BÀI GIẢNG LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Nguyễn Đức Thịnh

Ngày 21 tháng 3 năm 2024

Mục lục

Danh sách ký hiệu

$\mathbb{N}$ Tập các số tự nhiên 0, 1, 2,. . .

$\mathbb{R}$ Tập các số thực

$\mathbb{Z}^+$ Tập các số nguyên dương 1, 2,. . .

∞ Dương vô cùng $+\infty$

$\{a_n\}$ Dãy $a_1, a_2, ...,$ hoặc $a_0, a_1, ...$ tùy tình huống

$\{a_n\}_{n\geq n_0},\ n_0 \in \mathbb{N}$ Dãy $a_{n_0}, a_{n_0+1}, ...$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ Giới hạn của dãy $\{u_n\}$ khi n tiến ra vô cùng

$\pm\infty$ $+\infty$ hoặc âm / trừ vô cùng $-\infty$

Mở đầu

Bài giảng được biên soạn bám sát theo đề cương thi Giải tích và Đại số thuộc *bảng B* do Ban tổ chức là Hội Toán học Việt Nam đề ra. Do sinh viên Trường Đại học Xây dựng Hà Nội học các môn Toán cao cấp chỉ trong năm thứ nhất, nên khối lượng kiến thức trang bị không đầy đủ so với đề cương. Vì vậy, việc lựa chọn thi bảng B được xem là phù hợp. Nội dung bài giảng cũng được thiết kế theo giới hạn kiến thức này.

Bố cục của bài giảng gồm tổng hợp lý thuyết, bao gồm các định lý, mệnh đề, bổ đề, hệ quả... kèm theo ý nghĩa của chúng nếu có. Ví dụ minh họa của các chúng được đặt trên *github*. Trong phần bài tập, mỗi bài thường chỉ có gợi ý sử dụng kiến thức gì, kỹ thuật, mẹo giải bài, hoặc tổng quát hóa bài toán. Lời giải chi tiết của các bài kèm theo ghi chú, bình luận cũng được để trên github.

Lưu ý, để giải bài tập, có khi ta cần sử dụng tổng hợp tất cả các kiến thức được học. Tác giả khuyến nghị sinh viên (1) với bài dễ vẫn tự trình bày để luyện cách hành văn; (2) với bài khó, sau một thời gian suy nghĩ mà vẫn chưa có hướng giải, hãy đọc lời giải và tự trình bày lại chi tiết, rồi tìm ra điểm “mấu chốt” để giải bài toán, tuyệt đối không học thuộc lòng lời giải, vì diều đó vừa khó vừa vô nghĩa.

Chương 1

Kiến thức Chuẩn bị

1.1 Logic

1.1.1 Mệnh đề

Định nghĩa 1.1.1. *Mệnh đề là một khẳng định chỉ đúng hoặc chỉ sai, thường ký hiệu* $p, q, r, ...$

Khi mệnh đề p đúng, ta viết p = True, ngắn gọn hơn p = 1*, hoặc đơn giản chỉ viết "p"; ngược lại p sai thì viết p = False, hoặc p =* 0.

True, 1 *gọi là hằng đúng, False,* 0 *gọi là hằng hai, và chúng được gọi chung là hằng mệnh đề.*

Một mệnh đề p giả định nhận một trong hai giá trị 1 hoặc 0 gọi là biến mệnh đề.

Định nghĩa 1.1.2. *Cho mệnh đề p. Phủ định của p, ký hiệu ¬p, đọc là "not p" là mệnh đề có giá trị trong bảng chân lý*

p	$\neg p$
1	0
0	1

Như vậy khi p sai, ta chỉ cần viết "$\neg p$".

Định nghĩa 1.1.3. *Cho hai mệnh đề* p, q*. Các phép toán hai ngôi*

Phép toán	*Đọc*
$p \wedge q$	*p và q*
$p \vee q$	*p hoặc q*
$p \to q$	*p kéo theo q*
$p \leftrightarrow q$	*p tương đương q*

có bảng chân lý

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Định nghĩa 1.1.4. *Công thức mệnh đề gồm*

a) Hằng mệnh đề 1, 0.

b) Biến mệnh đề p, q, r ...

c) Các phép toán $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ theo thứ tự ưu tiên vừa nêu.

d) Dấu nhóm biểu thức ( ), [ ], { }.

và thường ký hiệu P, Q, ...

Các bộ 11, 10, 01, 00 của dãy biến pq gọi là các bộ phân bố giá trị của các biến p, q.

1.1.2 Công thức mệnh đề tương tương

Định nghĩa 1.1.5. *Công thức mệnh đề P gọi là hằng đúng, ký hiệu $P \Leftrightarrow 1$ nếu P đúng tại mọi bộ phân bố giá trị của các biến trong nó.*

Hai công thức mệnh đề P và Q gọi là tương đương logic, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$, đọc là "P tương đương với Q", nếu P đúng khi và hỉ khi Q đúng.

Nhận xét. Các khẳng định sau là tương đương

a) $P \Leftrightarrow Q$.

b) Công thức $P \leftrightarrow Q$ là hằng đúng, tức là $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow 1$.

c) P và Q nhận cùng giá trị tại mọi bộ phân bố giá trị của các biến.

Mệnh đề 1.1.1. *Với hai mệnh đề p, q*

a) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

b) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

c) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Nhận xét. Tương đương logic ở ý (b) cho ta phương pháp phản chứng khi chứng minh định lý. Giả sử có p đúng, ta phải chứng minh q đúng. Thay vì như vậy, ta giả sử q sai. Khi đó nếu p cũng sai thì khẳng định ban đầu, tức là $p \rightarrow q$, đúng.

Các tương đương logic cơ bản

Tương đương logic	Tên gọi
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Luật phủ định kép
$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$ $p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Luật đồng nhất
$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ $p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Luật nuốt (Luật thống trị)
$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$	Luật lũy đẳng
$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$ $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Luật bù
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	Luật kết hợp
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Luật giao hoán
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Luật phân phối
$\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Luật De Morgan

1.1.3 Suy luận

Định nghĩa 1.1.6. *Cho hai công thức mệnh đề P, Q. Ta nói P kéo theo logic Q, hay P suy ra Q, ký hiệu $P \Rightarrow Q$, nếu công thức $P \to Q$ là đồng nhất đúng.*

Ký hiệu $P \Rightarrow Q$ có thể viết dưới dạng sơ đồ suy luận

$$\begin{array}{rl} & P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

Cho $P_1, P_2, \ldots, P_n$ và Q là các công thức mệnh đề. Khi $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$, ta viết sơ đồ

$$\begin{array}{rl} & P_1 \\ & P_2 \\ & \vdots \\ & P_n \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

Các quy tắc suy luận thường gặp

a) Quy tắc tách (Modus Ponens)

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

b) Phản chứng (Modus Tollens)

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & \neg Q \\ \hline \therefore & \neg P \end{array}$$

c) Tam đoạn luận

$$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & Q \to R \\ \hline \therefore & P \to R \end{array}$$

d) Loại trừ

$$\begin{array}{ll} & P \vee Q \\ & \neg P \\ \hline \therefore & Q \end{array}$$

e) Mâu thuẫn

$$\begin{array}{ll} & P \to 0 \\ \hline \therefore & \neg P \end{array}$$

f) Chứng minh theo trường hợp

$$\begin{array}{ll} & P_1 \to Q \\ & P_2 \to Q \\ \hline \therefore & P_1 \vee P_2 \to Q \end{array}$$

1.1.4 Lượng từ

Định nghĩa 1.1.7. *Mỗi ánh xạ $p : \mathcal{U} \to \{True, False\}$ gọi là hàm mệnh đề.*

Định nghĩa 1.1.8. *Lượng từ tồn tại $\exists x \in \mathcal{U} \quad p(x)$, đọc là "tồn tại x thuộc $\mathcal{U}$ sao cho $p(x)$", xác định bởi*

$$\exists x \in \mathcal{U} \quad p(x) = \bigvee_{x \in \mathcal{U}} p(x). \tag{1.1}$$

Lượng từ phổ dụng $\forall x \in U \quad p(x)$, đọc là "với mỗi x thuộc $\mathcal{U}$, $p(x)$", xác định bởi

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad p(x) = \bigwedge_{x \in \mathcal{U}} p(x). \tag{1.2}$$

Mệnh đề 1.1.2. *Phủ định lượng từ*

$$\begin{aligned} \neg \exists x \in \mathcal{U} \quad p(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U} \quad \neg p(x) \\ \neg \forall x \in \mathcal{U} \quad p(x) &\Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{U} \quad \neg p(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.2 Tập hợp

1.3 Hàm

Định nghĩa 1.3.1. *Cho hai tập A, B. Mỗi hàm f từ A vào B là một quy tắc tương ứng mỗi $a \in A$ với một và chỉ một phần tử $b \in B$, ký hiệu*

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Định nghĩa 1.3.2. *Cho các tập A, B, C, và các hàm $f : A \to B$, $g : B \to C$. Hợp thành của f và g, ký hiệu $g \circ f$, và đọc là "g hợp f" là hàm $g \circ f : A \to C$ xác định bởi*

$$g \circ f(a) = g[f(a)], \quad a \in A. \tag{1.5}$$

1.4 Phương pháp quy nạp toán học

Phương pháp này thường được sử dụng để chứng minh chặt chẽ các tính chất của dãy, đặc biệt là dãy có công thức truy hồi.

Định nghĩa 1.4.1. *Ánh xạ $S : \mathbb{Z}^+ \to \{True, False\}$, $n \mapsto S(n)$ gọi là một hàm mệnh đề. Với mỗi n cố định, nếu $S(n) = True$, ta nói $S(n)$ đúng; ngược lại, $S(n) = False$, ta nói $S(n)$ sai.*

1.4.1 Phương pháp quy nạp toán học: dạng đơn giản

Xét hàm mệnh đề $S(n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Giả sử

a) $S(1)$ đúng.

b) Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$, nếu $S(n)$ đúng thì $S(n+1)$ cũng đúng.

Khi đó $S(n)$ đúng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

1.4.2 Phương pháp quy nạp toán học: tổng quát

Xét hàm mệnh đề $S(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$ nào đó). Giả sử

a) $\forall k \in \{n_0, n_0 + 1, ..., n_1\} \quad S(k)$ đúng, $n_1 \geq n_0$ nào đó.

b) Nếu $\forall n \geq n_1 \quad \forall k \in \{n_0, n_0 + 1, ..., n\} \quad S(k)$ đúng, thì $S(n+1)$ cũng đúng.

Khi đó $S(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$.

Chú ý. Khi chứng minh $S(n+1)$, chỉ cần giả thiết của $S(n)$, $S(n-1)$,..., và xa nhất là $S(n-k)$, $k \geq 0$, thì $n_1 = n_0 + k$.

Phần I

Giải tích: Tóm tắt Lý thuyết

Đề cương môn Giải tích

Phần I: Dãy số và hàm số

1) Dãy hội tụ, dãy đơn điệu, dãy bị chặn, dãy dần ra vô cực.
2) Các tính chất và phép toán về dãy hội tụ.
3) Tìm giới hạn của dãy số.
4) Hàm đơn điệu, hàm bị chặn, hàm tuần hoàn, hàm chẵn và hàm lẻ, hàm ngược.
5) Giới hạn của hàm số.
6) Tính liên tục, các tính chất của hàm liên tục.
7) *Hàm lồi, bất đẳng thức Jensen*.*[1]

Phần II: Giải tích trên hàm một biến

1) Phép tính vi phân trên hàm một biến.
   a) Định nghĩa và các phép toán về đạo hàm.
   b) Các định lý Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, l'Hospital.
   c) Công thức Taylor, công thức Maclaurin.
   d) Cực trị, giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất của hàm số
   e) *Hàm lồi khả vi*.*
2) Phép tính tích phân trên hàm một biến.
   a) Nguyên hàm và tích phân bất định.
   b) Các phương pháp tính tích phân bất định.
   c) Tích phân các hàm hữu tỷ, hàm vô tỷ, hàm lượng giác.
   d) Định nghĩa và các phương pháp tính tích phân xác định, tính khả tích.
   e) Định lý cơ bản của phép tính vi tích phân (đạo hàm của tích phân xác định theo cận của tích phân, công thức Newton – Leibniz).
   f) Tích phân phụ thuộc tham số.
   g) Các định lý về trung bình tích phân.
   h) Bất đẳng thức tích phân.
   i) *Sự hội tụ và phân kỳ của tích phân suy rộng, các tiêu chuẩn so sánh đối với tích phân của hàm dương*.*
3) *Chuỗi số, dãy hàm và chuỗi hàm*.*
   a) *Chuỗi số, tiêu chuẩn Cauchy về điều kiện cần và đủ cho sự hội tụ của chuỗi*.*

[1] Các nội dung có dấu * và in nghiêng là các nội dung chỉ dành cho sinh viên dự thi bảng A.

b) *Các tiêu chuẩn so sánh, tiêu chuẩn tích phân (Cauchy), tiêu chuẩn đối với chuỗi đan dấu (Leibniz), hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện, tiêu chuẩn căn thức (Cauchy), tiêu chuẩn tỉ số (d'Alembert)*.*

c) *Các tiêu chuẩn hội tụ Abel, Dirichlet*.*

d) *Chuỗi lũy thừa*.*

e) *Tiêu chuẩn hội tụ đều cho dãy hàm và chuỗi hàm một biến, các tính chất cơ bản của dãy hàm và chuỗi hàm hội tụ đều*.*

Phần III: ***Không gian metric****

1) *Không gian metric, tôpô trên không gian metric*.*

2) *Ánh xạ liên tục, đẳng cự, đồng phôi*.*

3) *Các tính chất đầy đủ, compact, liên thông*.*

Chương 2

Giới hạn

2.1 Giới hạn của dãy số thực

2.1.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.1.1. *Ta nói dãy $\{u_n\}$ hội tụ tới giới hạn $a \in \mathbb{R}$ nếu u_n đủ gần a khi n đủ lớn:*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |u_n - a| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Ngược lại, $\{u_n\}$ gọi là phân kỳ.

