三元溶液质量浓度的直观表示法

1.　质心法

三元溶液的质量浓度可用以下方式直观地在图上予以表示：

设三元溶液 p 的三种组份分别是 a、b、c，相应的质量依次是 m_A，m_B，m_C。在平面上任取三点 A、B、C（不共线），并在平面上任意取一点 O 作为参考点，再作 P 点满足：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{OA}+\frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{OB}+\frac{m_C}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{OC} \quad (1)$$

那么点 P 与 A、B、C 三点的位置关系可直观地反映溶液中三种组份 a、b、c 的浓度关系。在本文中，我们把这样的方法称为**质心法**，称 P 点为溶液 p 的**表示点**。

这样的定义有很多好处，但最容易看出的是以下两点：

１、当溶液是单一组份（纯溶液时），P 点与 A、B、C 中的某一个重合，即平面上的 A、B、C 三点分别表示 a、b、c 的纯溶液。例如当溶液是 a 的纯溶液时，m_B、m_C 都是 0，那么由公式（１）

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m_A}{m_A+0+0}\overrightarrow{OA}+\frac{0}{m_A+0+0}\overrightarrow{OB}+\frac{0}{m_A+0+0}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}$$

即 P 与 A 重合。

２、从 P 与 A、B、C 距离的远近可定性地看出 a、b、c 三者的浓度大小。例如：当 m_A 占溶液总质量比重越大时，P 点与 A 点越接近。

2.　溶液的混合

关于 P 点与 A、B、C 三点的位置关系另外有一些简单而直观的几何关系，但是为了使文章的论述简练，我们先来看关于 P 点的最复杂的一个性质（不过也是简单的）。

2.1. 混合溶液的表示点

利用质心法表示溶液组份，在遇到溶液混合的情况时，表现出很好的几何性质。为了说明此性质，我们设：两份溶液 $p_1(m_{A1},m_{B1},m_{C1})$、$p_2(m_{A2},m_{B2},m_{C2})$ 相混合，混合后得到的溶液为 $p_3(m_{A3},m_{B3},m_{C3})$，$m_{p1}$、$m_{p2}$、$m_{p3}$ 分别是溶液 p_1、p_2、p_3 的质量

（$m_{p1}=m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}$、$m_{p2}=m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}$、$m_{p3}=m_{A3}+m_{B3}+m_{C3}$），$p_1$、$p_2$、$p_3$由质心法在平面上表示点分别为$P_1$、$P_2$、$P_3$。那么，我们有以下关系：

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OP_1}+\frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OP_2} \quad (2)$$

证明：

由质心法的定义有：

$$\overrightarrow{OP_1}=\frac{m_{A1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OP_2}=\frac{m_{A2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OC}$$

由上面两式与m_{p1}、m_{p2}的定义，等式（2）的两边可化为：

$$\begin{aligned}
&\frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OP_1}+\frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OP_2}\\
&=\frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\left(\frac{m_{A1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OC}\right)\\
&\quad+\frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\left(\frac{m_{A2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OC}\right)\\
&=\frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\left(\frac{m_{A1}}{m_{p1}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B1}}{m_{p1}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C1}}{m_{p1}}\overrightarrow{OC}\right)+\frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\left(\frac{m_{A2}}{m_{p2}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B2}}{m_{p2}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C2}}{m_{p2}}\overrightarrow{OC}\right)\\
&=\frac{m_{A1}+m_{A2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B1}+m_{B2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C1}+m_{C2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$

因为p_3是由p_1、p_2混合而成，那么$m_{A3}=m_{A1}+m_{A2}$、$m_{B3}=m_{B1}+m_{B2}$、$m_{C3}=m_{C1}+m_{C2}$，

并且$m_{p3}=m_{A3}+m_{B3}+m_{C3}=m_{p1}+m_{p2}$，从而上面的式子化为：

$$\frac{m_{A3}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B3}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C3}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OC}=\frac{m_{A3}}{m_{p3}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B3}}{m_{p3}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C3}}{m_{p3}}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP_3}$$

从而**证明完毕**。

2.2. 几何意义

公式（2）的美妙在于其几何意义。图 1 表示了溶液 p_1、 p_2 混合的结果，其中，点 P_3 在直线 P_1P_2 上，这正是公式（2）的奥妙之一。下面我们从公式（2）出发，验证这一点。

