TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG -HOÀNG QUỐC TOÀN

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH

TẬP 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN VÀ NHIỀU BIẾN

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH

Tập 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN VÀ NHIỀU BIẾN

(In lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Giáo trình giải tích này là một trong hai phần chủ yếu của môn học "Toán cao cấp cho chương trình A" được viết theo chương trình mới nhất của Đại học Quốc gia Hà Nội được thông qua năm 1999.

Giáo trình này trình bày hầu hết các vấn đề quan trọng của giải tích toán học cổ điển về phép tính vi phân và tích phân. Trên cơ sở những bài giảng được thực hiện trong mấy năm gần đây về môn học này, chúng tôi cố gắng biên soạn một giáo trình trong phạm vi 20 đơn vị học trình chứa hầu hết nội dung của giải tích toán học cổ điển, đồng thời thật sát với chương trình chi tiết đã được thông qua để thống nhất trong việc giảng dạy.

Một số phần quan trọng hoặc lý thú nhưng vượt ra ngoài phạm vi chương trình chúng tôi cũng đưa vào để bạn đọc tham khảo, những phần đó đều được đánh dấu (*) *ở đầu mục.*

Giáo trình này dùng để giảng dạy cho sinh viên thuộc nhóm ngành I, đồng thời có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên các nhóm ngành khác.

Giáo trình về giải tích toán học hiện đang có nhiều, kể cả trong và ngoài nước, nhưng trong điều kiện phát triển mạnh mẽ của khoa học nói chung và toán học nói riêng, chương trình giảng dạy cũng phải thay đổi theo hướng phát triển đó. Mặt khác, hiện nay một số phần của giải tích đã được đưa vào giảng dạy ở bậc phổ thông trung học nên cách trình bày trong giáo trình này có thể tổng quát hơn so với các giáo trình dành cho những người lần đầu tiên học môn học này, đồng thời để giúp sinh viên thuận lợi hơn trong việc tiếp xúc với toán học hiện đại, trong chương trình *và tiếp đó là trong giáo trình đã đưa vào một số cách trình bày mới như chuẩn trong không gian R^n để dẫn tới R^n là không gian mêtric, đạo hàm hàm nhiều biến để sau này mở rộng cho ánh xạ khả vi trên không gian Banach.*

Cách định nghĩa đường và mặt, cách xác định hướng và tích phân trên chúng là hình ảnh ban đầu của tích phân trên các đa tạp định hướng của toán học hiện đại.

Giáo trình giải tích gồm ba tập.

***Tập I**: Phép tính vi phân của hàm một và nhiều biến.*

***Tập II**: Phép tính tích phân hàm một biến. Chuỗi số, chuỗi và dãy hàm.*

***Tập III:** Tích phân phụ thuộc tham số. Phép tính tích phân hàm nhiều biến.*

Cuối mỗi chương đều có một số bài tập để luyện tập, chúng tôi không đưa vào mục hướng dẫn giải hoặc đáp số vì việc làm này đã được làm trong ba cuốn bài tập được xuất bản đồng thời.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng trong biên soạn nhưng chắc chắn không thể tránh khỏi các thiếu sót, chúng tôi thiết tha mong muốn nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi luôn nhận được sự động viên cổ vũ của Ban giám hiệu, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Cơ - Tin học trường Đại học Khoa học Tự nhiên và của nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội. Tập thể tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành.

Chúng tôi cũng rất biết ơn các Giáo sư trong hội đồng thẩm định đã đọc và góp nhiều ý kiến xác đáng.

Hà Nội, ngày 1 tháng 7 năm 2000

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương I

GIỚI THIỆU VỀ LÝ THUYẾT TẬP HỢP, ÁNH XẠ VÀ TẬP HỢP SỐ THỰC

§1. TẬP HỢP

1. Khái niệm tập hợp và bao hàm thức

Ta xem tập hợp là khái niệm nguyên thuỷ của toán học, không được định nghĩa chính xác và ta chỉ miêu tả, hình dung khái niệm này bằng những ví dụ cụ thể. Chẳng hạn ta có thể nói đến tập hợp các sinh viên trong một lớp học, tập hợp những người dân sống trong thành phố, tập hợp các số tự nhiên, tập hợp các nghiệm của một phương trình đại số v.v... Các đối tượng tạo nên tập hợp gọi là các phần tử cuả tập hợp đó. Để chỉ ra rằng x là phần tử của tập hợp A ta viết $x \in A$. Nếu x không là phần tử của A ta viết $x \bar{\in} A$ hay $x \notin A$. Để cho tiện ta đưa vào khái niệm tập rỗng, đó là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu là $\varnothing$. Ta có thể xác định một tập hợp theo các cách sau:

a) Liệt kê các phần tử của tập hợp đó. Chẳng hạn

$$A = \{x, y, x, t\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

b) Nêu lên đặc tính mà các phần tử của tập hợp đó và chỉ các phần tử của nó có. Chẳng hạn tập hợp

$$A = \{x : x^2 = 4\}$$

có hai phần tử là -2 và 2.

Tập hợp $\{x \in N : x^2 = -1\} = \varnothing$

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của tập hợp A cũng là phần tử của tập hợp B thì ta nói rằng A là tập hợp con của tập hợp B, hay tập hợp A chứa trong tập hợp B, hay tập hợp B chứa tập hợp A và ta viết $A \subset B$. Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, tức là nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B và ngược lại mọi phần tử của B cũng là phần tử của A thì ta nói rằng tập hợp A bằng tập hợp B và ta viết A = B.

2. Các phép toán về tập hợp

a) Phép hợp

Cho hai tập hợp A và B. Ta gọi tập hợp gồm những phần tử hoặc thuộc tập A hoặc thuộc tập B là hợp của hai tập hợp A và B và ký hiệu là $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid \text{hoặc } x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

Ví dụ: Cho $A = \{1, 2\}$; $B = \{x \in Z \mid x^2 = 16\}$ khi đó

$$A \cup B = \{1, 2, 4, -4\}$$

b) Phép giao

Cho hai tập hợp A và B. Ta gọi giao của hai tập đó ký hiệu $A \cap B$, là tập hợp những phần tử đồng thời thuộc cả tập hợp A và tập hợp B.

$$A \cap B = \{x \in A \text{ và } x \in B\}$$

Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói rằng A và B là các tập hợp rời nhau.

Tổng quát, nếu A_α ($\alpha \in I$, trong đó I là một tập hợp chỉ số nào đó) là các tập hợp cho trước thì hợp của các tập hợp đó kí hiệu là $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, là tập hợp các phần tử thuộc về ít nhất một tập hợp A_α với một α nào đó thuộc I

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in A_\alpha \text{ với } \alpha \text{ nào đó thuộc I}\}$$

Tương tự, giao của các tập hợp A_α ($\alpha \in I$) là tập hợp các phần tử thuộc về mọi A_α ($\alpha \in I$), kí hiệu là $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. Như vậy

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \mid x \in A_\alpha \text{ với mọi } \alpha \in I\}$$

c) Phép trừ

Hiệu của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp tất cả các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B, kí hiệu là A\B. Như vậy:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \text{ nhưng } x \overline{\in} B \,\}$$

Cho A là tập hợp con của một tập hợp X, khi đó hiệu X\A gọi là phần bù của tập hợp A (đối với X), kí hiệu là CA hay $C_X A$, hay A^C.

Dễ dàng kiểm tra rằng các phép toán về tập hợp nêu trên có các tính chất sau:

a) Tính giao hoán

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$$

b) Tính kết hợp

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

c) Tính phân phối

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap_{\alpha \in I} \left(A_\alpha \cup B\right); \quad \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha \in I} \left(A_\alpha \cap B\right)$$

Ta chứng minh công thức cuối cùng chẳng hạn. Ta có:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \cap B = \left\{x \mid x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \text{ và } x \in B\right\}$$

$$= \{x \mid x \in A_{\alpha_0} \text{ với } \alpha_0 \text{ nào đó} \in I \text{ và } x \in B\}$$

$$= \{x \mid x \in A_{\alpha_0} \cap B \text{ với } \alpha_0 \text{ nào đó} \in I\} = \bigcup_{\alpha \in I} \left(A_\alpha \cap B\right)$$

Đối với phép lấy phần bù ta có các công thức quan trọng sau đây gọi là công thức đối ngẫu De Morgan:

$$X \setminus \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I}\left(X \setminus A_\alpha\right).$$

$$X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\left(X \setminus A_\alpha\right).$$

Ta chứng minh công thức thứ hai. Ta có:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \left\{x \in X \mid x \overline{\in} \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right\} = \{x \in X \mid x \overline{\in} A_{\alpha_0} \text{ với } \alpha_0 \text{ nào đó} \in I\}$$

$$= \{x : x \in X \setminus A_{\alpha_0} \text{ với } \alpha_0 \text{ nào đó} \in I\} = \bigcup_{\alpha\in I}\left(X \setminus A_\alpha\right).$$

3. Một số ký hiệu và suy luận logic

a) Mệnh đề: Mệnh đề là một khái niệm cơ bản của logic không được định nghĩa, các câu phản ảnh một điều gì đó đúng hoặc đúng một phần, trái hoặc trái một phần với thực tế khách quan được gọi là một mệnh đề. Chúng ta chỉ xét loại mệnh đề có hai khả năng xảy ra: đúng hoặc sai với thực tế khách quan, ta gọi đó là mệnh đề toán học.

Để ký hiệu các mệnh đề toán học ta ký hiệu bằng các chữ cái p, q, r... gọi là biến mệnh đề.

b) Các phép toán logic

+ *Phép phủ định*: Phủ định của mệnh đề p là một mệnh đề ký hiệu là $\overline{p}$, nó đúng khi p sai, nó sai khi p đúng.

+ *Phép tuyển*:

Tuyển của hai mệnh đề p và q là một mệnh đề ký hiệu là p v q, nó đúng khi một trong p hoặc q đúng, nó sai khi cả p lẫn q đều sai.

+ *Phép hội:*

Hội của hai mệnh đề p, q là một mệnh đề được ký hiệu bằng $p \wedge q$, nó đúng khi cả p và q đều đúng, nó sai khi một trong p hoặc q sai.

Từ định nghĩa ta có thể suy ra $\overline{\overline{p}} = p$.

$$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}\,, \quad \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}\,.$$

+ *Phép kéo theo*:

Mệnh đề "p kéo theo q" ký hiệu là $p \Rightarrow q$ là một mệnh đề sai khi p đúng q sai và là mệnh đề đúng trong các trường hợp còn lại.

+ *Phép tương đương*: Cho hai mệnh đề p, q.

Nếu $p \Rightarrow q$ và $q \Rightarrow p$ thì ta nói p và q tương đương và ký hiệu $p \Leftrightarrow q$. Như vậy $p \Leftrightarrow q$ là một mệnh đề đúng khi cả p và q đều đúng hoặc cả hai đều sai.

c) Lượng từ phổ biến và tồn tại

α) Hàm mệnh đề: ta hãy xét câu "Số tự nhiên 2n + 1 chia hết cho 9" nó không phải là một mệnh đề toán học, nhưng khi thay n bằng một số tự nhiên cụ thể thì nó lại là một mệnh đề toán học. Ta gọi câu đó là một hàm mệnh đề xác định trên tập số tự nhiên và ký hiệu là S(n), khi n = 4, S(4) là mệnh đề đúng, khi n = 2, S(2) là mệnh đề sai.

Nếu ta gọi S(n) là hàm mệnh đề xác định trên tập X thì tập $E_S = \{x \in X \mid S(x) \text{ đúng}\}$ là miền đúng của hàm mệnh đề. Hai hàm mệnh đề có miền đúng trùng nhau được gọi là tương đương.

β) Lượng từ

Từ "với mọi" được ký hiệu là $\forall$ gọi là lượng từ phổ biến.

Từ "tồn tại" được ký hiệu $\exists$ gọi là lượng từ tồn tại.

Ví dụ mệnh đề "$\exists n \in N$ để 2n + 1 chia hết cho 9" là một mệnh đề đúng.

Mệnh đề "$\forall n \in N$ / 2n + 1 chia hết cho 9" là một mệnh đề sai.

γ) Các ký hiệu khác

$\bar{\exists}$ ($\nexists$) có nghĩa là không tồn tại.

$\bar{\forall}$ không phải với mọi.

$\exists!$ ($\exists$ E) tồn tại và duy nhất.

d) Quan hệ giữa lượng từ và phép phủ định

Ta có thể trực tiếp kiểm tra các liên hệ sau:

$$\overline{\{\forall\, x \in X \mid S(x) \text{ đúng}\}} = \{\exists\, x \in X \mid \overline{S(x)} \text{ đúng}\}$$

$$\overline{\{\exists x \in X \mid S(x) \text{ đúng}\}} = \{\forall\, x \in X \mid \overline{S(x)} \text{ đúng}\}.$$

§ 2. QUAN HỆ VÀ ÁNH XẠ

1. Tích Descartes của các tập hợp

Từ hai phần tử a, b đã cho ta có thể tạo nên một cặp phần tử có thứ tự, ký hiệu là (a, b), trong đó a là phần tử đứng trước, b là phần tử đứng sau. Nếu $a \neq b$ thì cặp (a, b) được xem là khác với cặp (b, a). Hai cặp (a, b) và (c, d) được xem là bằng nhau, ký hiệu $(a, b) = (c, d)$, nếu và chỉ nếu $a = c$; $b = d$.

Cho A và B là hai tập bất kỳ, ta gọi tích Descartes của A và B, ký hiệu là $A \times B$ là tất cả các cặp có thứ tự (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A; b \in B\}.$$

Tổng quát ta gọi tích Descartes của n tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ là tập hợp được ký hiệu và xác định theo hệ thức

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{j=1}^{n} A_j = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_j \in A_j,\ j = 1, 2, \dots, n\}$$

Nếu $A_j = A\ \forall j = 1, 2, \dots, n$ thì ta ký hiệu $A^n = A \times A \times \dots \times A$.

2. Quan hệ

Định nghĩa: Cho tập hợp X, một tập con R của X × X được gọi là một quan hệ hai ngôi trên X (gọi tắt là quan hệ)

Nếu (a, b) ∈ R thì ta nói a có quan hệ với b (theo quan hệ R) và ta viết aRb.

Các tính chất thường có trong một quan hệ.

a) Quan hệ R được gọi là có *tính phản xạ* nếu aRa ∀a ∈ X.

b) R được gọi là có *tính đối xứng* nếu aRb thì bRa có nghĩa là nếu (a, b) ∈ R thì (b, a) ∈ R.

c) R được gọi là có *tính bắc cầu* nếu aRb và bRc thì ta suy ra aRc.

d) R được gọi là có *tính phản xứng* nếu aRb và bRa thì ta suy ra a = b.

e) Quan hệ tương đương

Nếu R là một quan hệ có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu thì R được gọi là một *quan hệ tương đương*.

3. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa: Một quan hệ R trên X có các tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu được gọi là một quan hệ thứ tự (hay chính xác hơn: quan hệ thứ tự bộ phận) trên X. Khi đó nếu (a, b) ∈ R ta viết a ≤ b thay cho aRb.

Như vậy quan hệ thứ tự ≤ trên X được đặc trưng bởi các điều kiện sau

a) a ≤ a với mọi a ∈ X

b) Nếu a ≤ b và b ≤ a thì a = b

c) Nếu a ≤ b và b ≤ c thì a ≤ c

Chú ý rằng hai phần tử bất kỳ a, b ∈ X không nhất thiết có quan hệ với nhau theo quan hệ thứ tự ≤.

Tập $A \subset X$ gọi là tập hợp sắp thứ tự toàn phần nếu với bất kỳ $a, b \in A$ hoặc $a \le b$ hoặc $b \le a$.

Ví dụ. 1) Tập hợp Q các số hữu tỉ với quan hệ "$\le$" thông thường giữa các số là một tập hợp sắp thứ tự toàn phần.

2) Cho X là một tập hợp không rỗng. P(X) là tập hợp tất cả các tập hợp con của X: $P(X) = \{A \mid A \subset X\}$. Trên P(X) ta xác định quan hệ thứ tự như sau: Nếu $A, B \subset X$ thì $A \le B$ khi và chỉ khi $A \subset B$. Dễ dàng kiểm tra rằng quan hệ này đúng là một quan hệ thứ tự và nếu X có chứa ít nhất hai phần tử thì X không phải là tập có thứ tự toàn phần.

4. Cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập hợp

Cho X là một tập hợp có thứ tự (tức là trên X có xác định một quan hệ thứ tự $\le$) và $A \subset X$, $A \ne \varnothing$.

Định nghĩa: Một phần tử $x \in X$ được gọi là cận trên của tập hợp A nếu với mọi $a \in A$ ta đều có $a \le x$. Tập hợp A khi đó được gọi là tập hợp bị chặn trên.

Nếu x là một cận trên của A và với mọi cận trên x' của A ta đều có $x \le x'$ thì x được gọi là cận trên đúng của tập hợp A, kí hiệu là sup A.

Nếu $x = \sup A \in A$ thì x được gọi là phần tử lớn nhất của A, ký hiệu là max A.

Từ tính phản xứng của quan hệ thứ tự ta suy ra rằng sup A nếu tồn tại là duy nhất.

Tương tự ta có:

Định nghĩa: Một phần tử $y \in X$ được gọi là cận dưới của tập hợp A nếu với mọi $a \in A$ ta đều có $y \le a$. Tập hợp A khi đó được gọi là tập hợp bị chặn dưới.

Nếu y là một cận dưới của tập hợp A và với mọi cận dưới y' của A ta đều có y' ≤ y thì y được gọi là cận dưới đúng của A, ký hiệu là inf A.

Nếu y = inf A ∈ A thì y được gọi là phần tử nhỏ nhất của A, ký hiệu là min A.

Từ tính phản xứng của quan hệ thứ tự ta suy ra rằng inf A nếu tồn tại là duy nhất.

5. Ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh

Cho hai tập hợp X và Y. Nếu theo một quy tắc nào đó cứ với mỗi phần tử $x \in X$ có tương ứng một phần tử duy nhất $y \in Y$ thì ta nói rằng có một ánh xạ từ X vào Y.

Nếu gọi f là quy tắc tương ứng nói trên thì ta kí hiệu ánh xạ đó là $f: X \to Y$. Ta cũng nói rằng f là hàm xác định trên X với giá trị trong Y.

Phần tử y ứng với x được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f, kí hiệu là f(x).

Ví dụ: 1) Giả thử X là tập hợp bất kỳ và ánh xạ $I : X \to X$ xác định bởi $I(x) = x$ với mọi $x \in X$. I được gọi là ánh xạ đồng nhất trên X.

2) Giả thử N là tập hợp các số tự nhiên. Với mỗi $n \in N$ ta cho tương ứng với số $f(n) = 2n$, ta có một ánh xạ $f : N \to N$.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và tập hợp $A \subset X$. Tập hợp

$$f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}$$

được gọi là ảnh của tập hợp A qua ánh xạ f. Tập hợp f(X) được gọi là miền giá trị của ánh xạ f, kí hiệu là Imf. Nói chung Imf chỉ là một tập hợp con của Y. Nếu Imf = Y tức là nếu mỗi phần tử $y \in Y$ là ảnh của ít nhất một phần tử $x \in X$ thì ánh xạ f được gọi là một toàn ánh.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và tập $B \subset Y$. Tập hợp

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

được gọi là nghịch ảnh của tập hợp B bởi ánh xạ f.

Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu từ điều kiện $f(x) = f(x')$ ta suy ra $x = x'$, nói một cách khác bất kỳ hai phần tử khác nhau trong X đều có hai ảnh khác nhau.

Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, tức là mỗi phần tử $y \in Y$ là ảnh của một và chỉ một phần tử $x \in X$. Ánh xạ cho tương ứng phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ thoả mãn $f(x) = y$ được gọi là ánh xạ ngược của f, kí hiệu là f^{-1}. Như vậy:

$$f^{-1}: Y \to X;\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

f^{-1} cũng là một song ánh (giữa Y và X).

Ví dụ 1) Ánh xạ đồng nhất $I : X \to X$ là một song ánh

Ví dụ 2) Ánh xạ $f : N \to N$ xác định bởi $f(n) = 2n$ là một đơn ánh nhưng không là toàn ánh.

Ví dụ 3) Kí hiệu Z là tập hợp các số nguyên. Cho ánh xạ $f: Z \to Z$ xác định bởi $f(n) = n^2$ với mọi $n \in Z$. Ánh xạ f không là đơn ánh, cũng không là toàn ánh.

Cho ba tập hợp X, Y và Z và các ánh xạ $f : X \to Y$; $g : Y \to Z$. Xét ánh xạ $h : X \to Z$ xác định bởi $h(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in X$.

h được gọi là ánh xạ hợp hay ánh xạ tích của f và g, kí hiệu là $h = g \circ f$. Như vậy

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X.$$

Sau đây là một số tính chất đơn giản của ánh xạ hợp.

1) Nếu $f : X \to Y$ là một song ánh, $f^{-1} : Y \to X$ là ánh xạ ngược của f, thì ánh xạ hợp $h = f^{-1} \circ f$ là ánh xạ đồng nhất trên X. Thật vậy ta có:

$$h(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X$$

Tương tự $f \circ f^{-1}$ là ánh xạ đồng nhất trên Y.

2) Cho các ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$. Khi đó

a) Nếu f và g là đơn ánh thì g o f cũng là đơn ánh.

b) Nếu f và g là toàn ánh thì g o f cũng là toàn ánh.

c) Nếu f và g là song ánh thì g o f cũng là song ánh.

Thật vậy, giả thử f, g là đơn ánh và

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$$

$$\text{hay} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

Vì g là đơn ánh, từ đó ta suy ra $f(x) = f(x')$

Vì f là đơn ánh từ đẳng thức cuối cùng ta suy ra $x = x'$. Vậy g o f là đơn ánh.

Nếu f và g là toàn ánh thì $f(X) = Y$, $g(Y) = Z$, do đó $(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$. Vậy g o f là toàn ánh.

Mệnh đề c) suy từ các mệnh đề a) và b).

d) Nếu g o f là toàn ánh thì g là toàn ánh.

Thật vậy, ta có $f(X) \subset Y$, từ đó do (g o f) là toàn ánh ta có $Z = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z$.

Vì vậy $g(Y) = Z$, tức là g là toàn ánh.

e) Nếu g o f là đơn ánh thì f là đơn ánh

Thật vậy giả thử $f(x) = f(x')$. Khi đó ta có $g(f(x)) = g(f(x'))$ hay $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Từ đó do g o f là đơn ánh ta suy ra $x = x'$. Vậy f là đơn ánh.

§3. SỐ THỰC, TRƯỜNG SỐ THỰC

1. Trường số hữu tỷ

Ta xét tập các số hữu tỷ $Q = \left\{q = \dfrac{m}{n} \mid m \in Z,\ n \in N^*\right\}$. Với các phép toán cộng và nhân đã biết nó lập thành một trường ta gọi là trường số hữu tỷ Q.

Trường Q có các tính chất sau đây:

a) Q là một trường sắp thứ tự toàn phần với quan hệ thứ tự tự nhiên đã biết.

b) Trường Q có tính trù mật theo nghĩa giữa hai số q và q' thuộc Q và $q < q'$ tồn tại một số hữu tỷ r sao cho $q < r < q'$ (có thể lấy $r = \dfrac{1}{2}(q + q')$) và từ đây ta suy ra rằng giữa hai số hữu tỷ khác nhau q và q' ($q < q'$) luôn luôn có vô số số hữu tỷ, chẳng hạn $r_1 = \dfrac{1}{2}(q + q')$; $r_2 = \dfrac{1}{2}(q + r_1)$ ... , $r_n = \dfrac{1}{2}(q + r_{n-1})$...

c) Trường Q là một trường không đầy theo nghĩa không phải mọi tập khác rỗng bị chặn trên bao giờ cũng có cận trên đúng.

Ta sẽ chứng minh tính chất này.

Trước hết ta chứng minh rằng không có số hữu tỷ nào bình phương bằng 2. Giả sử ngược lại có số hữu tỷ $\dfrac{m}{n}$ mà $\dfrac{m^2}{n^2} = 2$, ta xem $\dfrac{m}{n}$ là tối giản, khi đó $m^2 = 2n^2$, m phải là một số chẵn, $m = 2k$, $k \in Z$, do đó $n^2 = 2k^2$, n lại là một số chẵn trái với giả thiết $\dfrac{m}{n}$ đã tối giản.

Xét tập $A = \{q \in Q \mid q < 0$ hoặc $q \geq 0$ thì $q^2 < 2\}$ tập $A \neq \varnothing$ và bị chặn trên, giả sử $r \in Q$. Theo trên $r^2 \neq 2$. Rõ ràng $r < 0$ không là cận trên của A.

Xét trường hợp $r \geq 0$, $r^2 < 2$.

Từ $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 + 2\frac{r}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2r+1}{n} + r^2$, nếu ta chọn $n \in N$ và $n > \frac{2r+1}{2-r^2}$ thì $\left(r + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, có nghĩa là $r + \frac{1}{n} \in A$. Vì thế r không phải là cận trên của A.

Xét trường hợp $r > 0$ và $r^2 > 2$. Với $n \geq 1$ ta có :

$\left(r - \frac{1}{n}\right)^2 = r^2 - \frac{2r}{n} + \frac{1}{n^2} > r^2 - \frac{2r}{n}$. Nếu ta chọn $n \in N$ và $n > \frac{2r}{r^2 - 2}$ thì $\left(r - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$. Do đó $r - \frac{1}{n}$ là cận trên của A.

Vì thế r không thể là cận trên đúng của A. Vậy A là một tập bị chặn trên nhưng không có cận trên đúng.

2. Lát cắt trên trường số hữu tỷ

Có nhiều cách khác nhau để xây dựng các số vô tỷ và các số thực. Một trong những cách đó dựa trên khái niệm lát cắt dưới đây do R. Dedekind đưa ra.

Định nghĩa: Phép phân chia tập số hữu tỷ Q thành hai tập A và B thoả mãn điều kiện:

1) $A \neq \varnothing$; $B \neq \varnothing$; $A \cap B = \varnothing$; $A \cup B = Q$

2) $a < b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

được gọi là một lát cắt trên tập số hữu tỷ và ký hiệu là (A, B). Tập A gọi là lớp dưới, tập B gọi là lớp trên.

Từ định nghĩa ta suy ra:

Nếu $a \in A$ và $c < a$ ta suy ra $c \in A$

Nếu $b \in B$ và $d > b$ ta suy ra $d \in B$

Ví dụ 1: Giả sử r là một số hữu tỷ, ta đặt

$$A_r = \{q \in Q \mid q \leq r\}$$

$$B_r = \{q \in Q \mid q > r\}$$

Có thể kiểm tra (A_r, B_r) là một lát cắt, r là số lớn nhất của A_r, còn B_r không có số bé nhất do tính trù mật của Q.

Ví dụ 2: Với r là một số hữu tỷ, ta đặt

$$A'_r = \{q \in Q \mid q < r\};\ B'_r = \{q \in Q \mid q \geq r\}$$

Khi đó (A'_r, B'_r) là một lát cắt, A'_r không có số lớn nhất và r là số nhỏ nhất của B'_r.

Ví dụ 3: Gọi

$$A_2 = \{q \in Q \mid q < 0 \text{ hoặc } q \geq 0 \text{ và } q^2 < 2\}$$

$$B_2 = Q \setminus A_2.$$

Khi đó (A_2, B_2) là một lát cắt, lớp dưới không có số lớn nhất, lớp trên không có số bé nhất.

Việc chứng minh được làm hoàn toàn tương tự như chứng minh tính không đầy của tập số hữu tỷ.

Chú ý: Nếu (A, B) là một lát cắt trên Q thì không thể xảy ra A có số lớn nhất, B có số nhỏ nhất vì nếu $a \in A$ là số lớn nhất, $b \in B$ là số nhỏ nhất thì $a < b$ do đó tồn tại $c \in Q$, $a < c < b$, trái với giả thiết $A \cup B = Q$.

3. Định nghĩa số thực

Ta hãy xét tập các lát cắt trên tập số hữu tỷ. Theo phần trình bày ở trên, mỗi lát cắt có thể rơi vào một trong 3 trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Lớp dưới có số lớn nhất là số hữu tỷ r, lớp trên không có số bé nhất.

Trường hợp 2: Lớp trên có số bé nhất là số hữu tỷ r, lớp dưới không có số lớn nhất.

Trường hợp 3: Lớp trên không có số bé nhất là số hữu tỷ, lớp dưới không có số lớn nhất là số hữu tỷ.

Nếu trường hợp 1 hoặc 2 xảy ra thì ta có thể hiểu rằng ta cắt tập hữu tỷ tại đúng số hữu tỷ r, chỉ khác nhau ở điểm là cho nó thuộc về lớp trên hoặc thuộc về lớp dưới. Ta nói rằng lát cắt (A, B) xác định số hữu tỷ r. Để đảm bảo tính duy nhất ta quy ước khi nói về lát cắt xác định số hữu tỷ r, số r luôn luôn thuộc về lớp trên.

$$A_r = \{q \in Q \mid q < r\} \qquad B_r = \{q \in Q \quad q \geq r\}$$

Trường hợp thứ 3 xảy ra ta nói lát cắt (A, B) xác định một số vô tỷ.