2.1.2 Các tính chất của dãy hội tụ

Định lý 2.1.1. *Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.*

Định lý 2.1.2. *Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn của dãy.*

Định lý 2.1.3.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|. \tag{2.2}$$

Định nghĩa 2.1.2. *Dãy $\{u_n\}$ gọi là*

a) bị chặn trên nếu $\exists M \quad u_n \leq M, \ \forall n$.

b) bị chặn dưới nếu $\exists m \quad u_n \geq m, \ \forall n$.

c) bị chặn nếu $\exists M, m \quad m \leq u_n \leq M, \ \forall n$.

Định lý 2.1.4. *Mọi dãy hội tụ thì bị chặn.*

2.1.3 Các phép tính trên các dãy hội tụ

Định lý 2.1.5. *Giả sử* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ *và* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$. *Khi đó*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab$.

3) $b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

Hệ quả 2.1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha u_n) = \alpha a$.

2.1.4 Tiến qua giới hạn trong bất đẳng thức

Định lý 2.1.6. *Cho hai dãy hội tụ* $\{u_n\}$ *và* $\{v_n\}$. *Khi đó nếu* $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n \geq v_n$ *(n đủ lớn) thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

Hệ quả 2.1.2. *Cho dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ. Khi đó nếu* $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n \geq b$ *(tương ứng* $\leq b$*) thì* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geq b$ *(tương ứng* $\leq b$*).*

Chú ý. a) $u_n > v_n, \ \forall n$ không suy ra được $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > a$ (tương ứng $< a$) $\Rightarrow \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n > a$ (tương ứng $< a$).

Định lý 2.1.7 (Nguyên lý kẹp)**.** *Giả sử*

a) $\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad x_n \leq y_n \leq z_n$, *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

2.1.5 Nguyên lý Cantor

Định lý 2.1.8. *Dãy các đoạn lồng nhau và thắt lại có duy nhất một điểm chung. Tức là, nếu*

a) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$, *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$,

thì $\exists! \alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

2.1.6 Nguyên lý Bolzano – Weierstrass

Định lý 2.1.9. *Mọi dãy vô hạn bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.*

2.1.7 Nguyên lý Cauchy

Định nghĩa 2.1.3. *Dãy* $\{u_n\}$ *gọi là dãy cơ bản nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m > n_0 \quad |u_n - u_m| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Chú ý. a) Mọi dãy cơ bản đều bị chặn.

b) Nếu dãy cơ bản $\{u_n\}$ có một dãy con $\{u_{n_k}\}$ hội tụ tới a thì $\{u_n\}$ cũng hội tụ tới a.

Định lý 2.1.10 (Nguyên lý hội tụ Cauchy)**.** *Dãy số thực hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.*

Ý nghĩa cơ bản của định lý này là ở chỗ để khảo sát sự hội tụ của một dãy, ta chỉ cần căn cứ vào quy luật biến thiên của bản thân dãy đó để xét xem tiêu chuẩn trên có thỏa mãn hay không mà không cần biết trước giới hạn của dãy (nếu dựa vào định nghĩa ta cần biết trước giới hạn của dãy, việc này nhiều khi không dễ dàng). Hơn nữa, ta cũng dùng định lý này để chứng minh sự phân kỳ của dãy.

2.1.8 Sự hội tụ của dãy đơn điệu

Định nghĩa 2.1.4. *a) Dãy* $\{u_n\}$ *gọi là dãy tăng (tương ứng tăng thực sự) nếu* $u_n \leq u_{n+1}$ $\forall n$ *(tương ứng* $<$*).*

b) Dãy $\{u_n\}$ *gọi là dãy giảm (tương ứng giảm thực sự) nếu* $u_n \geq u_{n+1}$ $\forall n$ *(tương ứng* $>$*).*

Dãy tăng hoặc giảm gọi chung là đơn điệu.

Định lý 2.1.11. *a) Nếu* $\{u_n\}$ *tăng và bị chặn trên thì hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$*.*

b) Nếu $\{u_n\}$ *giảm và bị chặn dưới thì hội tụ và* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$*.*

2.1.9 Giới hạn riêng, giới hạn trên và giới hạn dưới

Giới hạn riêng

Định nghĩa 2.1.5. *Số* $a \in \mathbb{R}$ *gọi là một giới hạn riêng của dãy* $\{u_n\}$ *nếu có một dãy con* $\{u_{n_k}\}$ *của dãy* $\{u_n\}$ *hội tụ tới a.*

$a \in \mathbb{R}$ là một giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}$ $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0$, khoảng $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ chứa vô số số hạng của dãy.

Giới hạn trên và giới hạn dưới

Định nghĩa 2.1.6. *Cho dãy $\{u_n\}$ bị chặn. Với mỗi n, xét*

$$x_n = \sup\{u_{n+1}, u_{n+2}, ...\} = \sup_k u_{n+k}$$

$$y_n = \inf\{u_{n+1}, u_{n+2}, ...\} = \inf_k u_{n+k},$$

thì $\{x_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới; $\{y_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên. Vì thế tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sup\limits_n y_n$. Các giới hạn này lần lượt gọi là giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy $\{u_n\}$, ký hiệu $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.

Chú ý. a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \inf\limits_n \sup\limits_k u_{n+k}$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n = \sup\limits_n \inf\limits_k u_{n+k}$.

b) $x_n \geq y_n\ \forall n \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n \geq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$.

2.1.10 Giới hạn vô hạn

Trong các dãy phân kỳ, có một loại dãy có giới hạn vô hạn.

Định nghĩa 2.1.7. *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n > M.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad u_n < -M.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |u_n| > M.$

Chú ý. a) $\{u_n\}$ không bị chặn trên (tương ứng, dưới) $\Rightarrow \exists \{u_{n_k}\} \quad \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \infty$ (tương ứng $-\infty$).

b) $\{u_n\}$ không bị chặn $\Rightarrow \exists \{u_{n_k}\} \quad \lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = \pm\infty$.

c) $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

d) $\{u_n\}$ giảm và không bị chặn dưới $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

e) Khi $\{u_n\}$ không bị chặn trên, ta quy ước $\sup\limits_n u_n = \infty$. Khi $\{u_n\}$ không bị chặn dưới, ta quy ước $\inf\limits_n u_n = \infty$.

2.1.11 Bổ sung

Định lý 2.1.12 (Định lý Stolz)**.** *Cho hai dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Giả sử* *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$ *và* *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = a$.

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = a$.

Hệ quả 2.1.3. *Cho dãy số dương* $\{u_n\}$*. Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$.

HD. Áp dụng định lý Stolz với hai dãy $\{\ln a_n\}$ và $\{n\}$. □

Định lý 2.1.13 (Định lý trung bình Cesàro)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} = a$.

2.2 Giới hạn của hàm số

2.2.1 Lân cận của một điểm

Định nghĩa 2.2.1. *Cho* $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$*. Khoảng* $B(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$ *gọi là* $\varepsilon-$*lân cận của a.*

$V \subset \mathbb{R}$ *gọi là một lân cận của a nếu* $\exists \varepsilon > 0 \quad B(a,\varepsilon) \subset V$.

2.2.2 Điểm tụ của một tập hợp

Định nghĩa 2.2.2. $a \in \mathbb{R}$ *gọi là điểm tụ (điểm giới hạn) của* $A \subset \mathbb{R}$ *nếu* $\forall$ *lân cận V của a,* $V \cap (A \backslash \{a\}) \neq \varnothing$.

Tập các điểm tụ của A gọi là tập dẫn xuất của A, ký hiệu A'.

2.2.3 Điểm cô lập của một tập hợp

Định nghĩa 2.2.3. *Cho* $A \subset \mathbb{R}$*. Điểm* $a \in A$ *gọi là điểm cô lập của A nếu* $\exists$ *lân cận V của a sao cho* $V \cap A = \{a\}$.

Chú ý. Mỗi $a \in A$ thì hoặc là điểm tụ của A, hoặc là điểm cô lập của A.

2.2.4 Định nghĩa giới hạn của hàm số

Định nghĩa 2.2.4. *Cho* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in A \quad 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Hệ quả 2.2.1. *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *thì giới hạn L là duy nhất.*

Định lý 2.2.1. *Cho $f: A \to \mathbb{R}$. Khi đó*

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_n \subset A \backslash \{a\} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = a \to \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

2.2.5 Một số tính chất của giới hạn hàm số

Định lý 2.2.2. *Cho $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Khi đó nếu $\exists\delta > 0 \quad f(x) \le g(x) \quad \forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$ nếu các giới hạn đó tồn tại.*

Định lý 2.2.3. *Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) > L$ (tương ứng $< L$) thì $\exists\delta > 0 \quad f(x) > L \quad \forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta$ (tương ứng $< L$).*

Định lý 2.2.4. *Cho $f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Khi đó nếu*

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, *và*

b) $\exists\delta > 0 \quad f(x) \le g(x) \le h(x) \quad \forall x \in A,\ 0 < |x-a| < \delta$

thì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

Định lý 2.2.5. *Cho $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_2$. Khi đó*

a) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = L_1 + L_2$

b) $\lim\limits_{x\to a} \left[f(x)\, g(x)\right] = L_1 L_2$

c) Nếu $L_2 \neq 0$ *thì* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$.

Hệ quả 2.2.2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [c \cdot f(x)] = cL \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

2.2.6 Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 2.2.6 (Cauchy)**.** *Cho $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. Khi đó $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x, x' \in A \quad 0 < |x-a| < \delta,\ 0 < |x'-a| < \delta \to \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon$.*

2.2.7 Giới hạn bên phải và giới hạn bên trái

Định nghĩa 2.2.5. *Cho $A \subseteq \mathbb{R}$. Ký hiệu $A^+ = \{x \in A \mid x > a\}$, và $A^- = \{x \in A \mid x < a\}$. Giả sử a là điểm tụ của A, A^+ và A^-, xét $f : A \to \mathbb{R}$. Định nghĩa*

a) Giới hạn phải của f tại a: $f\left(a^+\right) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a < x < a + \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

b) *Giới hạn trái của f tại a:* $f\left(a^-\right) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ *tức là*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a-\delta < x < a \to \left|f(x) - L\right| < \varepsilon.$$

Chú ý. Cho a là điểm tụ của A, A^+ và A^-. Khi đó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow f(a^+) = f\left(a^-\right) = L$.

2.2.8 Sự tồn tại giới hạn của hàm đơn điệu

Định nghĩa 2.2.6. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Ta nói*

a) *f là hàm tăng (tương ứng, tăng thực sự) trên A nếu* $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2)$ *(tương ứng* $f(x_1) < f(x_2)$*).*

b) *f là hàm giảm (tương ứng, tăng thực sự) trên A nếu* $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \to f(x_1) \ge f(x_2)$ *(tương ứng* $f(x_1) > f(x_2)$*).*

Hàm tăng hay giảm gọi chung là hàm đơn điệu.

Định nghĩa 2.2.7. *Hàm $f : A \to \mathbb{R}$ gọi là*

a) *bị chặn trên nếu* $\exists M \quad f(x) \le M \ \forall x \in A$.

b) *bị chặn dưới nếu* $\exists m \quad f(x) \ge m \ \forall x \in A$.

c) *bị chặn nếu* $\exists M, m \quad m \le f(x) \le M \ \forall x \in A$.

