Gợi ý. ($M = 2022$)

a) Với $\varepsilon > 0$, ta có

$$M\left|x-y\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|x-y\right| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Xét $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} \quad \forall x, y \in [-1,1]\,,\ \left|x-y\right| < \delta$, ta có

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le M\left|x-y\right| < \varepsilon,$$

tức là f liên tục đều trên $[-1, 1]$. Suy f liên tục trên $[-1, 1]$.

b)
- Từ $\left|f(x)-f(y)\right| \le M\left|x-y\right| \quad \forall x, y \in [-1,1]$, cho $y=-1$, thì $\forall x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(-1)\right| \le M\left|x-(-1)\right| &\Rightarrow \left|f(x)-1\right| \le M(x+1) \Rightarrow f(x)-1 \ge -M(x+1)\\ &\Rightarrow f(x) \ge 1 - M(x+1)\,.\end{aligned}$$

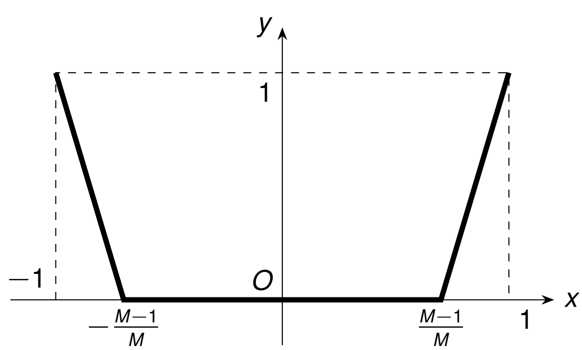
  Vì $f \ge 0$ nên ta so sánh $1 - M(x+1) \ge 0 \Leftrightarrow Mx \le -(M-1) \Leftrightarrow x \le -\frac{M-1}{M}$ (lưu ý $-1 < -\frac{M-1}{M} < 0$).

- Tương tự, cho $y = 1$, thì $\forall x \in [-1,1]$

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(1)\right| \le M\left|x-1\right| &\Rightarrow \left|f(x)-1\right| \le M(1-x) \Rightarrow f(x)-1 \ge -M(1-x)\\ &\Rightarrow f(x) \ge 1 - M(1-x)\,.\end{aligned}$$

  Vì $f \ge 0$ nên ta so sánh $1 - M(1-x) \ge 0 \Leftrightarrow Mx \ge (M-1) \Leftrightarrow x \ge \frac{M-1}{M}$ (lưu ý $0 < \frac{M-1}{M} < 1$).

- Tóm lại $f(x) \ge g(x) = \begin{cases} 1 - M(x+1) & \text{nếu } -1 \le x \le -\frac{M-1}{M} \\ 0 & \text{nếu } -\frac{M-1}{M} \le x \le \frac{M-1}{M} \\ 1 - M(1-x) & \text{nếu } \frac{M-1}{M} \le x \le 1. \end{cases}$



Suy ra

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left(\int_{-1}^{-\frac{M-1}{M}} + \int_{-\frac{M-1}{M}}^{\frac{M-1}{M}} + \int_{\frac{M-1}{M}}^{1}\right) f(x)\,dx \geq$$
$$\geq \int_{-1}^{-\frac{M-1}{M}} [1 - M(x+1)]\,dx + 0 + \int_{\frac{M-1}{M}}^{1} [1 - M(1-x)]\,dx = \frac{1}{2M} + \frac{1}{2M} = \frac{1}{M}.$$

c) Xét $g(x)$ trong ý (b). Dễ thấy $g(-1) = g(1) = 1$ và trong ý (b), ta đã biết $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{M}$. Cuối cùng ta kiểm tra $\left|g(x) - g(y)\right| \leq M\left|x - y\right| \quad \forall x, y \in [-1, 1]$.

Trường hợp 1: x, y cùng một nhánh trong công thức xác định g. Chẳng hạn $-1 \leq x, y \leq -\frac{M-1}{M}$, ta có $\left|g(x) - g(y)\right| = \left|[1 - M(x+1)] - [1 - M(y+1)]\right| = M\left|x - y\right|$.
Tương tự với $\frac{M-1}{M} \leq x, y \leq 1$. Còn khi $-\frac{M-1}{M} \leq x, y \leq \frac{M-1}{M}$, thậm chí $\left|g(x) - g(y)\right| = 0$.