Ta ký hiệu tập hợp các số vô tỷ là I và gọi tập $R = Q \cup I$ là tập hợp số thực.

Ta xét tập tất cả các lát cắt trên tập số hữu tỷ Q, loại bỏ đi các lát cắt mà lớp dưới có phần tử lớn nhất thì ta có một song ánh giữa tập số thực và tập hợp này. Ta có thể đồng nhất số thực x với lát cắt (A, B) xác định nó, ta viết x = (A, B)

4. Quan hệ thứ tự trong tập số thực

a) Định nghĩa: Cho hai số thực $x = (A_1, B_1)$; $y = (A_2, B_2)$ nếu $A_1 = A_2$ (khi đó ta cũng có $B_1 = B_2$) thì ta nói hai số thực đó bằng nhau và ký hiệu x = y.

Nếu $A_1 \subset A_2$ (tương đương với $B_2 \subset B_1$) thì ta nói số thực x nhỏ hơn hoặc bằng số thực y ký hiệu $x \leq y$ (hoặc còn nói số thực y lớn hơn hoặc bằng số thực x).

Nếu $A_1 \subset A_2$ và $A_1 \neq A_2$ thì ta nói x nhỏ hơn y (x < y)

Theo định nghĩa lát cắt với hai số thực $x = (A_1, B_1)$; $y = (A_2, B_2)$ chỉ có ba khả năng sau đây xẩy ra:

$$A_1 \subset A_2 \quad ; \quad A_1 = A_2 \quad ; \quad A_1 \supset A_2,$$

như vậy hai số thực bao giờ cũng so sánh được. Từ tính phản xạ, phản xứng và bắc cầu của quan hệ "bao hàm" trong họ các tập con bao nhau của tập số hữu tỷ Q ta suy ra quan hệ lớn bé mà ta vừa định nghĩa trên tập số thực là một quan hệ thứ tự. Tập R là một tập được sắp toàn phần.

b) Một vài tính chất cần chú ý

Tính trù mật của tập số hữu tỷ trong tập số thực

Định lý 1.I: Cho x, y là hai số thực bất kỳ $x < y$ bao giờ cũng tồn tại một số hữu tỷ r sao cho $x < r < y$.

Chứng minh: Giả sử $x = (A_1, B_1)$, $y = (A_2, B_2)$

Theo giả thiết $A_1 \subset A_2$ và $A_1 \neq A_2$. Khi đó tồn tại $r \in Q$; $r \in A_2$ nhưng $r \notin A_1$, vì A_2 không có số lớn nhất nên tồn tại $r' \in A_2$ và $r < r'$ $(r' \in Q)$ lấy $r'' = \frac{1}{2}(r + r') \in Q$, bây giờ ta có thể kiểm tra được rằng $A_1 \subset A_{r''} \subset A_2$; $A_1 \neq A_{r''} \neq A_2$.

Bằng cách viết $r'' = (A_{r''}, B_{r''})$ với $B_{r''} = Q \setminus A_{r''}$ ta thấy

$$x < r'' < y \quad r'' \in Q$$

Hệ quả 2.I. Giữa hai số thực khác nhau bất kỳ có vô số số hữu tỷ.

5. Tính đầy đủ của tập số thực

Bây giờ ta xây dựng khái niệm lát cắt trên tập số thực tương tự như lát cắt trên tập số hữu tỷ để thấy sự khác nhau về tính đầy của hai tập số này.

Định nghĩa: Phép phân chia tập số thực R thành hai tập A và B thoả mãn điều kiện:

1) $A \neq \varnothing$; $B \neq \varnothing$; $A \cap B = \varnothing$; $A \cup B = R$

2) $\forall a \in A$; $\forall b \in B$ ta đều có $a < b$

được gọi là một lát cắt trên tập số thực.

Ta ký hiệu lát cắt đó bằng (A, B)

Định lý sau đây đóng vai trò cơ bản trong lý thuyết số thực

Định lý 3.1 (Dedekind)

Với mọi lát cắt (A, B) trên R luôn luôn tồn tại một số $x \in R$ sao cho chỉ một trong hai khả năng sau đây xảy ra

1) x là số lớn nhất trong lớp dưới A

2) x là số nhỏ nhất trong lớp trên B

Khác với các lát cắt trên tập số hữu tỷ Q trường hợp thứ ba không xảy ra - Tính chất này được gọi là tính đầy đủ hoặc tính liên tục của tập số thực.

Chứng minh: Đặt $A' = A \cap Q$; $B' = B \cap Q$, có thể kiểm tra được rằng (A', B') là một lát cắt trên tập Q. Gọi $x = (A', B')$, $x \in R = A \cup B$ và $A \cap B = \varnothing$ nên x thuộc một trong hai tập này.

Giả sử $x \in A$, nếu x không phải là số lớn nhất của lớp A thì tồn tại $y \in A$ sao cho $x < y$, từ đó tồn tại một số $r \in Q$ sao cho $x < r < y$, vậy $r \in A$ do đó $r \in A'$. Như vậy số r thuộc lớp dưới A' của $x = (A', B')$ lại lớn hơn x, điều này mâu thuẫn với định nghĩa lát cắt.

Việc chứng minh nếu $x \in B$ thì x là số nhỏ nhất của B được làm tương tự.

Tiếp theo nếu x là số lớn nhất trong A và y là số nhỏ nhất trong B mà $x < y$ thì tồn tại số $r \in Q$ để $x < r < y$ trái với giả thiết $A \cup B = R$.

Định lý chứng minh xong.

Định lý 4.I. Mọi tập số thực không rỗng bị chặn trên đều có duy nhất một cận trên đúng.

Mọi tập số thực không rỗng bị chặn dưới đều có duy nhất một cận dưới đúng.

Chứng minh: Giả sử $M \subset R$; $M \neq \varnothing$ và bị chặn trên. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Trong M có số lớn nhất m_0 thì m_0 chính là cận trên đúng của M. Từ tính phản xứng của quan hệ thứ tự ta suy ra cận trên đúng đó duy nhất.

Trường hợp 2: Tập hợp M không có số lớn nhất. Gọi $B = \{x \in R \mid x$ là cận trên của $M\}$, $A = R \backslash B$

$A \supset M$ ta suy ra $A \neq \varnothing$, M bị chặn trên nên $B \neq \varnothing$ và $\forall a \in A$; $a < b$ $\forall b \in B$. Vì vậy (A, B) là một nhát cắt trong R. Theo định lý Dedekind tồn tại một số thực q sao cho hoặc q là số lớn nhất của A hoặc q là số nhỏ nhất của B. Vì $\forall x \in A$ ta có $x \leq q$ và $M \subset A$ nên $q \in B$ và q là số nhỏ nhất trong các cận trên nên $q = \sup M$. Từ tính phản xứng của quan hệ thứ tự ta suy ra số q đó là duy nhất.

Như đã nói ở trường số hữu tỷ, trường Q không có tính chất này vì nó là trường không đầy.

Việc chứng minh mệnh đề thứ hai của định lý được làm tương tự.

Tính chất đơn giản của cận trên đúng, cận dưới đúng

Định lý 5.I. Nếu M là một tập số thực không rỗng bị chặn trên và M_1 là một tập con của M thì $\sup M_1 \leq \sup M$

Chứng minh:

Giả sử $q = \sup M$ khi đó $\forall m \in M$; $m \leq q$ từ đó suy ra $\forall m \in M_1$; $m_1 \leq q$. Ta có $\sup M_1 \leq \sup M$.

Định lý 6.1. Nếu M là tập số thực không rỗng bị chặn dưới, M_1 là một tập con của M thì $\inf M \le \inf M_1$.

Việc chứng minh được làm tương tự.

Chú ý: Từ định nghĩa của cận trên đúng,cận dưới đúng, ta có thể thấy chúng hoàn toàn được đặc trưng bởi các điều kiện:

$$q = \sup M \Leftrightarrow \begin{cases} q \ge m & \forall m \in M \\ \forall q' < q & \exists m' \in M : q' < m' \le q \end{cases}$$

$$p = \inf M \Leftrightarrow \begin{cases} p \le m & \forall m \in M \\ \forall p' > p & \exists m' \in M \quad p \le m' < p' \end{cases}$$

6. Các phép toán trên tập số thực

Trước khi đi vào xây dựng các phép toán trên tập số thực ta chứng minh các bổ đề sau đây mà nó được sử dụng ở phần tiếp theo.

Bổ đề 1: Với mỗi số thực α và với mỗi số thực $\varepsilon > 0$ cho trước luôn luôn tồn tại hai số hữu tỷ a và b sao cho $a < \alpha < b$ và $b - a < \varepsilon$.

Chứng minh:

Nếu $\varepsilon > 0$ là một số vô tỷ, thì tồn tại $\varepsilon' \in Q$ sao cho $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ nên ta có thể xem số ε nói trong bổ đề là số hữu tỷ.

Xét trường hợp α là số hữu tỷ ta đặt $a = \alpha - \frac{1}{n}$ và $b = a + \frac{1}{n}$ $n \in N$ nếu n đủ lớn bổ đề sẽ được thoả mãn. Khi $\alpha = (A, B)$ là số vô tỷ, ta xây dựng dãy số hữu tỷ sau đây:

Lấy $a_0 \in A$ $\qquad a_1 = a_0 + \frac{\varepsilon}{2}, \cdots, a_n = a_0 + n\frac{\varepsilon}{2}$ (1)

Lấy $b_0 \in B$, nếu ta chọn $n > \frac{2(b_0 - a_0)}{\varepsilon}$ thì $a_n > b_0$, do đó $a_n \in B$

Giả sử $a_k, k \ge 1$ là số đầu tiên trong các số của dãy (1) thuộc B, khi đó $a_{k-1} \in A$; $a_k \in B$ và $a_{k-1} < \alpha < a_k$, hơn nữa

$$0 < a_k - a_{k-1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Bổ đề 2: Giả sử α và β là hai số thực, nếu với mọi số thực $\varepsilon > 0$ tồn tại các số hữu tỷ s và s' sao cho $s \le \alpha \le s'$; $s \le \beta \le s'$ và $s' - s < \varepsilon$ thì $\alpha = \beta$.

Chứng minh:

Giả sử ngược lại $\alpha \neq \beta$, chẳng hạn $\alpha < \beta$. Theo tính trù mật của Q trong R tồn tại hai số hữu tỷ r, r' sao cho $\alpha < r < r' < \beta$, khi đó với bất kỳ hai số hữu tỷ s và s' sao cho $s \le \alpha \le s'$; $s \le \beta \le s'$ thì $s < r < r' < s'$ từ đó $s' - s > r' - r > 0$. Nếu lấy $\varepsilon = r' - r$ thì không thể tồn tại các số s, s' thoả mãn định lý, trái với giả thiết. Vậy $\alpha = \beta$.

A. Phép cộng.

Định nghĩa: Cho hai số thực $x =(A_x, B_x)$; $y = (A_y, B_y)$

Đặt $B = \{b_x + b_y \mid b_x \in B_x; b_y \in B_y\}$. Khi đó $B \subset Q \subset R$ và B là tập bị chặn dưới nên B có cận dưới đúng. Số $\alpha = \inf B$ được lấy làm tổng của các số thực x và y. Ký hiệu $x + y = \alpha = \inf B$.

Nếu r, r' là hai số hữu tỷ thì

$$B_r = \{q \in Q \mid q \ge r\} \qquad B_{r'} = \{q \in Q \mid q \ge r\}$$

và $$B = \{p + q \mid p \in B_r, q \in B_{r'}\} = \{q \in Q \mid q \ge r + r'\}$$

$$\inf B = r + r'$$

Vậy phép cộng các số thực vừa định nghĩa trùng với phép cộng các số đã biết khi chúng là các số hữu tỷ.

Bây giờ ta chứng minh phép cộng vừa định nghĩa có đầy đủ các tính chất như phép cộng các số hữu tỷ.

a) Tính giao hoán: $x + y = y + x$

Thực vậy $x + y = \inf \{b_x + b_y \mid b_x \in B_n, b_y \in B_y\}$

$$= \inf \{b_y + b_x \mid b_y \in B_y, b_x \in B_x\} = y + x$$

b) Tính kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z)$

Chứng minh: Giả sử $x = (A_x, B_x)$, $y = (A_y, B_y)$, $z = (A_z, B_z)$

$$x + y = (A_{x+y}, B_{x+y}) \qquad y + z = (A_{y+z}, B_{y+z})$$

Theo định nghĩa phép cộng $x + y \le b_x + b_y$ với $b_x \in B_x$; $b_y \in B_y$. Vì $a_x + a_y < b_x + b_y$ nên ta có $a_x + a_y \le x + y$ $\forall a_x \in A_x$ $\forall a_y \in A_y$. Nhưng theo quy ước của ta A_x và A_y đều không có số lớn nhất nên dấu bằng không thể xảy ra. Tương tự ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a_y + a_z < y + z \le b_y + b_z \\ a_{x+y} + a_z < (x+y) + z \le b_{x+y} + b_z \\ a_x + a_{y+z} < x + (y+z) \le b_x + b_{y+z} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall a_x \in A_x\ \forall a_y \in A_y\ \forall a_z \in A_z \\ \forall b_x \in B_x\ \forall b_y \in B_y\ \forall b_z \in B_z \\ \forall a_{x+y} \in A_{x+y}\ \forall a_{y+z} \in A_{y+z} \\ \forall b_{x+y} \in B_{x+y}\ \forall b_{y+z} \in B_{y+z} \end{array}$$

Vì $x + y \le b_x + b_y$ nên $b_x + b_y \in B_{x+y}$. Tương tự $b_y + b_z \in B_{y+z}$; $a_x + a_y \in A_{x+y}$; $a_y + a_z \in A_{y+z}$.