Định lý 2.2.7. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $x \le a\ \forall x \in A$. Nếu $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm tăng (tương ứng, giảm) trên A và bị chặn trên (tương ứng, chặn dưới) trên A thì tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sup\limits_{x\in A} f(x)$ *(tương ứng* $\inf\limits_{x\in A} f(x)$*).*

Chú ý. Giới hạn ở trên chính là giới hạn bên trái tại a: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Định lý 2.2.8. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $x \ge a\ \forall x \in A$. Nếu $f : A \to \mathbb{R}$ là hàm tăng (tương ứng, giảm) trên A và bị chặn dưới (tương ứng, chặn trên) trên A thì tồn tại giới hạn hữu hạn* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in A} f(x)$ *(tương ứng* $\sup\limits_{x\in A} f(x)$*).*

Chú ý. Giới hạn ở trên chính là giới hạn bên trái tại a: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

2.2.9 Mở rộng khái niệm giới hạn

Giới hạn vô hạn

Định nghĩa 2.2.8. *Cho $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \in A,\ 0 < \left|x - a\right| < \delta \to \left|f(x)\right| > M. \tag{2.5}$$

Nếu trong (2.5), thay vì $|f(x)| > M$ mà ta có cụ thể hơn $f(x) > M$, hoặc $f(x) < -M$, thì ta có tương ứng $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Chú ý. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset A\backslash\{a\} \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \pm\infty$.

Giới hạn khi $x \to \infty$ hoặc $-\infty$

Định nghĩa 2.2.9. *Cho $A \subset \mathbb{R}$ không bị chặn trên, $f : A \to \mathbb{R}$.*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall x \in A \quad x > k \to |f(x) - L| < \varepsilon.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall x \in A \quad x > k \to |f(x)| > M.$

Chú ý.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset A \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L.$
- Các giới hạn khi $x \to -\infty$ được định nghĩa tương tự.

2.2.10 Vô cùng bé (VCB) và vô cùng lớn (VCL)

Định nghĩa

Định nghĩa 2.2.10. *Cho $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A'$, $f : A \to \mathbb{R}$. Khi $x \to a$, ta nói*

a) *VCB nếu* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0.$

b) *VCL nếu* $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty.$

Tính chất

Xét quá trình $x \to a$.

a) f, g là VCB $\Rightarrow f \pm g,\ fg$ cũng là VCB.

b) f là VCB, g bị chặn trong một lân cận nào đó của $a \Rightarrow fg$ cũng là VCB.

c) f, g là VCL $\Rightarrow fg$ cũng là VCL.

d) f là VCL $\Rightarrow \dfrac{1}{f}$ là VCB.

So sánh các VCB

Định nghĩa 2.2.11. *Cho f, g là hai VCB khi $x \to a$. Giả sử* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L.$

a) Nếu $L = 0$, ta nói f là VCB bậc cao hơn g (hoặc g là VCB bậc thấp hơn f), ký hiệu $f = o(g)$.

b) Nếu $0 < |L| < \infty$, ta nói f và g là hai VCB cùng bậc. Đặc biệt khi $L = 1$, ta nói đó là hai VCB tương tương, ký hiệu $f \sim g$.

c) Nếu $L = \pm\infty$, ta nói f là VCB bậc thấp hơn g.

Chú ý.
- Nếu $\nexists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ta nói f và g là hai VCB không so sánh được.
- Khi $x \to a$, $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định

Mệnh đề 2.2.1. *Giả sử khi $x \to a$, $f \sim \overline{f}$, $g \sim \overline{g}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}$ nếu tồn tại một trong hai giới hạn.*

Chú ý. Khi $x \to a$, $\beta(x) = o[\alpha(x)] \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$. Như vậy trong quá trình tính giới hạn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, nếu tử số hoặc mẫu số là tổng của các VCB, ta có thể thay bằng các VCB tương tương bằng cách bỏ đi các VCB bậc cao hơn.

So sánh các VCL

Định nghĩa 2.2.12. *Cho f, g là hai VCL khi $x \to a$.*

a) Nếu $\dfrac{f}{g}$ là một VCL khi $x \to a$, tức là $\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \infty$, ta nói f là VCL bậc cao hơn g.

b) Nếu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, với $0 < |L| < \infty$, ta nói f và g là hay VCL cùng bậc. Đặc biệt khi $L = 1$, ta nói đó là hai VCL tương tương, ký hiệu $f \sim g$.

c) Nếu $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, ta nói g là VCL bậc cao hơn f, hay f là VCL bậc thấp hơn g.

Chú ý.
- Nếu $\nexists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ hữu hạn và cũng không là VCL khi $x \to a$, ta nói f và g không so sánh được.
- Tương tự đối với các VCB, để tính giới hạn dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$, ta có thể thay các VCL ở tử và mẫu bằng các VCL tương đương. Đặc biệt nếu tử hoặc mẫu là tổng các VCL, ta có thể thay bằng các VCL tương đương bằng cách bỏ đi các VLC bậc thấp hơn.

2.2.11 Một số ví dụ quan trọng về giới hạn

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

c) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

2.3 Hàm liên tục

2.3.1 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.3.1. *Cho $a \in A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ gọi là liên tục tại a nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

f liên tục tại mọi $a \in A$ gọi là liên tục trên A, ký hiệu $f \in C(A)$.

f không liên tục tại a gọi là gián đoạn tại a, và a gọi là một điểm gián đoạn của f.

Tính chất 1. a là điểm cô lập của $A \Rightarrow f$ liên tục tại a.

Tính chất 2. Nếu $a \in A'$ thì f liên tục tại a khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \tag{2.7}$$

Chú ý.
- Khác với định nghĩa giới hạn của hàm số khi $x \to a$, trong định nghĩa hàm liên tục tại a, ta không giả thiết $x \neq a$.
- Định nghĩa hàm liên tục thông qua khái niệm lân cận:

  Định nghĩa 2.3.2. *$f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ nếu với mọi lân cận V của $f(a)$, tồn tại lân cận U của a sao cho $f(U \cap A) \subset V$.*

2.3.2 Các phép toán trên các hàm liên tục. Tính liên tục của hàm hợp

Định lý 2.3.1. *$f, g : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ thì $\alpha f + \beta g$ (với α, β là các hằng số), và fg cũng liên tục tại a. Nếu $g(a) \neq 0$ thì $\dfrac{f}{g}$ cũng liên tục tại a.*

Định lý 2.3.2. *Cho $A, B \subset \mathbb{R}$. Nếu $f : A \to B$ liên tục tại $a \in A$, và g liên tục tại $b = f(a) \in B$, thì hàm hợp $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại a.*

2.3.3 Tính liên tục một phía

Định nghĩa 2.3.3. *$f : A \to \mathbb{R}$ gọi là* *a) liên tục bên phải tại $a \in A$ nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a \le x < a + \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

b) liên tục bên trái tại $a \in A$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad a - \delta < x \le a \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

f liên tục phải (hoặc trái) tại a gọi là liên tục một phía tại a.

Định lý 2.3.3. *$f : A \to \mathbb{R}$ liên tục tại $a \in A$ khi và chỉ khi f liên tục cả hai phía tại a.*

2.3.4 Tính chất của một hàm số liên tục trên một đoạn

Định nghĩa 2.3.4. *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Nếu f liên tục trên (a, b), liên tục phải tại a, và liên tục trái tại b, thì ta nói f liên tục trên $[a, b]$, ký hiệu $f \in C[a, b]$.*

Định lý 2.3.4. *$f \in C[a, b] \Rightarrow f$ bị chặn trên $[a, b]$.*

Định lý 2.3.5. *Nếu $f \in C[a, b]$ thì f đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên đó, tức là*

$$\exists x_0, x_0' \in [a, b] \quad f(x_0) = \sup_{x \in [a,b]} f(x), \quad \text{và} \quad f\left(x_0'\right) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Định lý 2.3.6 (Định lý Bolzano – Cauchy thứ nhất)**.** [1] *Giả sử $f \in C[a, b]$ và $f(a) f(b) < 0$. Khi đó $\exists c \in (a, b) \quad f(c) = 0$.*

Định lý 2.3.7 (Định lý Bolzano – Cauchy thứ hai)**.** *Nếu $f \in C[a, b]$ thì f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, tức là $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ở giữa $f(a)$ và $f(b)$, $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \lambda$.*

Chú ý. f liên tục đều trên A thì liên tục trên A, điều ngược lại chưa chắc đúng.

Định lý 2.3.8 (Cantor)**.** *Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì liên tục đều trên đó.*

2.3.5 Hàm số liên tục đều

Định nghĩa 2.3.5. *$f : A \to \mathbb{R}$ gọi là liên tục đều trên A nếu*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, x' \in A \quad \left|x - x'\right| < \delta \to \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Nhận xét. Hàm liên tục đều trên A thì liên tục trên đó.

[1] Ý nghĩa hình học: nếu một đường cong liên tục đi từ một phía của trục x sang phía kia thì nó cắt trục này.

2.3.6 Hàm đơn điệu, hàm ngược và tính liên tục của chúng

Phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa 2.3.6. *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

a) Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$ thì a gọi là điểm gián đoạn loại một của f.

b) Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) \neq f(b)$ thì b gọi là điểm gián đoạn loại một của f.

c) Với $x_0 \in (a, b)$, nếu tồn tại hai giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, và có một giới hạn khác $f(x_0)$ thì x_0 gọi là điểm gián đoạn loại một.

Điểm gián đoạn của hàm số không phải là điểm gián đoạn loại một được gọi là điểm gián đoạn loại hai.

Định lý 2.3.9. *Mọi điểm gián đoạn của hàm đơn điệu đều là điểm gián đoạn loại một.*

Quan hệ giữa tính đơn điệu và tính liên tục

Định lý 2.3.10. *Cho $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $f \in C[a, b] \Leftrightarrow$ tập giá trị của f là đoạn với hai đầu mút $f(a)$ và $f(b)$.*

Tính liên tục của hàm ngược

Định lý 2.3.11. *Cho f là hàm tăng thực sự và liên tục trên $[a, b]$. Khi đó f có hàm ngược f^{-1} cũng tăng thực sự và liên tục trên $[f(a), f(b)]$.*

Chú ý. Định lý trên còn đúng khi f là hàm giảm thực sự, hoặc thay $[a, b]$ bởi (a, b).

2.3.7 Tính liên tục của hàm sơ cấp

Định nghĩa 2.3.7. *a) Các hàm hữu tỉ, hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm lượng giác, và các hàm ngược của chúng gọi là các hàm sơ cấp cơ bản.*

b) Các hàm nhận được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng cách thực hiện một số hữu hạn các phép cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn, và phép hợp gọi là hàm sơ cấp.

Định lý 2.3.12. *Mọi hàm sơ cấp liên tục trên miền xác định của chúng.*

2.3.8 Áp dụng tính liên tục của hàm số vào việc khảo sát giới hạn hàm số

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$. Đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, tức là $\ln(1+x) \sim x$ khi $x \to 0$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0)$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

2.3.9 Bổ sung

Định nghĩa 2.3.8. *Ta nói $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện Hölder (còn gọi là điều kiện Lipschitz cấp α) trên A nếu*

$$\exists M, \alpha > 0 \quad \left|f(x) - f\left(x'\right)\right| \leq M\left|x - x'\right|^\alpha \quad \forall x, x' \in A.$$

Nhận xét. Nếu f thỏa mãn điều kiện Lipschitz cấp α trên A thì f liên tục đều trên A.

Chứng minh. dk-holder-lt-deu $\square$

Chương 3

Phép tính vi phân hàm một biến

3.1 Đạo hàm và vi phân cấp một

3.1.1 Khái niệm hàm khả vi

Định nghĩa 3.1.1. *Cho hàm số f xác định trong một lân cận U của $x_0 \in \mathbb{R}$. Cho x_0 một số gia Δx khá bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó số $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)$ gọi là số gia của đối số ứng với số gia đối số Δx tại x_0.*

Nếu tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó gọi là đạo hàm của f theo x tại x_0, kí hiệu $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3.1}$$

Khi đó f gọi là khả vi tại x_0.

Định nghĩa 3.1.2. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ gọi là khả vi trên U nếu f khả vi tại mọi điểm thuộc U. Khi đó hàm số*

$$\begin{aligned} f' : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

gọi là đạo hàm của f trên U.

Nếu f' liên tục trên U, ta nói f khả vi liên tục trên U, kí hiệu $f \in C^1(U)$.

Định lý 3.1.1. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \in U$. Khi đó $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h)h$ trong đó $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$.*

Hệ quả 3.1.1. *Nếu f khả vi tại x_0 thì f liên tục tại đó.*

Chú ý. Nếu f liên tục tại x_0 thì chưa chắc f khả vi tại đó.