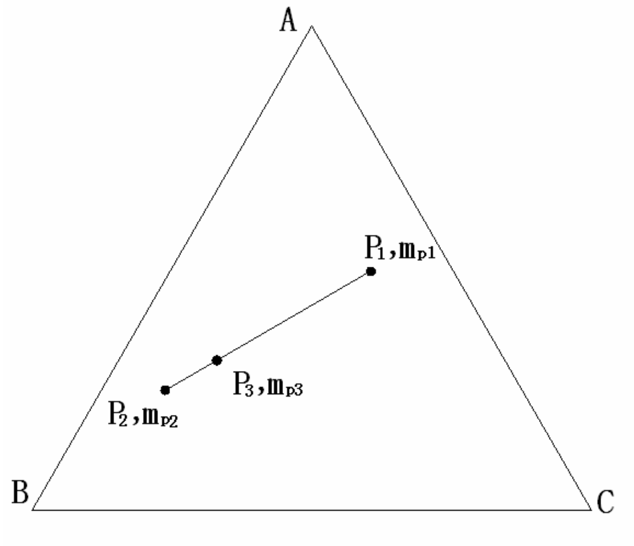

图 1 两份溶液混合

从公式（2）可得

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_3} &= \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} \\
&= \frac{m_{p1}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OP_1} + \frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\
&= \frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}) \\
&= \frac{m_{p2}}{m_{p1}+m_{p2}}\overrightarrow{P_1P_2}
\end{aligned}
$$

由此可以看出，点 P_3 的确在直线 P_1P_2 上，并且相对于点 P_1、 P_2 的距离与溶液 p_1、 p_2 的质量成反比，即 $\overline{P_1P_3} : \overline{P_2P_3} = \frac{1}{m_{p1}} : \frac{1}{m_{p2}} = m_{p2} : m_{p1}$ （3）。

由此，溶液混合的几何性质非常清楚了，混合得到的溶液的表示点，位于原来两份溶液表示点的连线上，并且相对两点的距离与溶液质量成反比。这个结果是十分直观的，因为混合的两份溶液中，显然谁的质量大，混合后的溶液的组份就与谁接近。

3. 平面上的点与组份浓度一定的溶液

倘若你比较细心的话，会注意到：根据质心法的定义（1），一份固定组份浓度的溶液的表示点必定在固定的位置，但是我从来没有提到这样一个问题（显然是重要的）：如果两份溶液的表示点在同一位置，那么其组份浓度是否相同？这是我刻意在回避的一个问题，一方面由于这个问题是显然的，另一方面在于要尽快地切入重点（溶液的混合），不能因为这样琐碎的问题（当然了类似的问题不止一个）分散了注意力。现在正是解决这些问题的时候。

性质1：当 A、B、C 点在平面上选定之后，一份溶液的表示点在平面上位置固定，与选则的参考点 O 无关。

证明：

设某一份溶液为 $p(m_A,m_B,m_C)$，以 O_1、O_2 为参考点所得的表示点分别是 P_1、P_2。

根据定义，

$$\overrightarrow{O_1P_1}=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_1A}+\frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_1B}+\frac{m_C}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_1C}$$

$$\overrightarrow{O_2P_2}=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2A}+\frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2B}+\frac{m_C}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2C}$$

那么，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2}&=\overrightarrow{O_2P_2}-\overrightarrow{O_2P_1}\\
&=\overrightarrow{O_2P_2}-(\overrightarrow{O_2O_1}+\overrightarrow{O_1P_1})\\
&=\overrightarrow{O_2P_2}-\overrightarrow{O_1P_1}-\overrightarrow{O_2O_1}\\
&=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2A}+\frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2B}+\frac{m_C}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2C}\\
&\quad-(\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_1A}+\frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_1B}+\frac{m_C}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_1C})\\
&\quad-\overrightarrow{O_2O_1}\\
&=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2O_1}+\frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2O_1}+\frac{m_C}{m_A+m_B+m_C}\overrightarrow{O_2O_1}\\
&\quad-\overrightarrow{O_2O_1}\\
&=\vec{0}
\end{aligned}$$

即以 O_1、O_2 为参考点分别所得的表示点 P_1、P_2 重合，**证毕**。

性质2、当 A、B、C 点在平面上选定之后，当两份溶液的组份浓度相同时，其表示点在平面上重合。

证明：

设两份溶液分别是 $p_1(m_{A1},m_{B1},m_{C1})$、 $p_2(m_{A2},m_{B2},m_{C2})$，并且具有相同的组份浓度，即

$\frac{m_{A1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}=\frac{m_{A2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}=x_A$、 $\frac{m_{B1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}=\frac{m_{B2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}=x_B$、

$\frac{m_{C1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}=\frac{m_{C2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}=x_C$，其表示点分别是 P_1、 P_2。

