplas[61].

(a) Mostre que existem $(2n)!/(2^n n!)$ maneiras de agrupar os $2n$ estudantes em n duplas.

(b) Considere um agrupamento inicial dos $2n$ estudantes em n duplas. De quantas maneiras pode-se reagrupar os estudantes de forma que cada dupla esteja quebrada (ou seja, de forma que cada dupla seja diferente)?

Resposta:

(a) Seja $S(2n)$ o conjunto das sequências sobre $[2n]$, isto é,

$$S(2n) = \{s = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}) \mid s \in [2n]!\}$$

Seja $SO(2n)$ o conjunto das sequências sobre $[2n]$ de elementos ordenados aos pares (ou as duplas) de tal forma que

$$SO(2n) = \{s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}) \mid a_{2k-1} < a_{2k} \text{ para todo } k \in [n]\}$$

[61] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 8)

Seja $F\colon [2n]! \to SO(2n)$ a função que associa cada sequência de $s \in [2n]!$ a sequencia de elementos ordenados aos pares equivalente de s, isto é, se
$$s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}),$$
então
$$F(s) = (min(a_1, a_2), max(a_1, a_2), \ldots, min(a_{2n-1}, a_{2n}), max(a_{2n-1}, a_{2n})).$$

Então, para cada sequência $s \in [2n]!$, o conjunto $F^{-1}(s)$ representa o conjunto das sequências equivalente a sequência $F(s)$ de elementos ordenados aos pares e a quantidade de tais sequências é o número de formas que podemos rearranjar as sequências permutando os pares, ou seja, $|F^{-1}(s)| = 2^n$. Em outras palavras, o número de sequências de elementos ordenados aos pares equivalentes sobre $[2n]!$ é $|SO(n)|$.
Do Corolário 50 temos
$$\begin{aligned}
|[2n]!| &= \sum_{s \in F([2n]!)} |F^{-1}(s)| = \sum_{s \in SO(2n)} |F^{-1}(s)| \\
&= \sum_{s \in SO(2n)} 2^n = |SO(2n)|.2^n,
\end{aligned}$$

ou seja
$$|SO(2n)| = \frac{|[2n]!|}{2^n}.$$

Seja $SD(2n)$ o conjunto das sequências ordenadas aos pares e aos *pivôs* (menor elemento da dupla) sobre $[2n]$ de tal forma que
$$\begin{aligned}
SD(2n) = \{s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}) \\
&\mid a_{2k-1} < a_{2k} \text{ para todo } k \in [n] \\
&\text{e } a_{2l-1} < a_{2(l+1)-1} \text{ para todo } l \in [n-1]\}
\end{aligned}$$

Observe que cada uma dessas sequências representa um único agrupamento dos $2n$ estudantes em n duplas, isto é, não exitem duas sequências neste conjunto que irão representar um mesmo agrupamento dos $2n$ estudantes em n duplas.
Seja $G\colon SO(2n) to SD(2n)$ a função que associa cada sequência de $s \in SO(2n)$ a $SD(2n)$, isto é, se
$$s = (a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}),$$

então
$$G(s) = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots, b_{2n-1}, b_{2n})$$
onde b_{2k-1} é o k-ésimo menor valor dentre os $a_{2l-1} \colon l \in [n]$ pivôs e b_{2k} é o seu par correspondente, isto é, a_{2l}.

Então para cada sequência $s \in SO(2n)$, o conjunto $G^{-1}(s)$ é o conjunto das sequências ordenadas aos pares e aos pivôs equivalente a $G(s)$ e a quantidade dessas é o número de formas que podemos permutar as n duplas, isto é, $n!$. Em outras palavras, o número de sequênias de elementos ordenados aos pares e aos pivôs sobre $[2n]$ é $|SD(2n)|$.

Do Corolário 50 temos
$$\begin{aligned} |SO(2n)| &= \sum_{s \in G(SO(2n))} |F^{-1}(s)| = \sum_{s \in SD(2n)} |F^{-1}(s)| \\ &= \sum_{s \in SD(2n)} n! = |SD(2n)|.n!, \end{aligned}$$
ou seja
$$|SD(2n)| = \frac{|SO(2n)|}{n!} = \frac{|[2n]!|}{2^n n!},$$
que é o que queremos mostrar.

(b) Seja SDQ o conjunto de sequências sobre $[2n]$ que representam agrupamentos de $[2n]$ estudantes em n duplas de forma que todas as duplas estejam quebradas com relação a um agrupamento de n duplas originais. SDQ pode ser definido como o conjunto de todas as sequências de $[2n]$ elementos ordenados aos pares e aos pivôs exceto aquelas em que pelo menos uma das duplas não está quebrada, isto é,
$$SDQ(2n) = SD(2n) - \bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n, i)$$
onde $SDJ(2n, i)$ é o conjunto de sequências sobre $[2n]$ que representam os agrupamentos de $[2n]$ estudantes em n duplas de forma que a i-ésima dupla está, isto é,
$$\begin{aligned} SDJ(2n, i) = \{s \in SD(2n) \mid\ & a_{2k} = 2i - 1 \\ & \text{e } a_{2k} = a_{2k-1} + 1 = 2i, \text{ para algum } k \in [n]\} \end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
|SDQ(2n)| &= \left| SD(2n) - \bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n,i) \right| = |SD(2n)| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n,i) \right| \\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!} - \left| \bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n,i) \right|.
\end{aligned}
$$

Temos

$$
\left| \bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n,i) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} SDJ(2n,i) \right|.
$$

Dado $I \subseteq [n]$, temos

$$
\begin{aligned}
\cap_{i\in I} SDJ(2n,i) = \ & \cap_{i \in I} \{ s \in SD(2n) \mid a_{2k} = 2i-1 \text{ e } a_{2k} = a_{2k-1} + 1 = 2i, \\
& \qquad \text{para algum } k \in [n] \} \\
= \ & \{ s \in SD(2n) \mid a_{2k} = 2i-1 \text{ e } a_{2k} = a_{2k-1} + 1 = 2i, \\
& \qquad \text{para todo } i \in [n] \text{ para algum } k \in [n] \},
\end{aligned}
$$

isto é, $\cap_{i \in I} SDJ(2n,i)$ é o conjunto das sequencias para as quais todo $i \in I$ é uma dupla não quebrada. Fazendo

$$
SDJ(2n,I) := \bigcap_{i \in I} SDJ(2n,i),
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n,i) \right| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} SDJ(2n,i) \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |SDJ(2n,I)|.
\end{aligned}
$$

Seja D_I o conjunto que representa as duplas em I, isto é,

$$
D_I = \{ d \mid d = 2i \text{ ou } d = 2i-1 \text{ para todo } i \in I \}
$$

e consequentemente $|D_I| = 2\,|I|$.
Existe uma bijeção natural entre $SDJ(2n,I)$ e $SD(|2n - D_I|)$, que associa cada $s \in SDJ(2n,I)$ à sequência $\overline{s} \in SD(|2n - D_I|)$.

Consequentemente

$$|SDJ(2n, I)| = |SD(|[2n - D_I|]|.$$

Então

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n, i)\right| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |SDJ(2n, I)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |SD(|[2n] - D_I|)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |SD(|2n - 2|I||)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |SD(2n - 2k)| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |SD(2(n - k))| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} |SD(2(n - k))| \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}(n-k)!}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
|SDQ(2n)| &= \frac{(2n)!}{2^n n!} - \left|\bigcup_{i=1}^{n} SDJ(2n, i)\right| \\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}(n-k)!} \\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \frac{(2(n-k))!}{2^{n-k}(n-k)!}
\end{aligned}$$

Por exemplo, para $n = 3$, temos

$$\begin{aligned}
|SDQ(2.3)| &= |SD(2.3) - |SDJ(2.3)| \\
&= \frac{(2.3)!}{2^3 3!} - \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \binom{3}{k} \frac{(2(3-k))!}{2^{3-k}(3-k)!} \\
&= \frac{6!}{2^3 3!} - \Big[(-1)^{1+1} \binom{3}{1} \frac{(2(3-1))!}{2^{3-1}(3-1)!} \\
&\quad + (-1)^{2+1} \binom{3}{2} \frac{(2(3-2))!}{2^{3-2}(3-2)!} + (-1)^{3+1} \binom{3}{3} \frac{(2(3-3))!}{2^{3-3}(3-3)!} \Big] \\
&= \frac{6.5.4.3!}{2^3 3!} - \left(\frac{3!}{2!1!} \frac{4!}{2^2 2!} - \frac{3!}{1!2!} \frac{2!}{2^1 1!} + \frac{3!}{0!3!} \frac{0!}{2^0 0!} \right) \\
&= 15 - (9 - 3 + 1) = 15 - 7 = 8.
\end{aligned}$$

Ou seja, para $n = 3$, temos $6(= 2.3)$ estudantes e

- existem 15 formas distintas de agrupar os 6 estudantes em 3 duplas distintas.
- existem 8 maneiras de agrupar os 6 estudantes em duplas de forma que cada dupla esteja quebrada.

$210^{\#}$. [default,ex:totient]

A *função tociente de Euler*[62] (ou *função ϕ de Euler*) é a função que, dado $n \in \mathbb{N}$ conta o número de inteiros positivos menores que n e sem divisores em comum com n, isto é

$$\phi(n) := |\{k \in [n] \mid \mathsf{mdc}(k, n) = 1\}|.$$

Por exemplo, $\phi(12) = 4$ pois há quatros inteiros positivos, 1, 5, 7 e 11 que são menores ou iguais a 12 e sem divisores em comum com 12. Convenciona-se que $\phi(1) = 1$.

Use o Princípio de Inclusão–Exclusão para verificar que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

onde $p_1, \ldots, p_k$ são os primos distintos que dividem n.

[62]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

[63]: Se p é primo, então nenhum inteiro menor que p tem divisor em comum com p e, portanto, $\phi(p) = p-1$. Se p é primo e $e \geq 1$, então $\phi(p^e)$ é o número de termos da sequência $(1, 2, 3, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p, \ldots, p^e)$ que não são divisíveis por p. Os números divisíveis por p nesta sequência são $p, 2p, 3p, \ldots, p^e$. Assim

$$\phi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Resposta:

Seja $n = p_1^{e_1} \ldots p_m^{e_m}$ a decomposição de n em fatores primos. Um número $a \in [n]$ não tem divisores em comum com n se, e somente se não é divisível por nenhum número em $\{p_1, \ldots, p_m\}$.

Para cada $i \in [m]$, seja A_i o conjunto dos números em A divisíveis por p_i.

O conjunto dos números de A que não tem divisores em comum com n então é

$$A - \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

e

$$\phi(n) = \left|A - \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = n - \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right|.$$

Como

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[m]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Como

$$A_i = \left\{1p_i, 2p_i, \ldots, \frac{n}{p_i}p_i\right\},$$

então

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}$$

Além disso, dado $I \subseteq [m]$, o conjunto $\bigcap_{i \in I} A_i$ é o conjunto dos elementos em A que são divisíveis simultaneamente por cada $p_i \in I$, ou seja, são divisíveis por $\prod_{i \in I} p_i$ e, consequentemente,

$$\left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| = \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} = n \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i}$$

[63]**Sugestão:** Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

e daí

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} n\prod_{i\in I}\frac{1}{p_i} = n\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[m]}{k}} \prod_{i\in I}\frac{1}{p_i}$$

$$= n\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[m]}(-1)^{|I|+1}\prod_{i\in I}\frac{1}{p_i} = -n\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[m]}\prod_{i\in I}\frac{-1}{p_i},$$

e

$$\phi(n) = n - \left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = n - \left(-n\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[m]}\prod_{i\in I}\frac{-1}{p_i}\right) = n + n\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[m]}\prod_{i\in I}\frac{-1}{p_i}$$

$$= n\left(1 + \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[m]}\prod_{i\in I}\frac{-1}{p_i}\right)$$

$$\overset{???}{=} n\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

---

rc não entendi como fazer a última passagem

A.14 Pontos Fixos de Permutações e Desarranjos

211. [default,ex:permutsempfixo-um-ponto]

(a) Qual o número de permutações sobre um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?
(b) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com exatamente k pontos fixos?
(c) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com pelo menos k pontos fixos?
(d) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com no máximo k pontos fixos?
(e) Mostre que o número de permutações sem ponto fixo e o número de permutações com extamente um ponto fixo sobre um conjunto de n elementos difere de um para todo $n \in \mathbb{N}$[64].

Resposta:

(a) Dados $n \in \mathbb{N}$ e $i \in [n]$, seja $G(n, i)$ conjunto das permutações sobre $[n]$ cujo único ponto fixo é i, isto é,

$$G(n,i) := \{(a_1, \dots, a_n) \in [n]! \mid a_j \neq j \text{ para todo } j \neq i\}.$$

Então o conjunto das permutações sobre $[n]$ com exatamente um ponto fixo é

$$E_n := \bigcup_{i \in [n]} G(n,i).$$

Observe que existe uma bijeção natural entre $G(n,i)$ e o conjunto $D(n,i)$ dos desarranjos sobre $[n] - \{i\}$, dada por

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, i, a_{i+1}, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

e, consequentemente,

$$|G(n,i)| = |D(n,i)| \overset{\text{T. } 90}{=} (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!},$$

[64] Adaptado de (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.3)

para todo $i \in [n]$.

Como os conjuntos $G(n,i) : i \in [n]$ são dois a dois disjuntos entre si, então

$$
\begin{aligned}
|E_n| &= \left|\bigcup_{i\in[n]} G(n,i)\right| = \sum_{i\in[n]} |G(n,i)| = \sum_{i\in[n]} |D_{n-1}| = n|D_{n-1}| \\
&= n\left((n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}\right) \\
&= n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

(b) Dados $n \in \mathbb{N}$ e $I \subseteq [n]$, seja $G(n,I)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ cujos pontos fixos são exatamente os elementos de I.

Como no item anterior, existe uma bijeção natural entre $G(n,I)$ e o conjunto $D(n,I)$ dos desarranjos sobre $[n] - I$, e daí,

$$
|G(n,I)| \overset{???}{=} |D(n,I)| \overset{\text{T. }90}{=} (n-|I|)!\sum_{k=0}^{n-|I|}\frac{(-1)^k}{k!}.
$$

O conjunto das permutações sobre n com exatamente k pontos fixos então é

$$
G(n,k) := \bigcup_{I\in\binom{[n]}{k}} G(n,I),
$$

e como os conjuntos $G(n,I) : I \in \binom{[n]}{k}$ são dois a dois disjuntos entre si, então

$$
\begin{aligned}
|G(n,k)| &= \left|\bigcup_{I\in\binom{[n]}{k}} G(n,I)\right| \overset{???}{=} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} |G(n,I)| \\
&= \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} (n-|I|)!\sum_{i=0}^{n-|I|}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} (n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \\
&= \left|\binom{[n]}{k}\right|(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \overset{???}{=} \binom{n}{k}(n-k)!\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} \\
&= \frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

conferir (rc)

(c) completar

(d) completar

(e) Basta verificar

$$\begin{aligned}
||D_n| - |E_n|| &= \left| n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \\
&= \left| n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \right| \\
&= \left| n! \left(\sum_{k=n}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) \right| = \left| n! \frac{(-1)^n}{n!} \right| \\
&= |(-1)^n| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja, a diferença entre $D_n - E_n$ é $(-1)^n$ (positiva ou negativa) dependendo de n.

Por exemplo, para $n = 3$,

$$\begin{aligned}
|D_3| &= |\{(2,3,1),(3,1,2)\}| = 2, \\
|E_3| &= |\{(1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)\}| = 3.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, para $n = 4$,

$$\begin{aligned}
|D_4| =& |\{(2,1,4,3),(2,3,4,1),(2,4,1,3),(3,1,4,2),(3,4,1,2), \\
&(3,4,2,1),(4,1,2,3),(4,3,1,2),(4,3,2,1)\}| = 9, \\
|E_4| =& |\{(1,3,4,2),(1,4,2,3),(2,3,1,4),(2,4,3,1), \\
&(3,1,2,4),(3,2,4,1),(4,1,3,2),(4,2,1,3)\}| = 8
\end{aligned}$$

212. [default,ex:permutsempfixo-12345-fixos]

De quantas maneiras podemos arranjar os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 10$ de forma que nenhum dos cinco primeiros (i.e. 1,2,3,4,5) apareçam em suas posições naturais/originais[65]?

[65] Extraído de (Tuffley, 2009, ex. 4)

Resposta:

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $m \leq n$, seja $F(n,m)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ nas quais nenhum elemento de $[m]$ é ponto fixo. Então

$$F(n,m) = [n]! - E(n,m),$$

onde $E(n,m)$ o conjunto das permutações sobre $[n]$ para as quais pelo menos um elemento de $[m]$ é ponto fixo. Consequentemente,

$$|F(n,m)| = |[n]! - E(n,m)| \overset{???}{=} |[n]!| - |E(n,m)| = n! - |E(n,m)|$$

Por outro lado,

$$E(n,m) := \bigcup_{i=1}^{m} G(n,i)$$

onde $G(n,i)$ é o conjunto das permutações sobre $[n]$ cujo único ponto fixo é i. Consequentemente (T. 87),

$$|E(n,m)| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[m]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} G(n,i) \right| = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[m]}{k}} |G(n,I)|,$$

onde

$$G(n,I) := \bigcap_{i \in I} G(n,i),$$

Observe que existe uma bijeção natural entre $G(n,I)$ e $([n]-I)!$, e daí (T.???)

$$\begin{aligned} |E(n,m)| &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[m]}{k}} |G(n,I)| \\ &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[m]}{k}} (n-|I|)! \\ &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[m]}{k}} (n-k)! \\ &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1} \binom{m}{k} (n-k)!, \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
|F(n,m)| = n! - |E(n,m)| &= n! - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}(n-k)! \\
&= n! + \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}(n-k)!.
\end{aligned}
$$

Para $n = 10$ e $m = 5$, temos

$$
\begin{aligned}
|F(10,5)| &= 10! + \sum_{k=1}^{5}(-1)^{k}\binom{5}{k}(10-k)! \\
&= 10! + \left(-\binom{5}{1}9! + \binom{5}{2}8! - \binom{5}{3}7! + \binom{5}{4}6! - \binom{5}{5}5!\right) \\
&= 10! + (-5.9! + 10.8! - 10.7! + 5.6! - 1.5!) \\
&= 10! + (-1\,814\,400 + 403\,200 - 50\,400 + 3\,600 - 120) \\
&= 3\,628\,800 - 1\,458\,120 \\
&= 2\,170\,680.
\end{aligned}
$$

E portanto, temos 2 170 680 maneiras distintas de arranjar $[10]$ de forma que os cinco primeiros números naturais não estejam em sua posição original.

213. [default,ex:permutsempfixo-i-i+1]

(a) Quantas permutações sobre $[n]$ existem de forma que i nunca é seguido de $i+1$ para nenhum $1 \leq i < n$?[66]

(b) Como essa resposta muda, se incluirmos a restrição de que n não pode ser seguido de 1?