Từ đó suy ra:

$$a_x + a_y + a_z < (x + y) + z \le b_x + b_y + b_z.$$

$$a_x + a_y + a_z < x + (y + z) \le b_x + b_y + b_z.$$

Theo bổ đề 1 với bất kỳ số $\varepsilon > 0$ tồn tại $a_x \in A_x$; $a_y \in A_y$; $a_z \in A_z$; $b_x \in B_x$; $b_y \in B_y$; $b_z \in B_z$ sao cho

$$b_x - a_x < \frac{\varepsilon}{3};\ b_y - a_y < \frac{\varepsilon}{3};\ b_z - a_z < \frac{\varepsilon}{3}$$

Khi đó $(b_x + b_y + b_z) - (a_x + a_y + a_z) < \varepsilon$. Theo bổ đề 2 ta suy ra $(x + y) + z = x + (y + z)$.

c) $x + 0 = 0$

Chứng minh: Giả sử $x = (A_x, B_x)$; $0 = (A_0, B_0)$ (ở đây

$A_0 = \{q \in Q \mid q < 0\}$; $B_0 = \{q \in Q \mid q \ge 0\}$). Theo định nghĩa $x_0 + 0 = \inf\{b_x + b_0 \mid b_x \in A_x, b_0 \in B_0\}$. Như chứng minh ở trên, ta có $a_x + a_0 < x + 0 \le b_x + b_0$ với mọi $a_x \in A_x$, $a_0 \in A_0$, $b_x \in B_x$, $b_0 \in B_0$. Hiển nhiên $a_x + a_0 < a_x < x \le b_x \le b_x + b_0$. Với mọi số $\varepsilon > 0$ theo bổ để 1 tồn tại $a_x \in A_x$, $a_0 \in A_0$, $b_x \in B_x$, $b_0 \in b_0$ sao cho $b_x - a_x < \frac{\varepsilon}{2}$;

$b_0 - a_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ khi đó $(b_x + b_0) - (a_x + a_0) < \varepsilon$ ta suy ra $x + 0 = x$.

d) Ta chứng minh với mỗi số thực x, tồn tại một số thực ký hiệu là (-x) sao cho $x + (-x) = 0$

Ta chỉ cần chứng minh khi x là số vô tỷ. Giả sử $x = (A, B)$. Đặt $A' = \{-b \mid b \in B\}$, $B' = \{-a \mid a \in A\}$, rõ ràng (A', B') là một lát cắt trong Q. Phần tử xác định bởi lát cắt (A', B') ta ký hiệu là $(-x) = (A', B')$. Ta chứng minh $x + (-x) = 0$.

Theo định nghĩa ta có $x + (-x) = \inf\{b - a \mid a \in A, b \in B\}$

Như đã chứng minh ở trên $a - b < x + (-x) \leq b - a$ với mọi $a \in A$, $b \in B$, ta cũng có $a - b < 0 < b - a$ với mọi $a \in A$, $b \in B$.

Theo bổ đề 1 với mỗi số hữu tỷ $\varepsilon > 0$ tồn tại $a \in A$, $b \in B$ sao cho $b - a < \frac{\varepsilon}{2}$, khi đó $(b - a) - (a - b) = 2(b - a) < \varepsilon$, từ đó theo bổ đề 2 ta có $x + (-x) = 0$

Số (-x) được gọi là số đối của x.

Số $x + (-y)$ được gọi là hiệu của x với y, ký hiệu là $x - y$.

Như vậy $x - y = x + (-y)$

e) Ta chứng minh tính chất: Nếu $x < y$ thì $x + z < y + z$ với x, y, z là những số thực bất kỳ.

Chứng minh: Do tính trù mật của tập các số hữu tỷ trong tập hợp số thực nên tồn tại các số hữu tỷ r_1, r_2 sao cho $x < r_1 < r_2 < y$. Theo bổ đề 1 tồn tại hai số hữu tỷ a và b sao cho $a < z < b$ và $b - a < r_2 - r_1$.

Từ đó ta có $r_1 + b < r_2 + a$. Theo định nghĩa của phép cộng $x + z < r_1 + b$; $r_2 + a < y + z$, từ đó ta có $x + z < y + z$.

Từ bất đẳng thức vừa chứng minh ta suy ra rằng nếu $x < y$, $z < t$ thì ta có

$$x + z < y + z < y + t$$

tức là ta có thể cộng các bất đẳng thức cùng chiều. Như vậy phép cộng các số thực có tất cả các tính chất cơ bản của phép cộng các số hữu tỷ và do đó cũng có các tính chất khác được suy ra từ các tính chất này, chẳng hạn ta hãy chứng minh tính chất sau:

f) Cho hai số thực x và y. Khi đó tồn tại duy nhất một số thực z sao cho $x + z = y$.

Thật vậy lấy $z = y + (-x)$. Do các tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta có:

$$\begin{aligned} x + z &= x + [y + (-x)] = x + [(-x) + y] \\ &= [x + (-x)] + y = 0 + y = y + 0 = y \end{aligned}$$

Số thực z là duy nhất vì với $z \neq z'$, chẳng hạn $z' < z$ ta có $x + z' < x + z = y$.

Cuối cùng ta có:

Định nghĩa: Ta gọi là trị tuyệt đối hay mô đun của số thực x số $|x|$ xác định bởi:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

B. Phép nhân: Bây giờ ta định nghĩa tích của hai số thực x và y. Trước hết ta xét trường hợp $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Đặt

$$B = \{b_x b_y \mid b_x, b_y \in Q, b_x \geq x, b_y \geq y\}$$

B là một tập hợp bị chặn dưới và vì thế tồn tại inf B. Đặt $\alpha = \inf B$, ta gọi α là tích của các số thực x và y, kí hiệu là x.y hay xy.

Chú ý rằng nếu x và y là các số hữu tỷ thì xy là số nhỏ nhất trong B: $xy = \inf B$. Như vậy định nghĩa tích nêu trên cũng phù hợp với định nghĩa tích của hai số hữu tỷ.

Để mở rộng định nghĩa tích cho các số thực bất kỳ, trước hết ta chú ý rằng nếu $x < 0$ thì

$x + (-x) < 0 + (-x) = -x$ hay $0 < -x$;

Nếu $x < 0$, $y \geq 0$ ta đặt $xy = -((-x)y)$;

Nếu $x \geq 0$, $y < 0$ ta đặt $xy = -(x(-y))$;

Nếu $x < 0$, $y < 0$ ta đặt $xy = (-x)(-y)$.

Phép nhân các số thực có các tính chất cơ bản sau:

a) $x.y = y.x$ (tính giao hoán)

b) $(x.y)z = x(y.z)$ (tính kết hợp)

c) $x.1 = x$; $x.0 = 0$

Chứng minh các tính chất này dành cho độc giả coi như bài tập.

Để định nghĩa phép chia ta đưa vào khái niệm số nghịch đảo sau đây:

Định nghĩa: Cho số thực $x > 0$. Đặt

$$B = \left\{\frac{1}{r} \mid r \in Q,\ 0 < r \leq x\right\}$$

B là tập hợp bị chặn dưới. Cận dưới đúng của tập hợp B được gọi là số nghịch đảo của x, ký hiệu là $\frac{1}{x}$: $\frac{1}{x} = \inf B$

Khi x là số hữu tỷ định nghĩa này rõ ràng phù hợp với định nghĩa số nghịch đảo của số hữu tỷ.

Nếu $x < 0$ ta đặt $\frac{1}{x} = -\frac{1}{|x|}$

Từ định nghĩa trên đây của số nghịch đảo của số thực $x \neq 0$ và định nghĩa phép nhân của các số thực ta có thể chứng minh rằng với mọi x ta có $x.\frac{1}{x} = 1$.

Bây giờ cho 2 số thực x và y, trong đó $y \neq 0$. Ta gọi là thương của phép chia x cho y là số $x.\frac{1}{y}$, kí hiệu là $\frac{x}{y}$.

Cuối cùng từ định nghĩa của phép cộng và phép nhân các số thực ta có thể suy ra luật phân phối cuả phép cộng đối với phép nhân sau đây:

$$(x + y).z = x.z + y.z$$

Chứng minh tính chất này dành cho độc giả coi như một bài tập.

Như vậy từ các tính chất nói trên của các phép toán cộng và nhân các số thực ta thấy rằng tập hợp R các số thực với quan hệ thứ tự ≤ và với hai phép cộng và nhân lập thành một trường sắp thứ tự toàn phần gọi là trường số thực.

Biểu diễn hình học các số thực.

Cho đường thẳng x'x trên đó ta chọn điểm O cố định lấy làm điểm gốc và cho vectơ đơn vị $\vec{e}$ định hướng trục. Với mỗi điểm M trên đường thẳng x'x ta có $\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}$. Số x được gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{OM}$, ký hiệu là $\overline{OM}$. Như vậy mỗi điểm M trên đường thẳng ứng với một số thực x. Ngược lại mỗi số thực x ứng với một điểm M trên đường thẳng x'x, đó là điểm cuối của vectơ $\overrightarrow{OM} = x.\vec{e}$. Như vậy ta có một song ánh giữa tập số thực và đường thẳng x'x,ta gọi đường thẳng này là đường thẳng thực.

Cho a, b là hai số thực a < b. Tập hợp $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$được gọi là đoạn hay khoảng đóng với hai đầu mút a, b, kí hiệu là [a, b].

Tập hợp $\{x \in R \mid a < x < b\}$ được gọi là khoảng mở hay khoảng với hai đầu mút a, b kí hiệu là (a, b).

Tập hợp $[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$ được gọi là khoảng đóng bên trái, còn tập hợp $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$ được gọi là khoảng đóng bên phải.

Các tập hợp $(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$, $[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$ được gọi là khoảng đóng vô hạn, còn các tập hợp $(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$ và $(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$ được gọi là khoảng mở vô hạn. Tập số thực R ta còn kí hiệu là $(-\infty, +\infty)$.

Để cho tiện ta còn thêm vào tập hợp R các số thực hai phần tử mới gọi là các số vô hạn, kí hiệu là $-\infty$, $+\infty$. Tập hợp $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ được gọi là tập hợp số thực mở rộng. Ta quy ước thứ tự và các phép tính trong $\overline{R}$ như sau:

Với mọi $x \in R$ ta có

$$-\infty < x < +\infty; \quad |\pm\infty| = +\infty$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty$$

$$x(\pm\infty) = (\pm\infty).x = \begin{cases} \pm\infty & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ \mp\infty & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

$$(\pm\infty).(\pm\infty) = +\infty; \quad (\pm\infty).(\mp\infty) = -\infty$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Chứng minh rằng

a) Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$ và $A \cup B = B$

b) Nếu $A \cap B = A$ thì $A \subset B$

c) Nếu $A \cup B = B$ thì $A \subset B$

d) Nếu $A \cap C \subset A \cap B$ và $A \cup C \subset A \cup B$ thì $C \subset B$

e) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$

f) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$

g) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

2. a) Nếu $A \setminus B = C$ thì có thể suy ra $A = B \cup C$ không?

b) Nếu $A = B \cup C$ thì có thể suy ra $A \setminus B = C$ không?

3. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và các tập $A, B \subset X$. Chứng minh rằng

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Hãy cho ví dụ về trường hợp $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

4. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và các tập hợp $A, B \subset Y$. Chứng minh rằng:

a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

5. Cho các ánh xạ $f : X \to Y$; $g : Y \to Z$ và $h = gof$. Chứng minh rằng:

a) Nếu h là đơn ánh thì f là đơn ánh.

b) Nếu h là toàn ánh thì g là toàn ánh.

6. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh rằng:

a) $\forall A \subset X$ ta có $A \subset f^{-1}(f(A))$

b) Nếu $B \subset f(X)$ thì $f(f^{-1}(B)) = B$

7. Cho x, y là các số thực và $y > 0$. Chứng minh rằng

$|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$

8. Cho x, y là hai số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

9. Giả thử $\{-x\}$ là tập hợp các số đối của số $x \in \{x\}$. Chứng minh rằng:

a) $\inf \{-x\} = - \sup \{x\}$

b) $\sup \{-x\} = - \inf \{x\}$

10. Giả thử $\{x + y\}$ là tập hợp tất cả các tổng $x + y$, trong đó $x \in \{x\}$ và $y \in \{y\}$. Chứng minh rằng:

a) $\inf \{x + y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}$

b) $\sup \{x + y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\}$

11. Giả thử $\{xy\}$ là tập hợp tất cả các tích xy, trong đó $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$ và $x \geq 0$, $y \geq 0$. Chứng minh các đẳng thức

a) $\inf \{xy\} = \inf \{x\}. \inf \{y\}$

b) $\sup \{xy\} = \sup \{x\}. \sup \{y\}$

12. Cho các số thực $x, x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng

$$|x| - (|x_1| + ... + |x_n|) \leq |x + x_1 + ... + x_n|$$

Chương II

GIỚI HẠN

i.lj i mae

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày lý thuyết giới hạn của dãy số và hàm số một biến số thực, tạo cơ sở cho việc trình bày lý thuyết vi phân và tích phân, chuỗi số và chuỗi hàm trong các chương sau.

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ THỰC

1. Định nghĩa và ví dụ

Cho tập hợp số nguyên dương $N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Một ánh xạ u: $N^* \to R$ được gọi là một dãy số thực. Nếu đặt $u_n = u(n)$ thì ta có thể biểu diễn dãy số thực đó dưới dạng $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ Ta kí hiệu dãy đó bằng $\{u_n\}_n$ hay $\{u_n\}$. Phần tử u_n được gọi là số hạng tổng quát của dãy.

Định nghĩa: Cho dãy số thực $\{u_n\}$. Số $a \in R$ được gọi là giới hạn của dãy $\{u_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại một số n_0 (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $n > n_0$ ta đều có $|u_n - a| < \varepsilon$.

Khi đó ta nói rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến a hay tiến đến giới hạn a và ta viết $u_n \to a (n \to \infty)$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$.

Một dãy không có giới hạn được gọi là dãy phân kì.

Ví dụ. Dãy $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right\}$ hội tụ đến 1. Thật vậy ta có $\left|\dfrac{n^2+1}{n^2+2} - 1\right| = \dfrac{1}{n^2+2}$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước $\dfrac{1}{n^2+2} < \varepsilon$ khi và chỉ khi

$n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 2$. Vì thế nếu lấy $n_0 = \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2}\right]$ (phần nguyên của $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 2}$) thì với mọi $n > n_0$ ta có $\left|\frac{n^2+1}{n^2+2} - 1\right| < \varepsilon$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2} = 1$. ([x] là số nguyên n sao cho $n \leq x < n + 1$).

2. Các tính chất của dãy hội tụ

Định lý 1.II: Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

Chứng minh. Trước hết ta chú ý rằng nếu $a_1, a_2 \in R$ và $|a_1 - a_2| < \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$ thì $a_1 = a_2$. Thật vậy, nếu $a_1 \neq a_2$, thì chọn $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2}$, ta có $|a_1 - a_2| > \varepsilon$, trái với giả thiết.

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a_2$. Khi đó

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall n > n_1\ |u_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ n_2\ \forall n > n_2\ |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Lấy $n > \max\{n_1, n_2\}$ ta có

$$|a_1 - a_2| = |a_1 - u_n + u_n - a_2| \leq |a_1 - u_n| + |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Từ chú ý trên ta suy ra rằng $a_1 = a_2$.

