ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH

TẬP 3

TÍCH PHÂN SUY RỘNG, TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ
TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH

Tập 3

TÍCH PHÂN SUY RỘNG, TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ, TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT

(In lần thứ 2)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Chương VIII

TÍCH PHÂN SUY RỘNG VÀ TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

A. TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Trong chương VIII, chúng ta đã xây dựng tích phân xác định của một hàm số bị chặn trên đoạn [a, b], $(-\infty < a \le b < +\infty)$. Tích phân suy rộng được định nghĩa dưới đây là sự mở rộng khái niệm tích phân xác định theo hai hướng: tích phân của một hàm số trong khoảng vô hạn và tích phân của một hàm số không bị chặn trong khoảng hữu hạn.

Tương ứng, ta có tích phân suy rộng loại một và tích phân suy rộng loại hai.

§1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG TRONG KHOẢNG VÔ HẠN

1. Định nghĩa: Cho hàm số

$$f : [a, +\infty) \to R$$

khả tích trong mọi đoạn con hữu hạn [a, A], $(A \ge a)$ của khoảng $[a, +\infty)$.

Đặt $F(A) = \int_a^A f(x)dx$, $A \ge a$

Khi đó F(A) là hàm số xác định trong khoảng $[a, +\infty)$.

Ký hiệu hình thức:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx. \qquad (1)$$

Ta gọi $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 1 của hàm f(x) trong khoảng [a, +∞). Rõ ràng giới hạn (1) có thể tồn tại hay không tồn tại.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_a^{A} f(x)dx = I$$

thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và giới hạn I được gọi là tích phân của hàm f(x) trong khoảng [a, +∞):

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx\,.$$

Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc bằng +∞ hay -∞ thì ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Tương tự, nếu hàm f(x) xác định trong khoảng vô hạn (-∞, a], khả tích trong mọi đoạn hữu hạn [B, a], (B ≤ a) thì tích phân suy rộng của hàm f(x) trong khoảng (-∞, a] được định nghĩa bằng công thức

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^{a} f(x)dx\,. \qquad (2)$$

Nếu hàm f(x) xác định trong khoảng (-∞, +∞), khả tích trong mọi đoạn hữu hạn [A', A''], (-∞ < A' < A'' < +∞) thì tích phân suy rộng của hàm f(x) trong khoảng (-∞, +∞) được định nghĩa bằng công thức

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A''\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int_{A'}^{A''} f(x)dx \qquad (3)$$

trong đó giới hạn vế phải được hiểu theo nghĩa giới hạn kép của hàm hai biến

$$F(A', A'') = \int_{A'}^{A''} f(x)dx .$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là hội tụ, nếu không tồn tại hoặc bằng $+\infty$, hay $-\infty$ thì tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ được gọi là phân kỳ.

Rõ ràng nếu với $a \in (-\infty, +\infty)$ mà cả hai tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ đều tồn tại thì ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx .$$

Ví dụ: Cho hàm $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$

a) Xét trong khoảng $[0, +\infty)$, hàm $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[0, A]$, $A \geq 0$ và

$$F(A) = \int_{0}^{A} \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg}A .$$

Ta có:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to+\infty} \text{arctg}A = \frac{\pi}{2}.$$

Do đó hàm $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ khả tích suy rộng trong $[0, +\infty)$ hay nói cách khác tích phân $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ và:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Tương tự

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to-\infty} \int_B^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{B\to-\infty}(-\text{arctg}B) = \frac{\pi}{2}$$

và $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Chú thích: Sau đây ta chỉ cần xét tích phân suy rộng loại 1 dạng $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$, còn các trường hợp khác được xét tương tự.

2. Tiêu chuẩn hội tụ của tích phân suy rộng

Định lý 1.VIII (Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ)

Giả sử f(x) là hàm số xác định trong khoảng $[a, +\infty)$ khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $A \geq a$. Khi đó tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$

hội tụ khi và chỉ khi: Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, sao cho với mọi A', A" > A_0, ta có:

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

Chứng minh: Đặt $F(A) = \int_a^A f(x)dx$, $A \geq a$.

Theo định lý Cauchy về giới hạn hàm số, giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ tồn tại hữu hạn khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi A', A" > A_0:

$$| F(A') - F(A'') | < \varepsilon$$

hay là:

$$\left|\int_a^{A'} f(x)dx - \int_a^{A''} f(x)dx\right| = \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

Theo định nghĩa, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$. Vậy kết hợp lại ta suy ra tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi: Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$ sao cho với mọi A', A" > A_0,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon .$$

Định lý chứng minh xong .

Định lý 2.VIII: Giả sử f(x) là hàm số xác định trong khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $A \geq a$. Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi tích phân $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ (với $b > a$) hội tụ .

Chứng minh: Giả sử b là một số thực bất kỳ, $b > a$. Khi đó với $A > a$, có thể xem $A > b$, ta có:

$$\int_a^A f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^A f(x)dx .$$

Vì $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)dx$ tồn tại hữu hạn khi và chỉ khi $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_b^A f(x)dx$ tồn tại hữu hạn nên tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Định lý 3.VIII: Giả sử các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, α, β là các hằng số thực. Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ cũng hội tụ và ta có:

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx .$$

Chứng minh: Suy trực tiếp từ định nghĩa.

3. Cách tính tích phân suy rộng và các ví dụ

Giả sử f(x) là hàm số xác định và liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$, F(x) là một nguyên hàm của hàm f(x) trong khoảng này Theo công thức Newton - Leibniz ta có:

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^A \ , \ A \geq a.$$

Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ thì ta ký hiệu:

$$F(+\infty) = \lim_{A\to+\infty} F(A)$$

Khi đó: $$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \text{ và}$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} .$$

Tương tự như vậy:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

trong đó F(x) là nguyên hàm của hàm f(x) trong khoảng lấy tích phân tương ứng và $F(-\infty) = \lim\limits_{B\to-\infty} F(B)$ nếu giới hạn đó tồn tại .

Bây giờ ta giả sử u(x), v(x) là các hàm khả vi liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$. Theo công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int_a^A u\,dv = uv\Big|_a^A - \int_a^A v\,du\,,\ A > a.$$

Nếu tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{A\to+\infty} u(A)$ và $\lim\limits_{A\to+\infty} v(A)$ thì ta ký hiệu:

$$\lim_{A\to+\infty} u(A)v(A) = u(+\infty).v(+\infty)\,.$$

Khi đó ta cũng có công thức:

$$\int_a^{+\infty} u\,dv = u.v\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v.du\,.$$

Ví dụ 1: Xét tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $a > 0$.

a) Giả sử $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Ta có:

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})\,.$$

Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = 0$, nên $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}$.

Nếu $0 < \alpha < 1$ thì $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = +\infty$, nên $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$.

b) Với $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty$.

Vậy tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $(a > 0)$, hội tụ nếu $\alpha > 1$, phân kỳ nếu $\alpha \leq 1$.

Ví dụ 2: Xét tích phân $\int_a^{+\infty} e^{-x}dx$.

Ta có: $$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty}(1-e^{-A}) = 1.$$

Vậy: $$\int_a^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Ví dụ 3: Tính $\int_a^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$.

Ta có:

$$\int_a^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = -\int_a^{+\infty} e^{-x}d(\cos x) = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_a^{+\infty} e^{-x}\cos x dx$$

$$= -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \left(e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx\right)$$

$$= 1 - 0 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

nên $2\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = 1$ hay $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}$.

Tính toán tương tự ta cũng có $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}$.

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 1 CỦA CÁC HÀM NHẬN GIÁ TRỊ DƯƠNG

Giả sử f(x) là hàm số xác định và không âm trong khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $(A \geq a)$. Ta xét tích phân:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

Trước hết ta chú ý rằng vì hàm $f(x) \geq 0$ với mọi $x \geq a$ nên $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ là hàm đơn điệu, không giảm trong khoảng $[a, +\infty)$. Do đó nếu F(A) là hàm số bị chặn trên thì sẽ tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{A \to +\infty} F(A)$. Còn nếu F(A) không bị chặn trên thì $\lim_{A \to +\infty} F(A) = +\infty$.

Vậy nếu hàm $F(A) = \int_a^A f(x)dx$, $A \geq a$, bị chặn trên thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ; nếu hàm F(A) không bị chặn trên thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

Để xét tính hội tụ của tích phân suy rộng đối với hàm không âm trong khoảng $[a, +\infty)$ ta có các dấu hiệu đủ sau đây, thường được gọi là các dấu hiệu so sánh.

Định lý 4.VIII. Giả sử f(x) và g(x) là những hàm xác định trong khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $A > a$ và

$$0 \le f(x) \le g(x), \text{ với mọi } x \in [a, +\infty).$$

Khi đó:

a) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ và ta có bất đẳng thức: $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

b) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ .

Chứng minh:

a) Với $A > a$, theo giả thiết $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a, A]$, do đó:

$$\int_a^A f(x)dx \le \int_a^A g(x)dx .$$

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ, nghĩa là tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^A g(x)dx = \int_a^{+\infty} g(x)dx = M > 0 .$$

Vì thế hàm $F(A) = \int_a^A f(x)dx \le M$, điều đó có nghĩa là hàm F(A) đơn điệu không giảm, bị chặn trên, nên tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{A\to+\infty} F(A) = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

Vậy tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

b) Nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ, tức là hàm $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ đơn điệu không giảm và $\lim_{A\to+\infty} F(A) = +\infty$.

Vì vậy từ bất đẳng thức:

$$\int_a^A f(x)dx \le \int_a^A g(x)dx\ ,\ A \ge a,$$

cho $A \to +\infty$ ta sẽ có:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)dx \ge \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = +\infty .$$

Vậy tích phân $\int_a^A g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Định lý 5.VIII. Giả sử f(x) và g(x) là những hàm xác định và không âm trong khoảng $[a, +\infty)$, khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $A \ge a$ và tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k\ ,\ 0 < k < +\infty.$$

Khi đó các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hạy cùng phân kỳ.

Chứng minh: Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < +\infty$.

Vì $k > 0$ nên với số $\varepsilon_0 > 0$ đủ bé sao cho $k - \varepsilon_0 > 0$, tồn tại số $b > a$ đủ lớn sao cho:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon_0 \text{ với } x \in [b, +\infty)$$

hay $k - \varepsilon_0 < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon_0$, $x \in [b, +\infty)$.

Mặt khác do $g(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, +\infty)$ nên:

$$(k - \varepsilon_0).g(x) < f(x) < (k + \varepsilon_0).g(x), \quad x \in [b, +\infty).$$

Từ đó nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Vì vậy $\int_b^{+\infty} (k - \varepsilon_0).g(x)dx = (k - \varepsilon_0)\int_b^{+\infty} g(x)dx$ cũng hội tụ đồng thời với tích phân $\int_b^{+\infty} g(x)dx$. Do đó tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ (định lý 4.VIII và 2.VIII).

Tương tự, từ bất đẳng thức $f(x) < (k + \varepsilon_0)g(x)$ với $x \in [b, +\infty)$ ta suy ra nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Từ kết quả vừa chứng minh, ta suy ra nếu một trong hai tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hay $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì tích phân kia cũng phân kỳ. Định lý được chứng minh .

Hệ quả 1: Giả sử f(x) và g(x) xác định và không âm trong khoảng [a, +∞), khả tích trong mọi đoạn hữu hạn [a, A], (A > a). Khi đó nếu f(x) và g(x) là những vô cùng bé tương đương khi $x \to +\infty$ thì các tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Chú thích: Nêu trong định lý 5.VIII ta giả thiết:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

thì tồn tại số b > 0 sao cho $\frac{f(x)}{g(x)} < 1$ khi $x \geq b$

hay $0 \leq f(x) < g(x)$, $x \in [b, +\infty)$. Từ đó ta suy ra nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Còn nếu $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, thì tồn tại số b > 0 sao cho $\frac{f(x)}{g(x)} > 1$ khi $x \geq b$ hay $f(x) > g(x) > 0$. Từ đó nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng phân kỳ .

Hệ quả 2: Giả sử f(x) là hàm xác định và không âm trong khoảng [a, +∞), (a > 0) khả tích trong mọi đoạn hữu hạn [a, A], A ≥ a, sao cho với x đủ lớn f(x) có dạng:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}} \ (\alpha > 0)$$

khi đó:

a) Nếu $\alpha > 1$, $\varphi(x)$ là hàm không âm và bị chặn trên:

$$0 \le \varphi(x) \le M$$

thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (a > 0).

b) Nếu $0 < \alpha \le 1$, $\varphi(x)$ là hàm không âm và bị chặn dưới:

$$\varphi(x) \ge m > 0$$

thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ .

Thật vậy: a) Với x đủ lớn, chẳng hạn b > a > 0 theo giả thiết:

$$0 < f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}} \le \frac{M}{x^{\alpha}},\ x \ge b > a > 0$$

Khi đó với $\alpha > 1$ $\int_b^{+\infty} \frac{M}{x^{\alpha}} dx$ hội tụ, theo định lý 4.VIII $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ. Từ đó suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ (định lý 2.VIII).

b) Với $x \ge b > a$: $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}} \ge \frac{m}{x^{\alpha}}$

Khi đó với $0 \le \alpha \le 1$, $\int_b^{+\infty} \frac{m}{x^\alpha} dx$ phân kỳ, do đó $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ. Từ đó suy ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng phân kỳ .

Ví dụ 1: Xét tính hội tụ của tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 kx dx$.

Hàm $f(x) = e^{-x} \sin^2 kx \ge 0$ với mọi $x \in [0, +\infty)$.

Hơn nữa $0 \le e^{-x}\sin^2kx \le e^{-x}$, $x \in [0, +\infty)$. Vì $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ hội tụ nên $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2 kx dx$ hội tụ theo dấu hiệu so sánh (định lý 4.VIII).

Ví dụ 2: Xét tính hội tụ của tích phân

$$\int_0^{+\infty} (x^2 - 3x + 5)e^{-2x} dx .$$

Rõ ràng hàm $f(x) = (x^2 - 3x + 5)e^{-2x} > 0$ với mọi $x \ge 0$. Hơn nữa ta có: $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 5)e^{-x} = 0$. Do đó tồn tại số $N > 0$ để sao cho với $x > N$ thì:

$$(x^2 - 3x + 5)e^{-x} < 1 .$$

Vì thế với mọi $x > N$, ta có:

$$(x^2 - 3x + 5)e^{-2x} < e^{-x} .$$

Do $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, nên theo dấu hiệu so sánh (định lý 4.VIII) ta suy ra tích phân $\int_0^{+\infty} (x^2 - 3x - 5)e^{-2x} dx$ hội tụ .

Ví dụ 3: Xét sự hội tụ của tích phân

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x}dx \ .$$

Ta thấy khi $x \to +\infty$ thì $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ phân kỳ nên tích phân đã cho cũng phân kỳ (hệ quả của định lý 5.VIII).

Ví dụ 4: Xét tích phân $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}.e^{-x}dx$.

Ta có $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+2}e^{-x} = 0$ nên tồn tại số b > 0 sao cho với mọi $x > b$ thì $x^{\alpha+2}e^{-x} < 1$ hay

$$x^{\alpha}e^{-x} < \frac{1}{x^2}, \ x > b \ .$$

Nhưng vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ nên tích phân $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$ hội tụ với α bất kỳ .

§3. ĐỊNH LÝ DIRICHLET VÀ ABEL

Ta xét sự hội tụ của tích phân suy rộng với cận vô hạn, trong đó hàm dưới dấu tích phân có dạng tích của hai hàm số:

$$\int_a^{+\infty} f(x).g(x)dx \ .$$

Sau đây ta sẽ đưa ra hai điều kiện đủ để tích phân trên đây hội tụ, đó là các định lý Dirichlet và Abel .

Định lý 6.VIII (Dấu hiệu Dirichlet)

Giả sử f(x) và g(x) là các hàm xác định và liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$. Hơn nữa

a) Hàm f(x) có nguyên hàm bị chặn trong $[a, +\infty)$, tức là tồn tại số $k > 0$ sao cho:

$$|F(A)| = \left|\int_a^A f(x)dx\right| \le k \,,\; a \le A < +\infty \,.$$

b) Hàm số g(x) có đạo hàm liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và đơn điệu dần về 0 khi $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x).g(x)dx$ hội tụ .

Chứng minh:

Với mọi $A' > A > 0$, áp dụng tích phân từng phân ta có:

$$\int_A^{A'} f(x).g(x)dx = F(A').g(A') - F(A).g(A) - \int_A^{A'} F(x).g'(x)dx$$

trong đó F(x) là nguyên hàm của f(x) trong khoảng $[a, +\infty)$.

Áp dụng định lý trung bình suy rộng (định lý trung bình thứ hai) đối với tích phân xác định ta có:

$$\int_A^{A'} F(x).g(x)dx = F(\xi)\int_A^{A'} g'(x)dx = F(\xi)[g(A') - g(A)] \,,\; (A \le \xi \le A') \,.$$

Từ đó

$$\int_A^{A'} f(x).g(x)dx = [F(A') - F(\xi)].g(A') + [F(\xi) - F(A)].g(A)$$

Theo giả thiết a) ta có:

$$|F(A') - F(\xi)| \le 2k \text{ và } |F(\xi) - F(A)| \le 2k .$$

Theo giả thiết b) thì $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 > a$ sao cho với $x > A_0$ thì:

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4k} .$$

Khi đó với mọi $A' > A > A_0$ ta có:

$$\left| \int_A^{A'} f(x) . g(x)dx \right| \le 2k . \frac{\varepsilon}{4k} + 2k . \frac{\varepsilon}{4k} = \varepsilon .$$

Vậy: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 = A_0(\varepsilon) \ \forall A', A > A_0$:

$$\left| \int_A^{A'} f(x).g(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ .

Định lý 7.VIII (Dấu hiệu Abel).

Giả sử f(x) và g(x) là các hàm xác định và liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$. Hơn nữa

a) Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,

b) Hàm g(x) có đạo hàm g'(x) liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$ và đơn điệu bị chặn trong khoảng đó, tức là

$$|g(x)| \le L, \quad (L \text{ - hằng số, } a \le x < +\infty).$$

Khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

Chứng minh: Biến đổi giống như khi chứng minh định lý 6.VIII ta có:

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = [F(A') - F(\xi)].g(A') + [F(\xi) - F(A)]g(A) \quad (A \le \xi \le A').$$

Vì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nên theo định lý Cauchy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 > a$ sao cho với mọi $A' > A > A_0$, ta có: $\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$.

Vì $A \le \xi \le A'$ nên ta cũng có:

$$|F(A') - F(\xi)| = \left|\int_\xi^{A'} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L} \text{ và}$$

$$|F(\xi) - F(A)| = \left|\int_A^{\xi} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Từ đó: với mọi $A' > A > A_0$, ta có:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L + \frac{\varepsilon}{2L}\cdot L = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Vậy ta đã chứng tỏ rằng với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 > a$ sao cho với mọi $A' > A > A_0$ ta có:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)dx\right| < \varepsilon ,$$

theo tiêu chuẩn Cauchy, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ .

Ví dụ 1: Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx, \ (a > 0, \alpha > 0) .$$

Trước hết ta xét sự hội tụ tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$.

Ta có hàm f(x) = sinx thỏa mãn giả thiết của dấu hiệu Dirichlet:

$$|F(A)| = \left|\int_a^{A} \sin x dx\right| = |\cos a - \cos A| \le 2$$

Còn hàm $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $(\alpha > 0)$ có đạo hàm liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$, $(a > 0)$ và đơn điệu dần về không khi $x \to +\infty$. Do đó theo dấu hiệu Dirichlet, tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $(a > 0, \alpha > 0)$ hội tụ.

Tương tự, tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ với $a > 0$ và $\alpha > 0$ hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet.

Ví dụ 2: Xét sự hội tụ của tích phân:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2} \sin \frac{1}{x}}{1+x^2} dx \cdot$$

Áp dụng dấu hiệu Abel với hàm $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ và $g(x) = e^{-x^2}.\sin\frac{1}{x}$, $(x \geq 1)$. Ta có:

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} .$$

còn hàm $g(x) = e^{-x^2} \sin\frac{1}{x}$ đơn điệu và bị chặn bởi L = 1. Do đó tích phân đã cho hội tụ theo dấu hiệu Abel .

Ví dụ 3: Xét tích phân $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

Đổi biến $x = \sqrt{t}$, $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$;

Khi đó $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$.

Tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet, do đó $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ hội tụ .

§ 4. SỰ HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI VÀ BÁN HỘI TỤ

Trước hết ta chứng minh định lý sau:

Định lý 8.VIII. Giả sử $f : [a, +\infty) \to R$ là hàm số khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $A \geq a$.

Khi đó nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

Chứng minh: Giả sử $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 > a$ sao cho với mọi $A' > A > A_0$,

$$\int_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon .$$

Khi đó ta cũng có:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leq \int_A^{A'} |f(x)|dx < \varepsilon .$$

Như vậy với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số $A_0 > a$ để sao cho với mọi $A' > A > A_0$

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon .$$

Theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ .

Ta chú ý rằng điều ngược lại không đúng, tức là từ sự hội tụ của tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ chưa thể suy ra sự hội tụ của $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. Ta dẫn ra ví dụ sau đây để minh họa cho điều đó .

Xét hàm $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$. Theo dấu hiệu Dirichlet, tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ hội tụ. Tuy nhiên tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = \int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ không hội tụ.

Thật vậy, ta có: $|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, với mọi $x \geq a > 0$.

Ta xét tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_a^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx$. Trong đó $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{2x}$, $a > 0$, phân kỳ, còn tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx$ hội tụ theo dấu hiệu Dirchlet. Vậy nên $\int_a^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ phân kỳ.

Hơn nữa từ bất đẳng thức:

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{|\sin x|}{x},\ x \in [a, +\infty),\ a > 0,$$

ta suy ra tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ phân kỳ (theo dấu hiệu so sánh).

Định nghĩa: Giả sử $f : [a, +\infty) \to R$ là hàm khả tích trong mọi đoạn hữu hạn $[a, A]$, $A \geq a$.

Khi đó nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối, nếu tích phân $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ nhưng tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ không tuyệt đối (hay bán hội tụ, hay hội tụ có điều kiện).

Ví dụ 1: Tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx$ hội tụ tuyệt đối. Thật vậy, ta có:

$$\left|\frac{\cos ax}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}, \; x \in [0, +\infty).$$

Vì $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh tích phân $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos ax}{1+x^2}\right|dx$ hội tụ, điều này có nghĩa là tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 2: Tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, $a > 0$, hội tụ không tuyệt đối.

§ 5. TÍCH PHÂN SUY RỘNG ĐỐI VỚI HÀM KHÔNG BỊ CHẶN

1. Định nghĩa

Giả sử f(x) là hàm xác định trong khoảng [a, b), $(-\infty < a < b < +\infty)$, không bị chặn trong lân cận x = b .

Giả thiết rằng với mọi $\eta > 0$ đủ bé sao cho $a < b - \eta < b$, hàm f(x) khả tích trong đoạn $[a, b - \eta]$. Khi đó:

$$G(\eta) = \int_a^{b-\eta} f(x)dx\,,$$

là hàm xác định trong khoảng (0, b - a] .

Ký hiệu hình thức

$$\lim_{\eta\to+0} G(\eta) = \lim_{\eta\to+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx\,.$$

Ta gọi $\int_a^b f(x)dx$ là tích phân suy rộng loại 2 của hàm f(x) trong khoảng [a, b), điểm b được gọi là điểm kỳ dị .

Nếu giới hạn $\lim\limits_{\eta\to+0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$ tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, trong trường hợp ngược lại (tức là giới hạn trên không tồn tại hoặc bằng $+\infty$, $-\infty$) thì ta nói tích phân phân kỳ .

Tương tự nếu hàm f(x) xác định trong khoảng (a, b], không bị chặn trong lân cận điểm x = a, khả tích trong mọi đoạn con [a + η, b], (0 < η ≤ b - a), thì tích phân suy rộng trên khoảng (a, b] được xác định theo công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to +0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx .$$

Nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân hội tụ, nếu không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân phân kỳ. Trong trường hợp này điểm x = a là điểm kỳ dị.

Nếu f(x) là hàm xác định trong khoảng (a, b) không bị chặn trong lân cận các điểm x = a và x = b, khả tích trong mọi đoạn con [a + η, b - η'] ⊂ (a, b). Khi đó tích phân suy rộng của hàm f(x) trong khoảng (a, b) được xác định theo công thức:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\eta' \to ^+0 \\ \eta \to ^+0}} \int_{a+\eta}^{b-\eta'} f(x)dx .$$

trong đó giới hạn bên phải của đẳng thức này là giới hạn kép của hàm hai biến số:

$$G(\eta.\eta') = \int_{a+\eta}^{b-\eta'} f(x)dx$$

khi η' → +0 và η → +0.

Hiển nhiên nếu với c ∈ (a, b), a < c < b, và cả hai tích phân $\int_a^c f(x)dx$ và $\int_c^b f(x)dx$ đều hội tụ thì ta có:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Trong trường hợp, trong đoạn [a, b] có một số hữu hạn điểm $c_1, c_2, \ldots, c_m$ mà trong lân cận của chúng hàm f(x) không bị chặn, thì bằng cách chia đoạn [a, b] thành một số hữu hạn các đoạn con ta đưa tích phân $\int_a^b f(x)dx$ thành tổng của một số hữu hạn các tích phân trên mỗi đoạn con sao cho mỗi tích phân chỉ có một điểm kỳ dị. Vì vậy sau đây, ta chỉ cần xét tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ chỉ có một điểm kỳ dị x = b, các trường hợp khác được suy ra tương tự.

Hơn nữa, đối với tích phân suy rộng loại 2:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

bằng cách đổi biến $t = \frac{1}{b-x}$, tức là $x = b - \frac{1}{t}$, thì tích phân trên được đưa về tích phân suy rộng loại 1:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Do vậy các kết quả được chứng minh đối với tích phân suy rộng loại 1 có thể suy ra cho tích phân suy rộng loại 2. Dĩ nhiên các kết quả như vậy cũng có thể nhận được bằng cách chứng minh trực tiếp.

2. Tiêu chuẩn hội tụ

Định lý 9.VIII. Điều kiện cần và đủ để tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ là: với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon)$ để sao cho với mọi η, η': $0 < \eta < \delta$, $0 < \eta' < \delta$ ta có:

$$\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Chứng minh: Theo định nghĩa, tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\lim_{\eta \to +0} G(\eta) = \lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx .$$

Mặt khác theo tiêu chuẩn Cauchy về giới hạn hàm số thì giới hạn này tồn tại hữu hạn khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ để sao cho với η, η': $0 < \eta < \delta$, $0 < \eta' < \delta$ ta có:

$$| G(\eta') - G(\eta) | = \left| \int_a^{b-\eta'} f(x)dx - \int_a^{b-\eta} f(x)dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

3. Dấu hiệu hội tụ đối với tích phân suy rộng của hàm không âm

Ta xét tích phân $\int_a^b f(x)dx$ của hàm $f(x)$ xác định, không âm trong khoảng $[a, b)$, khả tích trong mọi đoạn con $[a, b - \eta]$, $(0 < \eta \le b - a)$ nằm trong khoảng $[a, b)$.

Chứng minh tương tự như trường hợp tích phân suy rộng loại 1, đối với tích phân suy rộng loại 2 cũng có các dấu hiệu hội tụ sau đây, được gọi là các dấu hiệu so sánh.

Định lý 10.VIII. Giả sử f(x) và g(x) là các hàm xác định và không âm trong khoảng [a, b), thỏa mãn điều kiện: $0 \le f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in [a, b)$.

Khi đó:

Nếu tích phân $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ;

Nếu tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì tích phân $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ .

Định lý 11.VIII. Giả sử f(x) và g(x) là những hàm xác định và không âm trong khoảng [a, b). Khi đó nếu tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k,\ 0 < k < +\infty$$

thì các tích phân $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Ví dụ 1: Xét tích phân $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $(\alpha > 0)$

Với $\alpha \ne 1$, ta có:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \lim_{\eta \to +0} \int_a^{b-\eta} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha} \lim_{\eta \to +0} [\eta^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}]$$

Với $\alpha = 1$: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{\eta\to+0}\int_a^{b-\eta}\frac{dx}{b-x} = -\lim_{\eta\to+0} \ln|b-x|\Big|_a^{b-\eta}$

$$= -\lim_{\eta\to+0} \ln\left|\frac{\eta}{b-a}\right|.$$

Do đó ta suy ra: tích phân $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ hội tụ nếu $0 < \alpha < 1$ và phân kỳ nếu $\alpha \geq 1$.

Định lý 12.VIII. Giả sử f(x) là hàm số xác định trong khoảng [a, b) và trong lân cận của điểm x = b, hàm f(x) có dạng: $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(b-x)^\alpha}$. Khi đó:

a) Nếu $0 < \alpha < 1$ và $0 \leq \varphi(x) \leq M$, trong đó M là hằng số dương thì tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

b) Nếu $\alpha \geq 1$ và $\varphi(x) \geq m > 0$ thì tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

4. Sự hội tụ tuyệt đối

Tương tự như tích phân suy rộng loại 1, ta cũng có định lý sau đây, chứng minh tương tự như định lý 8.VIII.

Định lý 13.VIII. Giả sử f(x) là hàm số xác định trong khoảng [a, b), không bị chặn trong lân cận điểm x = b, khả tích trong mọi đoạn con [a, b - η], 0 < η ≤ b - a), của khoảng [a, b). Khi đó nếu tích phân $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.

Định nghĩa: Nếu tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối, nếu tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nhưng tích phân $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ có điều kiện (hay bán hội tụ).

Dưới đây ta xét một vài ví dụ về tích phân suy rộng loại 2.

Ví dụ 2: Cho hàm $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ trong khoảng [0, 1)

Ta có: với mọi η: $0 < \eta < 1$,

$$\int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta).$$

Do đó: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to+0} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to+0} \arcsin(1-\eta) = \frac{\pi}{2}.$

Tương tự ta cũng có:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to+0} \int_{-1+\eta}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{\eta\to+0} \operatorname{arx\,sin}(-1+\eta) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Ví dụ 3: Xét $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$.

Áp dụng tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = x.\ln \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg}x}dx.$$

Ta chú ý rằng $\lim\limits_{x\to+0} \frac{x}{\operatorname{tg}x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{x}{\operatorname{tg}x} = 0$.

Do đó nếu xác định hàm số:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{\operatorname{tg}x} & \text{nếu } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

thì F(x) là hàm liên tục trên đoạn [0, π], và

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx.$$

Từ đó ta suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ hội tụ.

Hơn nữa nếu đổi biến x = 2t, ta có:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin 2t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t \cos t) dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt.$$

Đối với tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt$, đặt $t = \frac{\pi}{2} - u$, khi đó với $t = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $u = \frac{\pi}{4}$, $dt = -du$,

do đó:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u du.$$

Vậy nên

$$J = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin t dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u du = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2J.$$

Từ đó: $J = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

Ví dụ 4: Xét tính hội tụ của tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1 - x^4}}$.

Hàm $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1 - x^4}}$ không bị chặn khi $x \to 1 - 0$. Hơn nữa khi $x \to 1 - 0$:

$$1 - x^4 = (1 + x^2)(1 - x^2) = (1 + x^2)(1 + x)(1 - x) \sim 4(1 - x)$$

Do đó $f(x) = (1-x^4)^{-\frac{1}{4}} \sim \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}(1-x)^{\frac{1}{4}}}$ khi $x \to 1 - 0$.

Vì $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh ta suy ra $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ hội tụ.

Ví dụ 5: Xét tích phân $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Với $a < c < b$, ta viết tích phân đã cho dưới dạng tổng hai tích phân suy rộng loại 2:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_a^c \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} + \int_c^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

Khi $x \to a + 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{b-a}} \cdot \dfrac{1}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$,

Khi $x \to b - 0$: $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{b-a}} \cdot \dfrac{1}{(b-x)^{\frac{1}{2}}}$.

Do đó cả hai tích phân trong các khoảng (a, c] và [c, b) đều hội tụ, nên tích phân đã cho hội tụ.

Để tính tích phân đã cho ta hãy đổi biến

$$x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi = a + (b - a)\sin^2\varphi$$

Khi $x = a$, $\varphi = 0$, khi $x = b$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$(x - a)(b - x) = (b - a)\sin^2\varphi \,.\, (b - a)\cos^2\varphi = (b - a)^2.\sin^2\varphi.\cos^2\varphi$$

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin\varphi.\cos\varphi \,,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$dx = 2(b - a)\sin\varphi \cos\varphi d\varphi$.

Do đó:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(b-a)\sin\varphi\cos\varphi}{(b-a)\sin\varphi\cos\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \pi \,.$$

B. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§6. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ VỚI CẬN HỮU HẠN

1. Định nghĩa: Giả sử $f(x, y)$ là một hàm số xác định với x thuộc đoạn $[a, b]$ và y thuộc một tập hợp số thực Y nào đó, sao cho với mỗi y cố định thuộc Y hàm $f(x, y)$ khả tích trong đoạn $[a, b]$.

Đặt $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$.

Khi đó $I(y)$ là một hàm số xác định trên tập Y và được gọi là tích phân phụ thuộc tham số của hàm $f(x, y)$ trong đoạn $[a, b]$

Ví dụ: Cho $f(x, y) = e^{xy}$, $x \in [a, b]$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

Ta có: với y = 0 thì $f(x, 0) = e^{x.0} = 1$ nên

$$I(0) = \int_a^b f(x,0)dx = \int_a^b e^{x.0}dx = b - a.$$

Với $y \neq 0$ thì

$$I(y) = \int_a^b e^{xy}dx = \frac{1}{y}e^{xy}\Big|_{x=a}^{x=b} = \frac{e^{by} - e^{ay}}{y}.$$

Vậy tích phân phụ thuộc tham số:

$$I(y) = \int_a^b e^{xy}dx = \begin{cases} b - a \text{ nếu } y = 0 \\ \frac{1}{y}(e^{by} - e^{ay}) \text{ nếu } y \neq 0 \end{cases}$$

là một hàm xác định trong $(-\infty, +\infty)$.

2. Tính chất của tích phân xác định phụ thuộc tham số

Giả sử f(x, y) là hàm số xác định trong hình chữ nhật

$\mathscr{D} = [a, b; c, d] = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y),\ a \leq x \leq b;\ c \leq y \leq d\}$.

Định lý 14.VIII. (Tính liên tục của tích phân phụ thuộc tham số)

Nếu hàm f(x, y) xác định và liên tục trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$ thì tích phân phụ thuộc tham số: $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ là một hàm liên tục trong đoạn [c, d].

Chứng minh: Vì hàm f(x, y) liên tục trong hình chữ nhật (đóng) $\mathscr{D}$ nên sẽ liên tục đều trong miền đó (theo định lý Cantor). Điều đó có nghĩa là: Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $(x', y'), (x'', y'') \in \mathscr{D}$ mà $|x'-x''| < \delta$, $|y'-y''| < \delta$ thì

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Giả sử y_0 là điểm bất kỳ thuộc đoạn [c, d], khi đó với mọi $y \in [c, d]$ mà $|y-y_0| < \delta$ thì $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Bởi vậy ta sẽ có:

$$|I(y) - I(y_0) = |\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx|$$

$$= |\int_a^b [f(x,y) - f(x,y_0)]dx| \le \int_a^b |f(x,y) - f(x,y_0)|dx$$

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a}.(b-a) = \varepsilon \text{ với mọi } y \in [c, d], |y - y_0| < \delta.$$

Như vậy ta đã chứng tỏ rằng: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall y \in [c, d]$ $|y - y_0| < \delta$ thì $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$. Có nghĩa là I(y) là hàm liên tục tại y_0.

Vì y_0 là điểm tùy ý nên từ đó ta khẳng định được rằng: tích phân phụ thuộc tham số I(y) liên tục trên đoạn [c, d].

Chú ý: Với giả thiết của định lý ta có:

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx, \ y_0 \in [c, d].$$

Định lý 15.VIII. (Tính khả vi của tích phân phụ thuộc tham số).

Giả sử f(x, y) là hàm số xác định trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$ *liên tục theo* $x \in [a, b]$ với *mỗi y cố định* thuộc đoạn [c, d]. Hơn nữa f(x, y) có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *là một hàm liên tục trong hình chữ nhật* $\mathscr{D}$. Khi đó tích phân phụ thuộc tham số:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \ , \ \ y \in [c, d]$$

là một hàm khả vi và:

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx \ , \quad y \in [c, d].$$

Chứng minh: Xét điểm y_0 bất kỳ thuộc đoạn $[c, d]$. Ta có:

$$\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0}\left\{ \int_a^b f(x, y)dx - \int_a^b f(x, y_0)dx \right\}$$

$$= \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx \ , \qquad y \in [c, d] \ , \quad y \neq y_0.$$

Áp dụng công thức số gia giới nội theo y ta có:

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - y_0)$$

trong đó ξ là điểm nằm giữa y_0 và y. Khi đó:

$$\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)dx$$

Theo giả thiết $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ là một hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$ nên liên tục đều trong miền đó, vì thế: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon)$ sao cho với mọi $y \in [c, d]$ và $|y - y_0| < \delta$ ta có:

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \text{ với mọi } x \in [a, b].$$

Vì $|\xi - y_0| \leq |y - y_0| < \delta$ nên khi đó ta có:

$$\left|\int_a^b \left\{\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}\right\}dx\right| \leq \int_a^b \left|\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y}\right|dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon .$$

Điều đó chứng tỏ rằng:

$$\lim_{\xi \to y_0} \int_a^b \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,x_0)}{\partial y}dx$$

hay $$\lim_{y \to y_0} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} = \lim_{\xi \to y_0} \int_a^b \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx .$$

Vậy tồn tại: $I'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx$. Vì y_0 là điểm tùy ý trong đoạn [c, d] nên ta sẽ có: $I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ với mọi y thuộc đoạn [c, d]. Đó là điều phải chứng minh.

Định lý 16.VIII. (Tính khả tích của tích phân phụ thuộc tham số)

Nếu f(x, y) là hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathscr{D} = [a, b] \times [c, d]$ thì ta có công thức:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

Hay là: $$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh công thức:

$$\int_c^\eta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^\eta f(x,y)dy \quad \text{với} \quad c \le \eta \le d .$$

Ta đặt:

$$\varphi(x,\eta) = \int_c^\eta f(x,y)dy \ , \ x \in [a, b] .$$

Vì f(x, y) liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ nên cũng liên tục trong hình chữ nhật con:

$$\mathcal{D}\eta = [a, b] \times [c, \eta] \subset \mathcal{D}, c \le \eta \le d$$

do đó theo định lý 14.VIII thì $\varphi(x, \eta)$ *liên tục theo* $x \in [a, b]$.

Hơn nữa với mỗi x cố định, f(x, y) liên tục theo $y \in [a, b]$ nên $\varphi(x, \eta)$ là một hàm khả vi theo η và ta có:

$$\frac{\partial\varphi(x,\eta)}{\partial\eta} = \varphi'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta) .$$

Vì vậy: $\varphi'_\eta(x, \eta)$ *là một hàm liên tục (theo cả hai biến)* trong $\mathcal{D}$.

Đặt $F(\eta) = \int_a^b \varphi(x,\eta)dx \ , \quad \eta \in [c, d]$

thì theo định lý 15.VIII về tính khả vi của tích phân phụ thuộc tham số ta sẽ có: $F(\eta)$ là hàm khả vi theo $\eta \in [c, d]$ và

$$F'(\eta) = \int_a^b \frac{\partial\varphi(x,\eta)}{\partial\eta} dx = \int_a^b f(x,\eta)dx \ , \ \eta \in [c, d] .$$

Vậy: $\quad F'(\eta) = I(\eta), \eta \in [c, d] . \qquad (1)$

Mặt khác, ta xét hàm số:

$$G(\eta) = \int_c^\eta dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_c^\eta I(y)dy \ .$$

Vì f(x, y) liên tục trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$, nên I(y) là hàm liên tục theo $y \in [c, d]$ (định lý 14.VIII), do đó $G(\eta)$ là hàm khả vi theo $\eta \in [c, d]$ và ta có:

$$G'(\eta) = \left(\int_c^\eta I(y)dy \right)' = I(\eta) \ , \ \eta \in [c, d] \ . \qquad (2)$$

So sánh các đẳng thức (1) và (2) vừa nhận được ta thấy:

$$F'(\eta) = G'(\eta), \quad \eta \in [c, d].$$

Vì thế $F(\eta) = G(\eta) + C$, với C là một hằng số nào đó.

Thay $\eta = c$ ta có: $F(c) = G(c) + C$.

Nhưng vì $F(c) = G(c) = 0$ nên $C = 0$.

Vậy $F(\eta) = G(\eta) \ \ \forall \eta \in [c, d]$.

Thay $\eta = d$ ta có $F(d) = G(d)$. Đó là công thức cần chứng minh.

Ví dụ: Tính tích phân: $I(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \ , \quad 0 < a < b.$

Trước hết ta lưu ý rằng:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \ , \ \ 0 < a < b \ .$$

Do đó: $I(a, b) = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy$.

Vì hàm $f(x, y) = x^y$ thỏa mãn các giả thiết của định lý nên ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(a, b) = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx =$$

$$= \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}$$

§ 7. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ VỚI CẬN TÍCH PHÂN THAY ĐỔI

Cho $\mathscr{D} = [a, b; c, d] = [a, b] \times [c, d]$, và C_1 , C_2 là hai đường cong trơn nằm trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$ tương ứng có các phương trình:

$$x = \alpha(y) \text{ và } x = \beta(y), \quad y \in [c, d]$$

trong đó $\alpha(y)$ và $\beta(y)$ là các hàm xác định trong $[c, d]$.