Trường hợp 2: x, y ở hai nhánh.

- $-1 \leq x \leq -\frac{M-1}{M} \leq y \leq \frac{M-1}{M}$.

$$\left|g(x) - g(y)\right| = \left|[1 - M(x+1)] - 0\right| = 1 - M(x+1).$$

Cần kiểm tra

$$1 - M(x+1) \leq M\left|x - y\right| = M(y - x) \Leftrightarrow 1 - M \leq My \Leftrightarrow y \geq -\frac{M-1}{M}, \quad \text{đúng.}$$

Tương tự khi $-\frac{M-1}{M} \leq x \leq \frac{M-1}{M} \leq y \leq 1$.

- $-1 \leq x \leq -\frac{M-1}{M}$, $\frac{M-1}{M} \leq y \leq 1$.

$$\left|g(x) - g(y)\right| = \left|[1 - M(x+1)] - [1 - M(1-y)]\right| = \left|-Mx - My\right| = M\left|x + y\right| \leq$$
$$\leq M\left(\left|x\right| + \left|y\right|\right) = M(-x + y) = M\left|x - y\right|$$

□

Nhận xét. a) Bài toán này nên vẽ đồ thị của $g(x)$ để hiểu trực quan một số đại lượng. Chẳng hạn, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$ là tổng diện tích của hai tam giác vuông ở bên trái và bên phải của hình, còn tỷ số $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|$ đánh giá độ dốc của đường nối hai điểm $(x, f(x))$ và $(y, f(y))$.

b) Tổng quát, cho $f : [a, b] \to [A, \infty)$ thỏa mãn $\left|f(x) - f(y)\right| \leq M\left|x - y\right| \quad \forall x, y \in [a, b]$.

- $\left|f(x)-f(a)\right| \leq M\left|x-a\right| \Rightarrow f(x)-f(a) \geq -M(x-a) \Rightarrow f(x) \geq f(a)-M(x-a)$.
  So sánh $f(a)-M(x-a) \geq A \Leftrightarrow Mx \leq Ma+f(a)-A \Leftrightarrow x \leq a+\dfrac{f(a)-A}{M}$. (Vì thế cần giả thiết $\boxed{f(a) > A}$.)
- $\left|f(x)-f(b)\right| \leq M\left|x-b\right| \Rightarrow f(x)-f(b) \geq -M(b-x) \Rightarrow f(x) \geq f(b)-M(b-x)$.
  So sánh $f(b)-M(b-x) \geq A \Leftrightarrow Mx \geq Mb-f(b)+A \Leftrightarrow x \geq b-\dfrac{f(b)-A}{M}$. (Vì thế cũng cần giả thiết $\boxed{f(b) > A}$.)
- Thêm giả thiết để

$$\begin{aligned} a+\frac{f(a)-A}{M} < b-\frac{f(b)-A}{M} &\Leftrightarrow Ma+f(a)-A < Mb-f(b)+A \\ &\Leftrightarrow \boxed{f(a)+f(b) < M(b-a)+2A}. \end{aligned}$$

- Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x)\,dx = \left(\int_a^{a+\frac{f(a)-A}{M}} + \int_{a+\frac{f(a)-A}{M}}^{b-\frac{f(b)-A}{M}} + \int_{b-\frac{f(b)-A}{M}}^{b}\right) f(x)\,dx \geq \\ &\geq \int_a^{a+\frac{f(a)-A}{M}} \left[f(a)-M(x-a)\right]dx + \int_{a+\frac{f(a)-A}{M}}^{b-\frac{f(b)-A}{M}} A dx + \int_{b-\frac{f(b)-A}{M}}^{b} \left[f(b)-M(b-x)\right]dx = \\ &= A(b-a) + \frac{2A^2+f(a)^2+f(b)^2-2A\left[f(a)+f(b)\right]}{2M}. \end{aligned}$$

c) Vài bài "đẹp" sinh ra từ ý (b)

- $A = 0 \Rightarrow I \geq \dfrac{f(a)^2+f(b)^2}{2M}$.
- $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow I \geq A(b-a) + \dfrac{A^2}{M} \geq -\dfrac{M}{4}(b-a)^2$.