3.1.2 Các quy tắc tính đạo hàm

Định lý 3.1.2. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$, các hàm $f, g : U \to \mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \in U$. Khi đó các hàm $f \pm g$, cf với $c \in \mathbb{R}$, fg và $\frac{f}{g}$ (nếu $g'(x_0) \neq 0$) cũng khả vi tại x_0 và*

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

c) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

3.1.3 Đạo hàm hàm hợp và đạo hàm hàm ngược

Định lý 3.1.3. *Cho $U, V \subset \mathbb{R}$, $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}$. Khi đó nếu f khả vi tại $x_0 \in U$, và g khả vi tại $y_0 = f(x_0) \in V$, thì $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$.*

Định lý 3.1.4. *Giả sử*

a) *$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ liên tục và đơn điệu thực sự trên (a, b).*

b) *$f'(x_0) \neq 0$ tại $x_0 \in (a, b)$.*

Khi đó hàm ngược $g = f^{-1}$ của f có đạo hàm tại $y_0 = f(x_0)$ và $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

3.1.4 Đạo hàm của hàm cho bởi tham số

Giả sử $y = f(x)$ là hàm cho bởi tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases}$, $t \in \left(\alpha, \beta\right)$ trong đó các hàm $x = x(t)$ và $y = y(t)$ khả vi tại $t = t_0$ với $x'(t_0) \neq 0$. Hơn nữa, giả sử $x = x(t)$ liên tục và đơn điệu thực sự trên $\left(\alpha, \beta\right)$. Khi đó, theo Định lý 3.1.4, hàm $x = x(t)$ có hàm ngược $t = t(x)$ khả vi tại $x_0 = x(t_0)$ và $t'_x(x_0) = \dfrac{1}{x'(t_0)}$. Lấy đạo hàm của hàm y theo x tại x_0 theo quy tắc đạo hàm hàm hợp ta được

$$y'_x(x_0) = y'(t_0) \cdot t'_x(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

3.1.5 Bảng đạo hàm một số hàm sơ cấp

1) $(c)' = 0$, c là hằng số

2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

4) $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$

5) $(e^x)' = e^x$

6) $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$

7) $\left(\log_a|x|\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

8) $(\sin x)' = \cos x$

9) $(\cos x)' = -\sin x$

10) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

11) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14) $(\text{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

3.1.6 Đạo hàm một phía

Định nghĩa 3.1.3. *a) Cho $f:[x_0,b)\to\mathbb{R}$. Đạo hàm bên phải của f tại x_0*

$$f'\left(x_0^+\right) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.

b) Cho $f:(a,x_0]\to\mathbb{R}$. Đạo hàm bên trái của f tại x_0

$$f'\left(x_0^-\right) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại hữu hạn.

Cho U là một lân cận của x_0. $f:U\to\mathbb{R}$ khả vi tại $x_0 \Leftrightarrow f'\left(x_0^+\right) = f'\left(x_0^-\right)$.

3.1.7 Các định lý cơ bản của hàm khả vi

Định nghĩa 3.1.4. *Cho tập mở $U\subset\mathbb{R}$, $f:U\to\mathbb{R}$. Ta nói f đạt cực đại địa phương (tương ứng, cực tiểu) tại $x_0\in U$ nếu $\exists\delta>0 \quad \left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)\subset U$ và $f(x)\le f(x_0)$ (tương ứng $\ge$) $\forall x\in\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$.*

Điểm x_0 mà tại đó f đạt cực đại dịa phương hoặc cực tiểu địa phương gọi chung là điểm cực trị của f.

Định lý 3.1.5 (Fermat)**.** *Cho tập mở $U\subset\mathbb{R}$. Nếu $f:U\to\mathbb{R}$ đạt cực trị tại $c\in U$, và tồn tại $f'(c)$ thì $f'(c)=0$.*

Chú ý. Điểm c tại đó $f'(c)=0$ gọi là điểm dừng của f. Như vậy nếu $f:U\to\mathbb{R}$ (U mở) khả vi trên U thì các điểm cực trị của f phải nằm trong số các điểm dừng của f.

Định lý 3.1.6 (Rolle)**.** *Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Nếu* *a)* $f \in C[a,b]$

b) *f khả vi trên* (a,b)

c) $f(a) = f(b)$

thì $\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = 0.$

Định lý 3.1.7 (Lagrange)**.** *Cho* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Nếu*

a) $f \in C[a,b]$

b) *f khả vi trên* (a,b)

thì $\exists c \in (a,b)$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{3.2}$$

Chú ý.

- Định lý Rolle là trường hợp riêng của định lý Lagrange.
- Công thức (3.2) gọi là công thức số gia hữu hạn Lagrange.

Hệ quả 3.1.2. *Cho* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *liên tục trên* $[a,b]$ *và khả vi trên* (a,b)*. Khi đó*

a) *Nếu* $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$ *thì f là một hằng số trên* $[a,b]$*.*

b) *Nếu* $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$ *(tương ứng* $<$*) thì f tăng (tương ứng, giảm) thực sự trên* $[a,b]$*.*

Định lý 3.1.8 (Cauchy)**.** *Cho* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Nếu*

a) $f, g \in C[a,b]$

b) f, g *khả vi trên* (a,b)

thì $\exists c \in (a,b) \quad [f(b) - f(a)]\, g'(c) = \left[g(b) - g(a)\right] f'(c).$

Nói riêng, nếu $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ *thì công thức trên có dạng* $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$*.*

Chú ý. Định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy với $g(x) = x$.

3.2 Đạo hàm cấp cao

3.2.1 Định nghĩa đạo hàm cấp cao

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$. $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi trên U. Khi đó xác định hàm

$$\begin{aligned} f' : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.2.1. *Nếu tại $x_0 \in U$, hàm $f' : U \to \mathbb{R}$ khả vi thì ta gọi đạo hàm của f' tại x_0 là đạo hàm cấp hai của f tại x_0, kí hiệu $f''(x_0) = \left(f'\right)'(x_0)$.*

Khi đó ta cũng nói f khả vi cấp hai tại x_0.

Tổng quát, giả sử tồn tại đạo hàm cấp $n-1$ của f trên U, khi đó xác định hàm $f^{(n-1)} : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$. Nếu $f^{(n-1)}$ khả vi tại $x_0 \in U$ thì đạo hàm của $f^{(n-1)}$ tại x_0 là đạo hàm cấp n của f tại x_0, kí hiệu $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$. Ta cũng nói f khả vi cấp n tại x_0. Đạo hàm của f gọi là đạo hàm cấp một của f.

Quy ước đạo hàm cấp không của f chính là f.

Chú ý. Đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái cấp cao được định nghĩa tương tự.

$$\begin{aligned} f''\left(x_0^+\right) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \\ f''\left(x_0^-\right) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}, \quad ... \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.2.2. *Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$. Nếu $f : U \to \mathbb{R}$ khả vi cấp n trên U và hàm $f^{(n)} : U \to R$, $x \mapsto f^{(n)}(x)$ liên tục trên U, ta nói f khả vi liên tục tới cấp n trên U, kí hiệu $f \in C^n(U)$.*

Nếu $f \in C^n(U)\ \forall n$, ta nói f khả vi vô hạn trên U, kí hiệu $f \in C^\infty(U)$.

Mệnh đề 3.2.1. *Đạo hàm cấp cao của một số hàm sơ cấp*

$$\begin{aligned} \left(x^\alpha\right)^{(n)} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^{\alpha-n} \\ \left(e^x\right)^{(n)} &= e^x, \quad \left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad (a > 0) \\ (\ln x)^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

3.2.2 Công thức Leibniz

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}$. f, g khả vi cấp n trên U. Khi đó

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x). \tag{3.3}$$

3.2.3 Công thức Taylor

Định lý 3.2.1 (Công thức Taylor với số dư dạng Lagrange)**.** *Giả sử* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *khả vi đến cấp* $n+1$ *trên* (a,b)*,* $x_0 \in (a,b)$*. Khi đó* $\forall x \in (a,b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{r_n(x)} \tag{3.4}$$

trong đó c *ở giữa* x_0 *và* x*.*

Định lý 3.2.2. *Cho tập mở* $U \subset \mathbb{R}$*,* $f : U \to \mathbb{R}$ *khả vi đến cấp* n *trong lân cận* V *nào đó của* $x_0 \in U$ *và* $f^{(n)}(x)$ *liên tục tại* x_0*. Khi đó ta có khai triển Taylor của* f *trong lân cận* V *của* x_0

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left[(x-x_0)^n\right]. \tag{3.5}$$

Chú ý. Khai triển Taylor của $f(x)$ trong lân cận của $x_0 = 0$ gọi là khai triển Maclaurin

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x).$$

Hệ quả 3.2.1. *Khai triển Taylor / Maclaurin của một số hàm sơ cấp*

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}_{o(x^n)}$

b) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \underbrace{(-1)^n \frac{\cos c}{(2n+1)!}x^{2n+1}}_{o(x^{2n})}$

c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{\cos c}{(2n+2)!}x^{2n+2}}_{o(x^{2n+1})}$

d) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+c)^{n+1}}x^{n+1}}_{o(x^n)}$

e) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1}}_{o(x^n)}.$

3.2.4 Ứng dụng đạo hàm vào việc tìm giới hạn. Quy tắc l'Hospital

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Định lý 3.2.3 (l'Hospital)**.** *Giả sử* f, g *khả vi trong một lân cận của* x_0*,* $f(x_0) = g(x_0) = 0$*, và* $g'(x) \neq 0$ *trong lân cận đó (có thể ngoại trừ* x_0*). Khi đó* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

Chú ý.

- Nếu cả f' và g' vẫn tiến đến 0 khi $x \to x_0$ và chúng là các hàm khả vi trong một lân cận của x_0, đồng thời $g''(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ điểm x_0) thì ta lại có thể áp dụng quy tắc l'Hospital một lần nữa.

  Tổng quát, nếu trong một lân cận nào đó của x_0, các hàm f và g khả vi cấp n và $g^{(n)}(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ điểm x_0), đồng thời

  $$f(x_0) = g(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0) = 0$$

  thì bằng cách áp dụng quy tắc l'Hospital n lần ta có

  $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

  nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

- Quy tắc l'Hospital vẫn đúng khi xét các giới hạn một phía

Định lý 3.2.4. *Cho* f, g *xác định trên* (a, ∞) *sao cho*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

b) f, g *khả vi trên* (a, ∞) *và* $g'(x) \neq 0$ *trên đó*

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Khi đó $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Định lý 3.2.5. *Giả sử* f, g *là hai hàm xác định trên một lân cận* U *của* x_0 *sao cho*

a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

b) f, g *khả vi trên* U *và* $g'(x) \neq 0\ \forall x \in U\backslash\{x_0\}$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Chú ý.

- Kết luận trên vẫn đúng khi
  - $L = \infty$
  - $c = \pm\infty$
  - $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -\infty$.
- Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ thì cũng chưa thể kết luận không tồn tại $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Các dạng vô định khác

Quy tắc l'Hospital còn được sử dụng để khử các dạng vô định $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞. Chẳng hạn $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$, và $\ln f^g = g \ln f$.

Chương 4

Tích phân một lớp

4.1 Nguyên hàm và tích phân không xác định

4.1.1 Định nghĩa

Cho $f \in C(a, b)$. Hàm $F(x)$ gọi là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) nếu

$$F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in (a, b).$$

Tập hợp các nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) gọi là tích phân không xác định của $f(x)$ trên khoảng đó, ký hiệu

$$\int f(x)\,dx.$$

Khi đó, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên (a, b) thì

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

trong đó C là hằng số tùy ý.

4.1.2 Bảng tích phân không xác định cơ bản

1) $\displaystyle\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$ 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0)$

3) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 0),$ $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

4) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

5) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\mathrm{arccot} x + C$

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

4.1.3 Tính chất

4.1.4 Phép đổi biến trong tích phân không xác định

Phương pháp đưa vào biến mới

Nếu $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$ thì $\displaystyle\int f(u)\,du = F(u) + C$, trong đó $u = \varphi(x)$.

Quy tắc đổi biến số

Xét $I = \displaystyle\int f(x)\,dx$. Giả sử $x = \varphi(t)$ trong đó $\varphi(t)$ là hàm khả vi liên tục và có hàm ngược $t = \omega(x)$ trên khoảng (α, β) nào đó. Khi đó nếu

$$\int f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)\,dt = G(t) + C$$

thì

$$I = G[\omega(x)] + C.$$

4.1.5 Công thức tích phân từng phần

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm khả vi thì

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

4.1.6 Tích phân của hàm hữu tỷ

4.1.7 Tích phân của biểu thức có chứa căn thức

Phép thế Euler

Tính $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ trong đó $R(u,v)$ là biểu thức hữu tỷ đối với u, v.

Tích phân của biểu thức vi phân nhị thức

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$.

Tích phân dạng $\int R\left(x, \sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $R(u,v)$ là biểu thức hữu tỷ theo u, v.

4.1.8 Tích phân của hàm lượng giác

$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$ trong đó $R(u,v)$ là biểu thức hữu tỷ đối với u, v.

4.2 Định nghĩa tích phân xác định

4.2.1 Phân hoạch của một đoạn

Chia $[a,b]$ thành n đoạn con $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, bởi các điểm chia tùy ý

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

4.2.2 Tổng tích phân

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a,b]$. Tổng $\sigma\left(f,\xi\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ trong đó $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, được gọi là tổng tích phân của $f(x)$ trên $[a,b]$ ứng với các điểm chia x_i và cách chọn các điểm ξ_i.