Giả sử $f(x, y)$ là hàm xác định trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$, khả tích theo $x \in [a, b]$ với y cố định trong đoạn $[c, d]$.

Đặt $$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \ , \ y \in [c, d].$$

Khi đó $I(y)$ là hàm số xác định trong đoạn $[c, d]$...

Định lý 17.VIII: Giả sử $f(x, y)$ là hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$, $\alpha(y)$ và $\beta(y)$ là các hàm liên tục trong đoạn $[c, d]$ thì tích phân phụ thuộc tham số:

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \ , \ y \in [c, d]$$

là một hàm liên tục trong đoạn $[c, d]$.

Chứng minh: Xét y_0 cố định thuộc đoạn [c, d]. Ta có:

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx + \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx$$

$$= I_1(y) + I_2(y) + I_3(y) .$$

Ta lần lượt chứng minh các hàm $I_1(y)$, $I_2(y)$, $I_3(y)$ liên tục tại y_0.

Theo định lý 14.VIII, vì f(x, y) liên tục trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$ nên cũng liên tục trong hình chữ nhật $[\alpha(y_0), \beta(y_0)] \times [c, d] \subset \mathscr{D}$, thì hàm $I_1(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx$ liên tục trong [c, d], do đó liên tục tại $y_0 \in [c, d]$.

Để xét tính liên tục của hàm $I_2(y) = \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx$, ta chú ý rằng: vì f(x, y) liên tục trong hình chữ nhật (đóng) $\mathscr{D}$ nên bị chặn tức là tồn tại một số M > 0 sao cho:

$$|f(x, y)| \le M, \quad \forall (x, y) \in \mathscr{D} .$$

Vì thế:

$$|I_2(y)| = \left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right| \le M.|\beta(y) - \beta(y_0)|$$

Vì $\beta(y)$ liên tục trong [c, d] cho nên liên tục tại y_0, bởi vậy $\lim\limits_{y \to y_0} [\beta(y) - \beta(y_0)] = 0$. Do đó từ bất đẳng thức cuối cùng cho $y \to y_0$ ta sẽ có:

$$\lim_{y\to y_0} |I_2(y)| \le M \lim_{y\to y_0} |\beta(y) - \beta(y_0)| = 0$$

từ đó: $$\lim_{y\to y_0} I_2(y) = 0 = I_2(y_0).$$

Chứng minh tương tự, đối với $I_3(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx$

ta cũng có:

$$\lim_{y\to y_0} I_3(y) = 0 = I_3(y_0).$$

Cuối cùng ta có: $I_1(y)$, $I_2(y)$ và $I_3(y)$ đều liên tục tại y_0 vì thế $I(y)$ cũng là hàm liên tục tại y_0. Do y_0 được lấy tùy ý trong đoạn [c, d], cho nên ta suy ra $I(y)$ liên tục trên đoạn [c, d]. Đó là điều phải chứng minh.

Định lý 18.VIII. Giả thiết

a) Hàm $f(x, y)$ xác định trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$, liên tục theo $x \in [a, b]$ với mỗi y cố định trong đoạn [c, d];

b) Hàm $f(x, y)$ có đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ liên tục (theo cả hai biến) trong hình chữ nhật $\mathscr{D}$;

c) Các hàm $\alpha(y)$ và $\beta(y)$ khả vi trong đoạn [c, d].

Khi đó tích phân $I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx, y \in [c, d]$ là một hàm khả vi và ta có công thức:

$$I'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y], \ y \in [c, d].$$

Chứng minh: Xét $y_0 \in [c, d]$. Ta có:

$$I(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y)dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx + \int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $I_1(y)$, $I_2(y)$ và $I_3(y)$ là những hàm khả vi tại y_0 .

Trước hết theo định lý 15.VIII, $I_1(y)$ là hàm khả vi tại y_0 và ta có:

$$I'_1(y) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx \,,\ y \in [c, d] \,. \tag{1}$$

Đối với $I_2(y)$ ta xét tỷ số:

$$\frac{I_2(y) - I_2(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \left\{ \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx - \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,y_0)dx \right\}$$

$$= \frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \,.$$

Vì f(x, y) là hàm liên tục theo $x \in [a, b]$ nên cũng liên tục trong đoạn $[\beta(y_0), \beta(y)]$, cho nên áp dụng định lý trung bình của tích phân xác định ta sẽ có:

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,y)dx = f(x^*, y)[\beta(y) - \beta(y_0)]$$

trong đó x^* là điểm nằm giữa $\beta(y_0)$ và $\beta(y)$. Do đó:

$$\frac{I_2(y) - I_2(y_0)}{y - y_0} = f(x^*, y) \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \,.$$

Theo giả thiết c) thì: $\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0}=\beta'(y_0)$.

Mặt khác vì $\beta(y)$ khả vi trên đoạn [c, d] nên liên tục trên đó, vì thế khi $y \to y_0$ thì $\beta(y) \to \beta(y_0)$. Nhưng vì x^* nằm giữa $\beta(y_0)$ và $\beta(y)$ nên khi $y \to y_0$ thì $x^* = x^*(y) \to \beta(y_0)$. Hơn nữa theo giả thiết $f(x, y)$ là hàm liên tục theo biến x với mỗi y cố định và có đạo hàm liên tục theo y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ thì $f(x, y)$ cũng liên tục theo y, nên khi $y \to y_0$: $f(x^*, y) \to f[\beta(y_0), y_0]$.

Vậy nên tồn tại giới hạn:

$$\lim_{y\to y_0} f(x^*,y)\frac{\beta(y)-\beta(y_0)}{y-y_0}=f[\beta(y_0),y_0].\beta'(y_0).$$

Điều đó có nghĩa là tồn tại đạo hàm:

$$I_2'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{I_2(y)-I_2(y_0)}{y-y_0}=f[\beta(y_0),y_0].\beta'(y_0). \qquad (2)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự $I_3(y)=\displaystyle\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,y)dx$ tồn tại đạo hàm:

$$I'_3(y_0) = - f[\alpha(y_0), y_0] . \alpha'(y_0). \qquad (3)$$

Vậy $I(y) = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y)$ là hàm khả vi tại điểm y_0 bất kỳ thuộc đoạn [c, d] và

$$I'(y_0) = I'_1(y_0) + I'_2(y_0) + I'_3(y_0).$$

Kết hợp (1) (2) và (3) ta có công thức cần chứng minh.

§8. TÍCH PHÂN SUY RỘNG VỚI CẬN VÔ HẠN PHỤ THUỘC THAM SỐ

1. Khái niệm về sự hội tụ đều của tích phân phụ thuộc tham số

Giả sử f(x, y) là hàm số xác định với mọi $x \in [a, +\infty)$ và $y \in Y \subset R$ sao cho với mỗi y cố định thì f(x, y) khả tích suy rộng trong khoảng $[a, +\infty)$.

Đặt: $$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx,$$

khi đó I(y) là một hàm số xác định trong Y.

Theo định nghĩa tích phân suy rộng: với mỗi $y \in Y$:

$$I(y) = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx.$$

Điều đó có nghĩa là:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon, y): \forall A > A_0: \left|\int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

trong đó $A_0(\varepsilon, y)$ nói chung phụ thuộc cả ε và y .

Nếu đối với một hàm số f(x, y) nào đó mà trong mệnh đề này ta có thể chọn số A_0 chỉ phụ thuộc ε mà không phụ thuộc y, tức là:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$ (không phụ thuộc y): $\forall A > A_0$:
$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

với mọi $y \in Y$ thì ta nói sự hội tụ của $I(y) = \int_A^{+\infty} f(x,y)dx$ là đều với mọi $y \in Y$.

Một cách chính xác ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 2: Ta nói tích phân

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx\ ,\ y \in Y$$

hội tụ đều trên Y nếu:

a) Với mỗi $y \in Y$ cố định, tích phân $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ,

b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$ (không phụ thuộc y) sao cho

$$\forall A > A_0 \quad \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \ \ \forall y \in Y.$$

Nhận xét: Khái niệm hội tụ đều của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số về cơ bản giống với khái niệm hội tụ đều của chuỗi hàm. Trong định nghĩa của nó thay cho tổng riêng thứ n $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ của chuỗi hàm bởi tích phân trên đoạn hữu hạn $\int_a^{A} f(x,y)dx$, còn phần dư $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ bởi tích phân $\int_A^{+\infty} f(x,y)dx$. Vì thế các kết quả cơ bản về chuỗi hàm cũng được chuyển thành các kết quả tương ứng về tích phân suy rộng phụ thuộc tham số với cách chứng minh tương tự.

Định lý 19.VIII. (Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ đều)

Điều kiện cần và đủ để tích phân

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ , } y \in Y$$

hội tụ đều là: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon)$ (không phụ thuộc y) sao cho với mọi A, A' > A_0 ta có:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \text{, với mọi } y \in Y.$$

Chứng minh: Điều kiện cần: giả thiết tích phân I(y) hội tụ đều trên tập Y. Theo định nghĩa $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists A_0 = A_0(\varepsilon) \ \ \forall A > A_0$:

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall y \in Y.$$

Khi đó với A' > A_0 ta cũng có:

$$\left|\int_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall y \in Y.$$

Do đó với mọi A, A' > A_0 và mọi $y \in Y$:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx - \int_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$

$$\le \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int_{A'}^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Vậy: $\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists A_0 = A_0(\varepsilon) \ \forall A, A' > A_0$:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon, \ \ \forall y \in Y .$$

Điều kiện đủ: Giả thiết rằng:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon)$ (không phụ thuộc y) sao cho với mọi A, A' > A_0:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon,\ \forall y \in Y.$$

Từ giả thiết của điều kiện đủ ta suy ra với mỗi y_0 cố định thuộc Y, tích phân

$$I(y_0) = \int_a^{+\infty} f(x, y_0)dx$$

thỏa mãn tiêu chuẩn hội tụ Cauchy đối với tích phân suy rộng, do đó hội tụ.

Ngoài ra, theo giả thiết với mọi A, A' > A_0 thì

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon,\ \ \forall y \in Y.$$

Từ đó cho A' → +∞, do tích phân I(y) hội tụ nên ta có:

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\ \ \forall y \in Y.$$

Vậy tích phân I(y) hội tụ đều trên tập Y. Định lý chứng minh xong.

Tương tự như định lý Weierstrass về chuỗi hàm ta cũng có định lý sau đây:

Định lý 20.VIII. Giả sử tồn tại hàm φ(x) không âm trong khoảng [a, ∞) sao cho:

$$|f(x, y)| \le \varphi(x)\ \forall y \in Y,\ \forall x \in [a, +\infty).$$

Khi đó nếu tích phân $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ hội tụ đều trên tập Y.

Chứng minh: Giả sử tích phân $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ hội tụ. Theo tiêu chuẩn hội tụ Cauchy ta có với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon)$ sao cho với mọi $A' > A > A_0$ thì $\left|\int_A^{A'}\varphi(x)dx\right| < \varepsilon$.

Theo giả thiết của định lý, khi đó ta sẽ có:

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)dx\right| \le \int_A^{A'}|f(x,y)|dx \le \int_A^{A'}\varphi(x)dx < \varepsilon,\ \ y \in Y .$$

Vậy với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon)$ sao cho với mọi $A' > A > A_0$ ta có:

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)dx\right| < \varepsilon,\ \ y \in Y .$$

Theo tiêu chuẩn hội tụ đều Cauchy, tích phân $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ hội tụ đều trên tập Y .

Ví dụ 1: Xét tích phân $I(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}dx$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

Ta có: $\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in [0, +\infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$.

Vì $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, nên theo định lý 20.VIII tích phân đã cho hội tụ đều trong khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Tương tự, tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{1+x^2} dx$ hội tụ đều trong khoảng $(-\infty, +\infty)$.

Ví dụ 2: Xét tích phân $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} e^{-ax} dx$, $a > 0$, $\alpha > 1$.

Ta có: $x^{-\alpha} e^{-ax} < \frac{1}{x^{\alpha}}$, với mọi $x \geq 1$, $a > 0$. Vì $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ hội tụ với $\alpha > 1$, cho nên $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} e^{-ax} dx$ hội tụ đều với mọi $a > 0$.

Bây giờ ta xét tích phân dạng:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y).\, g(x) dx, \quad y \in Y.$$

Tương tự như các dấu hiệu Dirichlet và Abel về sự hội tụ đều của chuỗi hàm, ta có hai dấu hiệu hội tụ đều dưới đây cho sự hội tụ đều của tích phân phụ thuộc tham số.

Định lý 21.VIII. Giả sử $f(x, y)$ là hàm số xác định với $x \geq a$, $y \in Y$, liên tục theo $x \in [a, +\infty)$ với mỗi y cố định; $g(x)$ là hàm xác định, đơn điệu, và có đạo hàm $g'(x)$ liên tục trong khoảng $[a, +\infty)$. Hơn nữa:

a) Tích phân

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx,$$

là hàm bị chặn đều với mọi $A \geq a$ và mọi $y \in Y$. Tức là tồn tại hằng số $k > 0$ sao cho:

$$|F(A, y)| \leq k,\ \forall A \geq a,\ \forall y \in Y.$$

b) $g(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$

Khi đó tích phân $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y).g(x)dx$ hội tụ đều trong tập Y.

Chứng minh: (Tương tự như chứng minh định lý 6.VIII)

Cho trước $\varepsilon > 0$, vì $g(x) \to 0$ khi $x \to +\infty$ nên tồn tại số $A_0 > 0$ sao cho với mọi $x \geq A_0$:

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4k}.$$

Với mọi $A' > A > A_0$, áp dụng tích phân từng phần ta có:

$$\int_A^{A'} f(x,y).g(x)dx = F(A',y).g(A') - F(A,y).g(A) - \int_A^{A'} F(x,y).g'(x)dx$$

Áp dụng định lý trung bình suy rộng đối với tích phân $\int_A^{A'} F(x,y).g'(x)dx$, ta có:

$$\int_A^{A'} F(x,y).g(x)dx = F(\xi,y)\int_A^{A'} g'(x)dx = F(\xi,y)[g(A') - g(A)],\ (A \leq \xi \leq A')$$

Từ đó:

$$\int_A^{A'} f(x,y).g(x)dx = [F(A',y) - F(\xi,y)].g(A') + [F(\xi,y) - F(A,y)].g(A).$$

Theo giả thiết của định lý, ta có:

$$|F(A', y) - F(\xi, y)| \le 2k, \; |F(\xi, y) - F(A, y)| \le 2k.$$

Mặt khác với $A' > A > A_0$ thì

$$|g(A')| < \frac{\varepsilon}{4k}, \; |g(A)| < \frac{\varepsilon}{4k}.$$

Do đó:

$$\left|\int_A^{A'} F(x,y).g(x)dx\right| \le 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} + 2k \cdot \frac{\varepsilon}{4k} = \varepsilon.$$

Vậy: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_0 = A_0(\varepsilon) \; \forall A' > A > A_0$:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y).\, g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ đều của tích phân phụ thuộc tham số, tích phân I(y) hội tụ đều theo $y \in Y$.

Định lý 22.VIII. Giả thiết.

a) Hàm f(x, y) xác định với mọi $x \ge a$, $y \in Y$, đơn điệu và liên tục theo $x \in [a, +\infty)$ với mỗi y cố định, có đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ liên tục theo x trong khoảng $[a, +\infty)$, bị chặn đều: $|f(x, y)| \le L$ $\forall x \ge a, \forall y \in Y$.

b) Tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ.

Khi đó tích phân $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)g(x)dx$ hội tụ đều trong tập Y.

Chứng minh: Ký hiệu $G(A) = \int_a^A g(x)dx$. Giả sử A' > A, áp dụng phép tích phân từng phần ta có:

$$\int_A^{A'} f(x,y).g(x)dx = f(A',y)G(A') - f(A,y).G(A) - \int_A^{A'} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.G(x)dx.$$

Áp dụng định lý trung bình thứ hai đối với tích phân $\int_A^{A'} \frac{\partial f}{\partial x} G(x)dx$ ta nhận được:

$$\int_A^{A'} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} G(x)dx = G(\xi) \int_A^{A'} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx.$$

$$= G(\xi)[f(A', y) - f(A, y)],\ A \le \xi \le A'.$$

Từ đó:

$$\int_A^{A'} f(x,y)g(x)dx = f(A',y)[G(A') - G(\xi)] + f(A,y)[G(\xi) - G(A)].$$

Theo giả thiết, tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon)$, để sao cho với mọi $A' > A > A_0$

$$\left|\int_A^{A'} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Khi đó với $A' > A > A_0$, vì $A \le \xi \le A'$ nên $\xi > A_0$. Do đó:

$$|G(A') - G(\xi)| = \left|\int_\xi^{A'} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

$$|G(\xi)-G(A)| = \left|\int_A^{\xi} g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Từ đó:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)g(x)dx\right| \le L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} + L\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon.$$

Vậy $\forall\varepsilon > 0\ \exists A_0 = A_0(\varepsilon): \forall A', A > A_0$:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y).g(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Theo tiêu chuẩn hội tụ đều Cauchy, tích phân I(y) hội tụ đều trên tập Y.

Ví dụ 3: Xét tích phân $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x.\sin ax}{k^2 + x^2}dx$, $a \ge a_0 > 0$.

Đặt f(x, a) = sin ax, ta có:

$$|F(A,a)| = \left|\int_0^A \sin ax\,dx\right| = \frac{1-\cos aA}{a} \le \frac{2}{a_0},$$

hàm $g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$ đơn điệu giảm và dần về 0 khi $x \to +\infty$. Do đó theo định lý 21.VIII, tích phân I(a) hội tụ đều theo $a \in [a_0, +\infty)$, $a_0 > 0$.

Ví dụ 4: Xét tích phân $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$, $y \ge 0$.

Ta có hàm $f(x, y) = e^{-xy}$, với mỗi y > 0 cố định, đơn điệu theo x có đạo hàm riêng liên tục theo x: $\frac{\partial f}{\partial x} = -xe^{-xy}$, và:

$$|f(x,y)| = |e^{-xy}| \le 1.$$

Ngoài ra $\int_{0}^{+\infty} g(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet.

Vậy tích phân $I(y) = \int_{0}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ đều theo $y \geq 0$ (theo định lý 22.VIII).

2. Tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

Định lý 23.VIII. Giả thiết f(x, y) là hàm xác định và liên tục theo (x, y), $x \in [a, +\infty)$, $y \in [c, d]$.

Khi đó nếu tích phân

$$I(y) = \int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx$$

hội tụ đều theo $y \in [c, d]$ thì I(y) là hàm liên tục trong đoạn [c, d].

Chứng minh: Theo giả thiết tích phân I(y) hội tụ đều trên đoạn [c, d], nên: với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$, sao cho với mọi $A > A_0$ thì:

$$\left|\int_{A}^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},\ y \in [c, d]. \tag{1}$$

Giả sử y_0 là điểm tùy ý thuộc đoạn [c, d], chọn $A > A_0$, ta xét hiệu:

$$I(y) - I(y_0) = \int_{a}^{+\infty} f(x, y)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x, y_0)dx$$

$$= \int_{a}^{A} [f(x, y) - f(x, y_0)]dx + \int_{A}^{+\infty} f(x, y)dx - \int_{A}^{+\infty} f(x, y_0)dx. \tag{2}$$

Trước hết vì f(x, y) liên tục theo (x, y): $x \ge a$, $y \in [c, d]$, nên liên tục và do đó liên tục đều trong hình chữ nhật: $[a, A] \times [c, d]$. Vì vậy tồn tại số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $y \in [c, d]$: $|y-y_0| < \delta$ thì:

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{3(A-a)}.$$

Cho nên:

$$\left|\int_a^A [f(x,y) - f(x,y_0)]dx\right| \le \int_a^A |f(x,y) - f(x,y_0)|dx$$

$$< (A-a)\frac{\varepsilon}{3(A-a)} = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

Kết hợp (1) (2) và (3) với mọi $y \in [c, d]$, $|y - y_0| < \delta$ ta có:

$$|I(y) - I(y_0)| \le \left|\int_a^A [f(x,y) - f(x,y_0)]dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|$$

$$+ \left|\int_A^{+\infty} f(x,y_0)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall y \in [c, d]$: $|y - y_0| < \delta$ thì $|I(y) - I(y_0)| < \varepsilon$. Theo định nghĩa tích phân I(y) liên tục tại y_0. Vì y_0 là điểm tùy ý, ta suy ra I(y) liên tục trên toàn đoạn [c, d].

Định lý 24.VIII. Giả thiết f(x, y) là hàm xác định và liên tục theo (x, y), $x \in [a, +\infty)$, $y \in [c, d]$, tích phân

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

hội tụ đều theo $y \in [c, d]$.

Khi đó ta có công thức:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)dy .$$

Chứng minh: Theo giả thiết, tích phân I(y) hội tụ đều trên đoạn [c, d] nên với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon) > a$ sao cho với mọi $A > A_0$ thì:

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \text{ với mọi } y \in [c, d].$$

Mặt khác nhờ định lý 23.VIII, hàm I(y) liên tục trên [c, d] nên khả tích trên đoạn đó.

Lấy $A > A_0$, ta có:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx + \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx$$

Từ đó:

$$\int_c^d I(y)dy - \int_c^d dy \int_a^A fdx = \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx .$$

Vì $\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy$, cho nên ta có đẳng thức sau:

$$\int_c^d I(y)dy - \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_A^{+\infty} f(x,y)dx$$

Ta chú ý rằng vì $A > A_0$ nên:

$$\left|\int_c^d dy\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| \le \int_c^d\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|dy < (d-c)\frac{\varepsilon}{d-c} = \varepsilon\,.$$

Do đó: với $A > A_0$

$$\left|\int_c^d I(y)dy - \int_a^A dx\int_c^d f(x,y)dy\right| \le \int_c^d\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|dy < \varepsilon$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng:

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số $A_0 = A_0(\varepsilon)$ sao cho với mọi $A > A_0$ ta có:

$$\left|\int_c^d I(y)dy - \int_a^A dx\int_c^d f(x,y)dy\right| < \varepsilon\,.$$

hay: $\displaystyle\int_c^d I(y)dy = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)dy\,.$

Đó là công thức cần chứng minh.

Định lý 25.VIII. Giả thiết rằng: f(x, y) là hàm số xác định và liên tục theo biến x với mọi $x \ge a$ và $y \in [c, d]$, có đạo hàm riêng theo biến y: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ liên tục theo hai biến (x, y) trong miền $[a, +\infty) \times [c, d]$. Hơn nữa

a) Tích phân $I(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ với mọi $y \in [c, d]$

b) Tích phân $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ hội tụ đều theo y trong đoạn [c, d].

Khi đó tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ là hàm khả vi trên đoạn [c, d] và ta có công thức:

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx \text{ , } y \in [c, d]$$

(công thức này được gọi là công thức Leibniz).

Chứng minh:

Với $y \in [c, d]$, áp dụng định lý 24.VIII, ta có:

$$\int_c^y dy \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^y f'_y(x,y)dy$$

$$= \int_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int_a^{+\infty} f(x,c)dx$$

Theo định lý 23.VIII, vì tích phân $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$ hội tụ đều trong đoạn [c, d], nên tích phân

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \text{ , } y \in [c, d]$$

là hàm liên tục trong đoạn [c, d]. Vì vậy tích phân ở vế trái của đẳng thức vừa nhận được:

$$\int_c^y dy \int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

là hàm khả vi theo cận trên $y \in [c, d]$. Từ đó lấy đạo hàm theo y hai vế ta nhận được:

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx = \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = I'(y).$$

Đó là đẳng thức cần chứng minh.

Ví dụ 5: Áp dụng các tính chất của tích phân phụ thuộc tham số hãy tính:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ta xét tích phân $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} \frac{\sin x}{x} dx$, $y \geq 0$.

Theo ví dụ 4 đã xét ở trên, tích phân I(y) hội tụ đều với mọi $y \geq 0$, do đó theo định lý 23.VIII thì I(y) là hàm liên tục với mọi $y \geq 0$ và

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{y \to 0} I(y).$$

Giả sử $y > 0$, khi đó tồn tại $y_0, y_1 > 0$ sao cho $y \in [y_0, y_1]$. Ta xét tích phân:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\right) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx,\ y \geq y_0 > 0.$$

Trong đó hàm dưới dấu tích phân thỏa mãn ước lượng:

$$|-e^{-xy} \sin x| \leq e^{-xy} \leq e^{-y_0 x},\ x \in [0, +\infty).$$

Hơn nữa tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-y_0 x} dx$ hội tụ, do đó tích phân

$-\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx$ hội tụ đều theo $y \geq y_0 > 0$.

Từ chứng minh trên đây ta suy ra: tích phân $I(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ hội tụ, còn tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right)dx =$

$= -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx$ hội tụ với mọi $y \in [y_0, y_1]$, trong đó $y_1 > y_0 > 0$.

Vì vậy theo định lý 25.VIII hàm I(y) khả vi với mọi $y \in [y_0, y_1]$, do đó khả vi với mọi $y > 0$ và ta có:

$$I'(y) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Từ đó $I(y) = -\text{arctg}y + C$.

Để xác định C ta lưu ý rằng với mọi $y > 0$:

$$|I(y)| \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \le \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}dx = \frac{1}{y}.$$

Vì vậy: $\lim\limits_{y\to+\infty} I(y) = \lim\limits_{y\to+\infty}(-\text{arctg}y + C) = -\frac{\pi}{2} + C = 0$,

hay $C = \frac{\pi}{2}$. Do đó:

$$I(y) = -\text{arctg}y + \frac{\pi}{2}.$$

Lấy giới hạn khi y dần đến 0, ta có:

$$I(0) = \lim_{y\to0} I(y) = \lim_{y\to0}\left(-\text{arctg}y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

§ 9. TÍCH PHÂN EULER

1. Tích phân Euler loại 1

Ký hiệu $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $a > 0, b > 0$. (1)

Trước hết ta xét điều kiện hội tụ của tích phân B(a, b).

Ta có:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx .$$

Trong đó $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ có bất thường tại x = 0 nếu a-1 < 0 và hội tụ chỉ khi 1 - a < 1 hay a > 0, còn tích phân thứ hai $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ có bất thường tại x = 1 nếu b - 1 < 0 và hội tụ chỉ khi 1 - b < 1 hay b > 0. Như vậy cả hai tích phân đồng thời hội tụ chỉ khi a > 0 và b > 0, do đó tích phân B(a, b) hội tụ với a > 0, b > 0 và phân kỳ trong các trường hợp ngược lại.

Vậy B(a, b) xác định bởi công thức (1) là một hàm xác định với a > 0 và b > 0, và nó được gọi là hàm B (hàm Bê-ta).

Ta hãy xét một vài tính chất của hàm Bê-ta:

a) B(a, b) = B(b, a) với mọi a > 0 và b > 0 (2)

Thật vậy: nếu đổi biến x = 1 - t thì sẽ có:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=-\int_1^0(1-t)^{a-1}t^{b-1}dt$$

$$=\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt=B(b,a)$$

b) $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$ với $a>0$, $b>1$ (3)

Thật vậy, áp dụng công thức tích phân từng phần, với $a>0$ và $b>1$, ta có

$$B(a,b)=\int_0^1(1-x)^{b-1}d\frac{x^a}{a}=\left.\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\right|_0^1+\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx$$

$$=\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx-\frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$=\frac{b-1}{a}B(a,b-1)-\frac{b-1}{a}B(a,b).$$

Từ đó $\dfrac{a+b-1}{a}B(a,b)=\dfrac{b-1}{a}B(a,b-1)$

hay $B(a,b)=\dfrac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$, $a>0$, $b>1$.

Do tính đối xứng của hàm B(a, b) nên ta cũng có:

$$B(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b),\ a>1,\ b>0. \quad (4)$$

Từ công thức (3), thay b bởi một số tự nhiên n và áp dụng liên tiếp công thức này n - 1 lần ta sẽ có:

$$B(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}B(a,1).$$

Lưu ý rằng $B(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a}$ với $a>0$, thì:

$$B(a,n)=B(n,a)=\frac{1.2...(n-1)}{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}. \tag{5}$$

Đặc biệt với a = m là một số tự nhiên:

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} \tag{6}$$

Ngoài các công thức cơ bản đã nhận được trên dãy hàm, B còn có tính chất:

$$B(a,1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}\ \text{với } 0<a<1. \tag{7}$$

Do đó với $a=1-a=\frac{1}{2}$ ta sẽ có:

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi. \tag{8}$$

2. Tích phân Euler loại 2

Ký hiệu: $$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx. \tag{9}$$

Tích phân vế phải của (6) hội tụ với a > 0.

Thật vậy, ta có:

$$\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx=\int_0^{1}x^{a-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx$$

trong đó $\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ có bất thường khi $x \to 0$ nếu $a - 1 < 0$ và khi đó nó sẽ hội tụ nếu $1 - a < 1$ hay $a > 0$. Còn tích phân thứ hai $\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ hội tụ với mọi a. Vậy nên tích phân $\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ hội tụ với $a > 0$ và phân kỳ trong trường hợp ngược lại.

Vậy $\Gamma(a)$ được xác định bởi (9) là một hàm xác định với $a > 0$ và được gọi là hàm Gamma hay Γ-hàm.

Ta hãy nêu một vài tính chất quan trọng của Γ-hàm.

a) $\Gamma(a + 1) = a.\Gamma(a), a > 0$. (10)

Thật vậy, áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$a.\Gamma(a) = a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = x^a e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx = \Gamma(a+1).$$

Đó là công thức cần chứng minh.

Áp dụng liên tiếp công tức (10) ta nhận được:

$$\Gamma(a + n) = (a + n - 1)(a + n - 2) \ldots (a + 1).a.\Gamma(a). \quad (11)$$

Trong công thức (11) thay a = 1 và chú ý:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

ta có: $$\Gamma(n + 1) = n! \quad (12)$$

b) Liên hệ giữa hàm B và hàm Γ:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (13)$$

Trước hết từ công thức (9) thay x = ty (t > 0) ta có:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-ty} dy .$$

Từ đó:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(t+1)y} dy .$$

Nhân cả hai vế đẳng thức vừa nhận được với t^{a-1} và lấy tích phân theo t từ 0 đến +∞:

$$\Gamma(a+b)\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} dt \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1} e^{-y} \frac{\Gamma(a)}{y^a} dy = \Gamma(a).\Gamma(b) \quad (14)$$

Chú ý rằng: từ công thức

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx .$$

thay biến $x = \frac{y}{1+y}$ hay $y = \frac{x}{1-x}$ thì ta sẽ có công thức:

$$B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy .$$

Cho nên từ (14) ta nhận được hệ thức:

$$\Gamma(a+b) \,.\, B(a,b) = \Gamma(a).\Gamma(b)$$

$$\text{hay } B(a,b) = \frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} .$$

c) Trong công thức (13) thay b = 1 - a (xem $0 < a < 1$) ta sẽ có:

$$\Gamma(a).\Gamma(1-a) = B(a, 1-a) \qquad 0 < a < 1.$$

Từ đó, nhờ công thức (7):

$$\Gamma(a).\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \ 0 < a < 1 \tag{15}$$

Thay $a = 1 - a = \frac{1}{2}$ ta có $\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$

hay
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{16}$$

Chú ý rằng: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$, và thay $x = t^2$, $dx = 2tdt$, ta nhận được:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{17}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

TÍCH PHÂN SUY RỘNG VÀ TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

Tính các tích phân sau đây:

1. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ **2.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x - 2)^2}$

3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3}$ **4.** $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x.\ln x}{(1 + x^2)^2} dx$

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

6. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}.\cos bx dx$ và $\int_0^{+\infty} e^{-ax}.\sin bx dx$, $(a > 0)$

7. Lập công thức truy hồi để tính tích phân:

a) $I_n = \int_0^{+\infty} x^n.e^{-x}.dx$ $(n = 1, 2, 3...)$

b) $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{ch^{n+1}x}$, $(n = 1, 2, 3...)$

8. $\int_0^1 \ln x dx$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln.\sin x dx$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln.\cos x dx$

11. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Xét tính hội tụ của các tích phân suy rộng sau đây:

12. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$

13. $\int_0^{+\infty} x^{p-1}.e^{-x} dx$

14. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx \quad (n \geq 0)$ **15.** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}dx$

16. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}dx \quad (n \geq 0)$ **17.** $\int_0^{2} \frac{dx}{\ln x}$

18. $\int_0^{1} x^p \ln^p \frac{1}{x}dx$ **19.** $\int_0^{1} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-4^4}}$

20. $\int_0^{1} \frac{\ln x}{1-x^2}dx$ **21.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x.\cos^q x}$

22. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ **23.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$

24. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln^q x)\,(\ln.\, \ln x)^n}$ **25.** $\int_0^{+\infty} x^\alpha \,|1-x|^\beta\, dx$

Xét tính hội tụ và hội tụ tuyệt đối của các tích phân sau:

26. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$ **27.** $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q)dx \quad (q \neq 0)$

28. $\int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)dx$ **29.** $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \quad (q \geq 0)$

30. Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, thì có nhất thiết $f(x) \to 0$, khi $x \to +\infty$ hay không?

Xét ví dụ: $\int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$

31. Giả sử $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, còn $\varphi(x)$ là hàm bị chặn thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ có hội tụ hay không?

Xét ví dụ: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

Xác định miền hội tụ của các tích phân sau đây:

32. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx$

33. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^p}{x^q} dx$

34. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{|\ln x|^p}$

35. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$

36. Chứng minh rằng tích phân: $I = \int_0^{+\infty} \alpha . e^{-\alpha x} dx$

a) Hội tụ đều trong khoảng $0 < a \le \alpha \le b$.

b) Hội tụ không đều trong khoảng $0 \le \alpha \le b$.

37. Chứng minh rằng tích phân Dirichlet: $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$

a) Hội tụ đều trong mọi đoạn [a, b], không chứa điểm $\alpha = 0$.

b) Hội tụ không đều trong mọi đoạn [a, b] chứa $\alpha = 0$.

Xét tính hội tụ đều của các tích phân sau đây trong các khoảng được chỉ ra tương ứng.

38. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx \quad 0 < \alpha_0 \le \alpha < +\infty$

39. $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}.e^{-x} dx \quad a \le \alpha \le b$

40. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \quad -\infty < \alpha < +\infty$

41. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p} dx \quad (p \ge 0)$

42. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad 0 \le \alpha < +\infty$

43. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}.e^{-\alpha x^2} dx \quad 0 \le \alpha < +\infty$

44. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy \quad -\infty \le x < +\infty$

45. a) $\int_0^{1} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{2} dx \quad 0 < p_0 \le p < +\infty \ (q > -1)$

b) $\int_0^{1} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 0 \le n < +\infty$

46. Có thể chuyển giới hạn qua dấu tích phân trong tích phân sau đây được không?

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} \alpha . e^{-\alpha x} dx .$$

47. Giả sử f(x) là hàm khả tích suy rộng trong khoảng $(0, +\infty)$. Chứng minh rằng:

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx .$$

48. Giả sử f(x) là hàm liên tục và bị chặn trong khoảng $[0, +\infty)$. Chứng minh rằng: $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{y . f(x)}{x^2 + y^2} dx = f(0)$.

49. Chứng minh rằng hàm:

$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx$ liên tục trong khoảng $0 < \alpha < 1$.

50. Chứng minh rằng hàm $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx$ liên tục theo tham số α.

51. Xác định điểm gián đoạn của hàm số:

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1 - a^2)x}{x} dx .$$

52. Xét tính liên tục của các hàm sau đây:

a) $F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx , \ \alpha > 0 ,$

b) $F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi - x)^{\alpha}} dx$, $0 < \alpha < 2$,

c) $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha . e^{-\alpha x^2} dx$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

53. Chứng minh rằng hàm: $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx$, liên tục và khả vi trong miền $-\infty < \alpha < +\infty$.

54. Xét tính khả vi của hàm Dirichlet: $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ với $\alpha \neq 0$.

55. Xuất phát từ đẳng thức: $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$, hãy tính

$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, $(a > 0, b > 0)$

56. Tính các tích phân sau đây:

a) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$ $(|\alpha| \leq 1)$,

b) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, $(|\alpha| \leq 1)$.

57. Chứng minh rằng nếu $f'(x)$ khả tích tuyệt đối trong khoảng $[a, +\infty)$ thì tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Chương IX

TÍCH PHÂN BỘI RIEMANN

Giả sử $A = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] = \{x = (x_1, ..., x_n) \in R^n: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$ là hình hộp đóng trong R^n, $f: A \to R$ là một hàm số xác định trên A. Ta sẽ tìm cách mở rộng định nghĩa tích phân của hàm một biến cho hàm f xác định trên A, tiếp đó cho hàm xác định trên những miền tổng quát hơn.

§ 1. TÍCH PHÂN RIEMANN TRÊN HÌNH HỘP

1. Phân hoạch của hình hộp

Ta nhớ lại rằng phân hoạch P của đoạn [a, b] theo định nghĩa là một dãy điểm $t_0, t_1, ..., t_k$, trong đó $a = t_0 < t_1 < ... t_k = b$. Phân hoạch P đó chia đoạn [a, b] thành k đoạn $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = \overline{1, k}$). Số $d(P) = \max\limits_{1 \leq i \leq k}(t_i - t_{i-1})$ được gọi là đường kính của phân hoạch P.

Phân hoạch của hình hộp $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ là một bộ $P = (P_1, ...P_n)$ trong đó mỗi P_i là phân hoạch của đoạn $[a_i, b_i]$, $i = \overline{1, n}$. Chẳng hạn nếu $P_1 = t_0, ... t_k$ là phân hoạch của đoạn $[a_1, b_1]$ và $P_2 = s_0, ..., s_l$ là phân hoạch của đoạn $[a_2, b_2]$ thì $P = (P_1, P_2)$ là phân hoạch của hình chữ nhật $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Phân hoạch này chia hình chữ nhật đó thành $k.l$ hình chữ nhật con $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$, $i = \overline{1, k}$; $j = \overline{1, l}$. Một cách tổng quát nếu phân hoạch P_i chia đoạn $[a_i, b_i]$ thành k_i đoạn con ($i = \overline{1, n}$) thì phân hoạch $P = (P_1, ..., P_n)$ của hình hộp $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ chia hình hộp đó thành $k = k_1.k_2...k_n$

hình hộp, ta gọi các hình hộp này là các hình hộp của phân hoạch P. Số $d(P) = \max\limits_{1 \le i \le n} d(P_i)$, trong đó $d(P_i)$ là đường kính của phân hoạch P_i của đoạn $[a_i, b_i]$, được gọi là đường kính của phân hoạch P.

Ta gọi số $(b_1 - a_1) \times ... \times (b_n - a_n)$ là thể tích của hình hộp đóng $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ cũng như của hình hộp mở $(a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$.

2. Định nghĩa tích phân Riemann

Cho hình hộp đóng $A \subset R^n$ và hàm $f: A \to R$. Giả sử P là một phân hoạch của A chia A ra k hình hộp con $S_1, S_2, ..., S_k$. Chọn tùy ý các điểm $\xi_i \in S_i$ $(i = 1, ..., k)$. Khi đó tổng $\sigma_f(P, \xi) = \sum\limits_{i=1} f(\xi_i)v(S_i)$, trong đó $v(S_i)$ là thể tích hình hộp S_i, được gọi là tổng tích phân của f trên A ứng với phân hoạch P và các điểm chọn $(\xi_1, \xi_2, ... \xi_k) = \xi$.

Định nghĩa: Ta nói rằng các tổng tích phân $\sigma_f(P, \xi)$ tiến đến giới hạn hữu hạn I khi $d(P) \to 0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch P của A mà $d(P) < \delta$ và với mọi cách chọn $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k)$ các điểm $\xi_i \in S_i (i = 1, ..., k)$ ta đều có $|\sigma_f(P, \xi) - I| < \varepsilon$.

Trong trường hợp này ta nói rằng hàm f khả tích trên A và giới hạn I nói trên được gọi là tích phân của f trên hình hộp A, kí hiệu là $\int\limits_A f dV$ hay $\int\limits_A ... \int f(x_1, ..., x_n)dx_1 ... dx_n$ hay $\int\limits_A f(x)dx$.

Như vậy $\int\limits_A f dV = \lim\limits_{d(P) \to 0} \sigma_f(P, \xi)$.

3. Điều kiện cần của tính khả tích

Định lý 1.IX. Cho hình hộp đóng $A \subset R^n$ và hàm $f: A \to R$.

Nếu f khả tích trên A thì nó bị chặn trên đó.

Chứng minh. Giả sử δ là số dương bất kỳ và P là một phân hoạch của A với d(P) < δ, chia A thành các hình hộp con $S_1, ..., S_k$. Giả sử ngược lại rằng f không bị chặn. Khi đó f không bị chặn trên ít nhất một trong các hình hộp con S_i, chẳng hạn trên S_1. Tổng tích phân tương ứng có thể biểu diễn thành.

$$\sigma_f(P,\xi) = f(\xi_1)v(S_1) + \sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)v(S_i).$$

Với phân hoạch P cho trước và các $\xi_i (i = 2, ..., k)$ cố định tổng $\sum_{i=2}^{k} f(\xi_i)v(S_i)$ là hằng số trong khi đó tích $f(\xi_1)v(S_1)$ trong đó ξ_1 biến thiên trên S_1 là đại lượng không bị chặn (vì f không bị chặn trên S_1 và $v(S_1) > 0$). Do đó tổng tích phân $\sigma_f(P, \xi)$ là không bị chặn. Điều này chứng tỏ $\sigma_f(P, \xi)$ không thể tiến đến giới hạn hữu hạn khi $d(P) \to 0$ và do đó f không khả tích trên A. Vậy hàm f khả tích trên A thì bị chặn trên đó.