Cho dãy số thực $\{u_n\}_n$ và dãy số nguyên dương $\{n_k\}_k$ sao cho $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$

Dãy $\{u_{n_k}\}_k = u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_k}, \ldots$ được gọi là dãy con của dãy $\{u_n\}_n$.

Ta chú ý rằng $n_1 \geq 1$, $n_2 > n_1 \geq 1$, do đó $n_2 \geq 2$,... Tiếp tục quá trình này ta có $n_k \geq k$, $\forall k \in N^*$.

Định lý 2.II: Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn của dãy.

Chứng minh: Giả sử $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Theo định nghĩa $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ $\forall n > n_0\ |u_n - a| < \varepsilon$.

Cho $\{u_{n_k}\}_k$ là một dãy con của dãy $\{u_n\}_n$. Khi đó với mọi $k > n_0$ ta có $n_k \geq k > n_0$ và do đó $\left|u_{n_k} - a\right| < \varepsilon$. Theo định nghĩa $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.

Định lý 3.II: Nếu $\{u_n\}_n$ là dãy hội tụ và $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ thì $\{|u_n|\}_n$ cũng là dãy hội tụ và $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.

Chứng minh: Theo định nghĩa của dãy hội tụ

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ |u_n - a| < \varepsilon.$$

Từ đó do $\big||u_n| - |a|\big| \leq |u_n - a|$ ta suy ra $\big||u_n| - |a|\big| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Vì thế dãy $\{|u_n|\}_n$ hội tụ và $\lim_{n\to\infty}|u_n| = |a|$.

Dãy $\{u_n\}_n$ được gọi là dãy bị chặn nếu tập hợp $\{u_n \mid n \in N^*\}$ là tập hợp bị chặn, điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại $M > 0$ sao cho $|u_n| \leq M\ \forall n \in N^*$.

Định lý 4.II: Mọi dãy hội tụ là dãy bị chặn.

Chứng minh: Giả sử $\{u_n\}_n$ là dãy hội tụ và $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Theo trên $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|$. Cho $\varepsilon = 1$, theo định nghĩa tồn tại n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có $\big||u_n| - |a|\big| < 1$, từ đó suy ra $|u_n| < |a| + 1$, $\forall n > n_0$.

Đặt $M = \max\{|u_1|, |u_2|, ..., \left|u_{n_0}\right|, |a| + 1\}$. Ta có

$$|u_n| \leq M, \forall n \in N^*.$$

Vậy dãy $\{u_n\}_n$ là dãy bị chặn.

3. Các phép tính trên các dãy hội tụ

Định lý 5.II: Giả sử các dãy $\{u_n\}_n$ và $\{v_n\}_n$ hội tụ. Khi đó:

a) Dãy $\{u_n + v_n\}_n$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n + \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b) Dãy $\{u_n v_n\}_n$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n.v_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n . \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

c) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0$ thì dãy $\left\{\dfrac{u_n}{v_n}\right\}_n$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}$.

Chứng minh:

a) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$; $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$. Khi đó

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists n_1 \quad \forall n > n_1 \quad |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Đặt $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Với mọi $n > n_2$ ta có

$$|(u_n + v_n) - (a + b)| \leq |u_n - a| + |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Theo định nghĩa, $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

b) Dãy $\{v_n\}_n$ hội tụ nên bị chặn vì thế tồn tại $M > 0$ sao cho $|v_n| < M$ với mọi n. Đặt $M_0 = \max\{M, |a|\}$. Khi đó

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad \forall n > n_1 \quad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M_0}$$

$$\exists n_2 \quad \forall n > n_2 \quad |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M_0}$$

Lấy $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Với mọi $n > n_0$ ta có

$$|u_nv_n - ab| = |u_nv_n - av_n + av_n - ab|$$
$$\leq |u_n - a|\,|v_n| + |a|\,|v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M_0}.M_0 + M_0\frac{\varepsilon}{2M_0} = \varepsilon$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_nv_n = ab$.

c) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0$. Lấy $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$, theo định nghĩa của giới hạn tồn tại n_1 sao cho với mọi $n > n_1$, $|v_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Từ đó, do $|b| - |v_n| < |v_n - b|$, ta suy ra $|v_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$ với mọi $n > n_1$. Vì thế $v_n \neq 0$ với mọi $n > n_1$ và tỷ số $\frac{1}{v_n}$ có nghĩa với $n > n_1$. Xét với $n > n_1$, ta chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$. Cho trước $\varepsilon > 0$ vì $b \neq 0$ nên $\frac{b^2}{2}\varepsilon > 0$, theo định nghĩa tồn tại n_2 sao cho với mọi $n > n_2$ ta có $|v_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon$. Khi đó với mọi $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|v_n - b|}{|v_n|\,|b|} < \frac{b^2}{2}\varepsilon \cdot \frac{2}{b^2} = \varepsilon .$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$. Bằng cách viết $\frac{u_n}{v_n} = u_n \cdot \frac{1}{v_n}$, áp dụng phần b) và kết quả trên đây ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} u_n . \lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{a}{b} .$$

Hệ quả: Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ và $\alpha \in R$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha u_n = \alpha a$. Thật vậy, áp dụng phần b) của định lý trên với $v_n = \alpha$, với mọi n, ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$. Trước hết ta xét trường hợp $a > 1$, cho trước $\varepsilon > 0$, ta có $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow$

$a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \Leftrightarrow n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$.

Vậy nếu lấy $n_0 = \left[\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right]$ thì với mọi $n > n_0$; $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$.

Theo định nghĩa $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Nếu $a = 1$ đẳng thức giới hạn trên rõ ràng đúng.

Giả sử $0 < a < 1$. Đặt $b = \frac{1}{a}$, ta có $b > 1$ và

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b}} = 1.$$

4. Tiến qua giới hạn trong bất đẳng thức

Định lý 6.II: Cho hai dãy hội tụ $\{u_n\}_n$ và $\{v_n\}_n$. Giả sử tồn tại n_0 sao cho $u_n \geq v_n$ với mọi $n > n_0$. Khi đó $\lim_{n\to\infty} u_n \geq \lim_{n\to\infty} v_n$.

Chứng minh: Giả sử ngược lại $\lim_{n\to\infty} u_n = a < b = \lim_{n\to\infty} v_n$. Ta lấy r sao cho $a < r < b$. Khi đó $\varepsilon_1 = r - a > 0$; $\varepsilon_2 = b - r > 0$.

Theo định nghĩa của giới hạn:

$$\exists n_1 \quad \forall n > n_1 \quad |u_n - a| < r - a$$

$$\exists n_2 \quad \forall n > n_2 \quad |v_n - b| < b - r.$$

Từ đó suy ra $u_n < r$ với mọi $n > n_1$ và $r < v_n$, với mọi $n > n_2$. Như vậy với mọi $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ một mặt ta có $u_n \geq v_n$, mặt khác ta có $u_n < r < v_n$: vô lý. Vậy $a \geq b$.

Định lý trên đây cho thấy rằng ta có thể tiến qua giới hạn trong bất đẳng thức $u_n \geq v_n$.

Hệ quả: a) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ và tồn tại n_0 sao cho $u_n \geq b$ với mọi $n > n_0$ thì $a \geq b$.

b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ và tồn tại n_0 sao cho $u_n \leq c$ với mọi $n > n_0$ thì $a \leq c$.

Chú ý: 1) Từ bất đẳng thức $u_n > v_n$ với mọi n, nói chung không thể suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Chẳng hạn ta có $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ với mọi $n \in N^*$, tuy nhiên $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$.

2) Trong quá trình chứng minh định lý trên, ta đã chứng minh các kết quả sau cũng thường hay được sử dụng:

a) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a < r$ thì tồn tại n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có $u_n < r$.

b) Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b > r$ thì tồn tại n_0 sao cho $v_n > r$ với mọi $n > n_0$.

Định lý 7.II: Giả sử các dãy $\{x_n\}$; $\{y_n\}$ và $\{z_n\}$ thoả mãn các bất đẳng thức $x_n \leq y_n \leq z_n$, đồng thời các dãy $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ cũng hội tụ đến a:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Khi đó dãy $\{y_n\}$ cũng hội tụ và có cùng giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Chứng minh: Cho trước $\varepsilon > 0$. Vì $x_n \to a$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Do $z_n \to a$ nên tồn tại n_1 sao cho với mọi $n > n_1$ ta có $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$. Đặt $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ với mọi $n > n_2$ ta có $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$. Từ đó suy ra $|y_n - a| < \varepsilon$ với mọi $n > n_2$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

5. Nguyên lý Cantor

Định lý 8.II: Cho dãy các đoạn $[a_n, b_n]$ (n = 1, 2, ...) lồng nhau và thắt lại, tức là $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$ và $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Khi đó tồn tại duy nhất một phần tử $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Chứng minh: Gọi $A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. A là một tập hợp bị chặn trên, chẳng hạn b_1 là một cận trên. Vì thế tồn tại $\sup A = \alpha$. Theo định nghĩa của cận trên đúng ta có $a_n \leq \alpha$ với mọi $n \in N^*$. Hơn nữa ta cũng có $\alpha \leq b_n$ với mọi $n \in N^*$ vì trong trường hợp ngược lại tồn tại n_0 sao cho $b_{n_0} < \alpha$, khi đó do dãy đoạn là lồng nhau ta có $a_n \leq b_{n_0} < \alpha$ với mọi n, từ đó suy ra $\alpha \leq b_{n_0}$ vô lý. Vậy $\alpha \in [a_n, b_n]$ với mọi $n \in N^*$, tức là $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Phần tử α có tính chất đó là duy nhất vì nếu tồn tại $\alpha' \neq \alpha$ sao cho $\alpha' \in [a_n, b_n]$ với mọi $n \in N^*$ thì ta có $0 < \varepsilon = |\alpha - \alpha'| \leq (b_n - a_n)$ với mọi $n \in N^*$, điều này trái với giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

6. Nguyên lý Bolzano - Weierstrass

Định lý 9.II. Mọi dãy vô hạn bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh: Giả sử $\{u_n\}_n$ là một dãy bị chặn. Khi đó tồn tại hai số a, b sao cho $a \leq u_n \leq b$ với mọi $n \in N^*$. Ta chia [a, b] thành hai đoạn bằng nhau. Khi đó ít nhất một trong hai đoạn đó chứa vô số số hạng của dãy vì nếu không chính [a, b] chỉ chứa một số hữu hạn số hạng của dãy. Gọi $[a_1, b_1]$ là một đoạn con có tính chất đó. Ta có $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Ta lại chia $[a_1, b_1]$ thành hai đoạn bằng nhau và gọi $[a_2, b_2]$ là đoạn con chứa vô số số hạng của dãy. Ta có

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}.$$

Cứ tiếp tục như thế ta xây dựng được dãy đoạn lồng nhau $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_k, b_k] \supset ...$ với $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k} \to 0$ $(k \to \infty)$, mỗi đoạn này chứa vô số các số hạng của dãy $\{u_n\}_n$. Theo nguyên lý Cantor tồn tại $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k\}$. Ta chứng minh rằng dãy $\{u_n\}_n$ có chứa một dãy con hội tụ đến c. Chọn $u_{n_1} \in [a_1, b_1]$ sau đó ta chọn $u_{n_2} \in [a_2, b_2]$ với $n_2 > n_1$, chọn được vì $[a_2, b_2]$ chứa vô số phần tử của dãy $\{u_n\}_n$ ... Cứ tiếp tục như thế ta thu được một dãy con $\{u_{n_k}\}_k$ của dãy $\{u_n\}_n$ sao cho $u_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Vì $c \in [a_k, b_k]$ nên:

$$|u_{n_k} - c| \le b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

Vậy $\lim\limits_{k \to \infty} u_{n_k} = c$.

7. Nguyên lý Cauchy

Định nghĩa: Dãy số thực $\{u_n\}_n$ được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại n_0 (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $n, m > n_0$ ta có $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

Từ định nghĩa ta suy ra:

a) Mọi dãy cơ bản là dãy bị chặn.

Thật vậy, lấy $\varepsilon = 1$, theo định nghĩa tồn tại n_0 sao cho với mọi n, $m > n_0$ ta có $|u_n - u_m| < 1$. Từ đó, do $|u_n| - |u_{n_0+1}| \le |u_n - u_{n_0+1}|$ ta suy ra với mọi $n > n_0$; $|u_n| < 1 + |u_{n_0+1}|$.

Đặt $M = \max\left\{|u_1|, |u_2|, ..., |u_{n_0}|, 1 + |u_{n_0+1}|\right\}$. ta có $|u_n| \le M$ $\forall n \in N^*$, tức là dãy $\{u_n\}_n$ bị chặn.

b) Nếu dãy cơ bản $\{u_n\}_n$ có một dãy con $\{u_{n_k}\}_k$ hội tụ đến giới hạn a thì chính dãy $\{u_n\}_n$ cũng hội tụ đến a.

Thật vậy, cho trước $\varepsilon > 0$, vì $\{u_n\}_n$ là dãy cơ bản nên tồn tại n_0 sao cho $|u_n - u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi n, m > n_0. Mặt khác vì $u_{n_k} \to a$ $(k \to \infty)$ nên tồn tại n_1 sao cho $|u_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $k > n_1$. Đặt $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ và lấy $k > n_2$. Khi đó với mọi $n > n_2$ ta có

$$|u_n - a| \le |u_n - u_{n_k}| + |u_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Theo định nghĩa, dãy $\{u_n\}_n$ hội tụ đến a.

Định lý 10.II. (nguyên lý hội tụ Cauchy)

Dãy số thực $\{u_n\}_n$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản, tức là khi và chỉ khi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m > n_0 \quad |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Chứng minh:

a) *Điều kiện cần*. Giả thử dãy $\{u_n\}_n$ hội tụ đến giới hạn a. Khi đó

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \qquad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vì thế với mọi m, n > n_0 ta có

$$|u_n - u_m| \le |u_n - a| + |a - u_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy $\{u_n\}_n$ là dãy cơ bản.

b) Điều kiện đủ. Ngược lại giả thử $\{u_n\}_n$ là dãy cơ bản. Khi đó theo trên $\{u_n\}_n$ là dãy bị chặn và do đó theo nguyên lý Bolzano-Weierstrass dãy $\{u_n\}_n$ có một dãy con hội tụ đến một giới hạn a nào đó. Theo tính chất của dãy cơ bản, chính dãy $\{u_n\}_n$ cũng hội tụ đến a.

