Gợi ý. a) f đơn điệu không tăng, bị chặn dưới bởi 0 $\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Vì $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) + \int_0^x f(t)\,dt \right] \in \mathbb{R}$ nên cũng $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, thì $\exists \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$. Suy ra $\lim\limits_{x\to\infty} F(2x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} [F(2x) - F(x)] = 0$.

Mặt khác $F(2x) - F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt \geq \int_x^{2x} f(2x)\,dt = xf(2x) \geq 0$, áp dụng nguyên lý kẹp ta có

$$\lim_{x\to\infty} xf(2x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} 2xf(2x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} xf(x) = 0.$$

b) Chọn $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\ln(x+2)}$. Ta có

- $f(x) > 0 \quad \forall x \geq 0$, f đơn điệu giảm trên $[0, \infty)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \left[f(x) + \int_0^x f(t)\,dt \right] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^\infty \dfrac{dt}{(t+2)\ln(t+2)} = 0 + \ln\ln(t+2) \Big|_0^\infty = \infty$.
- $\lim\limits_{x\to 0} xf(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{(x+2)\ln(x+2)} = 0$.

□