Do định lý trên, sau đây ta chỉ xét những hàm bị chặn trên hình hộp A.

4. Các tổng Darboux

Cho A là hình hộp đóng trong R^n, f: A → R là một hàm bị chặn, P là một phân hoạch của A. Đối với mỗi hình hộp S của phân hoạch P ta đặt

$$m_s(f) = \inf\{f(x) : x \in S\}, \quad M_s(f) = \sup\{f(x) : x \in S\}.$$

Giả sử v(S) là thể tích của S. Ta lập tổng

$$\underline{I}(f, P) = \sum_{S} m_s(f)v(S) \quad \text{và} \quad \overline{I}(f, P) = \sum_{S} M_s(f)v(S)$$

trong đó tổng lấy theo mọi hình hộp S của phân hoạch P. $\underline{I}(f, P)$ và $\bar{I}(f,P)$ tương ứng được gọi là tổng Darboux dưới và tổng Darboux trên của hàm f ứng với phân hoạch P.

Định nghĩa. Ta nói rằng phân hoạch P' mịn hơn phân hoạch P nếu mỗi hình hộp của P' đều chứa trong một hình hộp nào đó của P.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của các tổng Darboux:

a) Từ định nghĩa ta trực tiếp suy ra $\underline{I}(f, P) \le \sigma_f(P, \xi) \le \bar{I}(f, P)$ với mọi phân hoạch P.

b) Giả sử P' là một phân hoạch mịn hơn phân hoạch P. Khi đó:

$$\underline{I}(f, P) \le \underline{I}(f, P') \text{ và } \bar{I}(f, P') \le \bar{I}(f, P).$$

Thật vậy, do P' mịn hơn P và mỗi hình hộp S của phân hoạch P được chia thành một số hình hộp $S_1, \ldots, S_l$ của P', vì thế

$$v(S) = v(S_1) + \ldots + v(S_l).$$

Do $S_i \subset S$ $(i = 1, \ldots, l)$ ta có

$$m_S(f) = \inf\{f(x) : x \in S\} \le m_{S_i}(f) = \inf\{f(x) : x \in S_i\}, \ (i = 1, \ldots, l)$$

Từ đó suy ra:

$$m_S(f)v(S) = m_S(f)v(S_1) + \ldots + m_S(f)v(S_l) \le m_{S_1}(f)\, v(S_1) + \ldots + m_{S_l}(f)v(S_l).$$

Tổng các vế trái theo S là $\underline{I}(f, P)$ còn tổng tương ứng các vế phải là $\underline{I}(f, P')$. Như vậy $\underline{I}(f, P) \le \underline{I}(f, P')$.

Đối với các tổng Darboux trên ta cũng chứng minh một cách tương tự.

c) Tổng Darboux dưới của một phân hoạch bất kỳ P không vượt quá tổng Darboux trên của một phân hoạch bất kỳ P' khác:

$$\underline{I}(f, P) \leq \bar{I}(f, P')$$

với mọi phân hoạch P, P'.

Thật vậy, giả sử P" là một phân hoạch mịn hơn P và P', chẳng hạn nếu $P = (P_1, ..., P_n)$, $P' = (P_1', ...P'_n)$ thì ta có thể lấy

$P'' = (P''_1, ..., P''_n)$ trong đó $P''_i = P_i \cup P'_i$ $(i = 1,..., n)$. Khi đó theo các tính chất a) và b) trên đây ta có:

$$\underline{I}(f, P) \leq \underline{I}(f, P'') \leq \bar{I}(f, P'') \leq \bar{I}(f, P').$$

Từ tính chất trên ta suy ra rằng đối với hàm bị chặn f cận trên đúng của tất cả các tổng Darboux dưới không vượt quá cận dưới đúng của tất cả các tổng Darboux trên. Như vậy tồn tại các số hữu hạn sau:

$$I_* = \sup \underline{I}(f, P), \quad I^* = \inf \bar{I}(f, P)$$

ở đây cận trên đúng và cận dưới đúng được lấy theo tất cả các phân hoạch P của hình hộp A. I_* và I^* được gọi tương ứng tích phân dưới và tích phân trên của f trên A.

d) Với mỗi phân hoạch P xác định ta có

$$\underline{I}(f, P) = \inf \sigma_f(P, \xi), \quad \bar{I}(f, P) = \sup \sigma_f(P, \xi)$$

trong đó cận dưới đúng và cận trên đúng lấy theo mọi cách chọn các điểm $\xi_i \in S_i$ $(i = 1, ..., k)$, ở đây S_i là hình hộp con của phân hoạch P.

Thật vậy do $M_{S_i}(f) = \sup\{f(x): x \in S_i\}$ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước

có thể chọn $\xi_i \in S_i$ sao cho $f(\xi_i) > M_{S_i}(f) - \dfrac{\varepsilon}{v(A)}$.

Do đó $f(\xi_i)\, v(S_i) > (M_{S_i}(f) - \frac{\varepsilon}{v(A)})\, v(S_i)$

Vì thế $\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)v(S_i) > \sum_{i=1}^{k} M_{S_i}(f)v(S_i) - \frac{\varepsilon}{v(A)} \sum v(S_i) = \bar{I}(f, P) - \varepsilon$.

Vậy $\bar{I}(f, P) = \sup \sigma_f(P, \xi)$.

Tương tự ta chứng minh được rằng $\underline{I}(f, P) = \inf \sigma_f(P, \xi)$.

e) Ta có $I_* = \lim_{d(P)\to 0} \underline{I}(f, P)$, $\qquad I^* = \lim_{d(P)\to 0} \bar{I}(f, P)$.

Thật vậy cho trước $\varepsilon > 0$, tồn tại một phân hoạch P' của A sao cho $\bar{I}(f, P') < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Giả sử $P' = (P_1, \dots, P_n)$, trong đó P_i là phân hoạch của cạnh $[a_i, b_i]$ của hình hộp A tạo thành bởi các điểm chia $a_i = t_i^0 < t_i^1 < \dots < t_i^{k_i} = b_i$.

Khi đó biên giới của các hình hộp con S của phân hoạch P' nằm trong các tập hợp

$$B_{t_i^j} = \{x = (x_1 \dots, x_{i-1} . t_i^j, x_{i+1}, \dots x_n) \in A\},$$

$$(j = 0, 1, \dots, k_i\,;\, i = 1, 2 \dots, n).$$

Rõ ràng ta có thể xây dựng một họ Q các hình hộp chứa $B_{t_i^j}$ $(j = 0, 1, \dots, k_i,\ i = 1, 2, \dots, n)$ trong phần trong của nó và có tổng thể tích nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{2\Omega}$, trong đó Ω là dao động của hàm f trên A: $\Omega = \sup_{x \in A} f(x') - \inf_{x \in A} f(x)$.

Gọi L là biên giới của các hình hộp nói trên và

$$\delta = d(L, \bigcup_{i,j} B_{t_i^j}) = \inf_{\substack{x \in L \\ y \in \bigcup_{i,j} B_{t_i^j}}} d(x, y). \text{ Ta có } \delta > 0 .$$

Giả sử P là một phân hoạch bất kỳ của hình hộp A với d(P)< δ. Khi đó các hình hộp con S của P có ít nhất một điểm chung với $B_{t_i^j}$ đều chứa trong Q và do đó có tổng thể tích nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{2\Omega}$. Giả sử P" là phân hoạch của A tạo thành bằng cách hợp các điểm chia của P và P'. Ta có:

$$\bar{I}(f, P'') \le \bar{I}(f, P') < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Các tổng $\bar{I}(f, P)$ và $\bar{I}(f, P'')$ khác nhau chỉ ở các số hạng ứng với các S_i có điểm chung với $B_{t_i^j}$. Bởi vì tổng thể tích của các S_i như thế nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{2\Omega}$ nên ta có:

$$\bar{I}(f, P) - \bar{I}(f, P'') < \Omega . \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy $I^* \le \bar{I}(f, P) < I^* + \varepsilon$ với mọi phân hoạch P có d(P) < δ, do đó $\lim\limits_{d(P) \to 0} \bar{I}(f, P) = I^*$.

Tương tự ta chứng minh được rằng $\lim\limits_{d(P) \to 0} \underline{I}(f, P) = I_*$.

5. Tiêu chuẩn khả tích

Định lý 2.IX. Điều kiện cần và đủ để cho hàm bị chặn f khả tích trên hình hộp A là

$$\lim_{d(P)\to 0}(\bar{I}(f,P) - \underline{I}(f,P)) = 0$$

$$\text{hay } \lim_{d(P)\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i v(S_i) = 0$$

trong đó $\omega_i = \sup_{x\in S_i} f(x) - \inf_{x\in S_i} f(x)$ là dao độ của hàm f trên S_i.

Chứng minh.

a) Điều kiện cần. Giả sử hàm f khả tích trên hình hộp A và $I = \int_A f dV$. Theo định nghĩa với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch P có $d(P) < \delta$, với mọi cách chọn $\xi_i \in S_i$ ta có

$$|\sigma_f(P,\xi) - I| < \varepsilon \quad \text{hay} \quad I - \varepsilon < \sigma_f(P,\xi) < I + \varepsilon.$$

Bằng cách lấy cận trên đúng và cận dưới đúng theo mọi cách chọn các điểm $\xi_i \in S_i$, theo tính chất d) của các tổng Darboux ta suy ra:

$$I - \varepsilon \le \underline{I}(f,P) \le \bar{I}(f,P) \le I + \varepsilon$$

với mọi phân hoạch P thỏa mãn $d(P) < \delta$. Vì thế

$$\lim_{d(P)\to 0}\underline{I}(f,P) = I, \quad \lim_{d(P)\to 0}\bar{I}(f,P) = I.$$

Từ đó ta suy ra $\lim_{d(P)\to 0}(\bar{I}(f,P) - \underline{I}(f,P)) = 0$.

b) Điều kiện đủ. Giả sử rằng $\lim_{d(P)\to 0}(\bar{I}(f,P) - \underline{I}(f,P)) = 0$.

Khi đó từ hệ thức $\underline{I}(f,P) \le I_* \le I^* \le \bar{I}(f,P)$ ta suy ra $I_* = I^*$.

Gọi I là giá trị chung của I_* và I^*, ta có $\underline{I}(f,P) \le I \le \bar{I}(f,P)$.

Mặt khác ta có $\underline{I}(f, P) \le \sigma_f(P, \xi) \le \bar{I}(f, P)$. Do đó $|\sigma_f(P, \xi) - I| \le \bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P)$.

Theo giả thiết với $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi phân hoạch P mà $d(P) < \delta$ ta có $\bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P) \le \varepsilon$ và do đó $|\sigma_f(P, \xi) - I| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{d(P) \to 0} \sigma_f(P, \xi) = I$, tức là hàm khả tích trên A.

Từ chứng minh định lý trên và từ tính chất e) của các tổng Darboux ta trực tiếp suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 1: Hàm bị chặn f khả tích trên hình hộp A khi và chỉ khi $I_* = I^*$.

Hệ quả 2: Điều kiện cần và đủ để cho hàm bị chặn f khả tích trên hình hộp A là với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại một phân hoạch P của A sau cho:

$$\bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P) < \varepsilon .$$

Thật vậy, điều kiện cần suy trực tiếp từ định lý trên. Ngược lại giả sử với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại phân hoạch P sao cho:

$$\bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P) < \varepsilon .$$

Do $\underline{I}(f, P) \le I_* \le I^* \le \bar{I}(f, P)$ ta suy ra $0 \le I^* - I_* < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tùy ý.

Vì thế $I_* = I^*$. Theo hệ quả 1 hàm f khả tích trên A.

6. Các ví dụ

a) Xét hàm số $f: A \to R$ là hằng số trên A: $f(x) = c$ với mọi $x \in A$. Khi đó với mọi phân hoạch P của A và với mọi hình hộp S của P ta có $m_S(f) = M_S(f) = c$. Vì vậy $\underline{I}(f, P) = \bar{I}(f, P) = \sum cv(S) = cv(A)$.

Do đó f khả tích trên A và $\int_A f\, dV = cv(A)$.

b) Giả f: $[0, 1] \times [0,1] \to R$ xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ} \\ 1 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ} \end{cases}$$

Với phân hoạch P bất kỳ của $[0, 1] \times [0,1]$ mọi hình hộp S của phân hoạch đó đều chứa các điểm (x, y) với x hữu tỉ và (x, y) với x vô tỉ. Vì vậy $m_S(f) = 0$ và $M_S(f) = 1$. Do đó

$$\underline{I}(f, P) = \sum_S 0v(S) = 0$$

$$\overline{I}(f, P) = \sum_S 1v(S) = v([0, 1] \times [0, 1]) = 1 .$$

Vậy hàm f không khả tích trên đó .

7. Các tính chất cơ bản của tích phân

a) Nếu f, g là các hàm khả tích trên A thì f + g cũng khả tích trên A và

$$\int_A (f+g)dV = \int_A fdV + \int_A gdV .$$

b) Nếu f khả tích trên A thì với mọi số thực α, hàm αf cũng khả tích trên A và

$$\int_A \alpha fdV = \alpha \int_A fdV .$$

c) Nếu f và g là các hàm khả tích trên A, đồng thời $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in A$ thì $\int_A fdV \le \int_A gdV$.

d) Nếu hàm f liên tục trên hình hộp đóng A thì f khả tích trên A .

Chứng minh các tính chất trên đây được tiến hành một cách hoàn toàn tương tự như đối với tích phân xác định (một lớp) dựa trên định nghĩa (đối với các tính chất a, b, c) hoặc tiêu chuẩn khả tích (đối với tính chất d) và được dành cho độc giả coi như bài tập.

§ 2. TIÊU CHUẨN KHẢ TÍCH LEBESGUE

1. Tập hợp có độ đo không

Định nghĩa. Tập hợp $A \subset R^n$ được gọi là có độ đo (n chiều) không nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một dãy các hình hộp đóng $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v(U_n) < \varepsilon$.

Rõ ràng là nếu A có độ đo không và $B \subset A$ thì B cũng có độ đo không. Dễ dàng thấy rằng trong định nghĩa trên ta có thể lấy các hình hộp mở thay cho các hình hộp đóng .

Tập hợp chỉ gồm một số hữu hạn điểm rõ ràng có độ đo không. Hơn nữa, tập hợp đếm được cũng có độ đo không .

Thật vậy $A = \{a_i : i \in N^*\}$ là tập hợp đếm được. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ và với mỗi i có thể chọn các hình hộp đóng U_i chứa a_i sao cho $v(U_i) < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$.

Ta có $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

Tổng quát hơn ta có

Định lý 3.IX. Hợp của một số đếm được các tập hợp có độ đo không là một tập hợp có độ đo không.

Chứng minh. Giả sử $A_i (i \in N^*)$ là các tập hợp có độ đo không và $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Cho trước $\varepsilon > 0$, với mỗi i tồn tại một dãy các hình hộp đóng $\{U_{ik}\}_{k=1}^{\infty}$ sao cho $A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{ik}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} v(U_{ik}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Khi đó $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{ik}$ và ta có $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} v(U_{ik}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$.

Vậy A là tập hợp có độ đo không .

2. Tiêu chuẩn khả tích Lebesgue

Bây giờ ta sẽ tìm một tiêu chuẩn khả tích tiện dùng hơn cho phép ta xác định lớp các hàm khả tích. Ta cần đến một số khái niệm và kết quả bổ trợ sau:

Giả sử $f: A \to R$ là một hàm bị chặn, $x \in A$ và $\delta > 0$. Ta đặt

$M(x, f, \delta) = \sup\{f(y): y \in A \cap B[x, \delta]$

$m(x, f, \delta) = \inf\{f(y): y \in A \cap B[x, \delta]$

trong đó $B[x, \delta]$ là hình cầu đóng tâm x bán kính δ. Ta có:

$M(x, f, \delta) - m(x, \delta, f) = \sup\{|f(y) - f(y')| : y, y' \in A \cap B[x, \delta]$.

Đặt $\omega(f, x) = \lim\limits_{\delta \to 0} M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)$.

Giới hạn này luôn luôn tồn tại vì $M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)$ giảm khi δ giảm .

$\omega(f, x)$ được gọi là dao động của hàm f tại x .

*** *Bổ đề 1*.** Giả sử A là hình hộp đóng và f: A → R là một hàm bị chặn sao cho $\omega(f, x) < \varepsilon$ với mọi $x \in A$ (ε là một số dương cho trước), khi đó tồn tại một phân hoạch P của A sao cho

$$\bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P) < \varepsilon\, v(A).$$

Chứng minh. Với mỗi $x \in A$, do

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \to 0}[M(x, f, \delta) - m(x, f, \delta)] < \varepsilon$$

nên tồn tại $\delta_x > 0$ sao cho $M(x, f, \delta_x) - m(x, f, \delta_x) < \varepsilon$.

Giả sử $x = (x_1, \dots, x_n)$ và U_x là hình hộp đóng xác định bởi

$$U_x = \left\{ y = (y_1, \dots, y_n) : |y_i - x_i| \le \frac{\delta_x}{\sqrt{n}},\ i = \overline{1, n} \right\}.$$

Ta có $U_x \subset B[x, \delta]$. Rõ ràng $x \in \operatorname{int} U_x$ với mọi $x \in A$. Do A là tập compac nên tồn tại một số hữu hạn các $U_{x_1}, \dots, U_{x_k}$ phủ A.

Giả sử P là một phân hoạch của A sao cho mỗi hình hộp S của P chứa trong một U_{x_i} nào đó. Khi đó $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ với mọi hình hộp S của phân hoạch P và vì thế ta có

$$\bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P) = \sum_S \left[M_S(f) - m_S(f)\right] v(S) < \varepsilon\, v(A).$$

*** *Bổ đề 2*.** Giả sử $A \subset R^n$ là một tập hợp đóng. Khi đó với mọi hàm bị chặn $f : A \to R$ và với mọi $\varepsilon > 0$, tập hợp $\{ x \in A : \omega(f, x) \ge \varepsilon\}$ là đóng .

Chứng minh. Kí hiệu $B = \{ x \in A : \omega(f, x) \ge \varepsilon\}$. Ta chứng minh rằng $R^n \setminus B$ là mở. Nếu $x \in R^n \setminus B$ thì hoặc $x \notin A$ hoặc $x \in A$ và

$\omega(f, x) < \varepsilon$. Trong trường hợp thứ nhất vì A đóng, tức là $R^n \setminus A$ mở, nên tồn tại lân cận U của x sao cho $U \subset R^n \setminus A \subset R^n \setminus B$. Trong trường hợp thứ hai tồn tại $\delta > 0$ sao cho $M(x, f, \delta_x) - m(x, f, \delta_x) < \varepsilon$.

Với mọi $y \in B(x,\delta)$ ta có $\|x-y\| < \delta$. Chọn δ_1 sao cho $0 < \delta_1 < \delta - \|x-y\|$. Khi đó với mọi z thoả mãn $\|z-y\| < \delta_1$ ta có $\|x-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\| < \delta$ tức là $z \in B(x, \delta)$, do đó $B(y, \delta_1) \subset B(x, \delta)$.

Vì thế

$$M(y, f, \delta_1)-m(y, f, \delta_1) = \sup\{|f(z) - f(z')| : z, z' \in A \cap B(y, \delta_1)\}$$

$$\le \sup\{|f(y) - f(y')| : y, y' \in A \cap B(x, \delta)\} < \varepsilon.$$

Do đó $\omega(y, f) < \varepsilon$, từ đó suy ra $B(x, \delta) \subset R^n \setminus B$. Như vậy $R^n \setminus B$ là tập hợp mở, nên B là tập hợp đóng.

* ***Bổ đề 3***. Hàm bị chặn $f: A \to R$ liên tục tại a khi và chỉ khi $\omega(f, a) = 0$.

Chứng minh. a) Giả sử f liên tục tại a. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ với mọi $x \in A \cap B(a, \delta)$. Như vậy $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) \le 2\varepsilon$, từ đó suy ra $\omega(f, a) = 0$.

b) Ngược lại nếu $\omega(f, a) = \lim\limits_{\delta \to 0} (M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta)) = 0$ thì với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $M(a, f, \delta) - m(a, f, \delta) = \sup|f(x) - f(x')| : x, x' \in A \cap B(a, \delta)\} < \varepsilon$.

Nói riêng ta có $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ với mọi $x \in A \cap B(a, \delta)$, điều này chứng tỏ f liên tục tại a.

Định lý 4.IX (Lebesgue). Giả sử A là hình hộp đóng, $f: A \to R$ là hàm bị chặn và B là tập hợp các điểm gián đoạn của f. Khi đó f khả tích trên A nếu và chỉ nếu B là tập hợp có độ đo không .

* *Chứng minh*

a) Điều kiện đủ. Giả sử tập hợp B có độ đo không và ε là số dương cho trước. Đặt $B_\varepsilon = \{x \in A: \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$.

Theo bổ đề 3, $B_\varepsilon \subset B$ và vì thế B_ε có độ đo không. Theo bổ đề 2; B_ε là tập hợp compac. Từ đó theo định nghĩa của tập hợp có độ đo không và do tính compac của B_ε ta suy ra tồn tại một họ hữu hạn các hình hộp đóng $U_1,\ldots, U_k$, phần trọng của chúng phủ B_ε và sao cho $\sum\limits_{i=1}^{k} v(U_i) < \varepsilon$.

Giả sử P là một phân hoạch của A, mỗi hình hộp S của nó thuộc về một trong hai nhóm sau:

1. Nhóm $\mathscr{S}_1$ gồm các hình hộp S sao cho $S \subset U_i$ với một i nào đó.

2. Nhóm $\mathscr{S}_2$ gồm những hình hộp S sao cho $S \cap B_\varepsilon = \varnothing$.

Giả sử $|f(x)| < M$ với mọi $x \in A$. Khi đó

$$M_S(f) - m_S(f) \leq 2M \text{ với mọi } S.$$

Vì thế

$$\sum_{S \in \mathscr{S}_1} [M_S(f) - m_S(f)]\, v(S) \leq 2M \sum_{i=1}^{k} v(U_i) < 2M\varepsilon \ .$$

Hơn nữa nếu $S \in \mathscr{S}_2$ thì $\omega(f, x) < \varepsilon$ với $x \in S$. Từ bổ đề 1 ta suy ra rằng tồn tại một phân hoạch P' của A mịn hơn P sao cho

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] v(S') < \varepsilon v(S) \text{ với mọi } S \in \mathscr{S}_2 \ .$$

Khi đó

$$\bar{I}(f, P') - \underline{I}(f, P') = \sum_{S' \subset S \in \mathscr{S}_1} [M_S(f) - m_{S'}(f)]v(S') < \varepsilon v(S') +$$

$$+ \sum_{S' \subset S \in \mathscr{S}_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)]v(S') <$$

$$< 2M\varepsilon + \sum_{S \in \mathscr{S}_2} \varepsilon v(S) \le 2M\varepsilon + \varepsilon v(A) .$$

Vì M và v(A) cố định, từ đó suy ra rằng với việc chọn phân hoạch P' thích hợp ta có thể làm cho $\bar{I}(f, P') - \underline{I}(f, P')$ nhỏ tùy ý. Vậy f khả tích trên A .

b) ***Điều kiện cần.*** Giả sử hàm f khả tích trên A. Ta có

$$B = \{x \in A: \omega(f, x) > 0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{1/i} .$$

Theo định lý 3.IX chỉ cần chứng minh rằng mỗi tập hợp $B_{1/i}$ có độ đo 0.

Giả sử $\varepsilon > 0$ và P là một phân hoạch của A sao cho

$$\bar{I}(f, P) - \underline{I}(f, P) < \frac{\varepsilon}{i}$$

và $\mathscr{S}$ là họ tất cả các hình hộp S của phân hoạch P sao cho $S \cap B_{1/i} \neq \varnothing$. Họ $\mathscr{S}$ phủ $B_{1/i}$. Nếu $S \in \mathscr{S}$ thì $M_S(f) - m_S(f) \ge \frac{1}{i}$. Vì vậy

$$\frac{1}{i} \sum_{S \in \mathscr{S}} v(S) \le \sum_{S \in \mathscr{S}} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) \le$$

$$\le \sum_{S} [M_S(f) - m_S(f)]v(S) < \frac{\varepsilon}{i} .$$

Do đó $\sum_{S \in \mathscr{S}} v(S) < \varepsilon$. Vậy $B_{1/i}$ có độ đo không.

Hệ quả 1. Giả sử f, g: A → R là các hàm bị chặn. Nếu f và g khả tích trên A thì f.g cũng khả tích trên A .

Chứng minh. Hàm f.g cũng bị chặn trên A. Ký hiệu B(f), B(g) và B(f.g) tương ứng là tập hợp các điểm gián đoạn của các hàm f, g và f.g. Ta có $B(f.g) \subset B(f) \cup B(g)$. Theo định lý trên (điều kiện cần) B(f) và B(g) có độ đo không. Khi đó, từ bao hàm thức trên ta suy ra B(f.g) cũng có độ đo không. Vậy theo định lý trên (điều kiện đủ) hàm f.g khả tích trên A . ◇

Hệ quả 2. Giả sử f: A → R là hàm bị chặn. Nếu f khả tích trên A thì $|f|$ cũng khả tích trên A và ta có

$$\left| \int_A f dV \right| \leq \int_A |f| \, dV .$$

Thật vậy, hàm $|f|$ cũng bị chặn trên A. Ký hiệu B(f), B(|f|) tương ứng là tập hợp các điểm gián đoạn của f và $|f|$. Ta có $B(|f|) \subset B(f)$. Vì B(f) có độ đo không nên B(|f|) cũng có độ đo không, do đó theo định lý trên ta suy ra $|f|$ khả tích trên A. Từ các bất đẳng thức

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

ta suy ra

$$-\int_A |f| \, dV \leq \int_A f \, dV \leq \int_A |f| \, dV .$$

Hệ quả 3. **Định lý về giá trị trung bình .**

Giả sử f, g: A → R là các hàm bị chặn khả tích trên A và với mọi $x \in A$ ta có:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad g(x) \geq 0$$

trong đó M và m là các hằng số. Khi đó tồn tại μ sao cho $m \le \mu \le M$ và

$$\int_A fg\,dV = \mu \int_A g\,dV .$$

Chứng minh. Theo hệ quả 1 định lý 4 hàm f.g khả tích và do $g(x) \ge 0$ ta có

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

từ đó ta suy ra

$$m\int_A g\,dV \le \int_A fg\,dV \le M\int_A g\,dV .$$

Nếu $\int_A g\,dV = 0$ thì từ các bất đẳng thức trên ta suy ra $\int_A fg\,dV = 0$ và do đó ta có thể lấy μ là một số bất kỳ .

Nếu $\int_A g\,dV \ne 0$ (và do đó > 0) thì ta lấy $\mu = \dfrac{\int_A fg\,dV}{\int_A g\,dV}$.

§ 3. TÍCH PHÂN TRÊN MIỀN TỔNG QUÁT

Bây giờ dựa trên khái niệm tích phân trên hình hộp ta xây dựng tích phân miền tổng quát trong không gian R^n .

1. Hàm đặc trưng

Định nghĩa. Cho tập hợp $B \subset R^n$. Ta gọi hàm $\chi_B : R^n \to R$ xác định bởi $\chi_B(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in B \\ 0 \text{ nếu } x \notin B \end{cases}$

là hàm đặc trưng của tập hợp B.

2. Tập hợp đo được Jordan

Định nghĩa: Tập hợp $B \subset R^n$ được gọi là đo được Jordan nếu tồn tại một hình hộp đóng $A \subset R^n$ sao cho $B \subset A$ và hàm đặc trưng χ_B khả tích trên A. Khi đó số $v(B) = \int_A \chi_B dV$ được gọi là thể tích của B. Thể tích của tập trong R^1 gọi là độ dài, trong R^2 gọi là diện tích .

Chú ý. Tính khả tích của χ_B và giá trị $\int_A \chi_B dV$ không phụ thuộc vào việc chọn hình hộp A chứa B .

Thật vậy nếu A_1, A_2 là hai hình hộp đóng cùng chứa B thì $A_1 \cap A_2$ cũng là một hình hộp đóng chứa B. Rõ ràng ta có .

$$\int_{A_1} \chi_B dV = \int_{A_1 \cap A_2} \chi_B dV = \int_{A_2} \chi_B dV$$

Ví dụ

1) Giả sử B là hình hộp đóng. Khi đó B là đo được Jordan và

$$\int_B \chi_B dV = v(B).$$

2) Cho B là tập các điểm hữu tỉ trong [0, 1]. Tập B không đo được Jordan trong R^1 vì hàm đặc trưng χ_B không khả tích trên [0,1]. Tuy nhiên chú ý rằng tập này đo được Jordan trong R^2 và có độ đo 0 .

3. Tiêu chuẩn đo được Jordan

Định lý sau đây cho ta một đặc trưng của các tập đo được Jordan .

Định lý 5. IX. Tập bị chặn B là đo được Jordan khi và chỉ khi biên giới của B có độ đo 0.

Chứng minh. Giả sử A là hình hộp đóng chứa B. Theo định nghĩa, ta cần chứng minh rằng χ_B khả tích trên A khi và chỉ khi biên giới của B có độ đo 0 .

Nếu $x \in \text{int } B$ thì tồn tại một lân cận U của x sao cho

$$x \in U \subset B.$$

Khi đó $\chi_B = 1$ trên U và do đó liên tục tại x.

Tương tự nếu $x \in \text{int } (R^n \setminus B)$ thì tồn tại một lân cận V của x sao cho

$$x \in V \subset (R^n \setminus B).$$

Khi đó $\chi_B = 0$ trên V và do đó liên tục tại x. Cuối cùng nếu $x \in \partial B$ (biên giới của B) thì với mọi lân cận U của x tồn tại $y_1 \in U \cap B$ và $y_2 \in U \cap (R^n \setminus B)$. Khi đó $\chi_B(y_1) = 1$ và $\chi_B(y_2) = 0$. Vì thế χ_B gián đoạn tại x .

Tóm lại tập hợp các điểm gián đoạn của hàm χ_B trùng với ∂B. Áp dụng định lý Lebesgue ta suy ra điều phải chứng minh .

4. Tích phân trên tập đo được Jordan

Định nghĩa. Cho tập hợp $B \subset R^n$ và hàm số $f: A \to R$, trong đó A là một hình hộp đóng nào đó chứa B. Ta nói hàm f khả tích trên B nếu hàm $f.\chi_B$ khả tích trên A và ta ký hiệu

$$\int_B f dV = \int_A f.\chi_B dV .$$

Chú ý 1: Nếu f khả tích trên B thì $\int_B f dV$ không phụ thuộc vào việc chọn hình hộp $A \supset B$. Điều này được chứng minh một cách tương tự như đối với độ đo của tập đo được Jordan (mục 2) .

2. Nếu B là tập đo được Jordan thì χ_B khả tích trên hình hộp đóng $A \supset B$. Khi đó hàm f khả tích trên B nếu f khả tích trên A .

Từ các tính chất của tích phân trên hình hộp ta suy ra các tính chất sau của tích phân trên miền tổng quát.

Định lý 6.IX. a) Nếu f, g là các hàm khả tích trên tập đo được Jordan B thì f + g cũng khả tích trên B và

$$\int_B (f + g) dV = \int_B f dV + \int_B g dV .$$

b) Nếu f khả tích trên tập đo được B thì với mọi số thực α, hàm αf cũng khả tích trên B và

$$\int_B \alpha dV = \alpha \int_B f dV .$$

c) Nếu f, g là các hàm khả tích trên tập đo được B, đồng thời $f(x) \le g(x)$ với mọi $x \in B$ thì $\int_B f dV \le \int_B g dV$.

d) Nếu f, g khả tích trên tập đo được B thì f.g cũng khả tích trên B .

e) Nếu f khả tích trên tập đo được B thì $|f|$ cũng khả tích trên đó và ta có:

$$\left| \int_B f \, dV \right| \le \int_B |f| dV.$$

f) Nếu f, g là các hàm khả tích trên tập đo được B và với mọi $x \in B$ ta có:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad g(x) \geq 0$$

thì tồn tại μ, $m \leq \mu \leq M$ sao cho

$$\int_B f dV = \mu \int_B g dV .$$

Định lý 7.IX. Giả sử B_1 và B_2 là các tập bị chặn đo được Jordan trong R^n sao cho $B_1 \cap B_2$ có thể tích bằng 0. Khi đó nếu hàm f khả tích trên B_1 và B_2 thì f cũng khả tích trên $B_1 \cup B_2$ và

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dV = \int_{B_1} f dV + \int_{B_2} f dV .$$

Chứng minh. Ta có

$$\partial(B_1 \cup B_2) = (\overline{B_1 \cup B_2}) \cap (\overline{R^n \setminus (B_1 \cup B_2)})$$

$$\subset (\overline{B_1} \cup \overline{B_2}) \cap (\overline{R^n \setminus B_1}) \cap (\overline{R^n \setminus B_2}) \subset$$

$$\subset (\overline{B_1} \cap (\overline{R^n \setminus B_1})) \cup (\overline{B_2} \cap (\overline{R^n \setminus B_2})) = \partial B_1 \cup \partial B_2 .$$

Vì B_1 và B_2 đo được Jordan nên ∂B_1 và ∂B_2 có độ đo 0, từ đó suy ra $\partial(B_1 \cup B_2)$ có độ đo 0, tức là $B_1 \cup B_2$ đo được Jordan .

Từ hệ thức

$$\chi_{B_1 \cup B_2} = \chi_{B_1} + \chi_{B_2} - \chi_{B_1 \cap B_2}$$

ta suy ra

$$f\chi_{B_1 \cup B_2} = f\chi_{B_1} + f\chi_{B_2} - f\chi_{B_1 \cap B_2} . \qquad (1)$$

Bằng lập luận tương tự ta cũng có

$$\partial(B_1 \cap B_2) \subset \partial B_1 \cup \partial B_2$$

do đó $\partial(B_1 \cap B_2)$ cũng có độ đo 0, tức là $B_1 \cap B_2$ cũng là tập đo được Jordan.

Từ hệ

$$\chi_{B_1 \cap B_2} . f = \chi_{B_1 \cap B_2} .(\chi_{B_1} f)$$

do $\chi_{B_1 \cap B_2}$ và $\chi_{B_1} f$ khả tích trên hình hộp A nào đó chứa B_1, ta suy ra $\chi_{B_1 \cap B_2} . f$ khả tích trên A, do đó $|f| \chi_{B_1 \cap B_2}$ cũng khả tích trên A. Hơn nữa f bị chặn: $|f(x)| \le M$ nên ta có:

$$|f| \chi_{B_1 \cap B_2} \le M \chi_{B_1 \cap B_2}$$

do đó

$$\int_A |f| \chi_{B_1 \cap B_2} dv \le M \int_A \chi_{B_1 \cap B_2} dv = Mv(B_1 \cap B_2) = 0 \quad .$$

Vì thế, ta có

$$\int_{B_1 \cap B_2} f dV = 0 .$$

Từ đó do (1) ta suy ra

$$\int_{B_1 \cup B_2} f dV = \int_{B_1} f dV + \int_{B_2} f dV \quad .$$

§ 4. ĐỊNH LÝ FUBINI

Bây giờ ta xét vấn đề tính tích phân $\int_A f dV$.

Định lý Fubini trình bày dưới đây cho phép ta trong những điều kiện nào đó đưa việc tính tích phân đó về việc tính các tích phân một lớp .

Giả sử f: $A \to R$ là hàm bị chặn trên hình hộp đóng A. Khi đó dù f có khả tích hay không cận trên đúng của các tổng dưới và cận dưới đúng của các tổng trên luôn luôn tồn tại. Chúng được gọi tương ứng là tích phân dưới và tích phân trên của f theo A, ký hiệu tương ứng là $\int\limits_{*A} fdV$ và $\int\limits_{A}^{*} fdV$ (hay $L\int\limits_{A} fdV$ và $U\int\limits_{A} fdV$) .

1. Định lý 8.IX (Fubini).

Giả sử $A \subset R^n$ và $B \subset R^m$ là các hình hộp đóng và f: $A \times B \to R$ là hàm khả tích. Hơn nữa giả sử rằng hàm g_x: $B \to R$ xác định đối với mỗi $x \in A$ bởi đẳng thức

$$g_x(y) = f(x, y) \text{ và } I_*(x) = \int\limits_{*B} g_x dy = \int\limits_{*B} f(x,y)dy$$

$$I^*(x) = \int\limits_{B}^{*} g_x dy = \int\limits_{B}^{*} f(x,y)dy .$$

Khi đó I_* và I^* khả tích trên A và

$$\int\limits_{A\times B} fdV = \int\limits_{A} I_* dx = \int\limits_{A} \Big(\int\limits_{*B} f(x,y)dy \Big) dx$$

$$\int\limits_{A\times B} fdV = \int\limits_{A} I^* dx = \int\limits_{A} \Big(\int\limits_{B}^{*} f(x,y)dy \Big) dx .$$

(Các tích phân ở vế phải được gọi là các tích phân lặp của f) .

Chứng minh. Giả sử P_A là một phân hoạch của A và P_B là một phân hoạch của B. Khi đó $P = (P_A, P_B)$ là một phân hoạch của $A \times B$

mà mỗi hình hộp S của nó có dạng $S_A \times S_B$ trong đó S_A là hình hộp của phân hoạch P_A và S_B là hình hộp của phân hoạch P_B. Ta có

$$\underline{I}(f,P) = \sum_S m_S(f)v(S) = \sum_{S_A, S_B} m_{S_A \times S_B}(f)v(S_A \times S_B)$$

$$= \sum_{S_A}\Big(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f)v(S_B)\Big)v(S_A).$$

Nhưng nếu $x \in S_A$ thì rõ ràng $m_{S_A \times S_B}(f) \le m_{S_B}(g_x)$. Do đó đối với mọi $x \in S_A$ ta có

$$\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f)v(S_B) \le \sum_{S_B} m_{S_B}(g_x)v(S_B) \le \int_{*B} g_x = I_*(x).$$

Vì thế

$$\underline{I}(f,P) = \sum_{S_A}\Big(\sum_{S_B} m_{S_A \times S_B}(f)v(S_B)\Big)v(S_A) \le \sum_{S_A} m_{S_A}(I_*)v_{S_A} = \underline{I}(I_*,P_A).$$

Tương tự ta có $\bar{I}(I^*, P_A) \le \bar{I}(f, P)$.

Như vậy

$$\underline{I}(f, P) \le \underline{I}(I_*, P_A) \le \bar{I}(I_*, P_A) \le \bar{I}(I^*, P_A) \le \bar{I}(f, P).$$

Vì f khả tích trên $A \times B$ ta có

$$\sup_P \{\underline{I}(f, P)\} = \inf_P \{\bar{I}(f, P) = \int_{A \times B} f.$$

Vì thế

$$\sup_{P_A} \{\underline{I}(I_*, P_A)\} = \inf_{P_A} I(I_*, P_A) = \int_{A \times B} f.$$

Như vậy hàm I_* khả tích trên A và

$$\int_{A\times B} f dV = \int_A I_* dx .$$

Tương tự từ các bất đẳng thức

$$\underline{I}(f, P) \le \underline{I}(I_*, P_A) \le \underline{I}(I^*, P_A) \le \overline{I}(I^*, P_A) \le \overline{I}(f, P),$$

ta suy ra $\displaystyle\int_{A\times B} f dV = \int_A I^* dx$.

Chú ý: Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được rằng

$$\int_{A\times B} f dV = \int_B \Big(\int_{*A} f(x, y)\, dx\Big) dy = \int_B \Big(\int_A^{*} f(x, y) dx\Big) dy .$$

Các tích phân này được gọi là các tích phân lặp của f lấy theo thứ tự ngược lại với các tích phân lặp nêu trong định lý .

2. Áp dụng định lý Fubini vào một số trường hợp đặc biệt

a) Nếu f: $A \times B \to R$ là hàm liên tục trên $A \times B$ thì với mọi $x \in A$ hàm g_x liên tục trên B và do đó khả tích trên đó. Tương tự, với mọi $y \in B$ hàm g_y xác định bởi $g_y(x) = f(x, y)$ khả tích trên A. Khi đó áp dụng định lý Fubini ta có

$$\int_{A\times B} f dV = \int_A \Big(\int_B f(x, y) dy\Big) dx = \int_B \Big(\int_A f(x, y) dx\Big) dy .$$

Đặc biệt nếu $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ và f: $A \to R$ là hàm liên tục trên A thì bằng cách áp dụng định lý Fubini liên tiếp một số lần ta được

$$\int_A f dV = \int_{a_1}^{b_1}[\int_{a_2}^{b_2}[\ldots[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_n]\ldots]dx_2]dx_1 .$$

Vế phải đôi khi được ký hiệu là

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_n .$$

Thứ tự của việc lấy tích phân (theo các x_i) trong trường hợp này là không quan trọng và ta có thể sắp xếp sao cho việc lấy tích phân được thực hiện một cách dễ dàng nhất.

b) Nếu hàm g_x khả tích trên B với mọi $x \in A$, trừ ra tại một số hữu hạn điểm thì ta có

$$I_*(x) = \int_B f(x,y)dy$$

với mọi $x \in A$ trừ ra tại một số hữu hạn điểm.