Ý nghĩa cơ bản của định lý này là ở chỗ để khảo sát sự hội tụ của một dãy ta chỉ cần căn cứ vào quy luật biến thiên của bản thân dãy đó để xét xem tiêu chuẩn trên đây có được thỏa mãn hay không mà không cần biết trước giới hạn của dãy (nếu dựa vào định nghĩa ta cần biết trước giới hạn của dãy, việc này nhiều khi không dễ dàng). Hơn nữa ta cũng dùng định lý này để chứng minh sự phân kỳ của dãy.

Ví dụ 1: Dùng nguyên lý Cauchy xét sự hội tụ của dãy số $\{u_n\}_n$ với $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Giả sử m > n. Khi đó

$$|u_n - u_m| = u_m - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}.$$

Cho trước $\varepsilon > 0$, ta thấy

$$|u_n - u_m| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ nếu } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Vì thế nếu lấy $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ thì với mọi $m, n > n_0$ ta có $|u_n - u_m| < \varepsilon$. Vậy dãy $\{u_n\}_n$ hội tụ.

Ví dụ 2: Cho dãy $\{u_n\}_n$ với $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Ta chứng minh rằng dãy này phân kỳ.

Muốn vậy, theo nguyên lý Cauchy ta cần chỉ ra rằng

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n, m > n_0 \quad |u_n - u_m| > \varepsilon$$

Ta thấy $|u_{2n} - u_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Như vậy lấy $\varepsilon = \frac{1}{2}$, với bất kỳ n_0, chọn $n > n_0$, $m = 2n > n_0$ ta có $|u_n - u_m| > \frac{1}{2}$. Vậy dãy $\{u_n\}_n$ phân kỳ.

8. Sự hội tụ của dãy đơn điệu

Định nghĩa:

a) Dãy $\{u_n\}_n$ được gọi là dãy tăng (tương ứng dãy tăng thực sự) nếu $u_n \leq u_{n+1}$, với mọi n (tương ứng nếu $u_n < u_{n+1}$, với mọi n).

b) Dãy $\{u_n\}_n$ được gọi là dãy giảm (tương ứng dãy giảm thực sự) nếu $u_{n+1} \leq u_n$ với mọi n (tương ứng nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi n).

Định lý 11.II.

a) Nếu $\{u_n\}_n$ là một dãy tăng bị chặn trên thì nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\limits_n u_n$.

b) Nếu $\{u_n\}_n$ là một dãy giảm và bị chặn dưới thì nó hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$.

Chứng minh:

a) Vì dãy $\{u_n\}_n$ bị chặn trên, nên nó có cận trên đúng. Đặt $a = \sup\limits_n u_n$, $a < +\infty$. Ta có $u_n \leq a$, $\forall n \in N^*$.

Cho trước $\varepsilon > 0$, vì $a - \varepsilon < a$, nên $a - \varepsilon$ không là cận trên của $\{u_n\}_n$, vì thế tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho $a - \varepsilon < u_{n_0} \leq a$.

Mặt khác vì $\{u_n\}_n$ là dãy tăng nên với mọi $n > n_0$; $u_{n_0} \leq u_n$, do đó $a - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq a < a + \varepsilon$, từ đó $|u_n - a| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a = \sup\limits_n u_n$.

b) Nếu dãy $\{u_n\}_n$ giảm thì dãy $\{-u_n\}_n$ tăng. Theo phần a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-u_n) = \sup\limits_n (-u_n) = - \inf\limits_n u_n$.

Từ đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$.

Ví dụ: Số e. Xét dãy số $\{u_n\}_n$, trong đó $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Ta chứng minh rằng $\{u_n\}_n$ là dãy tăng và bị chặn trên.

Xét n +1 số dương $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = ... = x_{n+1} = 1 + \frac{1}{n}$. Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{x_1 x_2 ... x_{n+1}}, \text{ ta có}$$

$$\frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}, \text{ từ đó suy ra}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Vậy dãy $\{u_n\}_n$ là dãy tăng. Dùng công thức khai triển nhị thức Newton ta có

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n+1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n+1)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Rõ ràng ta có $k! = 1.2.3... k \geq 2^{k-1}$ với mọi $k \geq 2$, từ đó suy ra:

$$\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Vì thế ta có

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Vậy dãy $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_n$ là dãy tăng và bị chặn trên, nên theo định lý trên nó hội tụ.

Đặt $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, ta có $2 < e \leq 3$. Người ta chứng minh được rằng e là số vô tỷ có giá trị gần đúng là 2,718281828459.

9. Giới hạn riêng, giới hạn trên và giới hạn dưới

a) Giới hạn riêng. Cho dãy số $\{u_n\}_n$. Số $a \in R$ được gọi là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}_n$ nếu có một dãy con $\left\{u_{n_k}\right\}_k$ của dãy $\{u_n\}_n$ hội tụ đến a : $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.

Ví dụ: Dãy $\{u_n\}_n$ với $u_n = (-1)^n$ có hai giới hạn riêng là 1 và -1.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng số $a \in R$ là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}_n$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ khoảng $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ chứa vô số số hạng của dãy $\{u_n\}$.

Thật vậy, nếu $a \in R$ là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}_n$ thì tồn tại dãy con $\{u_{n_k}\}_k \subset \{u_n\}_n$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại k_0 sao cho $a - \varepsilon < u_{n_k} < a + \varepsilon$ với mọi $k > k_0$. Như vậy khoảng $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ chứa vô số số hạng của dãy $\{u_n\}_n$.

Ngược lại nếu $a \in R$ thoả mãn điều kiện nêu trên thì với $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}$ tồn tại n_1 sao cho $a - \dfrac{1}{2} < u_{n_1} < a + \dfrac{1}{2}$; với $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2^2}$ tồn tại $n_2 > n_1$ sao cho $a - \dfrac{1}{2^2} < u_{n_2} < a + \dfrac{1}{2^2}$, ... cứ tiếp tục như vậy ta tìm được một dãy chỉ số $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ sao cho

$a - \frac{1}{2^k} < u_{n_k} < a + \frac{1}{2^k}$ $(k \in N^*)$. Cho $k \to \infty$ ta có $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k} = a$.

Vậy a là giới hạn riêng của dãy $\{u_n\}_n$.

b) Giới hạn trên và giới hạn dưới

Định nghĩa: Cho $\{x_n\}_n$ là một dãy số bị chặn. Với mỗi n ta đặt

$$u_n = \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \sup_k x_{n+k}$$

$$v_n = \inf\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \inf_k x_{n+k}$$

$\{u_n\}_n$ là một dãy giảm và bị chặn dưới; $\{v_n\}_n$ là một dãy tăng và bị chặn trên. Vì thế tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\limits_n u_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \sup\limits_n v_n$. Các giới hạn này lần lượt được gọi là giới hạn trên và giới hạn dưới của dãy $\{x_n\}_n$, ký hiệu là $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ và $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Như vậy:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf_n \sup_k x_{n+k}\,; \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup_n \inf_k x_{n+k}$$

Rõ ràng là $v_n \le u_n$ với mọi n, từ đó tiến qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta có $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Hơn nữa ta có:

Định lý 12.II. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ là giới hạn riêng lớn nhất của dãy $\{x_n\}_n$; $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ là giới hạn riêng nhỏ nhất của dãy đó.

Chứng minh: Ta chứng minh $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, đối với $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ chứng minh được tiến hành một cách tương tự. Giả thử $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ ta có $a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$. Vì $a - \varepsilon < \inf\limits_n \sup\limits_k x_{n+k}$ nên với mọi n, $a - \varepsilon < \sup\limits_k x_{n+k}$. Vì thế với mọi n tồn tại k sao cho $a - \varepsilon < x_{n+k}$. Như vậy có vô số số hạng của dãy $\{x_n\}_n$ lớn hơn $a - \varepsilon$. Mặt khác $a = \inf\limits_n \sup\limits_k x_{n+k} < a + \varepsilon$ nên tồn tại n_0 sao cho $\sup\limits_k x_{n_0+k} < a + \varepsilon$, khi đó $x_{n_0+k} < a + \varepsilon$ với mọi k. Vậy có vô số số hạng của dãy $\{x_n\}_n$ nằm trong khoảng $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, điều này chứng tỏ a là một giới hạn riêng của dãy $\{x_n\}_n$.

Tiếp theo ta chứng minh a là giới hạn riêng lớn nhất. Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ của dãy $\{x_n\}_n$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = b > a$. Lấy $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $b - \varepsilon > a$. Khi đó một mặt theo định nghĩa của giới hạn tồn tại k_0 sao cho với mọi $k > k_0$, $b - \varepsilon < x_{n_k} < b + \varepsilon$. Mặt khác vì $b - \varepsilon > a = \inf\limits_n \sup\limits_k x_{n+k}$ nên tồn tại n_1 sao cho $\sup\limits_k x_{n_1+k} < b - \varepsilon$; khi đó $x_{n_1+k} < b - \varepsilon$ với mọi k. Điều này chứng tỏ chỉ có một số hữu hạn số hạng của dãy $\{x_n\}_n$ ở trong khoảng $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, trái với giả thiết b là giới hạn riêng của dãy $\{x_n\}_n$.

Định lý 13.II. Số a là giới hạn của dãy $\{x_n\}_n$ khi và chỉ khi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$.

Chứng minh:

a) Điều kiện cần. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Vì mọi dãy con của dãy $\{x_n\}_n$ cũng hội tụ và có cùng giới hạn a nên giới hạn riêng lớn nhất và giới hạn riêng nhỏ nhất bằng a: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = a$.

b) Điều kiện đủ. Giả sử $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ với mọi k cố định ta có:

$$v_n = \inf_k x_{n+k} \le x_{n+k} \le \sup_k x_{n+k} = u_n (n = 1,2,...)$$

Cho $n \to \infty$ ta được $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = a$, từ đó suy ra $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} = a$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

10. Giới hạn vô hạn

Định nghĩa: Cho dãy số thực $\{x_n\}_n$.

a) Ta nói dãy $\{x_n\}_n$ có giới hạn $+\infty$ nếu với mọi số dương M tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho $x_n > M$ với mọi $n > n_0$. Khi đó ta viết $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ hay $x_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$.

b) Ta nói dãy $\{x_n\}_n$ có giới hạn $-\infty$ nếu với mọi số dương M tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho $x_n < -M$ với mọi $n > n_0$. Khi đó ta viết $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ hay $x_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$.

Chú ý: Nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ hoặc $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ thì theo định nghĩa $\{x_n\}_n$ là dãy phân kỳ.

Từ định nghĩa ta suy ra:

a) Nếu dãy $\{x_n\}_n$ không bị chặn trên thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}_k \subset \{x_n\}_n$ sao cho $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Thật vậy, vì dãy $\{x_n\}_n$ không bị chặn trên nên với k = 1 tồn tại n_1 sao cho $x_{n_1} > 1$, với k = 2 tồn tại $n_2 > n_1$ sao cho $x_{n_2} > 2$,... Cứ tiếp tục như vậy ta tìm được một dãy chỉ số $n_1 < n_2 < ... < n_k <...$ sao cho $x_{n_k} > k$ với mọi k. Rõ ràng $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty$.

b) Tương tự nếu dãy $\{x_n\}_n$ không bị chặn dưới thì có một dãy con $\{x_{n_k}\}_k \subset \{x_n\}_n$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty$.

Như vậy nếu ta xem $+\infty$ hoặc $-\infty$ cũng là những giới hạn riêng của dãy số thực không bị chặn thì ta có thể khẳng định rằng, mọi dãy số thực đều có giới hạn riêng lớn nhất và giới hạn riêng nhỏ nhất.

c) Nếu $\{x_n\}_n$ là dãy đơn điệu tăng và không bị chặn trên thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Thật vậy, vì dãy $\{x_n\}_n$ không bị chặn trên nên với mọi $M > 0$ tồn tại $n_0 \in N^*$ sao cho $x_{n_0} > M$. Do $\{x_n\}_n$ là dãy tăng nên với mọi $n > n_0$ ta có $x_n \geq x_{n_0} > M$. Theo định nghĩa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

d) Tương tự nếu $\{x_n\}_n$ là dãy giảm và không bị chặn dưới thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Chú ý: Nếu dãy $\{x_n\}_n$ không bị chặn trên ta quy ước đặt $\sup\limits_n x_n = +\infty$. Nếu dãy $\{x_n\}_n$ không bị chặn dưới ta quy ước đặt $\inf\limits_n x_n = -\infty$.

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Lân cận của một điểm

Định nghĩa: Cho điểm $x_0 \in R$ và số $\varepsilon > 0$. Khoảng $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ được gọi là ε - lân cận của x_0, kí hiệu là $\cup_\varepsilon(x_0)$.

Như vậy, $\cup_\varepsilon(x_0) = \{x \in R \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

Tập $V \subset R$ được gọi là lân cận của điểm x_0 nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $\cup_\varepsilon(x_0) \subset V$.

Từ định nghĩa trực tiếp suy ra rằng:

a) Lân cận của một điểm bao giờ cũng chứa điểm đó và nếu V là lân cận của x_0, $U \supset V$ thì U cũng là lân cận của x_0.

b) Nếu V_1, V_2 là hai lân cận của x_0 thì $V_1 \cap V_2$ cũng là lân cận của x_0.

2. Điểm tụ của một tập hợp

Định nghĩa: Điểm $x_0 \in R$ được gọi là điểm tụ (hay điểm giới hạn) của tập hợp $A \subset R$ nếu mọi lân cận V của x_0 đều chứa ít nhất một điểm của A khác x_0, tức là $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$, với mọi lân cận V của x_0.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng x_0 là điểm tụ của tập hợp A khi và chỉ khi mọi lân cận của x_0 đều chứa vô số điểm của A.

Thật vậy, nếu mọi lân cận của x_0 đều chứa vô số điểm của A thì trong các điểm đó phải có ít nhất một điểm khác x_0, do đó x_0 là điểm tụ của A. Ngược lại giả sử x_0 là điểm tụ của tập hợp A và V là lân cận bất kỳ của x_0. Khi đó tồn tại ε_1 lân cận $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ của x_0, với $0 < \varepsilon_1 < 1$ sao cho $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1) \subset V$ và ε_1 lân cận này có một điểm $x_1 \in A$, $x_1 \neq x_0$. Ta có $x_1 \in V$. Lấy ε_2 sao cho $0 < \varepsilon_2 < \min\{\frac{1}{2}, |x_1 - x_0|\}$. Trong ε_2 lân cận $(x_0 - \varepsilon_2, x_0 + \varepsilon_2)$ có một điểm $x_2 \in A$, $x_2 \neq x_0$. Vì $\varepsilon_2 < |x_1 - x_0|$ nên $x_2 \neq x_1$ và $x_2 \in V$... Cứ tiếp tục như vậy ta thu được dãy điểm $\{x_n\}_n \subset V$ sao cho $x_n \neq x_m$ với $n \neq m$ và $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ với mọi n. Như vậy V chứa vô số phần tử của A. Rõ ràng $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Như vậy x_0 là điểm tụ của tập hợp A khi và chỉ khi có một dãy điểm phân biệt $\{x_n\}_n$ (tức là $x_n \neq x_m$ nếu $n \neq m$) của A hội tụ đến x_0.