Resposta:

(a) Sejam

$G(n,i)$**:** permutações sobre $[n]$ tais que i é seguido por $i+1$, isto é,

$$G(n,i) := \{f \in [n]! \mid f(k) = i \text{ e } f(k+1) = i+1 \text{ para algum } k \in [n-1]\}$$

[66]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

E_n**:** permutações de $[n]$ tal que i nunca é seguido por $i+1$ para nenhum $i \in [n-1]$, isto é,

$$E_n := [n]! - \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i}$$

Observe que

$$|E_{n,i}| = \left| [n]! - \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i} \right| = |[n]!| - \left| \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i} \right| = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{[n-1]} G_{n,i} \right|$$

Temos que

$$\left| \bigcup_{i\in[n-1]} G_{n,i} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n-1]}{k}} \left| \bigcap_{i\in I} G_{n,i} \right|.$$

Dado que $I \subseteq [n-1]$, temos

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} G_{n,i} &= \bigcap_{i\in I} \{ f \in [n]! \mid f(k) = i \text{ e } f(k+1) = i+1 \text{ para algum } k \in [n-1] \} \\ &= \{ f \in [n]! \mid f(k_l) = i \text{ e } f(k_l+1) = i+1 \\ &\quad \text{para todo } i \in I \text{ e para algum } (k_1, \ldots, k_{|I|}) \in [n-1]_{|I|} \},\end{aligned}$$

isto é, $\cap_{i\in I} G_{n,i}$ é o conjunto das permutações sobre $[n]$ para as quais para todo $i \in I$ e para alguma sequência $(k_1, \ldots, k_{|I|}) \in [n-1]_{|I|}$, o elemento i é seguido pelo elemento $i+1$.
Fazendo

$$G_{n,I} := \bigcap_{i\in I} G_{n,i}$$

temos

$$\begin{aligned}\left| \bigcup_{i=1}^{n-1} G_{n,i} \right| &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{I \in \binom{[n-1]}{k}} \left| \bigcap_{i\in I} G(n,i) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} |G(n,I)|.\end{aligned}$$

Existe uma bijeção natural entre $G(n,I)$ e $([n]-I)!$, que associa cada $f \in G(n,I)$ à função $\overline{f} \in ([n]-I)!$ dada por

$$\overline{f}(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I.$$

Consequentemente

$$|G(n,I)| = |([n]-I)!| = (|[n]|-|I|)! = (n-|I|)!$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n-1} G(n,i)\right| &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} |G(n,I)| \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} (n-|I|)! = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n-1]}{k}} (n-k)! \\
&\overset{??}{=} \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}(n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{(n-1)!(n-k).(n-1-k)!}{k!(n-1-k)!} = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{(n-1)!(n-k)}{k!} \\
&= (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(n-k)}{k!},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|E_n| &= n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} G_{n,i}\right| \\
&= n! - (n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(n-k)}{k!} \\
&= (n-1)!\left(n - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}(n-k)}{k!}\right)
\end{aligned}$$

(b) Com a modificação, temos que

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} G(n,i)\right| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}|G(n,I)| \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}(n-|I|)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}(n-k)! \\
&\overset{??}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} \\
&= n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!},
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
|E_n| &= n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} G_{n,i}\right| \\
&= n! - n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n! + n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!} \\
&= n!\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right) = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\right)
\end{aligned}
$$

que corresponde exatamente ao número de desarranjos, ou permutações sem ponto fixo, de um conjunto de n elementos.

214. [default,ex:permutsempfixo-correcaoprova]

Suponha que numa disciplina de pós-graduação, a avaliação final é realizada por meio da entrega de um relatório técnico, em forma de artigo científico, sobre um trabalho prático desenvolvido com os conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina. O professor desta disciplina quer desenvolver em seus alunos/estudantes a capacidade de avaliação de artigos científicos e propõe que a avaliação dos relatórios seja feita pelos próprios alunos.

Considerando que a turma é composta de apenas 5 alunos, de quantas maneiras distintas o professor pode distribuir os relatórios técnicos aos alunos de forma que um mesmo autor não avalie o seu artigo.

Resposta:

Extraído de https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement

$$
\begin{aligned}
|Av| = |A|! \sum_{i=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!} &= 5! \sum_{i=0}^{5} \\
&= 5! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) \\
&= 5! \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} \right) \\
&= 5! \left(\frac{120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1}{5!} \right) \\
&= 60 - 20 + 5 - 1 = 44
\end{aligned}
$$

$$f(n) = (n-1)(f(n-1) + f(n-2))$$

215. [default,ex:permutsempfixo-palavras]

Para a palavra UFPR, podemos formar quantos anagramas de forma que cada letra não apareça em sua posição original.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
D_4 = |A|! \sum_{i=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!} &= 4! \sum_{i=0}^{4} \\
&= 4! \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \right) \\
&= 4! \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \right) \\
&= 4! \left(\frac{12 - 4 + 1}{4!} \right) \\
&= 12 - 4 + 1 = 9
\end{aligned}
$$

216. [default,ex:permutsempfixo-palavras2]

Considere uma palavra formada por uma sequência de n letras A seguida de mais m letras B, quantos anagramas podemos formar dessa palavra de forma que nenhuma letra esteja em sua posição original.

Resposta:

Extraido de https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement A resposta é, obviamente, 1 ou 0 se $n = m$ ou não. A única forma de formar um anagrama sem letras em suas posições originais é trocando todos A's por B's que é possível apenas quando $n = m$.

A.15 Funções Sobrejetoras e Partições

217. [default,ex:surjection-8students3workgroups]

Em um curso de Matemática Discreta, existem 8 estudantes que serão divididos em grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar 3 projetos diferentes. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?

Resposta:

Extraído de http://people.math.umass.edu/~murray/Math_455_Eisenberg/Notes/FiniteSets.pdf

Seja $A = \{s_1, s_2, \dots, s_8\}$ o conjunto dos 8 estudantes e $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ o conjutno dos 3 projetos. Para dividir a turma de forma a atender o enunciado deve-se indicar qual o projeto que cada aluno estudará; em outras palavras, determinar uma função $f\colon A \to B$ que é *sobrejetora*.

Então, a resposta para esta questão também é o número de funções sobrejetoras que podemos formar de um conjunto com 8 elementos para um conjunto com 3 elementos, isto é,

$$\begin{aligned}
|S([8],[3])| &= \sum_{i=0}^{3} (-1)^{3-i} \binom{3}{i} i^8 \\
&= (-1)^3 \binom{3}{0} 0^8 + (-1)^2 \binom{3}{1} 1^8 + (-1)^1 \binom{3}{2} 2^8 + (-1)^0 \binom{3}{3} 3^8 \\
&= (-1).1.0 + (+1).3.1 + (-1).3.2^8 + (+1).1.3^8 \\
&= 3^8 - 3.2^8 + 3 = 5796.
\end{aligned}$$

218. [default,ex:funcoes-nao-injetoras-nem-sobrejetoras]

Dado $n \in \mathbb{N}$, quantas funções $[n] \to [n]$ não são injetoras nem sobrejetoras?

Resposta:

Fazendo

$I(n)$: funções injetoras $[n] \to [n]$,

$S(n)$: funções sobrejetoras $[n] \to [n]$,

$R(n)$: funções $[n] \to [n]$ que não são injetoras nem sobrejetoras,

temos

$$R(n) = [n]^{[n]} - (I(n) \cup S(n)).$$

Sabendo que, para toda função $f : A \to B$ onde $|A| = |B|$, f é sobrejetora se e somente se f é injetora, então $I(n) = S(n)$.

Logo

$$R(n) = [n]^{[n]} - I(n).$$

e consequentemente,

$$|R(n)| = |[n]^{[n]} - I(n)| = |[n]^{[n]}| - |I(n)| = n^n - n_n = n^n - n!$$

219. [default,ex:surjection-programa]

Quantos programas distintos composto por 10 linhas de código podemos construir usando as instruções `store`, `load`, `jump` e `add` de forma que cada instrução seja utilizada pelo menos uma vez?

Resposta:

Pelo Corolário 96, temos

$$\begin{aligned}
|S([10],[4])| &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^{4-i} \binom{4}{i} i^{10} \\
&= (-1)^{4-0}\binom{4}{0}0^{10} + (-1)^{4-1}\binom{4}{1}1^{10} + (-1)^{4-2}\binom{4}{2}2^{10} \\
&+ (-1)^{4-3}\binom{4}{3}3^{10} + (-1)^{4-4}\binom{4}{4}4^{10} \\
&= (-1)^4 1.0 + (-1)^3 4.1 + (-1)^2 6.1\,024 \\
&+ (-1)^1 4.59\,049 + (-1)^0 1.1\,048\,576 \\
&= 0 - 4 + 6144 - 236\,196 + 1\,048\,576 \\
&= 818\,520
\end{aligned}$$

220. [default,ex:surjection-segimage]

Em processamento de imagens, a tarefa de atribuir a cada *pixel* (*picture element*) p da imagem um rótulo (ou região) l, de forma que todos os rótulos sejam usados pelo menos uma vez, é conhecida como *segmentação da imagem* e pode ser descrita por uma função $S\colon P \to L$, onde $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ é o conjunto de pontos da imagem e $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$. No caso particular em que $m = 2$ (por exemplo, rótulo "branco" e "preto") , o processo também é conhecido por binarização ou *thresholding* da imagem.

(a) Como descrito acima, a função de segmentação S é uma injeção, sobrejeção, bijeção, ou nenhuma das anteriores?

(b) De quantas maneiras distintas podemos segmentar uma imagem com $n = 9$ pixels em $m = 2$ regiões/rótulos?

(c) E se a restrição de uso de todos os rótulos disponíveis fosse removida, a função de segmentação se tornaria uma injeção, sobrejação, bijeção, ou nenhuma das anteriores? Neste caso, qual seria o número de funções possíveis considerando os tamanhos dos conjuntos de 220b

Resposta:

(a) Como todo pixel da imagem se relaciona com rótulos disponíveis, temos que a relação é uma função, e como todos os rótulos são relacionados, por restrição, então, a função é sobrejetora, mas como dois pixels distintos da imagem podem se relacionar a um mesmo rótulo, a função não é injetora e portanto também não é bijetora, sendo apenas sobrejetora.

(b) Considerando $n = 9$ e $m = 2$, temos que

$$
\begin{aligned}
|S([9],[2])| &= \sum_{i=0}^{2} (-1)^{2-i} \binom{2}{i} i^9 \\
&= (-1)^2 \binom{2}{0} 0^9 + (-1)^1 \binom{2}{1} 1^9 + (-1)^0 \binom{2}{2} 2^9 \\
&= (+1).1.0 + (-1).2.1 + (+1).1.2^9 \\
&= 2^9 - 2 = 512 - 2 = 510.
\end{aligned}
$$

Ou seja, considerando uma imagem com 9 (e.g., 3×3) *pixels* a ser segmentada (ou particionada) em dois rótulos (e.g., branco e preto), podemos realizar esta tarefa de 510 maneiras distintas.

(c) Não é injetora, pois dois elementos de P podem se relacionar com um mesmo elemento de L, e nem sobrejetora, pois rótulos de L podem não ser relacionados por todos pixels de P, e portanto nem bijetora. Neste caso, o número de segmentações distintas seria o número de todas a funções possíveis $P \to L$, ou seja,

$$|L^P| = |L|^{|P|} = 2^9 = 512.$$

221. [default,ex:surjection-injection]

Seja $S([m],[n])$ o conjunto das funções sobrejetoras $f\colon [m] \to [n]$ e a sua cardinalidade determinada por

$$\begin{array}{rl} 0, & \quad \textsf{se } m < n, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m, & \quad \textsf{se } m \geq n. \end{array}$$

E seja $I([m],[n])$ o conjunto das funções injetoras $f\colon [m] \to [n]$ e a sua cardinalidade determinada por

$$\begin{array}{rl} 0, & \quad \textsf{se } m < n, \\ \dfrac{n!}{(n-m)!}, & \quad \textsf{se } m \geq n. \end{array}$$

Prove que $|S([m],[n])| = |I([m],[n])|$, se $m = n$ para todo $n > 0$.

Resposta:

Com $m = n$, temos

$$|S([n],[n])| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n$$
$$|I([n],[n])| = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n}{0!} = n!$$

Basta provar por indução em n que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!$$

para todo $n > 0$.

222. [default,ex:funcoes-sobrejetoras-n-em-n-igual-fatorial-n]Prove que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n = n!.$$

Resposta:

OBS: Me parece muito forçado, mas é o que deu pra fazer. (AG)

Usando que o número de funções sobrejetoras de $[n] \to [n]$ é

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n,$$

que o número de funções injetoras de $[n] \to [n]$ é

$$n!,$$

e que estes dois conjuntos são iguais, temos que

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}i^n = n!.$$

223. [default,ex:partition-5students2workgroups]

Em um curso de Matemática Discreta, existem 5 estudantes que serão divididos em 2 grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar um mesmo problema[67]. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?

Resposta:

Seja $A = \{s_1, s_2, \ldots, s_5\}$ o conjunto dos 5 estudantes e $B = \{g_1, g_2\}$ o conjunto dos 2 grupos. Para dividir a turma de forma a atender o enunciado deve-se indicar qual o problema que cada aluno estudará; em outras palavras, determinar uma função $f\colon A \to B$ que é *sobrejetora*. No entanto, a diferenciação entre grupos não deve ser contadas, ou seja, funções f_1 e f_2 tais que $f_1^{-1}(g_1) = f_2^{-1}(g_2)$ e $f_1^{-1}(g_2) = f_2^{-1}(g_1)$ mapeam/dividem os alunos da mesma forma, e portanto somente uma dessas $|B|!$ permutações devem ser consideradas.

[67]Exercício similar à 217, mas não idêntico

Portanto, a resposta para esta questão é o número de funções sobrejetoras que podemos formar de um conjunto com 5 elementos para um conjunto com 2 elementos, dividido pelo número de permutações (grupos) que geram distribuições idênticas de alunos.

Ou ainda, a resposta para este problema é o número de 2-partições que se pode fomar a partir do conjunto A, isto é,

$$\begin{aligned}
\left\{ {[5] \atop 2} \right\} &= \frac{|S([5],[2])|}{2!} = \frac{\sum_{i=0}^{2}(-1)^{2-i}\binom{2}{i} i^5}{2!} \\
&= \frac{(-1)^2\binom{2}{0}0^5 + (-1)^1\binom{2}{1}1^5 + (-1)^0\binom{2}{2}2^5}{2!} \\
&= \frac{(+1).1.0 + (-1).2.1 + (+1).1.2^5}{2} \\
&= \frac{2^5 - 2}{2} = \frac{30}{2} = 15.
\end{aligned}$$

Uma outra forma de contar a quantidade possível de grupos seria considerando os tamanhos de grupos possíveis, isto é, pode-se formar grupos de 1 e 4 e de 2 e 3 alunos a partir de 5 alunos.

Então

$$\begin{aligned}
\binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}\binom{3}{3} &= \frac{5!}{4!1!}\frac{4!}{0!4!} + \frac{5!}{3!2!}\frac{3!}{3!0!} \\
&= \frac{5}{1}\frac{1}{1} + \frac{5.4}{2}\frac{1}{1} \\
&= 5 + 10 = 15.
\end{aligned}$$

A.16 Exercícios a Incluir

A.16.1 Conjuntos

A.16.2 Provas por Indução

1. [default,ex:teor-lame]

   Teorema de Lamé

If the Euclidean algorithm requires N steps for a pair of natural numbers a ¿ b ¿ 0, the smallest values of a and b for which this is true are the Fibonacci numbers FN+2 and FN+1, respectively.[95] More precisely, if the Euclidean algorithm requires N steps for the pair a ¿ b, then one has a ¿= FN+2 and b ¿= FN+1. This can be shown by induction.[96] If N = 1, b divides a with no remainder; the smallest natural numbers for which this is true is b = 1 and a = 2, which are F2 and F3, respectively. Now assume that the result holds for all values of N up to M - 1. The first step of the M-step algorithm is a = q0b + r0, and the Euclidean algorithm requires M - 1 steps for the pair b ¿ r0. By induction hypothesis, one has b ¿= FM+1 and r0 ¿= FM. Therefore, a = q0b + r0 ¿= b + r0 ¿= FM+1 + FM = FM+2, which is the desired inequality. This proof, published by Gabriel Lamé in 1844, represents the beginning of computational complexity theory,[97] and also the first practical application of the Fibonacci numbers.[95]

Resposta:

2. [default,ex:falso-fibonacci]

   Aproveitar o fato de que $\lceil e^{n/2-1} \rceil$ é o n-ésimo número de Fibonacci para todo $n \leq 10$ Lovász, Pelikán, and Vesztergombi (2003).

   Resposta:

3. [default,ex:sequencia-aurea]

   completetar

   Golden strings and the rabbit constant

   Start with s1 = 1 and s2 = 10. Then define sn = sn-1 + sn-2 where + means string concatenation.

   The first few golden strings are

   1 10 101 10110 10110101

   The length of sn is Fn+1, the n+1st Fibonacci number. Also, sn contains Fn 1s and Fn-1 0s. (Source: The Glorious Golden Ratio).

   If we interpret the sn as the fractional part of a binary number, the sequence converges to the rabbit constant R = 0.7098034428612913...

   It turns out that R is related to the golden ratio ϕ by

   $R = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\lfloor i\phi \rfloor}$

   Resposta:

4. [default,ex:mdc-fibonacci]

   completar

   gcd(fm,fn) = fgcd(m,n) Fibonacci GCD's, please

   The greatest common divisor of any two Fibonacci numbers is also a Fibonacci number! Which one? If you look even closer, you'll see the amazing general result:

   gcd(fm,fn) = fgcd(m,n).

   The proof is based on the following lemmas which are interesting in their own right. All can be proved by induction.

   a) gcd(fn, fn-1) = 1, for all n b) fm+n = fm+1 fn + fm fn-1 c) if m divides n, then fm divides fn

   and the ever important Euclidean Algorithm which states: if n=qm+r, then gcd(n,m)=gcd(m,r). For such n,m we have gcd(fm,fn) = gcd(fm,fqm+r) = gcd(fm,fqm+1fr+fqmfr-1) = gcd(fm,fqm+1fr) = gcd(fm,fr)

   where the 2nd equality follows from (b), the 3rd equality from (c) noting that m divides qm, and the 4th equality from noting that fm divides fqm which is relatively prime to fqm+1. Thus gcd(fn,fm)=gcd(fm,fr)

   which looks a lot like the Euclidean algorithm but with f's on top! For example since gcd(100,80)=gcd(80,20)=gcd(20,0)=20, then gcd(f100,f80)=gcd(f80,f20)=gcd

   Resposta:

5. [default,ex:reservoir-sampling]

   Considere o problema de sortear um elemento de uma lista de tamanho desconhecido, isto é, deseja-se um algoritmo que recebe como entrada uma lista l de $n \geq 1$ itens e devolve como resposta um destes itens escolhido aleatoriamente de maneira que cada item da entrada l tenha a mesma probabilidade $1/n$ de ser a resposta. A dificuldade é que o tamanho n da lista é desconhecido até que o último item seja lido e a lista não pode ser armazenada em memória.

Prove por indução em n que o seguinte algoritmo resolve este problema.

Escolhe(l)

$k \leftarrow 0$
Enquanto *a entrada l não acabou*
  $k \leftarrow k + 1$
  $p \leftarrow$ próximo item de l
  $r \leftarrow$ um número aleatório uniformemente escolhido em$[1..k]$
  Se $r = k$
    $e \leftarrow p$
Devolva e

Resposta:

cfr. Reservoir Sampling

> Indeed, let n be the (unknown) size of the list, and suppose $n = 1$. In this case there is only one element to choose from, and so the probability of picking it is 1. The case of $n = 2$ is similar, and more illustrative. Now suppose the algorithm works for n and suppose we increase the size of the list by 1 adding some new element y to the end of the list. For any given x among the first n elements, the probability we're holding x when we inspect y is $1/n$ by induction. Now we flip a coin which lands heads with probability $1/(n+1)$, and if it lands heads we take y and otherwise we keep x. The probability we get y is exactly $1/(n+1)$, as desired, and the probability we get x is $\frac{1}{n}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Since x was arbitrary, this means that after the last step of the algorithm each entry is held with probability $1/(n+1)$.