4.2.3 Định nghĩa tích phân xác định

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sigma\left(f, \xi\right) = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i,$$

thì giới hạn đó gọi là tích phân của $f(x)$ trên $[a, b]$, ký hiệu

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

và ta nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Vậy

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i. \tag{4.1}$$

4.3 Các điều kiện để hàm khả tích

4.3.1 Điều kiện cần

4.3.2 Điều kiện cần và đủ của hàm khả tích

Với mỗi cách chia $[a, b]$ bởi các điểm chia x_i, ký hiệu

$$m_i = \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)$$

và đặt

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i, \quad \overline{S}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

$$\omega_i = M_i - m_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Điều kiện cần và đủ để $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ là

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i\Delta x_i = 0, \tag{4.2}$$

hay tương đương với điều kiện

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \underline{S}_n = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \overline{S}_n.$$

4.3.3 Các tính chất của của tích phân xác định

4.4 Các lớp hàm khả tích

Các hàm liên tục trên $[a, b]$; các hàm bị chặn, có một số hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a, b]$; và các hàm đơn điệu bị chặn trên $[a, b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

4.5 Các định lý về giá trị trung bình

1) Định lý trung bình thứ nhất

a) Cho $f \in C[a, b]$. Khi đó

$$\exists c \in (a, b) \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).$$

b) Cho $f(x)$, $\varphi(x)$ khả tích trên $[a, b]$, $\varphi(x)$ không đổi dấu trên (a, b). Đặt $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Khi đó

$$\exists \mu,\ m \le \mu \le M \quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Hơn nữa, $f \in C[a, b] \Rightarrow \exists c \in [a, b] \quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c) \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

2) Định lý trung bình thứ hai: Cho $f(x)$, $\varphi(x)$ khả tích trên $[a, b]$, và $\varphi(x)$ đơn điệu trên (a, b).

a) $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi\left(a^+\right) \int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi\left(b^-\right) \int_\xi^b f(x)\,dx$, trong đó $a \le \xi \le b$.

b) Nếu $\varphi(x)$ đơn điệu giảm, không âm trên (a, b) thì

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi\left(a^+\right) \int_a^\xi f(x)\,dx, \quad a \le \xi \le b.$$

c) Nếu $\varphi(x)$ đơn điệu tăng, không âm trên (a, b) thì

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi\left(b^-\right) \int_\xi^b f(x)\,dx, \quad a \le \xi \le b.$$

4.6 Nguyên hàm và tích phân xác định

4.6.1 Tích phân với cận trên thay đổi

Giả sử $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$. Đặt $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b.$

a) Nếu $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ thì $F \in C[a, b]$.

b) $f \in C[a, b] \Rightarrow F \in C^1[a, b]$ và $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

4.6.2 Công thức Newton – Leibniz

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn đó, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

4.6.3 Phép đổi biến số trong tích phân xác định

Giả sử

a) $f \in C[a, b]$.

b) $\varphi \in C^1\left[\alpha, \beta\right]$ sao cho $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi\left(\beta\right)$.

c) $f \circ \varphi \in C\left[\alpha, \beta\right]$.

Khi đó $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right] \cdot \varphi'(t)\,dt$.

4.6.4 Công thức tích phân từng phần

Nếu $f, g \in C^1[a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \left[f(x)\,g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx$.

4.7 Ứng dụng của tích phân xác định

4.7.1 Tính độ dài cung

a) Nếu AB là cung tròn có phương trình trong hệ tọa độ vuông góc là $y = y(x)$, $a \le x \le b$, trong đó $y(x)$ là hàm khả vi liên tục, thì có độ dài

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left[y'(x)\right]^2}dx.$$

b) Nếu cung AB được cho bởi phương trình tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, trong đó $x(t)$, $y(t)$ khả vi liên tục thì

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[x'(t)\right]^2 + \left[y'(t)\right]^2}dt.$$

c) Nếu cung AB có phương trình trong tọa độ cực là $\rho = \rho\left(\varphi\right)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, trong đó $\rho\left(\varphi\right)$ là hàm khả vi liên tục thì

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2\left(\varphi\right) + \left[\rho'\left(\varphi\right)\right]^2}d\varphi.$$

4.7.2 Tính diện tích hình phẳng

a) Diện tích của hình thang cong được giới hạn bởi hai đường cong liên tục $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$, $(a < b)$:

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx.$$

b) Nếu miền phẳng được giới hạn bởi đường cong C kín, đơn, trơn từng khúc được cho bởi phương trình tham số

$$x = x(t)\,,\ y = y(t)\,,\quad t \in \left[\alpha, \beta\right]$$

trong đó $x(t)$, $y(t)$ khả vi liên tục, sao cho khi t biến thiên từ α đến β thì điểm $M \in C$, có tọa độ $(x(t), y(t))$ biến thiên trên C theo chiều ngược kim đồng hồ. Khi đó diện tích của miền phẳng có các công thức tính

$$S = -\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x(t)\,y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)\right] dt.$$

c) Diện tích trong tọa độ cực: Hình quạt OAB được giới hạn bởi đường cong liên tục $\rho = \rho\left(\varphi\right)$ và hai nửa đường thẳng $\varphi = \alpha$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, có diện tích

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\left(\varphi\right) d\varphi.$$

4.7.3 Tính thể tích của một vật thể

Cho một vật thể sao cho khi cắt vặt bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x, thiết diện tạo thành có diện tích là $S(x)$, $a \le x \le b$, trong đó $S(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó thể tích của vật

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

4.7.4 Thể tích của một vật thể tròn xoay

được tạo thành khi quay quanh Ox hình phẳng $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$, trong đó $f \in C[a, b]$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

4.8 Tích phân phụ thuộc tham số

4.8.1 Tích phân phụ thuộc tham số cận hằng số hữu hạn

Định nghĩa 4.8.1. *Cho hàm số* $f(x, y)$, $x \in [a, b]$, $y \in Y \subset \mathbb{R}$. *Tích phân* $I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$, *nếu tồn tại, gọi là tích phân phụ thuộc tham số y của* $f(x, y)$ *trên* $[a, b]$.

Mệnh đề 4.8.1 (Tính liên tục)**.** *Nếu f liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *thì* $I \in C[c, d]$.

Mệnh đề 4.8.2 (Tính khả vi)**.** *Giả sử*

a) $\forall y \in [c, d]$, $f(x, y)$ *liên tục theo biến* $x \in [a, b]$.

b) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$.

Khi đó $I'(y) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx, \quad y \in [c, d]$.

Mệnh đề 4.8.3 (Tính khả tích)**.** *Nếu f liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *thì*

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

4.8.2 Tích phân phụ thuộc tham số cận biến thiên hữu hạn

Định nghĩa 4.8.2. *Cho* $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$ *liên tục, và* $\forall y \in [c, d]$, $f(x, y)$ *khả tích theo x trên* $[a, b]$. *Khi đó* $I(y) = \displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx$ *gọi là tích phân phụ thuộc tham số có cận thay đổi.*

Mệnh đề 4.8.4 (Tính liên tục)**.** *Nếu f liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$ *thì* $I \in C[c, d]$.

Mệnh đề 4.8.5 (Tính khả vi)**.** *Giả sử*

a) $\forall y \in [c, d]$, $f(x, y)$ *liên tục theo x trên* $[a, b]$.

b) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *liên tục trên* $[a, b] \times [c, d]$.

c) α, β *khả vi trên* $[c, d]$.

Khi đó

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + f\left[\beta(y), y\right] \times \beta'(y) - f[\alpha(y), y] \times \alpha'(y), \quad y \in [c, d].$$

4.9 Bổ sung

Mệnh đề 4.9.1. *a) Nếu $f(x)$ không âm, khả tích trên $[a, b]$ thì* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

b) ([1], Tập 3, 1.4.15) Nếu $f(x)$ không âm, liên tục trên $[a, b]$ và $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ thì $f \equiv 0$ trên $[a, b]$.

Chứng minh ý (b). kaczor-3-1.4.15 □

Hệ quả 4.9.1. *a) Nếu f, g khả tích trên $[a, b]$ và $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

b) Nếu $f, g \in C[a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$, và $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ thì $f \equiv g$ trên $[a, b]$.

Chương 5

Chuỗi hàm và dãy hàm

5.1 Các tính chất của tổng của chuỗi hàm và giới hạn của dãy hàm

5.1.1 Tính khả tích

a) Nếu các hàm $f_n(x)$, $n = 1, 2, ...,$ khả tích trên $[a, b]$ và dãy hàm $\{f_n(x)\}$ hội tụ đều đến hàm giới hạn $f(x)$ trên đoạn đó thì $f(x)$ cũng khả tích và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{5.1}$$

5.2 Bổ sung

Định lý 5.2.1 (Định lý xấp xỉ Weierslrass, [1], Tập 2, 3.1.33)**.** *Cho $f \in C[a, b]$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại đa thức P sao cho*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Phần II

Các dạng bài tập giải tích

Chương 6

Dãy số

Đối với một dãy số $\{u_n\}$, thường ta cần khảo sát miền giá trị và tính đơn điệu của dãy khi n đủ lớn. Từ đó làm cơ cơ sở xác định tính hội tụ của dãy.

6.1 Công thức truy hồi: dạng đơn giản

Xét dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

a) u_1 cho trước.

b) Mỗi phần tử tiếp theo của dãy chỉ phụ thuộc vào phần tử ngay trước nó.

$$u_{n+1} = f(u_n), \ n = 1, 2, ... \tag{6.1}$$

Xét hàm $f(x)$. Giả sử tìm được khoảng (a, b) sao cho f đóng trên khoảng này

$$f(x) \in (a, b), \ \forall x \in (a, b).$$

Khi đó

a) Nếu có $u_{n_0} \in (a, b)$ thì $u_n \in (a, b), \ \forall n \geq n_0$.

b) Nếu $f'(x) > 0, \ \forall x \in (a, b)$, và $u_{n_0} \in (a, b)$ thì dãy $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ đơn điệu. Cụ thể, nếu $u_{n_0} \leq u_{n_0+1}$ thì dãy tăng, và nếu $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$ thì dãy giảm.

c) Nếu $f'(x) < 0, \ \forall x \in (a, b)$ thì dãy chẵn $\{u_{2n}\}$ và dãy lẻ $\{u_{2n-1}\}$ đều đơn điệu.

Gợi ý chứng minh. b) $u_{n+1} \geq u_n \Rightarrow u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$.

c) Xét $g(x) = f[f(x)]$. Khi đó $g'(x) = f'[f(x)]f'(x) > 0$, và $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f[f(x_n)] = g(x_n)$.

□

Chú ý. Nên dò khoảng (a, b) bằng cách tính thử nhiều phần tử đầu tiên của dãy, và trong các bài tập, đề thi, khoảng này thường khá "đẹp".

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$. Khi đó

d) $a \leq L \leq b$.

e) Nếu $f \in C[a, b]$ thì qua giới hạn hai vế của (6.1), ta có $L = f(L)$.

Gợi ý chứng minh. d) Xem Hệ quả 2.1.2.

e) Áp dụng công thức (2.7) cho hàm liên tục f tại L, là điểm tụ của đoạn $[a, b]$. Sau đó áp dụng Định lý 2.2.1.

□

Định lý 6.1.1 (Nguyên lý ánh xạ co)**.** *Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_{n+1} = f(u_n)$, $a \leq u_0 \leq b$. Giả sử hàm số $f(x)$ co trên $[a, b]$ tức là*

a) $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in [a, b]$, tức là f đóng trên $[a, b]$.

b) $\exists q \in (0, 1)$, $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$, $\forall x, y \in [a, b]$.

Khi đó

a) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L \in [a, b]$ và $L = f(L)$.

b) Với $n \geq 1$

$$|u_n - L| \leq \frac{q^n}{1-q}|u_1 - u_0| \tag{6.2}$$

$$|u_n - L| \leq \frac{q}{1-q}|u_n - a_{u-1}|. \tag{6.3}$$

Chứng minh. a) $|u_{n+k} - u_n| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+k}(u_i - u_{i-1})\right| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+k}|u_i - u_{i-1}|$.

$|u_i - u_{i-1}| = |f(u_{i-1}) - f(u_{i-2})| \leq q|u_{i-1} - u_{i-2}| \leq q^2|u_{i-2} - u_{i-3}| \leq ... \leq q^{i-1}|u_1 - u_0|$.

$|u_{n+k} - u_n| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} q^{i-1} |u_1 - u_0| = q^n \frac{1-q^k}{1-q} |u_1 - u_0| \leq \frac{q^n}{1-q} |u_1 - u_0| \xrightarrow{n\to\infty,\, k>0}$ $0 \Rightarrow \{u_n\}$ là dãy Cauchy. Theo nguyên lý hội tụ Cauchy (Định lý 2.1.10), $\exists \lim_{n\to\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$, hơn nữa $a \leq L \leq b$.