Ví dụ 1) Tập $\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n},...\}$ có một điểm tụ là số 0.

2) Tập $\{1, 2, ..., n, ...\}$ không có điểm tụ nào.

3) Tập hợp Q các số hữu tỷ nhận mọi điểm $x \in R$ làm điểm tụ của nó, điều này suy ra từ tính trù mật của tập hợp các số hữu tỷ trong tập hợp số thực.

Định nghĩa: Ta gọi tập hợp tất cả các điểm tụ của tập hợp A là tập hợp dẫn xuất của A, ký hiệu là A'.

3. Điểm cô lập của một tập hợp

Định nghĩa: Cho tập hợp $A \subset R$. Điểm $x_0 \in A$ được gọi là điểm cô lập của tập hợp A nếu tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho $V \cap A = \{x_0\}$ (tập chỉ gồm một điểm x_0).

Ví dụ: Tập hợp các số nguyên $Z \subset R$ là tập hợp gồm toàn các điểm cô lập vì với mọi $n \in Z$ ta có $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \cap Z = \{n\}$.

Cho tập hợp $A \subset R$. Nếu điểm $x_0 \in A$ không là điểm tụ của A thì tồn tại một lân cận V của x_0 sao cho $V \cap (A \setminus \{x_0\}) = \varnothing$ hay $V \cap A = \{x_0\}$. Khi đó x_0 là điểm cô lập của A.

Như vậy, mỗi điểm $x \in A$ hoặc là điểm tụ của A hoặc là điểm cô lập của A.

4. Định nghĩa giới hạn của hàm số

Cho x_0 là điểm tụ của tập hợp $A \subset R$ và hàm số $f : A \to R$.

Định nghĩa: Hàm số f được gọi là hội tụ đến $b \in R$ khi $x \to x_0$ hay b là giới hạn của hàm số f khi $x \to x_0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - b| < \varepsilon$ với mọi $x \in A$ thoả mãn điều kiện $0 < |x - x_0| < \delta$. Khi đó ta kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ hay $f(x) \to b$ khi $x \to x_0$.

Chú ý: Trong định nghĩa này ta chỉ xét đến những giá trị f(x) ứng với những giá trị x ở trong một lân cận nào đó của x_0. Điều kiện $0 < |x - x_0|$ nói lên rằng $x \neq x_0$. Vì thế tại chính điểm x_0 (là điểm tụ của A) hàm số có thể không được xác định; ngay cả trong trường hợp hàm f xác định tại x_0 thì giá trị $f(x_0)$ không đóng vai trò nào cả trong định nghĩa này.

Sau đây ta nêu ra một điều kiện tương đương với điều kiện nêu trong định nghĩa và vì vậy có thể dùng nó để định nghĩa giới hạn của hàm số.

Định lý 14.II. Để cho hàm $f : A \to R$ hội tụ đến $b \in R$ khi $x \to x_0$ điều kiện cần và đủ là với mọi dãy $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to b$ khi $n \to \infty$.

Chứng minh:

a) Điều kiện cần. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Cho dãy $\{x_n\}_n \subset A\setminus\{x_0\}$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Ta chứng minh $f(x_n) \to b$ $(n \to \infty)$. Theo định nghĩa

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Vì dãy $\{x_n\}_n \subset A\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ nên với $\delta > 0$ nói trên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có $0 < |x_n - x_0| < \delta$, khi đó $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. Theo định nghĩa $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$.

b) Điều kiện đủ: Ngược lại, giả sử rằng với mọi dãy $\{x_n\}_n \subset A\setminus\{x_0\}$, $x_n \to x_0$ ta đều có $f(x_n) \to b$. Ta chứng minh $f(x) \to b$ khi $x \to x_0$. Nếu f(x) không hội tụ đến b khi $x \to x_0$ thì:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x_\delta \in A : 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \text{ nhưng } |f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon$$

Lấy dãy $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$, ký hiệu $x_{\delta_n} = x_n$, ta có $\{x_n\} \subset A$, $0 < |x_n - x_0| < \delta_n \to 0$, do đó $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ nhưng do $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$, nên $f(x_n)$ không hội tụ đến b khi $n \to \infty$, trái với giả thiết. Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

Hệ quả: Nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$ thì giới hạn b là duy nhất.

Điều này trực tiếp suy ra từ định lý trên và tính duy nhất của giới hạn của một dãy.

Từ định lý trên ta có một định nghĩa khác về giới hạn của hàm số tương đương với định nghĩa đã cho.

Định nghĩa: Ta nói hàm $f : A \to R$ có giới hạn b khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ta đều có $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$

Ví dụ:

1) Chứng minh rằng $\lim_{x \to 1} 2x - 1 = 1$

Cho trước $\varepsilon > 0$ ta có

$|(2x - 1) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$ khi và chỉ khi $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vì vậy nếu chọn $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ thì $\forall x : |x - 1| < \delta$ ta có $|(2x - 1) - 1| < \varepsilon$, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2) Chứng minh rằng $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Như đã nhận xét ta chỉ cần chú ý đến những giá trị của f(x) trong một lân cận của x_0, nên không mất tổng quát ta có thể xem rằng $|x - x_0| < 1$, khi đó do $|x| - |x_0| < |x - x_0|$ ta có $|x| < |x_0| + 1$

Cho trước $\varepsilon > 0$ ta thấy

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0|\ |x - x_0| \le (|x| + |x_0|)|x - x_0| < (2|x_0| + 1)|x - x_0|$$

Vì thế chọn $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}\right\}$ thì $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta$, ta có $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Vậy $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

5. Một số tính chất của giới hạn hàm số

Từ mối quan hệ giữa giới hạn hàm số và giới hạn dãy số nêu trong định lý 14.II ta thấy rằng nhiều tính chất của giới hạn dãy số có thể phát biểu lại cho giới hạn hàm số (với những thay đổi thích hợp).

Định lý 15.II. Cho tập hợp $A \subset R$, x_0 là điểm tụ của A, $f : A \to R$ và $g : A \to R$ là những hàm số xác định trên A. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$ thì $a \leq b$.

Chứng minh: Lấy một dãy bất kỳ $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_0\}$ $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Theo định nghĩa của giới hạn dãy số với $\delta > 0$ nêu trong giả thiết của định lý, tồn tại n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có $|x_n - x_0| < \delta$. Khi đó $f(x_n) \leq g(x_n)$ với mọi $n > n_0$. Cho $n \to \infty$ ta được $a \leq b$.

Hệ quả: Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \leq b$ với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$. Khi đó $a \leq b$.

Định lý sau đây có tính chất ngược lại.

Định lý 16.II. Cho hàm $f : A \to R$, x_0 là điểm tụ của A. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ và $a < b$ (tương ứng $a > c$) thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) < b$ (tương ứng $f(x) > c$) với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$

Chứng minh: Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\varepsilon < b - a$ (tương ứng $\varepsilon < a - c$). Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$, ta có $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Từ đó ta suy ra $f(x) < b$ (tương ứng $f(x) > c$).

Định lý 17.II. Cho ba hàm f, g, h cùng xác định trên một tập hợp A có điểm tụ là x_0. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = b$ và tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$.

Chứng minh: Lấy một dãy $\{x_n\} \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$. Với $\delta > 0$ nêu trong giả thiết của định lý tồn tại n_0 sao cho $|x_n - x_0| < \delta$ với mọi $n > n_0$. Khi đó ta có $f(x_n) \le g(x_n) \le h(x_n)$. Cho $n \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = b$, từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$.

Vậy $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$.

Định lý 18.II. Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ là x_0 và các hàm số $f : A \to R$; $g : A \to R$. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = q$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = p + q$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = p.q$

c) Nếu $q \neq 0$ thì tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{p}{q}$.

Chứng minh: Lấy một dãy bất kỳ $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Theo định lý 14.II (điều kiện cần) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = p$ và $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = q$; từ đó theo tính chất của giới hạn của dãy ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} (f(x_n) + g(x_n)) = p + q, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)\, g(x_n) = p.q$$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{p}{q}$ (nếu $q \neq 0$). Áp dụng định lý 14.II (điều kiện đủ) ta nhận được điều phải chứng minh.

Hệ quả: Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = p$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = cp$, với mọi $c \in R$.

6. Tiêu chuẩn Cauchy

Định lý 19.II (Cauchy). Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ là x_0 và hàm số $f : A \to R$. Để cho hàm số f có giới hạn hữu hạn khi $x \to x_0$ điều kiện cần và đủ là với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |x' - x_0| < \delta$ ta đều có $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Chứng minh:

a) Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Như vậy $|f(x) - f(x')| = |f(x) - b + b - f(x')| \leq |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, với mọi $x, x' \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |x' - x_0| < \delta$.

b) Điều kiện đủ: Giả sử hàm f thoả mãn điều kiện nêu trong định lý. Cho một dãy bất kỳ $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. Xét dãy $\{f(x_n)\}_n$ tương ứng. Theo giả thiết với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall x, x' \in A \setminus \{x_0\}$ thỏa mãn $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |x' - x_0| < \delta$ ta có $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. Vì $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ nên tồn tại n_0 sao cho với mọi $n > n_0$ ta có $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Khi đó với mọi $n > n_0$, $m > n_0$ ta có $0 < |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Vậy dãy $\{f(x_n)]_n$ là dãy cơ bản, do đó theo nguyên lý Cauchy dãy $\{f(x_n)\}_n$ hội tụ: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = b$. Ta chứng minh rằng b không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{x_n\}_n \subset A \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$.

Xét dãy $\{x'_n\}_n \subset A \setminus \{x_0\}$,... $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Giả sử $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n) = b' \neq b$. Khi đó dãy $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \ldots, x_n, x'_n, \ldots$ cũng là dãy hội tụ đến x_0. Tuy nhiên dãy các giá trị tương ứng của f : $f(x_1)$, $f(x'_1)$, $f(x_2)$, $f(x'_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(x'_n)$, ... không có giới hạn vì các dãy con ứng với các chỉ số chẵn và ứng với các chỉ số lẻ hội tụ đến các giới hạn khác nhau, điều này mâu thuẫn với điều đã chứng minh. Vì thế $b' = b$. Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

7. Giới hạn bên phải và giới hạn bên trái

Cho tập hợp $A \subset R$, hàm số $f : A \to R$ và tập hợp $B \subset A$. Hàm số $f|_B : B \to R$ xác định bởi $f|_B(x) = f(x)$ với mọi $x \in B$ được gọi là thu hẹp của hàm f trên B.

Bây giờ giả sử x_0 là điểm tụ của tập hợp A. Đặt $A^+ = \{x \in A \mid x > x_0\}$ $A^- = \{x \in A \mid x < x_0\}$.

Định nghĩa: Nếu x_0 cũng là điểm tụ của A^+ và $\lim\limits_{x \to x_0} f\big|_{A^-}(x)$ tồn tại thì giới hạn đó được gọi là giới hạn bên phải của hàm f tại x_0, kí hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Nếu x_0 cũng là điểm tụ của tập hợp A^- và $\lim\limits_{x \to x_0} f\big|_{A}(x)$ tồn tại thì giới hạn đó được gọi là giới hạn bên trái của hàm f tại x_0, kí hiệu là $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Như vậy $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in A$ thỏa mãn $x_0 < x < x_0 + \delta$ ta có $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Tương tự $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in A$ thỏa mãn $x_0 - \delta < x < x_0$ ta có $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Rõ ràng là nếu x_0 là điểm tụ của A và đồng thời cũng là điểm tụ của A^+ và A^- thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ tồn tại, đồng thời $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Ví dụ: Xét hàm $E(x) = [x]$ (phần nguyên của x).

Ta nhớ lại rằng [x] là số nguyên sao cho $[x] \le x < [x] + 1$. Khi đó với mọi $n \in Z$ ta có

$$\lim_{x \to n^+} E(x) = n \ ; \quad \lim_{x \to n} E(x) = n - 1$$

8. Sự tồn tại giới hạn của hàm đơn điệu

Định nghĩa: Cho tập hợp $A \subset R$ và hàm số $f : A \to R$. Ta nói f là hàm tăng (tương ứng tăng thực sự) trên A nếu từ các điều kiện $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ ta suy ra $f(x_1) \le f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) < f(x_2)$).

Nếu từ các điều kiện $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$ ta suy ra $f(x_1) \geq f(x_2)$ (tương ứng $f(x_1) > f(x_2)$) thì ta nói f là hàm giảm (tương ứng giảm thực sự) trên A.

Các hàm tăng và hàm giảm được gọi là hàm đơn điệu.

Định lý 20.II. Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ x_0 và $x_0 \geq x$ với mọi $x \in A$. Nếu $f : A \to R$ là hàm tăng (tương ứng giảm) ở trên A và f là hàm bị chặn trên (tương ứng bị chặn dưới) trên A, tức là $f(x) \leq M$ (tương ứng $f(x) \geq m$) với mọi $x \in A$, thì khi $x \to x_0$ hàm f có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ (tương ứng $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$)

Chứng minh: Giả sử f là hàm tăng trên A. Vì tập hợp $\{f(x) \mid x \in A\}$ bị chặn trên nên tồn tại $b = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ $(b < +\infty)$. Ta chứng minh $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Ta có $f(x) \leq b$, với mọi $x \in A$. Cho trước $\varepsilon > 0$, theo tính chất của cận trên đúng, tồn tại $x' < x_0$, $x' \in A$ sao cho $f(x') > b - \varepsilon$. Do f là hàm tăng với mọi $x \in A$, $x > x'$ ta có $b \geq f(x) \geq f(x') > b - \varepsilon$. Nếu lấy $\delta = x_0 - x' > 0$ thì với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$, tức là thoả mãn $x_0 - \delta = x' < x < x_0$ ta có $|f(x) - b| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b = \sup\limits_{x \in A} f(x)$.