It's easy to see how one could increase the number of coins being flipped to provide a sampling algorithm to pick any finite number of elements (with replacement, although a variant without replacement is not so hard to construct using this method). Other variants, exist, such as distributed and weighted sampling.

Python's generators make this algorithm for reservoir sampling particularly nice. One can define a generator which abstractly represents a data stream (perhaps querying the entries from files distributed across many different disks), and this logic is hidden from the reservoir sampling algorithm. Indeed, this algorithm works for any iterable, although if we knew the size of the list we could sample much faster (by uniformly generating a random number and indexing the list appropriately). The start parameter given to the enumerate function makes the k variable start at 1.

6. [default,ex:balanca]

   Given nine objects, of which it is known that eight have the same weight and one is heavier, show how, in two weightings with a pan balance, the heavy one can be identified (ex. 88 de https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/finite/fm2/scan/3.pdf).

   Resposta:

A.16.3 Recorrências

7. [default,ex:recorrencia-desarranjos]

   Um *desarranjo* é uma bijeção sem ponto fixo, isto é, Uma função $f\colon A \to A$ tal que $f(a) \neq a$ para todo $a \in A$.

   Seja $D(n)$ o número de desarranjos sobre $[1..n]$.

   (a) Descreva $D(n)$ por meio de uma recorrência.

   (b) Resolva esta recorrência.

   (c) Conclua que $D(n) \approx \frac{n!}{e}$.

   Resposta:

   Ver (Andreescu and Feng, 2004, p 129)

   (a)
   $$D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1} = nD_n + (D_n - (-1)^n) = n(D_n + D_{n-1}).$$

   (b)
   $$D(n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

   (c) Lembrando a série de Taylor para e^x
   $$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!},$$
   temos
   $$e^{-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!},$$

e portanto,

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e},$$

ou seja,

$$|D(n)| \approx \frac{n!}{e} < 36.79\%\, n!$$

8. [default,ex:shellsort]

Uma sugestão para o cálculo de h (vetores-h são ordenados pelo insertionsort, onde h é a distância entre os elementos), dada pelo Knuth é

$$h(s) = 3h(s-1) + 1.$$

Resolvenod vem que

$$h(s) = (3^s - 1)/2$$

Ele mostra/comenta que essa sugestão é dificil de ser batida em mais de 20%.

Dado um tamanho de vetor n para ser ordenado, precisamos descobrir qual é o maior $h(s)$ que é menor ou igual a n.

De fato o algoritmo começa com esse tal $h(s) <= n$.

E daí vem que

$$s = \lfloor \log_3(2n+1) \rfloor .$$

Com isso, podemos determinar $h(s) <= n$ diretamente, sem usar um loop no começo do programa.

Resposta:

9. [default,ex:operacoes-algoritmo-coeficiente-binomial]

Havia o item Prove que $s(n,k) = 4(2^n - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $k \in [0..n]$. que não dá para fazer. Como viabilizar o último item?

O seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $k \in [0..n]$.

```
B'(n, k)
  Se k = 0
      Devolva 1
  Devolva B'(n, k − 1) + B'(n − 1, k − 1)
```

Sejam

$s(n,k)$**:** número de somas efetuadas na execução de $B'(n,k)$;

$m(n,k)$**:** número de multiplicações efetuadas na execução de $B(n,k)$, o algoritmo do Exercício 88 (veja o Exercício 107)

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Conclua que o algoritmo B é mais eficiente que o algoritmo B' provando que $\lim \frac{m(n,k)}{s(n,k)} = 0$.

Resposta:

(a)

$$m(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k = 0, \\ 1 + m(n-1,k-1), & \text{se } k > 0. \end{cases}$$

(b) $m(n,k) = k$ completar

(c) completar

10. [default,ex:recorrencia-crescente]

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(n) = af(n-1) + bf(n-2), \text{ para todo } n \geq 2.$$

Sob que condições a função f será não–decrescente? Justifique sua resposta.

Resposta:

Basta $1 \leq \frac{f(0)}{f(1)} \leq \frac{a-1}{b}$?

ou será

$$(b - ab)f(0) \leq (a^2 + ab + b - a)f(1)?$$

11. [default,ex:f:iterada:decrescente]

c não pode ser 0. Se $c = 0$, então $f^k(n) < 0$, para algum k natural; mas não pode ser, porque $f^k(n)$ tem imagem no conjunto dos naturais.
Só removi esse caso, em que $c = 0$, do domínio de c, passando a ser Z^+.

Sejam $c \in \mathbb{Z}^+$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) < n, \text{ para todo } n \geq c.$$

Prove que, para todo $n \geq c$

$$f^k(n) < c, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Resposta:

Temos, inicialmente, que $f(n) < n, \text{ para todo } n \geq c.$

É claro que, ao passo que k aumenta, a partir de c, o ponto $(n, f(n))$ está sempre abaixo da bissetriz, (n, n). Nesse caso,

$$\lim_{k\to\infty} f^k(n) = 0.$$

Como $c \in \mathbb{Z}^+$, então, para algum $k \in \mathbb{N}$, $f^k(n) < c$.

12. [default,ex:f:iterada:inversa]

Seja $f\colon A \to A$ uma função bijetora. Prove que

(a) f^n é uma função bijetora para todo $n \in \mathbb{N}$.
(b) $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

(a) ...
(b) Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq n$,

$$(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
(f^{n+1})^{-1} &= (f^n \circ f)^{-1} \\
&= (f^n)^{-1} \circ (f)^{-1} \\
&= (f^{-1})^n \circ (f^{-1})^1 \\
&= (f^{-1})^{n+1}.
\end{aligned}$$

Além do mais, temos que

$$(f^0)^{-1} = (f^{-1})^0 \text{ se e somente se } i = i.$$

Portanto, para todo n natural, $(f^n)^{-1} = (f^{-1})^n$.

13. [default,ex:heap:maxheapify]

    Contagem do número de comparações na reconstrução do heap (refaz/-MaxHeapify). Segundo (Cormen et al., 2009, pg.155, Sec.6.2)

    $$MH(A, n) \leq MH(A, 2n/3) + \Theta(1).$$

    Talvez

    $$MH(A, n) = MH(A, \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil) + 2$$

    Resposta:

14. [default,ex:heap:build]

    Contagem do número de comparações na montagem de um heap. Precisa de Ex 13? Segundo (Cormen et al., 2009, pg.157, Sec.6.3)

    $$B(A, n) = \sum_{h=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} MH(A, h)$$

    e

    $$B(A, n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil O(h) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} \frac{h}{2^h} \right) = O\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} \right) = O(n)$$

    Resposta:

15. [default,ex:cor:arvore-minimal]

    Uma árvore T é *minimal* se toda árvore de tamanho menor que T tem altura menor que a de T.

    Prove que se $h(T) = |T|$, então T é minimal.

    Resposta:

    Vamos provar por indução em $|T|$ que $h(T) = |T|$ é uma condição suficiente para T ser minimal.

    Seja T uma árvore de tamanho $n := |T|$ e suponha que T seja minimal.

    Adicionando um novo nó x em T como sendo filho de uma folha qualquer de T, teremos sua altura e seu tamanho incrementados por 1, além de permanecer minimal, o que completa o passo da indução.

Além disso, tome a árvore mínima M, que satisfaz

$$h(M) = |M| \implies M \text{ é minimal}$$

e, além de completar a base da indução, completa, em conjunção com o supracitado passo da indução, a prova.

16. [default,ex:cor:tamanho-minimo-arvore]

    Prove que $h(T) \leq |T|$, para toda árvore T.

    Resposta:

    Seja T uma árvore.

    O processo de construção de T não permite que incrementemos $h(T)$ sem adicionar um novo nó à T; i.e., é impossível que $h(T)$ seja incrementado sem incrementar $|T|$. Isso nos conta que, necessariamente,

    $$h(T) + x \leq |T|$$

    onde $x \in \mathbb{N}$ é a discrepância entre $|T|$ e $h(T)$ inicial. Mas como, inicialmente, temos

    $$h(\lambda) = 0 = |\lambda|,$$

    temos que $h(\lambda) - |\lambda| = 0 = x$ e, assim,

    $$h(T) \leq |T|.$$

17. [default,ex:teo:arvore-maximal]

    Uma árvore T é *maximal* se toda árvore de tamanho maior que T tem altura maior que a de T.

    Prove que T é uma árvore maximal se e somente se $E(T)$ e $D(T)$ são árvores maximais.

    Resposta:

    Essa afirmação não é verdadeira. (As subárvores E(T) e D(T) serem maximais não é uma condição suficiente para que T seja maximal. Isso se dá porque E(T) e D(T) podem ser maximais mas de tamanhos diferentes e, com isso, T não será maximal.)

    $(\rightarrow)$
    Vamos provar que $T = (r(T), E(T), D(T))$ é uma árvore maximal implica $E(T)$ e $D(T)$ serem árvores maximais.

Como $|T| = 2^{h(T)+1} - 1$, temos que

$$\begin{aligned} |T - \{r(T)\}| &= 2^{h(T)+1} - 2 \\ &= \left(2^{h(T)} - 1\right) + \left(2^{h(T)} - 1\right) \\ &= \left(2^{h(E(T))+1} - 1\right) + \left(2^{h(D(T))+1} - 1\right) \end{aligned}$$

onde os termos da última soma correspondem aos tamanhos de $E(T)$ e $D(T)$, denunciando que $E(T)$ e $D(T)$ são maximais.

18. [default,ex:geracao-permutacoes]

recorrência do algoritmo de permutações

$$T_n = \begin{cases} f(n), & \textsf{se } n = 0, \\ n\ T_{n-1}\ +\ g(n), & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

Resposta:

Desenvolvendo temos

$$\begin{aligned} T_n &= nT_{n-1} + g(n) \\ &= n((n-1)T_{n-2} + g(n-1)) + g(n) \\ &= n(n-1)T_{n-2} + ng(n-1) + g(n) \\ &= n(n-1)((n-2)T_{n-3} + g(n-2)) + ng(n-1) + g(n) \\ &= n(n-1)(n-2)T_{n-3} + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(n) \\ &\ \vdots \\ &= n(n-1)(n-2)(\ldots)(T_2) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(n) \\ &= n(n-1)(n-2)(\ldots)(2T_1 + g(2)) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(n) \\ &= n(n-1)(n-2)(\ldots)(2(1T_0 + g(1)) + g(2)) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + g(\\ &= n(n-1)(n-2)(\ldots)(2(1f(n) + g(1)) + g(2)) + \ldots + n(n-1)g(n-2) + ng(n-1) + \\ &= n!f(n) + n!g(1) + (n!/2)g(2) + (n!/3!)g(3) + (n!/4!)g(4) + \ldots \\ &\quad + (n!/(n-2)!)g(n-2) + (n!/(n-1)!)g(n-1) + g(n) \\ &= n!f(n) + \sum_{i=1}^{n} (n!/i!)g(i) \\ &= n!f(n) + n!\sum_{i=1}^{n} (1/i!)g(i) \\ &= n!f(n) + n!\sum_{i=1}^{n} (g(i)/i!). \end{aligned}$$

19. [default,ex:twitter]

    De http://en.wikipedia.org/wiki/Twitter

    > Nielsen Online reports that Twitter has a user retention rate of 40 percent. Many people drop the service after a month so the site may potentially reach only about 10% of all Internet users"

    Será possível usar isso para um exercício de recorrências?

    Resposta:

    O crescimento em função do mês é dado pela recorrência c:

    $$c_{n+1} = (1 + 0.4 - (0.4 - 0.1))c_n = 1.1c_n.$$

A.16.4 Contagem (a enquadrar por tópicos)

20. [default,ex:kelvin]

    Formalizar o seguinte argumento de Schrödinger (1944).

    > Many examples have been devised to bring this fact home to an audience, none of them more impressive than the one used by Lord Kelvin: Suppose that you could mark the molecules in a glass of water; then pour the contents of the glass into the ocean and stir the latter thoroughly so as to distribute the marked molecules uniformly throughout the seven seas; if then you took a glass of water anywhere out of the ocean, you would find in it about a hundred of your marked molecules.

    Resposta:

21. [default,ex:quadrados-mod-m]

    How many numbers are squares mod$m$?

    Resposta:

    http://www.johndcook.com/blog/2008/11/19/how-many-numbers-are-squares-mod-m

22. [default,ex:inversoes-vetor]

    Cálculo de média e variância do número de inversões num vetor.

    Resposta:

    (Feller, 1971, sec. X.6, exemplo (a))

23. [default,ex:intersecao-vazia]

Let S be a finite set, and let k be a positive integer. Determine the number of ordered k-tuples $(S_1, \ldots, S_k)$ of subsets of S such that $\bigcap_{i=1}^{k} = \emptyset$.

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, p. 121, ex 6.10)

24. [default,ex:ingressos-quartos]

The director of student activities in a boarding school wants to distribute 61 concert tickets to three dorms in such a way thatno dorm gets more tickets than the sum of the numbers of tickets the other two dorms get. In how many ways can this be done?

Resposta:

(Andreescu and Feng, 2004, ex 6.8)

25. [default,ex:cumprimentos2]

melhorar esse texto, está horrível

Na formatura de uma turma bastante segregada de 6 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas "considerados" exatamente uma vez e nenhum cumprimento foi trocado com os demais colegas.

Suponha que cada aluno tem exatamente k colegas considerados e nenhum outro aluno tem esses mesmos k alunos como considerados e, também, assuma que essa é uma relação simétrica (i.e., se A é um colega considerado de B, então B também é um colega considerado de A).

Quantos cumprimentos são distribuídos nessa formatura

(a) se $k = 1$?

(b) se $k = 2$?

(c) para um k arbitrário?

Resposta:

(a) 3.

(b) 6.

(c)

$$(0,1,2,3,4,5) \to (0,3,6,9,12,15)\,.$$

26. [default,ex:assembleia-deputados]

    Num certo país da Oceania, a câmara de deputados tem 10 membros dentre os quais 3 representam o Partido do Futebol (PF) enquanto os outros 7 representam o Partido das Celebridades (PC). Um problema é que, arbitrariamente, 4 dos 10 deputados são escolhidos ao acaso (uniformemente) para participar de programas de TV de modo que os 4 deputados escolhidos faltem na assembléia.

    (a) Qual é a probabilidade de, numa assembléia, 3 deputados do PF e 3 deputados do PC comparecerem?
    (b) Qual é a probabilidade de nenhum deputado do PF comparecer?

    Resposta:

27. [default,ex:banco]

    Uma pessoa[68] vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco mas, na hora de digitar a senha, esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. Qual o número máximo de tentativas para acertar a senha?

    Resposta:

    1344

28. [default,ex:bug]

    Um programa P recebe como entrada uma string de n caracteres alfanuméricos (letras maiúsculas e algarísmos). Neste programa existe um bug não conhecido no qual certas entradas geram saídas erradas. As entradas onde acontece o bug são de dois tipos, as que terminam com o dígito "5" e tem 3 ou mais ocorrências da letra "X", ou as que terminam com a letra "G" e tem pelo menos uma subsequência de 2 caracteres repetidos. Supondo que uma equipe de testes decidiu gerar k casos de teste (strings de entrada com saídas corretas conhecidas) para tentar encontrar erros. Qual a probabilidade de esta bateria de testes encontrar o bug?

    Resposta:

[68] Fgv 1995

A chance de uma bateria de testes com k casos de testes encontrar o bug do programa P é a quantidade conjuntos de k casos de teste, que contém pelo menos uma entrada para a qual P gera uma saída errada, dividida pela quantidade total de conjuntos com k casos de teste.

Seja E o conjunto dos conjuntos de k casos de teste que contém pelo menos uma entrada para a qual P gera uma saída errada. E seja T o conjunto de todos os conjuntos com k casos de testes.

Assim, a probabilidade de uma bateria com k casos de teste encontrar o bug é $\frac{|E|}{|T|}$.

O conjunto de todas as entradas é o conjunto $S = \{A, \ldots, Z, 0, 1, \ldots, 9\}^n$, e $|S| = 36^n$. O conjunto das entradas do tipo 1 é o conjunto B_1 e do tipo 2 é o conjunto B_2.

Temos que B_1 é o conjnto S menos o conjunto das entradas que não começam com "5" ou começam com "5" e tem 0, 1 ou 2 ocorrências de "X". Ou seja

$$|B_1| = 36^n - (36^{n-1} \times 35 + 35^{n-1} + 35^{n-2} \times (n-1) + 35^{n-3} \times \binom{n-2}{2}).$$

Temos que B_2 é o conjunto S menos o conjunto das entradas que não terminam com "G" ou terminam com "G" e não tem subsequências com 2 caracteres repetidos. Ou seja

$$|B_2| = 36^n - (36^{n-1} \times 35 + 36 \times 35^{n-2}).$$

E o conjunto com as entradas que geram erro é o conjunto $B = B_1 \cup B_2$. Assim, o tamanho do conjunto dos conjuntos com k entradas sendo pelo menos uma entrada de B é o conjunto dos subconjuntos de k elementos de S menos o conjunto dos subconjuntos de k elementos de $S \setminus B$, ou seja,

$$E = \binom{S}{k} \setminus \binom{S \setminus B}{k}$$

e

$$|E| = \left| \binom{S}{k} \setminus \binom{S \setminus B}{k} \right| = \binom{|S|}{k} - \binom{|S| - |B|}{k} = \binom{36^n - |B_1| - |B2|}{k}.$$

Como

$$T = \binom{S}{k},$$

portanto,

$$|T| = \left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k} = \binom{36^n}{k}.$$

Logo, a probabilidade de uma bateria com k casos de teste encontrar o bug é

$$\frac{|E|}{|T|} = \frac{\binom{36^n - |B_1| - |B2|}{k}}{\binom{36^n}{k}}.$$

29. [default,ex:caixa-banco]

    Uma caixa automática de banco[69] só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário deseja fazer um saque de 100 reais. De quantas maneiras diferentes a caixa eletrônica poderá fazer esse pagamento?[70]

    Resposta:

    11

30. [default,ex:campeonato]

    Em um campeonato com 10 competidores serão distribuídas 1 medalha de ouro para o campeão, 2 medalhas de prata (idênticas) para os dois seguintes e 4 medalhas de bronze (também idênticas) para os 4 seguintes. De quantas maneiras diferentes as medalhas podem ser distribuídas?

