

Gợi ý. Giả sử ngược lại, tức là $\exists x_0 \in [a, b] \quad f(x_0) > 0$. Khi đó, do tính liên tục của f , tồn tại $\varepsilon > 0$ và khoảng $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ sao cho $f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$. Khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta f(x) dx + \int_\beta^b f(x) dx \geq 0 + \int_\alpha^\beta \varepsilon dx + 0 = \varepsilon (\beta - \alpha) > 0,$$

dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $f \equiv 0$ trên $[a, b]$. □

Nhận xét. Mặc dù kết quả này không được trình bày trong lý thuyết, nhưng được vận dụng (hầu như được phép!) trong nhiều bài tập khác.