Bởi vì rõ ràng là $\int_A I_*$ không thay đổi nếu ta thay đổi giá trị của I_* tại một số hữu hạn điểm, nên trong trường hợp này ta vẫn có thể viết

$$\int_{A\times B} f dV = \int_A (\int_B f(x,y)dy)dx$$

nếu xem rằng $\int_B f(x,y)dy$ khi nó không tồn tại ta cho nó một giá trị tùy ý, chẳng hạn 0 .

c) Giả sử A, B là các hình hộp đóng trong R^n và R^m, g: A → R và h: B → R là các hàm liên tục. Khi đó

$$\int_{A\times B} g(x)h(y)dxdy = \left(\int_A g(x)dx\right).\left(\int_B h(y)dy\right).$$

3. Tính tích phân trên miền tổng quát trong R^2

Ta áp dụng định lý Fubini để lập công thức tính tích phân trên miền tổng quát trong R^2. Ta có:

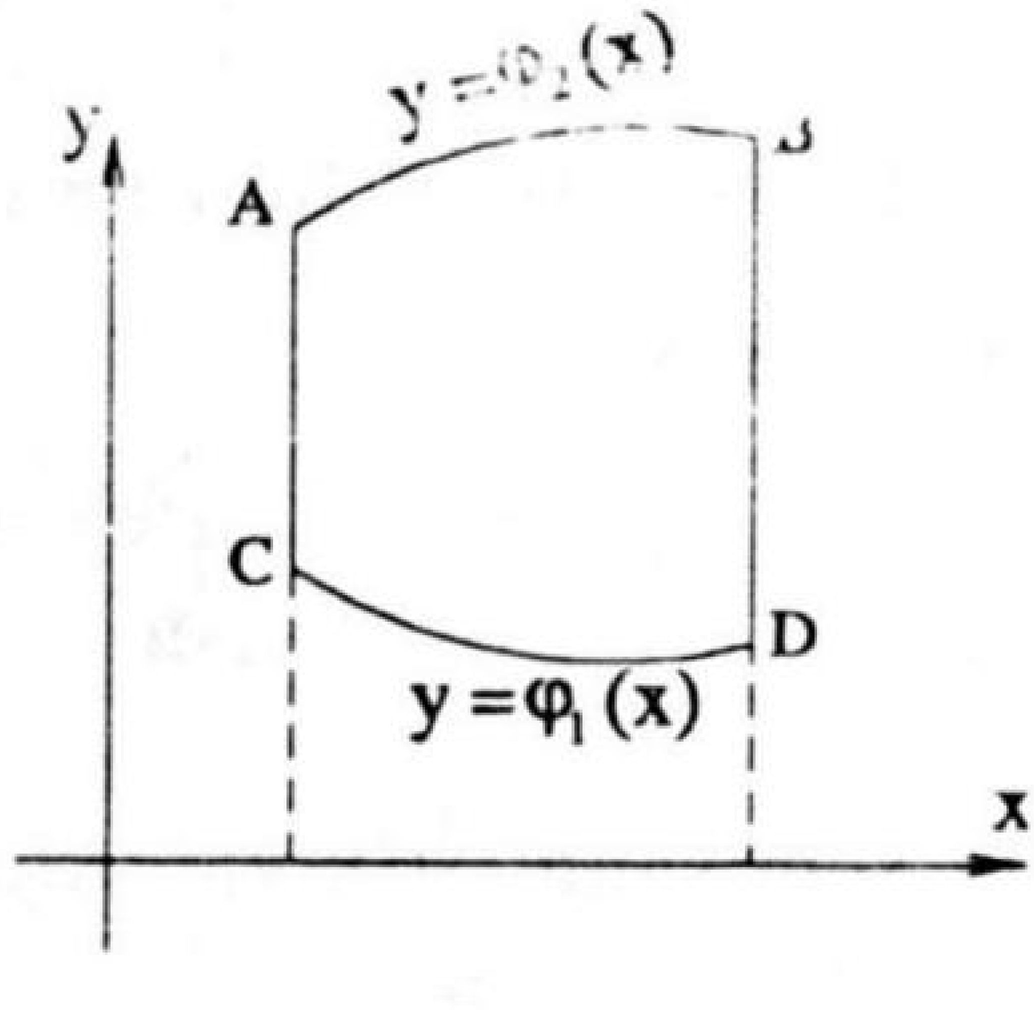
Định lý 9.IX. Cho đoạn [a, b] ⊂ R và hai hàm liên tục φ_1, φ_2: [a, b] → R sao cho $\varphi_1 \le \varphi_2$. Khi đó tập hợp

$$B = \{(x, y) \in R^2:\ a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

là đo được Jordan trong R^2 và với mọi hàm liên tục f: B → R ta có

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

Chứng minh



Biên giới của B gồm các đoạn thẳng AC, BD (các đoạn này rõ ràng là có thể phủ bởi các hình chữ nhật bé tùy ý) và các cung đường cong AB, CD .

Cho trước ε > 0. Vì $\varphi_1(x)$ liên tục trên [a, b] nên khả tích trên đó. Vì thế tồn tại một phân hoạch P của [a, b] gồm các điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots x_n = b$ sao cho

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

trong đó $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} \varphi_1(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} \varphi_1(x)$.

Rõ ràng là các hình chữ nhật $[x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$ $(i = \overline{1,n})$ phủ cung đường cong CD và tổng các diện tích của chúng theo trên nhỏ hơn ε .

Tương tự cung đường cong AB cũng có thể phủ được bằng một số hữu hạn các hình chữ nhật có tổng diện tích bé tùy ý .

Vậy biên giới của B có độ đo không và do đó B là một tập hợp đo được Jordan.

Giả sử $A = [a, b] \times [c, d]$ là hình chữ nhật chứa B. Ta mở rộng hàm f thành $\tilde{f}$ xác định trên A bằng cách đặt

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x,y) \text{ nếu } (x, y) \in B \\ 0 \text{ tại các điểm khác} \end{cases}$$

Ta có:

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \iint\limits_B \tilde{f}(x,y)dxdy = \iint\limits_A \tilde{f}(x,y)\chi_B(x,y)dxdy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x,y)\chi_B(x,y)dy$$

Nhưng với mỗi $x \in [a, b]$ ta có $\chi_B(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \\ 0 \text{ với các y khác} \end{cases}$

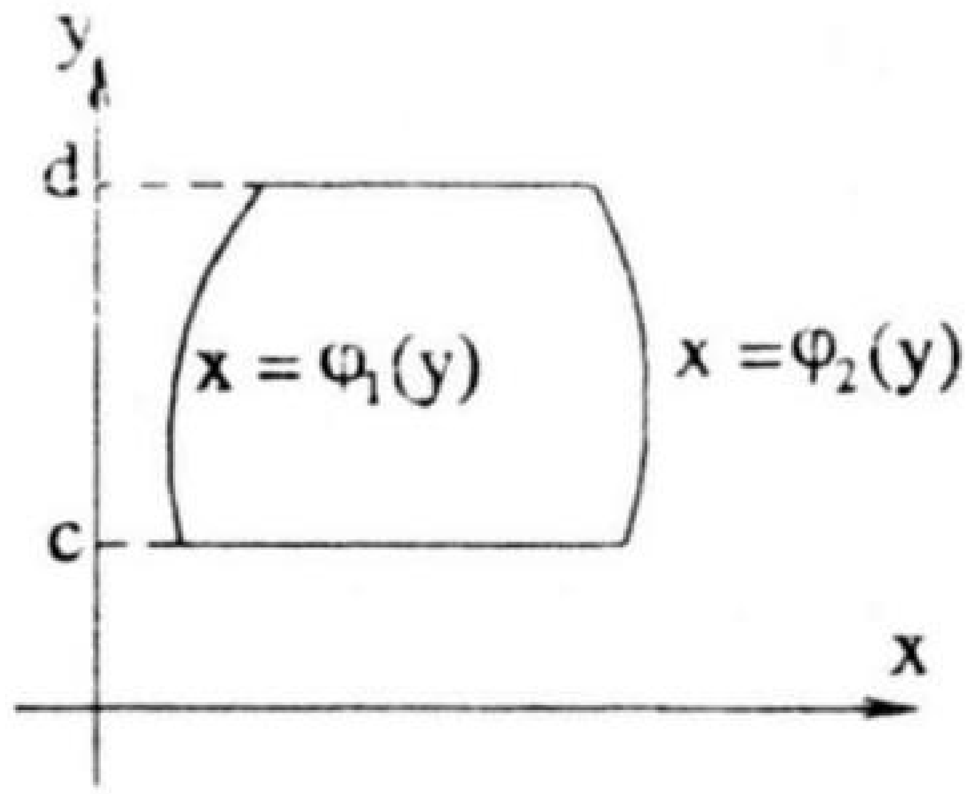
Vì thế ta có

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \ .$$

Tương tự nếu $[c, d] \subset R$, ψ_1, ψ_2: $[c, d] \to R$ là các hàm liên tục, $\psi_1 \leq \psi_2$ và

$C = \{(x, y) \in R^2:\ c \leq y \leq d,\ \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

thì ta có



$$\iint_C f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \ .$$

4. Các ví dụ

1) Tính $I = \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$

Áp dụng định lý Fubini ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \ .$$

Vì $\int_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

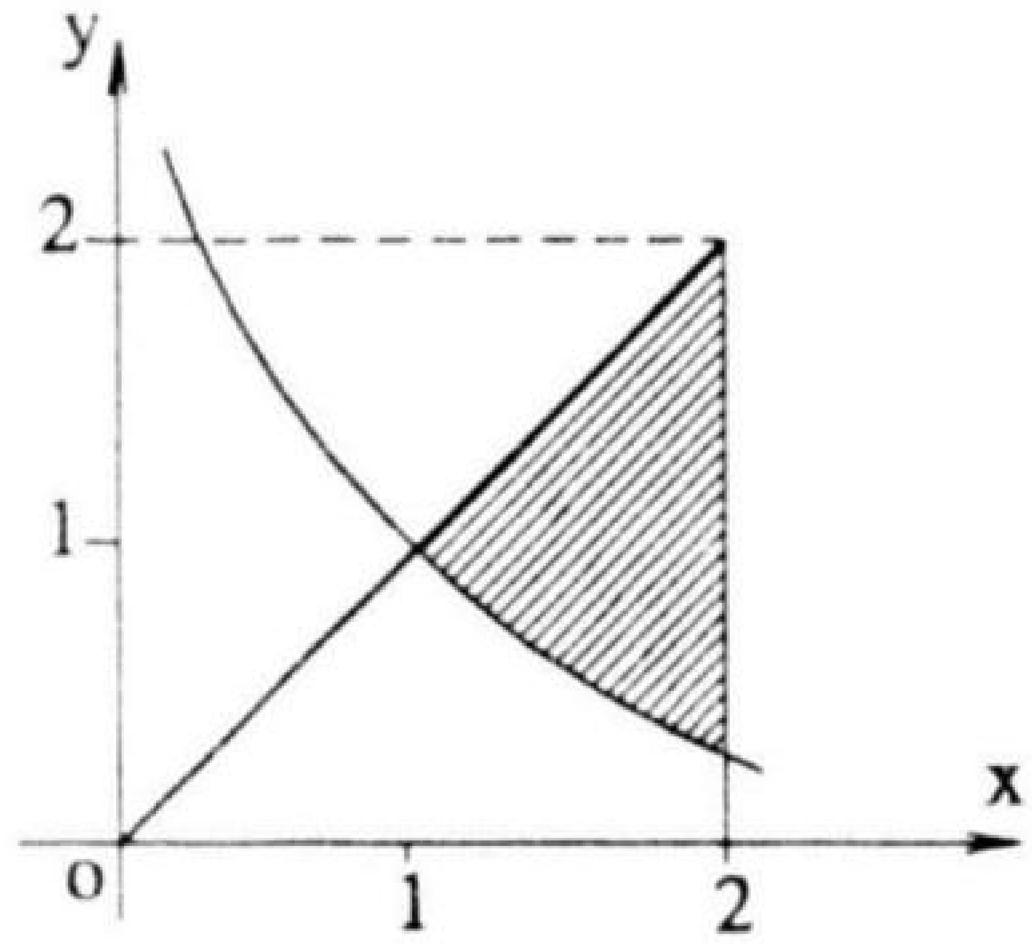
nên $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \right) dx = \ln \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+2}} \Bigg|_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

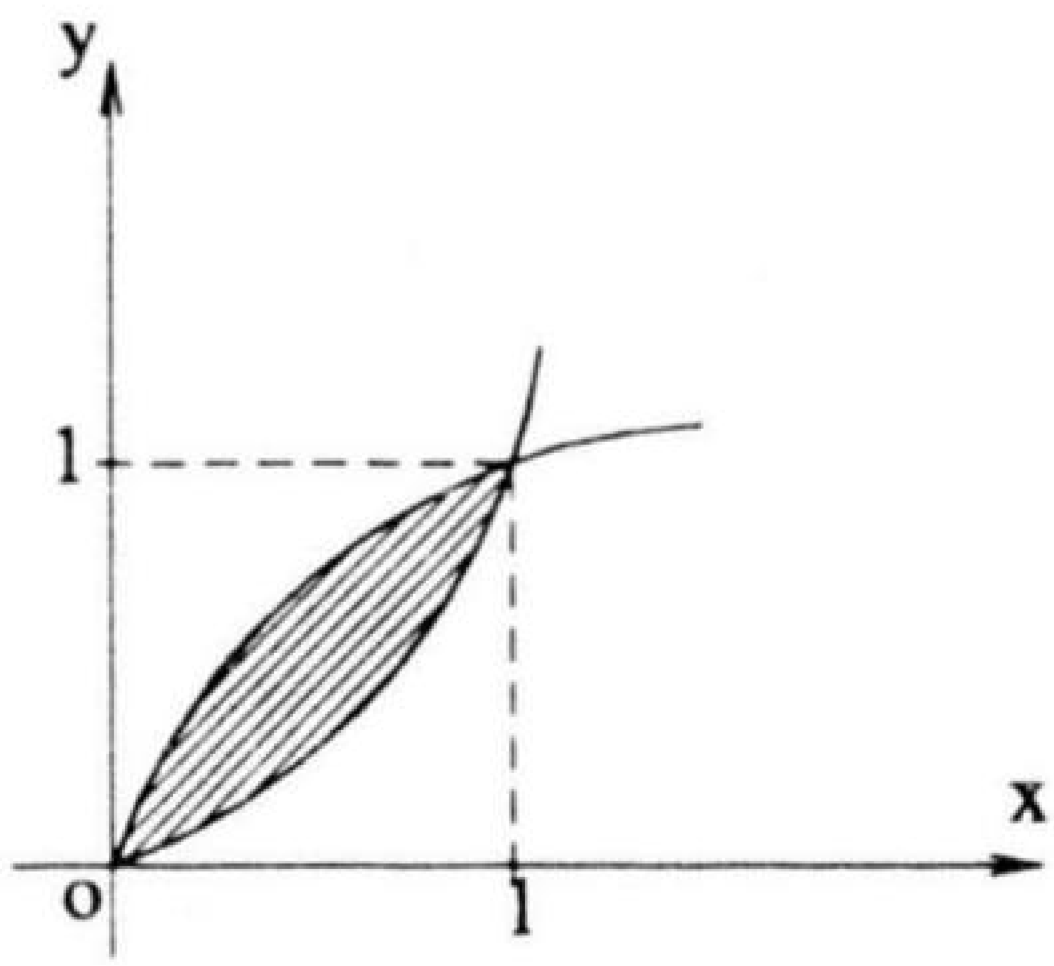
2) Tính a) $I_1 = \iint_B \frac{x^2}{y^2} dxdy$

trong đó B là miền giới hạn bởi các đường thẳng x = 2, y = x và bởi hyperbol xy = 1 .

b) $I_2 = \iint\limits_C (x^2 + y)dxdy$

trong đó C là miền giới hạn bởi các parabol $y = x^2$ và $y^2 = x$.





Giải. a) Ta thấy đường thẳng x = 2 cắt đường thẳng y = x tại điểm (2, 2) và cắt hyperbol xy = 1 tại điểm $(2, \frac{1}{2})$; đường thẳng y = x và hyperbol (trong góc phần tư thứ nhất) cắt nhau tại điểm (1, 1). Ta có

$$I_1 = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy .$$

Nhưng $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = -\frac{x^2}{y}\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = x^3 - x ,$

nên $\displaystyle I = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \frac{9}{4}$.

b) Hai parabol cắt nhau tại các điểm (0, 0) và (1, 1) .

Ta có $I_2 = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)dx$.

Ta tính tích phân bên trong

$$\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)dx = (\frac{x^3}{3} + yx)\Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} = \frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3.$$

Do đó

$$I_2 = \int_0^1 (\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^6 - y^3)dy = \frac{33}{140}.$$

5. Tính tích phân trên miền tổng quát trong R^3

Tương tự định lý 9.IX ta có kết quả sau đây:

Định lý 10.IX. Giả sử D là một tập hợp compac đo được Jordan trong R^2, φ_1, φ_2: D → R là các hàm số liên tục sao cho $\varphi_1 \le \varphi_2$. Khi đó tập hợp

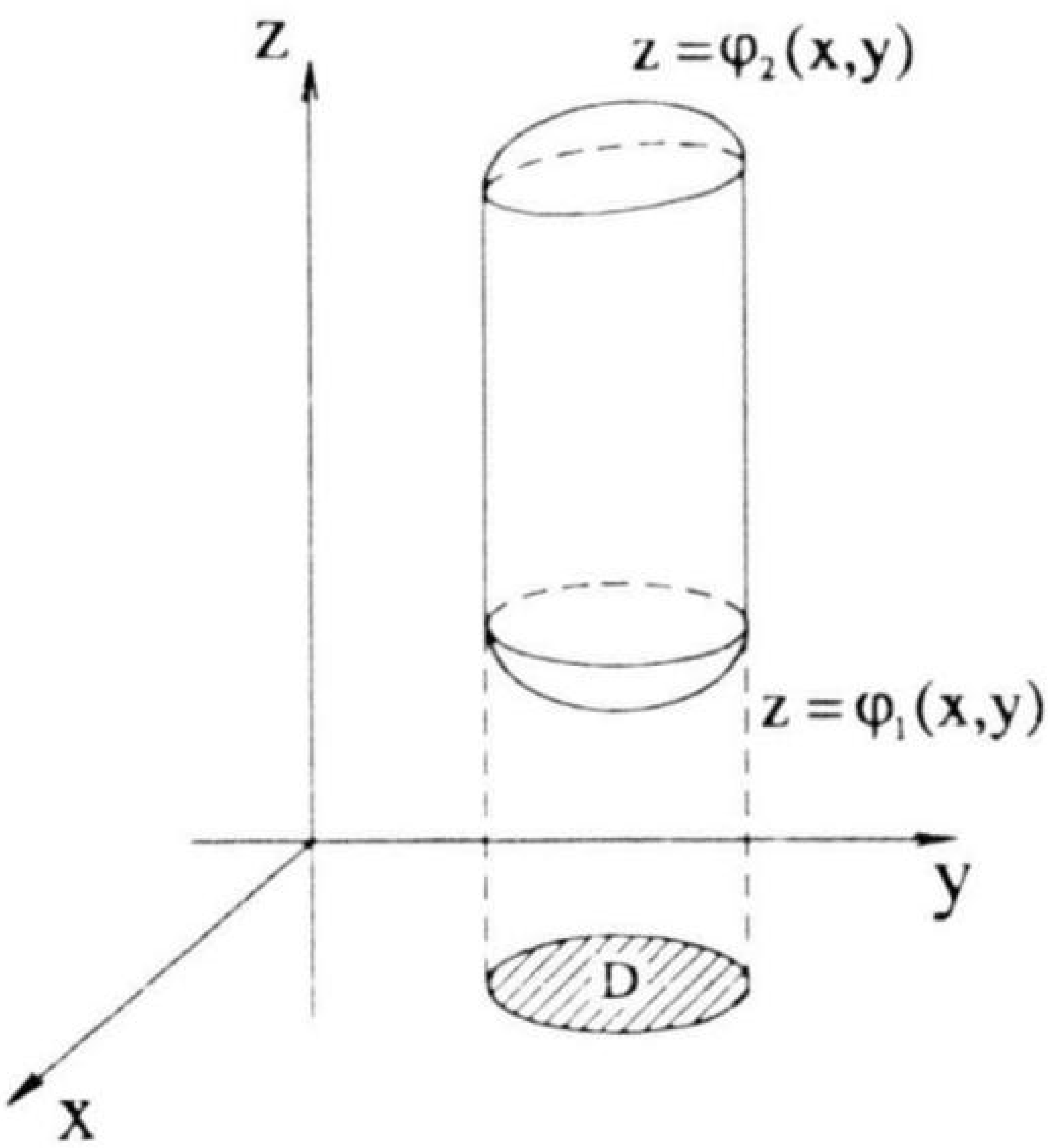
$$B = \{(x, y, z) \in R^3 :\ (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$$

đo được Jordan trong R^3 và với mọi hàm liên tục f: B → R ta có

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iint_B \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy.$$

Chứng minh. Định lý này được chứng minh một cách tương tự như định lý 9.IX. Chú ý rằng ở đây biên giới của B gồm phía trên là phần mặt $z = \varphi_2(x, y)$, phía dưới là phần mặt $z = \varphi_1(x, y)$

các phần mặt này có hình chiếu trên xOy là miền D, mặt bên là mặt trụ có đường sinh song song với Oz và đường chuẩn là biên giới của miền D .



Theo giả thiết D là một tập đo được Jordan trong R^2 nên ∂D có độ đo (trong R^2) bằng 0. Hơn nữa ∂D là tập compac, nên ta có thể phủ ∂D bằng một số hữu hạn hình chữ nhật $D_1, D_2, \ldots, D_k$ có tổng diện tích bé tùy ý. Gọi $M = \max\limits_{(x,y)\in D} \varphi_2(x,y)$, $m = \min\limits_{(x,y)\in D} \varphi_1(x,y)$. Khi đó các hình hộp $D_1 \times [m, M]$, $D_2 \times [m, M]$, ... $D_k \times [m, M]$ phủ mặt bên của B và có tổng thể tích bé tùy ý. Vì thế mặt bên của B có độ đo (trong R^3) bằng 0. Do φ_2 liên tục trên D nên φ_2 khả tích trên đó. Vì thế tồn tại một hình chữ nhật A chứa D sao cho $\varphi_2 \cdot \chi_D$ khả tích trên A (ta mở rộng φ_2 ra A bằng cách đặt $\varphi_2(x, y) = 0$ nếu $(x, y) \notin D$). Khi đó theo định lý 2.IX với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một phân hoạch P của A sao cho

$$\sum_S (M_S - m_S) v(S) < \varepsilon \qquad (1)$$

trong đó tổng lấy theo mọi hình chữ nhật S của phân hoạch A,

$$M_S = \sup\{\varphi_2(x, y)\ \chi_D(x, y) : (x, y) \in S\}$$

$$m_S = \inf\{\varphi_2(x, y)\ \chi_D(x, y) : (x, y) \in S\} .$$

Khi đó các hình hộp $S \times [m_S, M_S]$, S là hình chữ nhật của phân hoạch P, phủ phần mặt $z = \varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$ và có tổng thể tích nhỏ hơn ε (theo (1)). Vậy phần mặt này có độ đo (trong R^3) bằng 0. Tương tự ta chứng minh được rằng phần mặt $z = \varphi_1(x, y)$, $(x, y) \in D$ có độ đo (trong R^3) bằng 0 và do đó B là một tập đo được Jordan trong R^3.

Giả sử $C = [a, b] \times [c, d] \times [g, h]$ là hình hộp đóng chứa B. Ta thác triển hàm f thành hàm $\widetilde{f}$ xác định trên C bằng cách đặt

$$\widetilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) \text{ nếu } (x,y,z) \in B \\ 0 \qquad\qquad \text{ nếu } (x,y,z) \notin B. \end{cases}$$

Khi đó áp dụng định lý Fubini ta có

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B \widetilde{f}(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_C \widetilde{f}(x,y,z)\chi_B(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} \left[\int_g^h \widetilde{f}(x,y,z)\chi_B(x,y,z)dz\right]dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy \ .$$

Chú ý: Nếu miền $D \subset R^2$ có dạng

$$D = \{(x, y) \in R^2: a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

trong đó φ_1, φ_2 liên tục trên [a, b] thì bằng cách áp dụng định lý Fubini một lần nữa ta được:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz . \qquad (2)$$

Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được kết quả sau:

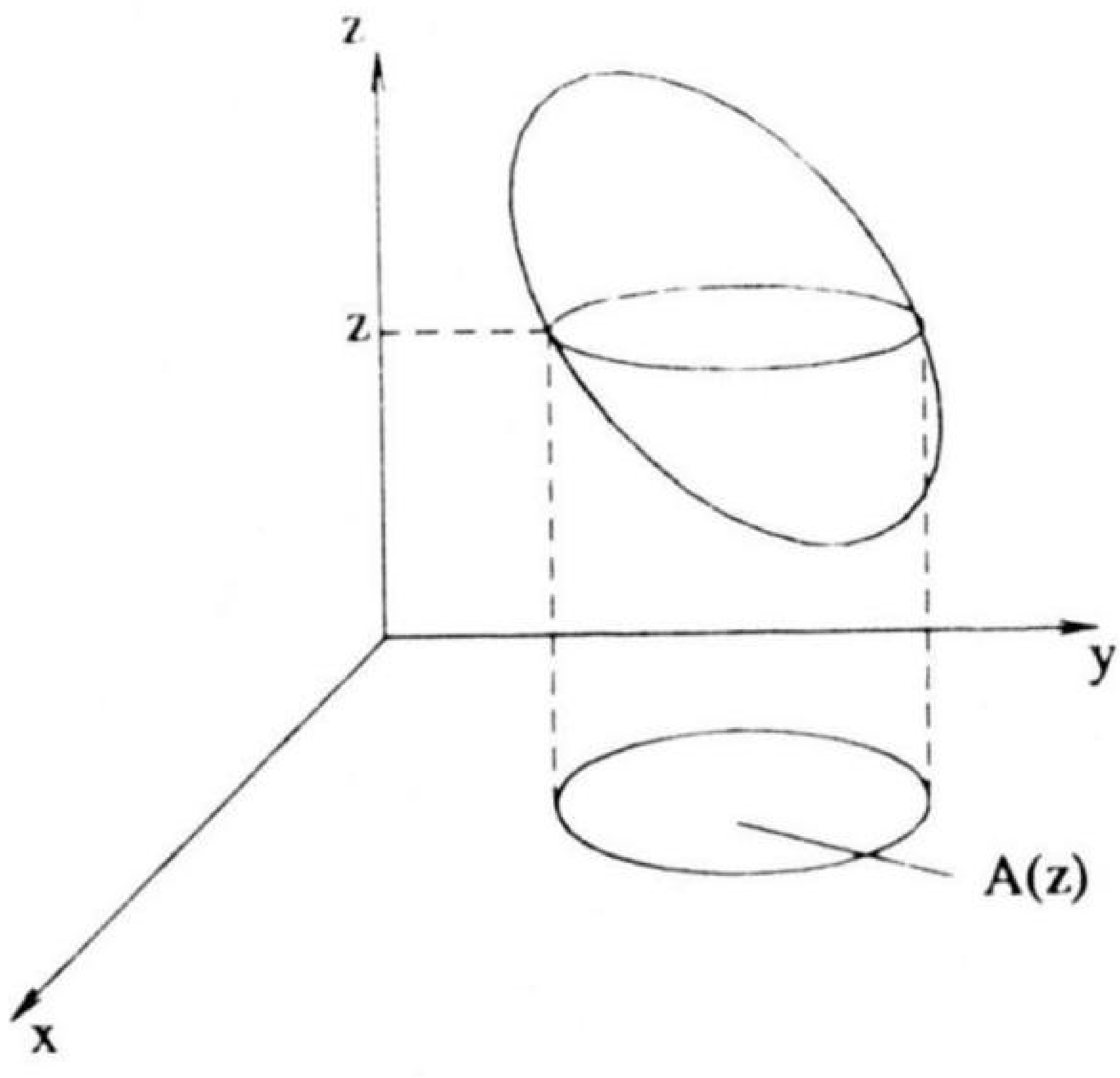
Định lý 11.IX. Giả sử A là một tập hợp compac đo được trong R^3 sao cho với mọi $(x, y, z) \in A$ ta có $a \le z \le b$. Nếu với mọi $z \in [a, b]$ tập hợp

$$A(z) = \{(x, y) \in R^2 : (x, y, z) \in A\}$$

đo được Jordan trong R^2 thì với mọi hàm liên tục $f: A \to R$ ta có

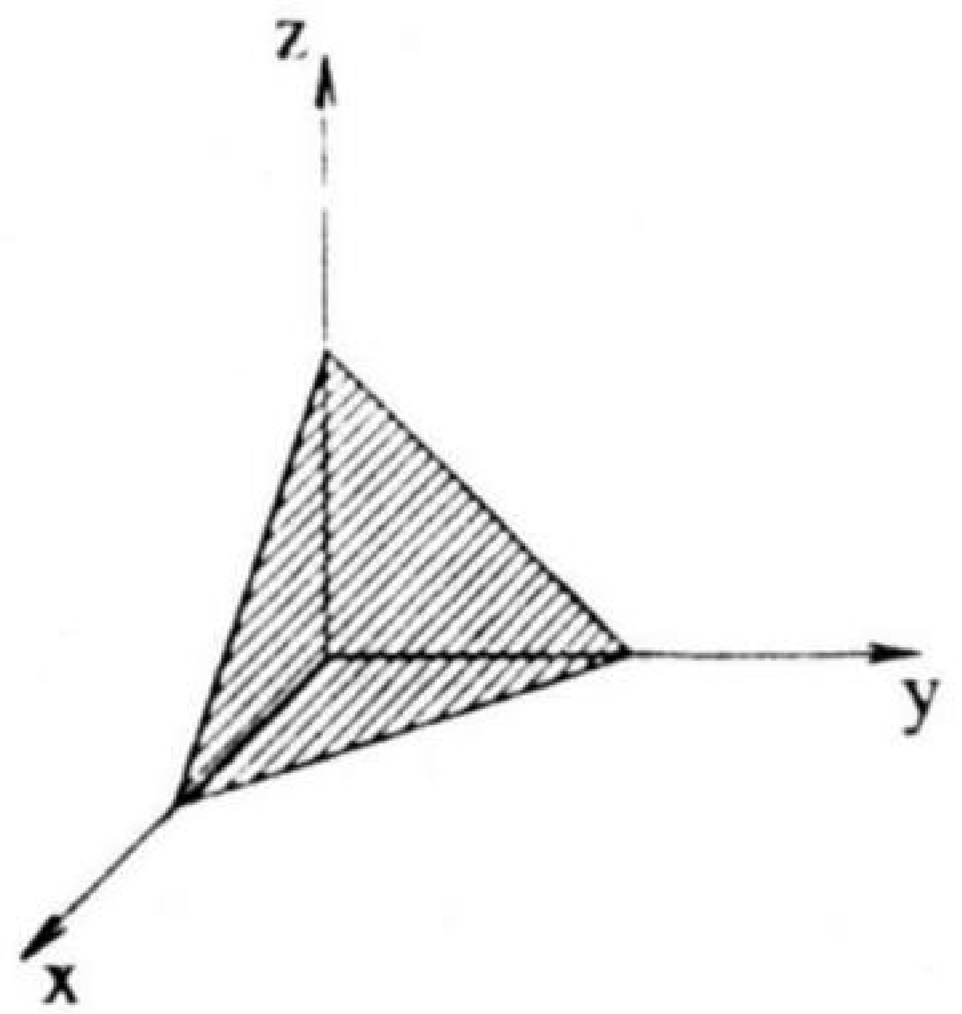
$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left[\iint\limits_{A(z)} f(x,y,z)\,dxdy \right] dz. \qquad (3)$$

Chú ý: Ta có thể thay đổi vai trò của x, y, z để thu được các công thức khác nhau.



Ví dụ 1. Tính tích phân:

$$I = \iiint\limits_B \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$$



trong đó B là tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng x = 0, y = 0, z =0 và x + y + z = 1.

Giải: Hình chiếu của B trên mặt phẳng Oxy là tam giác giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, y = 0 và x + y = 1. Rõ ràng là x biến thiên giữa 0 và 1 và với mỗi x cố định y biến thiên từ 0 đến 1-x. Nếu cố định (x, y) thì z biến thiên từ 0 đến 1-x-y.

Theo công thức (2) ta có

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

nhưng $$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]$$

và $$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right)$$

nên cuối cùng ta có

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

2. Tính $J = \iiint\limits_V z\, dxdydz$

trong đó V là nửa trên của ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$

Giải: Áp dụng công thức (3) ta có

$$I = \int_0^c dz \iint_{A(z)} zdxdy = \int_0^c zdz \iint_{A(z)} dxdy$$

trong đó A(z) là hình chiếu trên mặt phẳng Oxy của thiết diện của ellipsoid cắt bởi mặt phẳng $Z = z$.

Nhưng $\iint_{A(z)} dxdy$ chính là diện tích của hình chiếu này. Biên giới của hình chiếu của thiết diện này có phương trình là

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})} = 1 .$$

Do đó A(z) là một ellip với các bán trục $a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$ và $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$

Vì thế diện tích của A(z) là $\pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})$.

Vậy ta có

$$I = \pi ab \int_0^c z(1-\frac{z^2}{c^2})dz = \frac{\pi abc^2}{4} .$$

§ 5. CÔNG THỨC ĐỔI BIẾN

Như đã biết trong lý thuyết tích phân của hàm một biến, nếu g: [a, b] → R là hàm liên tục khả vi và f: R → R là hàm liên tục thì ta có công thức đổi biến sau:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} fdy = \int_a^b (f \circ g)g'dx .$$

Nếu g là đơn ánh thì công thức trên có thể viết lại dưới dạng

$$\int_{g([a,b])} f\,dy = \int_{[a,b]} f\circ g\,|g'|\,dx .$$

Thật vậy, nếu g là hàm tăng thì $g'(x) \geq 0$ và $g[a, b]=[g(a), g(b)]$ và công thức trên đúng. Nếu g giảm thì $g'(x) \leq 0$ và $g([a, b]) = [g(b), g(a)]$. Từ hệ thức $\int_{g(a)}^{g(b)} f\,dy = \int_a^b (f\circ g)g'\,dx$

ta suy ra

$$\int_{g[a,b]} f\,dy = \int_{g(b)}^{g(a)} f\,dy = -\int_{g(a)}^{g(b)} f\,dy = -\int_a^b (f\circ g)g'\,dx = \int_a^b (f\circ g)\,|g'|\,dx .$$

Ta sẽ mở rộng công thức này cho tích phân bội .

1. Ý nghĩa hình học của môđun của Jacôbian trong trường hợp hai chiều.

Giả sử G và G* là các tập mở trong R^2 và F: $G \ni (u, v) \to (x, y) \in G^*$, tức là:

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v)).$$

Ta giả thiết rằng hàm F thỏa mãn các điều kiện sau:

1) F là một song ánh giữa G và G*

2) F khả vi liên tục trên G

3) $\det J_F(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$ trên G.

Chú ý rằng khi đó hàm ngược F^{-1} khả vi liên tục trên G* .

Bổ đề 4. Giả sử C là một tập hợp mở bị chặn sao cho $\overline{C} = C \cup \partial C \subset G$. Khi đó $C^* = F(C)$ cũng là một tập mở bị chặn và $\partial F(C) = F(\partial C)$.

Chứng minh. Vì F và F^{-1} liên tục nên các điểm trong tương ứng với các điểm trong, các điểm biên ứng với các điểm biên qua ánh xạ F. Thật vậy giả sử $a \in \text{int}C$. Khi đó tồn tại một lân cận mở $U = U(a)$ sao cho $U \subset C$. Khi đó $U^* = F(U) = (F^{-1})^{-1}(U)$ là một tập mở chứa F(a) và $U^* \subset F(C)$. Do đó F(a) là điểm trong .

Bây giờ giả sử $b \in \partial C$, U^* là một lân cận mở của F(b). Do hàm F liên tục, tập hợp $U = F^{-1}(U^*)$ là một tập mở chứa b vì $b \in \partial C$ tập này có chứa những điểm của C cũng như những điểm không thuộc C. Vì vậy lân cận $U^* = F(U)$ của F(b) chứa những điểm của F(C) cũng như những điểm không thuộc F(C), tức là F(b) là một điểm biên của F(C). Vậy $F(\partial C) \subset \partial F(C)$. Thay đổi vai trò của F và F^{-1} ta đi đến bao hàm thức ngược lại: $\partial F(C) \subset F(\partial C)$. Vậy

$$F(\partial C) = \partial(FC).$$

Vì F^{-1} liên tục nên do C là tập mở ta có $F(C) = (F^{-1})^{-1}(C)$ là tập mở. Hơn nữa vì C là tập bị chặn $\overline{C} = C \cup \partial C$ là một tập đóng và bị chặn tức là một tập compac. Do F liên tục $F(\overline{C})$ là tập compac, do đó nó bị chặn, vì thế F(C) cũng là tập bị chặn .

Bây giờ giả sử $(u_0, v_0) \in G$ và h là một số nào đó khá nhỏ. Xét hình vuông S với các đỉnh tại (u_0, v_0), $(u_0 + h, v_0)$, $(u_0 + h, v_0 + h)$, $(u_0, v_0 + h)$. Do G mở với h khá nhỏ $S \subset G$. Theo bổ đề trên F(S) là một tập hợp bị chặn. Xét tỉ số $\dfrac{v(F(S))}{v(S)}$, trong đó v(F(S)), v(S) tương ứng là diện tích của F(S) và S.

Đặt $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$,

$$x'_u(u_0, v_0) = a_{11}\ ,\quad x'_v(u_0, v_0) = a_{12}\ ,\quad y'_u(u_0, v_0) = a_{21}$$

$$y'_v(u_0, v_0) = a_{22}\ ,\quad u - u_0 = \Delta u\ ,\quad v - v_0 = \Delta v,\quad r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\ .$$

Do F khả vi ta có

$$x = x(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0) + \varepsilon_1 r$$

$$y = y(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0) + \varepsilon_2 r$$

trong đó $\varepsilon_i \to 0$ khi $r \to 0$ ($i = 1, 2$) .

Cùng với ánh xạ F xét ánh xạ $\widetilde{F} : R^2 \to R^2$ xác định bởi

$$\widetilde{F}(u, v) = (\widetilde{x}(u, v), \widetilde{y}(u, v))$$

trong đó

$$\widetilde{x}(u, v) = x_0 + a_{11}(u - u_0) + a_{12}(v - v_0)$$
$$\widetilde{y}(u, v) = y_0 + a_{21}(u - u_0) + a_{22}(v - v_0).$$

Ta biết rằng với phép biến đổi trên, ảnh của một hình bình hành (nói riêng của một hình vuông) là một hình bình hành và tỉ số diện tích của ảnh với hình bình hành được ánh xạ bằng trị tuyệt đối của giá trị định thức củaphép biến đổi. Như vậy

$$\frac{v\left((\widetilde{F}(S)\right)}{v(S)} = |\det J_F(u_0, v_0)|, \text{ trong đó } J_F(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Vì v(F(S)) xấp xỉ v($\widetilde{F}$ (S)), do giả thiết về tính khả vi liên tục của F, tạo giới hạn ta có:

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(F(S))}{v(S)} = \lim_{h\to 0}\frac{v((\widetilde{F}(S))}{v(S)} = |\det J_F(u_0, v_0)|.$$

2. Công thức đổi biến số

Ta nêu ra không chứng minh định lý sau đây về phép đổi biến số trong tích phân bội.

Định lý 11.IX. Giả sử $A \subset R^n$ là một tập hợp mở và $g: A \to R^n$ là một đơn ánh, liên tục khả vi. Khi đó:

$$\int_{g(A)} f dy = \int_A (f_\circ g)\,|\det g'|\,dx$$

với mọi hàm khả tích $f: g(A) \to R$.

Chú ý: 1) Giả sử $g: A \to R^n$ có dạng $g = (g_1, ..., g_n)$ khi đó

$$\det g' = \det(D_j g_i(x)) = \frac{D(g_1,...,g_n)}{D(x_1,...,x_n)} = \det J_g(x)$$

là Jacôbian của phép biến đổi g .

2) Giả sử A là một tập đo được Jordan. Khi đó ∂A có độ đo 0. Nếu hàm $g: A \to R$ có thể mở rộng thành một đơn ánh liên tục khả vi trên một tập mở nào đó chứa A thì ta có thể chứng minh được rằng $g(\partial A)$ có độ đo 0, tức là $g(A)$ là một tập đo được Jordan. Như thế định lý trên có thể áp dụng cho các tập đo được Jordan .