    Resposta:

    Seja C o conjunto dos competidores. Uma distribuição das medalhas corresponde a uma tripla (O, P, B) de subconjuntos de C, onde

    (a) $O \subseteq C$ e $|O| = 1$,
    (b) $P \subseteq C - O$ e $|P| = 2$,
    (c) $B \subseteq C - (O \cup P)$ e $|B| = 4$,

    isto é

[69] Fuvest 1990

[70] **Sugestão:** veja o Exercício 200

(a) $O \in \binom{C}{1}$,

(b) $P \in \binom{C-O}{2}$,

(c) $B \in \binom{C-(O\cup P)}{4}$,

Então o número de escolhas possíveis é

$$\binom{|C|}{1}\binom{|C|-1}{2}\binom{|C|-3}{4} = \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{4}$$
$$= \frac{10_1}{1!}\frac{9_2}{2!}\frac{7_4}{4!} = \frac{10}{1}\frac{9\times 8}{2\times 1}\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1} = 10\times 9\times 4\times 7\times 5$$
$$= 200\times 63 = 12600.$$

31. [default,ex:campeonato-xadrez]

Numa primeira fase de um campeonato de xadrez[71] cada jogador joga uma vez contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

Resposta:

Seja n o número de jogadores. Então

$$\binom{n}{2} = 78,$$

ou seja

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78,$$

ou seja

$$n^2 - n - 156 = 0,$$

e portanto,

```
sage:~->var("n")
sage:~->(n^2 - n - 156).roots()
[(-12, 1), (13, 1)]
```

$$n = 13.$$

[71] Fuvest 97

32. [default,ex:cursos]

    De quantas maneiras diferentes podemos escolher 5 cursos, em ordem de preferência, se o número total de cursos é 20?

    Resposta:

    Seja C o conjunto dos 20 cursos.

    Uma escolha de 5 cursos, em ordem de preferência é uma sequência ordenada de tamanho 5 de elementos de C sem repetição ou, equivalentemente, uma função injetora $[5] \to C$.

    O número de tais escolhas, portanto, é o número de tais funções que é (Corolário 69)

    $$|C_{[5]}| = |C|_{|[5]|} = 20_5 = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 = 1860480$$

33. [default,ex:par-de-zeros]

    Quantas sequências binárias de tamanho $n \geq 2$ contêm pelo menos um par de zeros consecutivos?

    Resposta:

    São $(n-2)!$ formas de dispor substrings sobre $\{0,1\}$ sobre cada uma das $n-1$ formas de dispor dois zeros consecutivos na string de tamanho n. Assim, são $(n-2)!(n-1) = (n-1)!$ strings binárias de tamanho n contendo pelo menos um par de zeros consecutivos.

34. [default,ex:um-par-de-zeros]

    Quantas sequências de binárias de tamanho 8 contêm exatamente um par de zeros consecutivos? (Note que $(1,1,0,0,0,1,1,1)$ não é uma delas.)

    Resposta:

35. [default,ex:paginas]

    Um estudante[72] terminou um trabalho que tinha n páginas. Para numerar todas essas páginas, iniciando com a página 1, ele escreveu 270 algarismos. Então o valor de n é:

    Resposta:

    126.

[72] Fuvest 99

36. [default,ex:senhas]

Um certo sistema exige que as senhas dos usuários sejam compostos somente de letras e números e tenham pelo menos entre 6 e 8, e pelo menos um caracter especial, um dígito, uma letra minúscula e uma maiúscula. Quantas senhas diferentes são possíveis?

Resposta:

completar

37. [default,ex:tamanho-arvore]

Quantas árvores de tamanho

(a) 2 existem?

(b) 3 existem?

(c) k existem?

(Repare que as árvores não são necessariamente binárias.)

Resposta:

A.16.5 Sequências

38. [default,ex:ponto-flutuante]

precisa ser melhor elaborado: `https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754`

O padrão de representação de números em ponto flutuante IEEE-754 estabelece que um número em ponto flutuante em precisão simples é representado por uma palavra de memória de 32 bits, sendo 1 bit para o sinal, 23 bits para a mantissa e 8 bits para o expoente.

Há duas representaçõe para o número zero, uma positiva e outra negativa, além de representações para +Inf (infinito positivo), -Inf (infinito negativo), qNaN ("quiet Not a Number") e sNaN ("signaling Not a Number").

(a) Quantos números diferentes podem ser representados desta maneira?

(b) Quantos são positivos?

(c) Quantos são negativos?

(d) Quantos tem valor absoluto entre 0 e 1 (inclusives)?

Resposta:

(a) $2^{32} - 4 = 4\,294\,967\,292$

(b)

(c)

(d)

39. [default,ex:imagens-quadradas]

    Número de imagens quadradas em 2 cores, armazenadas em bytes.

    Resposta:

40. [default,ex:matrizes-binarias]

    Número de matrizes binárias.

    Resposta:

41. [default,ex:m+]

    Se M é uma matriz booleana quadrada então

$$M^+ = \sum_{i=1}^{k} M^i, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Cálculo eficiente de M^+.

Resposta:

Seja M uma matriz booleana quadrada de dimensão n e seja $N = 2^n$.

Observe que as matrizes M^i: $1 \leq i \leq N+1$ não podem ser todas distintas e daí,

$$\sum_{i=1}^{N} M^i = \sum_{i=1}^{N+1} M^i.$$

Consequentemente,

$$\sum_{i=1}^{N} M^i = \sum_{i=1}^{L} M^i, \text{ para todo } L \geq N,$$

e portanto,

$$M^+ = \sum_{i=1}^{N} M^i.$$

Como só existem 2^n matrizes quadradas booleanas de dimensão n distintas, ...

42. [default,ex:n-bits-k-0s-consecutivos]

Mais genérico ainda seria... e se não fossem bits mas sim decimais (ainda considerando sequencias de zeros)?

Quantas sequências de n bits tem pelo menos k 0's consecutivos?

Resposta:

conferir (rc)

O número de sequências de n bits com k bits 0's consecutivos é $n-k+1$

Temos que dos n bits da sequência, k deles serão 0's sobrando $n-k$ 1's.

O número de tais sequências (n bits com k 0's seguidos) que podemos formar são as $n-k+1$ posições em que podemos "alocar" os k 0's – as demais posições serão preenchidas por 1's.

De outra forma, os k 0's podem aparecer começando na 1a., 2a., até a $n-k+1$ posição.

Então, o número procurado é:

$$\sum_{i=k}^{n}(n-i+1) = \sum_{i=k}^{n}(n+1) - \sum_{i=k}^{n} i = (n+1)(n-k+1) - (k+n)(n-k+1)/2 = (n-k+1)((n+1)-($$

com $t = n-k$.

A.16.6 Funções e Subconjuntos

A.16.7 Funções Injetoras e Bijetoras

43. [default,ex:birthday-attack]

birthday attack

Resposta:

44. [default,ex:algarismos]

Utilizando-se, necessariamente, os algarismos[73] 1 e 2, podemos formar k números distintos com 5 algarismos. Qual o valor de k?

Resposta:

30

A.16.8 Permutações

45. [default,ex:permutacoes-ferroviarias]

completar

No Algoritmo F, abaixo, E e S são filas e P é uma pilha.

```
F(E)
  S ← fila vazia P ← pilha vazia
  Enquanto E não está vazia ou P não está vazia
    r ← um elemento sorteado de {0, 1}
    Se P está vazia
      r ← 0
    Se E está vazia
      r ← 1
    Se r = 0
      Empilha(Desenfila(E), P)
    Enfila(Desempilha(P), S)
    Devolva S
```

(a)

Resposta:

A.16.9 Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

46. [default,ex:cartas]

consertar

[73] Mackenzie 1999

Jogo de cartas: n jogadores distintos, cada um recebe k cartas de um baralho com 52 cartas distintas (13 de cada naipe).

(a) De quantas formas distintas podemos distribuir as cartas entre os jogadores?

(b) De quantas formas distintas podemos distribuir as cartas entre os jogadores de maneira que nenhum jogador fique com mais de 1 Ás?

(c) De quantas formas distintas podemos distribuir as cartas entre os jogadores de maneira que cada jogador tenha no máximo x cartas de cada naipe?

Resposta:

47. [default,ex:binom-2n-n]

Seja n um natural qualquer. Prove que $\binom{2n}{n}$ é máximo dentre

$$\left\{\binom{2n}{0}, \binom{2n}{1}, \dots, \binom{2n}{n}, \dots, \binom{2n}{2n-1}, \binom{2n}{2n}\right\}.$$

Resposta:

Tome dois naturais a e b de modo que $a + b = 2n$.

Respeitando a relação

$$0 \leq |a - b| \leq n,$$

o valor de a que maximiza

$$\frac{(a + b)!}{a!b!}$$

é exatamente o a que torna $a!b!$ mínimo em

$$\min\{a, b\}!^2 \leq a!b! \leq \max\{a, b\}!^2;$$

i.e., $a = b = n$.

48. [default,ex:permutacoes-ordenadas-9]

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 463 582 719?

Resposta:

49. [default,ex:intersec-subconjuntos]

Sejam k, m e n inteiros tais que $0 \leq m \leq k \leq n$.

Prove que

$$\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}.$$

Resposta:

Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{k!}{m!(k-m)!}\frac{n!}{k!(n-k)!} &= \frac{n!}{m!}\frac{1}{(k-m)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}.
\end{aligned}$$

50. [default,ex:sena-acumulada]

   (a) quantas apostas simples distintas na mega-sena são necessárias para que a chance de alguma acertar seja maior que 50%?

   (b) probabilidade de alguém ganhar na mega-sena se há n apostas simples diferentes entre si.

   (c) probabilidade de alguém ganhar na mega-sena se há n apostas simples, não necessariamente diferentes entre si.

Resposta:

(Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

51. [default,ex:par=impar]

Prove que o número de subconjuntos de tamanho par de um conjunto finito é igual ao número de subconjuntos de tamanho ímpar.

Resposta:

(Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

52. [default,ex:soma-binomiais]

Prove que, para todos os naturais k e n com $n \geq k$, temos $\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

Resposta:

(Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

53. [default,ex:nota-7]

generalizar

Uma prova tem 10 questões do tipo “verdadeiro ou falso”. Quantas maneiras há de responder essas questões, sem deixar nenhuma em branco, de modo a

(a) Acertar exatamente 7 delas?

(b) E acertar pelo menos 7 delas?

Resposta:

exercícios de (Stolfi and Gomide, 2011, cap. 10)

Seja $R = \{V, F\}$ o conjunto de respostas possíveis, e $f\colon R^{10} \to [10]$ a função que mapeia uma sequência de 10 respostas ao número de acertos. O número de funções possíveis é $|\{V, F\}^{[10]}| = 2^{10} = 1024$ que é o número de maneiras possíveis de preencher essas questões, sem deixar nenhuma em branco.

Para contarmos a quantidade de possíveis acertos a, basta saber a cardinalidade do conjunto $f^{-1}(a) \mid a \in [10]$ que é dada pelo número de sequências de 10 respostas com exatamente a respostas corretas, ou ainda pelo tamanho do conjunto dos subconjuntos de $[10]$ com a elementos, i.e., $|\binom{[10]}{a}| = \binom{10}{a}$.

(a) Portanto

$$|f^{-1}(7)| = \binom{10}{7} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10.9.8}{3.2} = 10.3.2 = 120.$$

(b) Para acertar pelo menos 7 questões, pode-se acertar exatamente 10, 9, 8 ou 7 questões, portanto

$$\sum_{i=7}^{10} |f^{-1}(i)| = \sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} = \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}$$
$$= 120 + 45 + 9 + 1 = 175.$$

54. [default,ex:torneio]

Número de jogos num torneio e número de maneiras de os resultados acontecerem.

Resposta:

A.16.10 Subconjuntos e Composições

A.16.11 Inclusão-Exclusão

55. [default,ex:divisores-n-quadrado]

    Dado $n \in \mathbb{N}$, quantos são os divisores positivos e inteiros de n^2 que são menores que n mas não dividem n?[74]

    Resposta:

    Seja[75] $D(n)$ o conjunto dos divisores positivos de n. Então

$$|D(n)| \stackrel{\text{T. 56}}{=} \prod_{i=1}^{k}(e_i + 1),$$

onde

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i},$$

é a decomposição de n em (k) fatores primos.

Considerando $m.k = n^2$ e $m, k \neq n$, temos que $m < n$ e $k > n$ ou $m > n$ e $k < n$, ou seja, os divisores de m e n vêm aos pares, sendo um deles menor que n e outro maior que n, exceto no caso do par $n.n$.

---

rc: O k do parágrafo acima é o mesmo do produtório no parágrafo anterior? E quem é m?

Sendo assim, o número de divisores de n^2 menores que n é

$$\frac{D(n^2) - 1}{2}$$

---

rc: $\frac{|D(n^2)|-1}{2}$?

---

[74]Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.6)

[75]Contribuição: Lucilia Figueiredo

Como todo divisor de n é divisor de n^2, temos que o número de divisores de n^2 menores que n e que não dividem n seria

$$\frac{D(n^2)-1}{2} - (D(n)-1)$$

onde $D(n)-1$ é o número de divisores de n menores que n.

Por exemplo

$$\begin{array}{ll} n=6 & |D(6=2.3)| = |\{1,2,3,5\}| = 4 \\ & |D(n^2)| = |\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}| = 9 \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ll} n=10 & |D(10=2.5)| = |\{1,2,5,10\}| = 4 \\ & |D(n^2)| = |\{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}| = 9 \end{array}$$

E o resultado para ambas seria $(9-1)/2-3=1$

conferir (dm)

56. [default,ex:permutsempfixo-menageproblem]

O "Ménage problem" considera que n casais de sexo oposto (masculino/feminino) estão sentados na formação m-f-m-f-... ao redor de uma mesa, de quantas maneiras eles podem estar sentados nessa de forma que ninguem está sentado ao lado do seu(sua) parceiro(a).

Resposta:

Combina permutação circular com permutação de ponto fixo.

A.16.12 Partições

57. [default,ex:stirling]

ver na WikiPedia

(a) Stirling numbers of the second kind

(b) Bell number

Resposta:

A.17 Exercícios Aposentados

A.17.1 Elementos de Lógica

1. [default,ex:teo:conectivos]

   Prove que, se A e B são proposições, então as seguintes proposições são verdadeiras.

   (a) A ou (não A),
   (b) não (A e (não A)),
   (c) A ou V,
   (d) não (A e F),

   Resposta:

   (a) Vamos provar que se A é uma proposição, então A ou (não A). Seja A uma proposição e suponha A. Então,

   $$\begin{aligned}(A \text{ ou } (\text{ não } A)) &\equiv ((V) \text{ ou } (\text{ não } (V)))\\ &\equiv (V \text{ ou } F)\\ &\equiv (V),\end{aligned}$$

   já que a disjunção de duas proposições é verdadeira quando pelo menos uma das proposições é verdadeira.
   Por outro lado, suponha (não A). Então,

   $$\begin{aligned}(A \text{ ou } (\text{ não } A)) &\equiv (F \text{ ou } (\text{ não } F))\\ &\equiv (F \text{ ou } V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

   Logo, A ou (não A).

   (b) Vamos provar que se A é uma proposição, então não (A e (não A)). Seja A uma proposição e suponha A. Então,

   $$\begin{aligned}\text{não } (A \text{ e } (\text{ não } A)) &\equiv \text{ não } (V \text{ e } (\text{ não } V))\\ &\equiv \text{ não } (V \text{ e } F)\\ &\equiv \text{ não } (F)\\ &\equiv V.\end{aligned}$$

Agora, suponha ($\textsf{não}\ A$). Então,

$$\begin{aligned}\textsf{não}\ (A \textsf{ e } (\textsf{ não } A)) &\equiv \textsf{ não } (F \textsf{ e } (\textsf{ não } F))\\ &\equiv \textsf{ não } (F \textsf{ e } V)\\ &\equiv \textsf{ não } (F)\\ &\equiv V.\end{aligned}$$

Logo, $\textsf{não}\ (A \textsf{ e } (\textsf{ não } A))$.

(c) Vamos provar que se A é uma proposição, então A ou V.
Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}(A \textsf{ ou } V) &\equiv (V \textsf{ ou } V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Agora, suponha ($\textsf{não}\ A$). Então,

$$\begin{aligned}(A \textsf{ ou } V) &\equiv (F \textsf{ ou } V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Logo, A ou V.

(d) Vamos provar que se A é uma proposição, então ($\textsf{não}\ (A \textsf{ e } F)$).
Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}(\textsf{ não } (A \textsf{ e } F)) &\equiv (\textsf{ não } ((V) \textsf{ e } F))\\ &\equiv (\textsf{ não } F)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Agora, suponha ($\textsf{não}\ A$). Então,

$$\begin{aligned}(\textsf{ não } (A \textsf{ e } F)) &\equiv (\textsf{ não } ((F) \textsf{ e } F))\\ &\equiv (\textsf{ não } F)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Logo, ($\textsf{não}\ (A \textsf{ e } F)$).

2. [default,ex:teo:equiv]

   Prove que, se A, B e C são proposições, então os seguintes pares de proposições são equivalentes.

(a) A ou $F \equiv A$,

(b) A e $V \equiv A$,

(c) A e $(B$ ou $C) \equiv (A$ e $B)$ ou $(A$ e $C)$,

(d) A ou $(B$ e $C) \equiv (A$ ou $B)$ e $(A$ ou $C)$,

(e) não $(A$ ou $B) \equiv ($ não $A)$ e $($ não $B)$,

(f) não $(A$ e $B) \equiv ($ não $A)$ ou $($ não $B)$,

Resposta:

(a) Vamos provar que se A é uma proposição, então $(A$ ou $F) \equiv A$. Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}((A \text{ ou } F) \equiv A) &\equiv ((V \text{ ou } F) \equiv V)\\ &\equiv ((V) \equiv V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que

$$\begin{aligned}((A \text{ ou } F) \equiv A) &\equiv ((F \text{ ou } F) \equiv F)\\ &\equiv ((F) \equiv F)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Logo, $(A$ ou $F) \equiv V$.

(b) Vamos provar que se A é uma proposição, então $(A$ e $V) \equiv A$. Seja A uma proposição e suponha A. Então,

$$\begin{aligned}((A \text{ e } V) \equiv A) &\equiv ((V \text{ e } V) \equiv V)\\ &\equiv ((V) \equiv V)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Por outro lado, suponha $($ não $A)$. Então,

$$\begin{aligned}((A \text{ e } V) \equiv A) &\equiv ((F \text{ e } V) \equiv F)\\ &\equiv ((F) \equiv F)\\ &\equiv (V).\end{aligned}$$

Portanto, $(A$ e $V) \equiv A$.

(c) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então $(A \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C)) \equiv ((A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C))$.
Sejam A, B e C proposições e suponha, inicialmente, A.
Temos que

$$(A \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C)) \equiv (V \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C)) \equiv (B \textsf{ ou } C),$$

enquanto

$$((A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C)) \equiv (((V) \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (V \textsf{ e } C)) \equiv (B \textsf{ ou } C)$$

e, portanto, equivalentes.
Agora, suponha ($\textsf{não}$ A). Então,

$$(A \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C)) \equiv (F \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C)) \equiv (F)$$

enquanto

$$((A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C)) \equiv ((F \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (F \textsf{ e } C)) \equiv (F \textsf{ ou } F) \equiv (F)$$

e, portanto, também equivalentes.
Portanto, só pode ser que

$$(A \textsf{ e } (B \textsf{ ou } C)) \equiv ((A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C)).$$

(d) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então $(A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C)) \equiv ((A \textsf{ ou } B) \textsf{ e } (A \textsf{ ou } C))$.
Sejam A, B e C proposições e suponha, inicialmente, A. Então,

$$\begin{aligned}(A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C)) &\equiv ((V) \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C)) \\ &\equiv (V \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C) \\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C)) &\equiv ((V \textsf{ ou } B) \textsf{ e } (V \textsf{ ou } C)) \\ &\equiv ((V) \textsf{ e } (V)) \\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

e, portanto, $(A \textsf{ ou } (B \textsf{ e } C))$ é equivalente a $((A \textsf{ e } B) \textsf{ ou } (A \textsf{ e } C))$, sempre que A é verdadeiro.