Từ điều kiện (b), ta có f liên tục đều trên $[a, b]$, nên f liên tục trên đó. Theo kết quả ở trên ta có $L = f(L)$.

- Trong ý (a) ta đã có $|u_{n+k} - u_n| \leq \dfrac{q^n}{1-q} |u_1 - u_0|$. Cho $k \to \infty$, ta được (6.2).

$\square$

Chú ý. Hệ số q trong điều kiện (b) của Định lý 6.1.1 gọi là hệ số co của f. Một trường hợp làm thỏa mãn điều kiện này, là

$$\left|f'(x)\right| \leq q < 1,\ \forall x \in [a, b]. \tag{6.4}$$

Thật vậy theo định lý Lagrange, $\exists c$ ở giữa x và y sao cho $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Suy ra $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq q|x - y|$.

Các dạng sau gồm Định lý 6.1.2, Mệnh đề 6.1.1 thì ít gặp hơn

Định lý 6.1.2 (Phương pháp Newton trong giải tích số). *Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, $a_0 \in [\alpha, \beta]$ trong đó*

a) f', f'' không đổi dấu trên $[\alpha, \beta]$; và

b) $f(\alpha) f(\beta) < 0$; và

c) $f(a_0) f'' > 0$

Khi đó

a) Dãy (a_n) tăng (tương ứng giảm) nếu $f'f'' < 0$ (tương ứng $>$)

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, và L là nghiệm duy nhất của f trên $[\alpha, \beta]$

c)

$$|a_n - L| \leq \frac{M}{2m}|a_n - a_{n-1}|^2,\ \forall n \geq 1$$
$$|a_n - L| \leq \frac{|f(a_n)|}{m},\ \forall n$$

trong đó $M \geq |f''(x)|$, $0 < m \leq |f'(x)|$, $\forall x \in [a, b]$

Chú ý (Phương pháp Newton cải biên)**.** Nếu $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_0)}$, thì các các mục trong Định lý 6.1.2 vẫn đúng trừ kết luận (c).

Mệnh đề 6.1.1 (Phương pháp dây cung trong giải tích số)**.** *Cho dãy (x_n) xác định bởi $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(r)}(a_n - r)$, trong đó* *a)* f', f'' *không đổi dấu trên* $[x_0, r]$*; và*

b) $f(x_0)\,f(r) < 0$*; và*

c) $f'f'' > 0$ *ứng với* $x_0 < r$*, và ngược lại*

Khi đó

a) Dãy (a_n) *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f'f'' > 0$ *(tương ứng* $<$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và* L *là nghiệm duy nhất của* f *trên* $[x_0, r]$

c)

$$|a_n - L| \le \left(\frac{M}{m} - 1\right)|a_n - a_{n-1}|^2,\ \forall n \ge 1$$
$$|a_n - L| \le \frac{|f(a_n)|}{m}, \forall n$$

trong đó $0 < m \le |f'(x)| \le M,\ \forall x \in [a_0, r]$

6.2 Dãy có công thức tổng quát

u_n thường có dạng tổng hoặc tích của một dãy.

Cho a_n có công thức chỉ phụ thuộc n.

a) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Khi đó

- Nếu $a_n \ge 0,\ \forall n \ge n_0$ thì $u_{n+1} = u_n + a_{n+1} \ge u_n,\ \forall n \ge n_0 - 1$.
- Để xác định tính hội tụ của dãy, ta nên tìm hiểu kiến thức về sự hội tụ của chuỗi số dương.

b) $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Khi đó nếu $a_n > 0\ \forall n \ge 1$, và $a_n \ge 1,\ \forall n \ge n_0$ thì $u_{n+1} = u_n a_{n+1} \ge u_n,\ \forall n \ge n_0 - 1$. Ngoài ra

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k.$$

6.3 Đề chính thức

Bài 1 (2023). Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) = \left(1 + \frac{1}{4^1}\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{4^n}\right), \quad n > 1.$$

a) Tìm tất cả $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $u_n > \frac{5}{4}$. b) Chứng minh $u_n \leq 2023,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

c) Chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

d) (A) Xác định giới hạn của dãy chính xác đến 1 chữ số sau dấu phẩy thập phân.

Gợi ý. Định lý 2.1.11, Hệ quả 3.1.2, 3.2.1.

(b), (d): dùng khai triển Taylor của $\ln(1+x)$ tại $x_0 = 0$ với số dư dạng Lagrange tới cấp $n = 1$ và 2, xét dấu của phần dư khi $x > 0$ để so sánh $\ln(1+x)$ với phần chính. □

Bài giải. *github:* 2023-gt-day □

Nhận xét.

- $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a^k}\right)$, $a > 0$, hội tụ $\Leftrightarrow a > 1$. Một số dãy tương tự và hội tụ $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k!}\right)$.
- Dãy tương tự và phân kỳ $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Bài 2 (2022)**.** Cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > \frac{3}{2}$.

b) Chứng minh $\{u_n\}$ hội tụ.

c) (A) Chứng minh giới hạn của dãy số là một số vô tỷ.

Gợi ý. b) *Cách 1:* so sánh (làm trội) u_n với tổng của một dãy có thể rút gọn được.

Cách 2: khai triển Taylor của e^x tại $x_0 = 0$ với số dư dạng Lagrange tới bậc n rồi đánh giá phần dư.

c) Phương pháp phản chứng.

□

Bài giải. *github:* 2022-gt-day □

Nhận xét. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ hội tụ, còn $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ phân kỳ.

Bài 3 (2019)**.** Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1+x_n) - \dfrac{2x_n}{2+x_n}$. Chứng minh

a) Dãy $\{x_n\}$ không âm.

b) $\exists c \in (0,1)\,,\ \left|x_{n+1} - x_n\right| \le c\left|x_n - x_{n-1}\right|\,,\ \forall n \ge 2.$

c) $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 4 (2018)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2018}x_n^2 + \dfrac{2017}{2018}x_n$.

a) Chứng minh (x_n) tăng, không bị chặn trên.

b) Chứng minh $\dfrac{x_n}{x_{n+1}-1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1}-1}\right)$

c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{x_{k+1}-1}$

Chú ý. Tổng quát cho $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = bx_n^2 + (1-b)\,x_n$ với $0 < b < 1$.

Bài 5 (2017)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1$.

Bảng A: Chứng minh (u_n) hội tụ, và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bảng B: Chứng minh

a) $-1 < u_n < 0,\ \forall n \ge 2$

b) (u_n) có giới hạn, và giới hạn đó là $1 - \sqrt{3}$

Bài 6 (2016)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

a) Tìm a để (u_n) hội tụ

b) Tìm giới hạn của (u_n) khi nó hội tụ

Chú ý. Tổng quát cho $u_{n+1} = u_n + (u_n - b)^2$.

Bài 7 (2015)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$, $n \ge 0$.

a) Chứng minh (a_n) đơn điệu

b) Cho $a_0 = 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

c) Tìm tất cả giá trị của a_0 để (a_n) có giới hạn hữu hạn. Khi đó tìm $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$

Bài 8 (2014)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$, $a \ge 0$. Tìm a để (u_n) hội tụ, và tìm giới hạn đó.

HD. Bình phương hệ thức rồi khử → tính u_n^2 theo a □

Bài 9 (2013)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = a \in \mathbb{R}, \quad (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài 10 (2012)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} a_n - \dfrac{2}{n}$, $n \geq 1$. Tìm α để dãy (a_n) hội tụ.

Bài 11 (2011)**.** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$. Chứng minh

a) Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, và $f'(x)$ đồng biến.

b) Dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ thỏa mãn $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $\forall n$.

Bài 12 (2011)**.** Cho hai dãy (x_n), (y_n)thỏa mãn $x_{n+1} \geq \dfrac{x_n + y_n}{2}$, và $y_{n+1} \geq \sqrt{\dfrac{x_n^2 + y_n^2}{2}}$ với $n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh các dãy $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ là những dãy đơn điệu tăng.

b) Giả sử (x_n), (y_n) bị chặn. Chứng minh chúng cùng hội tụ về một điểm.

Bài 13 (2011)**.** Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha+n} < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\beta+n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm $\min|\alpha - \beta|$.

Bài 14 (2010)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n\left(1 + x_n^{2010}\right)$, $n \geq 1$.

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x_1^{2010}}{x_2} + \dfrac{x_2^{2010}}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)$.

Bài 15 (2009)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = (n-1)\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right)$, $n \geq 3$. Tính x_{2009}.

Bài 16 (2009)**.** Cho hai dãy (x_n), (y_n) xác định bởi

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}},\ n \geq 1$$

Chứng minh $x_n, y_n \in (2, 3)$ với $n \geq 2$, và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Bài 17 (2008)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n$, $n \geq 1$. Tính a_{2008}.

Bài 18 (2008)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{2008} + 2^{2008} + \cdots + n^{2008}}{n^{2009}}$.

Bài 19 (2007)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_0 = 2007$, $x_n = -2007\dfrac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n}$, $n \geq 1$.

Tìm liên hệ giữa x_n, x_{n-1} với $n \geq 1$. Từ đó tính tổng $S = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^{2007}x_{2007}$.

Bài 20 (2007)**.** Cho $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq c - b$. Dãy (u_n), (v_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1} + b - c}, \ n \geq 1$$

Biết $\lim u_n = \alpha$, tìm $\lim v_n$.

Bài 21 (2006)**.** Cho dãy (a_n) thỏa mãn $x_1 = 2$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^2 x_n$, $n \geq 2$. Tính x_{2006}.

Bài 22 (2006)**.** (Lời giải có vấn đề!) Xác định các dãy số (x_n) biết $x_{2n+1} = 3x_n + 2$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

6.4 Bài tập đề xuất

6.5 Bài tập luyện tập

Bài 23 (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ lần}}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n (2 - x_n)$.

HD. 1. $x_1 = \sqrt[3]{6}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$

2. $f(x) = \sqrt[3]{6 + x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6 + x)^2}}$

3. Dự đoán $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: $L = f(L)$

4. $0 < x_n < 2$, $\forall n$

5. (x_n) tăng

6. $L = 2$

7. $2 - x_n = f(2) - f\left(x_{n-1}\right) = f'(c)\left(2 - x_{n-1}\right) < \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6 + 0)^2}}\left(2 - x_{n-1}\right)$

8. Đặt $q = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{36}} < \dfrac{1}{6} \Rightarrow 2 - x_n < q^{n-1}(1 - x_1) \Rightarrow 6^n (2 - x_n) = \dfrac{1 - x_1}{q}(6q)^n$

$\square$

Chú ý. Tương tự với $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}_{n}$ khi $a \in \{2, 6, 12, 20\}$, hoặc $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{a + \cdots + \sqrt[3]{a}}}}_{n}$ khi $a \in \{24, 60, 120\}$. Riêng $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Bài 24 (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** Cho $a_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x_{n-1} + \dfrac{1}{n} x_{n-2}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

HD. 1. $x_n - x_{n-1}$

2. x_n

□

Bài 25. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

HD. Dạng giống Bài 7 ý (c) □

Bài 26. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2002}$. Chứng minh $x_{2002} < \dfrac{1}{2}$.

Bài 27. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$

Bài 28. Chứng minh π là số vô tỷ.

HD. □

Chương 7

Hàm số

7.1 Giới hạn của hàm số

7.2 Hàm số liên tục

Chương 8

Tích phân

8.1 Bất đẳng thức tích phân

8.2 Đề chính thức

Bài 29 (2023A)**.** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu $\int_0^1 f(x)\,[P(x)]^m dx = 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$

b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất?

Gợi ý. Mục 5.1.1, Định lý 5.2.1, Bài 53; Định nghĩa 2.3.1

a) Chứng minh bằng quy nạp: x^{2n-1}, $n \in \mathbb{Z}^+$, luôn biểu diễn thành tổ hợp tuyến tính của các đa thức có dạng $[P(x)]^m$ như đề bài.

□

Bài giải. 2023a-gt-tp □

Bài 30 (2023B)**.** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu $\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx = 0$ với mọi hàm liên tục $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $g(0) = g(1) = 0$ thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$

b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu ta thêm điều kiện $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$?

Gợi ý. Định nghĩa 2.3.1, Bài 52

Ý tưởng tương tự Bài 29(a). □

Bài giải. 2023b-gt-tp □

Bài 31 (2022)**.** Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : [-1, 1] \to [0, \infty)$ sao cho $f(-1) = f(1) = 1$ và

$$|f(x) - f(y)| \leq 2022\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in [-1, 1]$$

a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục.

b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq \frac{1}{2022}$.

c) (A) Dấu đẳng thức trong ý (b) có đạt được hay không? (Nếu câu trả lời là "không", hãy chứng minh; nếu câu trả lời là "có", hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f làm cho đẳng thức xảy ra.)

