BÀI GIẢNG LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Nguyễn Đức Thịnh

Ngày 12 tháng 3 năm 2024

Mục lục

Phần I

Giải tích

Bài giảng được biên soạn bám sát theo đề cương thi Giải tích do Ban tổ chức là Hội Toán học Việt Nam đề ra:

Phần I: Dãy số và hàm số

1) Dãy hội tụ, dãy đơn điệu, dãy bị chặn, dãy dần ra vô cực.
2) Các tính chất và phép toán về dãy hội tụ.
3) Tìm giới hạn của dãy số.
4) Hàm đơn điệu, hàm bị chặn, hàm tuần hoàn, hàm chẵn và hàm lẻ, hàm ngược.
5) Giới hạn của hàm số.
6) Tính liên tục, các tính chất của hàm liên tục.
7) *Hàm lồi, bất đẳng thức Jensen*.*[1]

Phần II: Giải tích trên hàm một biến

1) Phép tính vi phân trên hàm một biến.
   a) Định nghĩa và các phép toán về đạo hàm.
   b) Các định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, l'Hospital.
   c) Công thức Taylor, công thức Maclaurin.
   d) Cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số
   e) *Hàm lồi khả vi*.*
2) Phép tính tích phân trên hàm một biến.
   a) Nguyên hàm và tích phân bất định.
   b) Các phương pháp tính tích phân bất định.
   c) Tích phân các hàm hữu tỷ, hàm vô tỷ, hàm lượng giác.
   d) Định nghĩa và các phương pháp tính tích phân xác định, tính khả tích.
   e) Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân (đạo hàm của tích phân xác định theo cận của tích phân, công thức Newton – Leibniz).
   f) Tích phân phụ thuộc tham số.
   g) Các định lý về trung bình tích phân.
   h) Bất đẳng thức tích phân.
   i) *Sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng, các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân của hàm dương*.*
3) *Chuỗi số, dãy hàm và chuỗi hàm*.*

[1] Các nội dung có dấu * và in nghiêng là các nội dung chỉ dành cho sinh viên dự thi bảng A.

a) *Chuỗi số, tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ của chuỗi*.*

b) *Các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn tích phân (Cauchy), tiêu chuẩn đối với chuỗi đan dấu (Leibniz), hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện, tiêu chuẩn căn thức (Cauchy), tiêu chuẩn tỉ số (d'Alembert)*.*

c) *Các tiêu chuẩn hội tụ Abel, Dirichlet*.*

d) *Chuỗi lũy thừa*.*

e) *Tiêu chuẩn hội tụ đều cho dãy hàm và chuỗi hàm một biến, các tính chất cơ bản của dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ đều*.*

Phần III: ***Không gian metric****

1) *Không gian metric, tôpô trên không gian metric*.*

2) *Ánh xạ liên tục, đẳng cự, đồng phôi*.*

3) *Các tính chất đầy đủ, compact, liên thông*.*

Do sinh viên Trường Đại học Xây dựng Hà Nội học các môn Toán cao cấp chỉ trong năm thứ nhất, nên khối lượng kiến thức trang bị không đầy đủ so với đề cương. Vì vậy, việc lựa chọn thi bảng B được xem là phù hợp. Nội dung bài giảng cũng được thiết kế theo giới hạn kiến thức này.

Bài giảng được thiết kế theo bố cục tổng hợp lý thuyết, bao gồm các định lý, mệnh đề, bổ đề, hệ quả, có thể bao gồm ví dụ minh họa cơ bản. Sau đó, đến phần bài tập, để giải mỗi bài có khi ta cần sử dụng tổng hợp tất cả các kiến thức kể trên, được trích dẫn ở phần ghi chú sau mỗi bài.

Chương 1

Giới hạn

1.1 Giới hạn của dãy số thực

1.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.1.1. *Ta nói dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới giới hạn $a \in \mathbb{R}$ nếu u_n đủ gần a khi n đủ lớn:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |u_n - a| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Ngược lại, $\{u_n\}$ gọi là phân kỳ.

1.1.2 Các tính chất của dãy hội tụ

Định lý 1.1.1. *Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.*

Định lý 1.1.2. *Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn của dãy.*

Định lý 1.1.3.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|. \tag{1.2}$$

Định nghĩa 1.1.2. *Dãy $\{u_n\}$ gọi là*

a) bị chặn trên nếu $\exists M \quad u_n \leq M,\ \forall n$.

b) bị chặn dưới nếu $\exists m \quad u_n \geq m,\ \forall n$.

c) bị chặn nếu $\exists M, m \quad m \leq u_n \leq M,\ \forall n$.

Định lý 1.1.4. *Mọi dãy hội tụ thì bị chặn.*

1.1.3 Các phép tính trên các dãy hội tụ

Định lý 1.1.5. *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$. *Khi đó*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab.$

3) $b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}.$

Hệ quả 1.1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha u_n) = \alpha a.$

1.1.4 Tiến qua giới hạn trong bất đẳng thức

Định lý 1.1.6. *Cho hai dãy hội tụ* $\{u_n\}$ *và* $\{v_n\}$. *Khi đó nếu* $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n \geq v_n$ *(n đủ lớn) thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Hệ quả 1.1.2. *Cho dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ. Khi đó nếu* $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n \geq b$ *(tương ứng* $\leq b$*) thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq b$ *(tương ứng* $\leq b$*).*

Chú ý 1.1.1. a) $u_n > v_n, \ \forall n$ không suy ra được $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > a$ (tương ứng $< a$) $\Rightarrow \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n > a$ (tương ứng $< a$).

Định lý 1.1.7 (Nguyên lý kẹp)**.** *Giả sử*

a) $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad x_n \leq y_n \leq z_n$, *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a.$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a.$

1.1.5 Nguyên lý Cantor

Định lý 1.1.8. *Dãy các đoạn lồng nhau và thắt lại có duy nhất một điểm chung. Tức là, nếu*

a) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$, *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$

thì $\exists! \alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$

1.1.6 Nguyên lý Bolzano – Weierstrass

Định lý 1.1.9. *Mọi dãy vô hạn bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.*

1.1.7 Nguyên lý Cauchy

Định nghĩa 1.1.3. *Dãy $\{u_n\}$ gọi là dãy cơ bản nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m > n_0 \quad |u_n - u_m| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Chú ý 1.1.2. a) Mọi dãy cơ bản đều bị chặn.

b) Nếu dãy cơ bản $\{u_n\}$ có một dãy con $\{u_{n_k}\}$ hội tụ tới a thì $\{u_n\}$ cũng hội tụ tới a.

Định lý 1.1.10 (Nguyên lý hội tụ Cauchy)**.** *Dãy số thực hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.*

Ý nghĩa cơ bản của định lý này là ở chỗ để khảo sát sự hội tụ của một dãy, ta chỉ cần căn cứ vào quy luật biến thiên của bản thân dãy đó để xét xem tiêu chuẩn trên có thỏa mãn hay không mà không cần biết trước giới hạn của dãy (nếu dựa vào định nghĩa ta cần biết trước giới hạn của dãy, việc này nhiều khi không dễ dàng). Hơn nữa, ta cũng dùng định lý này để chứng minh sự phân kỳ của dãy.

1.1.8 Sự hội tụ của dãy đơn điệu

Định nghĩa 1.1.4. *a) Dãy $\{u_n\}$ gọi là dãy tăng (tương ứng tăng thực sự) nếu $u_n \leq u_{n+1}$ $\forall n$ (tương ứng $<$).*

b) Dãy $\{u_n\}$ gọi là dãy giảm (tương ứng giảm thực sự) nếu $u_n \geq u_{n+1}$ $\forall n$ (tương ứng $>$).

Dãy tăng hoặc giảm gọi chung là đơn điệu.

Định lý 1.1.11. *a) $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên $\{u_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_{n} u_n$.*

b) $\{u_n\}$ giảm và bị chặn dưới $\{u_n\}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_{n} u_n$.

1.1.9 Giới hạn riêng, giới hạn trên và giới hạn dưới

Giới hạn riêng

Định nghĩa 1.1.5. *Số $a \in \mathbb{R}$ gọi là một giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$ nếu có một dãy con $\{u_{n_k}\}$ của dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới a.*

$a \in \mathbb{R}$ là một giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$ $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$, khoảng $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ chứa vô số số hạng của dãy.

Giới hạn trên và giới hạn dưới

Định nghĩa 1.1.6. *Cho dãy $\{u_n\}$ bị chặn. Với mỗi n, xét*

$$x_n = \sup\{u_{n+1}, u_{n+2}, ...\} = \sup_k u_{n+k}$$
$$y_n = \inf\{u_{n+1}, u_{n+2}, ...\} = \inf_k u_{n+k},$$

thì $\{x_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới; $\{y_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên. Vì thế tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sup\limits_n y_n$. Các giới hạn này lần lượt gọi là giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy $\{u_n\}$, ký hiệu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.