Agora, suponha ($\textsf{não}\ A$). Então, temos que

$$\begin{aligned}(A \ \textsf{ou}\ (B \ \textsf{e}\ C)) &\equiv (F \ \textsf{ou}\ (B \ \textsf{e}\ C))\\ &\equiv (B \ \textsf{e}\ C)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((A \ \textsf{ou}\ B) \ \textsf{e}\ (A \ \textsf{ou}\ C)) &\equiv (((F) \ \textsf{ou}\ B) \ \textsf{e}\ ((F) \ \textsf{ou}\ C))\\ &\equiv ((B) \ \textsf{e}\ (C))\\ &\equiv (B \ \textsf{e}\ C).\end{aligned}$$

Como $(B \ \textsf{e}\ C) \equiv (B \ \textsf{e}\ C)$, então

$$(A \ \textsf{ou}\ (B \ \textsf{e}\ C)) \equiv ((A \ \textsf{ou}\ B) \ \textsf{e}\ (A \ \textsf{ou}\ C)),$$

sempre que $A \equiv F$.
Portanto, para quaisquer valores verdades de A, B e C,

$$(A \ \textsf{ou}\ (B \ \textsf{e}\ C)) \equiv ((A \ \textsf{ou}\ B) \ \textsf{e}\ (A \ \textsf{ou}\ C)).$$

(e) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$\textsf{não}\ (A \ \textsf{ou}\ B) \equiv ((\ \textsf{não}\ A) \ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ B)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\textsf{não}\ (A \ \textsf{ou}\ B) &\equiv \ \textsf{não}\ (V \ \textsf{ou}\ B)\\ &\equiv \ \textsf{não}\ (V)\\ &\equiv (F)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\ \textsf{não}\ A) \ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ B)) &\equiv ((\ \textsf{não}\ V) \ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ B))\\ &\equiv (F \ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ B))\\ &\equiv (F)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv V$, então

$$\textsf{não}\ (A \ \textsf{ou}\ B) \equiv ((\ \textsf{não}\ A) \ \textsf{e}\ (\ \textsf{não}\ B)).$$

Por outro lado, suponha ($\textsf{não}\ A$). Então,

$$\begin{aligned}\textsf{não}\ (A \ \textsf{ou}\ B) &\equiv \ \textsf{não}\ ((F) \ \textsf{ou}\ B)\\ &\equiv \ \textsf{não}\ (B)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } A) \text{ e } (\text{ não } B)) &\equiv (\text{ não } (F) \text{ e } (\text{ não } B))\\ &\equiv (V \text{ e } (\text{ não } B))\\ &\equiv (\text{ não } B)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv F$, então

$$\text{não } (A \text{ ou } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ e } (\text{ não } B)).$$

Portanto, se A, B e C são proposições, temos que

$$\text{não } (A \text{ ou } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ e } (\text{ não } B)).$$

(f) Vamos provar que se A, B e C são proposições, então

$$\text{não } (A \text{ e } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)).$$

Sejam A, B e C proposições e suponha A. Assim, temos que

$$\begin{aligned}\text{não } (A \text{ e } B) &\equiv \text{ não } (V \text{ e } B)\\ &\equiv \text{ não } (B)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)) &\equiv ((\text{ não } V) \text{ ou } (\text{ não } B))\\ &\equiv (F \text{ ou } (\text{ não } B))\\ &\equiv (\text{ não } B)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv V$, então

$$\text{não } (A \text{ e } B) \equiv ((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)).$$

Por outro lado, suponha (não A). Então,

$$\begin{aligned}\text{não } (A \text{ e } B) &\equiv \text{ não } ((F) \text{ e } B)\\ &\equiv \text{ não } (F)\\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}((\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } B)) &\equiv (\text{ não } (F) \text{ ou } (\text{ não } B))\\ &\equiv (V \text{ ou } (\text{ não } B))\\ &\equiv (V)\end{aligned}$$

e, portanto, se $A \equiv F$, então

$$\textsf{não}\ (A\ \textsf{e}\ B) \equiv ((\ \textsf{não}\ A)\ \textsf{ou}\ (\ \textsf{não}\ B)).$$

Portanto, se A, B e C são proposições, temos que

$$\textsf{não}\ (A\ \textsf{e}\ B) \equiv ((\ \textsf{não}\ A)\ \textsf{ou}\ (\ \textsf{não}\ B)).$$

3. [default,ex:teo:negacao-quantificadores]

Seja $P(x)$ um predicado e X um conjunto. Prove que são equivalentes

(a) $(\ \textsf{não}\ \ (P(x),\ \ \textsf{para todo}\ \ x\ \in\ X))$ e $((\ \textsf{não}\ \ P(x)),\ \ \textsf{para algum}\ \ x\ \in\ X)$.

(b) $(\ \textsf{não}\ \ (P(x),\ \ \textsf{para algum}\ \ x\ \in\ X))$ e $((\ \textsf{não}\ \ P(x)),\ \ \textsf{para todo}\ \ x\ \in\ X)$.

Resposta:

(a) Vamos provar que se X é um conjunto e, para qualquer que seja $x \in X, P(x)$ é uma proposição, então

$$\neg(P(x),\ \textsf{para todo}\ x \in X) \equiv (\neg P(x)),\ \textsf{para algum}\ x \in X.$$

Denotemos por X_k o conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de k elementos. Primeiramente, temos que

$$\neg(P(x),\ \textsf{para todo}\ x \in \emptyset) \equiv ((\neg P(x)),\ \textsf{para algum}\ x \in \emptyset$$

se e somente se

$$\neg(V) \equiv F.$$

(Usando nossa notação, temos que

$$\neg(\forall x \in X_0, P(x)) \equiv (\exists x \in X_0, (\neg P(x))).)$$

Suponha que exista um $n \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in [0..n]$,

$$\neg(\forall x \in X_k, P(x)) \equiv (\exists x \in X_k, (\neg P(x))).$$

Repare que

$$\neg(\forall X_n \in X_n, P(x)) \equiv \exists x \in X_n, (\neg P(x))$$

é equivalente a

$$\neg(\forall x \in X_n, P(x)) \text{ ou } (\neg P(x_{n+1})) \equiv (\exists x \in X_n, (\neg P(x))) \text{ ou } (\neg P(x_{n+1}));$$

isto é,

$$\neg(\forall x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}, P(x)) \equiv \exists x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}, (\neg P(x));$$

ou seja,

$$\neg(\forall x \in X_{n+1}, P(x)) \equiv \exists x \in X_{n+1}, (\neg P(x)).$$

Portanto, se

$$\neg(\forall x \in X_n, P(x)) \equiv \exists x \in X_n, (\neg P(x)),$$

então

$$\neg(\forall x \in X_{n+1}, P(x)) \equiv \exists x \in X_{n+1}, (\neg P(x)),$$

A título de facilitar a visualização, seja $A(a)$ o predicado dado por

$$\neg(\forall x \in X_a, P(x)) \equiv \exists x \in X_a, (\neg P(x)).$$

O que temos, até então, é que estas implicações são verdadeiras

$$\begin{aligned} A(n) &\implies A(n+1) \\ A(n+1) &\implies A(n+2) \\ A(n+2) &\implies A(n+3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $A(0) \equiv V$ —demonstrado no início da prova—, então, por Modus Ponens, temos que

$$A(0) \text{ e } A(1) \text{ e } A(2) \text{ e } \ldots;$$

isto é,

$$A(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se X é um conjunto e P um predicado sobre X, então

$$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv ((\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X).$$

(b) Vamos provar que se X é um conjunto e, para qualquer que seja $x \in X, P(x)$ é uma proposição, então

$$((\text{ não } P(x)),\ \text{para todo } x \in X) \equiv \text{ não } (P(x),\ \text{para algum } x \in X)\,.$$

Denotemos por X_k o conjunto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de k elementos. Primeiramente, temos que

$$\forall x \in \emptyset(\neg P(x)) \equiv \neg(\exists x \in \emptyset(P(x)))$$

se e somente se

$$\begin{aligned} V &\equiv \neg(F) \\ &\equiv V. \end{aligned}$$

(Usando nossa notação, temos que

$$\forall x \in X_0(\neg P(x)) \equiv \neg(\exists x \in X_0(P(x))).)$$

Suponha que exista um $n \in \mathbb{N}$ de modo que, para todo $k \in [0..n]$,

$$\forall x \in X_k(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_k(P(x))\right).$$

Repare que

$$\forall x \in X_n(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_n(P(x))\right)$$

é equivalente a

$$\forall x \in X_n(\neg P(x)) \text{ e } (\neg P(x_{n+1})) \equiv \neg\left(\exists x \in X_n(P(x))\right) \text{ e } (\neg P(x_{n+1}));$$

isto é,

$$\begin{aligned} \forall x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}(\neg P(x)) &\equiv \neg\left((\exists x \in X_n(P(x))) \text{ e } P(x_{n+1})\right) \\ &\equiv \neg\left(\exists x \in X_n \cup \{x_{n+1}\}(P(x))\right); \end{aligned}$$

ou seja,

$$\forall x \in X_{n+1}(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_{n+1}(P(x))\right).$$

Portanto, se

$$\forall x \in X_n(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_n(P(x))\right),$$

então
$$\forall x \in X_{n+1}(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_{n+1}(P(x))\right).$$

A título de facilitar a visualização, seja $A(a)$ o predicado dado por

$$\forall x \in X_a(\neg P(x)) \equiv \neg\left(\exists x \in X_a(P(x))\right).$$

O que temos, até então, é que estas implicações são verdadeiras

$$\begin{aligned} A(n) &\implies A(n+1) \\ A(n+1) &\implies A(n+2) \\ A(n+2) &\implies A(n+3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como $A(0) \equiv V$ —demonstrado no início da prova—, então, por Modus Ponens, temos que

$$A(0) \text{ e } A(1) \text{ e } A(2) \text{ e } \ldots;$$

isto é,
$$A(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, se X é um conjunto e P um predicado sobre X, então

$$((\text{ não } P(x)), \text{ para todo } x \in X) \equiv \text{ não } (P(x), \text{ para algum } x \in X).$$

4. [default,ex:quantificadores]
   Seja $P(x, y)$ um predicado.

   (a) São equivalentes as proposições

   $$(P(x,y), \text{ para todo } x \in X), \text{ para todo } y \in Y,$$

   e
   $$(P(x,y), \text{ para todo } y \in Y), \text{ para todo } x \in X?$$

   (b) São equivalentes as proposições

   $$(P(x,y), \text{ para algum } x \in X), \text{ para algum } y \in Y,$$

   e
   $$(P(x,y), \text{ para algum } y \in Y), \text{ para algum } x \in X?$$

(c) São equivalentes as proposições

$$(P(x, y), \text{ para algum } x \in X), \text{ para todo } y \in Y,$$

e

$$(P(x, y), \text{ para todo } x \in X), \text{ para algum } y \in Y?$$

Justifique.

Resposta:

(a) São equivalentes, conforme a demonstração que segue.
Sejam $Y^r \subset Y$ e $y^r \in Y - Y^r$ e suponha que

$$\forall x \in X \forall y \in Y^r, P(x, y) \equiv \forall y \in Y^r \forall y \in Y, P(x, y).$$

Vamos provar que

$$\forall x \in X \forall y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x, y) \equiv \forall y \in Y^r \cup \{y^r\} \forall x \in X, P(x, y).$$

Temos, por um lado, que

$$\begin{aligned} \forall x \in X \forall y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x, y) &\equiv (\forall x \in X \forall y \in Y, P(x, y)) \text{ e } (\forall x \in X \forall y \in \{y^r\}, P(x, \\ &\equiv (\forall x \in X \forall y \in Y, P(x, y)) \text{ e } (\forall x \in X, P(x, y^r)) \end{aligned}$$

enquanto, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \forall y \in Y^r \cup \{y^r\} \forall x \in X, P(x, y) &\equiv (\forall y \in Y^r \forall x \in X, P(x, y)) \text{ e } \forall y \in \{y^r\} \forall x \in X, P(x, \\ &\equiv (\forall y \in Y^r \forall x \in X, P(x, y)) \text{ e } \forall x \in X, P(x, y^r). \end{aligned}$$

Repare que

$$(\forall x \in X \forall y \in Y^r, P(x, y)) \text{ e } \forall x \in X, P(x, y^r) \equiv (\forall y \in Y^r \forall x \in X, P(x, y)) \text{ e } \forall x \in X, P$$

se, e somente e,

$$\forall x \in X \forall y \in Y, P(x, y) \equiv \forall y \in Y \forall x \in X, P(x, y),$$

que é nossa hipóteses e, portanto, esses predicados são equivalentes.
Dessa forma, deduzimos que esses predicados são equivalentes mostrando a equivalência incrementalmente, cada passo com um elemento de $Y - Y^r$, até que $Y^r = Y$. Isso é verdade desde

que esses predicados sejam equivalentes para um Y^r de tamanho mínimo.

Além disso, tomando $Y^r = \emptyset$, temos que esses predicados são equivalentes, uma vez que

$$\forall x \in X \forall y \in \emptyset, P(x,y) \equiv \forall x \in X, V \equiv V$$

e

$$\forall y \in \emptyset \forall x \in X, P(x,y) \equiv V.$$

Portanto, os predicados

$$P(x,y), \ \textsf{para todo}\ x \in X, \ \textsf{para todo}\ y \in Y$$

e

$$P(x,y), \ \textsf{para todo}\ y \in Y, \ \textsf{para todo}\ x \in X$$

são equivalentes.

(b) São equivalentes, conforme a demonstração que segue.

Sejam $Y^r \subset Y$ e $y^r \in Y - Y^r$ e suponha que

$$\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y) \equiv \exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y).$$

Vamos provar que

$$\exists x \in X \exists y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x,y) \equiv \exists y \in Y^r \cup \{y^r\} \exists x \in X, P(x,y).$$

Temos, por um lado, que

$$\begin{aligned}\exists x \in X \exists y \in Y^r \cup \{y^r\}, P(x,y) &\equiv (\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y)) \ \textsf{ou}\ (\exists x \in X \exists y \in \{y^r\}, P(\\ &\equiv (\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y)) \ \textsf{ou}\ (\exists x \in X, P(x,y^r))\end{aligned}$$

enquanto, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\exists y \in Y^r \cup \{y^r\} \exists x \in X, P(x,y) &\equiv (\exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)) \ \textsf{ou}\ (\exists y \in \{y^r\} \exists x \in X, P(\\ &\equiv (\exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)) \ \textsf{ou}\ (\exists x \in X, P(x,\end{aligned}$$

Veja que, conforme nossa hipótese,

$$\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y) \equiv \exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)$$

e, consequentemente,

$$(\exists x \in X \exists y \in Y^r, P(x,y)) \ \textsf{ou}\ (\exists x \in X, P(x,y^r))$$

é equivalente a

$$(\exists y \in Y^r \exists x \in X, P(x,y)) \text{ ou } (\exists x, P(x,y^r)).$$

Além disso, tomando $Y^r = \emptyset$, temos que esses predicados em questão são equivalentes porque

$$\begin{aligned} \exists x \in X \exists y \in \emptyset, P(x,y) &\equiv \exists x \in X, F \\ &\equiv F \end{aligned}$$

e

$$\exists y \in \emptyset \exists x \in X, P(x,y) \equiv F.$$

Portanto,

$$\exists x \in X \exists y \in Y, P(x,y) \equiv \exists y \in Y \exists x \in X, P(x,y).$$

(c) Isso é falso. Tome, como contra-exemplo, os conjuntos

$$Y = \{5,6\} \text{ e } X = \{2,3\}$$

e o predicado

$$P(x,y) = \begin{cases} V, & \text{se } x \text{ divide } y; \\ F, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Desse modo, os predicados apresentam valor verdade diferentes.

5. [default,ex:teo:implicaou]

   Justifique cada passagem da prova do Teorema teo:implicaou discutida em aula, apontando o respectivo item dos Teoremas teo:conectivos e teo:equiv utilizados.

   Resposta:

6. [default,ex:cor:contra-exemplo]

   Justifique cada passagem da prova do Corolário cor:contra-exemplo discutida em aula, apontando os respectivos itens dos Teoremas teo:conectivos e teo:equiv utilizados.

   Resposta:

7. [default,ex:cor:contraimplicacao]Prove que $((A \implies B)$ e $(A \implies (\text{ não } B)))$ se e somente se $A = F$.

Resposta:

Temos que provar que

$$((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \text{ se e somente se } A = F$$

Temos, portanto, que provar duas coisas:

(a) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies A = F$;

(b) $A = F \implies ((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B)))$.

(a) Suponhamos que

$$((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B)))$$

Temos que provar que $A = F$. Suponhamos, então, que $A = V$. Assim, temos que

$$V \implies B$$

e que

$$V \implies (\text{ não } B)$$

Como $V \implies B$, temos que $B = V$, pois caso $B = F$, teríamos que $V \not\Longrightarrow B$. Como $V \implies (\text{ não } B)$, pelo mesmo motivo temos que $(\text{ não } B) = V$ e, portanto, que $B = F$, o que é um absurdo.

Portanto, $A = F$.

(b) Suponhamos que $A = F$. Temos que provar que

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))$$

Do Teorema 1, temos que

$$A \implies B$$

e que

$$A \implies (\text{ não } B)$$

Portanto,

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))$$

8. [default,ex:cor:contrapositiva]Prove que $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$ para quaisquer valores de A e B.

Resposta:

Vamos provar que $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$, para quaisquer valores de A e B.

Temos que

$$A \implies B = (\text{ não } A) \text{ ou } B$$

enquanto

$$\begin{aligned}(\text{ não } B) \implies (\text{ não } A) &= (\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A)\\ &= B \text{ ou } (\text{ não } A).\end{aligned}$$

Como $(\text{ não } A) \text{ ou } B = B \text{ ou } (\text{ não } A)$, então

$$A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A).$$

Logo, $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$, para quaisquer valores de A e B.

9. [default,ex:cor:implicacao-negada]Prove que $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$, para quaisquer valores de A e B.

Resposta:

Temos que provar $A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$. Do Teorema teo:implicaou, temos que

$$A \implies B = (\text{ não } A) \text{ ou } B$$

Do Teorema teo:duplanegacao, temos que

$$\begin{aligned}(\text{ não } A) \text{ ou } B &= (\text{ não } A) \text{ ou } (\text{ não } (\text{ não } B))\\ &= (\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A)\end{aligned}$$

E, de novo, pelo Teorema teo:implicaou, temos que

$$(\text{ não } (\text{ não } B)) \text{ ou } (\text{ não } A) = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A)$$

Portanto,

$$A \implies B = (\text{ não } B) \implies (\text{ não } A).$$

10. [default,ex:paralgum-paratodo]

Sendo X um conjunto qualquer, prove que $\textsf{não}\ (\textsf{para algum}\ x \in X, A(x)) = \textsf{para todo}\ x \in X, (\textsf{não}\ A(x))$.

Resposta:

Temos que provar que

$$\textsf{não}\ \big(\textsf{para algum}\ x \in X, A(x)\big) = \textsf{para todo}\ x \in X, \big(\textsf{não}\ A(x)\big)$$

Da definição de quantificador existencial, temos que

$$\begin{gathered}\textsf{não}\ \big(\textsf{para algum}\ x \in X, A(x)\big) = \\ \textsf{não}\ \Big(\textsf{não}\ \big(\textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para algum}\ x \in X\Big) = \\ \big(\textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para todo}\ x \in X\end{gathered}$$

Portanto,

$$\textsf{não}\ \big(\textsf{para algum}\ x \in X, A(x)\big) = \textsf{para todo}\ x \in X, \big(\textsf{não}\ A(x)\big)$$

11. [default,ex:paratodo-paralgum]

Sendo X um conjunto qualquer, prove que $\textsf{não}\ (\textsf{para todo}\ x \in X, A(x)) = \textsf{para algum}\ x \in X, (\textsf{não}\ A(x))$.