选择参考点O，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1}&=\frac{m_{A1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{OC}\\&=x_A\overrightarrow{OA}+x_B\overrightarrow{OB}+x_C\overrightarrow{OC}\\&=\frac{m_{A2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OA}+\frac{m_{B2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OB}+\frac{m_{C2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OP_2}\end{aligned}$$

从而， P_1、 P_2 重合，**证毕**。

性质3、当 A、 B、 C 在平面上选定之后，如果两份溶液的表示点在平面上重合，那么这两份溶液具有相同的组份浓度。

证明：

设两份溶液分别是 $p_1(m_{A1},m_{B1},m_{C1})$、$p_2(m_{A2},m_{B2},m_{C2})$，两份溶液共同的表示点为 P， p_1 的组份浓度为， a： $x_{A1}=\frac{m_{A1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}$， b： $x_{B1}=\frac{m_{B1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}$， c： $x_{C1}=\frac{m_{C1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}$。 p_2 的组份浓度为， a： $x_{A2}=\frac{m_{A2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}$， b： $x_{B2}=\frac{m_{B2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}$， c： $x_{C2}=\frac{m_{C2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}$。

选择参考点为 C，则根据质心法定义（1）有：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\frac{m_{A1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{CA}+\frac{m_{B1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{CB}+\frac{m_{C1}}{m_{A1}+m_{B1}+m_{C1}}\overrightarrow{CC}\qquad(4)\\&=x_{A1}\overrightarrow{OA}+x_{B1}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}&=\frac{m_{A2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{CA}+\frac{m_{B2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{CB}+\frac{m_{C2}}{m_{A2}+m_{B2}+m_{C2}}\overrightarrow{CC}\\&=x_{A2}\overrightarrow{OA}+x_{B2}\overrightarrow{OB}\end{aligned}\qquad(5)$$

那么由（4）、（5），可得：

$$x_{A1}\overrightarrow{CA}+x_{B1}\overrightarrow{CB}=x_{A2}\overrightarrow{CA}+x_{B2}\overrightarrow{CB}$$

由于A、B、C在同一平面上，并且C点不与A、B共线，那么$\overrightarrow{CA}$和$\overrightarrow{CB}$线性无关，从而$x_{A1}=x_{A2}$，$x_{B1}=x_{B2}$，继而$x_{C1}=(1-x_{A1}-x_{B1})=(1-x_{A2}-x_{B2})=x_{C2}$，从而证毕。

4. 由表示点的位置求某一组份的浓度

由性质 3 知，当表示点的位置给定时，所表示的溶液浓度是定值。然而，我们能知道的不仅这一点，实际上通过绘有A、B、C与溶液p的表示点P的平面图，可求得a、b、c三种组份浓度的几何表示（由溶液混合的性质可以很容易地得到这些结论）。

性质 4、如图 2 所示，我们在平面上选定不共线的三点A、B、C表示组份a、b、c，这样选定后，溶液$p(m_A,m_B,m_C)$的表示点为P，点A、P的的连线交直线BC于点D。

那么，a的浓度为$x_A=\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}}$，并且$x_B:x_C=\frac{1}{\overline{BD}}:\frac{1}{\overline{CD}}=\overline{CD}:\overline{BD}$。

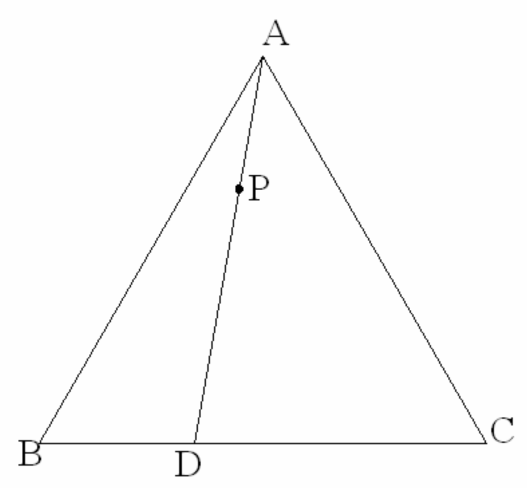

图 2 根据表示点确定组份浓度

证明：

显然，溶液p是三份溶液$p_A(m_A,0,0)$、$p_B(0,m_B,0)$，$p_C(0,0,m_C)$混合后的结果，这三

份溶液的表示点分别位于 A 、 B 、 C 处。

设 p_B 与 p_C 混合后得到溶液 p_1，那么 p_1 与 p_A 混合后将得到 p 。我们可以证明 p_1 的表示点 P_1（设为）正是图中的 D。因为 p_1 与 p_A 混合后得到 p，由于溶液混合的性质知，P_1、A、P 共线，并且因为 p_B 与 p_C 混合得到 p_1，那么 P_1 与 B 、 C 共线，也就是说 P_1 在 A、 P 的连线上，也在 B 、 C 的连线上，那么 P_1 就与 D 重合。