Chú ý 1.1.3. a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \inf\limits_n \sup\limits_k u_{n+k}$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \sup\limits_n \inf\limits_k u_{n+k}$.

b) $x_n \geq y_n\ \forall n \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.

1.1.10 Giới hạn vô hạn

Trong các dãy phân kỳ, có một loại dãy có giới hạn vô hạn.

Định nghĩa 1.1.7. *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n > M.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -M.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |u_n| > M.$

Chú ý 1.1.4. a) $\{u_n\}$ không bị chặn trên (tương ứng, dưới) $\Rightarrow \exists \{u_{n_k}\} \quad \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \infty$ (tương ứng $-\infty$).

b) $\{u_n\}$ không bị chặn $\Rightarrow \exists \{u_{n_k}\} \quad \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \pm\infty$.

c) $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

d) $\{u_n\}$ giảm và không bị chặn dưới $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

e) Khi $\{u_n\}$ không bị chặn trên, ta quy ước $\sup\limits_n u_n = \infty$. Khi $\{u_n\}$ không bị chặn dưới, ta quy ước $\inf\limits_n u_n = \infty$.

1.1.11 Bổ sung

Định lý 1.1.12 (Định lý Stolz)**.** *Cho hai dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Giả sử* *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = a.$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = a.$

Hệ quả 1.1.3. *Cho dãy số dương* $\{u_n\}$*. Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a.$

HD. Áp dụng định lý Stolz với hai dãy $\{\ln a_n\}$ và $\{n\}$. □

Định lý 1.1.13 (Định lý trung bình Cesàro)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = a.$

1.2 Giới hạn của hàm số

1.2.1 Lân cận của một điểm

Định nghĩa 1.2.1. *Cho* $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$*. Khoảng* $B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$ *gọi là* $\varepsilon-$*lân cận của a.*

$V \subset \mathbb{R}$ *gọi là một lân cận của a nếu* $\exists\varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \subset V$.

1.2.2 Điểm tụ của một tập hợp

Định nghĩa 1.2.2. $a \in \mathbb{R}$ *gọi là điểm tụ (điểm giới hạn) của* $A \subset \mathbb{R}$ *nếu* $\forall$ *lân cận V của a,* $V \cap (A\backslash\{a\}) \neq \varnothing$.

Tập các điểm tụ của A gọi là tập dẫn xuất của A, ký hiệu A'.

1.2.3 Điểm cô lập của một tập hợp

Định nghĩa 1.2.3. *Cho* $A \subset \mathbb{R}$*. Điểm* $a \in A$ *gọi là điểm cô lập của A nếu* $\exists$ *lân cận V của a sao cho* $V \cap A = \{a\}$.

Chú ý 1.2.1. Mỗi $a \in A$ thì hoặc là điểm tụ của A, hoặc là điểm cô lập của A.

1.2.4 Định nghĩa giới hạn của hàm số

Định nghĩa 1.2.4. *Cho* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Hệ quả 1.2.1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *thì giới hạn L là duy nhất.*

Định lý 1.2.1. *Cho $f : A \to \mathbb{R}$. Khi đó*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_n \subset A\backslash\{a\} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

1.2.5 Một số tính chất của giới hạn hàm số

Định lý 1.2.2. *Cho $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Khi đó nếu $\exists\delta > 0 \quad f(x) \le g(x) \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ nếu các giới hạn đó tồn tại.*

Định lý 1.2.3. *Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) > L$ (tương ứng $< L$) thì $\exists\delta > 0 \quad f(x) > L \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta$ (tương ứng $< L$).*

Định lý 1.2.4. *Cho $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Khi đó nếu*

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, *và*

b) $\exists\delta > 0 \quad f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta$

thì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Định lý 1.2.5. *Cho $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Khi đó*

a) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = L_1 + L_2$

b) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\, g(x)\right] = L_1 L_2$

c) Nếu $L_2 \ne 0$ *thì* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Hệ quả 1.2.2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [c \cdot f(x)] = cL \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

1.2.6 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 1.2.6 (Cauchy)**.** *Cho $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Khi đó $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, x' \in A \quad 0 < |x - a| < \delta,\ 0 < |x' - a| < \delta \to \left|f(x) - f(x')\right| < \varepsilon$.*

1.2.7 Giới hạn bên phải và giới hạn bên trái

Định nghĩa 1.2.5. *Cho $A \subseteq \mathbb{R}$. Ký hiệu $A^+ = \{x \in A \mid x > a\}$, và $A^- = \{x \in A \mid x < a\}$. Giả sử a là điểm tụ của A, A^+ và A^-, xét $f : A \to \mathbb{R}$. Định nghĩa*

a) Giới hạn phải của f tại a: $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a < x < a + \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

b) *Giới hạn trái của f tại a:* $f\left(a^-\right) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ *tức là*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a - \delta < x < a \to \left|f(x) - L\right| < \varepsilon.$$

Chú ý 1.2.2. Cho a là điểm tụ của A, A^+ và A^-. Khi đó $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow f(a^+) = f\left(a^-\right) = L$.

1.2.8 Sự tồn tại giới hạn của hàm đơn điệu

Định nghĩa 1.2.6. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Ta nói*

a) *f là hàm tăng (tương ứng, tăng thực sự) trên A nếu $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) < f(x_2)$).*

b) *f là hàm giảm (tương ứng, tăng thực sự) trên A nếu $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) > f(x_2)$).*

Hàm tăng hay giảm gọi chung là hàm đơn điệu.

Định nghĩa 1.2.7. *Hàm $f : A \to \mathbb{R}$ gọi là*

a) *bị chặn trên nếu $\exists M \quad f(x) \leq M \ \forall x \in A$.*

b) *bị chặn dưới nếu $\exists m \quad f(x) \geq m \ \forall x \in A$.*

c) *bị chặn nếu $\exists M, m \quad m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in A$.*

Định lý 1.2.7. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $x \leq a \ \forall x \in A$. Nếu $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm tăng (tương ứng, giảm) trên A và bị chặn trên (tương ứng, chặn dưới) trên A thì tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ (tương ứng $\inf\limits_{x \in A} f(x)$).*

Chú ý 1.2.3. Giới hạn ở trên chính là giới hạn bên trái tại a: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Định lý 1.2.8. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $x \geq a \ \forall x \in A$. Nếu $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm tăng (tương ứng, giảm) trên A và bị chặn dưới (tương ứng, chặn trên) trên A thì tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ (tương ứng $\sup\limits_{x \in A} f(x)$).*

Chú ý 1.2.4. Giới hạn ở trên chính là giới hạn bên trái tại a: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

1.2.9 Mở rộng khái niệm giới hạn

Giới hạn vô hạn

Định nghĩa 1.2.8. *Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$.*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A,\ 0 < \left|x - a\right| < \delta \to \left|f(x)\right| > M. \tag{1.5}$$

Nếu trong (1.5), thay vì $|f(x)| > M$ mà ta có cụ thể hơn $f(x) > M$, hoặc $f(x) < -M$, thì ta có tương ứng $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Chú ý 1.2.5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset A\backslash\{a\} \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty.$

Giới hạn khi $x \to \infty$ hoặc $-\infty$

Định nghĩa 1.2.9. *Cho $A \subset \mathbb{R}$ không bị chặn trên, $f : A \to \mathbb{R}$.*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall x \in A \quad x > k \to |f(x) - L| < \varepsilon.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall x \in A \quad x > k \to |f(x)| > M.$

Chú ý 1.2.6.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset A \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L.$
- Các giới hạn khi $x \to -\infty$ được định nghĩa tương tự.

1.2.10 Vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (VCL)

Định nghĩa

Định nghĩa 1.2.10. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}$. Khi $x \to a$, ta nói*

a) VCB nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

b) VCL nếu $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$.

Tính chất

Xét quá trình $x \to a$.

a) f, g là VCB $\Rightarrow f \pm g$, fg cũng là VCB.

b) f là VCB, g bị chặn trong một lân cận nào đó của $a \Rightarrow fg$ cũng là VCB.

c) f, g là VCL $\Rightarrow fg$ cũng là VCL.

d) f là VCL $\Rightarrow \dfrac{1}{f}$ là VCB.