Resposta:

Temos que provar que

$$\textsf{não}\ \big(\textsf{para todo}\ x \in X, A(x)\big) = \textsf{para algum}\ x \in X, \big(\textsf{não}\ A(x)\big)$$

Da definição de quantificador universal, temos que

$$\begin{gathered}\textsf{não}\ \big(\textsf{para todo}\ x \in X, A(x)\big) = \\ \textsf{não}\ \Big(\textsf{não}\ \big(\textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para todo}\ x \in X\Big) = \\ \big(\textsf{não}\ A(x)\big)\ \textsf{para algum}\ x \in X\end{gathered}$$

Portanto,

$$\textsf{não}\ \big(\textsf{para todo}\ x \in X, A(x)\big) = \textsf{para algum}\ x \in X, \big(\textsf{não}\ A(x)\big)$$

12. [default,ex:ponens]

Prove a implicação

$$((A \implies B) \text{ e } A) \implies B.$$

Esta implicação é conhecida como *Modus Ponens* e forma o esquema argumentativo das chamadas provas dedutivas, dentre as quais enconta-se o esquema de prova por indução.

Resposta:

Temos que provar que, quaisquer que sejam os valores de A e B,

$$((A \implies B) \text{ e } A) \implies B = V$$

Sabemos, do Teorema teo:implicaou, que

$$\begin{aligned}((A \implies B) \text{ e } A) \implies B &= (((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } A) \implies B \\ &= (\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } A) \text{ ou } B\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema teo:distributivae, ficamos com

$$(\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } A) \text{ ou } B = (\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ e } A) \text{ ou } (B \text{ e } A))) \text{ ou } B$$

e, aplicando o Teorema teo:contradicao, com

$$\begin{aligned}(\text{ não } (((\text{ não } A) \text{ e } A) \text{ ou } (B \text{ e } A))) \text{ ou } B &= (\text{ não } (F \text{ ou } (B \text{ e } A))) \text{ ou } B \\ &= (\text{ não } (B \text{ e } A)) \text{ ou } B\end{aligned}$$

Do Corolário cor:demorgan temos que

$$\begin{aligned}(\text{ não } (B \text{ e } A)) \text{ ou } B &= ((\text{ não } B) \text{ ou } (\text{ não } A)) \text{ ou } B \\ &= ((\text{ não } B) \text{ ou } B) \text{ ou } (\text{ não } A)\end{aligned}$$

e, do Teorema teo:completude,

$$((\text{ não } B) \text{ ou } B) \text{ ou } (\text{ não } A) = V \text{ ou } (\text{ não } A) = V$$

Portanto,

$$((A \implies B) \text{ e } A) \implies B = V$$

13. [default,ex:produto-racional-irracional]É verdade que se q é racional e x não é racional então qx não é racional?

    Resposta:

    É verdade, no caso generico $qx \notin \mathcal{Q}$.

    Seja $q = m/n$ e tome $x = \pi$. Assim, $qx = \frac{m}{n}\pi$. Como π é não pode ser escrito como uma fração de dois inteiros, primos entre si, então qx também não pode. Dessarte, $qx \notin \mathcal{Q}$.

14. [default,ex:prova-edmundo]

    A prova vista em aula para a não racionalidade do número $\sqrt{2}$ já era conhecida na Grécia Antiga e é um exemplo clássico do esquema de argumentação conhecido como "prova por absurdo".

    (a) Escreva uma prova análoga a esta de que $\sqrt{3}$ não é racional.

    (b) Prove que a raiz quadrada de nenhum número primo é racional.

    (c) Dizem que nos seus primeiros anos de Hogwarts, Harry Potter resolveu usar seus poderes para escrever uma prova análoga de que $\sqrt{4}$ não é racional, coisa que quase todo mundo sabe que não é. A prova de Harry Potter foi a seguinte:

Teorema 104. $\sqrt{4}$ *não é racional.*

Demonstração. Temos que provar que $\sqrt{4}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{4}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, com $a > 4$, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{4}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = 4b^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por 4 e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^8$, podemos escrever $a = 4k$ e ficamos com

$$(4k)^2 = 4b^2$$

e, portanto

$$16k^2 = 4b^2,$$

ou seja

$$b^2 = 4k^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por 4 e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.
Portanto, $\sqrt{4}$ não é racional. $\square$

Onde está a mágica?

(d) Prove que se j^2 não é divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$ então $\sqrt{n}$ é irracional.

(e) É verdade que se $\sqrt{n}$ é irracional então j^2 não é divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$?

(f) Os gregos antigos não conseguiram demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{n}$ para $n > 17$ utilizando o mesmo raciocínio que utilizaram para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Com base em e , ache todos os números n menores que 100 tais que a irracionalidade de $\sqrt{n}$ pode ser demonstrada com o raciocínio que estamos usando[76] e surpreenda-se com o resultado!

Resposta:

[76] Dica: Faça um programa!

(a) Temos que provar que $\sqrt{3}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{3}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = 3b^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por 3 e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^8$, podemos escrever $a = 3k$ e ficamos com

$$(3k)^2 = 3b^2$$

e, portanto

$$9k^2 = 3b^2,$$

ou seja

$$b^2 = 3k^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por 3 e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.

Portanto, $\sqrt{3}$ não é racional. Resta-nos agora apenas provar que se a^2, para a natural não-nulo, é divisível por 3 então a também o é. Suponhamos a natural não-nulo e a^2 divisível por 3 e suponhamos que a não seja divisível por três, ou seja, que existe um $q \in \mathbb{N}^*$ tal que ocorre uma das duas opções abaixo:

i. $a = 3q + 1$

ii. $a = 3q + 2$

(b) Seja p um primo natural. Temos que provar que $\sqrt{p}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{p}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{p}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = pb^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por p e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^*$, podemos escrever $a = pk$ e ficamos com

$$(pk)^2 = pb^2$$

e, portanto

$$p^2k^2 = pb^2,$$

ou seja

$$b^2 = pk^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por p e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.

Portanto, $\sqrt{p}$ não é racional. Resta-nos agora apenas provar que se a^2, para a natural não-nulo, é divisível por p então a também o é. Suponhamos a natural não-nulo e a^2 divisível por p e suponhamos que a não seja divisível por p, ou seja, que existe um $q \in \mathbb{N}^*$ tal que existe um $j \in [1..(p-1)]$ tal que $a = qp + j$. Assim, temos que

$$a^2 = q^2p^2 + 2qpj + j^2 = (q^2p + 2qj)p + j^2$$

Assim, só é possível que a^2 seja divisível por p se j^2 for divisível por p. Como j^2 não é divisível por p, a^2 não é divisível por p, o que contraria a hipótese.

Portanto, a^2 ser divisível por p, para a natural não-nulo, implica a ser divisível por p. Resta-nos agora somente provar que j^2 não é divisível por p. Sabemos que p não é divisível por j, porque p é primo. Em outras palavras, existe um $r \in \mathbb{N}^2$ e um $\ell \in [1..(j-1)]$ tal que $p = rj + \ell$. Assim, temos que

$$j = \frac{p - \ell}{r}$$

e, portanto, que

$$j^2 = \frac{p^2 - 2p\ell + \ell^2}{r^2} = \frac{p - 2\ell}{r^2}p + \frac{\ell^2}{r^2}$$

Portanto, j^2 não é divisível por p, como queríamos provar.

(c) O erro da "prova" do Mr. Potter é justamente admitir que se a^2 é divisível por 4 então a também o é. Se tomarmos, por contra-exemplo, $a = 6$, teremos que $a^2 = 36$ é divisível por 4 mas que $a = 6$ não o é.

(d) Suponhamos que j^2 não seja divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$. Temos que provar que $\sqrt{n}$ não é racional. Suponhamos que $\sqrt{n}$ seja racional. Então, existem $a, b \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{a}{b} = \sqrt{n}.$$

Elevando os dois termos da equação ao quadrado, temos

$$a^2 = nb^2$$

Como b^2 é inteiro e a é natural não-nulo, a^2 é divisível por n e, portanto, a também o é. Logo, para algum $k \in \mathbb{N}^8$, podemos escrever $a = nk$ e ficamos com

$$(nk)^2 = nb^2$$

e, portanto

$$16k^2 = nb^2,$$

ou seja

$$b^2 = nk^2.$$

Como k^2 é inteiro e b é natural não-nulo, b^2 é divisível por n e, portanto, b também o é, o que contraria a escolha de a e b primos entre si.

Portanto, $\sqrt{n}$ não é racional. Resta-nos agora apenas provar que se a^2 é divisível por n então a também o é. Suponhamos que a^2 seja divisível por n mas a não o seja. Assim, existem um k inteiro e um $j \in [1..(n-1)]$ tais que

$$a = nk + j$$

e, portanto,

$$a^2 = n^2k^2 + 2nkj + j^2 = n(nk^2 + 2kj) + j^2$$

Sabemos que $(nk^2 + 2kj)$ é inteiro e que j^2 não é divisível por n. Portanto, a^2 não é divisível por n, o que contradiz a hipótese.

Portanto, a^2 ser divisível por n implica a ser divisível por n.

(e) Não é verdade. Tomemos, por exemplo, $\sqrt{18}$, que sabemos que é irracional. Se tomarmos $j = 6$, teremos $j^2 = 36$ divisível por 18.

(f) Temos que sempre que j^2 não é divisível por n para todo $j \in [1..(n-1)]$ conseguimos provar a irracionalidade de $\sqrt{n}$ utilizando uma prova análoga à prova que usamos para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Assim, se testarmos todas as possibilidades de j para um dado n, poder afirmar uma entre duas coisas:

   i. $\sqrt{n}$ é irracional;
   ii. A irracionalidade de $\sqrt{n}$ não pode ser provada do mesmo que se prova a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

   Note que 14(f)ii não significa que $\sqrt{n}$ seja irracional nem racional. Assim, podemos construir o seguinte programa, em C:

   A saída do programa indica a irracionalidade das raízes dos seguintes números: 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 47, 51, 53, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 73, 74, 77, 78, 79, 82, 83, 85, 86, 87, 89, 91, 93, 94, 95 e 97. Repare que na lista não consta o número 18.

15. [default,ex:raiz-potencia]

    Prove que a raiz k-ésima de um inteiro n é inteira se e somente se $n = a^k$ para algum inteiro a.

    Resposta:

    Vamos provar que $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$ se e somente se existe um a inteiro satisfazendo $a^k = n$.

    Vamos provar que se $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$, então existe um a inteiro satisfazendo $n = a^k$.

    Temos que $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$ se existe um $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x = n^{1/k}$. Do contrário, $n^{1/k}$ não pode ser inteiro. Elevando ambos os termos à k-ésima potência temos

    $$(x)^k = (n^{\frac{1}{k}})^k \text{ se e somente se } x^k = n$$

    e, nesse caso, $x = a$.

    Portanto,

    $$n^{1/k} \implies n = a^k, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z}.$$

    Vamos provar que se $n = a^k$, para algum $a \in \mathbb{Z}$, então $n^{1/k} \in \mathbb{Z}$.

    Temos que $n = a^k$, para algum $a \in \mathbb{Z}$. Então,

    $$\begin{aligned}(n)^{1/k} &= (a^k)^{\frac{1}{k}} \\ &= a.\end{aligned}$$

Como a é inteiro, $n^{1/k}$ também o é.

Portanto,

$$n = a^k, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z} \implies n^{1/k} \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$n = a^k, \text{ para algum } a \in \mathbb{Z} \text{ se e somente se } n^{1/k} \in \mathbb{Z}.$$

16. [default,ex:raiz-quadrado]

    Prove que a raiz quadrada de um inteiro n é inteira se e somente se n é quadrado de um inteiro.

    Resposta:

    Temos que provar que:

    (a) Se a raiz quadrada de um inteiro n é inteira então n é quadrado de um inteiro.

    (b) Se um inteiro n é quadrado de um inteiro então a raiz quadrada de n é inteira.

    (a) Temos que provar que se a raiz quadrada de um inteiro n é inteira então n é quadrado de um inteiro, ou seja, temos que provar que se $n \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ então existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$. Seja n um inteiro tal que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Temos que provar que existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = k^2$. Se tomarmos $k = \sqrt{n}$, teremos trivialmente que $k^2 = n$ e, como $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$, provamos o que queríamos. Portanto, se a raiz quadrada de um inteiro n é inteira então n é quadrado de um inteiro.

    (b) Temos que provar que se um inteiro n é quadrado de um inteiro então a raiz quadrada de n é inteira, ou seja, temos que provar que se existe um inteiro k tal que $k = n^2$ para um inteiro n então $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Seja n um inteiro e suponhamos que exista um k tal que $k = n^2$. Da definição de raiz quadrada, temos que $\sqrt{n} = k$ e, como $k \in \mathbb{Z}$, portanto, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$. Portanto, se um inteiro n é quadrado de um inteiro então a raiz quadrada de n é inteira.

17. [default,ex:teo:conjuncao-implicacao]Prove que $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) = A \implies (B \text{ e } C)$, para para quaisquer valores de A, B e C.

    Resposta:

Temos que provar que $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) = A \implies (B \text{ e } C)$ quaisquer que sejam os valores de A, B e C. Do Teorema teo:implicaou, temos que

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) = ((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } ((\text{ não } A) \text{ ou } C)$$

Por causa do Teorema teo:distributivae, sabemos que

$$((\text{ não } A) \text{ ou } B) \text{ e } ((\text{ não } A) \text{ ou } C) = (\text{ não } A) \text{ ou } (B \text{ e } C)$$

Pelo Teorema teo:implicaou, chegamos a

$$(\text{ não } A) \text{ ou } (B \text{ e } C) = A \implies (B \text{ e } C)$$

Portanto,

$$(A \implies B) \text{ e } (A \implies C) = A \implies (B \text{ e } C)$$

18. [default,ex::teo:naosse]Prove que $\text{não } (A \text{ se e somente se } B) = (A \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ nã}$
para quaisquer valores de A e B.

    Resposta:

    Suponha A. Então,

$$\text{não } (A \text{ se e somente se } B) = (A \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } A))$$

tem o mesmo valor verdade que

$$\text{não } (V \text{ se e somente se } B) = (V \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } V))$$

que tem o mesmo valor verdade que

$$\begin{aligned} \text{não } B &= (\text{ não } B) \text{ ou } (B \text{ e } F) \\ &= (\text{ não } B) \end{aligned}$$

e, portanto, $\text{não } (A \text{ se e somente se } B) = (A \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } A))$.

Por outro lado, suponha que A tenha valor verdade falso. Assim,

$$\text{não } (A \text{ se e somente se } B) = (A \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } A))$$

tem o mesmo valor verdade que

$$\text{não } (F \text{ se e somente se } B) = (F \text{ e } (\text{ não } B)) \text{ ou } (B \text{ e } (\text{ não } F))$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} B &= (F \;\mathsf{e}\; (\;\mathsf{não}\; B)) \;\mathsf{ou}\; (B \;\mathsf{e}\; V) \\ &= (F) \;\mathsf{ou}\; (B) & = B \end{aligned}$$

e, portanto, $\mathsf{não}\ (A \text{ se e somente se } B) = (A \;\mathsf{e}\; (\;\mathsf{não}\; B)) \;\mathsf{ou}\; (B \;\mathsf{e}\; (\;\mathsf{não}\; A))$.

Dessarte, independente dos valores verdades de A e B, temos uma equivalência entre $\mathsf{não}\ (A \text{ se e somente se } B)$ e $(A \;\mathsf{e}\; (\;\mathsf{não}\; B)) \;\mathsf{ou}\; (B \;\mathsf{e}\; (\;\mathsf{não}\; A))$.

19. [default,ex:tollens]

Prove a implicação

$$((A \implies B) \;\mathsf{e}\; \;\mathsf{não}\; B) \implies \;\mathsf{não}\; A.$$

Esta implicação é conhecida como *Modus Tollens* e forma o esquema argumentativo das chamadas provas por absurdo ou por contradição.

Resposta:

Vamos provar a implicação

$$((A \implies B) \;\mathsf{e}\; \;\mathsf{não}\; B) \implies \;\mathsf{não}\; A$$

em dois casos: quando B é uma proposição falsa, em \$1; e quando B é uma proposição verdadeira, em \$2.

Sejam A uma proposição.

\$1. Seja B uma proposição falsa. Vamos provar que se B é uma proposição falsa, então, a proposição supracitada é verdadeira.

Como $B = F$, então, $((A \implies B) \;\mathsf{e}\; \;\mathsf{não}\; B) \implies \;\mathsf{não}\; A$ é equivalente a $((A \implies (F)) \;\mathsf{e}\; \;\mathsf{não}\; (F)) \implies \;\mathsf{não}\; A$, que também é equivalente a $((A \implies F) \;\mathsf{e}\; V) \implies \;\mathsf{não}\; A$, já que $\mathsf{não}\ (F) = V$.

Pela lei da identidade, a conjunção de qualquer proposição X com outra proposição verdadeira tem como valor verdade X e, assim, $((A \implies F) \;\mathsf{e}\; V) \implies \;\mathsf{não}\; A = (A \implies F) \implies \;\mathsf{não}\; A$.

Finalmente, temos, pela definição de implicação, que $(A \implies F)$ se e somente se $((\;\mathsf{não}\; A)$ e, logo, $(A \implies F)$ se e somente se $(\;\mathsf{não}\; A)$ e, portanto, $(A \implies F) \implies (\;\mathsf{não}\; A)$.

Portanto, Modus Tollens é verdadeira sempre que B é uma proposição falsa.

\$2. Seja B uma proposição verdadeira. Vamos provar que se B é uma proposição verdadeira, então, a proposição Modus Tollens é verdadeira.

Como $B = V$, então, $((A \implies B) \text{ e } \text{não } B) \implies \text{não } A$ é equivalente a $((A \implies (V)) \text{ e } \text{não } (V)) \implies \text{não } A$, que é equivalente a $((A \implies V) \text{ e } F) \implies \text{não } A$, que é equivalente a $F \implies \text{não } A$, pela lei da dominação, e, consequentemente, $(F \implies \text{não } A)$ se e somente se V, porque, da definição de implicação, temos que $(F \implies \text{não } A)$ se e somente se $(\text{ não } (F) \text{ ou } (F \text{ e } \text{não } (A)))$ se e somente se $(V \text{ ou } F$

Portanto, Modus Tollens é verdadeira sempre que B é uma proposição verdadeira.

Portanto, Modus Tollens é sempre uma proposição verdadeira.

20. [default,ex:inducao-como-predicado]

Seja $P(n)$ um predicado (onde $n \in \mathbb{N}$) e seja $Q(P, b)$ o predicado dado por

$$((P(k), \text{ para todo } b \leq k \leq a) \implies P(a+1)), \text{ para todo } a > b.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $Q\left(3^n < n!, 7\right)$.
(b) $Q\left(2^n > n^2, 5\right)$.
(c) $Q\left(\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, 0\right)$.
(d) $Q\left(\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, 0\right)$.
(e) $Q\left(\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1, 0\right)$.
(f) $Q\left(\sum_{i=1}^n i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2, 0\right)$.