3) Tính tích phân hai lớp trong tọa độ cực

Ta áp dụng công thức đổi biến trên vào việc tính tích phân hai lớp. Xét hàm

$$g: R^2 \ni (r, \theta) \to (x, y) \in R^2$$

trong đó $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$ (1)

Các hàm x, y là các hàm liên tục khả vi với Jacôbian

$$\det J_g(r,\theta) = \det \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r .$$

Giả sử $\Omega = \{r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi\} \subset R^2$. Rõ ràng công thức (1) thực hiện một đơn ánh từ tập Ω lên tập

$$\Omega' = R^2 \setminus \{(x, y) \in R^2:\ x \geq 0,\ y = 0\}.$$

Xét tập bị chặn đo được Jordan A trong R^2. Giả sử $D' = A \cap \Omega'$. Khi đó công thức (1) thực hiện một đơn ánh giữa D' và một tập D nào đó của R^2. Áp dụng công thức đổi biến nếu f khả tích trên $D' = g(D)$ ta có

$$\iint_{D'} f(x,y)dxdy = \iint_{D} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) r dr d\theta . \qquad (2)$$

Từ (2) ta suy ra

$$\iint_{\overline{D'}} f(x,y)dxdy = \iint_{\overline{D}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r dr d\theta$$

vì khi đó ta chỉ thêm vào miền lấy tích phân một tập hợp có độ đo 0.

Ví dụ:

1) $$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{\substack{0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} r\cos\pi r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\cos\pi r dr =$$

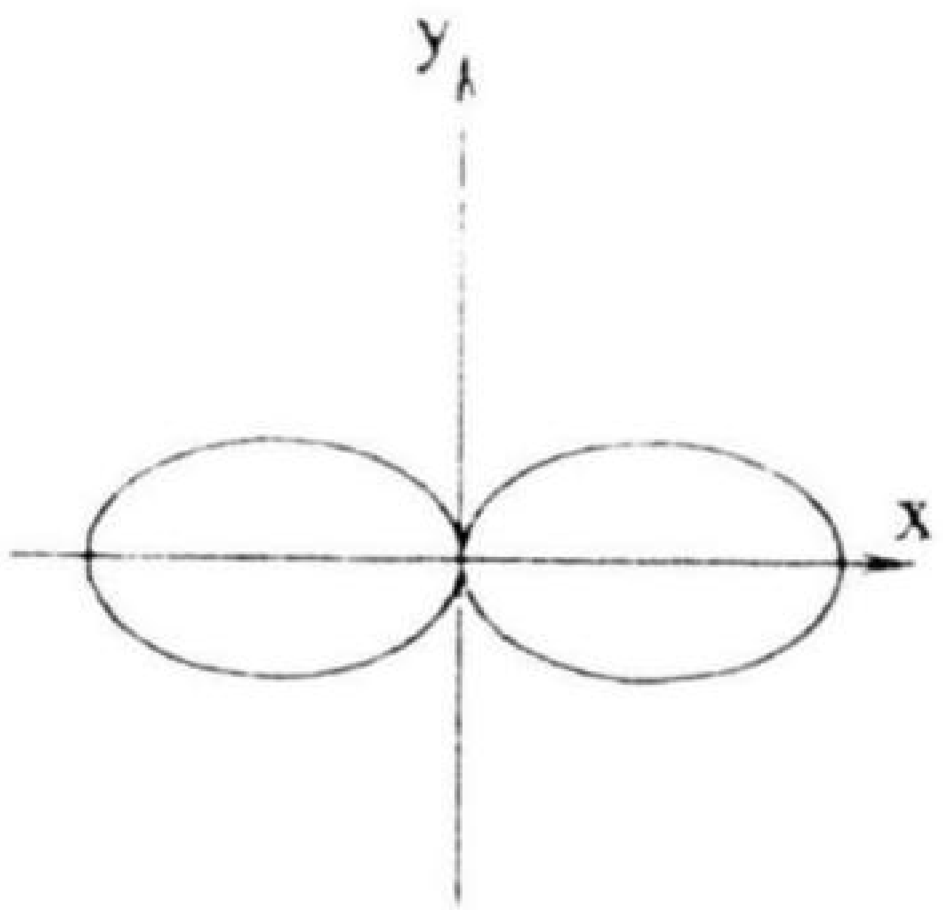
$$= 2\pi\left[\left.\frac{r\sin\pi r}{\pi}\right|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \sin\pi r dr\right] = -\frac{4}{\pi} .$$

2) Tính diện tích giới hạn bởi đường lemmiscat

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)\ .$$

Ta có

$$S = \iint\limits_{D'} dxdy = \iint\limits_{D} rdrd\theta .$$



Phương trình của đường trong tọa độ cực là:

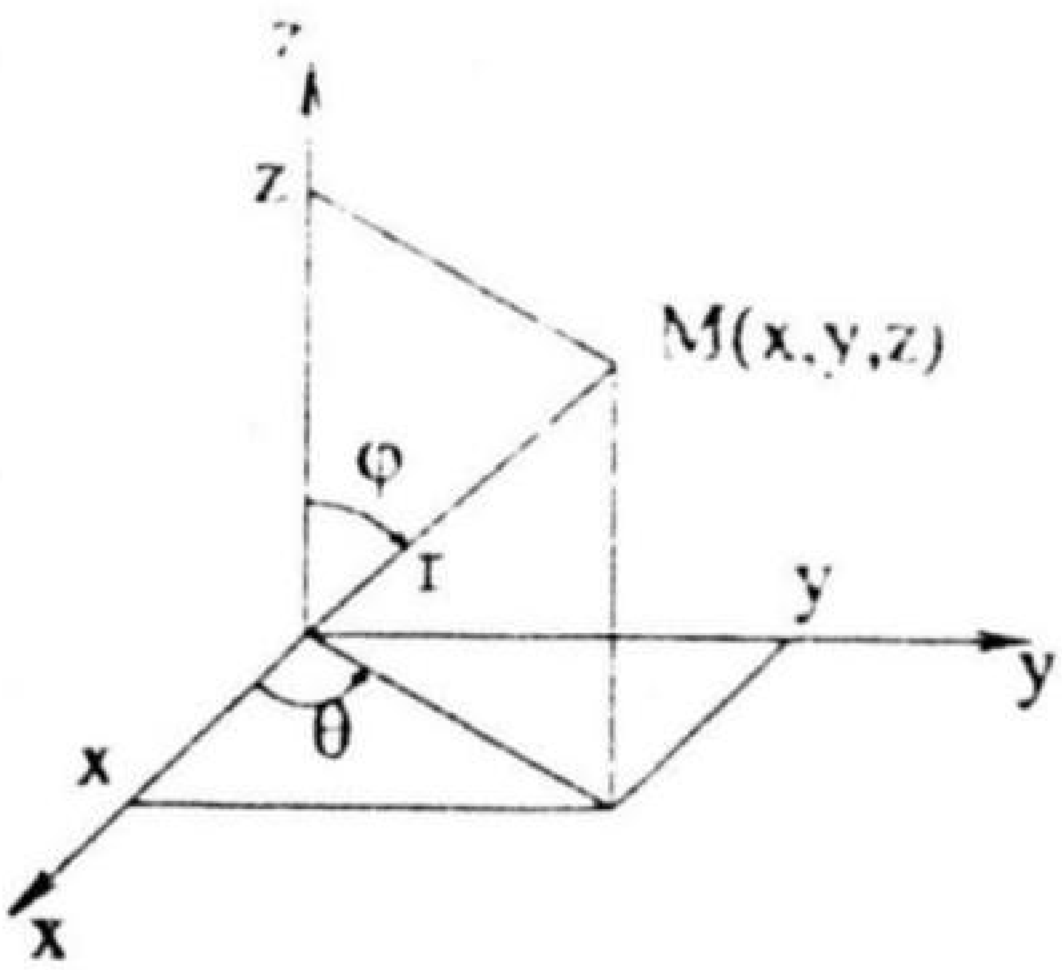
$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$

Nếu hạn chế trong góc phần tư thứ nhất thì $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ vì ta phải có $\cos 2\theta \geq 0$. Vậy ta có

$$\frac{S}{4} = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a\sqrt{2\cos\theta}} rdr = a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2} .$$

Do đó $S = 2a^2$.

4. Tính tích phân ba lớp trong tọa độ cầu



Xét hàm g: $(r, \varphi, \theta) \to (x, y, z)$ xác định bởi

$x = r\sin\varphi\cos\theta$

$y = r\sin\varphi\cos\theta$

$z = r\cos\varphi$

trong đó

$0 \leq r < +\infty,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Ký hiệu $\Omega = \{(r, \varphi, \theta): 0 \leq r < +\infty,\ \ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$\det g' = \det J_g(r, \varphi, \theta) =$

$$= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi .$$

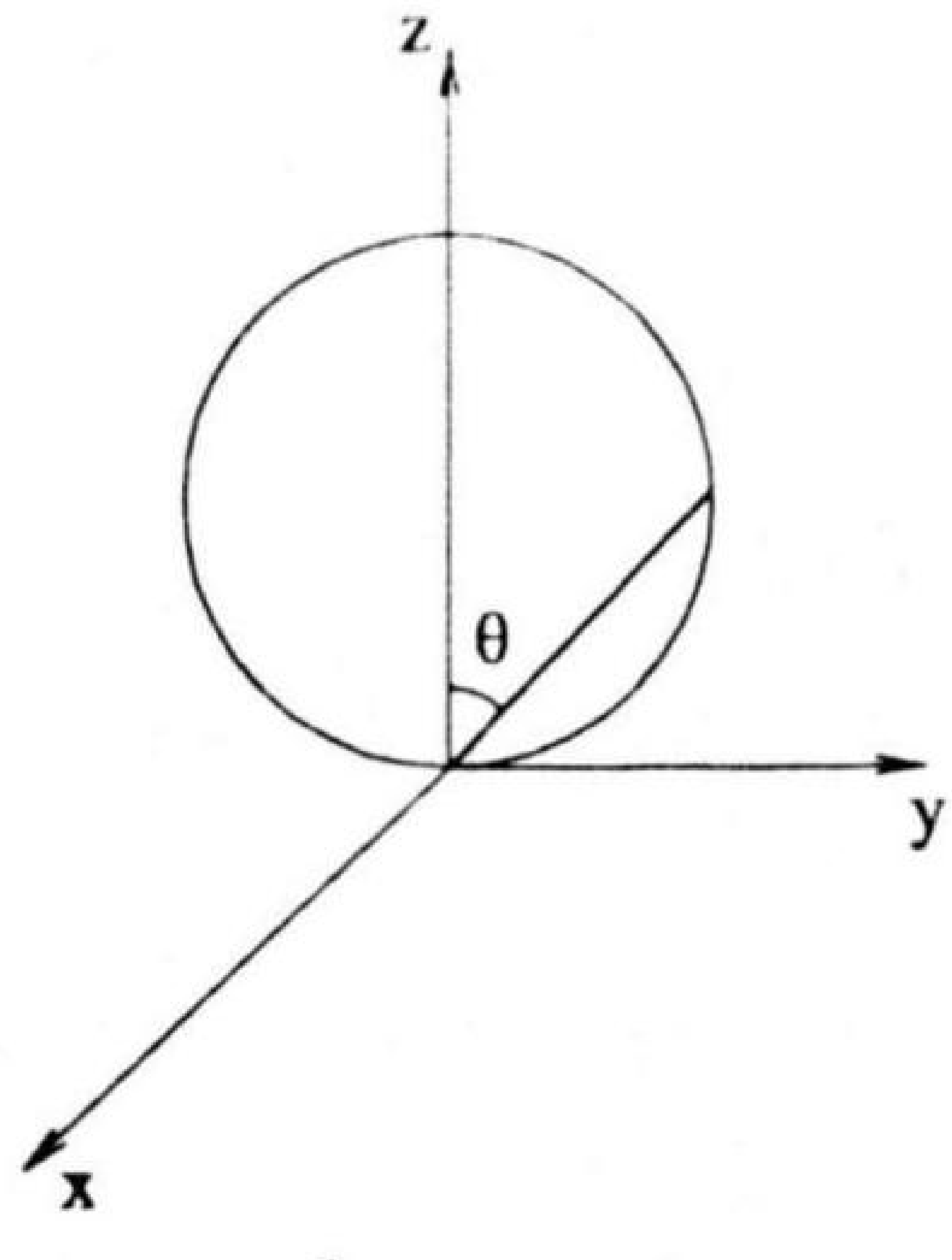
Giả sử $A \subset \Omega$ là một tập hợp đo được Jordan trong R^3.

Khi đó nếu f là hàm khả tích trên g(A) thì ta có

$$\iiint\limits_{g(A)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{A} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta .$$

Ví dụ. Tính tích phân

$$I = \iiint\limits_{V} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$



trong đó V là miền giới hạn bởi mặt $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Phương trình của mặt có thể viết lại là

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}.$$

Đó là mặt cầu tâm tại $(0, 0, \frac{1}{2})$ bán kính $\frac{1}{2}$. Chuyển sang tọa độ cầu phương trình của mặt có dạng $r^2 = r\cos\theta$ hay $r = \cos\theta$.

Vậy miền biến thiên của các tọa độ cầu là

$$0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le r \le \cos\theta .$$

Do đó

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\cos\theta} r^3 dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin\theta d\theta = \frac{\pi}{10}.$$

5) Tính tích phân ba lớp trong tọa độ trụ.

Xét hàm g: (r, φ, z) → (x, y, z) xác định bởi

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

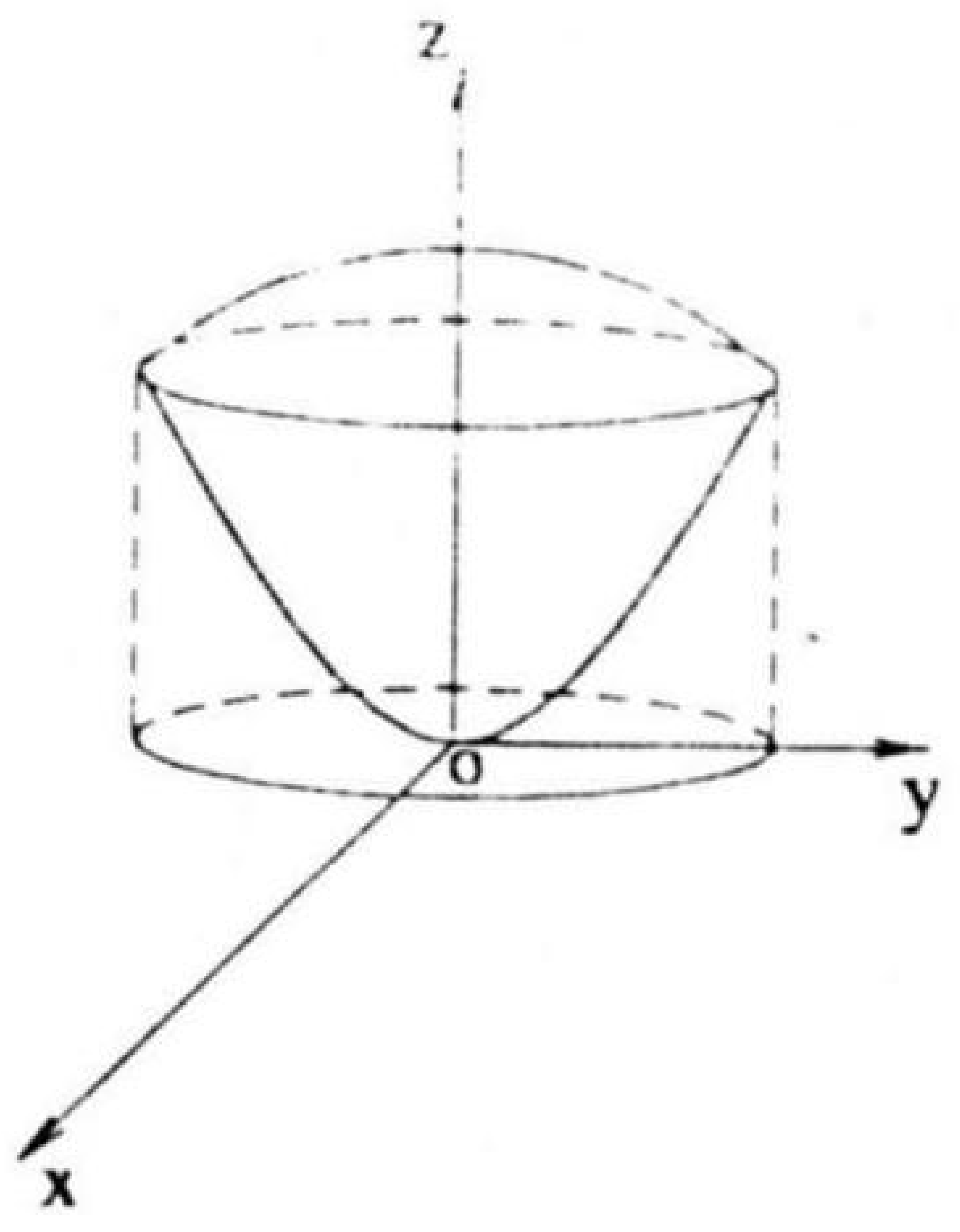
trong đó $0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$

Ta có:

$$J_g(x) = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Ta có $\iiint\limits_{D'} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{D} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dr d\varphi dz$.

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_{V} z dxdydz$



trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt $z = x^2 + y^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Trong tọa độ trụ, phương trình của các mặt trên tương ứng là

$$z = r^2 \text{ và } r^2 + z^2 = 6.$$

Hai mặt này cắt nhau theo một hình tròn nằm trong mặt phẳng z = 2 bán kính $\sqrt{2}$.

Ta có

$$0 \le r \le \sqrt{2},$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$r^2 \le z \le \sqrt{6 - r^2}$$

Do đó

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} zdz =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left. \frac{z^2}{2} \right|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} rdr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6 - r^2 - r^4) rdr = \frac{11\pi}{3}$$

BÀI TẬP

1. Giả sử f:[0, 1] × [0, 1] → R xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 1 \text{ nếu } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích và $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f dV = \frac{1}{2}$.

2. Giả sử f: A → R là hàm khả tích và g = f khắp nơi, trừ ra tại một số hữu hạn điểm. Chứng minh rằng hàm g khả tích trên A và $\displaystyle\int_A f dV = \int_A g dV$.

3. Cho hàm f : A → R và phân hoạch P của A. Chứng minh rằng hàm f khả tích khi và chỉ khi với mọi hình hộp S của phân hoạch P hàm $f|_S$ (thu hẹp của f trên S) khả tích trên S và trong trường hợp này ta có $\displaystyle\int_A f dV = \sum_S \int_S f|_S dV$.

4. Cho hàm f: [0,1] × [0,1] → R xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu x vô tỉ} \\ 0 \text{ nếu x hữu tỉ, y vô tỉ} \\ \dfrac{1}{q} \text{ nếu x hữu tỉ, } y = \dfrac{p}{q} \text{ phân số tối giản} \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích và $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f dx dy = 0$.

5. Cho $f:[a,b] \to R$ là hàm đơn điệu. Chứng minh rằng tập hợp những điểm gián đoạn của f có độ đo không.

6. Chứng minh rằng đoạn $[a,b] \subset R$ với $a < b$ không có độ đo không.

7. Cho hàm $f:[-1,1] \to R$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} -2 \text{ nếu } -1 \leq x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 2 \text{ nếu } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Tìm $\omega(f,0)$.

8. Chứng minh rằng hình hộp $[a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ không thể có độ đo không ($a_i<b_i$, $i= 1, 2, \ldots, n$).

9. Chứng minh rằng tập hợp bị chặn B có thể tích không khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon>0$ luôn tồn tại một số hữu hạn các hình hộp đóng (hoặc mở) phủ B và có tổng thể tích nhỏ hơn ε.

10. a) Chứng minh rằng nếu tập hợp B có thể tích không thì biên giới của nó cũng có thể tích không.

b) Cho ví dụ về tập hợp bị chặn có độ đo không nhưng biên giới của nó không có độ đo không.

11. Cho ví dụ về tập bị chặn B có độ đo không đối với nó $\int_A \chi_B dV$ không tồn tại.

12. Chứng minh rằng nếu B là tập bị chặn có độ đo không và $\int_A \chi_B dV$ tồn tại thì giá trị của tích phân bằng không.

13. Chứng minh rằng nếu $f : A \to R$ là hàm không âm và $\int\limits_A f dV = 0$ thì tập hợp $\{x : f(x) \neq 0\}$ có độ đo không.

14. Chứng minh rằng tập hợp $B \subset A$ trong đó A là hình hộp đóng, là đo được Jordan khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại một phân hoạch P của A sao cho $\sum\limits_{S\in\mathscr{S}_1} v(S) - \sum\limits_{S\in\mathscr{S}_2} v(S) < \varepsilon$, trong đó $\mathscr{S}_1$ gồm tất cả các hình hộp của phân hoạch P giao với B, còn $\mathscr{S}_2$ gồm tất cả các hình hộp chứa trong B.

15. Hãy kiểm tra định lí Fubini đối với hàm $f:[0, 1]\times[0, 1]\to R$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ vô tỉ} \\ 1 \text{ nếu } x \text{ hữu tỉ và } y \text{ vô tỉ} \\ 1 - \dfrac{1}{q} \text{ nếu } x = \dfrac{p}{q} \text{ phân số tối giản và } y \text{ hữu tỉ.} \end{cases}$$

16. Giả sử $C \subset A \times B$ là tập hợp có thể tích không và $A' \subset A$ là tập hợp tất cả các $x \in A$ sao cho tập hợp $\{y \in B : (x, y) \in C\}$ không có thể tích không. Chứng minh rằng A' là tập hợp có độ đo không.

17. Chứng minh rằng nếu $f: [a, b] \times [a, b] \to R$ là hàm khả tích thì $\int\limits_a^b dy \int\limits_a^y f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_x^b f(x,y)dy$

18. Dùng định lí Fubini chứng minh rằng $D_{1,2}f = D_{2,1}f$ nếu các đạo hàm này liên tục.

19. Giả sử $A = [a_1., b_1] \times .... \times [a_n, b_n]$, $f : A \to R$ là hàm liên tục và $F : A \to R$ xác định bởi đẳng thức $F(x) = \int\limits_{[a_1,x_1]\times...\times[a_n,x_n]} f dV$

Tìm $D_iF(x)$ nếu x là điểm trong của hình hộp A .

20. Giả sử f: $[a, b] \times [c,d] \to R$ và D_2f là các hàm liên tục. Đặt $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$. Chứng minh qui tắc Leibniz $F'(y) = \int\limits_a^b D_2 f(x,y)dx$

21. Giả sử A và B là các tập đo được Jordan trong R^3, $A_c=\{(x, y) : (x, y, c) \in A\}$ và $B_c = \{(x, y) : (x, y, c) \in B)$.

Giả sử rằng A_c và B_c đối với mỗi c đo được Jordan và có cùng diện tích. Chứng minh rằng A và B có cùng thể tích.

22. Chứng minh rằng $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy)^{xy} dxdy = \int\limits_0^1 y^y dy$.

23. Tính thể tích của vật thể giới hạn phía dưới bởi mặt phẳng xy , mặt bên là các mặt phẳng $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, phía trên bởi paraboloid eliptic $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ $(p > 0, q > 0)$.

24. Tính các tích phân sau

a) $\iint\limits_{(D_1)} \cos(x+y)dx$;   b) $\iint\limits_{(D_2)} (2x+y)dxdy$

c) $\iint\limits_{(D_3)} (x+6y)dxdy$ trong đó (D_1) là tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0$, $y = x$, $y = \pi$;

(D_2) là tam giác giới hạn bởi các trục toạ độ và bởi đường thẳng $x + y = 3$.

(D_3) là tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

25. Tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x,y) = x^2$ và $D = \left\{(x,y) \in R^2 | x^2 \le y \le x\right\}$;

b) $f(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{xy}$ và $D = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le 1,\ x + y \ge 1,\ x \ge y\}$;

c) $f(x,y) = x\cos(\sqrt{x^2+y^2})$ và $D = \left\{(x,y) \in R^2 | x \ge y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le \pi^2\right\}$.

26. Tính các tích phân $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ trong các trường hợp sau:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ và $D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid |x| + |y| + |z| \le 1\}$;

b) $f(x, y, z) = |z|$ và $D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$;

c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)e^z$ và

$D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ |z| \le 1\}$;

d) $f(x, y, z) = xyz$ và

$D = \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$.

27. Với mọi $n \in N^*$ ta kí hiệu

$D_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R_n \mid \forall_i,\ x_i \ge 0$ và $x_1 + \dots + x_n \le 1\}$.

Với mọi $(k_1, \dots, k_n) \in N^*$ hãy tính

$$I_n(k_1, \dots, k_n) = \int\limits_{D_n} \dots \int x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} dx_1 \dots dx_n .$$

28. Tính các tích phân sau:

a) $I_1 = \iiint\limits_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$

trong đó B là elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$;

b) $I_2 = \iiint\limits_C z\, dxdydz$

trong đó C là miền giới hạn bởi mặt nón $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ và bởi mặt phẳng z = h;

c) $I_3 = \iiint\limits_D z^2 dxdydz$

trong đó D là phần chung của hai hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$;

d) $I_4 = \iiint\limits_V (x + y + z)^2 dxdydz$ trong đó V là phần chung của paraboloid $x^2 + y^2 \le 2az$ và hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le 3a^2$.

29. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt trụ eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, mặt phẳng z=0 và mặt paraboloid $\frac{2z}{c} = \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2}$ $(c > 0)$.

30. Tính tích phân $I = \iint\limits_D \frac{x^2 \sin xy}{y} dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi bốn parabol $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < a < b;\ 0 < p < q)$.

31. Tính tích phân $J = \iint\limits_{B} xy\,dxdy$ trong đó B là miền giới hạn bởi các đường cong $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ $(0 < b < a,\ 0 < p < q)$.

32. Tính tích phân $K = \iint\limits_{C} \left(\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}\right)^3 dxdy$ C là miền giới hạn bởi các trục tọa độ và bởi parabol $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$.

33. Tính tích phân $I = \iiint\limits_{V} \dfrac{xyz}{x^2 + y^2} dxdydz$

trong đó V là vật thể giới hạn phía trên bởi mặt $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2xy$ và phía dưới bởi mặt $z = 0$.

34. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi mặt:

a) $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$;

b) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2y}{h^3}$;

c) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$.

35. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt:

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2 \quad (h_1, h_2, h_3 > 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3,$$

với giả thiết rằng định thức

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

36. Tính các tích phân sau:

a) $$I = \iiint\limits_{\substack{x,y,z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2}} \frac{xyzdxdydz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}};$$

b) $$J = \iiint\limits_{\substack{x,y,z \geq 0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1}} \frac{xyzdxdydz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Chương X

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

§ 1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1. Khái niệm về đường cong

Giả sử [a, b] là một đoạn thẳng trên trục số thực R,

$$\gamma : [a, b] \to R^3$$

là một ánh xạ liên tục. Với mỗi $t \in [a, b]$,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in R^3.$$

Ký hiệu $L = \gamma([a, b]) \subset R^3$. Khi đó ta nói L là một đường cong trong không gian R^3 với phương trình tham số:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \quad t \in [a, b]. \end{aligned} \tag{1}$$

Ánh xạ γ: $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ được gọi là một biểu diễn tham số, hay là một phép tham số hóa của đường cong L .

Điểm $A = \gamma(a) = (x(a), y(a), z(a))$ được gọi là điểm đầu, điểm $B= \gamma(b)=(x(b), y(b), z(b))$ được gọi là điểm cuối củađường cong $L = \overset{\frown}{AB}$.

Nếu $\gamma(a) = \gamma(b)$ thì L được gọi là đường cong kín.

Nếu γ là một đơn ánh thì đường cong L được gọi là đường cong Jordan .

Đường cong Jordan L được gọi là đường cong trơn nếu γ là ánh xạ khả vi liên tục trên [a, b], hay nói cách khác x(t), y(t), z(t) là các hàm khả vi liên tục trên [a, b]. Véc tơ $\tau = (x'(t), y'(t), z'(t))$ là véc tơ tiếp tuyến của đường cong L tại điểm $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Đường cong Jordan L được gọi là đường cong trơn từng khúc nếu đoạn [a, b] có thể chia thành một số hữu hạn các đoạn con: $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{k}[a_i, b_i]$ sao cho ánh xạ γ hạn chế trên mỗi đoạn con $[a_i, b_i]$:

$$\gamma_i = \gamma\Big|_{[a_i, b_i]} : [a_i, b_i] \to R^3$$

là ánh xạ khả vi liên tục .

Giả sử L là đường cong trơn hay trơn từng khúc, có phương trình tham số:

$$x = x(t)\ ,\ \ y = y(t)\ ,\ z = z(t),\ \ t = \in [a, b]\ .$$

Độ dài s của đường cong L được tính bởi công thức

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt\ . \qquad (2)$$

Biểu thức

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \qquad (3)$$

được gọi là vi phân cung. Ta có:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\ .$$

2. Định nghĩa tích phân đường loại I

a) Định nghĩa. Giả sử $L = \overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn hay trơn từng khúc trong không gian R^3 có phương trình tham số:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ \ t \in [a, b]$$

trong đó $A = (x(a), y(a), z(a))$, $B = (x(b), y(b), z(b)$, $f(x, y, z)$ là hàm số xác định trên L .

Ta hãy chia đường cong $L = \overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm chia được lấy một cách tùy ý:

$$A = M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n = B .$$

Ký hiệu độ dài của mỗi cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ là Δs_i .

Ta gọi mỗi cách phân chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành các cung nhỏ như vậy là một phân hoạch của đường cong L và ký hiệu là T_n:

$$T_n = \{M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n\}.$$

Đại lượng

$$d(T_n) = \max_{1 \le i \le n} \Delta s_i ,$$

được gọi là đường kính của phân hoạch T_n .

Trên mỗi cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, 2, ..., n$), ta lấy tùy ý một điểm $Pi = (x_i, y_i, z_i)$ và lập tổng:

$$S(T_n, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i . \qquad (4)$$

Bằng cách thay đổi cách chia đường cong L và cách chọn các điểm P_i trên mỗi cung nhỏ $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ ta nhận được tập hợp vô hạn các tổng $\{S(T_n, P_i)\}$.

***Định nghĩa*:** Ta nói họ $\{S(T_n, P_i)\}$ có giới hạn I hữu hạn khi $d(T_n) \to 0$ nếu với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho mọi phân hoạch T_n của đường cong L mà $d(T_n) < \delta$ và với mọi cách chọn $P_i \in M_{i-1}M_i$ ta có $|S(T_n, P_i) - I| < \varepsilon$.

Khi đó ta ký hiệu:

$$I = \lim_{d(T_n)\to 0} S(T_n, P_i). \tag{5}$$

Nếu giới hạn (5) tồn tại hữu hạn thì ta nói hàm f(x, y, z) khả tích trên đường cong L và giới hạn I được gọi là tích phân đường loại I của hàm f(x, y, z) trên đường cong L và ký hiệu:

$$\int_L f(x,y,z)ds = \lim_{d(T_n)\to 0} S(T_n, P_i) = I$$

Sau đây ta sẽ đưa ra một lớp hàm khả tích trên đường cong L.

Định lý 1.X Giả sử $L = \overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn, f(x, y, z) = f(M) là hàm số xác định và liên tục trên L. Khi đó tồn tại tích phân đường loại 1 của hàm f(x, y, z) trên L:

$$\int_L f(x,y,z)ds\ .$$

Chứng minh. Giả sử M(x, y, z) là điểm bất kỳ trên cung $\overset{\frown}{AB}$, ta ký hiệu s là độ dài của cung $\overset{\frown}{AM}$. Khi đó cung $\overset{\frown}{AB}$ được tham số hóa bởi hệ phương trình:

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),\ \ 0 \le s \le l,$$

trong đó l là độ dài của cung $\overset{\frown}{AB}$, (tham số s được gọi là tham số tự nhiên của đường cong L).

Vì cung $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn nên các hàm số x(s), y(s), z(s) khả vi liên tục trên đoạn $[o, l]$.

Theo giả thiết f(x, y, z) liên tục trên $\overset{\frown}{AB}$ nên hàm g(s) = f(x(s), y(s), z(s)) liên tục trên đoạn $[o, l]$.

Ta chia cung $\overset{\frown}{AB}$ bởi phân hoạch T_n .

$$T_n = \{A = M_0, M_1, \ldots M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n = B\}.$$

trong đó độ dài của cung $\overset{\frown}{AM_i}$ là s_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), như vậy $s_0 = 0$, $s_n = l$ và $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ ($i = 1, 2 \ldots n$) .

Trên mỗi cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ ta lấy tùy ý điểm P_i, mà độ dài cung $\overset{\frown}{AP_i}$ được ký hiệu là $\overline{s_i}$. Lập tổng tích phân:

$$S(T_n, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\overline{s_i}),\ y(\overline{s_i}), x(\overline{s_i})) . \Delta s_i$$

Ta chú ý rằng tổng ở vế phải là tổng tích phân của hàm liên tục $g(s) = f(x(s), y(s), z(s))$ trên đoạn $[0, l]$ ứng với phân hoạch:

$$0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{i-1} < s_i < \ldots < s_n = l .$$

Do đó khi $\max\limits_i \Delta s_i \to 0$ thì giới hạn của tổng tích phân bên phải tồn tại và ta có:

$$\lim_{\max\limits_i \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\overline{s_i}),\ y(\overline{s_i}),\ z(\overline{s_i}))\Delta s_i =$$

$$= \int_0^l f(x(s), y(s), z(s))ds .$$

Vì vậy cũng tồn tại giới hạn bên trái

$$\lim_{\max\limits_i \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i = \int_L f(x, y, z)ds$$

và hai giới hạn này bằng nhau

$$\int_L f(x, y, z)ds = \int_0^l f(x(s), y(s), z(s))ds .$$

b) Cách tính tích phân đường loại I

Giả sử $L = \overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn hay trơn từng khúc, có phương trình tham số

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [a, b]$$

và $f(x, y, z)$ là hàm khả tích trên đường cong L .

Giả sử $T_n = \{A = M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n = B\}$

là một phân hoạch bất kỳ của đường cong L, trong đó điểm M_i có tọa độ ứng với tham số t_i : $x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, $(0 \le i \le n)$. Khi đó đoạn $[a, b]$ cũng bị chia thành các đoạn con bởi các điểm chia:

$$a = t_0, t_1, ..., t_{i-1}\ ,\ \ t_i, ..., t_n = b.$$

Độ dài Δs_i của mỗi cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ được tính theo công thức:

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt\ .$$

Áp dụng định lý trung bình ta có:

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)}\ .\ (t_i - t_{i-1})\, dt \qquad (6)$$

trong đó τ_i là điểm thuộc đoạn $[t_{i-1}, t_i]$.

Trong tổng $S(T_n, P_i)$ ta chọn P_i là điểm có tọa độ ứng với tham số $t = \tau_i$; $P_i = (x(\tau_i)\ ,\ y(\tau_i),\ z(\tau_i))$.

Khi đó:

$$S(T_n\ , P_i) = \sum_{i=1}^{n} f[x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)] \,.\, \sqrt{x'^2(\tau_i), y'^2(\tau_i), z'^2(\tau_i)}\, .\, \Delta t_i\ .$$

trong đó $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}\ , (1 \le i \le n)$.

Cho $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta t_i \to 0$, do x(t), y(t), z(t) là các hàm khả vi liên tục trên [a, b] nên từ (6) ta suy ra:

$$d(T_n) = \max_{1 \le i \le n} \Delta s_i \to 0$$

Theo giả thiết f(x, y, z) khả tích trên đường cong L nên tồn tại giới hạn:

$$I = \int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} S(T_n, P_i)$$

$$= \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \sqrt{x'^2(\tau_i) + y'^2(\tau_i) + z'^2(\tau_i)} \,.\, \Delta t_i$$

$$= \int_a^b f(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \,.\, dt \ .$$

Vậy ta có công thức

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \,.\, \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} \,.\, dt \quad (7)$$

Ví dụ 1. Tính tích phân đường loại 1:

$$I = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

trong đó L là đường xoắn ốc có phương trình tham số:

$$x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ z = bt, \ 0 \le t \le 2\pi, \ a, b > 0 .$$

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + b^2t^2 = a^2 + b^2t^2$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, dt .$$

Do đó:

$$I = \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2).$$

Ví dụ 2: Tính tích phân đường loại I:

$$I = \int_L (x^{4/3} + y^{4/3})ds$$

trong đó L là đường hình sao (astroid) có phương trình:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

Phương trình tham số của đường hình sao là:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Khi đó: $x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9a^2\cos^2 t. \sin^2 t$$

$$ds = 3a\ |\cos t. \sin t|\,dt$$

Do đó: $$I = 3a^{7/3}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t + \sin^4 t)\,|\sin t.\cos t|\,dt$$

$$= 12\,a^{7/3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t + \sin^4 t).\sin t.\cos t\,dt$$

$$= 12a^{7/3}\left(-\frac{1}{6}\cos^6 t + \frac{1}{6}\sin^6 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{7/3}$$

Ở đây đường hình sao là đường cong phẳng .

Chú thích: Cho L là đường cong trơn trong không gian R^3 được tham số hóa bởi hệ phương trình:

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [a, b]\ .$$

Giả sử rằng đường cong trơn L còn có thể tham số hóa bởi hệ phương trình khác.

$$\xi = \xi(\tau), \eta = \eta(\tau), \xi = \xi(\tau),\ \tau \in [\alpha, \beta]\ .$$

Khi đó tồn tại một vi phôi:

$$\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$$

tức là tồn tại một ánh xạ 1-1 $\varphi: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ và các ánh xạ φ và φ^{-1} là những ánh xạ khả vi liên tục, sao cho

$$\xi(\tau) = x[\varphi(\tau)],$$

$$\eta(\tau) = y[\varphi(\tau)],$$

$$\xi(\tau) = z[\varphi(\tau)], \tau \in [\alpha, \beta]\ .$$

Giả sử f(M) là hàm khả tích trên đường cong L.

Ta có:

$$\int_L f(x, y, z)ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)\,.\,\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt$$

$$\overset{t=\varphi(\tau)}{=} \int_\alpha^\beta f\,[x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)), z(\varphi(\tau))].\,\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ \varphi'(\tau)d\tau$$

$$= \int_\alpha^\beta f\,[x(\varphi(\tau)), y(\varphi(\tau)), z(\varphi(\tau))].\,\sqrt{[x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)]\,\varphi'^2(\tau)}\ d\tau$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau)\,.\,\sqrt{\xi'^2(\tau) + \eta'^2(\tau) + \zeta'^2(\tau)}\ d\tau\ .$$

Vậy tích phân đường loại 1 của hàm f(M) trên đường cong trơn L không phụ thuộc vào phép tham số hóa của đường cong đó .

3. Tính chất của tích phân đường loại I

Những tính chất sau đây của tích phân đường loại I được chứng minh tương tự như những tính chất tương ứng của tích phân xác định .

Tính chất 1. Giả sử L là đường cong trơn hay trơn từng khúc; f(x, y, z), g(x, y, z) là những hàm khả tích trên L .

Khi đó:

$$\int_L [f(x,y,z) + g(x,y,z)]ds = \int_L f(x,y,z)ds + \int_L g(x,y,z)ds\,,$$

$$\int_L \alpha f(x,y,z)ds = \alpha \int_l f(x,y,z)\,ds \quad .$$

Tính chất 2. Giả sử đường cong trơn hay trơn từng khúc $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \cup \overset{\frown}{CB}$. Nếu f (x, y, z) là hàm khả tích trên các đường cong $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$ thì f (x, y, z) cũng khả tích trên $\overset{\frown}{AB}$ và ta có:

$$\int_{AB} f(x,y,z)ds = \int_{AC} f(x,y,z)ds + \int_{CB} f(x,y,z)ds \quad .$$

4. Ứng dụng của tích phân đường loại I

a) Một đường cong $L = \overset{\frown}{AB}$ trơn hay trơn từng khúc trong không gian R^3 được cấu tạo bởi một dây vật chất có mật độ khối lượng thay đổi theo quy luật $\rho(x, y, z)$, trong đó $\rho(x, y, z)$ là hàm liên tục trên L .

Hãy tính khối lượng của dây .

Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ một cách tùy ý thành các cung nhỏ $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ (i = 1, 2, ..., n). Mỗi cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ có độ dài tương ứng là Δs_i. Khi đó khối lượng m_i của cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ gần đúng bằng $\rho(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i$ tức là: $m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i).\ \Delta s_i$ (i = 1, 2, ..., n) .

trong đó (x_i, y_i, z_i) là điểm nào đó trên cung $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.

Do đó khối lượng m của dây $\overset{\frown}{AB}$ được tính gần đúng:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{m} \rho(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i .$$

Khi $d(T_n) = \max\limits_{i \le i \le n} \Delta s_i \to 0$, ta có công thức:

$$m = \lim_{(T_n) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i, z_i).\Delta s_i = \int_L \rho(x, y, z)ds .$$

Vậy ta có công thức $m = \int_L \rho(x, y, z)ds$.

b) Tọa độ trọng tâm của dây $\overset{\frown}{AB}$ được tính theo công thức:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\,\rho(x, y, z)ds$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\int_L y\,\rho(x, y, z)ds$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_L z\,\rho(x, y, z)ds .$$

§ 2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

1. Bài toán dẫn đến tích phân đường loại II

Cho một trường lực $\vec{F}(x, y, z)$ trong không gian:

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

nói cách khác, tại mỗi điểm $(x, y, z) \in R^3$ có một lực $\vec{F}(x, y, z)$ xác định với các thành phần là: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ và $R(x, y, z)$; $L = \overset{\frown}{AB}$ là một đường cong trơn với phương trình tham số:

$$x = x(t),\ \ y = y(t)\ ,\ \ z = z(t)\ ,\ \ a \le t \le b\ ,$$

trong đó $(x(a), y(a), z(a))$ là tọa độ của điểm A, $(x(b), y(b), z(b))$ là tọa độ của điểm B .