So sánh các VCB

Định nghĩa 1.2.11. *Cho f, g là hai VCB khi $x \to a$. Giả sử* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

a) Nếu $L = 0$, ta nói f là VCB bậc cao hơn g (hoặc g là VCB bậc thấp hơn f), ký hiệu $f = o(g)$.

b) Nếu $0 < |L| < \infty$, ta nói f và g là hai VCB cùng bậc. Đặc biệt khi $L = 1$, ta nói đó là hai VCB tương tương, ký hiệu $f \sim g$.

c) Nếu $L = \pm\infty$, ta nói f là VCB bậc thấp hơn g.

Chú ý 1.2.7. • Nếu $\nexists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ta nói f và g là hai VCB không so sánh được.

• Khi $x \to a$, $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định

Mệnh đề 1.2.1. *Giả sử khi $x \to a$, $f \sim \bar{f}$, $g \sim \bar{g}$. Khi đó $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ nếu tồn tại một trong hai giới hạn.*

Chú ý 1.2.8. Khi $x \to a$, $\beta(x) = o[\alpha(x)] \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$. Như vậy trong quá trình tính giới hạn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, nếu tử số hoặc mẫu số là tổng của các VCB, ta có thể thay bằng các VCB tương tương bằng cách bỏ đi các VCB bậc cao hơn.

So sánh các VCL

Định nghĩa 1.2.12. *Cho f, g là hai VCL khi $x \to a$.*

a) Nếu $\dfrac{f}{g}$ là một VCL khi $x \to a$, tức là $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$, ta nói f là VCL bậc cao hơn g.

b) Nếu $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, với $0 < |L| < \infty$, ta nói f và g là hay VCL cùng bậc. Đặc biệt khi $L = 1$, ta nói đó là hai VCL tương tương, ký hiệu $f \sim g$.

c) Nếu $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ta nói g là VCL bậc cao hơn f, hay f là VCL bậc thấp hơn g.

Chú ý 1.2.9. • Nếu $\nexists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ hữu hạn và cũng không là VCL khi $x \to a$, ta nói f và g không so sánh được.

• Tương tự đối với các VCB, để tính giới hạn dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$, ta có thể thay các VCL ở tử và mẫu bằng các VCL tương đương. Đặc biệt nếu tử hoặc mẫu là tổng các VCL, ta có thể thay bằng các VCL tương đương bằng cách bỏ đi các VLC bậc thấp hơn.

1.2.11 Một số ví dụ quan trọng về giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

1.3 Hàm liên tục

1.3.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 1.3.1. *Cho $a \in A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ gọi là liên tục tại a nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

f liên tục tại mọi $a \in A$ gọi là liên tục trên A, ký hiệu $f \in C(A)$.

f không liên tục tại a gọi là gián đoạn tại a, và a gọi là một điểm gián đoạn của f.

Tính chất 1. a là điểm cô lập của $A \Rightarrow f$ liên tục tại a.

Tính chất 2. Nếu $a \in A'$ thì f liên tục tại a khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{1.7}$$

Chú ý 1.3.1.

- Khác với định nghĩa giới hạn của hàm số khi $x \to a$, trong định nghĩa hàm liên tục tại a, ta không giả thiết $x \neq a$.

- Định nghĩa hàm liên tục thông qua khái niệm lân cận:

  Định nghĩa 1.3.2. *$f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ nếu với mọi lân cận V của $f()$, tồn tại lân cận U của a sao cho $f(U \cap A) \subset V$.*

1.3.2 Các phép toán trên các hàm liên tục. Tính liên tục của hàm hợp

Định lý 1.3.1. *$f, g : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ thì $\alpha f + \beta g$ (với α, β là các hằng số), và fg cũng liên tục tại a. Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại a.*

Định lý 1.3.2. *Cho $A, B \subset \mathbb{R}$. Nếu $f : A \to B$ liên tục tại $a \in A$, và g liên tục tại $b = f(a) \in B$, thì hàm hợp $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại a.*

1.3.3 Tính liên tục một phía

Định nghĩa 1.3.3. *$f : A \to \mathbb{R}$ gọi là* *a) liên tục bên phải tại $a \in A$ nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a \le x < a + \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

b) liên tục bên trái tại $a \in A$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a - \delta < x \le a \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f liên tục phải (hoặc trái) tại a gọi là liên tục một phía tại a.

Định lý 1.3.3. *$f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ khi và chỉ khi f liên tục cả hai phía tại a.*

1.3.4 Tính chất của một hàm số liên tục trên một đoạn

Định nghĩa 1.3.4. *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nếu f liên tục trên (a, b), liên tục phải tại a, và liên tục trái tại b, thì ta nói f liên tục trên $[a, b]$, ký hiệu $f \in C[a, b]$.*

Định lý 1.3.4. *$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ bị chặn trên $[a, b]$.*

Định lý 1.3.5. *Nếu $f \in C[a, b]$ thì f đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên đó, tức là*

$$\exists x_0, x_0' \in [a, b] \quad f(x_0) = \sup_{x \in [a,b]} f(x), \quad \text{và} \quad f\left(x_0'\right) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Định lý 1.3.6 (Định lý Bolzano – Cauchy thứ nhất)**.** [1] *Giả sử $f \in C[a, b]$ và $f(a) f(b) < 0$. Khi đó $\exists c \in (a, b) \quad f(c) = 0$.*

Định lý 1.3.7 (Định lý Bolzano – Cauchy thứ hai)**.** *Nếu $f \in C[a, b]$ thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, tức là $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ở giữa $f(a)$ và $f(b)$, $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \lambda$.*

Chú ý 1.3.2. f liên tục đều trên A thì liên tục trên A, điều ngược lại chưa chắc đúng.

Định lý 1.3.8 (Cantor)**.** *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì liên tục đều trên đó.*

1.3.5 Hàm số liên tục đều

Định nghĩa 1.3.5. *$f : A \to \mathbb{R}$ gọi là liên tục đều trên A nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in A \quad \left|x - x'\right| < \delta \to \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon. \qquad (1.8)$$

[1] Ý nghĩa hình học: nếu một đường cong liên tục đi từ một phía của trục x sang phía kia thì nó cắt trục này.

1.3.6 Hàm đơn điệu, hàm ngược và tính liên tục của chúng

Phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa 1.3.6. *Cho* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$ *thì a gọi là điểm gián đoạn loại một của f.*

b) *Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \neq f(b)$ *thì b gọi là điểm gián đoạn loại một của f.*

c) *Với* $x_0 \in (a, b)$, *nếu tồn tại hai giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, *và có một giới hạn khác* $f(x_0)$ *thì* x_0 *gọi là điểm gián đoạn loại một.*

Điểm gián đoạn của hàm số không phải là điểm gián đoạn loại một được gọi là điểm gián đoạn loại hai.

Định lý 1.3.9. *Mọi điểm gián đoạn của hàm đơn điệu đều là điểm gián đoạn loại một.*

Quan hệ giữa tính đơn điệu và tính liên tục

Định lý 1.3.10. *Cho* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow$ *tập giá trị của f là đoạn với hai đầu mút* $f(a)$ *và* $f(b)$.

Tính liên tục của hàm ngược

Định lý 1.3.11. *Cho f là hàm tăng thực sự và liên tục trên* $[a, b]$. *Khi đó f có hàm ngược* f^{-1} *cũng tăng thực sự và liên tục trên* $[f(a), f(b)]$.

Chú ý 1.3.3. Định lý trên còn đúng khi f là hàm giảm thực sự, hoặc thay $[a, b]$ bởi (a, b).

1.3.7 Tính liên tục của hàm sơ cấp

Định nghĩa 1.3.7.

a) *Các hàm hữu tỉ, hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm lượng giác, và các hàm ngược của chúng gọi là các hàm sơ cấp cơ bản.*

b) *Các hàm nhận được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng cách thực hiện một số hữu hạn các phép cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn, và phép hợp gọi là hàm sơ cấp.*

Định lý 1.3.12. *Mọi hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định của chúng.*

1.3.8 Áp dụng tính liên tục của hàm số vào việc khảo sát giới hạn hàm số

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$. Đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, tức là $\ln(1+x) \sim x$ khi $x \to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0)$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

Chương 2

Phép tính vi phân hàm một biến

2.1 Đạo hàm và vi phân cấp một

2.1.1 Khái niệm hàm khả vi

Định nghĩa 2.1.1. *Cho hàm số f xác định trong một lân cận U của $x_0 \in \mathbb{R}$. Cho x_0 một số gia Δx khá bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó số $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$ gọi là số gia của đối số ứng với số gia đối số Δx tại x_0.*

Nếu tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của f theo x tại x_0, ký hiệu $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Khi đó f gọi là khả vi tại x_0.

Định nghĩa 2.1.2. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ gọi là khả vi trên U nếu f khả vi tại mọi điểm thuộc U. Khi đó hàm số*

$$\begin{aligned} f' : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

gọi là đạo hàm của f trên U.