Gợi ý. a) Định nghĩa 2.3.5, 2.3.8

b) Đánh giá $f(x)$ (làm non) xung quanh điểm ± 1, và lưu ý $f \geq 0$, để so sánh $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ với tích phân của một hàm cụ thể $g(x)$.

c) Chọn thử $g(x)$ ở ý (b) xem có thỏa mãn không?

d) (Tổng quát) Với $f : [a, b] \to [A, \infty)$ thỏa mãn $|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$, trong đó $f(a), f(b) \geq A$, $f(a) + f(b) \leq M(b - a) + 2A$, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq A(b - a) + \frac{2A^2 + f(a)^2 + f(b)^2 - 2A[f(a) + f(b)]}{2M}.$$

□

Bài giải. 2022-gt-lt-tp □

Bài 32 (2019)**.** Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[0, 1]$ và có $f(1) = 0$.

a) Chứng minh $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 x\,|f'(x)|\,dx$

b) Tìm ví dụ về một hàm số f khả vi liên tục trên $[0, 1]$, với $f(1) = 0$, sao cho $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx < \int_0^1 x\,|f'(x)|\,dx$

Gợi ý. a)

b) Nếu $f'(x)$ chỉ có một dấu trên $(0,1)$ thì $\int_0^1 x\left|f'(x)\right| dx = \left|\int_0^1 xf'(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 x df(x)\right| = \left|xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|$,

□

Bài giải. □

Bài 33 (2019)**.** Cho $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

a) Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) + \int_0^x f(t)\,dt\right] < \infty$. Chứng minh $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$

b) Tìm ví dụ về một hàm số $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ liên tục, đơn điệu không tăng, sao cho

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) + \int_0^x f(t)\,dt\right] = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$$

Bài 34 (2018A)**.** Cho hai số thực $a < b$. Giả sử $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục sao cho $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Chứng minh $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \dfrac{(b-a)^2}{8}\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$

Bài 35 (2018A)**.** Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)\,dx$

HD.

• $\int_0^1 f(x)\times(1-x)\,dx = 0$, với $0 < x_0 < 1$. Áp dụng định lý trung bình thứ hai, có $\int_0^{x_0} f(x)\,dx = 0$.

• Áp dụng định lý Rolle cho hàm $G(x) = e^{-kf(x)}\int_0^x f(t)\,dt$ trên $[0, x_0]$.

□

Bài 36 (2018B)**.** Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục sao cho $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx$. Chứng minh $\exists c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = 2018\int_0^c f(x)\,dx$

HD.

• $\int_0^1 f(x)\times(1-x)\,dx = 0$, với $0 < x_0 < 1$. Áp dụng định lý trung bình thứ hai, có $\int_0^{x_0} f(x)\,dx = 0$.

- Áp dụng định lý Rolle cho hàm $G(x) = e^{-kx}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ trên $[0, x_0]$.

$\square$

Bài 37 (2017A)**.** Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ và $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1$

a) Tìm một ví dụ về hàm số liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện trên

b) Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở $(a, b) \subset (0, 1)$ không rỗng, sao cho $\left|f(x)\right| > 4 \quad \forall x \in (a, b)$

HD. a) $f(x) = 6(2x - 1)$

b) Vì $f \in C[0, 1]$ nên khẳng định tương đương với $\exists x \in [0, 1] \quad \left|f(x)\right| > 4$.

(Phản chứng) $\left|f(x)\right| \le 4,\ \forall x \in [0, 1]$.

$1 = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \boxed{\frac{1}{4}}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) f(x)\,dx =$ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}_{\le 0} \underbrace{f(x)}_{\ge -4} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}_{\ge 0} \underbrace{f(x)}_{\le 4} dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(-4)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \times 4d$ 1.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -4 & \text{nếu } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 4 & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 4 \ne \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = -4 \Rightarrow f$ gián đoạn tại $\dfrac{1}{2}$.

$\square$

Chú ý. a) Chọn hàm $g(x)$ có đồ thị nhận $\left(\dfrac{a+b}{2}, 0\right)$ làm tâm đối xứng, thì $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Nếu $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,g(x)\,dx = I$ thì xét $f(x) = \dfrac{g(x)}{I} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$ và $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx = 1$.

Nên chọn $g(x)$ là hàm bậc nhất.

b) – Câu hỏi: tại sao lại có hệ số $\dfrac{1}{4}$ trong lời giải? Thử thay nó bằng hệ số a xem, rồi chọn a phù hợp.

$1 = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - a\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 - a\right) f(x)\,dx$

Để đánh giá tích phân, cần đánh giá $\left(x^2 - a\right) f(x)$ trên $[0, 1]$. Vì $f(x)$ bị chặn trên $[0, 1]$ (giả thiết phản chứng), nên cần xét dấu của $x^2 - a$ với $x \in [0, 1]$.

$a \le 0 \Rightarrow x^2 - a \ge 0 \Rightarrow -4\left(x^2 - a\right) \le \left(x^2 - a\right) f(x) \le 4\left(x^2 - a\right) \Rightarrow$ $\int_0^1 -4\left(x^2 - a\right) dx \le \int_0^1 \left(x^2 - a\right) f(x)\, dx \le \int_0^1 4\left(x^2 - a\right) dx \Rightarrow -\left(\frac{4}{3} - 4a\right) \le$ $1 \le \left(\frac{4}{3} - 4a\right)$: không thu được thông tin gì!

$a \ge 1 \Rightarrow x^2 - a \le 0 \Rightarrow -4\left(x^2 - a\right) \ge \left(x^2 - a\right) f(x) \ge 4\left(x^2 - a\right) \Rightarrow$ $\int_0^1 -4\left(x^2 - a\right) dx \ge \int_0^1 \left(x^2 - a\right) f(x)\, dx \ge \int_0^1 4\left(x^2 - a\right) dx \Rightarrow \left(4a - \frac{4}{3}\right) \ge$ $1 \ge -\left(4a - \frac{4}{3}\right)$: cũng vậy!

$0 < a < 1 \Rightarrow 1 = \int_0^{\sqrt{a}} \underbrace{\left(x^2 - a\right)}_{\le 0} \underbrace{f(x)}_{\ge -4} dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \underbrace{\left(x^2 - a\right)}_{\ge 0} \underbrace{f(x)}_{\le 4} dx \le$ $\int_0^{\sqrt{a}} \left(x^2 - a\right)(-4)\, dx + \int_{\sqrt{a}}^1 \left(x^2 - a\right)(-4)\, dx = \frac{16}{3}a\sqrt{a} - 4a + \frac{4}{3}$. Ta muốn biểu thức này bằng 1, thì $a = \frac{1}{4}$.

– Mở rộng: cho $f : [0,1] \to [a,b]$, $\varphi(x)$ thay cho x^2. Hãy đánh giá $I = \int_0^1 \varphi(x) f(x)\, dx$.

$I = \int_0^1 \varphi(x) f(x)\, dx - k\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \left[\varphi(x) - k\right] f(x)\, dx.$

Trong trường hợp $0 < a < 1$ ở ý trên, ta có $I \le \frac{16}{3}a\sqrt{a} - 4a + \frac{4}{3}$, $\forall a \in (0,1)$, mà $\frac{16}{3}a\sqrt{a} - 4a + \frac{4}{3}$ đạt cực tiểu bằng 1 tại $a = \frac{1}{4} \Rightarrow I \le 1$.

Bài 38 (2017B)**.** Tính $\int_0^3 \sqrt{2 + \sqrt{1+x}}dx$

Bài 39 (2016A)**.** Với mỗi số thực $0 < \alpha \ne 1$, gọi $f_\alpha)$ là hàm số được xác định trên khoảng $(1,\infty)$ bởi công thức $f_\alpha(x) = \int_x^{x^\alpha} \frac{dt}{\ln t}, \quad (x > 1)$

a) Chứng minh rằng f_α là một phép đồng phôi, tức là một song ánh liên tục, từ khoảng $(1,\infty)$ lên một khoảng $I_\alpha \subset \mathbb{R}$ nào đó sao cho ánh xạ ngược $f_\alpha^{-1} : I_\alpha \to (1,\infty)$ cũng liên tục

b) Tìm I_α

Bài 40 (2015A)**.** Cho $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ là một hàm liên tục. Biết rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\int_0^x [f(t)]^2 dt = a \in (0,\infty)$. Hãy tìm $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} f(x)$

Bài 41 (2015B)**.** Cho $f : [0,1] \to (-\infty, 1]$ là một hàm liên tục, thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Chứng minh $\int_0^1 [f(x)]^3 dx \le \frac{1}{4}$

Bài 42 (2015B)**.** Cho $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ là một hàm liên tục. Đặt $g(x) = \sqrt[3]{f(x)} \int_0^x \frac{dt}{f(t)}$, $(x \geq 0)$. Chứng minh rằng g không bị chặn trên $[0, \infty)$

Bài 43 (2014)**.** a) Cho hàm số f đơn điệu trên $[0, +\infty)$, và $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$. Chứng minh $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Kết luận trên còn đúng không khi f là hàm liên tục trên $[0, +\infty)$ nhưng không đơn điệu trên khoảng đó? Tại sao?

Bài 44 (2014)**.** Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$. Giả sử $\int_0^x f^2(t)\,dt \leq \frac{x^3}{3}$, $\forall x \geq 0$. Chứng minh $\int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{x^2}{2}$, $\forall x \geq 0$.

Bài 45 (2013)**.** Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{2013 + x^n} dx$.

Bài 46 (2013)**.** Cho $f(x)$ là hàm dương, liên tục trên $[0, 1]$, và $f(x) + f\left[\left(1 - \sqrt{x}\right)^2\right] \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Chứng minh $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{8}$.

Hãy chỉ ra rằng dấu đẳng thức không thể xảy ra.

Bài 47 (2013)**.** Cho $f \in C[0, 1]$. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm $g \in C[0, 1]$ đơn điệu thực sự sao cho

$$\int_0^1 f(x)\,g^k(x)\,dx = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, ..., 2013$$

thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 2014 nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0, 1)$. Hãy chỉ ra ví dụ nếu bỏ tính đơn điệu của $g(x)$ thì khẳng định có thể không đúng.

Bài 48 (2016B)**.** Cho $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t}$, $(x > 1)$. Tìm tập giá trị của f

HD. $f'(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\ln t}\right) dt + \frac{1}{\ln x} \times (x)' - \frac{1}{\ln\sqrt{x}} \times \left(\sqrt{x}\right)' = \int_{\sqrt{x}}^x 0dt + \frac{1}{\ln x} \times 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}\ln x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 + \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x}\ln x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}\ln x} > 0$, $\forall x > 1 \Rightarrow f\left(1^+\right) < f(x) < f(+\infty)$, $\forall x > 1$

$\sqrt{x} \leq t \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{x\ln t} \leq \frac{1}{t\ln t} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\ln t} \Rightarrow \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{x\ln t} \leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{t\ln t} \leq \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\sqrt{x}\ln t} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \leq \ln\ln t\Big|_{\sqrt{x}}^x \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \leq \ln 2 \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x}\ln 2 \leq f(x) \leq x\ln 2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x}\ln 2 = \lim\limits_{x \to 1^+} x\ln 2 = \ln 2 \Rightarrow f(1^+) = \ln 2$, và $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\ln 2 = +\infty \Rightarrow f(+\infty) = +\infty$ □

Chú ý.

- Đánh giá thêm thừa số $\frac{1}{t}$ để so sánh $f(x)$ với hàm có nguyên hàm.
- Câu hỏi khác: tìm tập giá trị của f trên $(0, 1)$.
- Mở rộng: $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\, dt \Rightarrow f'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} g(t)\, dt}_{0} + g\left[\beta(x)\right] \times \beta'(x) - g[\alpha(x)] \times \alpha'(x) = g\left[\beta(x)\right] \times \beta'(x) - g[\alpha(x)] \times \alpha'(x)$, trong đó (1) $g(t)$ không có nguyên hàm, nhưng $g(t) \times h(t)$ có nguyên hàm nếu chọn $h(t)$ phù hợp; (2) đánh giá được $h(t)$ khi $\alpha(x) \leq t \leq \beta(x)$

8.2.1 Bài tập luyện tập

Bài 49 ([1], Tập 3, 1.4.15)**.** Chứng minh nếu f không âm, liên tục trên $[a, b]$, và $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ thì $f \equiv 0$ trên $[a, b]$.

Bài giải. kaczor-3-1.4.15 □

Bài 50 ([1], Tập 3, 1.4.16)**.** Cho $f \in C[a, b]$. Chứng minh nếu $\forall \alpha, \beta$ trong đó $a \leq \alpha < \beta \leq b$, ta đều có $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = 0$, thì $f \equiv 0$ trên $[a, b]$.