Resposta:

(a) Seja $a > 7$ e suponha que, para todo $7 \leq k \leq a$,

$$3^k < k!.$$

Como $3^a < a!$, então

$$\begin{aligned} 3^{a+1} &< a!(3) \\ &< a!(a+1) \\ &= (a+1)! \end{aligned}$$

e, logo, $3^{a+1} < (a+1)!$; isto é, $P(a+1)$.

(b) Seja $a > 5$ e suponha que, para todo $5 \leq k \leq a$,

$$2^n > n^2.$$

Como $n^2 < 2^a$ e $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, então

$$\begin{aligned}(a+1)^2 &= a^2 + 2a + 1 \\ &< 2^a + 2a + 1 \\ &< 2^a + 2^a \\ &= 2^{a+1},\end{aligned}$$

já que $2a + 1 < 2^a$, sempre que $a > 5$.
Logo, $(a+1)^2 < 2^{a+1}$; isto é, $P(a+1)$.

(c) Seja $a > 0$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq a$,

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Então, também temos que

$$(a+1) + \sum_{i=1}^{a} i = (a+1) + \frac{a(a+1)}{2};$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{a+1} i = \frac{2(a+1)}{2} + \frac{a(a+1)}{2}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a+1} i &= \frac{2(a+1) + a(a+1)}{2} \\ &= \frac{(a+1)(a+2)}{2} \\ &= \frac{(a+1)((a+1)+1)}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, $P(a+1)$.

(d) Seja $a > 0$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq a$,

$$\sum_{i=1}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1.$$

Temos, então, que somando 2^{a+1} em ambos dos termos da equação

$$\sum_{i=1}^{a} 2^i = 2^{a+1} - 1$$

o valor verdade da mesma não se altera. Assim sendo,

$$2^{a+1} + \sum_{i=1}^{a} 2^i = 2^{a+1} + 2^{a+1} - 1;$$

isto é,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a+1} 2^i &= 2(2^{a+1}) - 1 \\ &= 2^{(a+1)+1} - 1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.
Portanto, $P(a+1)$.

(e) Seja $a > 0$ e suponha que, para todo $0 \leq k \leq a$,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i2^i = (k-1)2^{k+1} + 2.$$

Então, somando $(a+1)2^{a+1}$ em ambos os termos da equação

$$\sum_{i=1}^{a} i2^i = (a-1)2^{a+1} + 2$$

obtemos

$$(a+1)2^{a+1} + \sum_{i=1}^{a} i2^i = (a+1)2^{a+1} + (a-1)2^{a+1} + 2,$$

ambas com o mesmo valor verdade.
Temos que

$$(a+1)2^{a+1} + \sum_{i=1}^{a} i2^i = (a+1)2^{a+1} + (a-1)2^{a+1} + 2$$

é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{(a+1)} i2^i = ((a+1) + (a-1))2^{a+1} + 2,$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{(a+1)} i2^i &= (2a)2^{a+1} + 2\\ &= ((a-1)+1)2^{(a+1)+1} + 2,\end{aligned}$$

que é equivalente a $P(a+1)$, como queríamos demonstrar.
Portanto, $P(a+1)$.

A.17.2 Conjuntos e Inteiros

21. [default,ex:teo:capsubset]

    Prove que a interseção de dois conjuntos A e B é um subconjunto de A.

    Resposta:

    Vamos provar que se A e B são conjuntos, então $A \cap B \subseteq A$.

    É necessário e suficiente para $A \cap B \subseteq A$ que

    $$x \in A \cap B \implies x \in A.$$

    Temos que

22. [default,ex:associativaminus]

    A diferença entre conjuntos é uma operação associativa? Justifique.

    Resposta:

    Essa operação não é associativa. Tome como contra-exemplo os conjuntos

    $A = \{1, 2, 3\}$

    $B = \{2, 3, 4\}$

    $C = \{3, 4, 5\}$.

    Assim, $(A - B) - C \neq A - (B - C)$.

23. [default,ex:vaziosubset]

    Prove que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

    Resposta:

    Vamos provar que $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto.

    Seja X um conjunto.

    Temos que $\emptyset \subseteq X$ se e somente se

    $$x \in \emptyset \implies x \in X, \text{ para todo } x \in \emptyset.$$

    Entretanto, $\emptyset$ não contém elementos e, da definição do quantificador universal, temos, também, que se P é um predicado, então,

    $$(P(a), \text{ para todo } a \in A) \text{ se e somente se } (V, \text{ para todo } a \in A) \text{ se e somente se } (V)$$

    sempre que $A = \emptyset$.

    Portanto, o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

24. [default,ex:teo:associativacup]

    Prove que a união de conjuntos é uma operação associativa.

    Resposta:

    Vamos provar que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

    Temos que

    $$\begin{aligned}(A \cup B) \cup C &= \{x \mid x \in A \cup B \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \text{ ou } x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B \cup C\} \\ &= A \cup (B \cup C)\end{aligned}$$

    Portanto, a união de conjuntos é uma operação associativa.

25. [default,ex:teo:associativacap]

Prove que a interseção de conjuntos é uma operação associativa.

Resposta:

Vamos provar que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Temos que

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \cap B \text{ e } x \in C\} \\
&= \{x \mid (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ e } x \in C\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \in C\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ e } (x \in B \text{ e } x \in C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B \cap C\} \\
&= A \cap (B \cap C)
\end{aligned}$$

Portanto, a interseção de conjuntos é uma operação associativa.

26. [default,ex:approx-binomial]

Prove que

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

Resposta:

Do jeito que está aqui, isso está errado. A afirmação no enunciado só é verdade se $k = o(n)$
Na falta de um jeito adequado de expressar isso, melhor tirar o exercício da lista.

Vamos provar que

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

Como $0 \leq k \leq n/2$, temos

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1).(n-k)!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n.n(1-1/n).n(1-2/n).\ldots.n(1-(k-1)/n)}{k!} \\
&= \frac{n^k.(1-1/n).(1-2/n).\ldots.(1-(k-1)/n)}{k!}.
\end{aligned}$$

E como

$$\lim (1-1/n).(1-2/n).\ldots.(1-(k-1)/n) = 0,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n^k.(1-1/n).(1-2/n).\ldots.(1-(k-1)/n)}{k!} \\
&= \frac{n^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

Conferir (dm)

A.17.3 Funções Iteradas

27. [default,ex:f:iterada:1]

Seja $f\colon A \to A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)}\colon A \to A$ como a função dada por

$$f^{(n)}(a) = \begin{cases} a, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1}\left(f(a)\right), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Temos que

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(a) &= f^{(n-1)}(f(a)) = f(a) \circ f^{(n-1)} \\
&= f^{(n-2)}(f(f(a))) = f^2(a) \circ f^{(n-2)} \\
&\vdots \\
&= f^{(n-u)}(f^u(a)) = f^u(a) \circ f^{(n-u)},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\
&= \min \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\
&= n
\end{aligned}$$

e, continuando o desenvolvimento de f,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(a) &= f^{(n-u)}(f^u(a)) = f^u(a) \circ f^{(n-u)} \\
&= f^{(n-n)}(f^n(a)) = f^n(a) \circ f^{(n-n)} \\
&= f^n(a) \circ f^0 \\
&= f^n(a) \circ Id \\
&= f^n(a).
\end{aligned}$$

(Nota: Notação polonesa reversa.)

28. [default,ex:f:iterada:2]

Sejam $f, i \colon A \to A$, onde i é a função identidade, dada por $i(a) = a$ para todo $a \in A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)} \colon A \to A$ como

$$f^{(n)} = \begin{cases} i, & \textsf{se } n = 0, \\ f \circ f^{n-1}, & \textsf{se } n > 0. \end{cases}$$

Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Seja n um natural. Então,

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= f \circ f^{(n-1)} \\ &= f \circ f \circ f^{(n-2)} \\ &= f^2 \circ f^{(n-2)} \\ &= f^3 \circ f^{(n-3)} \\ &\vdots \\ &= f^u \circ f^{(n-u)}, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} u &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\ &= \min \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\ &= n \end{aligned}$$

e, logo,

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= f^u \circ f^{(n-u)} \\ &= f^n \circ f^{(n-n)} \\ &= f^n \circ f^0 \\ &= f^n \circ i \\ &= f^n, \text{ para todo } n \text{ natural.} \end{aligned}$$

29. [default,ex:f:iterada:3]

Sejam $f, i \colon A \to A$, onde i é a função identidade, dada por $i(a) = a$ para todo $a \in A$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos $f^{(n)} \colon A \to A$ como

$$f^{(n)} = \begin{cases} i, & \text{se } n = 0, \\ f^{n-1} \circ f, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Prove que $f^{(n)} = f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resposta:

Seja n um natural. Então,

$$\begin{aligned}
f^{(n)} &= f^{(n-1)} \circ f \\
&= \left(f^{(n-2)} \circ f\right) \circ f \\
&= f^{(n-2)} \circ f^2 \\
&= \left(f^{(n-3)} \circ f\right) \circ f^2 \\
&= f^{(n-3)} \circ f^3 \\
&\vdots \\
&= f^{(n-u)} \circ f^u,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
u &= \min\{k \in \mathbb{N} \mid n - k \leq 0\} \\
&= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n\} \\
&= n
\end{aligned}$$

e, logo,

$$\begin{aligned}
f^{(n)} &= f^{(n-u)} \circ f^u \\
&= f^{(n-n)} \circ f^n \\
&= f^(0) \circ f^n \\
&= i \circ f^n \\
&= f^n, \text{ para todo } n \text{ natural.}
\end{aligned}$$

30. [default,ex:f:iterada:monoide]

Seja A um conjunto e seja $\mathcal{F}(A)$ o conjunto das funções $A \to A$. Prove que $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é um monóide.

Resposta:

Vamos provar que $(F(A), \circ)$ é um monóide, provando que

(a) $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é fechada sob $\circ$;
(b) $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é associativa;
(c) $\mathcal{F}(A)$ comporta o elemento neutro.

(a) Sejam $f, g \in \mathcal{F}(A)$.
É imediato que $f, g \colon A \to A$.

Como, g tem imagem e domínio em A e, como f tem domínio em A, então $f \circ g$ tem imagem em A e, logo, $f \circ g \in \mathcal{F}(A)$.
Portanto, $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é fechada sob $\circ$.

(b) Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}(A)$ e $a \in A$.
Por um lado,

$$\begin{aligned}((f \circ g) \circ h)(a) &= (f(g) \circ h)(a) \\ &= (f(g(h)))(a) \\ &= f(g(h(a))).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(a) &= (f \circ (g(h)))(a) \\ &= (f(g(h)))(a) \\ &= f(g(h(a))).\end{aligned}$$

Assim, $(f \circ (g \circ h)) = ((f \circ h) \circ h)$.
Portanto, $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é associativa.

(c) Sejam $f, g \in \mathcal{F}(A)$.
Então, a inversa de f também é elemento de $\mathcal{F}(A)$,

$$f^{-1} \in \mathcal{F}(A).$$

Repare que $f \circ f^{-1} \in \mathcal{F}(A)$ e tome $e = f \circ f^{-1}$.
Por um lado,

$$\begin{aligned}e \circ g &= (f \circ f^{-1}) \circ g \\ &= f(f^{-1}(g)) \\ &= g,\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}g \circ e &= g \circ (f \circ f^{-1}) \\ &= g(f(f^{-1})) \\ &= g\end{aligned}$$

e, portanto,

$$g \circ e = e \circ g = g.$$

Logo, $\mathcal{F}(A)$ comporta um elemento neutro.

Portanto, $(\mathcal{F}(A), \circ)$ é um monóide.

A.17.4 Recorrências

31. [default,ex:dado]

    Um dado honesto de 6 faces é lançado e o lançamento se repete até que dois números 6 consecutivos ocorram. Para cada $n > 0$ seja $p(n)$ a probabilidade de o n-ésimo lançamento ser o último da série.

    (a) Descreva $p(n)$ como uma recorrência.

    (b) Resolva essa recorrência.

    Resposta:

    (a)

    $$p(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ 1/36\left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} p(i)\right), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

    (b)

    estes devem ser eliminados?

32. [default,ex:cor:base]

    Prove que o conjunto

    $$\bigcup_{i=1}^{l} \left\{ n^j r_i^n \mid j \in [0..m_i - 1] \right\}$$

    onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades respectivamente $m_1, m_2, \ldots, m_l$, é uma base do subespaço $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

    Resposta:

33. [default,ex:cor:rec:homo]

    Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz

    $$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j r_i^n$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_l$ são as distintas raízes do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ com multiplicidades respectivamente $m_1, m_2, \ldots, m_l$, e $\{c_{i,j} \mid i \in [1..l] \text{ e } j \in [0..m_i - 1]\}$ é a solução do sistema

$$f(a) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j a^i, a \in [0..k-1].$$

Resposta:

34. [default,ex:cor:subase]

Prove que se $r \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do polinômio característico de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, então o conjunto

$$\left\{n^j r^n \mid j \in [0..m-1]\right\}$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Resposta:

É trivial que r^n é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Assim como não podemos escrever r^n como combinação linear dos demais elementos de uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, também não podemos escrever

$$r^n(1 + n + n^2 + \cdots + n^{m-1})$$

como combinação linear dos elementos de uma base de $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Consequentemente, também temos que cada termo da soma

$$r^n + nr^n + n^2 r^n + \cdots + n^{m-1} r^n$$

é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

A.17.5 Contagem

35. [default,ex:num-seq-bin]

Prove que existem 2^n sequências binárias de comprimento n.

Resposta:

Seja $n > 0$ e suponha que, para todo $1 \leq k \leq n$,

$$\text{existem } 2^k \text{ sequências binárias de tamanho } k.$$

Assim, se existem 2^n sequências binárias de tamanho n, então

$$2^n + 2^n \text{ sequências binárias de tamanho } n + 1;$$

ou seja, existem 2^{n+1} sequências binárias de tamanho $n + 1$.

Além do mais, existem duas sequências binárias de tamanho 1:

$$(0)_2 \text{ e } (1)_2.$$

Portanto, para todo $n > 0$, existem 2^n sequências binárias de tamanho n.

36$^{\#}$. [default,ex:permut-pessoas-mesa]

De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em volta de uma mesa:

(a) circular?

(b) quadrada?

(c) retangular?

Resposta:

Solução por Fernando Shinohata mailto:fernandoshinohata@gmail.com

conferir (dm)

(a) Assumindo que o número de cadeiras é pelo menos 5, à início, como a mesa é circular, assume-se que o número de cadeiras pode ser qualquer número inteiro. Ainda, o fato de ser circular também implica que existem C sequências circularmente equivalentes para cada sequência circular, sendo C o número de cadeiras.

Então, ao fixarmos uma pessoa em uma das cadeiras, garantimos que todas as permutações das 4 restantes não serão circularmente equivalentes.

Portanto, a quantidade de maneiras distintas S de 5 pessoas sentarem-se ao redor de uma mesa circular pode ser calculada pelo número de funções injetoras $f : [4] \to [C-1]$, ou seja,

$$\begin{aligned} S &= \mid [C-1]_{[4]} \mid \\ &= \mid [C-1] \mid_{\mid [4] \mid} \\ &= \mid [C-1] \mid_{4} \\ &= \frac{(C-1)!}{((C-1)-4)!} \end{aligned}$$

Lembrando que $C :=$ Número de cadeiras.

(b) Assumindo que o número de cadeiras é igual em todos os quatro lados da mesa, e que não há cadeiras nas diagonais, temos que o número de cadeiras C pode ser dado pela equação

$$C = 4k, \text{ para algum } k \in N$$

Em outras palavras, o número de cadeiras é sempre da forma $4k$, ou seja, é sempre múltiplo de quatro. Então, o número mínimo de cadeiras necessárias para acomodar as cinco pessoas é oito.

Analisando o formato da mesa, observe que, para cada maneira em que as cinco pessoas se sentam, existem outras **três** sequências circularmente equivalentes:

Em outras palavras, para cada função injetora $f : [5] \to [C]$, onde $[5]$ é o conjunto que representa as cinco pessoas e $[C]$ é o conjunto que representa as cadeiras, temos que existem outras **três** sequências circularmente equivalentes, ou seja, que existem outras três funções $g, h, s : [5] \to [C]$ que são equivalentes à função f.

Portanto, a quantidade de maneiras distintas S de distribuir as cinco pessoas pela mesa é dada pelo número de funções injetoras $f : [5] \to [C]$ dividido pela quantidade de sequências circularmente equivalentes associadas à cada função, que é, estaticamente, **quatro**.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\mid [C]_{[5]} \mid}{4} \\
&= \frac{\mid [C] \mid_{|[5]|}}{4} \\
&= \frac{\mid [C] \mid_{5}}{4} \\
&= \frac{\dfrac{C!}{(C-5)!}}{4} \\
&= \frac{C!}{(C-5)!\ 4}
\end{aligned}
$$

Lembrando que $C :=$ Número de cadeiras, que é sempre múltiplo de quatro.

(c) Assumindo que o número de cadeiras é igual em cada par de lados simétricos da mesa, e que não há cadeiras nas diagonais, temos que o número de cadeiras C pode ser dado pela equação

$$C = 2k, \text{ para algum } k \in N$$

Em outras palavras, o número de cadeiras é sempre da forma $2k$, ou seja, é sempre **par**. Então, o número mínimo de cadeiras necessárias para acomodar as cinco pessoas é seis.

Analisando o formato da mesa, observe que, para cada maneira em que as cinco pessoas se sentam, existe exatamente uma sequência circularmente equivalente:

Em outras palavras, para cada função injetora $f : [5] \to [C]$, onde $[5]$ é o conjunto que representa as cinco pessoas e $[C]$ é o conjunto que representa as cadeiras, temos que existe **uma** sequência circularmente equivalente, ou seja, que existe uma função $g : [5] \to [C]$ que é equivalente à função f.

Portanto, a quantidade de maneiras distintas S de distribuir as cinco pessoas pela mesa é dada pelo número de funções injetoras $f : [5] \to [C]$ dividido pela quantidade de sequências circularmente equivalentes associadas à cada função, que é, estaticamente, **dois**.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{|\ [C]_{[5]}\ |}{2} \\
&= \frac{|\ [C]\ |_{|[5]|}}{2} \\
&= \frac{|\ [C]\ |_5}{2} \\
&= \frac{\frac{C!}{(C-5)!}}{2} \\
&= \frac{C!}{(C-5)!\ 2}
\end{aligned}
$$

A.17.6 Notação Assintótica

37. [default,ex:Olog]

Prove que

$$\log_b n = \Theta(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Resposta:

Seja $b > 1$ uma constante real. Então,

$$\log_b n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \log n,$$

que está em $\Theta(\log n)$. (Basta tomar $c_< = c_> = 1/\log b$ e $n_0 = 1$.)

38. [default,ex:Onxlog]

Sejam $f(n) = O(\log n)$ e $g(n) = \Omega(n)$.

Prove que $f(n) = O(g(n))$ e que $g(n)$ não é $O(f(n))$.

Resposta:

Das premissas acima, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{n} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\log n} < \infty.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{f(n)}}{2^{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{f(n)}}{n} < \infty.$$

Vamos usar a relação “<<” para denotar “é limitada superiormente assintoticamente”.

Repare que $2^{f(n)} << n$ e $n << g(n)$ e, consequentemente,

$$2^{f(n)} << g(n)$$

e, logo, $f(n) << g(n)$.

Veja, também, que se $\lim_{n\to\infty} g(n)/n > 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ng(n)}{n} = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} n\right)}_{=\infty} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} g(n)/n\right)}_{>0} = \infty$$

e, logo, $g(n) \notin O(1)$.