Nếu f' liên tục trên U, ta nói f khả vi liên tục trên U, ký hiệu $f \in C^1(U)$.

Định lý 2.1.1. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \in U$. Khi đó $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h + r(h)\, h$ trong đó $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$.*

Hệ quả 2.1.1. *Nếu f khả vi tại x_0 thì f liên tục tại đó.*

Chú ý 2.1.1. Nếu f liên tục tại x_0 thì chưa chắc f khả vi tại đó.

2.1.2 Các quy tắc tính đạo hàm

2.1.3 Đạo hàm hàm hợp và đạo hàm hàm ngược

2.1.4 Đạo hàm của hàm cho bởi tham số

2.1.5 Bảng đạo hàm một số hàm sơ cấp

2.1.6 Đạo hàm một phía

2.1.7 Các định lý cơ bản của hàm khả vi

2.2 Đạo hàm cấp cao

2.2.1 Định nghĩa đạo hàm cấp cao

2.2.2 Công thức Leibniz

2.2.3 Công thức Taylor

2.2.4 Ứng dụng đạo hàm vào việc tìm giới hạn. Quy tắc l'Hospital

Chương 3

Tích phân một lớp

3.1 Nguyên hàm và tích phân không xác định

3.1.1 Định nghĩa

3.1.2 Bảng tích phân không xác định cơ bản

3.1.3 Tính chất

3.1.4 Phép đổi biến trong tích phân không xác định

3.1.5 Công thức tích phân từng phần

3.1.6 Tích phân của hàm hữu tỷ

3.1.7 Tích phân của biểu thức có chứa căn thức

3.1.8 Tích phân của hàm lượng giác

3.2 Định nghĩa tích phân xác định

3.2.1 Phân hoạch của một đoạn

3.2.2 Tổng tích phân

3.2.3 Định nghĩa tích phân xác định

3.3 Các điều kiện để hàm khả tích

3.3.1 Điều kiện cần

3.3.2 Điều kiện cần và đủ của hàm khả tích

3.8 Dãy số và hàm số

3.8.1 Tóm tắt lý thuyết

Chú ý 3.8.1. Cho dãy $a_{n+1} = f(a_n)$. Xét hàm $f(x)$.

a) Giả sử $\alpha < f(x) < \beta,\ \forall x \in \left(\alpha, \beta\right)$. Khi đó $a_{n_0} \in \left(\alpha, \beta\right) \Rightarrow a_n \in \left(\alpha, \beta\right),\ \forall n \geq n_0$.

b) $f'(x) > 0,\ \forall x \in \left(\alpha, \beta\right) \Rightarrow$ dãy $(a_n)_{n \geq n_0}$ tăng (tương ứng giảm) nếu $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$ (tương ứng $\geq$).

c) $f'(x) < 0,\ \forall x \in \left(\alpha, \beta\right) \Rightarrow$ dãy chẵn (x_{2n}) đơn điệu và dãy lẻ $\left(x_{2n-1}\right)$ cũng đơn điệu.

Gợi ý. (Quy nạp)

b) $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$

c) $g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'[f(x)]\,f'(x) > 0,$ và $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f[f(x_n)] = g(x_n)$.

□

Chú ý 3.8.2. Cho $f(x)$ liên tục tại a. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Chú ý 3.8.3. Cho dãy (a_n), xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$ trong đó f là hàm liên tục. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow L = f(L)$.

Định lý 3.8.1 (Nguyên lý ánh xạ co). *Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$, $\alpha \leq a_0 \leq \beta$. Giả sử*

a) $\alpha \leq f(x) \leq \beta,\ \forall x \in \left[\alpha, \beta\right]$

b) $\exists q \leq (0,1),\ \left|f(x) - f(y)\right| \leq q\left|x - y\right|,\ \forall x, y \in \left[\alpha, \beta\right]$.

Khi đó

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \left[\alpha, \beta\right]$ *và* $L = f(L)$

b) Với $n \geq 1$

$$\left|a_n - L\right| \leq \frac{q^n}{1-q}\left|a_1 - a_0\right|$$
$$\left|a_n - L\right| \leq \frac{q}{1-q}\left|a_n - a_{n-1}\right|$$

Chứng minh. a) $\left|a_{n+k} - a_n\right| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} \left(a_i - a_{i-1}\right)\right| \le \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} \left|a_i - a_{i-1}\right|$

$\left|a_i - a_{i-1}\right| = \left|f\left(a_{i-1}\right) - f\left(a_{i-2}\right)\right| \le q\left|a_{i-1} - a_{i-2}\right| \le q^2\left|a_{i-2} - a_{i-3}\right| \le ... \le q^{i-1}\left|a_1 - a_0\right|$

$\left|a_{n+k} - a_n\right| \le \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} q^{i-1}\left|a_1 - a_0\right| = q^n \dfrac{1-q^k}{1-q}\left|a_1 - a_0\right| \le \dfrac{q^n}{1-q}\left|a_1 - a_0\right| \xrightarrow{n\to\infty,\ k>0} 0 \Rightarrow (a_n)$ là dãy Cauchy.

□

Chú ý 3.8.4. Điều kiện (b) trong Định lý 3.8.1 thỏa mãn nếu $\left|f'(x)\right| \le q < 1,\ \forall x \in \left[\alpha, \beta\right]$. Thật vậy theo định lý Lagrange, $\exists c \in (x, y)\,,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, suy ra

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|f'(c)\right| \times \left|x - y\right| \le q\left|x - y\right|$$

Các dạng sau gồm Định lý 3.8.2, Mệnh đề 3.8.1 thì ít gặp hơn

Định lý 3.8.2 (Phương pháp Newton trong giải tích số)**.** *Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, $a_0 \in \left[\alpha, \beta\right]$ trong đó*

a) f', f'' không đổi dấu trên $\left[\alpha, \beta\right]$; và

b) $f(\alpha)\, f\left(\beta\right) < 0$; và

c) $f(a_0)\, f'' > 0$

Khi đó

a) Dãy (a_n) tăng (tương ứng giảm) nếu $f' f'' < 0$ (tương ứng $>$)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, và L là nghiệm duy nhất của f trên $\left[\alpha, \beta\right]$

c)

$$\left|a_n - L\right| \le \frac{M}{2m}\left|a_n - a_{n-1}\right|^2,\ \forall n \ge 1$$
$$\left|a_n - L\right| \le \frac{\left|f(a_n)\right|}{m},\ \forall n$$

trong đó $M \ge \left|f''(x)\right|, 0 < m \le \left|f'(x)\right|,\ \forall x \in [a, b]$

Chú ý 3.8.5 (Phương pháp Newton cải biên)**.** Nếu $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_0)}$, thì các các mục trong Định lý 3.8.2 vẫn đúng trừ kết luận (c).

Mệnh đề 3.8.1 (Phương pháp dây cung trong giải tích số)**.** *Cho dãy (x_n) xác định bởi $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(r)}(a_n - r)$, trong đó* *a)* f', f'' *không đổi dấu trên* $[x_0, r]$*; và*

b) $f(x_0) f(r) < 0$*; và*

c) $f' f'' > 0$ *ứng với* $x_0 < r$*, và ngược lại*

Khi đó

a) Dãy (a_n) *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f' f'' > 0$ *(tương ứng* $<$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và L là nghiệm duy nhất của f trên* $[x_0, r]$

c)

$$|a_n - L| \le \left(\frac{M}{m} - 1\right) |a_n - a_{n-1}|^2, \ \forall n \ge 1$$
$$|a_n - L| \le \frac{|f(a_n)|}{m}, \forall n$$

trong đó $0 < m \le |f'(x)| \le M, \ \forall x \in [a_0, r]$

3.8.2 Kiến thức bổ sung

Nguyên lý quy nạp

Xét khẳng định $S(n)$, $n \ge n_0$.

Dạng đơn giản Giả sử

a) Khẳng định đúng tại $n = n_0$.

b) Nếu khẳng định đúng **tại** n, $n \ge n_0$, thì cũng đúng tại $n + 1$.

Khi đó, khẳng định $S(n)$ đúng $\forall n \ge n_0$.

Dạng tổng quát Giả sử

a) Khẳng định đúng với $n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_1$.

b) Nếu khẳng định đúng **từ $\mathbf{n_0}$ tới n**, $n \ge n_1$, thì cũng đúng tại $n + 1$.

Khi đó, khẳng định $S(n)$ đúng $\forall n \ge n_0$.