Giả thiết rằng: $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ là các hàm liên tục trên đường cong L. Tính công của trường lực $\vec{F}(x, y, z)$ dọc theo đường cong L từ điểm A đến điểm B .

Ta chia cung $\overset{\frown}{AB}$ bằng phân hoạch T_n:

$$T_n = \{ A = M_0, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., M_n = B\}$$

trong đó điểm M_i có tọa độ tương ứng với tham số $t = t_i$.

$$M_i = (x_i, y_i, z_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)),\quad t \le i \le n\ .$$

Như vậy đoạn [a, b] được chia thành các đoạn con bởi các điểm chia:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{i-1} < t_i < ... t_n = b\ .$$

Khi điểm đặt của lực $\vec{F}$ dịch chuyển từ điểm M_{i-1} đến điểm M_i lực $\vec{F}$ thực hiện một công ΔQ_i:

$$\Delta Q_i \approx \vec{F}(\xi_i , \eta_i, \zeta_i) . \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

$$\approx P(\xi_i , \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}) + Q(\xi_i , \eta_i, \zeta_i)(y_i - y_{i-1}) + R(\xi_i , \eta_i, \zeta_i)(z_i - z_{i-1})$$

trong đó đó $(\xi_i , \eta_i, \zeta_i)$ là điểm nào đó thuộc cung $M_{i-1}M_i$ ứng với tham số $t = \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

$$\xi_i = x(\tau_i),\ \eta_i = y(\tau_i),\ \zeta_i = z(\tau_i)\ ,\ (i = 1, 2..., n).$$

Mặt khác theo giả thiết $\overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn nên x(t), y(t), z(t) là những hàm khả vi liên tục trên [a, b]. Vì vậy áp dụng khai triển Taylor tại điểm $t = \tau_i$, khi $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ đủ bé, ta có:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \approx x'(\tau_i)\,.\,\Delta t_i$$

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \approx y'(\tau_i)\,.\,\Delta t_i$$

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1} \approx z'(\tau_i)\,.\,\Delta t_i$$

Chú ý rằng khi $\max\limits_i \Delta t_i$ đủ bé thì công thức xấp xỉ ΔQ_i càng chính xác. Do đó khi $\max\limits_i \Delta t_i$ đủ bé, công tổng cộng khi điểm đặt của lực $\vec{F}$ dịch chuyển theo cung $\overset{\frown}{AB}$ từ điểm A đến điểm B là:

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n}\Big[P\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big).\ x'(\tau_i) + ...$$

$$+ Q\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big)y'(\tau_i) + R\big(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)\big).\ z'(\tau_i)\Big]\Delta t_i$$

Cho $\max\limits_i \Delta t_i \to 0$, ta nhận được công thức tính công:

$$Q = \int_a^b [P\big(x(t), y(t), z(t)\big) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big).y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t).\ z'(t)].\ dt\ .$$

2. Định hướng của một đường cong

a) Cho đường cong $L = \overset{\frown}{AB}$ trong không gian R^3. Rõ ràng ta có thể định hướng đường cong bằng cách chọn một điểm là điểm đầu và một điểm là điểm cuối của đường cong .

Chẳng hạn ta chọn A là điểm đầu và B là điểm cuối thì ta nói đường cong L được định hướng từ điểm A đến điểm B và ta gọi hướng từ A đến B là hướng dương. Ngược lại nếu ta chọn B là điểm đầu, A là điểm cuối thì hướng dương của đường cong L là hướng từ B đến A .

Giả sử L là đường cong định hướng được tham số hóa bởi hệ phương trình:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ a \le t \le b\ .$$

Ta nói phép tham số hóa đó phù hợp với hướng dương của đường cong nếu điểm A = (x(a), y(a), z(a)) là điểm đầu, còn điểm B = (x(b), y(b), z(b)) là điểm cuối.

Nếu phép tham số hóa

$$\gamma_1(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)),\quad t \in [a,\ b]$$

là phép tham số hóa phù hợp với định hướng dương của đường cong L, thì phép tham số hóa:

$$\gamma_2(\tau) = \gamma_1(\tau a + (1-\tau)b) = (\xi(\tau),\ \eta(\tau),\ \zeta(\tau))$$

trong đó
$$\xi(\tau) = x[\tau a + (1-\tau)b]$$
$$\eta(\tau) = y[\tau a + (1-\tau)b]$$
$$\zeta(\tau) = z[\tau a + (1-\tau)b]\ ,\quad 0 \le \tau \le 1$$

là phù hợp với định hướng âm của đường cong, vì

$$\gamma_2(0) = \big(\xi(0), \eta(0), \zeta(0)\big) = \big(x(b), y(b), z(b)\big)$$ là điểm cuối

còn $\gamma_2(1) = \big(\xi(1), \eta(1), \zeta(1)\big) = \big(x(a), y(a), z(a)\big)$ là điểm đầu.

b) Giả sử L là đường cong trơn định hướng $\gamma_1(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ $t \in [a,\ b]$, $\gamma_2(\tau) = \big(\xi(\tau), \eta(\tau), \zeta(\tau)\big)$, $\tau \in [\alpha,\ \beta]$ là hai phép tham số hóa của đường cong L. Khi đó tồn tại một phép vi phôi:

$$\varphi\colon [\alpha,\ \beta] \to [a,\ b]$$

sao cho: $\gamma_2(\tau) = \gamma_1[\varphi(\tau)]$, $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Ta nói hai phép tham số hóa $\gamma_1(\tau)$ và $\gamma_2(\tau)$ cùng hướng nếu nó cùng phù hợp với một hướng của đường cong L .

Rõ ràng nếu $\varphi'(\tau) > 0 \ \forall \tau \in [\alpha, \beta]$ thì γ_1 và γ_2 cùng hướng, còn nếu $\varphi'(\tau) < 0 \ \forall \ \tau \in [\alpha, \beta]$ thì γ_1 và γ_2 ngược hướng với nhau .

c) Trường hợp đường cong Jordan kín trong mặt phẳng

Giả sử L là một đường cong Jordan kín trong mặt phẳng R^2 được tham số hóa:

$$\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t)), \ t \in [a, b], \ \gamma(a) = \gamma(b) .$$

Khi đó đường cong L chia mặt phẳng thành hai miền: miền bị chặn và miền không bị chặn. Miền bị chặn được gọi là miền trong, miền không bị chặn được gọi là miền ngoài.

Ta quy ước hướng dương của một đường cong Jordan kín là hướng mà nếu ta đứng tại một điểm trên đường cong và đi dọc theo hướng đó thì luôn luôn thấy miền trong nằm về phía bên trái .

3. Định nghĩa tích phân đường loại II

Giả sử $L = \overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn hay trơn từng khúc trong không gian R^3, được định hướng dương từ điểm A đến điểm B,

$$\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \ \ t \in [a, b]$$

là phép tham số hóa phù hợp với hướng dương của đường cong L, tức là

$$A = \gamma(a), \ B = \gamma(b),$$

P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) là các hàm xác định trên L .

Ta gọi tích phân đường loại II của hàm vectơ

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

lấy theo hướng dương của đường cong L là giá trị của tích phân (nếu tích phân này tồn tại):

$$I = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)).\, x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)).\, y'(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t)).\, z'(t)]dt$$

và ký hiệu là:

$$I = \int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz .$$

Ví dụ 1: Cho L là cung Parabol $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, được định hướng dương từ điểm A(-1, 1) đến điểm B(1, 1) .

Tính $I = \int_{L^+} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$.

Chọn tham số hóa định hướng dương của L^+ là:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad -1 \le t \le 1.$$

Khi đó:

$$I = \int_{-1}^{1} [(t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3).2t]dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (2t^5 - 4t^4 - 2t^3 + t^2)dt = 2\int_0^1 (-4t^4 + t^2)dt = -\frac{14}{15} .$$

Ví dụ 2: Tính tích phân đường loại II

$$I = \int_{L^+} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$$

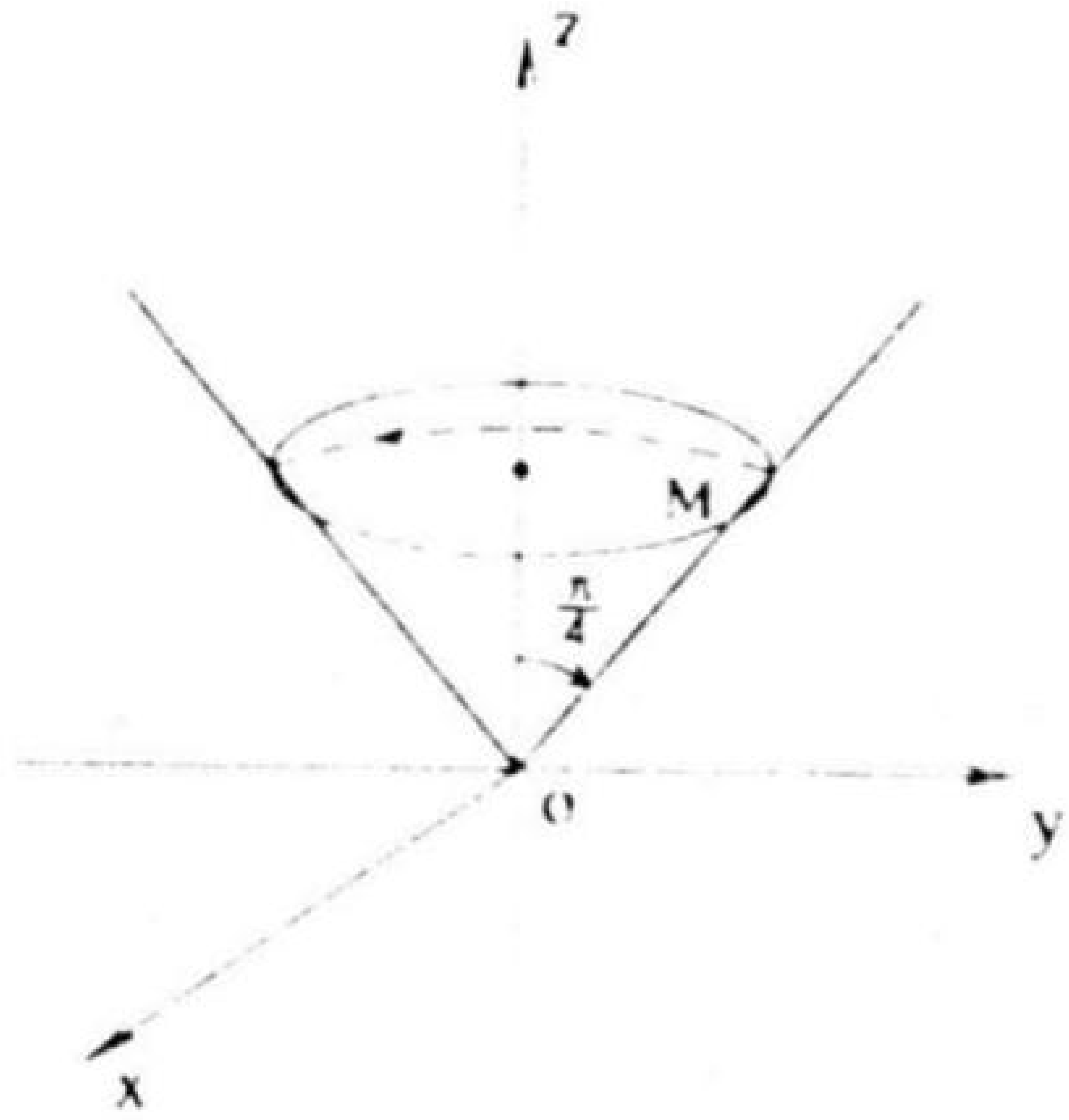
trong đó L^+ có biểu diễn tham số phù hợp định hướng dương của đường cong là:

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Áp dụng công thức ta có:

$$I = \int_0^1 [(t^4 - t^6) + 4t^6 - 3t^4]dt = \int_0^1 1(3t^6 - 2t^4)dt = \frac{1}{35}\,.$$

Ví dụ 3: Cho L là giao tuyến của mặt cầu $x^3 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$, được định hướng dương sao cho nếu nhìn từ phía dương của trục Oz thì thấy hướng dương ngược chiều kim đồng hồ.



Tính $I = \int_{L^+} ydx + zdy + xdz\,.$

Đường cong L là giao tuyến của mặt cầu và mặt nón nên ta có:

$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^2 + y^2) = 1$

hay $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tham số hóa đường tròn L phù hợp hướng dương là:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi,\ z = \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

Vậy nên:

$$I=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi.\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right)d\varphi,$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\sin^2\varphi)d\varphi=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$-\frac{1}{4}.2\pi+\frac{1}{4}.\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{2\pi}=-\frac{\pi}{2}\ .$$

Chú thích 1: Từ định nghĩa ta suy ra rằng nếu P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) là các hàm liên tục trên đường cong L trơn hay trơn từng khúc thì tồn tại tích phân đường loại II

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz\ .$$

Chú thích 2: Giả sử L là đường cong trơn hay trơn từng khúc được định hướng ,

$$\gamma_1=\gamma_1(t)=(x(t),\, y(t),\, z(t)),\qquad a\le t\le b$$

là biểu diễn tham số phù hợp với hướng dương của đường cong L;

$$\gamma_2=\gamma_2(\tau)=\big(\xi(\tau),\eta(\tau),\zeta(\tau)\big),\quad \alpha\le\tau\le\beta$$

là một biểu diễn tham số khác của đường cong L .

Khi đó tồn tại một vi phôi:

$$\varphi:\ [\alpha,\beta]\to[a,b]$$

sao cho $\gamma_2(\tau)=\gamma_1[\varphi(\tau)],\ \tau\in[\alpha,\beta]$.

Giả sử γ_1 và γ_2 là hai biểu diễn tham số cùng hướng. Khi đó $\varphi'(\tau)>0$ với mọi $\tau\in[\alpha,\beta]$, và do đó $\varphi(\tau)$ là hàm đơn điệu tăng, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$.

Ta có:

$$I = \int\limits_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int\limits_a^b [P.x'(t) + Q.y'(t) + R.z'(t)]dt$$

$$\overset{t=\varphi(\tau)}{=} \int\limits_\alpha^\beta [P.x'(t) + Q.y'(t) + Rz'(t)]\Big|_{t=\varphi(\tau)} \varphi'(\tau)d\tau$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P.\xi'(\tau) + Q.\eta'(\tau) + R.\zeta'(\tau)]d\tau$$

$$= \int\limits_{L^+} Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta \ .$$

Vậy nếu γ_1 và γ_2 là hai biểu diễn tham số cùng hướng thì

$$\int\limits_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{L^+} Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta \ .$$

Giả sử γ_1 và γ_2 là hai biểu diễn tham số ngược hướng nhau. Khi đó $\varphi'(\tau) < 0$ với mọi $\tau \in [\alpha, \beta]$, do đó $\varphi(\tau)$ là hàm đơn điệu giảm, $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$.

Ta có:

$$I = \int\limits_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]dt$$

$$\overset{t=\varphi(\tau)}{=} \int\limits_\beta^\alpha [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]\Big|_{t=\varphi(\tau)} . \varphi'(\tau)d\tau$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta}\big(P.\xi'(\tau) + Q\eta'(\tau) + R\zeta'(\tau)\big)d\tau$$

$$= -\int_{L^-} Pd\xi + Rd\eta + Rd\zeta \ .$$

Vậy: Nếu γ_1 và γ_2 là hai biểu diễn tham số ngược hướng thì

$$\int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{L^-} Pd\xi + Qd\eta + Rd\zeta \ .$$

4. Tính chất của tích phân đường loại II

Từ định nghĩa tích phân đường loại II ta suy ra các tính chất sau đây:

Tính chất 1: Giả sử L là đường cong trơn hay trơn từng khúc; $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ là các hàm véc tơ xác định trên đường cong L .

Nếu tồn tại các tích phân đường loại II:

$$I_1 = \int_L f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \quad \text{và} \quad I_2 = \int_L g_1 dx + g_2 dy + g_3 dz$$

thì

$$\int_L (\alpha_1 f_1 + \beta g_1)dx + (\alpha f_2 + \beta g_2)dy + (\alpha f_3 + \beta g_3)dz = \alpha I_1 + \beta I_2 \ .$$

Tính chất 2: Giả sử $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ là các đường cong trơn hay trơn từng khúc, $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \cup \overset{\frown}{CB}$; f(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) là các hàm xác định trên $\overset{\frown}{AB}$ sao cho tồn tại các tích phân đường loại II:

$$I_1 = \int_{\overset{\frown}{AC}} Pdx + Qdy + Rdz$$

và $$I_2 = \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

Khi đó tồn tại tích phân đường loại II trên $\overset{\frown}{AB}$ và ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = I_1 + I_2 \ .$$

5. Liên hệ giữa tích phân đường loại I và loại II

Giả sử $L = \overset{\frown}{AB}$ là đường cong trơn được định hướng,

$$\gamma = \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)), \ t \in [a, b]$$

là biểu diễn tham số phù hợp với hướng dương của đường cong L

$F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ là hàm véctơ xác định và liên tục trên đường cong L .

Khi đó:

$$\int\limits_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b [P.x'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]dt$$

$$= \int\limits_a^b [\ P.\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} + Q.\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} +$$

$$+ R.\frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\ ]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt\,.$$

Đặt $$\cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\,,$$

$$\cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}\,,$$

$$\cos\gamma = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}$$

Rõ ràng cosα, cosβ, cosγ là các cosin chỉ hướng của tiếp tuyến $\vec{r}$ của đường cong L tại điểm (x(t), y(t), z(t))

Vậy ta có công thức liên hệ giữa tích phân đường loại I và loại II là:

$$\int_{L^+} Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds .$$

§ 3. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI I

1. Khái niệm về mặt cong

Giả sử D là một tập đo được theo Jordan có phần trong $\overset{o}{D} \neq \varnothing$ trong mặt phẳng R^2,

$$\gamma : \overline{D} \to R^3$$

$$(u, v) \mapsto \gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

là một ánh xạ liên tục. Ký hiệu $S = \gamma(\overset{o}{D}) \subset R^3$.

Tập S được gọi là một mặt cong; ánh xạ γ được gọi là một biểu diễn tham số hay là một phép tham số hóa của mặt cong S, hay nói cách khác: hệ phương trình:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v) \qquad (u, v) \in D$$

là hệ phương trình tham số của mặt cong S .

Hệ phương trình tham số, nhiều khi để đơn giản ký hiệu, được viết là $\gamma = \gamma(u, v)$, $(u, v) \in D$.

Mặt cong S được gọi là mặt cong trơn nếu ánh xạ: γ: $\overset{o}{D} \to S$ là ánh xạ 1-1, khả vi liên tục và

$$\text{hạng}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (u, v) \in \overset{o}{D} .$$

Mặt cong S được gọi là mặt cong trơn từng mảnh nếu miền D có thể chia thành một số hữu hạn các miền con $D_1, D_2, \ldots, D_k$ sao cho

$$\overset{o}{D}_i \cap \overset{o}{D}_j = \phi, \quad D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i \ ,$$

và $S_i = \gamma(\overset{o}{D}_i)$ là những mặt cong trơn $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

2. Vi phân diện tích mặt

Giả sử S là mặt cong trơn, có phương trình tham số:

$$x = x(u, v)\ ,\ y = y(u, v)\ ,\ z = z(u, v) \qquad (u, v) \in D$$

trong đó $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ là các hàm khả vi liên tục trong miền D .

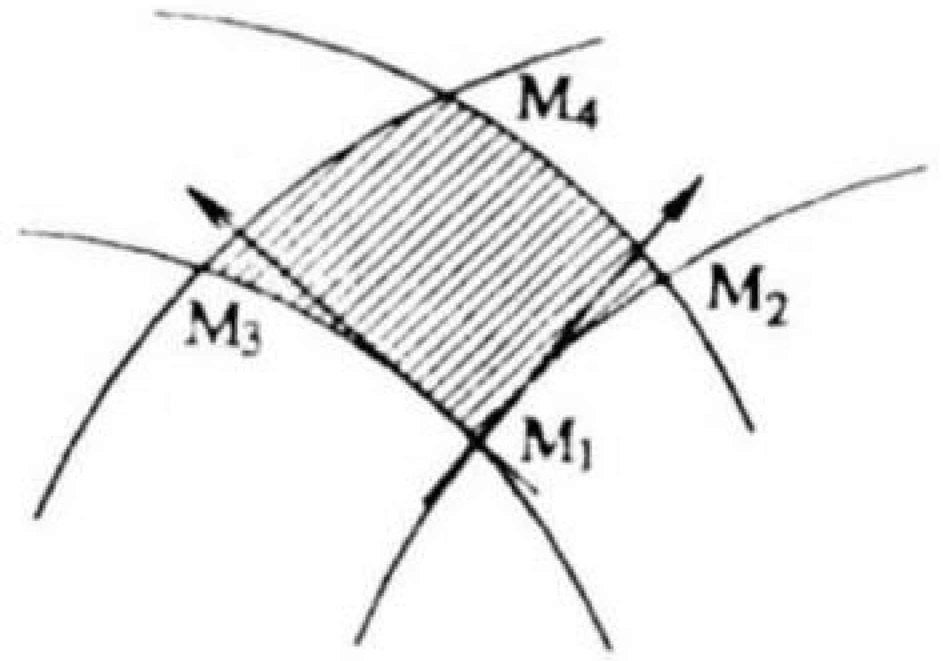
Ta chia miền D thành các miền con $D_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ bởi lưới các đường thẳng song song với các trục tọa độ trong mặt phẳng Ouv. Khi lưới các đường cong đủ mau, ta có thể xem D_i là các hình chữ nhật .

Ta xét một hình chữ nhật con của phép chia đó có các đỉnh:

$$m_1(u, v)\ ,\ m_2(u + \Delta u, v),\ m_3(u, v + \Delta v),\ m_4(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

trong đó xem Δu, Δv dương và đủ bé .

Qua ánh xạ liên tục γ, hình chữ nhật $m_1m_2m_4m_3$ được ánh xạ thành hình bình hành cong trên mặt S với các đỉnh tương ứng:



$M_1(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

$M_2\big(x(u+\Delta u, v),\ y(u+\Delta u, v), z(u+\Delta u, v)\big)$

$M_3\big(x(u, v+\Delta v),\ y(u, v+\Delta v), z(u, v+\Delta v)\big)$

$M_4\big(x(u+\Delta u, v+\Delta u),\ y(u+\Delta u, v+\Delta u), z(u+\Delta u, v+\Delta v)\big).$

Khi đó trong R^3 véc tơ $\overrightarrow{M_1M_2}$ có tọa độ:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\left|\begin{array}{l} x(u+\Delta u, v) - x(u, v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}.\Delta u + \varepsilon_1.\Delta u \\ y(u+\Delta u, v) - y(u, v) = \dfrac{\partial y}{\partial u}.\Delta u + \varepsilon_1.\Delta u \\ z(u+\Delta u, v) - z(u, v) = \dfrac{\partial z}{\partial u}.\Delta u + \varepsilon_3.\Delta u \end{array}\right.$$

trong đó $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0$ khi $\Delta u \to 0$.

Như vậy ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{\partial M_1}{\partial u}.\Delta u + \vec{\varepsilon}.\Delta u$$

trong đó ta ký hiệu $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), |\vec{\varepsilon}| \to 0$ khi $\Delta u \to 0$,

$$\frac{\partial M_1}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

là véc tơ tiếp xúc với mặt S tại điểm M_1, hướng theo chiều tăng của tham số u .

Tương tự ta cũng có:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \frac{\partial M_1}{\partial v}.\Delta v + \vec{\delta}\Delta v$$

trong đó $|\vec{\delta}| \to 0$ khi $\Delta v \to 0$,

$$\frac{\partial M_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Khi Δu, Δv đủ bé, diện tích hình bình hành cong $M_1M_2M_4M_3$ có thể xấp xỉ bởi diện tích hình bình hành phẳng dựng trên hai cạnh $\overrightarrow{M_1M_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_3}$.

Ký hiệu ΔS là diện tích hình bình hành cong $M_1M_2M_4M_3$ trên mặt cong S. Khi Δu, Δv đủ bé ta có:

$$\Delta S \approx |\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}| \approx \left|\frac{\partial M}{\partial u}\Delta u \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\Delta v\right|$$

hay $$\Delta S \approx \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}.\Delta u\, \Delta v.$$

Ta đặt A, B, C là các đại lượng sau đây:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

Khi đó (A, B, C) là tọa độ của $\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$. Do đó:

$$\Delta S \approx \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, \Delta u.\, \Delta v.$$

Ký hiệu dS là vi phân diện tích mặt, du = Δu, dv = Δv. Ta có công thức sau đây:

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv$$

Mặt khác ta chú ý các hệ thức Lagrange đối với hai véctơ $\vec{X}$ và $\vec{Y}$:

$$(\vec{X}.\vec{Y})^2 + |\vec{X} \wedge \vec{Y}|^2 = |\vec{X}|^2 . |\vec{Y}|^2$$

Áp dụng với $\vec{X} = \dfrac{\partial M}{\partial u}$, $\overline{Y} = \dfrac{\partial M}{\partial v}$, ta có

$$\left(\frac{\partial M}{\partial u}.\frac{\partial M}{\partial v}\right)^2 + \left|\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right|^2 = \left|\frac{\partial M}{\partial u}\right|^2 . \left|\frac{\partial M}{\partial v}\right|^2 .$$

Đặt:

$$E = \left|\frac{\partial M}{\partial u}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left|\frac{\partial M}{\partial v}\right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial M}{\partial u}.\frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v}$$

Khi đó:

$$\left|\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right|^2 = EG - F^2$$

hay
$$\left|\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}\right| = \sqrt{EG - F^2}$$

Từ biểu thức vi phân mặt dS có thể viết dưới dạng

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

trong công thức này, các đại lượng E, G, F được gọi là các hệ số Gauss .

Xét trường hợp riêng khi mặt cong trơn S có phương trình Descartes:

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D$$

trong đó z(x, y) là hàm khả vi liên tục trong miền D .

Khi đó ta có:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & z'_x \\ 1 & z'_y \end{vmatrix} = -z'_x\,, \quad B = \frac{D(z,x)}{D(x,y)} = -z'_y\,, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1$$

Do đó:

$$dS = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\,dx\,dy\,.$$

3. Diện tích mặt cong

Giả sử S là mặt cong trơn hay trơn từng mảnh có phương trình tham số:

$$x = x(u, v)\,,\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)\,,\ (u, v) \in D\,.$$

Khi đó diện tích của mặt S được tính bởi công thức:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv\,.$$

Ví dụ 1: Cho mặt cầu S có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Tham số hóa của mặt cầu qua hệ tọa độ cầu là:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = R\cos\theta\ ,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

(Như vậy D là hình chữ nhật $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$) .

Tính các hệ số Gauss:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = (R\cos\theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-R\sin\theta)^2 = R^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (-R\sin\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0 = R^2\sin^2\theta$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Do đó $dS = \sqrt{EG - F^2}\,d\theta d\varphi = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$.

Vậy diện tích mặt cầu là:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sqrt{EG - F^2}\,d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} R^2\sin\theta d\theta = 4\pi R^2.$$

4. Định nghĩa tích phân mặt loại I

Cho S là mặt trơn(hay trơn từng mảnh) có phương trình tham số:

$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D$, f(x,y,z) là hàm xác định trên mặt S. Khi đó nếu tồn tại tích phân:

$$I = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv$$

$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

thì ta nói hàm f(x, y, z) khả tích trên mặt S và giá trị tích phân I được gọi là tích phân mặt loại một của hàm f(x, y, z) trên mặt S, và kí hiệu:

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

Từ định nghĩa suy ra:

Nếu hàm f(x, y, z) xác định và liên tục trên mặt cong trơn hay trơn từng phần S thì tồn tại tích phân mặt loại I

$$\iint_S f(x,y,z)ds.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \iint_S z^2 ds$, trong đó S là nửa mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z \ge 0.$$

Mặt S có phương trình tham số qua toạ độ cầu:

$$x = R\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = R\sin\theta.\sin\varphi$$

$$z = R\cos\theta\ ,\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ta có : $dS = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\theta d\varphi = R^2\sin\theta d\theta d\varphi$ (xem ví dụ 1). Do đó:

$$I = \iint_S z^2 ds = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2\theta.R^2\sin\theta d\theta = R^4 2\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta.\sin\theta d\theta = \frac{2}{3}\pi R^4.$$

5. Ứng dụng của tích phân mặt loại I

Cho S là mặt cong trơn hay trơn từng mảnh được cấu tạo bởi một mặt cong vật chất có mật độ khối lượng ρ(x,y,z) biến thiên liên tục trên mặt S.

Giả sử mặt cong S có phương trình tham số.

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D,$$

Ta hãy chia miền D thành các miền con $D_1, D_2, \dots, D_k$ bởi lưới các đường thẳng song song với các trục toạ độ u, và v trong mặt phẳng R^2. Khi đó mặt cong S cũng được chia tương ứng thành các mặt con

$$S_1, S_2, \dots, S_k.$$

Ký hiệu ΔS_i là diện tích của mặt con S_i ($i = 1, 2, \dots k$)

Khi đó khối lượng m_i của mặt con S_i được tính gần đúng bởi công thức:

$$m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i).\ \Delta S_i$$

trong đó (x_i, y_i, z_i) là điểm nào đó thuộc mặt con S_i ứng với tham số $u = u_i$, $v = v_i$:

$$x_i = x(u_i, v_i),\ y_i = y(u_i, v_i),\ z_i = z(u_i, v_i)$$

Do đó :

$$m_i \approx \rho[x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)]\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\Big|_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}} \Delta u_i\ .\Delta v_i$$

$(\Delta u_i > 0, \Delta v_i > 0)$. $u = u_i$, $v = v_i$

Khối lượng toàn phần của mặt S được tính gần đúng:

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i \approx \sum_{i=1}^{k} \rho\ [x(u_i,v_i), y(u_i,v_i), z(u_i,v_i)]\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\Big|_{\substack{u=u_i\\ v=v_i}} \Delta u_i\ .\Delta v_i$$

Từ đó cho $\max \Delta u_i \to 0$, $\max \Delta v_i \to 0$ thì ta nhận được công thức:

$$S = \iint_D \rho(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv$$

hay :

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)ds.$$

Tương tự, toạ độ trọng tâm của mặt S được tính bởi các công thức:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_S x\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iint_S y\rho(x,y,z)ds\,,$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iint_S z\rho(x,y,z)ds.$$

§4. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI II

1. Định hướng mặt cong

a) Mặt một phía và mặt hai phía

Giả sử S là mặt cong trơn trong R^3 có phương trình tham số:

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in D$$

trong đó $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ là các hàm khả vi liên tục trong $\overset{o}{D}$ và

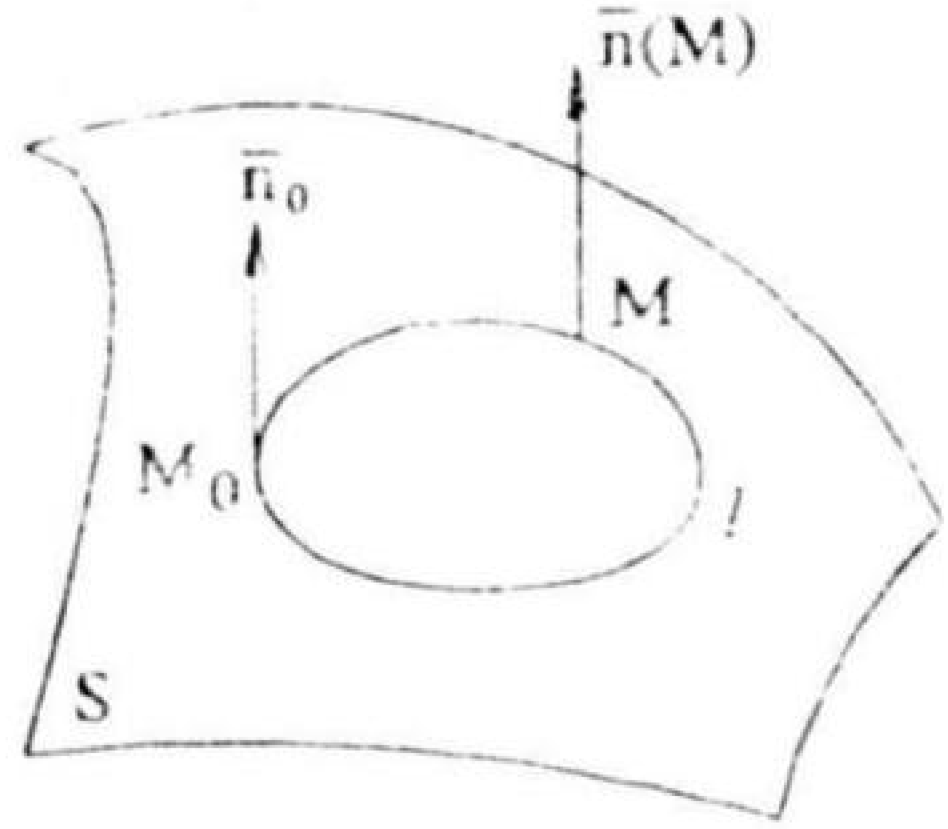
$$\text{hạng} \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2, \qquad (u,v) \in \overset{o}{D}$$

Như vậy tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in S$ có pháp tuyến xác định bởi véc tơ chỉ phương là:

$$\vec{N} = (A, B, C) = \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right] \neq \vec{\theta}.$$

Khi điểm $M(x,y,z)$ biến thiên liên tục trên mặt S thì pháp tuyến $\vec{N}$ cũng biến thiên liên tục.

Giả sử $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, l là một đường cong kín nằm hoàn toàn trên mặt cong S, đi qua điểm M_0.



Ta ký hiệu $\vec{n}_0$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt S, tại M_0 và $\vec{n} = \vec{n}(M)$ là véc tơ pháp tuyến của mặt S tại điểm M $\in l$, sao cho $\vec{n} = \vec{n}(M_0)$.

Cho điểm M biến thiên liên tục trên đường cong l bắt đầu từ điểm M_0 sau đó trở về điểm M_0. Khi đó véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ cũng biến thiên liên tục bắt đầu từ vị trí $\vec{n}_0$, khi điểm M chạy đủ một vòng trên đường cong l, trở về điểm M_0, thì véc tơ $\vec{n}(M)$ cũng chạy đủ một vòng, khi trở về điểm M_0 thì trở thành điểm véc tơ $\vec{n}'(M_0)$.

Có thể có hai khả năng xảy ra: hoặc $\vec{n}'(M_0) = \vec{n}(M_0) = \vec{n}_0$, hoặc $\vec{n}'(M_0) = -\vec{n}'(M_0) = -\vec{n}_0$.

Khả năng thứ hai xảy ra có nghĩa là khi trở về điểm M_0 thì véc tơ pháp tuyến đổi hướng.

Từ đó ta đi đến việc phân loại các mặt cong như sau:

Trường hợp 1: Nếu với bất kỳ điểm $M_0 \in S$, với mọi đường cong kín l nằm hoàn toàn trên mặt S, đi qua điểm M_0. Cho điểm

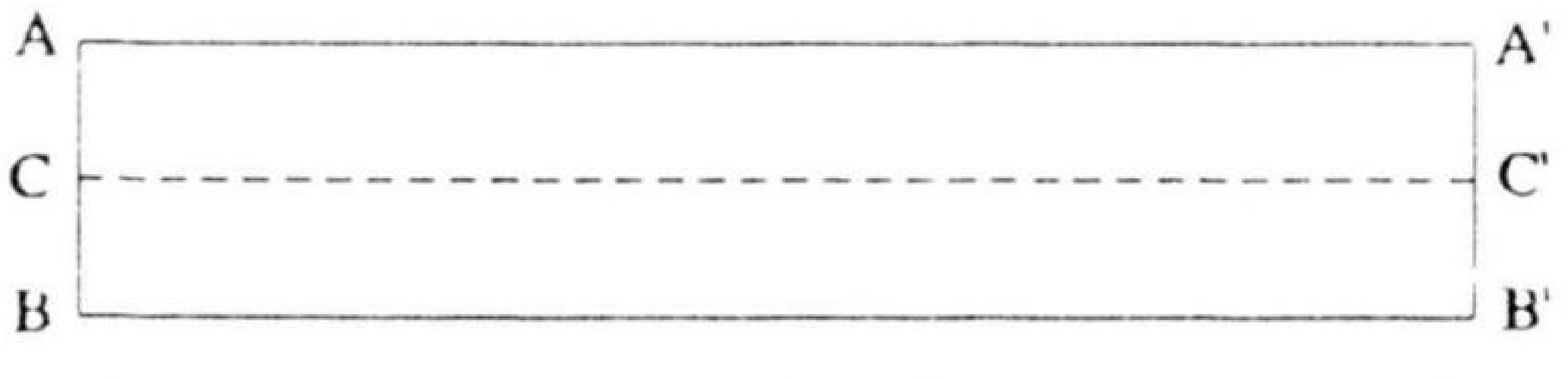
M chạy liên tục trên đường cong l bắt đầu từ điểm M_0, rồi trở về điểm M_0, véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$, cũng chạy đủ một vòng, khi trở về điểm M_0 thì $\vec{n}'(M_0) = \vec{n}_0$. Trong trường hợp này ta nói mặt cong S là mặt hai phía hay là mặt định hướng được .

Trường hợp 2: Tồn tại dù chỉ một điểm $M_0 \in S$ và dù chỉ một đường cong kín l_0 nằm hoàn toàn trên mặt S, đi qua điểm M_0, nếu cho điểm M biến thiên liên tục trên đường cong l_0 bắt đầu từ điểm M_0, thì véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(M)$ cũng biến thiên liên tục, nhưng khi trở về điểm M_0, $\vec{n}(M)$ trở thành véc tơ $\vec{n}'(M_0) = -\overrightarrow{n_0}$. Trường hợp này, ta nói S là mặt cong một phía, hay là mặt cong không định hướng được .

Các mặt cong thường gặp: mặt cầu, mặt nón, mặt trụ,... là những mặt hai phía.

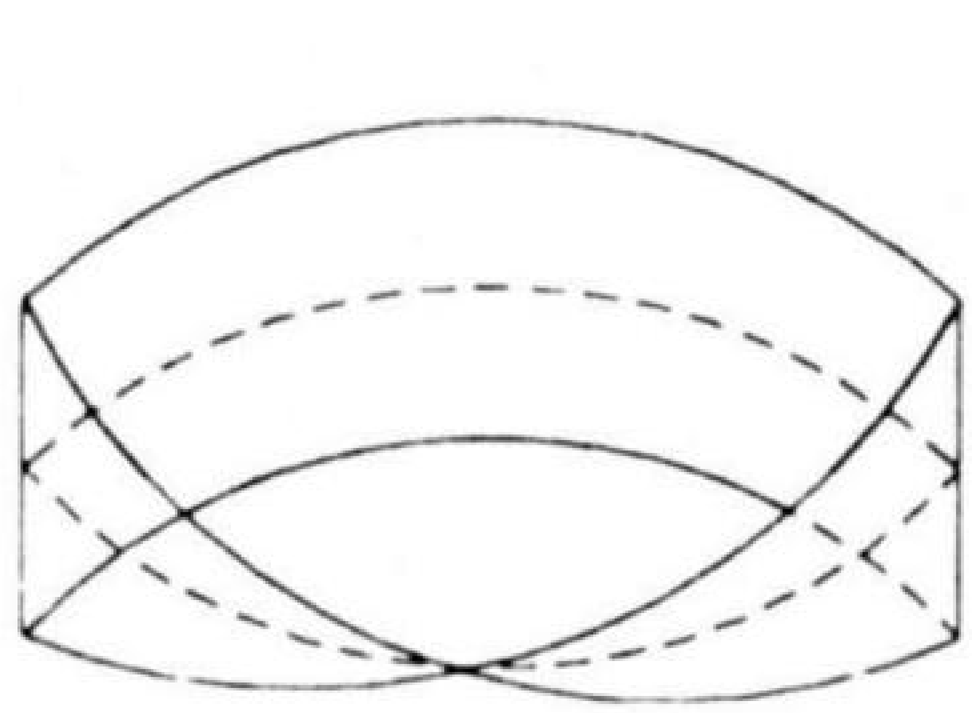
Sau đây ta lấy ví dụ về mặt một phía, đó là "lá Moebus"

Lấy một băng giấy hình chữ nhật ABA'B' (như hình vẽ)



Nếu uốn băng giấy lại, không xoắn và dán A với A', B với B' thì ta được một mặt trụ. Đó là mặt hai phía .