Bài giải. kaczor-3-1.4.16 □

Bài 51 ([1], Tập 3, 1.4.17)**.** Cho $f \in C[a, b]$ sao cho $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0 \quad \forall g \in C[a, b]$. Chứng minh $f \equiv 0$ trên $[a, b]$.

Bài 52 ([1], Tập 3, 1.4.18)**.** Cho $f \in C[a, b]$. Giả sử $\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0 \quad g \in C[a, b]$ thỏa mãn $g(a) = g(b) = 0$. Chứng minh $f \equiv 0$ trên $[a, b]$.

Bài 53 ([1], Tập 3, 1.4.34)**.** Giả sử $f \in C[a, b]$ và $\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Chứng minh $f \equiv 0$ trên $[a, b]$.

Bài 54 ([1], Tập 3, 1.4.19)**.** Cho $f \in C(\mathbb{R})$. Chứng minh

a) Nếu $\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thì f là hàm lẻ.

b) Nếu $\int_{-x}^{x} f(t)\, dt = 2\int_0^x f(t)\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thì f là hàm chẵn.

c) Với $T > 0$ cho trước, nếu $\int_x^{x+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thì f là hàm tuần hoàn với chu kỳ T.

Bài 55 ([1], Tập 3, 1.4.22)**.** Cho $f \in C[a, b]$. Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f\left(x^n\right) dx$.

Bài 56 ([1], Tập 3, 1.4.23)**.** Chứng minh nếu f khả tích trên $[a, b]$, thì $\exists \theta \in [a, b]$ $\quad \int_a^\theta f(x)\, dx = \int_\theta^\theta f(x)\, dx$.

Bài 57 ([1], Tập 3, 1.4.24)**.** Cho $f \in C[a, b]$ thỏa mãn $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Chứng minh $\exists \theta \in (a, b)$ $\quad \int_a^\theta f(x)\, dx = f\left(\theta\right)$.

Bài 58 ([1], Tập 3, 1.4.??)**.**

Chương 9

Chuỗi hàm và dãy hàm

Bài 59.

9.1 Vòng loại trường 2024

9.1.1 Đợt 1

Bài 60. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{3x_n + 1}{x_n + 2}$, $n \geq 1$.

a) Chứng minh dãy đơn điệu giảm.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài 61. Cho dãy (a_n) thỏa mãn $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, $n \geq 1$.

a) Với $a_1 = \dfrac{3}{2}$, tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Tìm a_1 để dãy hội tụ.

Bài 62. Cho hàm số $f_n(x) = \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x) \cdots \cos(nx)$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $\left|f_n''(0)\right| \geq 120$.

Bài 63. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh hàm số gián đoạn tại $x = 0$. Khi đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy?

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ} \\ \cos x, & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \end{cases}$. Chứng minh f liên tục tại $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài 64. Một lỗi tính toán rất hay gặp đó là khi tính đạo hàm, một số người lầm tưởng rằng quy tắc tính đạo hàm của tích đó là $(fg)' = f'g'$.

a) Hãy chỉ ra ví dụ để chứng minh quy tắc trên là sai.

b) Hãy đưa ra ví dụ hai hàm f và g không phải hàm hằng trên một khoảng mở (a, b) nào đó mà quy tắc trên vẫn đúng.

9.1.2 Đợt 2

Bài 65. Cho $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-x}{x+2}\right)^n dx$, $n = 1, 2, \ldots$.

a) Tính I_2.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3^n I_n\right)$.

HD. a) $\left(\dfrac{1-x}{x+2}\right)^2 = \left(\dfrac{3}{x+2} - 1\right)^2 = 1 - \dfrac{6}{2+x} + \dfrac{9}{(2+x)^2}$, $I_2 = \dfrac{5}{2} - 6\ln\dfrac{3}{2}$.

b) $0 \leq \dfrac{1-x}{x+2} \leq \dfrac{1}{2},\ \forall x \in [0,1]$.

c) $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} - 1\right)^n dx$. Đặt $t = \dfrac{3}{x+2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{t} - 2 \Rightarrow dx = -\dfrac{3}{t^2}dt \Rightarrow I_n = 3\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^n}{t^2}dt = 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)(t-1)^{n-1}}{t^2}dt = 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^{n-1}}{t}dt - 3I_{n-1}$.

$J_n = \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^n}{t}dt = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)(t-1)^{n-1}}{t}dt = \int_1^{\frac{3}{2}} (t-1)^{n-1}dt - J_{n-1} = \frac{1}{2^n n} - J_{n-1}, \quad J_0 = \ln\frac{3}{2}$.

$$J_n = (-1)^n \left[\ln\frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2^1\cdot 1}}{-1} + \frac{\frac{1}{2^2\cdot 2}}{(-1)^2} + \cdots + \frac{\frac{1}{2^n n}}{(-1)^n}\right] = (-1)^n \left[\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{2^1\cdot 1} + \frac{1}{2^2\cdot 2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2^n n}\right].$$

$f(x) = \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^n}{n} + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

$$J_n = (-1)^n \times (-1)^n \frac{\frac{n!}{(1+\xi)^{n+1}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{(n+1)\,2^n\left(1+\xi\right)^{n+1}}.$$

$I_n = 3\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} (t-1)^n d\left(-\frac{1}{t}\right) = -3\frac{(t-1)^n}{t}\Big|_1^{\frac{3}{2}} + 3\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{t}d\left((t-1)^n\right) = -\frac{1}{2^{n-1}} + 3n\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{(t-1)^{n-1}}{t}dt = 3nJ_{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}} = 3n \times \frac{1}{n\cdot 2^{n-1}\left(1+\xi\right)^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}\left(1+\xi\right)^n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{3}{\left(1+\xi\right)^n} - 1\right]$.

□

Bài 66. Một sợi dây thép đồng chất dài 1m và có tiết diện không đáng kể. Cắt sợi dây thép thành hai đoạn, một đoạn được uốn thành hình vuông, còn lại được uốn thành hình tròn. Hỏi sợi dây thép được cắt như thế nào để tổng diện tích hình vuôn và diện tích hình tròn là nhỏ nhất.

HD. Độ dài 2 đoạn x và $1-x$, $0 \leq x \leq 1$. Cạnh hình vuông $= \dfrac{x}{4}$, bán kính hình tròn $= \dfrac{1-x}{2\pi}$. Tổng diện tích $S = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\dfrac{1-x}{2\pi}\right)^2$. □

Bài 67. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\dfrac{a}{2024} + \dfrac{b}{2025} + \dfrac{c}{2026} = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm lớn hơn 1.

HD.

- $\dfrac{a}{n+2} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n} = 0 \Rightarrow$ phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\in (0,1)$.

Thật vậy xét $f(t)=\int_0^t\left(ax^{n+1}+bx^n+cx^{n-1}\right)dx=\frac{a}{n+2}t^{n+2}+\frac{b}{n+1}t^{n+1}+\frac{c}{n}t^n$, thì $f(0)=f(1)=0\Rightarrow\exists x_0\in(0,1)\quad f'(x_0)=0$.

- Đặt $t=\frac{1}{x}$ thì $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm $x>1\Leftrightarrow a+bt+ct^2=0$ có nghiệm $t\in(0,1)$.

□

Bài 68. Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$ có $f'(0)=1$, $f'(1)=\frac{1}{2}$. Chứng minh tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho $f'(c)=c^3$.

Bài 69. Cho $f:[0,1]\to[0,1]$ liên tục. Chứng minh $\int_0^1 f(x)\,dx\geq\left(\int_0^1 f\left(x^2\right)dx\right)^2$.

HD. Đặt $\ell=\int_0^1 f(x)\,dx$, $r=\int_0^1 f\left(x^2\right)dx$. Khi đó $0\leq r\leq 1$. Chỉ cần xét $r>0$. Đặt $a=\frac{1}{2r}\Rightarrow\frac{1}{4a^2}=r^2\leq 1$.

$$\begin{aligned} r&=\int_0^1 f(t)\times\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\Rightarrow r-a\ell=\int_0^1 f(t)\times\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}-a\right]dt\\ &=\int_0^{\frac{1}{4a^2}} f(t)\times\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}-a\right]dt+\int_{\frac{1}{4a^2}}^1 f(t)\times\left[\frac{1}{2\sqrt{t}}-a\right]dt\leq\int_0^{\frac{1}{4a^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}-a\right)dt=\frac{1}{4a}=\frac{r}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a\ell\geq\frac{r}{2}\Rightarrow\ell\geq\frac{r}{2a}=r^2.$$

□

Chú ý. Tổng quát: $\int_0^1 f(x)\,dx\geq\left(\int_0^1 f\left(x^n\right)dx\right)^n$, với $n\in\mathbb{R}_{>1}$, và lý do chọn a.

$$x^n=t\Rightarrow x=t^{\frac{1}{n}}\Rightarrow dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt\Rightarrow r=\int_0^1 f(t)\times\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt.$$

$$\Rightarrow r-a\ell=\int_0^1 f(t)\left(\frac{1}{nt^{\frac{n-1}{n}}}-a\right)dt=\int_0^{(na)^{-\frac{n}{n-1}}}+\int_{(na)^{-\frac{n}{n-1}}}^1\leq\int_0^{(na)^{-\frac{n}{n-1}}}\left(\frac{1}{nt^{\frac{n-1}{n}}}-a\right)dt=$$
$$\left(t^{\frac{1}{n}}-at\right)\Big|_0^{(na)^{-\frac{n}{n-1}}}=(na)^{-\frac{1}{n-1}}-a(na)^{-\frac{n}{n-1}}.$$

$\Rightarrow a\ell\geq r-(na)^{-\frac{1}{n-1}}+a(na)^{-\frac{n}{n-1}}\Rightarrow\ell\geq\frac{r}{a}-\frac{1}{a}(na)^{-\frac{1}{n-1}}+(na)^{-\frac{n}{n-1}}\geq r^n$ (ta muốn vậy), hay $r^n-\frac{r}{a}\leq(na)^{-\frac{n}{n-1}}-\frac{1}{a}(na)^{-\frac{1}{n-1}}$.

Xét $g(t)=t^n-\frac{t}{a}\Rightarrow g'(t)=nt^{n-1}-\frac{1}{a}$.

$g'(t)=0\Leftrightarrow t^{n-1}=\frac{1}{na}=(na)^{-1}\Leftrightarrow t=(na)^{-\frac{1}{n-1}}$. Ta có $g(t)\geq g\left[(na)^{-\frac{1}{n-1}}\right]\ \forall t$.

Mà $g(r) \leq g\left[(na)^{-\frac{1}{n-1}}\right]$, nên $r = (na)^{-\frac{1}{n-1}}$. Vậy ta chọn $a = \dfrac{1}{nr^{n-1}}$.

Phần III

Đại số

9.2 Vòng loại trường 2024

9.2.1 Đợt 1

Bài 70. Cho định thức $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, trong đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 2024x + 2025 = 0$.

Bài 71. Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$, biết a_{ij} là số các cặp số tự nhiên (m, n) sao cho $mi + nj = 4$, ví dụ, $a_{11} = 5$. Tính $\det A$.

Bài 72. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Bài 73. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để đa thức $P(x) = x^4 + 9x^3 + mx^2 + 9x + 4$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 74. a) Cho A là ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $A^{2024} = O$. Chứng minh $A^2 = O$.

b) Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp, biết $I + AB$ khả nghịch. Chứng minh $I + BA$ cũng khả nghịch.

HD. a) Xét 2 khả năng

1) A chéo hóa được. Khi đó $A = C^{-1}DC$, trong đó $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Suy ra $A^{2024} = C^{-1}D^{2024}C$, trong đó $D^{2024} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2024} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2024} \end{bmatrix}$
$A^{2024} = O \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = O$.

2) A không chéo hóa được, thì A có dạng Jordan, $A = C^{-1}JC$, trong đó $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Khi đó $A^{2024} = C^{-1}J^{2024}C$, trong đó $J^{2024} = \begin{bmatrix} \lambda^{2024} & 2024\lambda^{2023} \\ 0 & \lambda^{2024} \end{bmatrix}$
$A^{2024} = O \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow J^2 = O \Rightarrow A^2 = O$.

□

Tài liệu tham khảo

[1] W. J. Kaczor; M. T. Nowak; Đoàn Chi (dịch). *Bài tập Giải tích (Tập 1, 2, 3)*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2003.

[2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên). *Toán học Cao cấp*. NXB Giáo dục, 2006.

[3] Trần Đức Long; Hoàng Quốc Toàn; Nguyễn Đình Sang. *Bài tập Giải tích (Tập 1, 2, 3)*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2008.

[4] Trần Đức Long; Hoàng Quốc Toàn; Nguyễn Đình Sang. *Giáo trình Giải tích (Tập 1, 2, 3)*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2008.

[5] Nguyễn Duy Tiến. *Bài giảng Giải tích*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2005.

[6] Hoàng Tụy. *Hàm thực và Giải tích Hàm*. NXB ĐHQG Hà Nội, 2003.