Chú ý 3.8.6. Khi chứng minh $S(n)$, chỉ cần giả thiết của $S(n)$, $S(n-1)$,..., và xa nhất là $S(n-k)$, $k \ge 0$, thì $n_1 = n_0 + k$.

Khai triển Taylor, Maclaurin

3.8.3 Đề chính thức

Ví dụ 3.8.1 (2022)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > \frac{3}{2}$.

b) Chứng minh (u_n) hội tụ.

c) (A) Chứng minh giới hạn của dãy số là một số vô tỷ.

HD. c) (Phương pháp phản chứng)

Giả sử $e = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$ là số hữu tỷ. Xét $x = b!\left(e - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right)$

1. $x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a\,(b-1)! - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!} \in \mathbb{Z}$

2. $x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b!\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum\limits_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = \sum\limits_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$

3. $n \geq b+1 \Rightarrow \frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$, và nhỏ hơn thực sự nếu $n \geq b+2$

$$\Rightarrow x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{k}} = \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} \leq 1$$

□

Ví dụ 3.8.2 (2019)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \frac{2x_n}{2 + x_n}$. Chứng minh

a) Dãy (x_n) không âm.

b) $\exists c \in (0,1)$, $|x_{n+1} - x_n| \leq c\,|x_n - x_{n-1}|$, $\forall n \geq 2$.

c) (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Ví dụ 3.8.3 (2018)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = \frac{1}{2018}x_n^2 + \frac{2017}{2018}x_n$.

a) Chứng minh (x_n) tăng, không bị chặn trên.

b) Chứng minh $\dfrac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_n-1} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1}\right)$

c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{x_{k+1}-1}$

Chú ý 3.8.7. Tổng quát cho $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = bx_n^2 + (1-b)\,x_n$ với $0 < b < 1$.

Ví dụ 3.8.4 (2017)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1$.

Bảng A: Chứng minh (u_n) hội tụ, và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bảng B: Chứng minh

a) $-1 < u_n < 0,\ \forall n \geq 2$

b) (u_n) có giới hạn, và giới hạn đó là $1-\sqrt{3}$

Ví dụ 3.8.5 (2016)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

a) Tìm a để (u_n) hội tụ

b) Tìm giới hạn của (u_n) khi nó hội tụ

Chú ý 3.8.8. Tổng quát cho $u_{n+1} = u_n + (u_n - b)^2$.

Ví dụ 3.8.6 (2015)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$, $n \geq 0$.

a) Chứng minh (a_n) đơn điệu

b) Cho $a_0 = 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

c) Tìm tất cả giá trị của a_0 để (a_n) có giới hạn hữu hạn. Khi đó tìm $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$

Ví dụ 3.8.7 (2014)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$, $a \geq 0$. Tìm a để (u_n) hội tụ, và tìm giới hạn đó.

HD. Bình phương hệ thức rồi khử $\to$ tính u_n^2 theo a □

Ví dụ 3.8.8 (2013)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = a \in \mathbb{R}$, $\quad (n+1)^2\,x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ví dụ 3.8.9 (2012)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n}a_n - \dfrac{2}{n}$, $n \geq 1$. Tìm α để dãy (a_n) hội tụ.

Ví dụ 3.8.10 (2011)**.** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$. Chứng minh

a) Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, và $f'(x)$ đồng biến.

b) Dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ thỏa mãn $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\forall n$.

Ví dụ 3.8.11 (2011)**.** Cho hai dãy (x_n), (y_n)thỏa mãn $x_{n+1} \geq \frac{x_n + y_n}{2}$, và $y_{n+1} \geq \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}}$ với $n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh các dãy $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ là những dãy đơn điệu tăng.

b) Giả sử (x_n), (y_n) bị chặn. Chứng minh chúng cùng hội tụ về một điểm.

Ví dụ 3.8.12 (2011)**.** Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+n} < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta+n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm min $|\alpha - \beta|$.

Ví dụ 3.8.13 (2010)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n\left(1 + x_n^{2010}\right)$, $n \geq 1$.

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x_1^{2010}}{x_2} + \frac{x_2^{2010}}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)$.

Ví dụ 3.8.14 (2009)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = (n-1)\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right)$, $n \geq 3$. Tính x_{2009}.

Ví dụ 3.8.15 (2009)**.** Cho hai dãy (x_n), (y_n) xác định bởi

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}},\ n \geq 1$$

Chứng minh $x_n, y_n \in (2, 3)$ với $n \geq 2$, và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Ví dụ 3.8.16 (2008)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + a_n$, $n \geq 1$. Tính a_{2008}.

Ví dụ 3.8.17 (2008)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{2008} + 2^{2008} + \cdots + n^{2008}}{n^{2009}}$.

Ví dụ 3.8.18 (2007)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_0 = 2007$, $x_n = -2007\frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n}$, $n \geq 1$.

Tìm liên hệ giữa x_n, x_{n-1} với $n \geq 1$. Từ đó tính tổng $S = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^{2007}x_{2007}$.

Ví dụ 3.8.19 (2007)**.** Cho $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq c - b$. Dãy (u_n), (v_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1} + b - c},\ n \geq 1$$

Biết $\lim u_n = \alpha$, tìm $\lim v_n$.

Ví dụ 3.8.20 (2006)**.** Cho dãy (a_n) thỏa mãn $x_1 = 2$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^2 x_n,\ n \geq 2$. Tính x_{2006}.

Ví dụ 3.8.21 (2006)**.** (Lời giải có vấn đề!) Xác định các dãy số (x_n) biết $x_{2n+1} = 3x_n + 2$, $n = 0, 1, 2\ldots$

3.8.4 Luyện tập

Ví dụ 3.8.22 (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ lần}}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n (2 - x_n)$.

HD.

1. $x_1 = \sqrt[3]{6}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{6 + x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6 + x)^2}}$
3. Dự đoán $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: $L = f(L)$
4. $0 < x_n < 2,\ \forall n$
5. (x_n) tăng
6. $L = 2$
7. $2 - x_n = f(2) - f\left(x_{n-1}\right) = f'(c)\left(2 - x_{n-1}\right) < \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6+0)^2}}\left(2 - x_{n-1}\right)$
8. Đặt $q = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{36}} < \dfrac{1}{6} \Rightarrow 2 - x_n < q^{n-1}(1 - x_1) \Rightarrow 6^n (2 - x_n) = \dfrac{1 - x_1}{q}(6q)^n$

□

Chú ý 3.8.9. Tương tự với $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}_{n}$ khi $a \in \{2, 6, 12, 20\}$, hoặc $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + \cdots + \sqrt[3]{a}}}}_{n}$ khi $a \in \{24, 60, 120\}$. Riêng $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Ví dụ 3.8.23 (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** Cho $a_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x_{n-1} + \dfrac{1}{n} x_{n-2}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

HD.

1. $x_n - x_{n-1}$
2. x_n

□

Ví dụ 3.8.24. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

HD. Dạng giống Ví dụ 3.8.6 ý (c) □

Ví dụ 3.8.25. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2002}$. Chứng minh $x_{2002} < \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 3.8.26. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$

3.9 Khai triển Taylor, Maclaurin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left[(x - x_0)^n\right], \quad f \in C^n(a, b),\ x_0 \in (a, b)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right), \quad f \in C^n(a, b),\ 0 \in (a, b)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

Ví dụ 3.9.1. Chứng minh π là số vô tỷ.

HD. □

3.10 Hàm số liên tục

3.10.1 Tóm tắt lý thuyết

Mệnh đề 3.10.1. *Cho $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nếu f thỏa mãn điều kiện Lipschitz*

$$\exists L \quad |f(x) - f(y)| \le L|x - y| \quad \forall x, y \in A$$

thì f liên tục trên A.

3.11 Tích phân xác định

3.11.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa tích phân xác định. Điều kiện khả tích

...loading

Công thức tính tích phân xác định

...loading

Định lý về giá trị trung bình

Định lý 3.11.1 (Định lý trung bình thứ nhất)**.** *a) Cho $f \in C[a,b]$. Khi đó*

$$\exists c \in (a,b) \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a).$$

b) Cho $f(x)$, $\varphi(x)$ khả tích trên $[a,b]$, $\varphi(x)$ không đổi dấu trên (a,b). Đặt $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Khi đó

$$\exists \mu,\ m \le \mu \le M \quad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Hơn nữa, $f \in C[a,b] \Rightarrow \exists c \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$

Định lý 3.11.2 (Định lý trung bình thứ hai)**.** *Cho $f(x)$, $\varphi(x)$ khả tích trên $[a,b]$, và $\varphi(x)$ đơn điệu trên (a,b).*

a) $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi\left(a^+\right)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi\left(b^-\right)\int_\xi^b f(x)\,dx,$ *trong đó* $a \le \xi \le b$.

b) Nếu $\varphi(x)$ đơn điệu giảm, không âm trên (a,b) thì $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi\left(a^+\right)\int_a^\xi f(x)\,dx$, $a \le \xi \le b$.

c) Nếu $\varphi(x)$ đơn điệu tăng, không âm trên (a,b) thì $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi\left(b^-\right)\int_\xi^b f(x)\,dx$, $a \le \xi \le b$.