既然 D 是 p_1 的表示点，而 p_1 与 p_A 混合得到 p，并且 p_1 的质量为 m_B+m_C，那么根据溶液的混合的公式（2），

$$(m_B+m_C):m_A=\frac{1}{\overline{DP}}:\frac{1}{\overline{AP}}=\overline{AP}:\overline{DP}$$

或者，

$$x_A=\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}=\frac{\overline{DP}}{\overline{AD}} \quad (6)$$

又因为 D 是 p_1 的表示点，而 p_B 与 p_C 混合得到 p_1，那么根据溶液的混合的公式（2）有：

$$m_B:m_C=\frac{1}{\overline{BD}}:\frac{1}{\overline{CD}}=\overline{CD}:\overline{BD} \quad (7)$$

从而证毕。

性质 4 告诉我们，要由一个溶液的表示点求某一个组份的浓度，只要将这个点与待求的组份的表示点用直线连起来，求得这条直线与其他两个组份构成的直线的交点，该种组份的浓度即可通过图中绘制图线的比例得到。这就是我们想要得到的直观的效果。

另外，性质 4 还有其他一些描述方式，其中有一种是过点 P 作与直线 BC 的平行线，这条线与直线 AB 、 AC 分别交于点 E、F，由于平行线定理，$\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}}$，从而亦可用 $\frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}$ 或 $\frac{\overline{FC}}{\overline{AC}}$ 来表示组份 a 的浓度（我们曾经的《低温生物技术》的教材第 9 面就是采用这种描述的方式），但不管描述方式是怎样的，其实质是不会变的。

5. 其他性质

质心法表示点某些琐碎的性质虽然很明显，不是很重要，但仍值得提一下。

性质 5、当 A、B、C 点在平面上选定之后，如果一份溶液 p 的组成中，只一一种组份 a 在变，那么，这份溶液在平面上绘制的表示点 P 的轨迹是一条直线，并且此直线过 A 点。

证明（略）。

这个性质是明显的，关键在于其他两种组份不变，那么其质量比就不变，由性质 4，图（2）中 $\overline{CD}:\overline{BD}$ 是一个定值，从而 AP 过定点 D，从而 P 的轨迹始终在线段 AD 上。性质 5 对于某些过程具有指导意义，比如说将空气看成氧、氩、氮组成的三元混合物，当温度降到氧的沸点以下，氧开始液化，而未达到氩的沸点时，对于气态的空气混合物（如图 3 所示）而

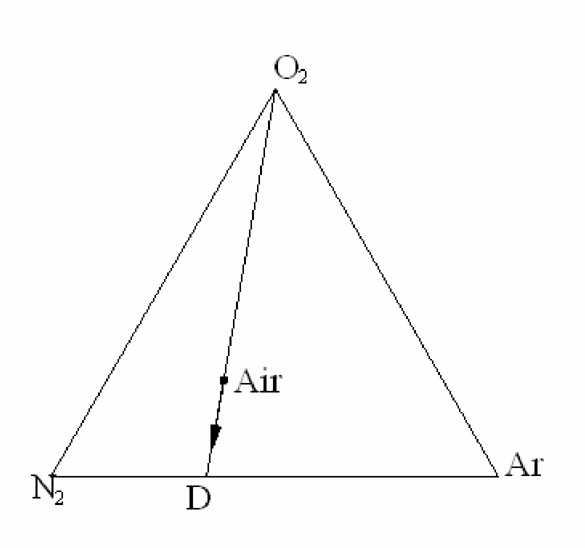

图 3 空气液化的过程（氧减少）

言，氩和氮的质量都是不变的，也就是说其质量比（或浓度比）是不变的，那么空气的表示点将沿图 3 中 O_2D 直线朝着 D 的方向移动。首先因为只有这样才能保证氮与氩的质量比不变（恒为 $\dfrac{\overline{ArD}}{\overline{N_2D}}$），其次，由于氧越来越少，那么最终的混合物偏离纯氧点也就越来越远。

同理，同样的描述适用于三元溶液的降温过程。

性质 6、当 A、B、C 在平面上选定之后，对于 a、b、c 的溶液，其表示点始终在 A、B、C 构成的三角形之内，三角形的边界表示，只有两种组份溶液的情况，顶点表示纯溶液。

证明（略）。

6. 总结

溶液混合公式与性质 4 是这篇文章的两个重要（尤其是前者）的结论，这两个结论说明了采用这样表示三元溶液浓度的好处（直观性）。