Nếu xoắn băng giấy lại nửa vòng, dán chéo A với B' và B với A' ta được mặt cong một phía, gọi là lá Moebus. Trong trường hợp này, một con kiến bò từ C đến C', sau khi bò đúng một vòng thì nó trở về phía bên kia.



b) Định hướng mặt cong: Giả sử S là mặt cong trơn hai phía. Khi đó tại mỗi điểm M thuộc mặt S có hai véc tơ pháp tuyến xác định, ngược chiều nhau. Nếu ta chọn một hướng của pháp tuyến là hướng dương thì hướng ngược lại là hướng âm .

Ta gọi việc chọn hướng dương của véc tơ pháp tuyến là chọn hướng dương của mặt S. Tại mỗi điểm có hai cách chọn hướng dương của véc tơ pháp tuyến nên cũng có hai cách chọn hướng dương của mặt hai phía.

c) Biểu diễn tham số phù hợp với định hướng của mặt

Cho S là mặt cong trơn, hai phía được định hướng dương bởi pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt S.

Ta xét biểu diễn tham số của mặt S

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v)\,, \qquad (u, v) \in D$$

Khi đó véc tơ $N = (A, B, C) = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$

là véc tơ pháp tuyến có hướng hoàn toàn xác định của mặt S tại điểm M có tọa độ (x(u, v) , y(u, v), z(u, v)) .

Nếu véc tơ $\overrightarrow{N}$ cùng hướng với véc tơ $\vec{n}$ định hướng dương của mặt S thì ta nói véc tơ $N = \left(\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)$ phù hợp với hướng dương của mặt S .

Ví dụ 1: Ta xét mặt cầu có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

và phương trình tham số của nó qua hệ tọa độ cầu:

$$x = x(\theta, \varphi) = R\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = y(\theta, \varphi) = R\sin\theta.\sin\varphi$$

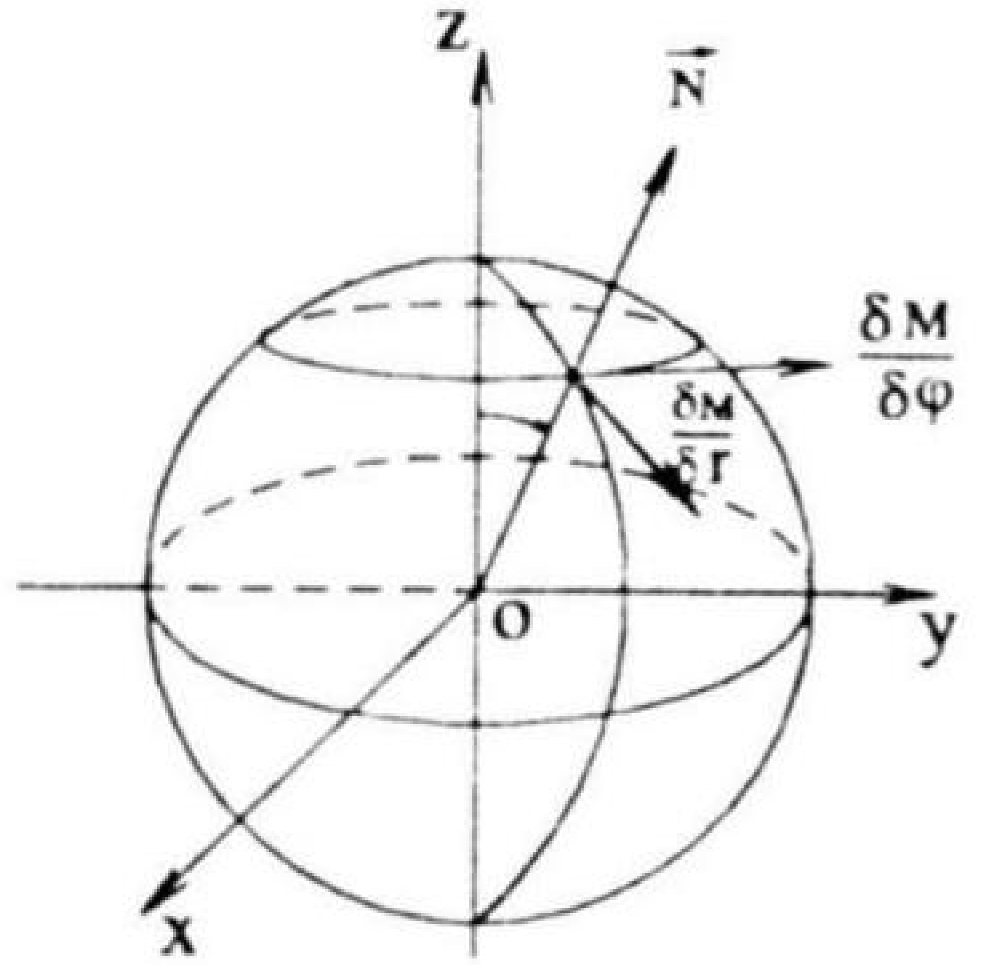
$$z = z(\theta, \varphi) = R\cos\theta$$

$$(0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

Lấy điểm $M(\theta, \varphi)$ trên mặt cầu

Ký hiệu $\dfrac{\partial M}{\partial \theta} = (x'_\theta, y'_\theta, z'_\theta)$

$\dfrac{\partial M}{\partial \varphi} = (x'_\varphi, y'_\varphi, z'_\varphi)$



là véc tơ tiếp xúc với kinh tuyến và vĩ tuyến của mặt cầu tại điểm M, hướng theo chiều tăng của tham số θ và φ tương ứng. Do đó véc tơ

$$\overrightarrow{N} = \frac{\partial M}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial M}{\partial \varphi} = \left(\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}, \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}, \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} \right) = (A, B, C)$$

hướng ra phía ngoài của mặt cầu .

Hơn nữa ta tính được:

$$A = R^2 \cos\varphi \sin^2\theta, \quad B = R^2 \sin\varphi \sin^2\theta, \quad C = R^2 \sin\theta \cos\theta .$$

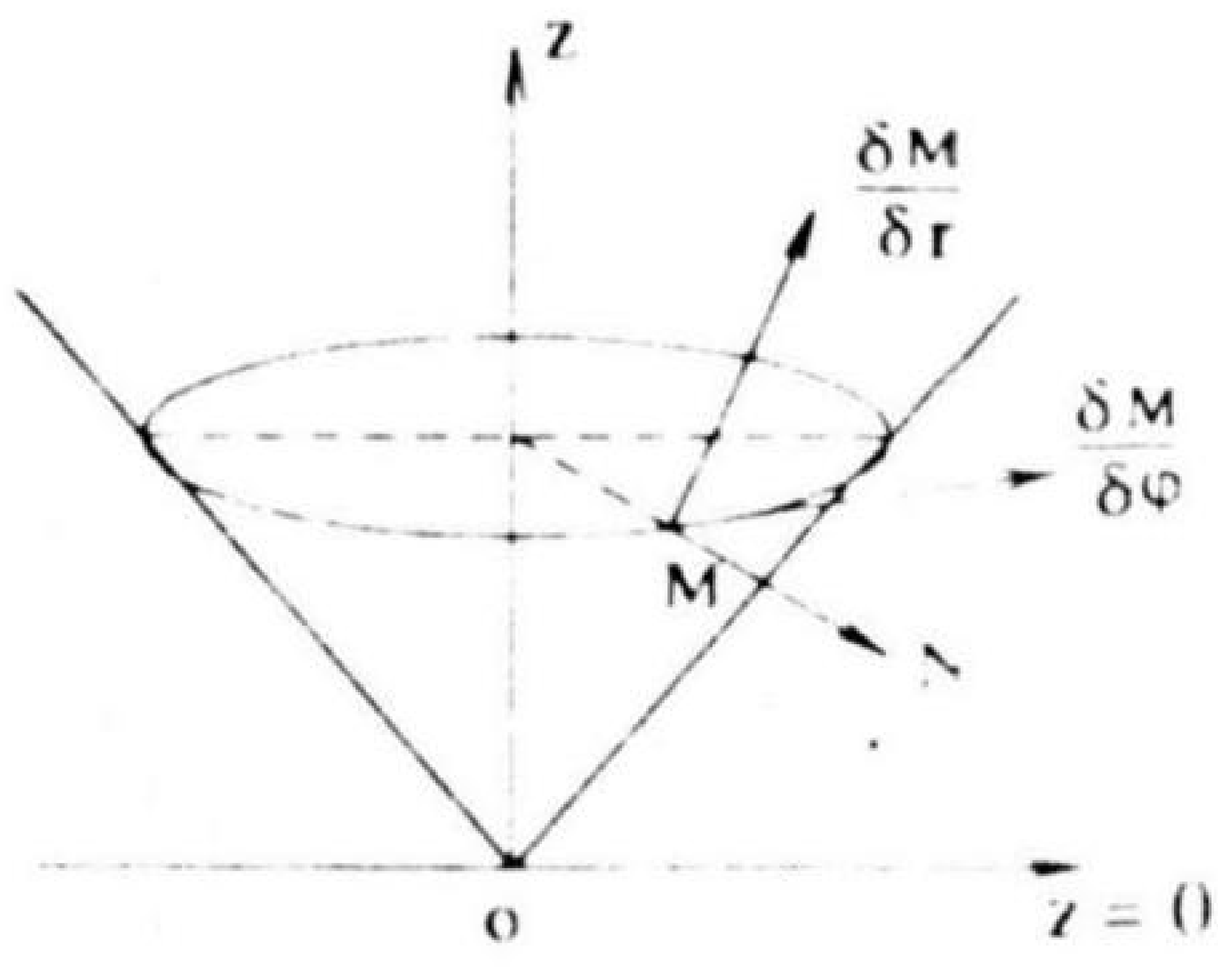
Ví dụ 2. Giả sử S là mặt nón $z^2 = x^2 + y^2 \quad z \ge 0$.

Chú ý rằng đường sinh của mặt nón hợp với trục Oz một góc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Do đó phương trình tham số của mặt nón qua hệ tọa độ cầu, ứng với $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ là

$$x = r\sin\theta\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$



Véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ hướng ra phía ngoài của mặt nón cùng hướng với véc tơ:

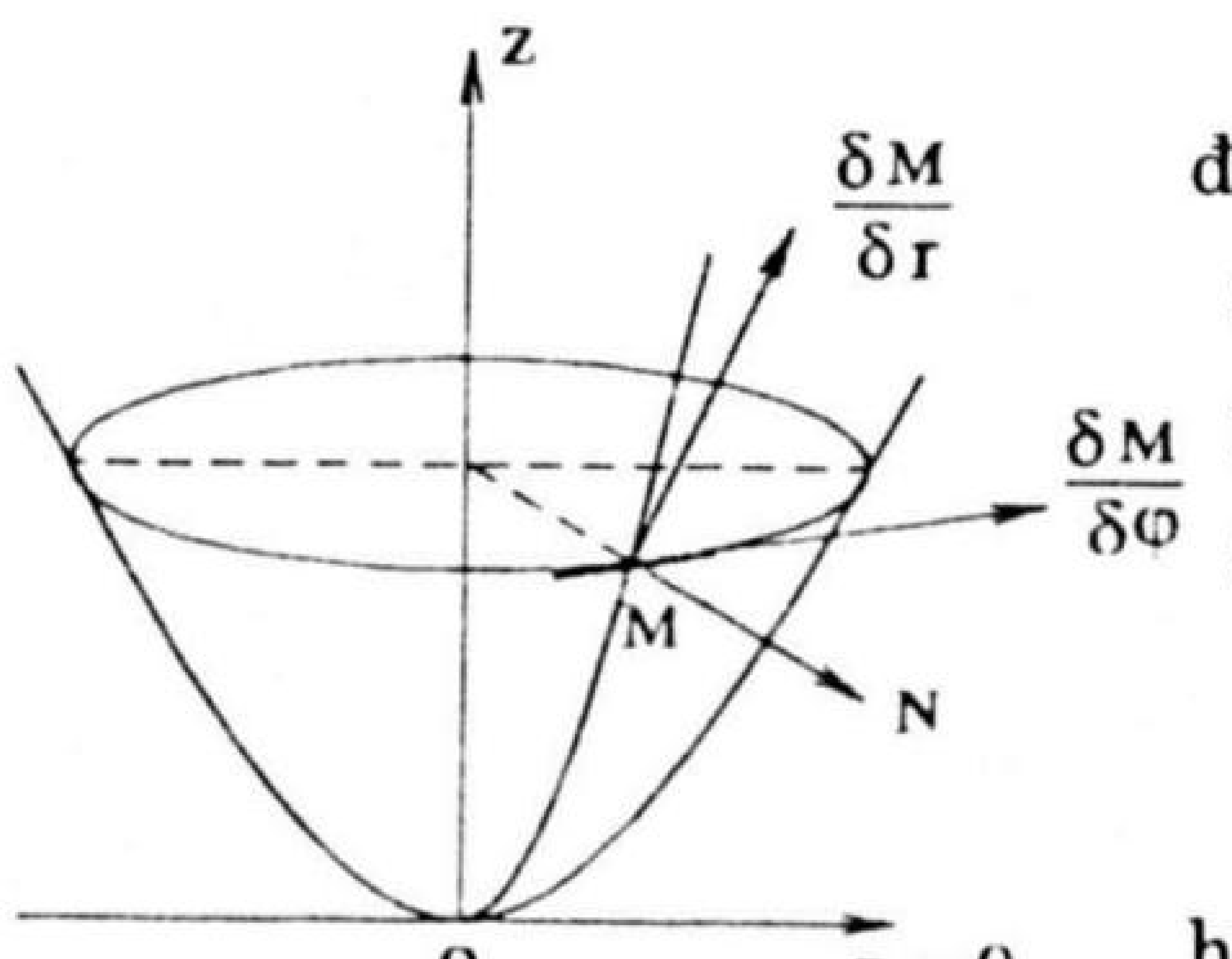
$$\vec{N} = \frac{\partial M}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial M}{\partial \theta} = (A, B, C)$$

trong đó:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\varphi,r)} = \frac{1}{2} r\sin\varphi \ , \ C = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,r)} = -\frac{1}{2} r$$

Ví dụ 3. Giả sử S là mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$



Tham số hóa mặt S qua hệ tọa độ trụ

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = x^2 + y^2 = r^2, \ 0 \le \varphi \le 2\pi, \ r \ge 0$

Véc tơ $\vec{N} = \dfrac{\partial M}{\partial \varphi} \wedge \dfrac{\partial M}{\partial r}$

hướng ra phía ngoài của mặt paraboloid .

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} r\cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 2r \end{vmatrix} = 2r^2\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 2r & \cos\varphi \end{vmatrix} = -2r^2\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -r$$

Vì $c = -r < 0$ nên véc tơ $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ luôn luôn hợp với trục $\overrightarrow{Oz}$ một góc tù .

Ví dụ 4. Giả sử S là mặt cong trong R^3 có phương trình

$z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, trong đó $f(x, y)$ là hàm khả vi liên tục trong miền D .

Tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in S$, véc tơ pháp tuyến

$$\overrightarrow{N} = \left(\frac{D(y,z)}{D(x,y)}, \frac{D(z,x)}{D(x,y)}, \frac{D(x,y)}{D(x,y)}\right) = (-f'_x, -f'_y, 1)$$

có các cosin chỉ hướng là:

$$\cos\alpha = -\frac{f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \ \cos\beta = -\frac{f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \ \cos\gamma = +\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}$$

Vì $\cos\gamma > 0$ nên $0 \le \gamma \le \frac{\pi}{2}$, nghĩa là véc tơ $\overrightarrow{N}$ hợp với trục $\overrightarrow{Oz}$ một góc $\gamma < \frac{\pi}{2}$. Vậy véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ hướng lên phía trên của mặt S .

2. Định nghĩa tích phân mặt loại II

Giả sử S là mặt cong trơn, hai phía, được định hướng dương bởi pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt S; biểu diễn tham số

$\gamma = \gamma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $\quad (u, v) \in D$ với véc tơ

$$\vec{N} = \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)$$

phù hợp với hướng dương của mặt S,

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z)\ ,\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z))$$

là véc tơ hàm xác định trên mặt S .

Khi đó tích phân mặt loại II của hàm véc tơ $\vec{F}$ (x, y, z) lấy theo hướng dương của mặt S được ký hiệu là:

$$\iint_{S^+} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy\ ,$$

là giá trị của tích phân hai lớp:

$$\iint_D (PA + QB + RC)\ dudv$$

trong đó $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $C = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$

Vậy

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint_D \left\{P.\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q.\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\} dudv$$

Từ định nghĩa ta suy ra:

Nếu các hàm P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) xác định và liên tục trên mặt S, thì tích phân mặt loại II của hàm véc tơ $\vec{F}$ tồn tại.

Hơn nữa:

$$\iint_{S^+} Pdxdy + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy .$$

Điều này dễ dàng nhận thấy vì hướng âm của mặt S được xác định bởi pháp tuyến ngược hướng với véc tơ $\vec{N}$. Do đó:

$$\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy =$$

$$= \iint_D \left\{ P.\frac{D(y,z)}{D(v,u)} + Q.\frac{D(z,x)}{D(v,u)} + R.\frac{D(x,y)}{D(v,u)} \right\} dudv$$

$$= -\iint_D \left\{ P.\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + Q.\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + R.\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right\} dudv$$

$$= -\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy .$$

Ví dụ 5: Tính tích phân mặt loại 2

$$I = \iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$$

trong đó S^+ là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Biểu diễn tham số của mặt cầu qua hệ tọa độ cầu là:

$$x = a\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = a\sin\theta.\sin\varphi$$

$$z = a\cos\theta\ ,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi .$$

Véc tơ $\vec{N} = (A, B, C) = \left[\frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)}, \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)}, \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)}\right]$

hướng ra phía ngoài của mặt cầu (xem ví dụ 1), trong đó

$$A = a^2\sin^2\theta.\cos\varphi,\ B = a^2\sin^2\theta.\sin\varphi, C = a^2\sin\theta.\cos\theta$$

Do đó:

$$\iint\limits_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iint\limits_{D}(a\sin\theta.\cos\varphi.a^2\sin^2\theta.\cos\varphi +$$

$$+ a\sin\theta.\sin\varphi.a^2\sin^2\theta.\sin\varphi + a.\cos\theta.a^2\sin\theta.\cos\theta)d\theta d\varphi$$

$$= a^3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi\sin^3\theta + \sin^2\varphi.\sin^3\theta + \cos^2\theta.\sin\theta)d\theta$$

$$= a^3 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = a^3.2\pi.2 = 4\pi a^3\ .$$

Ví dụ 6: Tính $I = \iint\limits_{S^+}(y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$

trong đó S^+ là phía ngoài của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \le z \le h$.

Tham số hóa mặt nón qua hệ tọa độ cầu là:

$$x = r\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta.\sin\varphi$$

$$x = r\cos\theta\ .$$

Chú ý rằng trên mặt nón $x^2 + y^2 = z^2,\ \theta = \frac{\pi}{4}, 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Do đó phương trình tham số của mặt nón là:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} r.\cos\varphi ,$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} r.\sin\varphi ,$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} r ,$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ 0 \le \frac{\sqrt{2}}{2} r \le h \ \text{hay} \ 0 \le r \le \sqrt{2}\, h .$$

Véc tơ pháp tuyến:

$$\vec{N} = (A, B, C) = \left[\frac{D(y,z)}{D(\varphi,r)}, \frac{D(z,x)}{D(\varphi,r)}, \frac{D(x,y)}{D(\varphi,r)}\right]$$

hướng theo pháp tuyến ngoài của mặt nón, trong đó:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\varphi,r)} = \frac{1}{2} r\sin\varphi, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,r)} = -\frac{1}{2} r$$

Vậy nên:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}h} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} r\right).\frac{1}{2} r\cos\varphi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r - \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi\right).\frac{1}{2} r\sin\varphi + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\varphi\right)\left(-\frac{1}{2} r\right)\right] dr$$

$$= 2.\int_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi) d\varphi \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sqrt{2}}{4} r^2 dr = 0 .$$

3. Liên hệ giữa tích phân mặt loại I và II

Giả sử S là mặt cong trơn, định hướng bởi pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt S, có phương trình tham số:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D.$$

Véc tơ $\vec{N} = (A, B, C) = \left[\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}, \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}, \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]$ hướng theo hướng pháp tuyến $\vec{n}$. Do đó véc tơ $\vec{n}$ có các cosin chỉ hướng tính theo các công thức sau:

$$\cos\varphi = \cos(\vec{n}, Ox) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \cos(\vec{n}, Oy) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\vec{n}, Oz) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Khi đó:

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_{D} (PA + QB + RC)dudv$$

$$= \iint\limits_{D} \left(P.\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + Q\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + R\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv$$

$$= \iint\limits_{D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv$$

$$= \iint\limits_{D} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds\ .$$

Vậy ta có công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II là:

$$\iint_{S^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds$$

trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ định hướng dương của mặt S .

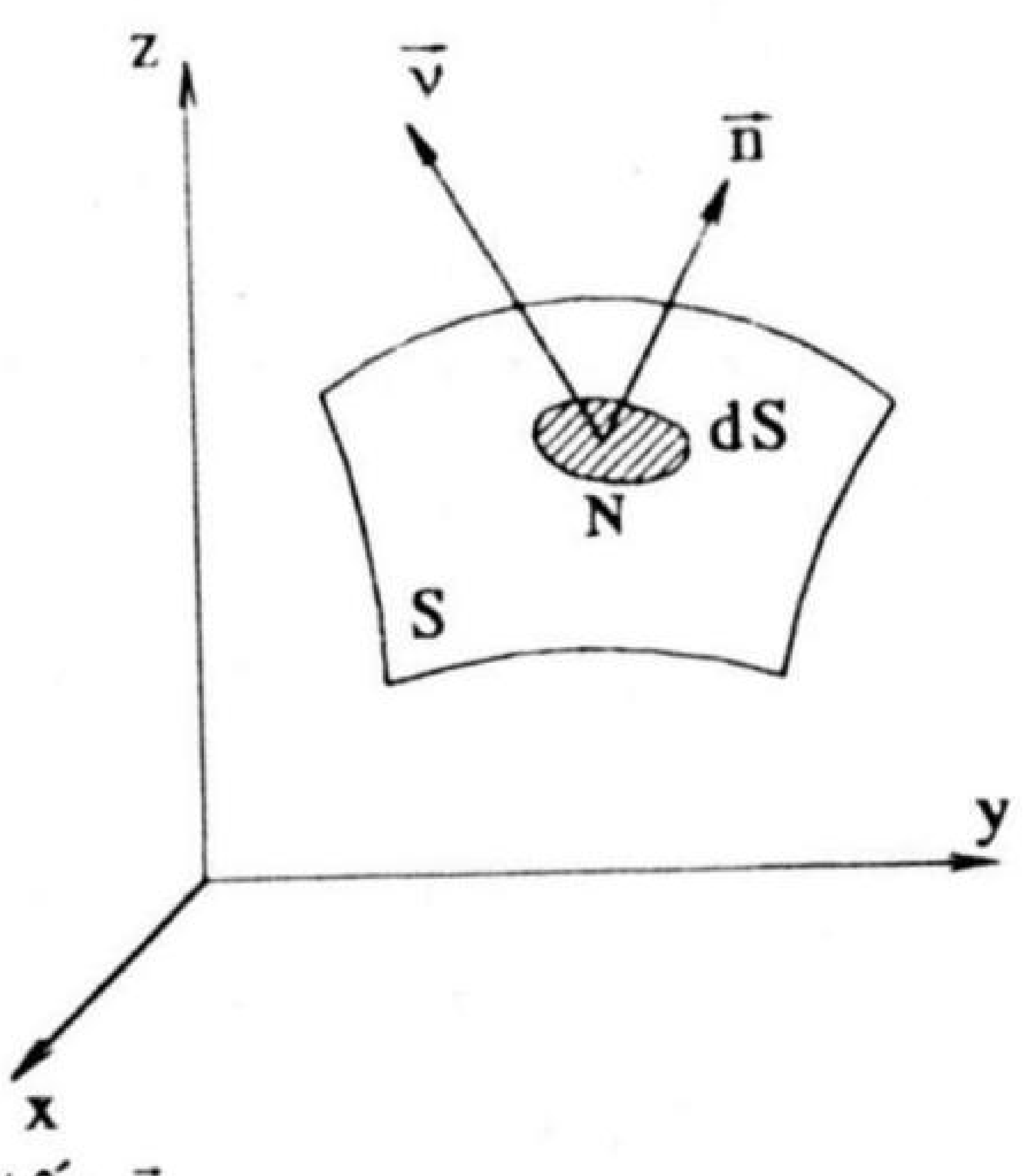
4. Ý nghĩa vật lý của tích phân mặt loại 2

Ta hãy hình dung có một mặt cong S được nhúng chìm trong một môi trường chất lỏng đang chảy ở chế độ dừng (tức là không phụ thuộc thời gian) .

Giả sử tại mỗi điểm $M(x, y, z) \in S$, vận tốc của chất lỏng được hoàn toàn xác định bởi véc tơ:

$$\vec{v}(x, y, z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big).$$

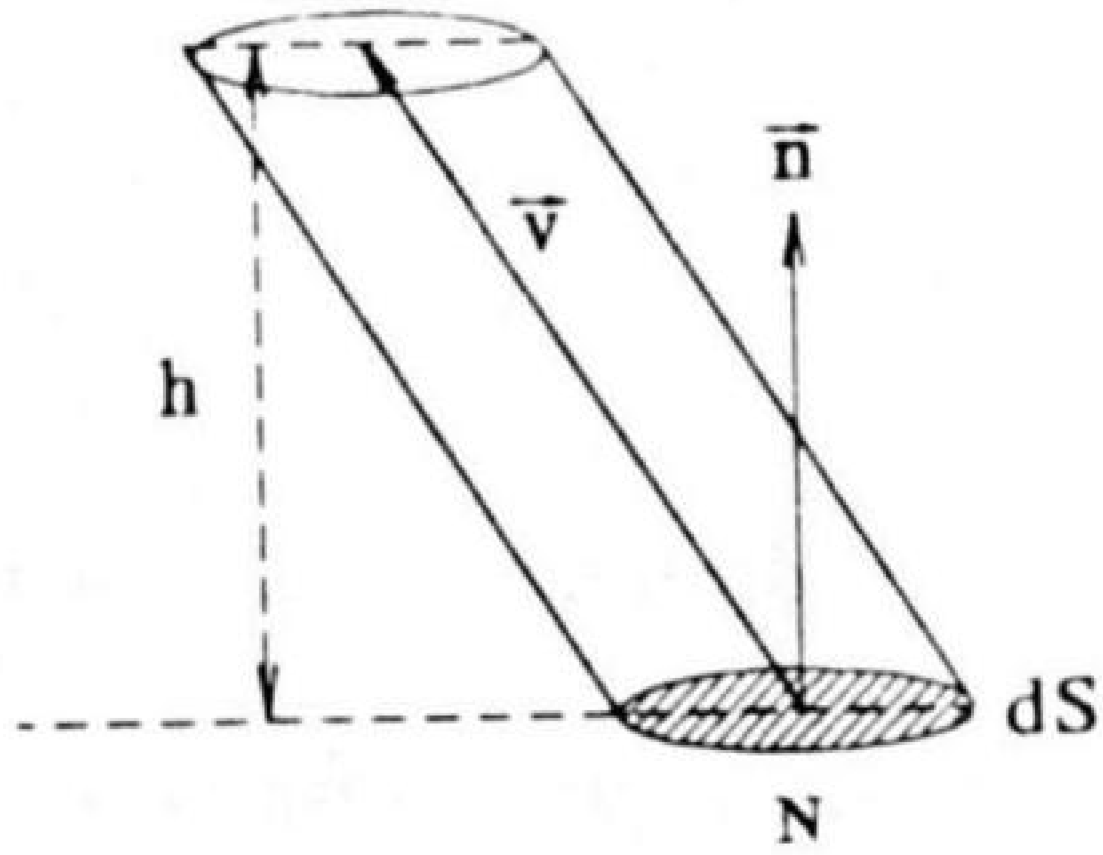
Ta giả thiết $P(x,y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ là các hàm xác định liên tục trên mặt cong S .



Ta hãy tính lưu lượng của chất lỏng chảy qua mặt S (tức là lượng chất lỏng chảy qua trong một đơn vị thời gian).

Xét một vi phân diện tích dS tại điểm M. Trong một đơn vị thời gian lượng chất lỏng chảy qua dS lấp đầy một hình trụ nghiêng có đáy là dS và đường sinh song song và bằng véc tơ vận tốc $\vec{v}$.

Ký hiệu $\vec{n}$ là véc tơ đơn vị của pháp tuyến của mặt S tại điểm M thì chiều cao của hình trụ là:



$$h = \vec{v} \,.\, \vec{n} \,.$$

Thể tích của hình trụ bằng lượng chất lỏng chảy qua dS trong một đơn vị thời gian và bằng.

$$d\mathscr{F} = \vec{v} \,.\, \vec{n} \,.ds$$

$$= [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]ds$$

trong đó $\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{Ox}, \vec{n})$, $\cos\beta = \cos(\overrightarrow{Oy}, \vec{n})$, $\cos\gamma = \cos(\overrightarrow{Oz}, \vec{n})$ là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt S tại điểm $M(x, y, z) \in S$.

Do đó lưu lượng $\mathscr{F}$ của chất lỏng chảy qua toàn mặt S theo hướng của pháp tuyến $\vec{n}$ là:

$$\mathscr{F} = \iint_S d\mathscr{F} = \iint_S \left[P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right]ds$$

$$= \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

trong đó S^+ là hướng dương của mặt S được xác định bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Như vậy lưu lượng $\mathscr{F}$ là một đại lượng đại số. Nếu ta coi lượng chất lỏng chảy qua mặt S theo hướng véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ là dương thì lượng chất lỏng chảy qua mặt S theo hướng pháp tuyến $-\vec{n}$ là âm. Vì vậy lưu lượng $\mathscr{F}$ là một đại lượng phụ thuộc vào sự định hướng của mặt S.

§ 5. LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT VỚI TÍCH PHÂN BỘI

1. Công thức Green

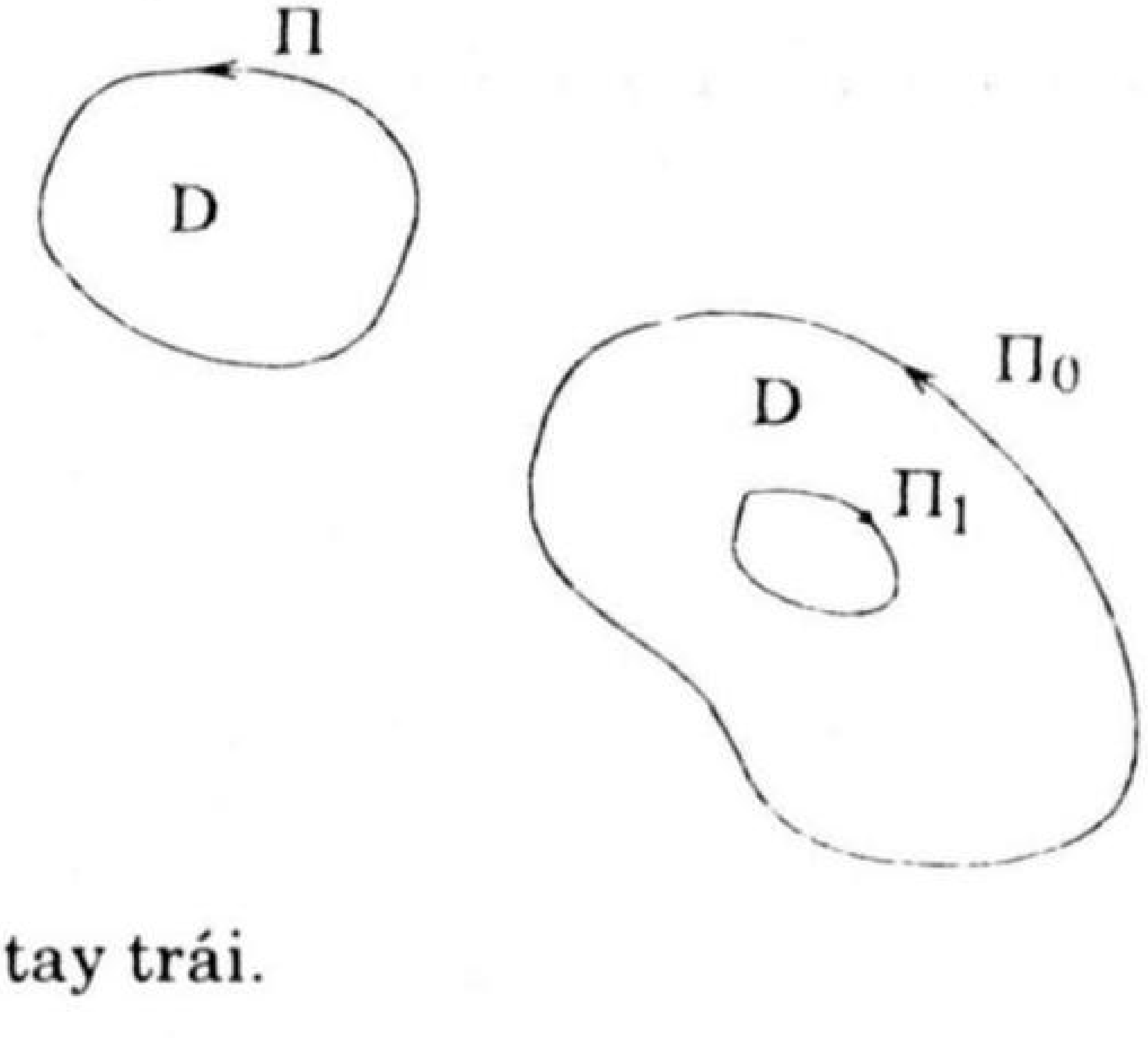
a. Miền đơn liên và miền đa liên trong mặt phẳng

Trước hết ta chú ý rằng, trong mặt phẳng mọi đường cong Jordan kín Γ đều chia mặt phẳng thành hai miền: miền bị chặn và miền không bị chặn. Miền bị chặn nhận Γ là biên của nó được gọi là miền trong, miền không bị chặn được gọi là miền ngoài.

Miền D trong mặt phẳng được gọi là miền đơn liên nếu mọi đường cong Jordan kín Γ nằm hoàn toàn trong miền D thì miền trong nhận Γ là biên của nó cũng được chứa hoàn toàn trong miền D.

Về trực giác miền đơn liên là miền mà bên trong nó không chứa "lỗ thủng".

Miền có lỗ thủng có hai thành phần biên, thành phần biên bên ngoài là Γ_0, thành phần biên bên trong là Γ_1 ta gọi đó là miền nhị liên. Miền có hai lỗ thủng có 3 thành phần biên được gọi là miền "tam liên",... , miền có n-1 "lỗ thủng" được gọi là miền n-liên.



Giả sử D là miền bị chặn trong mặt phẳng xOy với biên Γ. Khi đó ta qui ước chiều dương trên Γ là chiều sao cho một người đứng thẳng góc với mặt phẳng xoy rồi đi theo chiều đó thì thấy phần của miền D ở lân cận mình ở phía bên tay trái.

Về trực giác nếu D là miền đơn liên, bị chặn và lồi trong mặt phẳng xOy thì chiều dương của biên Γ là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ mà trục kim là một điểm trong nào đó của miền D.

Ta thường kí hiệu Γ^+ là biên Γ của miền D mà trên đó đã định hướng dương theo chiều dương của Γ.

b) Công thức Green

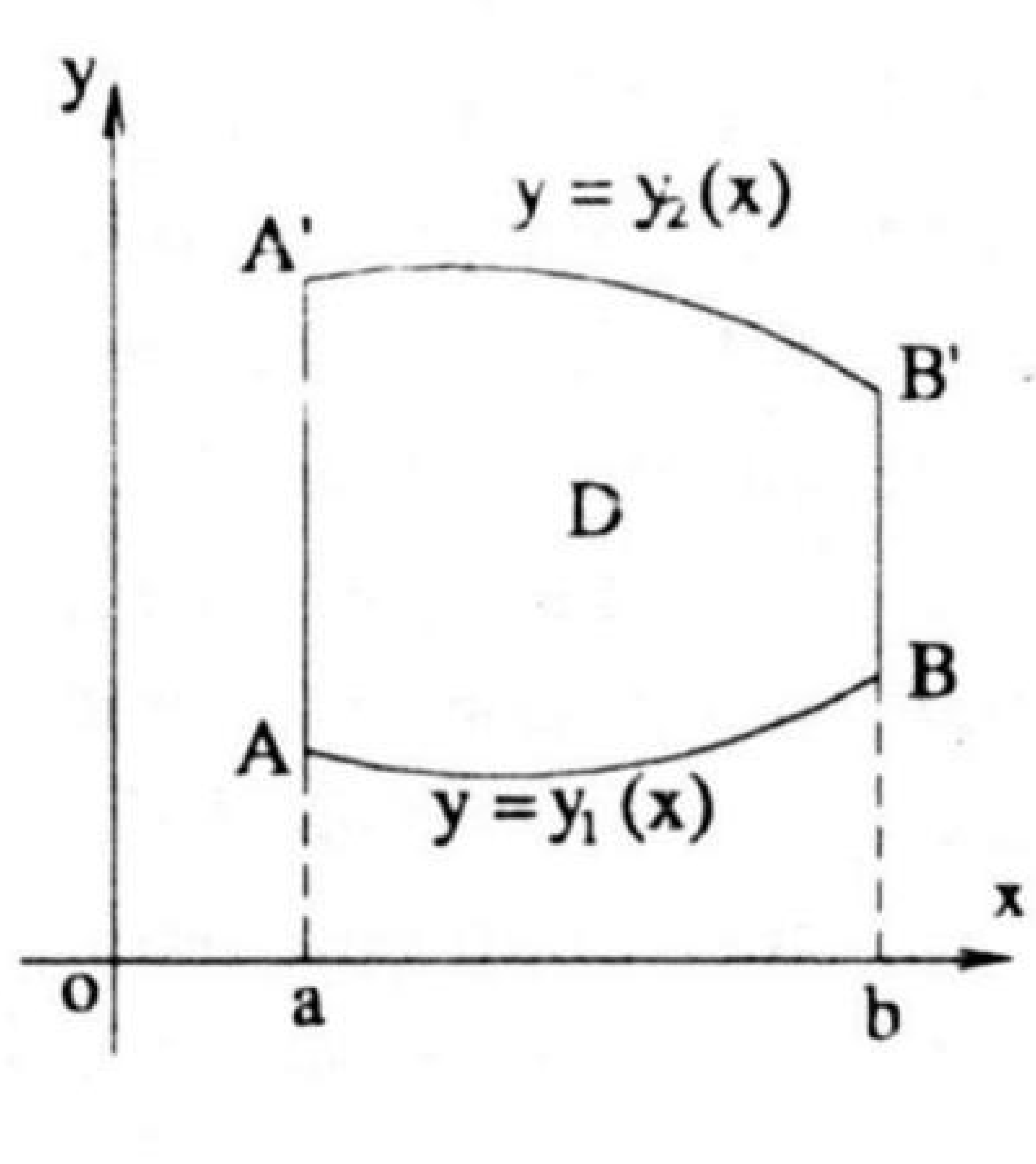
Định lý 2.X: Giả sử D là miền đơn liên, bị chặn trong mặt phẳng xoy với biên Γ trơn từng khúc, P(x,y) và Q(x,y) là hai hàm số khả vi liên tục trong miền đóng $\overline{D} = D \cup \Gamma$. Khi đó ta có công thức Green sau đây:

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Chứng minh: Trước hết ta giả sử D là miền có tính chất là mọi đường thẳng song song với các trục toạ độ Ox hoặc Oy và đi qua một điểm trong của miền D chỉ cắt biên Γ đúng hai điểm.

Như vậy miền D có thể xem được giới hạn bởi hai đường thẳng x = a, x = b, các đường cong $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình $y = y_1(x)$, và đường cong $\overset{\frown}{B'A'}$ có phương trình $y = y_2(x)$, trong đó $y_1(x)$ và $y_1(x)$ là các hàm khả vi từng khúc trên đoạn [a, b] , hơn nữa :

$y_1(x) \le y_2(x)$, $a \le x \le b$.



Ta hãy tính:

$$I = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx$$

$$= -\int_{\overset{\frown}{B'A'}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx$$

Chú ý trên AA' và BB' ta có x = const nên dx = 0, do đó

$$\int\limits_{BB'} P(x,y)dx = 0 \quad \text{và} \quad \int\limits_{AA'} P(x,y)dx = 0$$

Vậy nên

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx - \int\limits_{BB} P(x,y)dx - \int\limits_{\overset{\frown}{BA'}} P(x,y)dx - \int\limits_{A'A} P(x,y)dx = -\int\limits_{\Gamma^+} P(x,y)dx$$

Trong đó Γ^+ là biên của miền D lấy chiều dương $\overset{\frown}{ABB'A'A}$.