Định lý 3.11.3 (Newton – Leibniz)**.** *Nếu (1) $f \in C[a,b]$, và (2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Chú ý 3.11.1. Nếu (1) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in (a,b)$ và (2) f liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ thì $F'(x_0) = f(x_0)$

Chú ý 3.11.2. $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$, với $a < b$

3.11.2 Đề chính thức

Ví dụ 3.11.1 (2023A)**.** Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu $\int_0^1 f(x)[P(x)]^m = 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$

b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất?

Ví dụ 3.11.2 (2023B)**.** Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$ với mọi hàm liên tục $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $g(0) = g(1) = 0$ thì $f \equiv 0$ trên $[0,1]$

b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu ta thêm điều kiện $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$?

Ví dụ 3.11.3 (2022)**.** Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : [-1,1] \to [0,\infty)$ sao cho $f(-1) = f(1) = 1$ và

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le 2022\left|x - y\right|, \quad \forall x,y \in [-1,1]$$

a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục

b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\int_{-1}^1 f(x)\,dx \ge \frac{1}{2022}$

c) (A) Dấu đẳng thức trong ý (b) có đạt được hay không? (Nếu câu trả lời là "không", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "có", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f làm cho đẳng thức xảy ra.)

HD. a) Áp dụng Mệnh đề 3.10.1

□

Ví dụ 3.11.4 (2019)**.** Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[0,1]$ và có $f(1) = 0$.

a) Chứng minh $\int_0^1 \left|f(x)\right| dx \le \int_0^1 x\left|f'(x)\right| dx$

b) Tìm ví dụ về một hàm số f khả vi liên tục trên $[0, 1]$, với $f(1) = 0$, sao cho $\int_0^1 |f(x)|\, dx < \int_0^1 x\left|f'(x)\right| dx$

HD. □

Ví dụ 3.11.5 (2019)**.** Cho $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

a) Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) + \int_0^x f(t)\, dt\right] < \infty$. Chứng minh $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$

b) Tìm ví dụ về một hàm số $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ liên tục, đơn điệu không tăng, sao cho

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) + \int_0^x f(t)\, dt\right] = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$$

Ví dụ 3.11.6 (2018A)**.** Cho hai số thực $a < b$. Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục sao cho $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Chứng minh $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)\, dt\right| \le \dfrac{(b-a)^2}{8} \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$

Ví dụ 3.11.7 (2018A)**.** Giả sử $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 xf(x)\, dx$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)\, dx$

HD.

- $\int_0^1 f(x) \times (1-x)\, dx = 0$, với $0 < x_0 < 1$. Áp dụng định lý trung bình thứ hai, có $\int_0^{x_0} f(x)\, dx = 0$.
- Áp dụng định lý Rolle cho hàm $G(x) = e^{-kf(x)}\int_0^x f(t)\, dt$ trên $[0, x_0]$.

□

Ví dụ 3.11.8 (2018B)**.** Giả sử $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục sao cho $\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 xf(x)\, dx$. Chứng minh $\exists c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 2018\int_0^c f(x)\, dx$

HD.

- $\int_0^1 f(x) \times (1-x)\, dx = 0$, với $0 < x_0 < 1$. Áp dụng định lý trung bình thứ hai, có $\int_0^{x_0} f(x)\, dx = 0$.
- Áp dụng định lý Rolle cho hàm $G(x) = e^{-kx}\int_0^x f(t)\, dt$ trên $[0, x_0]$.

□

Ví dụ 3.11.9 (2017A)**.** Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1$

a) Tìm một ví dụ về hàm số liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện trên

b) Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở $(a,b)\subset(0,1)$ không rỗng, sao cho $|f(x)| > 4 \quad \forall x\in(a,b)$

HD. a) $f(x) = 6(2x-1)$

b) Vì $f\in C[0,1]$ nên khẳng định tương đương với $\exists x\in[0,1] \quad |f(x)|>4$.

(Phản chứng) $|f(x)|\le 4,\ \forall x\in[0,1]$.

$1 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \boxed{\frac{1}{4}}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1\left(x^2-\frac{1}{4}\right)f(x)\,dx = \int_0^{\frac12}\underbrace{\left(x^2-\frac14\right)}_{\le 0}\underbrace{f(x)}_{\ge -4}dx + \int_{\frac12}^1\underbrace{\left(x^2-\frac14\right)}_{\ge 0}\underbrace{f(x)}_{\le 4}dx \le \int_0^{\frac12}\left(x^2-\frac14\right)(-4)\,dx + \int_{\frac12}^1\left(x^2-\frac14\right)\times 4d$
1.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Rightarrow f(x) = \begin{cases}-4 & \text{nếu } 0\le x<\frac12\\ 4 & \text{nếu } \frac12 < x\le 1\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac12^+} f(x) = 4 \ne \lim\limits_{x\to\frac12^-} f(x) = -4 \Rightarrow f$ gián đoạn tại $\frac12$.

□

Chú ý 3.11.3. a) Chọn hàm $g(x)$ có đồ thị nhận $\left(\frac{a+b}{2},0\right)$ làm tâm đối xứng, thì $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Nếu $\int_a^b \varphi(x)g(x)\,dx = I$ thì xét $f(x) = \frac{g(x)}{I} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0$ và $\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = 1$.

Nên chọn $g(x)$ là hàm bậc nhất.

b) – Câu hỏi: tại sao lại có hệ số $\frac14$ trong lời giải? Thử thay nó bằng hệ số a xem, rồi chọn a phù hợp.

$1 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - a\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1\left(x^2-a\right)f(x)\,dx$

Để đánh giá tích phân, cần đánh giá $\left(x^2-a\right)f(x)$ trên $[0,1]$. Vì $f(x)$ bị chặn trên $[0,1]$ (giả thiết phản chứng), nên cần xét dấu của x^2-a với $x\in[0,1]$.

$a\le 0\Rightarrow x^2-a\ge 0\Rightarrow -4\left(x^2-a\right)\le\left(x^2-a\right)f(x)\le 4\left(x^2-a\right)\Rightarrow \int_0^1 -4\left(x^2-a\right)dx \le \int_0^1\left(x^2-a\right)f(x)\,dx \le \int_0^1 4\left(x^2-a\right)dx \Rightarrow -\left(\frac43-4a\right)\le$

$1 \le \left(\frac{4}{3} - 4a\right)$: không thu được thông tin gì!

$a \ge 1 \Rightarrow x^2 - a \le 0 \Rightarrow -4\left(x^2 - a\right) \ge \left(x^2 - a\right) f(x) \ge 4\left(x^2 - a\right) \Rightarrow$ $\int_0^1 -4\left(x^2 - a\right) dx \ge \int_0^1 \left(x^2 - a\right) f(x)\, dx \ge \int_0^1 4\left(x^2 - a\right) dx \Rightarrow \left(4a - \frac{4}{3}\right) \ge$ $1 \ge -\left(4a - \frac{4}{3}\right)$: cũng vậy!

$0 < a < 1 \Rightarrow 1 = \int_0^{\sqrt{a}} \underbrace{\left(x^2 - a\right)}_{\le 0} \underbrace{f(x)}_{\ge -4} dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \underbrace{\left(x^2 - a\right)}_{\ge 0} \underbrace{f(x)}_{\le 4} dx \le$ $\int_0^{\sqrt{a}} \left(x^2 - a\right)(-4)\, dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \left(x^2 - a\right)(-4)\, dx = \frac{16}{3} a\sqrt{a} - 4a + \frac{4}{3}$. Ta muốn biểu thức này bằng 1, thì $a = \frac{1}{4}$.

– Mở rộng: cho $f : [0,1] \to [a,b]$, $\varphi(x)$ thay cho x^2. Hãy đánh giá $I = \int_0^1 \varphi(x) f(x)\, dx$.

$I = \int_0^1 \varphi(x) f(x)\, dx - k \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \left[\varphi(x) - k\right] f(x)\, dx.$

Trong trường hợp $0 < a < 1$ ở ý trên, ta có $I \le \frac{16}{3} a\sqrt{a} - 4a + \frac{4}{3}$, $\forall a \in (0,1)$, mà $\frac{16}{3} a\sqrt{a} - 4a + \frac{4}{3}$ đạt cực tiểu bằng 1 tại $a = \frac{1}{4} \Rightarrow I \le 1$.