39. [default,ex:teo:fOf]

Prove que

$$f(n) = O(f(n)), \text{ para todo } f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Resposta:

Basta tomar as constantes $c = 1$ e $n_0 = 0$.

40. [default,ex:cor:O1f]

Prove que

$$O(1)f(n) = O(f(n)).$$

Resposta:

Vamos provar que

$$O(1)f(n) = O(f(n))$$

provando que

$$g(n)f(n) = O(f(n)) \implies g(n) = O(1).$$

Pela premissa acima, existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)f(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Assim,

$$\frac{|g(n)f(n)|}{|f(n)|} \leq c, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, daí,

$$\frac{|g(n)| \cdot |f(n)|}{|f(n)|} \leq c, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, consequentemente,

$$|g(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

que nos conta que $g(n) \in O(1)$.

41. [default,ex:cor:Of+Og=Of+g]

Prove que se $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n)g(n) \geq 0, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

então

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)).$$

Resposta:

Sejam $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que, para cada $n \geq n_0$,

$$f(n) \geq 0 \text{ se e somente se } g(n) \geq 0;$$

isto é, $f(n)\ g(n) \geq 0$.

Sob essa hipótese, vamos provar que

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n));$$

isto é, vamos provar que se $A(n) \in O(f(n))$ e $B(n) \in O(g(n))$, então

$$A(n) + B(n) \in O(f(n) + g(n)).$$

Sejam, então, $A(n) \in O(f(n))$ e $B(n) \in O(g(n))$. Então, existem constantes $c_A, c_B \in \mathbb{R}$ e $n_A, n_B \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|A(n)| \leq c_A \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_A$$

e

$$|B(n)| \leq c_B \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_B$$

e, fazendo $c = \max\{c_A, c_B\}$ e $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$, temos

$$|A(n)| \leq c \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e

$$|B(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, observando, da nossa premissa, que $|f(n)| + |g(n)| = |f(n) + g(n)|$, temos

$$\begin{aligned}|A(n)| + |B(n)| &\leq c \cdot |f(n)| + c|g(n)| \\ &= c \cdot (|f(n)| + |g(n)|) \\ &= c \cdot |f(n) + g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0,\end{aligned}$$

que nos leva a acreditar que $A(n) + B(n) \in O(f(n) + g(n))$; ou, equivalentemente,

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n)).$$

42. [default,ex:teo:Omegalog]

Prove que

$$\log_b n = \Omega(\log n), \text{ para todo } 0 < b \neq 1.$$

Resposta:

$$\log_b n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \log n,$$

que está em $\Omega(\log n)$, desde que $\log b \in \mathbb{R} - \{0\}$, i.e. $0 < b \neq 1$.

43. [default,ex:cor:fOmegaf]

Prove que

$$f(n) = \Omega(f(n)), \text{ para todo } f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

Resposta:

É trivial: para qualquer $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, basta tomar $c = 1$ e $n_0 = 0$.

44. [default,ex:cor:Omega1f]

Prove que

$$\Omega(1)f(n) = \Omega(f(n)).$$

Resposta:

Seja $g(n) \in \Omega(f(n))$. Vamos provar que $g(n)f(n) \in \Omega(f(n))$.

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)f(n)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} g(n) > 0$$

e, assim, $\frac{g(n)f(n)}{f(n)} \in \Omega(1)$.

Logo, $g(n)f(n) \in \Omega(f(n))$; ou, em outras palavras,

$$\Omega(1)f(n) = \Omega(f(n)).$$

45. [default,ex:cor:Omega-transitiva]

Prove que se $f(n) = \Omega(g(n))$ então $\Omega(f(n)) = \Omega(g(n))$.

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \in \Omega(g(n))$; isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0.$$

Agora, considere $h(n) \in \Omega(f(n))$, que satisfaz $\lim_{n\to\infty} h(n)/f(n) > 0$. Com essas asserções,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{g(n)} = \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{f(n)}\right)}_{>0} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}\right)}_{>0} > 0.$$

Assim, $h(n) \in \Omega(g(n))$ e, logo, $f(n) \in \Omega(g(n))$.

46. [default,ex:cor:Omega(f+g)]

Prove que

$$\Omega(|f(n)|) + \Omega(|g(n)|) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |f(n)| + \lim_{n\to\infty} |g(n)| &= \lim_{n\to\infty} (|f(n)| + |g(n)|)\\ &\geq \lim_{n\to\infty} |f(n) + g(n)|\,;\end{aligned}$$

isto é,

$$\Omega(|f(n)|) + \Omega(|g(n)|) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

47. [default,ex:cor:Omegaf+Omegag=Omegaf+g]

Prove que se $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n)g(n) \geq 0, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

então

$$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

Resposta:

Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$f(n)g(n) \geq 0, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

isto é,

$$f(n) \geq 0 \text{ se e somente se } g(n) \geq 0.$$

Vamos provar que

$$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n) + g(n));$$

isto é,

$$A(n) + B(n) \in \Omega(f(n) + g(n)),$$

onde $A(n) \in \Omega(f(n))$ e $B(n) \in \Omega(g(n))$.

Temos que

$$\begin{aligned}|A(n)| &\geq c_A \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_A\\ |B(n)| &\geq c_B \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_B\end{aligned}$$

e, fazendo $n_z = \max\{n_A, n_B\}$ e $c = \max\{c_A, c_B\}$, temos

$$\begin{aligned}|A(n)| &\geq c \cdot |f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_z\\ |B(n)| &\geq c \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_z\end{aligned}$$

e, como $|f(n)| + |g(n)| = |f(n) + g(n)|$,

$$\begin{aligned}|A(n)| + |B(n)| &\geq c \cdot |f(n)| + c \cdot |g(n)|\\ &= c(|f(n)| + |g(n)|)\\ &= c|f(n) + g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_z,\end{aligned}$$

o que nos revela que $A(n) + B(n) \in \Omega(f(n) + g(n))$; ou, em outras palavras,

$$\Omega(f(n)) + \Omega(g(n)) = \Omega(f(n) + g(n)).$$

48. [default,ex:cor:Omega1(f)]

Prove que se $g(n) = \Omega(f(n))$ e

$$g(n) = 0 \implies f(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = \Omega(1) f(n).$$

Resposta:

Suponha que $g(n) = \Omega(f(n))$ e que

$$g(n) = 0 \implies f(n) = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Temos, então, dois casos:

(a) $g(n) = 0, \text{ para todo } n \geq 0$. Então, $f(n) = 0, \text{ para todo } n \geq 0$ e, trivialmente,

$$g(n) = \Omega(1) f(n).$$

(b) $g(n) \neq 0, \text{ para algum } n \geq 0$. Temos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0,$$

pela nossa premissa de que $g(n) = \Omega(f(n))$, e, logo,

$$\frac{g(n)}{f(n)} = \Omega(1);$$

isto é, $g(n) = \Omega(1) f(n)$.

Em ambos os casos temos $g(n) = \Omega(1) f(n)$.

49. [default,ex:imagem-finita]

Prove que se a imagem de $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é finita, então $f(n) = O(1)$.

Resposta:

Sob a hipótese de que Im_f, a imagem de f, é finita, temos que

$$\lim_{n \to \infty} f(n) \leq \max Im_f < \infty$$

e, logo, $f(n) = O(1)$.

50. [default,ex:lim-O(1)]

(a) Prove que se $\lim |f(n)| < \infty$, então $f(n) = O(1)$.
(b) Prove que se $\lim |f(n)| = \infty$, então $f(n)$ não é $O(1)$.
(c) É verdade que $f(n) = O(1)$ se e somente se $\lim |f(n)| < \infty$? Justifique.

Resposta:

(a) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \notin O(1)$. Então, não existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

isto é, não existe uma assíntota constante para $\pm f(n)$ a partir de um certo n_0. É razoável, então, que, para todo $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$|f(n)| > c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

ou seja, $lim_{n\to\infty}|f(n)| > c$, para toda constante $c \in \mathbb{R}$; ou, em outras palavras,

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| = \infty$$

e, logo, $f(n) \notin O(1)$ implica $\lim_{n\to\infty} |f(n)| \nleq \infty$.
Aplicando a contra-positiva sobre a afirmação acima, temos que

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty \implies f(n) \in O(1).$$

(b) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) = O(1)$. Então,

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

ou, em outras palavras, existe uma assíntota constante para $|f(n)|$ a partir de um certo n_0; isto é,

$$\lim_{n\to\infty} |f(n)| \geq c \cdot 1$$

e, consequentemente, $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$.
Assim, $f(n) = O(1)$ implica $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$ e, pela contra-positiva temos que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty \implies f(n) \notin O(1).$$

(c) O item (a) nos fornece $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$ implica $f(n) = O(1)$ e, então, nos resta provar que

$$f(n) = O(1) \implies \lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty.$$

Se $f(n) = O(1)$, então existem $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \leq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, então, também existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(n)| \leq \infty, \text{ para todo } n \geq n_1$$

e, logo, $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$.
Portanto, sim,

$$f(n) = O(1) \equiv \lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty.$$

51. [default,ex:O(1)/O(1)]

É verdade que

$$\frac{O(1)}{O(1)} = O(1)?$$

Justifique.

Resposta:

Não, tome as funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(n) = 1$ e $g(n) = 1/n$, ambas em $O(1)$. Assim, a fração

$$\frac{1}{1/n} = n$$

não é assintoticamente limitada superiormente por uma constante.

52. [default,ex:O(1)/infinito]

Prove que se $\lim g(n) = \infty$, então $O(1) = O(g(n))$.

Resposta:

Suponha que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$.

Vamos provar que $O(1) \subseteq O(g(n))$.

Seja $f(n) \in O(1)$. Então, existem $c_f \in \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \geq c_f \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_f;$$

isto é, $\lim_{n\to\infty} |f(n)| < \infty$.

Entretanto,

$$\begin{aligned} O(g(n)) &= \{h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N})(|h(n)| \leq c \cdot |g(n)|, \text{ para todo } n \geq n_0)\} \\ &= \{h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid (\exists n_0 \in \mathbb{N})(|h(n)| \leq \infty, \text{ para todo } n \geq n_0)\} \end{aligned}$$

e, como $|f(n)| \leq c_f$, para todo $n \geq n_f$, então também é verdade que

$$|f(n)| \leq \infty, \text{ para todo } n \geq n_f$$

e, logo, $|f(n)| \in O(g(n))$.

Portanto, $O(1) \subseteq O(g(n))$ sempre que $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$.

53. [default,ex:lim-Omega(1)]

(a) Prove que se $\lim f(n) \neq 0$, então $f(n) = \Omega(1)$.

(b) Prove que se $\lim f(n) = 0$, então $f(n)$ não é $\Omega(1)$.

(c) É verdade que $f(n) = \Omega(1)$ se e somente se $\lim f(n) \neq 0$? Justifique.

Resposta:

(a) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \notin \Omega(1)$. Então, não existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq n_0;$$

isto é, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|f(n)| < c, \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então, só pode ser que $\lim_{n\to\infty} |f(n)| = 0$ porque $|f(n)|$ é assintoticamente limitado superiormente por toda constante real e, aplicando a contra-positiva, temos

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0 \implies f(n) \in \Omega(1).$$

(b) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f(n) \in \Omega(1)$. Então, existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$|f(n)| \geq c \cdot 1, \text{ para todo } n \geq_0;$$

ou, equivalentemente, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$|f(n)| > 0, \text{ para todo } n \geq n_0$$

e, portanto, $\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0$.

Pela contra-positiva, temos, então, que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0 \implies f(n) \notin \Omega(1).$$

(c) O caso em que $\lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0 \implies f(n) = \Omega(1)$ é provado positivamente no primeiro item desse exercício, então nos resta provar que $f(n) = \Omega(1) \implies \lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0$.

Suponha que $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. Então, pelo item anterior, não existem constantes $c \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$|f(n)| \geq c, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

o que nos leva a concluir que $f(n) \notin \Omega(1)$.

Equivalentemente,

$$f(n) = \Omega(1) \implies \lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0.$$

Portanto, sim,

$$f(n) = \Omega(1) \text{ se e somente se } \lim_{n\to\infty} f(n) \neq 0.$$

54. [default,ex:Omega(1)/Omega(1)]

É verdade que

$$\frac{\Omega(1)}{\Omega(1)} = \Omega(1)?$$

Justifique.

Resposta:

Não. Considere as funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$, ambas em $\Omega(1)$. A função

$$\frac{f(n)}{g(n)} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

não é inferiormente limitada assintoticamente por uma constante.

55. [default,ex:cor:Thetalog]

Prove que

$$\log_b n = \Theta(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Resposta:

Seja $b > 1$ um real. Repare que

$$\log_b n = \frac{\log_k n}{\log_k b}, \text{ para todo } 1 \neq k \in \mathbb{R}$$

e, assim sendo, basta tomar $k = 10$ e teremos

$$\log_b n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} b} = \frac{\log n}{\log b} = \left(\frac{1}{\log b}\right) \log n,$$

que está no conjunto $\Theta(\log n)$, uma vez que $1/\log b$ seja constante.

56. [default,ex:funcoes]

Para quais pares de funções dentre as abaixo temos $f(n) = \Theta(g(n))$? Justifique.

(a) $\sqrt{n}$

(b) $n \log n$

(c) n^2

(d) $n^{1/3} + \log n$

(e) $\ln n$

(f) $(1/3)^n$

(g) n

(h) $n - n^3 + 7n^5$

(i) n^3

(j) $(\log n)^2$

(k) $\frac{n}{\log n}$

(l) $(3/2)^n$

(m) 2^n

(n) $n^2 + \log n$

(o) $\log n$

(p) $n!$

(q) $\log \log n$

(r) 6

Resposta:

Os únicos pares na mesma ordem de complexidade são

(a) n^2 e $n^2 + \lg n$, porque

$$\begin{aligned}0 &< \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + \lg n}{n^2} \\ &= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{\lg n}{n^2} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2}}_{=1} + \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{\lg n}{n^2}}_{=0} \\ &= 1 < \infty;\end{aligned}$$

e

(b) $\ln n$ e $\log n$, porque

$$\ln n = \frac{\log n}{\log e} = \left(\frac{1}{\log e} \right) \log n,$$

que está em $\Theta(\log n)$.

57. [default,ex:teo:o1f]

Prove que

$$o(1) f(n) = o(f(n)).$$

Resposta:

Vamos provar que

$$g(n) f(n) \in o(f(n)), \text{ para todo } g(n) \in o(1).$$

Seja $g(n) \in o(1)$. Observe que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(n) f(n)}{f(n)} = \lim_{n \to \infty} g(n) = 0,$$

conforme a definição de g.

Portanto,

$$g(n)f(n) = o(f(n)), \text{ para todo } g(n) \in o(1);$$

isto é,

$$o(1)f(n) = o(f(n)).$$

58. [default,ex:teo:of=o1f]

Prove que se $g(n) = o(f(n))$ e

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = o(1)f(n)$$

Resposta:

Suponha que $g(n) = o(f(n))$ e que

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Temos, então, dois casos:

(a) $f(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$ Então, $g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$ e, obviamente, $g(n) = o(1)f(n)$.

(b) $f(n) \neq 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}$ Repare que, como $g(n) = o(f(n))$, então $g(n)/f(n) = o(1)$ e, por outro lado, $g(n) = o(1)f(n)$ se e somente se $g(n)/f(n) = o(1)$. Portanto, $g(n) = o(1)f(n)$.

Em ambos os casos, temos

$$g(n) = o(1)f(n).$$

59. [default,ex:cor:nalpha+o1]

Prove que

$$\frac{1}{n^{\alpha+o(1)}} = o(1), \text{ para todo } \alpha > 0.$$

Resposta:

Seja $f(n) \in o(1)$ e vamos provar que

$$\frac{1}{n^{\alpha+f(n)}} \in o(1).$$

Primeiramente, observe que

$$\frac{1}{n^{\alpha+f(n)}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+f(n)}$$

e que

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha + f(n)) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \alpha}_{=\alpha} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(n)}_{=0} = \alpha > 0.$$

Nessas condições,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+f(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 0$$

e, logo,

$$\frac{1}{n^{\alpha+f(n)}} \in o(1).$$

60. [default,ex:f+o=1+f]

Prove que

$$f(n) + o(f(n)) = (1 + o(1))f(n)$$

Resposta:

Vamos provar que

$$f(n) + o(f(n)) = (1 + o(1))f(n)$$

provando que

$$\frac{f(n) + o(f(n))}{f(n)} = 1 + o(1).$$

Primeiramente, a proposição acima significa que existe um $g(n) \in o(f(n))$ tal que

$$\frac{f(n) + g(n)}{f(n)} = 1 + o(1).$$

Perceba que

$$\frac{f(n) + g(n)}{f(n)} = \frac{f(n)}{f(n)} + \frac{g(n)}{f(n)}$$

e, também, que $g(n)/f(n) = o(1)$ porque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$$

e, com um suave abuso de notação, temos que

$$\frac{f(n)}{f(n)} + \frac{g(n)}{f(n)} = 1 + o(1).$$

Portanto,

$$\frac{f(n) + o(f(n))}{f(n)} = 1 + o(1)$$

e, consequentemente,

$$f(n) + o(f(n)) = (1 + o(1))f(n).$$

61. [default,ex:cor:alphan+o1]

Prove que se $|\alpha| < 1$, então

$$\alpha^{n+o(n)} = o(1).$$

Resposta:

Seja a função $e\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ um elemento de $o(n)$.

Vamos provar que

$$\alpha^{n+e(n)} \in o(1).$$

Repare que

$$\lim_{n\to\infty}(n + e(n)) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} n}_{=\infty} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} e(n)}_{<<\ n} = \infty$$

e, então,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^{n+e(n)} = \lim_{x\to\infty} \alpha^x = 0$$

e, logo, $alpha^{n+e(n)} \in o(1)$.

Portanto, $\alpha^{n+o(n)} = o(1)$.

Referências Bibliográficas

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866.

William Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 1 of *Wiley series in probability and mathematical statistics: Probability and mathematical statistics*. Wiley, 3 edition, 1971. ISBN 9780471257097. URL http://books.google.com.br/books?id=NFNQAAAAMAAJ.

Stasys Jukna. *Extremal combinatorics - with applications in computer science*. Texts in theoretical computer science. Springer, 2001. ISBN 978-3-540-66313-3. URL http://www.springer.com/computer/theoretical+computer+science/book/978-3-540-66313-3.

László Lovász, József Pelikán, and Katalin Vesztergombi. *Discrete Mathematics — Elementary and Beyond*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-London-Milan-Paris-Tokyo, 2003. ISBN 978-0387955858.

Michael Mitzenmacher and Eli Upfal. *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2005. ISBN 0521835402.

E. Schrödinger. *What is Life?: The Physical Aspect of the Living Cell*. What is Life?: The Physical Aspect of the Living Cell. The University Press, 1944. URL http://books.google.com.br/books?id=154CAAAAMAAJ.

Jorge Stolfi and Anamaria Gomide. Elementos de matemática discreta para computação, 2011. URL http://www.ic.unicamp.br/~anamaria/livro/2013-03-12-livro.pdf.

Chris Tuffley. The principle of inclusion-exclusion, 2009. URL http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/02/inclusion-exclusion.pdf&ei=sj2DU73XL6m0sQTL24CwCQ&usg=AFQjCNEh4U_iyB_WDYPDzSAYj_3MFZrIIQ&sig2=9YLp0YGfZI4Mv8OQsoHNNA.