Tương tự như vậy, ta chứng minh được

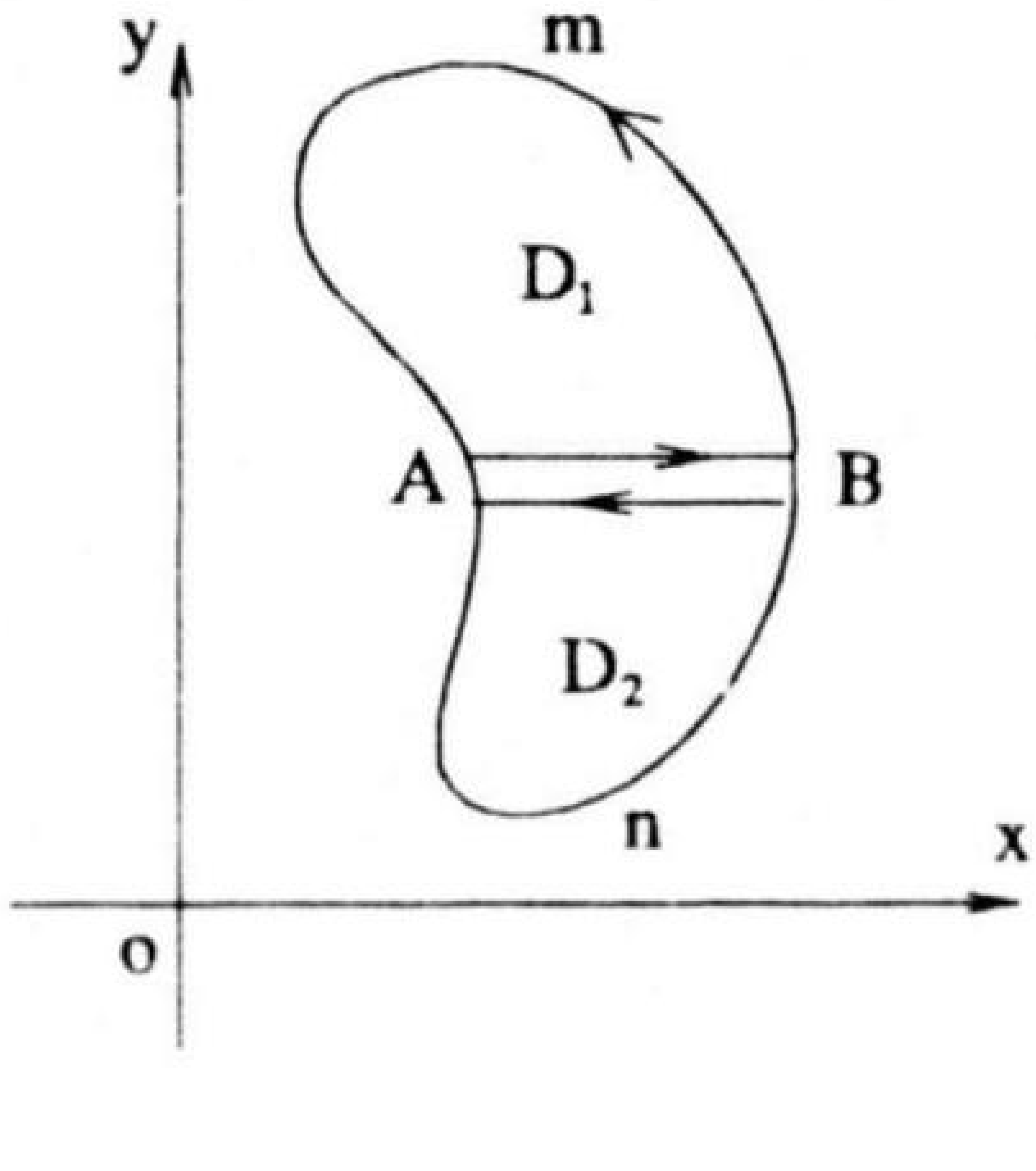
$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int\limits_{\Gamma^+} Q(x,y)dy.$$

Cộng theo vế hai đẳng thức vừa nhận được ta có:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Gamma^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Bây giờ giả sử D là miền đơn liên mà có thể phân chia thành những miền con $D_1, D_2, \dots, D_k$ sao cho mọi đường thẳng song song với các trục toạ độ Ox, Oy đi qua một điểm trong của miền D_i chỉ cắt biên $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, k)$ của nó đúng hai điểm.

Chẳng hạn miền D có dạng như hình bên cạnh: Ta chia D thành hai miền con D_1 và D_2 bởi đoạn thẳng AB, Khi đó các miền D_1 và D_2 có tính chất như đã nói ở trên, trong đó biên Γ_1 bao gồm $\overset{\frown}{BmA}$ và đoạn AB, biên Γ_2 bao gồm cung $\overset{\frown}{AnB}$ và đoạn BA.



Ta có

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Áp dụng công thức Green đã chứng minh ở trên cho các tích phân hai lớp trên miền D_1 và D_2.

$$\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Gamma_1^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{BmA}} Pdx + Qdy + \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$$

$$\iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Gamma_2^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{BA} Pdx + Qdy.$$

Chú ý rằng tích phân đường loại hai lấy trên các đoạn AB và BA ngược chiều nhau cho nên:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BA} Pdx + Qdy = 0.$$

Do đó :

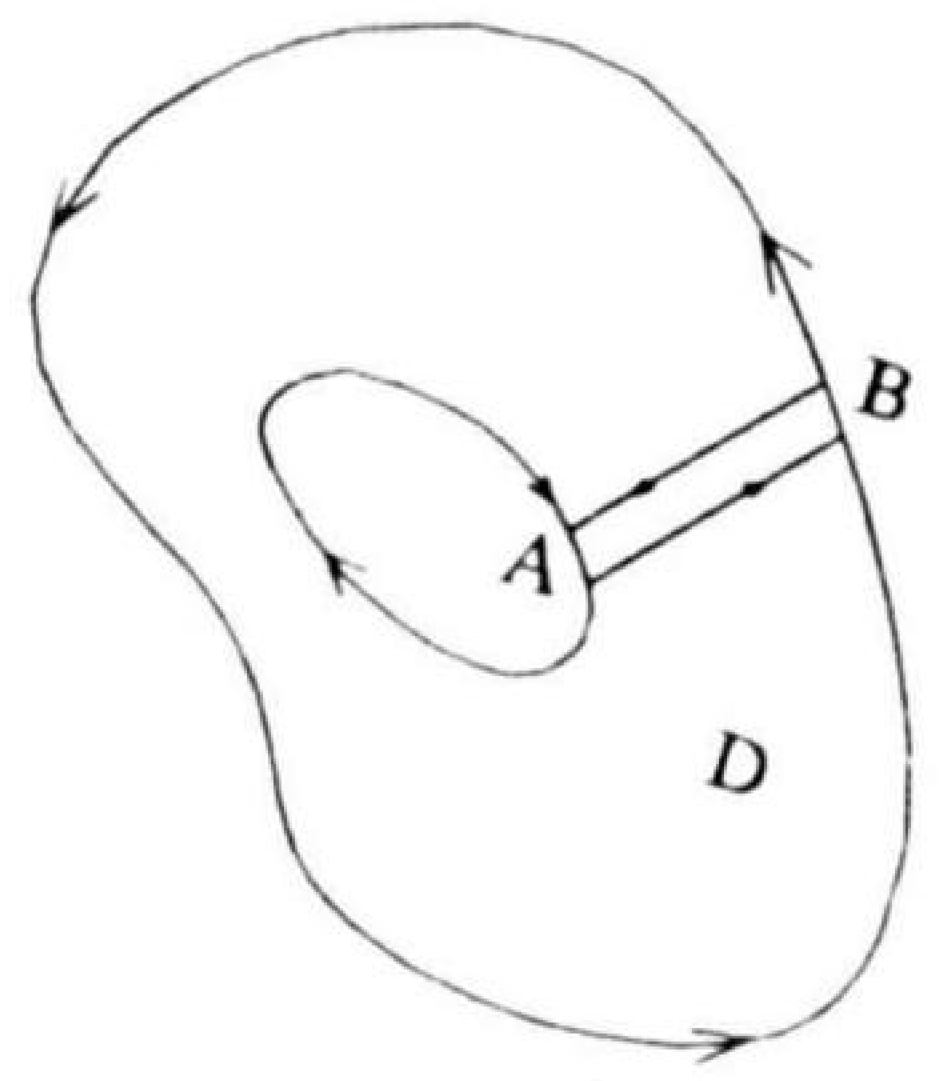
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\overset{\frown}{BmA}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\frown}{AnB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

trong đó Γ là biên của miền D lấy theo hướng dương $\overset{\frown}{BmAnB}$.

Vậy ta cũng có công thức:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$$

Chú ý: Nếu D là miền đa liên với biên trơn từng khúc , ta hãy cắt ra thành một số hữu hạn các miền con đơn liên bởi những đường nối các thành phần biên của miền D bằng tổng các tích phân lấy trên các miền con đơn liên. Áp dụng công thức Green đối với miền đơn liên, và lập luận tương tự như chứng minh ở trên ta chứng tỏ rằng công thức Green cũng áp dụng được đối với miền đa liên có biên trơn hay trơn từng khúc.



c) Điều kiện để giá trị của tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lý 3.X. Giả sử D là miền đơn liên, P(x,y), Q(x,y) là hai hàm khả vi liên tục trong miền D. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương.

1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x,y) \in D,$

2) $\int\limits_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ đối với mọi đường cong γ kín trơn từng khúc nằm hoàn toàn trong miền D,

3) $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ trên cung trơn hay trơn từng khúc $\widehat{AB}$ không khép kín nằm hoàn toàn trong miền D chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của cung $\widehat{AB}$ mà không phụ thuộc vào đường nối hai điểm A và B.

4) Tồn tại một hàm F(x,y) hai lần khả vi liên tục trong miền D sao cho: dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh lần lượt :

$$1 \Rightarrow 2, \quad 2 \Rightarrow 3, \quad 3 \Rightarrow 4, \quad 4 \Rightarrow 1 .$$

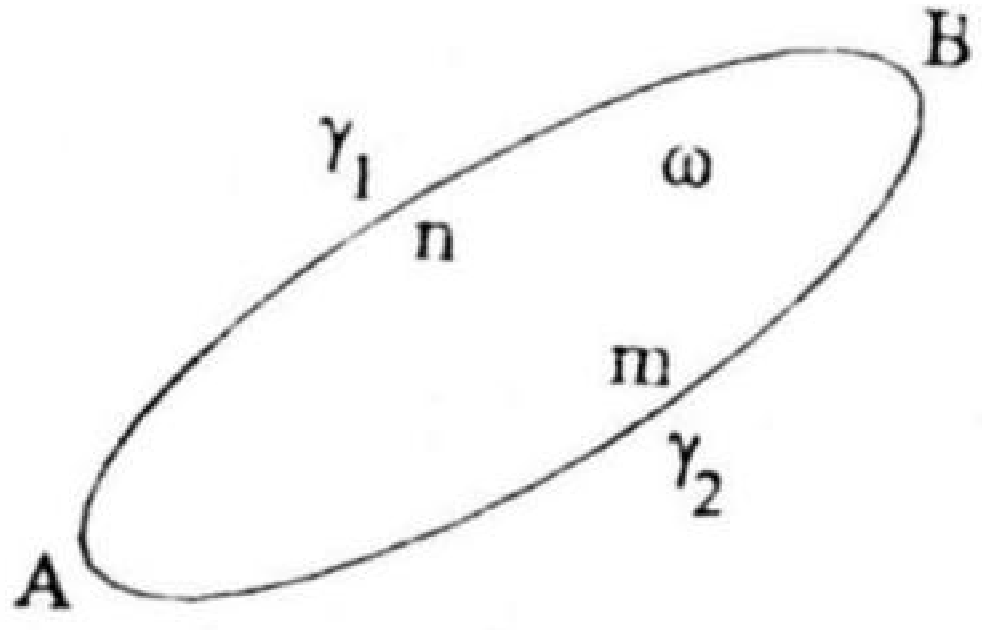
$1 \Rightarrow 2$: Giả sử γ là đường cong kín, trơn hay trơn từng khúc bất kỳ trong miền D. Vì D là miền đơn liên nên miền bị chặn ω được giới hạn bởi γ cũng nằm hoàn toàn trong miền D. Áp dụng công thức Green ta có: $\iint\limits_{\omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \int\limits_{\gamma^+} Pdx + Qdy$

Theo giả thiết 1) Vì $\omega \subset D$ nên $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in \omega$.

Từ đó ta suy ra : $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$.

$2 \Rightarrow 3$: Giả sử γ_1 và γ_2 là hai đường cong trơn hay trơn từng khúc không cắt nhau nằm hoàn toàn trong miền D:

$\gamma_1 = AnB, \quad \gamma_3 = AmB$



Kí hiệu $\gamma^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+ = \overset{\frown}{BnAmB}$

Theo giả thiết 2) ta có:

$\int\limits_{\gamma^+} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\frown}{BnAmB}} Pdx + Qdy = 0$.

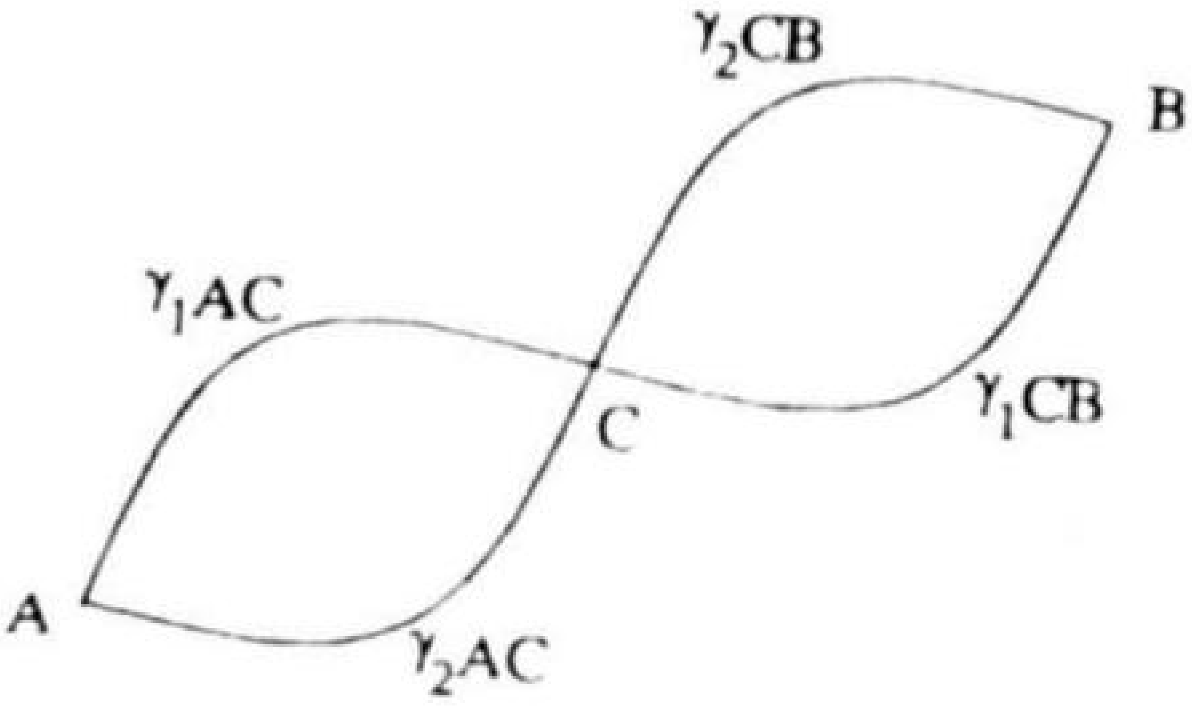
Từ đó suy ra: $\int\limits_{BnA} Pdx + Qdy + \int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = 0$

hay $\int\limits_{AmB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BnA} Pdx + Qdy = \int\limits_{AnB} Pdx + Qdy$.

Vậy $\int\limits_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{\gamma_2} Pdx + Qdy$.

Nếu γ_1 và γ_2 cắt nhau tại điểm C:

Áp dụng chứng minh trên ta có:



$$\int_{\gamma_1 AC} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_2 AC} Pdx + Qdy$$

và $$\int_{\gamma_1 CB} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_2 CB} Pdx + Qdy .$$

Cộng hai đẳng thức này lại theo từng vế ta có:

$$\int_{\gamma_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\gamma_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

$3 \Rightarrow 4$: Giả sử A và B là hai điểm bất kỳ trong miền D, và tích phân $\int_{AB} Pdx + Qdy$ không phụ thuộc vào đường nối hai điểm A và B.

Lấy $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định trong miền D, $M(x, y)$ là điểm tùy ý trong miền D. Ta xác định hàm:

$$F(x, y) = \int_{AM} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Khi đó F(x, y) là hàm số hoàn toàn xác định trong miền D. Giả sử $M_1(x + h, y) \in D$, ta có:

$$F(x + h, y) = \int_{AM_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Ta chọn AM_1 là cung gồm cung AM với đoạn MM_1.

Chú ý rằng trên đoạn MM_1 thì y không đổi nên $dy = 0$.

Do đó:

$$F(x+h, y) - F(x, y) = \int\limits_{AM_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{AM} Pdx + Qdy$$

$$= \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{x}^{x+h} P(t, y)dt \ .$$

Vì P(x, y) liên tục trong miền D nên áp dụng định lý trung bình đối với tích phân xác định, ta có:

$$F(x+h, y) - F(x, y) = P(x+\theta h, y).h, \ 0 \le \theta \le 1 \ .$$

Từ đó: $\dfrac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} = P(x+\theta h, y) \ , \quad 0 \le \theta \le 1 \ .$

Lấy giới hạn khi $h \to 0$, vì P(x, y) là hàm liên tục, nên:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} P(x+\theta h, y) = P(x, y)$$

Vậy: $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$

Tương tự: $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \ .$

Từ các đẳng thức vừa nhận được ta suy ra:

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

và hơn nữa, F(x, y) là hàm có các đạo hàm riêng liên tục cho đến cấp 2 trong miền D .

$4 \Rightarrow 1$

Giả thiết tồn tại hàm F(x, y) khả vi liên tục hai lần trong miền D và sao cho: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P \ , \ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$. Từ đó ta có:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad , \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Theo định lý Schwarz $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, do đó $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ với mọi $(x, y) \in D$.

Định lý chứng minh xong .

d) Ứng dụng công thức Green để tính diện tích

Giả sử D là miền bị chặn với biên Γ trơn hay trơn từng khúc.

Ta chọn $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = x$. Khi đó:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ .$$

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\iint_D dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma^+} xdy \ .$$

Từ đó ta có công thức tính diện tích của miền D

$$S = \int_{\Gamma^+} xdy \ .$$

Tương tự nếu chọn $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = 0$

ta có: $$S = -\int_{\Gamma^+} ydx \ .$$

Kết hợp hai công thức này ta có công thức:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} xdy - ydx$$

tính diện tích miền D bởi tích phân đường loại 2 .

Ví dụ: Tính diện tích của hình ellip có hai nửa trục là a và b

Chọn hai trục của ellíp là các trục Ox và Oy. Khi đó phương trình tham số của đường ellíp $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ là:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ dx = -a\sin t dt,\ dy = b\cos t dt$$

$$S=\frac{1}{2}\int_{\Gamma^+} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt = \frac{ab}{2}.2\pi = \pi ab\ .$$

2. Công thức Stokes

a) Giả sử S là mặt cong trơn, hai phía trong không gian R^3 được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$, Γ là biên của mặt S. Chiều dương trên biên Γ phù hợp với sự định hướng dương của mặt S là chiều sao cho một người đứng thẳng theo hướng của pháp tuyến $\vec{n}$, đi theo chiều dương của Γ thì sẽ thấy những điểm của mặt S ở lân cận của mình nằm về phía bên trái .

Biên Γ của mặt S với chiều dương qui ước như trên sẽ được ký hiệu là Γ^+ .

Giả sử mặt S được cho bởi phương trình tham biến:

$$x = x(u, v)\ ,\ y = y(u, v)\ ,\ z = z(u, v)\ , \quad (u, v) \in D \subset R^2$$

và γ là biên của miền D trong mặt phẳng (u, v) .

Giả sử véc tơ $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ trong đó,

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\quad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\quad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

phù hợp với hướng pháp tuyến $\vec{n}$ thì khi điểm m(u, v) chạy theo chiều dương của γ^+ thì điểm M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) sẽ chạy theo chiều dương của Γ^+ .

Định lý 4.X (Định lý Stokes)

Giả sử S là mặt cong hai phía, trơn hay trơn từng mảnh nằm trong miền $\Omega \subset R^3$, được định hướng dương bởi pháp tuyến $\vec{n}$, Γ^+ là biên của mặt S được định chiều dương phù hợp với hướng dương của mặt S.

P(x, y, z), Q(x, y, z) và R(x, y, z) là các hàm khả vi liên tục trong miền $\Omega \cup S$. Khi đó ta có công thức:

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + $$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó tích phân mặt lấy theo hướng dương của mặt S .

Chứng minh. Giả sử mặt cong S cho bởi phương trình tham số:

x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), $(u, v) \in D$ được định hướng dương bởi pháp tuyến $\vec{n}$, và véc tơ N = (A, B, C) phù hợp với định hướng dương của mặt S. Khi đó chiều dương của biên Γ^+ của mặt S phù hợp với chiều dương biên γ^+ của miền D .

Áp dụng công thức Green ta có:

$$\int_{\Gamma^+} Pdx = \int_{\gamma^+} P\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) = \iint_{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}(P\frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v}(P\frac{\partial x}{\partial u})\right]dudv$$

Trong đó:

$$\frac{\partial}{\partial u}(P\frac{\partial x}{\partial v})-\frac{\partial}{\partial v}(P\frac{\partial x}{\partial u})=\frac{\partial P}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}.\frac{\partial x}{\partial u}-P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}$$

$$=\frac{\partial P}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial v}.\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial y}.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$$

Vì vậy:

$$\int_{\Gamma^+}Pdx=\iint_D\left[\frac{\partial P}{\partial z}.\frac{D(z,x)}{D(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]dudv$$

$$=\iint_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\ .$$

Tương tự như vậy ta có:

$$\int_{\Gamma^+}Qdy=\iint_{S^+}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz$$

$$\int_{\Gamma^+}Rdz=\iint_{S^+}\frac{\partial R}{\partial y}dydz-\frac{\partial R}{\partial x}dzdx$$

Cộng ba đẳng thức vừa nhận được ta có công thức Stokes cần chứng minh .

Chú thích: Ký hiệu $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$. Khi đó công thức Stokes có thể viết dưới dạng tích phân mặt loại I:

$$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S^+}\left[(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma\right] ds.$$

Để dễ nhớ biểu thức dưới dấu tích phân mặt loại 2 bên vế phải được viết dưới dạng hình thức sau đây:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Như vậy:

$$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{S^+} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds .$$

3. Công thức Ostrogradski

a) ***Định lý 5.X***. Giả sử Ω là miền bị chặn trong không gian R^3 với biên S trơn hoặc trơn từng mảnh, P(x, y, z), Q(x, y, z) và R(x, y, z) là các hàm khả vi liên tục trong $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$.

Khi đó ta có công thức Ostrogradski:

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz,$$

trong đó S^+ là biên của Ω được định hướng dương theo pháp tuyến ngoài .

Chứng minh. Trước hết ta giả thiết Ω là miền có tính chất là: mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ, đi qua một điểm trong nào đó của Ω, chỉ cắt mặt biên S tại đúng hai điểm. Khi đó ta có thể xem miền bị chặn Ω được giới hạn bởi hai mặt cong S_1 có phương trình Descartes $z = z_1(x, y)$, $(x, y) \in D$ và S_2 có phương trình Descartes $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, trong đó D là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng xOy, tức là:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \quad z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}.$$

Ta hãy xét tích phân:

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz =$$

$$= \iint_{D} \left[R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))\right] dxdy$$

$$= \iint_{S_2^+} R(x, y, z)dxdy + \iint_{S_1^+} R(x, y, z)dxdy .$$

trong đó vế phải là các tích phân mặt loại 2 lần lượt lấy theo phía trên của mặt S_2 và phía dưới của mặt S_1 chú ý rằng nếu ta gọi S_3 là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và tựa trên biên của miền D thì:

$$\iint_{S_3^+} R(x, y, z)dxdy = \iint_{S_3} R(x, y, z)\cos(\overrightarrow{oz}, \vec{n})ds = 0$$

(vì pháp tuyến ngoài $\vec{n}$ của mặt S_3 vuông góc với trục Oz và S_3^+ được định hướng dương bởi véc tơ pháp tuyến ngoài).

Từ đó:

và áp dụng công thức Ostrogradski, ta có:

$$\iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_{\Omega} (1+1+1)dxdydz = 3V.$$

Vậy nên: $V = \dfrac{1}{3}\iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy$.

Ví dụ: Tính tích phân

$I = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Áp dụng công thức Ostrogradski ta có:

$$I = \iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = 3\iiint_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

trong đó Ω là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$. Do đó chuyển qua hệ tọa độ cầu ta tính được:

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{a} r^4 dr = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

§ 6. ĐẠI CƯƠNG VỀ LÝ THUYẾT TRƯỜNG

1. Trường vô hướng

a) Định nghĩa: Cho Ω là một miền trong không gian R^3, u(x, y, z) là một hàm số xác định trong Ω. Khi đó ta nói u(x, y, z) là một trường vô hướng xác định trong Ω.

Trường vô hướng là một khái niệm có nguồn gốc vật lý như trường nhiệt độ, hay trường áp suất...

Sau đây ta nói đến những trường vô hướng không phụ thuộc thời gian. Những trường vô hướng như vậy được gọi là trường dừng .

Giả sử u(x, y, z) , (x, y, z) ∈ Ω là một trường vô hướng xác định trong Ω. Khi đó phương trình u(x, y, z) = C, trong đó C là hằng số, xác định một mặt cong được gọi là mặt mức của trường. Người ta còn gọi mặt mức là mặt đẳng trị, vì rằng trên mặt mức thì giá trị của trường vô hướng không đổi .

b) Gradien của trường vô hướng

Cho trường vô hướng u(x, y, z) trong miền $\Omega \subset R^3$. Giả thiết u(x, y, z) có các đạo hàm riêng cấp 1 theo x, y, z .

Gradien của u(x, y, z) là một véc tơ, ký hiệu là gradu, được xác định bởi hệ thức:

$$\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Rõ ràng gradu $u(x_0, y_0, z_0)$ chính là véc tơ pháp tuyến của mặt mức của trường vô hướng đi qua điểm (x_0, y_0, z_0) .

2. Trường véc tơ

a) Định nghĩa: Cho Ω là một miền trong không gian R^3. Nếu tại mỗi điểm M(x, y, z) ∈ Ω có một đại lượng véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$ nào đó xác định thì ta gọi $\vec{F}(x, y, z)$, (x, y, z) ∈ Ω là một trường véc tơ xác định trong Ω .

Trường véc tơ là một khái niệm có nguồn gốc vật lý như trường vận tốc, từ trường, điện trường...

Nếu u(x, y, z) là trường vô hướng trong Ω thì grad u(x, y, z), $(x, y, z) \in \Omega$ là trường véc tơ trong Ω.

Nếu $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ ta đặt:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

thì $\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$ là trường vô hướng trong Ω .

b) Đường dòng của trường véc tơ

Giả sử Ω là một miền trong không gian R^3, $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in \Omega$ là một trường véc tơ xác định trong Ω.

Ta gọi đường dòng của trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$ là mọi đường cong C mà tại mỗi điểm của nó tiếp tuyến với đường cong cùng phương với véc tơ của trường đi qua điểm đó. Khi đó phương trình vi phân xác định đường dòng là:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Các đường sức trong từ trường hoặc điện trường là những đường dòng của các trường đó .

c) Thông lượng của một trường véc tơ qua mặt cong S theo một hướng xác định

Cho trường $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ xác định trong miền $\Omega \subset R^3$. Giả sử S là mặt cong định hướng mà pháp tuyến dương xác định hướng của mặt S là $\vec{n}$. Gọi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng pháp tuyến $\vec{n}$. Khi đó ta gọi tích phân mặt:

$$\mathscr{F} = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds$$

$$= \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)\, dzdx + R(x,y,z)\, dxdy$$

là thông lượng (hay lưu lượng) của trường véc tơ $\vec{F}$ qua mặt S theo hướng pháp tuyến $\vec{n}$.

Nếu $\vec{F}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$ là trường vận tốc của một dòng chất lỏng đang chảy ổn định, nghĩa là vận tốc $\vec{F}(x, y, z)$ không phụ thuộc vào thời gian, thì thông lượng $\mathscr{F}$ chính là lượng chất lỏng chảy qua mặt S trong một đơn vị thời gian .

d) Công và lưu thông của trường véc tơ dọc theo một đường cong

Cho $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, $(x, y, z) \in \Omega$ là một trường véc tơ xác định trong $\Omega \subset R^3$, γ_{AB} là một đường cong nằm trong miền Ω, A là điểm đầu, B là điểm cuối .

Ta gọi tích phân:

$$\tau = \int\limits_{\gamma_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

là công hay lưu thông của trường véc tơ $\vec{F}$ dọc theo đường cong γ_{AB} .

Nếu ký hiệu $\vec{r}$ là véc tơ chỉ hướng của tiếp tuyến của đường cong γ_{AB} hướng từ A đến B thì

$$\tau = \int\limits_{\gamma_{AB}} \vec{F}.\vec{r}\, ds = \int\limits_{\gamma_{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

trong đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của $\vec{r}$.

Nếu $\vec{F}$ là trường lực thì τ được gọi là công, nếu $\vec{F}$ là trường vận tốc thì τ được gọi là lưu thông .

3. Dạng véc tơ của công thức Ostrogradski

Cho trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ trong đó $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ là các hàm khả vi liên tục trong miền $\Omega \subset R^3$ có biên là mặt S trơn hay trơn từng mảnh .

Ta ký hiệu:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Khi đó công thức Ostrogradski có thể viết dưới dạng véc tơ như sau:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)dxdydz = \iint_{S} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

$$= \iint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

trong đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ hướng của véc tơ pháp tuyến ngoài của mặt S .

Như vậy thông lượng của trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$ qua mặt kín S bằng tích phân bội của $\operatorname{div}\vec{F}$ trên miền Ω được giới hạn bởi mặt S .

4. Dạng véc tơ của công thức Stokes

Cho trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ trong miền $\Omega \subset R^3$, trong đó $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ là các hàm khả vi liên tục trong Ω .

Giả sử S là mặt cong trơn, định hướng có biên Γ nằm hoàn toàn trong Ω, $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến định hướng dương của mặt S, và chiều dương trên biên Γ^+ phù hợp với hướng dương của mặt S.

Khi đó công thức Stokes được viết dưới dạng véc tơ là:

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \mathrm{Rot}\,\vec{F}.\vec{n}\,ds.$$

trong đó Rot $\vec{F}(x, y, z)$ là véc tơ xoáy của trường $\vec{F}(x, y, z)$ xác định như sau:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Từ công thức Stokes ta suy ra: lưu thông của một trường véc tơ $\vec{F}$ theo đường cong kín Γ bằng thông lượng của trường véc tơ Rot $\vec{F}(x, y, z)$ qua mặt cong S nào đó có biên Γ.

5. Trường thế

Một trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega \subset R^3$ được gọi là trường thế nếu tồn tại một hàm vô hướng u(x, y, z) xác định trên Ω sao cho:

$$\vec{F}(x, y, z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}u}(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right), \quad (x, y, z) \in \Omega$$

Hàm u(x, y, z) được gọi là hàm thế, các mặt mức u(x, y, z) = C được gọi là các mặt đẳng thế.

Từ định nghĩa ta suy ra: trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$ là trường thế khi và chỉ khi biểu thức:

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

là một vi phân hoàn chỉnh, tức là tồn tại hàm u(x, y, z) khả vi liên tục hai lần trong Ω sao cho:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz .$$

Mặt khác, từ định lý Stokes ta suy ra, điều đó xẩy ra khi và chỉ khi: rot $\vec{F}(x, y, z) = 0$ với mọi $(x, y, z) \in \Omega$.

Vậy trường $\vec{F}(x, y, z)$ là trường thế khi và chỉ khi Rot $\vec{F}(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in \Omega$. Vì vậy trường thế còn được gọi là trường không xoáy.

6. Trường ống

Trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega \subset R^3$ được gọi là một trường ống nếu tồn tại một trường véc tơ $\vec{V}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$ khác sao cho:

$$\vec{F}(x, y, z) = \text{rot}\,\vec{V}(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega .$$

Ta có thể kiểm tra dễ dàng, nếu $\vec{F}(x, y, z)$ là trường ống thì

$$\text{div}\,\vec{F} = \text{div}(\text{rot}\,\vec{V}) = 0.$$

Theo công thức Ostrogradski ta suy ra: để cho trường véc tơ $\vec{F}(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Omega$ là trường ống điều kiện cần và đủ là thông lượng của trường véc tơ $\vec{F}$ qua bất kỳ một mặt cong kín S nằm trong Ω phải bằng 0 .

$$\mathcal{F} = \iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\omega \text{div}\vec{F}dxdydz = 0$$

trong đó ω là miền bị chặn có biên là mặt cong S nằm hoàn toàn trong Ω .

BÀI TẬP CHƯƠNG X

I. Tích phân đường

1. Tính các tích phân đường loại I sau đây:

a) $\int\limits_C (x+y)ds$, trong đó C - là đường nối các điểm có toạ độ như sau đây O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1).

b) $\int\limits_C y^2 ds$, trong đó C- là cung thứ nhất của đường Xicloide: $x= a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

c) $\int\limits_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})ds$, trong đó C- là đường Axtroide có phương trình $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

d) $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, trong đó C- là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

2. Tính các tích phân đường loại I lấy theo đường cong trong không gian:

$\int\limits_C x^2 ds$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x+ y +z =0$.

b) $\int\limits_C (x^2 + y^2 + z^2)ds$, trong đó C là phần của đường cong có phương trình tham số : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \le t \le 2\pi$.

3. Tính tích phân đường loại II:

$\int\limits_{OA} xdy - ydx$, trong đó 0 là điểm gốc toạ độ và A là điểm có toạ độ (1,2) nếu:

a) OA là đoạn thẳng nối 2 điểm O và A.

b) OA là nhánh parabol mà trục của nó trùng với 0y.

c) OA là đường gấp khúc bao gồm đoạn OB nằm trên trục Ox và đoạn BA song song với trục Oy.

4. Tính tích phân $\int\limits_{OA} xdy + ydx$, trong đó OA là đường nối hai điểm O và A ứng với 3 trường hợp như bài tập 3.

5. Tính các tích phân đường loại II sau đây :

a) $\int\limits_{C} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, trong đó C là phần của parabol $y = x^2$ $(-1 \le x \le 1)$.

b) $\int\limits_{C} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, trong đó C là đường cong

$y = 1 - |1-x|$, $(0 \le x \le 2)$

c) $\oint\limits_{C} (x + y)dx + (x - y)dy$, trong đó C là đường ellíp $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều dương ngược kim đồng hồ.

d) $\oint\limits_{C} \dfrac{(x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy}{x^2 + y^2}$, trong đó C là đường tròn

$x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều dương ngược với chiều kim đồng hồ.

e) $\oint\limits_{ABCD} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó ABCDA là đường nối các điểm A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1) .

6. Tính các tích phân đường loại II mà biểu thức dưới dấu tích phân là một vi phân hoàn chỉnh:

a) $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dx + (x - y)dy.$

b) $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$, trong đó tích phân lấy theo mọi đường cong không cắt trục 0y.

c) $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, trong đó tích phân lấy theo đường cong không đi qua gốc toạ độ.

7. Chứng minh rằng nếu f(x) là một hàm liên tục, C là một đường cong đóng, trơn từng khúc thì:

$$\int_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0.$$

8. Tính các tích phân đường loại II trong không gian.

a) $\displaystyle\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = xtg\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, lấy theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục 0x.

b) $\int\limits_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, trong đó C là đường cong giới hạn phần của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

c) $\int\limits_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, trong đó C là đường cong có phương trình tham số $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$, lấy theo chiều hướng tăng của tham số.

II . Tích phân mặt

9. Tính các tích phân mặt loại I sau đây:

a) $\iint\limits_S (x + y + z)ds$, trong đó S là mặt $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

b) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, trong đó S là mặt biên của vật thể $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

c) $\iint\limits_S \frac{ds}{(1 + x + y)^2}$, trong đó S là mặt biên của tam diện $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

d) $\iint\limits_S |xyz|\, ds$, trong đó S là phần của mặt $z = x^2 + y^2$ bị cắt bởi mặt phẳng $z = 1$.

e) $\iint\limits_S z^2 ds$, trong đó S là phần của mặt nón cho bởi phương trình tham số $x = \rho\cos\varphi\sin\alpha$, $y = \rho\sin\varphi\sin\alpha$, $z = \rho\cos\alpha$, $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, α là hằng số $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

f) $\iint\limits_S (xy + yz + xz)ds$, trong đó S là phần của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt $x^2 + y^2 = 2ax$.

10. Tính các tích phân mặt loại 2:

a) $\iint\limits_S (xdydz + ydxdz + zdxdy)$, trong đó S là mặt ngoài của hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

b) $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy)$, trong đó S là phía ngoài của mặt nón: $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$.

c) $\iint\limits_S (\frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z})$, trong đó S là phía ngoài của mặt ellipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

d) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu : $(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}b)^2 + (z\text{-}c)^2 = R^2$.

III. Các công thức Green, Stokes và Ostrogradski

11. Áp dụng công thức Green tính các tích phân đường sau đây:

a) $\oint\limits_C xy^2dy - x^2ydx$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$.

b) $\oint\limits_c (x + y)dx - (x - y)dy$ trong đó C là đường ellip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

c) $\oint\limits_C e^x[(1-\cos y)dx-(y-\sin y)dy]$, trong đó C là chu tuyến định hướng giới hạn miền $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

d) $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$.

12. Tính tích phân đường

$$\int\limits_{AmO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy,$$

trong đó AmO là nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = ax$, định hướng từ điểm A(a, 0) đến điểm O(0, 0) .

13. Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, trong đó C là đường cong không tự cắt, không đi qua gốc tọa độ

14. Tính tích phân $I = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, nếu $X = ax + by$, $Y = cx + dy$ và C là đường cong đóng không tự cắt bao quanh gốc tọa độ $(ad - bc \neq 0)$.

15. Áp dụng công thức Stokes để tính tích phân đường $\oint\limits_C ydx + zdy + xdz$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x+y+z = 0$, chạy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox .

16. Áp dụng công thức Stokes để tính tích phân đường sau đây:

a) $\oint\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, trong đó C là đường ellip $x^2+y^2=a$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$ chạy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox .

b) $\oint\limits_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, trong đó C là giao tuyến của mặt lập phương $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$, với mặt phẳng $x+y+z=\dfrac{3}{2}a$ chạy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

c) $\oint\limits_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz$, trong đó C là đường cong kín $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, chạy theo hướng tăng của tham số t.

d) $\oint\limits_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$, trong đó C là đường cong $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$, $0<r<R$, $z<0$ chạy theo chiều sao cho miền nhỏ nhất được giới hạn bởi đường cong C nằm ở phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2=2Rx$ luôn ở về phía bên trái .

17. Áp dụng công thức Ostrogradski tính tích phân:

a) $I=\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt lập phương $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le a$.

b) $I = \iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

c) $I = \iint\limits_S (x - y + z)dydz + (y - z + x)dzdx + (z - x + y)dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

18. Tính tích phân $\iint\limits_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)ds$, trong đó S là phần mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin chỉ phương của pháp tuyến ngoài của mặt này.

19. Giả sử (Ω, U) là một trường vô hướng $(\Omega, \vec{V})$ là một trường véc tơ; Ω là tập trong R^3; U và $\vec{V}$ đều thuộc lớp $C^2(\Omega)$. Hãy chứng minh các công thức:

a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}U) = 0$

b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{V}) = 0$

c) $\mathrm{Grad}(U_1.U_2) = U_1\mathrm{grad}U_2 + U_2\mathrm{grad}U_1$.

d) $\mathrm{div}(U\vec{V}) = U\mathrm{div}\vec{V} + \mathrm{grad}U.\vec{V}$.

e) $\mathrm{rot}(U.\vec{V}) = U\mathrm{rot}\vec{V} + \mathrm{grad}U \wedge \vec{V}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phichtengon: Cơ sở giải tích toán học, tập 1, 2, Hà Nội, 1975.

[2] Rudin. Cơ sở giải tích toán học. Hà Nội, 1970.

[3] G.M.Phichtengon: Giáo trình phép tính vi phân và tích phân. Tập 1, 2, 3, M. 1962 (bằng tiếng Nga).

[4] M.Spivak. Giải tích trên đa tạp. Hà Nội, 1985.

[5] D.Cudriasev. Giáo trình giải tích toán học. Tập 1, 2, M.1980 (bằng tiếng Nga)

[6] Phạm Ngọc Thao và các tác giả. Toán cao cấp. NXB ĐHQG Hà Nội, 1996 .

[7] Nguyễn Duy Tiến. Bài giảng giải tích, tập I. NXB ĐHQG Hà Nội, 2001.

Chịu trách nhiệm xuất bản
Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA
Tổng biên tập: NGUYỄN THIỆN GIÁP

Người nhận xét: GS. TSKH NGUYỄN DUY TIẾN
GS. TS PHAN VĂN HẠP
PGS. TS NGUYỄN NGỌC QUYÊN

Biên tập sửa bài: NGỌC QUYÊN

Trình bày bìa: NGỌC ANH

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH. TẬP 3
Mã số: 01.64.ĐH2003
In 1000 cuốn, tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội
Số xuất bản: 9/27/CXB. Số trích ngang 103 KH/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2003