Ví dụ 3.11.10 (2017B). Tính $\int_0^3 \sqrt{2 + \sqrt{1 + x}}dx$

Ví dụ 3.11.11 (2016A). Với mỗi số thực $0 < \alpha \ne 1$, gọi f_α) là hàm số được xác định trên khoảng $(1, \infty)$ bởi công thức $f_\alpha(x) = \int_x^{x^\alpha} \frac{dt}{\ln t}, \quad (x > 1)$

a) Chứng minh rằng f_α là một phép đồng phôi, tức là một song ánh liên tục, từ khoảng $(1, \infty)$ lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ nào đó sao cho ánh xạ ngược $f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to (1, \infty)$ cũng liên tục

b) Tìm I_α

Ví dụ 3.11.12 (2015A). Cho $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ là một hàm liên tục. Biết rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \int_0^x [f(t)]^2 dt = a \in (0, \infty)$. Hãy tìm $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} f(x)$

Ví dụ 3.11.13 (2015B). Cho $f : [0,1] \to (-\infty, 1]$ là một hàm liên tục, thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Chứng minh $\int_0^1 [f(x)]^3 dx \le \frac{1}{4}$

Ví dụ 3.11.14 (2015B). Cho $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ là một hàm liên tục. Đặt $g(x) = \sqrt[3]{f(x)} \int_0^x \frac{dt}{f(t)}, \quad (x \ge 0)$. Chứng minh rằng g không bị chặn trên $[0, \infty)$

Ví dụ 3.11.15 (2014). a) Cho hàm số f đơn điệu trên $[0, +\infty)$, và $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt =$

$+\infty$. Chứng minh $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Kết luận trên còn đúng không khi f là hàm liên tục trên $[0,+\infty)$ nhưng không đơn điệu trên khoảng đó? Tại sao?

Ví dụ 3.11.16 (2014)**.** Cho f là hàm số liên tục trên $[0,+\infty)$. Giả sử $\int_0^x f^2(t)\,dt \le \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \ge 0$. Chứng minh $\int_0^x f(t)\,dt \le \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \ge 0$.

Ví dụ 3.11.17 (2013)**.** Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{2013+x^n}dx$.

Ví dụ 3.11.18 (2013)**.** Cho $f(x)$ là hàm dương, liên tục trên $[0,1]$, và $f(x)+f\left[\left(1-\sqrt{x}\right)^2\right] \le 1, \quad \forall x \in [0,1]$. Chứng minh $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx \le \frac{\pi\sqrt{5}}{8}$.

Hãy chỉ ra rằng dấu đẳng thức không thể xảy ra.

Ví dụ 3.11.19 (2013)**.** Cho $f \in C[0,1]$. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm $g \in C[0,1]$ đơn điệu thực sự sao cho

$$\int_0^1 f(x)\,g^k(x)\,dx = 0, \quad \forall k = 0,1,2,\ldots,2013$$

thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 2014 nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0,1)$. Hãy chỉ ra ví dụ nếu bỏ tính đơn điệu của $g(x)$ thì khẳng định có thể không đúng.

3.12 Tích phân phụ thuộc tham số

3.12.1 Tóm tắt lý thuyết

Tích phân phụ thuộc tham số cận hằng số hữu hạn

Định nghĩa 3.12.1. *Cho hàm số $f(x,y)$, $x \in [a,b]$, $y \in Y \subset \mathbb{R}$. Tích phân $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, nếu tồn tại, gọi là tích phân phụ thuộc tham số y của $f(x,y)$ trên $[a,b]$.*

Mệnh đề 3.12.1 (Tính liên tục)**.** *Nếu f liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$ thì $I \in C[c,d]$.*

Mệnh đề 3.12.2 (Tính khả vi)**.** *Giả sử*

a) $\forall y \in [c,d]$, $f(x,y)$ liên tục theo biến $x \in [a,b]$.

b) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ liên tục trên $[a,b]\times[c,d]$.

Khi đó $I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx, \quad y \in [c,d]$.

Mệnh đề 3.12.3 (Tính khả tích)**.** *Nếu f liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Tích phân phụ thuộc tham số cận biến thiên hữu hạn

Định nghĩa 3.12.2. *Cho $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ liên tục, và $\forall y \in [c, d]$, $f(x, y)$ khả tích theo x trên $[a, b]$. Khi đó $I(y) = \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx$ gọi là tích phân phụ thuộc tham số có cận thay đổi.*

Mệnh đề 3.12.4 (Tính liên tục)**.** *Nếu f liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$ thì $I \in C[c, d]$.*

Mệnh đề 3.12.5 (Tính khả vi)**.** *Giả sử*

a) $\forall y \in [c, d]$, *$f(x, y)$ liên tục theo x trên $[a, b]$.*

b) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *liên tục trên $[a, b] \times [c, d]$.*

c) α, β *khả vi trên $[c, d]$.*

Khi đó $I'(y) = \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f\left[\beta(y), y\right] \times \beta'(y) - f[\alpha(y), y] \times \alpha'(y)$, $y \in [c, d]$.

3.12.2 Đề chính thức

Ví dụ 3.12.1 (2016B)**.** Cho $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức $f(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{\ln t}$, $(x > 1)$. Tìm tập giá trị của f

HD. $f'(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\ln t}\right) dt + \frac{1}{\ln x} \times (x)' - \frac{1}{\ln \sqrt{x}} \times \left(\sqrt{x}\right)' = \int_{\sqrt{x}}^{x} 0 dt + \frac{1}{\ln x} \times 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\ln x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 + \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\ln x} > 0,\ \forall x > 1 \Rightarrow f\left(1^+\right) < f(x) < f(+\infty),\ \forall x > 1$

$\sqrt{x} \le t \le x \Rightarrow \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{t} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \dfrac{1}{x\ln t} \le \dfrac{1}{t\ln t} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}\ln t} \Rightarrow \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{x\ln t} \le \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{t\ln t} \le \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{\sqrt{x}\ln t} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \le \ln\ln t\Big|_{\sqrt{x}}^{x} \le \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \le \ln 2 \le \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}\ln 2 \le f(x) \le x\ln 2$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x}\ln 2 = \lim_{x\to 1^+} x\ln 2 = \ln 2 \Rightarrow f(1^+) = \ln 2$, và $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ln 2 = +\infty \Rightarrow f(+\infty) = +\infty$ □

Chú ý 3.12.1.
- Đánh giá thêm thừa số $\frac{1}{t}$ để so sánh $f(x)$ với hàm có nguyên hàm.
- Câu hỏi khác: tìm tập giá trị của f trên $(0, 1)$.
- Mở rộng: $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\,dt \Rightarrow f'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} g(t)}_{0}\,dt + g\left[\beta(x)\right] \times \beta'(x) - g[\alpha(x)] \times \alpha'(x) = g\left[\beta(x)\right] \times \beta'(x) - g[\alpha(x)] \times \alpha'(x)$, trong đó (1) $g(t)$ không có nguyên hàm, nhưng $g(t) \times h(t)$ có nguyên hàm nếu chọn $h(t)$ phù hợp; (2) đánh giá được $h(t)$ khi $\alpha(x) \leq t \leq \beta(x)$

3.12.3 Bất đẳng thức tích phân

3.13 Vòng loại trường 2024

3.13.1 Đợt 1

Ví dụ 3.13.1. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \geq 1$.

a) Chứng minh dãy đơn điệu giảm.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ví dụ 3.13.2. Cho dãy (a_n) thỏa mãn $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, $n \geq 1$.

a) Với $a_1 = \frac{3}{2}$, tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Tìm a_1 để dãy hội tụ.

Ví dụ 3.13.3. Cho hàm số $f_n(x) = \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x) \cdots \cos(nx)$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $\left|f_n''(0)\right| \geq 120$.

Ví dụ 3.13.4.

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh hàm số gián đoạn tại $x = 0$. Khi đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy?

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ} \\ \cos x, & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \end{cases}$. Chứng minh f liên tục tại $x = \frac{\pi}{4}$.

Ví dụ 3.13.5. Một lỗi tính toán rất hay gặp đó là khi tính đạo hàm, một số người lầm tưởng rằng quy tắc tính đạo hàm của tích đó là $(fg)' = f'g'$.

a) Hãy chỉ ra ví dụ để chứng minh quy tắc trên là sai.

b) Hãy đưa ra ví dụ hai hàm f và g không phải hàm hằng trên một khoảng mở (a, b) nào đó mà quy tắc trên vẫn đúng.

3.13.2 Đợt 2

Ví dụ 3.13.6. Cho $I_n = \int_0^1 \left(\frac{1-x}{x+2}\right)^n dx, \quad n = 1, 2, ...$

a) Tính I_2. b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$. c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3^n I_n\right)$.

HD. a) $\left(\frac{1-x}{x+2}\right)^2 = \left(\frac{3}{x+2} - 1\right)^2 = 1 - \frac{6}{2+x} + \frac{9}{(2+x)^2}, \quad I_2 = \frac{5}{2} - 6\ln\frac{3}{2}.$

b) $0 \leq \frac{1-x}{x+2} \leq \frac{1}{2}, \ \forall x \in [0, 1].$

c) $I_n = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} - 1\right)^n dx$. Đặt $t = \frac{3}{x+2} \Rightarrow x = \frac{3}{t} - 2 \Rightarrow dx = -\frac{3}{t^2}dt \Rightarrow I_n = 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^n}{t^2}dt = 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)(t-1)^{n-1}}{t^2}dt = 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^{n-1}}{t}dt - 3I_{n-1}.$

$J_n = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^n}{t}dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)(t-1)^{n-1}}{t}dt = \int_1^{\frac{3}{2}} (t-1)^{n-1}dt - J_{n-1} = \frac{1}{2^n n} - J_{n-1}, \quad J_0 = \ln\frac{3}{2}.$

$J_n = (-1)^n \left[\ln\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2^1\cdot 1}}{-1} + \frac{\frac{1}{2^2\cdot 2}}{(-1)^2} + \cdots + \frac{\frac{1}{2^n n}}{(-1)^n}\right] = (-1)^n \left[\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2^1\cdot 1} + \frac{1}{2^2\cdot 2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n n}\right].$

$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^n}{n} + \frac{f^{(n+1)}\left(\xi\right)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$

$$J_n = (-1)^n \times (-1)^n \frac{\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{(n+1)\,2^n\left(1+\xi\right)^{n+1}}.$$

$I_n = 3\int_1^{\frac{3}{2}} (t-1)^n d\left(-\frac{1}{t}\right) = -3\frac{(t-1)^n}{t}\Big|_1^{\frac{3}{2}} + 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t} d\left((t-1)^n\right) = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3n\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^{n-1}}{t}dt = 3nJ_{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}} = 3n\times\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}\left(1+\xi\right)^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}\left(1+\xi\right)^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{3}{\left(1+\xi\right)^n} - 1\right].$

□

Ví dụ 3.13.7. Một sợi dây thép đồng chất dài 1m và có tiết diện không đáng kể. Cắt sợi dây thép thành hai đoạn, một đoạn được uốn thành hình vuông, còn lại được uốn thành hình tròn. Hỏi sợi dây thép được cắt như thế nào để tổng diện tích hình vuôn và diện tích hình tròn là nhỏ nhất.

HD. Độ dài 2 đoạn x và $1-x$, $0 \leq x \leq 1$. Cạnh hình vuông = $\frac{x}{4}$, bán kính hình tròn = $\frac{1-x}{2\pi}$. Tổng diện tích $S = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{1-x}{2\pi}\right)^2$. □

Ví dụ 3.13.8. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{a}{2024} + \frac{b}{2025} + \frac{c}{2026} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 1.

HD.
- $\frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n} = 0 \Rightarrow$ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\in (0, 1)$.
  Thật vậy xét $f(t) = \int_0^t \left(ax^{n+1} + bx^n + cx^{n-1}\right) dx = \frac{a}{n+2}t^{n+2} + \frac{b}{n+1}t^{n+1} + \frac{c}{n}t^n$, thì $f(0) = f(1) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0,1) \quad f'(x_0) = 0$.
- Đặt $t = \frac{1}{x}$ thì $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x > 1 \Leftrightarrow a + bt + ct^2 = 0$ có nghiệm $t \in (0, 1)$.

□

Ví dụ 3.13.9. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0, 1]$ có $f'(0) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = c^3$.

Ví dụ 3.13.10. Cho $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục. Chứng minh $\int_0^1 f(x)\, dx \geq \left(\int_0^1 f\left(x^2\right) dx\right)^2$.

HD. Đặt $\ell = \int_0^1 f(x)\, dx$, $r = \int_0^1 f\left(x^2\right) dx$. Khi đó $0 \leq r \leq 1$. Chỉ cần xét $r > 0$. Đặt $a = \frac{1}{2r} \Rightarrow \frac{1}{4a^2} = r^2 \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
r &= \int_0^1 f(t) \times \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \Rightarrow r - a\ell = \int_0^1 f(t) \times \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - a\right] dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{4a^2}} f(t) \times \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - a\right] dt + \int_{\frac{1}{4a^2}}^1 f(t) \times \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - a\right] dt \leq \int_0^{\frac{1}{4a^2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - a\right) dt = \frac{1}{4a} = \frac{r}{2}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow a\ell \geq \frac{r}{2} \Rightarrow \ell \geq \frac{r}{2a} = r^2$.

□

Chú ý 3.13.1. Tổng quát: $\int_0^1 f(x)\, dx \geq \left(\int_0^1 f\left(x^n\right) dx\right)^n$, với $n \in \mathbb{R}_{>1}$, và lý do chọn a.

$$x^n = t \Rightarrow x = t^{\frac{1}{n}} \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1} dt \Rightarrow r = \int_0^1 f(t) \times \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1} dt.$$

$\Rightarrow r - a\ell = \displaystyle\int_0^1 f(t)\left(\frac{1}{nt^{\frac{n-1}{n}}} - a\right)dt = \int_0^{(na)^{-\frac{n}{n-1}}} + \int_{(na)^{-\frac{n}{n-1}}}^1 \leq \int_0^{(na)^{-\frac{n}{n-1}}} \left(\frac{1}{nt^{\frac{n-1}{n}}} - a\right)dt =$
$\left(t^{\frac{1}{n}} - at\right)\Big|_0^{(na)^{-\frac{n}{n-1}}} = (na)^{-\frac{1}{n-1}} - a(na)^{-\frac{n}{n-1}}.$

$\Rightarrow a\ell \geq r - (na)^{-\frac{1}{n-1}} + a(na)^{-\frac{n}{n-1}} \Rightarrow \ell \geq \dfrac{r}{a} - \dfrac{1}{a}(na)^{-\frac{1}{n-1}} + (na)^{-\frac{n}{n-1}} \geq r^n$ (ta muốn vậy), hay $r^n - \dfrac{r}{a} \leq (na)^{-\frac{n}{n-1}} - \dfrac{1}{a}(na)^{-\frac{1}{n-1}}$.

Xét $g(t) = t^n - \dfrac{t}{a} \Rightarrow g'(t) = nt^{n-1} - \dfrac{1}{a}$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^{n-1} = \dfrac{1}{na} = (na)^{-1} \Leftrightarrow t = (na)^{-\frac{1}{n-1}}$. Ta có $g(t) \geq g\left[(na)^{-\frac{1}{n-1}}\right] \ \forall t$.

Mà $g(r) \leq g\left[(na)^{-\frac{1}{n-1}}\right]$, nên $r = (na)^{-\frac{1}{n-1}}$. Vậy ta chọn $a = \dfrac{1}{nr^{n-1}}$.

Phần II

Đại số

3.14 Vòng loại trường 2024

3.14.1 Đợt 1

Ví dụ 3.14.1. Cho định thức $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, trong đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 2024x + 2025 = 0$.

Ví dụ 3.14.2. Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$, biết a_{ij} là số các cặp số tự nhiên (m, n) sao cho $mi + nj = 4$, ví dụ, $a_{11} = 5$. Tính $\det A$.

Ví dụ 3.14.3. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 3.14.4. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để đa thức $P(x) = x^4 + 9x^3 + mx^2 + 9x + 4$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3.14.5. a) Cho A là ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $A^{2024} = O$. Chứng minh $A^2 = O$.

b) Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp, biết $I + AB$ khả nghịch. Chứng minh $I + BA$ cũng khả nghịch.

HD. a) Xét 2 khả năng

1) A chéo hóa được. Khi đó $A = C^{-1}DC$, trong đó $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Suy ra $A^{2024} = C^{-1}D^{2024}C$, trong đó $D^{2024} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2024} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2024} \end{bmatrix}$
$A^{2024} = O \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = O$.

2) A không chéo hóa được, thì A có dạng Jordan, $A = C^{-1}JC$, trong đó $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Khi đó $A^{2024} = C^{-1}J^{2024}C$, trong đó $J^{2024} = \begin{bmatrix} \lambda^{2024} & 2024\lambda^{2023} \\ 0 & \lambda^{2024} \end{bmatrix}$
$A^{2024} = O \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow J^2 = O \Rightarrow A^2 = O$.

□