Nếu f là hàm giảm thì -f là hàm tăng và theo phần vừa chứng minh ta có:

$$\lim_{x \to a}(-f(x)) = \sup_{x \in A}(-f(x)) = -\inf_{x \in A} f(x), \text{ từ đó } \lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in A} f(x).$$

Ghi chú: Giới hạn xét ở đây chính là giới hạn bên trái tại x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Tương tự ta có

Định lý 21.II. Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ x_0 và $x_0 \leq x$ với mọi $x \in A$. Nếu $f : A \to R$ là hàm tăng (tương ứng giảm) ở trên A và f là hàm bị chặn dưới (tương ứng bị chặn trên) trên A thì khi $x \to x_0$ hàm f có giới hạn hữu hạn.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \inf_{x\in A} f(x) \text{ (tương ứng } \lim_{x\to x_0} f(x) = \sup_{x\in A} f(x)\text{)}.$$

Giới hạn xét ở đây chính là giới hạn bên phải tại x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

9. Mở rộng khái niệm giới hạn

a) Giới hạn + ∞ (hoặc - ∞)

Định nghĩa: Cho hàm f xác định trên tập $A \subset R$, x_0 là điểm tụ của A. Nếu với mọi $M > 0$ tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in A$ thoả mãn $0 < |x - x_0| < \delta$ ta có $f(x) > M$ thì ta nói rằng f có giới hạn $+\infty$ khi x tiến đến x_0 và ta viết:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \text{ hay } f(x) \to +\infty \text{ khi } x \to x_0.$$

Nếu với mọi $M > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A|\ 0 < |x - x_0| < \delta\}$ ta có $f(x) < -M$ thì ta nói hàm f có giới hạn $-\infty$ khi $x \to x_0$ và ký hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to x_0$.

Dễ dàng thấy rằng $f(x) \to +\infty$ (tương ứng $f(x) \to -\infty$) khi $x \to x_0$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}_n \subset A\backslash\{x_0\}$, $x_n \to x_0$ ta có $f(x_n) \to +\infty$ (tương ứng $f(x_n) \to -\infty$).

Ví dụ: Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ xác định trên tập hợp $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Ta chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Thật vậy, cho trước $M > 0$, với $x \in (-1, +\infty)$ bất đẳng thức $\dfrac{1}{x+1} > M$ xảy ra khi và chỉ khi

$x + 1 < \dfrac{1}{M}$ hay $x < -1 + \dfrac{1}{M}$. Nếu chọn $\delta = \dfrac{1}{M}$ thì với mọi $x \in (-1, -1 + \dfrac{1}{M})$ ta có $f(x) = \dfrac{1}{x+1} > M$. Vậy $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.

b) Giới hạn khi $x \to +\infty$ (hoặc $-\infty$)

Cho tập hợp $A \subset R$, ta nói A nhận $+\infty$ làm điểm tụ nếu với mọi $M > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại một số $x_M \in A$ sao cho $x_M > M$. Như vậy nếu A là một tập hợp không bị chặn trên thì nó nhận $+\infty$ làm điểm tụ.

Ta nói tập hợp A nhận $-\infty$ làm điểm tụ nếu với mọi $M > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại $x_M \in A$ sao cho $x_M < -M$. Như vậy nếu A là một tập hợp không bị chặn dưới thì nó nhận $-\infty$ làm điểm tụ.

Định nghĩa. Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ là $+\infty$ và hàm số f: $A \to R$. Ta nói f(x) có giới hạn hữu hạn b khi $x \to +\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x > M\}$ ta có $|f(x) - b| < \varepsilon$. Khi đó ta ký hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Nếu với mọi $M > 0$ tồn tại một số $K > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x > K\}$ ta có $f(x) > M$ thì ta nói f(x) có giới hạn $+\infty$ khi $x \to +\infty$ và ký hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Nếu với mọi $M > 0$ cho trước luôn tồn tại một số $K > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x > K\}$ ta có $f(x) < -M$ thì ta nói f(x) có giới hạn $-\infty$ khi $x \to +\infty$ và ký hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Tương tự ta có:

Định nghĩa. Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ là $-\infty$ và hàm số f: $A \to R$. Ta nói f(x) có giới hạn hữu hạn b khi $x \to -\infty$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại $K > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x < -K\}$ ta có $|f(x) - b| < \varepsilon$. Khi đó ta ký hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Nếu với mọi $M > 0$ cho trước luôn tồn tại số $K > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x < -K\}$ ta có $f(x) > M$ thì ta nói $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to -\infty$ và ký hiệu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Nếu với mọi $M > 0$ cho trước luôn tồn tại $K > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x < -K\}$ ta có $f(x) < -M$ thì ta nói $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x \to -\infty$, viết $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Các định nghĩa trên đây có thể phát biểu dưới dạng tương đương bằng cách dùng dãy số. Chẳng hạn dễ dàng chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}_n \subset A$, $x_n \to +\infty$ ta có $f(x_n) \to b (n \to \infty)$.

10. Vô cùng bé và vô cùng lớn

a) Định nghĩa. Cho tập hợp $A \subset R$ có điểm tụ là x_o và hàm số $f: A \to R$. Ta nói f là một vô cùng bé (viết tắt là VCB) khi $x \to x_o$ nếu $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$.

Ta nói f là một vô cùng lớn (viết tắt là VCL) khi $x \to x_o$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$.

Để cho gọn đôi khi người ta gọi VCB, VCL khi $x \to x_o$ là VCB, VCL tại x_o nhưng phải hiểu rằng VCB, VCL là những đại lượng gắn với quá trình $x \to x_o$.

b) Các tính chất. Từ định nghĩa và từ định lý về các phép toán đối với giới hạn hàm số suy ra các tính chất sau đây của các VCB và VCL.

Tính chất 1: nếu f, g là những VCB tại x_0 thì $f \pm g$, fg cũng là những VCB tại x_o.

Tính chất 2: Nếu f, g là những VCL tại x_o thì fg cũng là VCL tại x_o.

Tính chất 3: Nếu f là VCB tại x_o, g là một hàm số bị chặn trong một lân cận U nào đó của x_o, tức là $|g(x)| \le M$ với mọi $x \in U$ thì f.g cũng là VCB tại x_o.

Tính chất 4: Nếu f là VCL tại x_o thì $\frac{1}{f}$ là VCB tại x_o.

c) So sánh các vô cùng bé

Định nghĩa. Cho f, g là hai VCB tại x_o. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

i) Nếu $l = 0$ thì ta nói f là VCB bậc cao hơn VCB g (hoặc g là VCB bậc thấp hơn VCB f) và ký hiệu $f = o(g)$.

ii) Nếu $0 < |l| < +\infty$ thì ta nói f và g là hai VCB cùng bậc. Đặc biệt khi $l = 1$ ta nói f và g là hai VCB tương đương và ký hiệu $f \sim g$.

iii) Nếu $l = \pm\infty$ thì f là VCB bậc thấp hơn VCB g.

Chú ý. Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ thì ta nói f và g là hai vô cùng bé không so sánh được.

Từ định nghĩa ta thấy rằng nếu f, g, h là những VCB khi $x \to x_o$ và $f \sim g$, $g \sim h$ thì $f \sim h$.

Thật vậy ta có $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} . \frac{g(x)}{h(x)}$, từ đó

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} . \lim_{x \to x_o} \frac{g(x)}{h(x)} = 1.1 = 1$$

Vậy $f \sim h$.

Ví dụ. Cho $f(x) = x$, $g(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $h(x) = \sin x$. Khi $x \to 0$ chúng là những VCB và $f \sim h$ còn f, g là hai VCB không so sánh được.

d) Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định

Ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề. Giả sử f, g, $\bar{f}, \bar{g}$ là những VCB tại x_o và $f \sim \bar{f}$, $g \sim \bar{g}$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ nếu một trong hai giới hạn này tồn tại.

Chứng minh. Giả thử $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$ tồn tại. Ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{\bar{f}(x)} \cdot \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \cdot \frac{\bar{g}(x)}{g(x)}, \text{ từ đó}$$

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{\bar{f}(x)} \cdot \lim_{x \to x_o} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)} \cdot \lim_{x \to x_o} \frac{\bar{g}(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{\bar{f}(x)}{\bar{g}(x)}$$

Chú ý. Nếu $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là hai VCB khi $x \to x_o$ và $\beta(x) = o(\alpha(x))$ (VCB bậc cao hơn $\alpha(x)$) thì $\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$.

Thật vậy ta có $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)} + \lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$.

Như vậy trong quá trình khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nếu tử số hoặc mẫu số là tổng của các VCB thì ta có thể thay bằng các VCB tương đương bằng cách bỏ đi các VCB bậc cao.

e) So sánh các vô cùng lớn

Định nghĩa. Cho f và g là hai VCL tại x_o.

i) Nếu $\dfrac{f}{g}$ là một VCL tại x_o, tức là $\lim\limits_{x \to x_o} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, thì ta nói f là VCL bậc cao hơn so với VCL g.

ii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ với $0 < |l| < +\infty$ thì ta nói f và g là hai VCL cùng bậc. Đặc biệt nếu $l = 1$ thì ta nói f và g là hai VCL tương đương, ký hiệu là $f \sim g$.

iii) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì ta nói g là VCL bậc cao hơn so với f hay f là VCL bậc thấp hơn so với g.

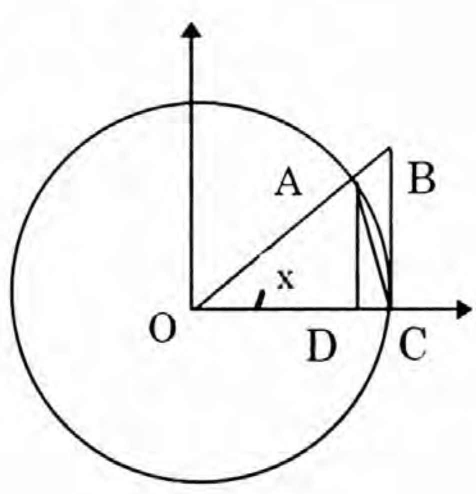
Nếu $\dfrac{f}{g}$ không tiến đến giới hạn hữu hạn và cũng không là VCL khi $x \to x_0$ thì ta nói f và g không so sánh được.

Tương tự như đối với các VCB, để khử dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$ ta có thể thay các VCL ở tử số và mẫu số bằng các VCL tương đương. Đặc biệt nếu tử số hoặc mẫu số là tổng các VCL, ta có thể thay bằng các VCL tương đương bằng cách bỏ đi các VCL bậc thấp trong tử số hoặc mẫu số.

11. Một số ví dụ quan trọng về giới hạn

Sau đây ta giới thiệu một số giới hạn quan trọng thường gặp.

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$



Hình 1.

Ta vẽ một vòng tròn bán kính đơn vị và giả thiết rằng góc ở tâm x tính theo radian và chứa trong O và $\dfrac{\pi}{2}$.

Trên hình 1. ta có

diện tích ΔOAC < diện tích quạt OAC < diện tích ΔOBC.

Các diện tích này tương ứng bằng $\frac{1}{2}\sin x$, $\frac{1}{2}x$ và $\frac{1}{2}\text{tg}x$. Do đó ta có $\sin x < x < \text{tg}x$. Chia các bất đẳng thức này cho sinx ta được:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ hay } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Nhưng ta có $\cos x = OD = 1 - DC > 1 - AC > 1 - x$. Vì thế

$1 - x < \frac{\sin x}{x} < 1.$

Cho $x \to 0$, $x > 0$ ta được $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Xét trường hợp $x < 0$. Đặt $x = -t$, $t > 0$, ta có

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Giả sử $\{x_k\}$ là một dãy, $x_k \to +\infty$ khi $k \to \infty$, ta có thể xem $x_k \geq 1$ với mọi k.

Vì $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ nên với mọi dãy con $\{n_k\}_k$ của dãy số tự nhiên ta đều có $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e.$

Đặt $n_k = [x_k]$ ta có $n_k \leq x_k < n_k + 1$ hay

$$\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k} \text{ và } n_k \to +\infty \text{ khi } x_k \to +\infty.$$

Từ đó $\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$

Do $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} = e$

và $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e$

nên ta có $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$. Vì $\{x_k\}_k$ là dãy bất kỳ, $x_k \to +\infty$, ta suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Lấy một dãy bất kỳ $\{x_k\}_k$, $x_k \to -\infty$ $(k \to \infty)$. Ta có thể xem $x_k < -1$ với mọi k. Đặt $t_k = -x_k$. Khi đó $t_k > 1$, $t_k \to +\infty$ $(k \to \infty)$ và

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1-\frac{1}{t_k}\right)^{-t_k} = \left(\frac{t_k}{t_k-1}\right)^{t_k} = \left(1+\frac{1}{t_k-1}\right)^{t_k-1}\left(1+\frac{1}{t_k-1}\right) \to e.$$

từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

d) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Đặt $t = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, ta có $x \to 0+$ khi và chỉ khi $t \to +\infty$, $x \to 0-$ khi và chỉ khi $t \to -\infty$. Từ đó theo b) và c) ta có:

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e;$$

$$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e.$$

Vì vậy $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

§3. HÀM LIÊN TỤC

Khi xét giới hạn của hàm f: $A \to R$ khi $x \to x_o$ với x_o là điểm tụ của A ta không đòi hỏi $x_o \in A$. Ngay cả khi $x_o \in A$ ta cũng không xét đến mối quan hệ giữa $\lim_{x\to x_o} f(x)$ với giá trị $f(x_o)$. Trong phần này ta sẽ xét đến mối quan hệ đó.

1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa. Cho tập hợp $A \subset R$, hàm số f: $A \to R$ và điểm $x_o \in A$. Nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại $\delta > 0$ (phụ thuộc vào ε) sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid |x - x_o| < \delta\}$ ta đều có $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ thì ta nói hàm f liên tục tại điểm x_o.

Nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in A$ thì ta nói f liên tục trên A.

Nếu f không liên tục tại điểm x_o thì ta nói f gián đoạn tại x_o, hay x_o là điểm gián đoạn của hàm f.

Từ định nghĩa ta trực tiếp suy ra các tính chất sau:

Tính chất 1. Nếu x_o là điểm cô lập của A thì f liên tục tại x_o. Thật vậy, do x_o là điểm cô lập nên tồn tại δ- lân cận $V_\delta(x_o) = \{x \in R \mid |x - x_o| < \delta\}$ sao cho $V_\delta(x_o) \cap A = \{x_o\}$. Vì thế nếu $x \in V_\delta(x_o) \cap A$ thì $x = x_o$ do đó $|f(x) - f(x_o)| = |f(x_o) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, với ε là số dương cho trước bất kỳ.

Tính chất 2. Nếu x_0 là điểm tụ của A thì f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ở đây điều kiện $0 < |x - x_0|$ không đặt ra vì tại $x = x_0$ ta có $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Tính chất 3. Hàm f liên tục tại x_0 khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}_n \subset A$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ta đều có $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Ta có thể lấy tính chất này làm định nghĩa tính liên tục của hàm f tại điểm x_0.

Chú ý. 1/ Khác với định nghĩa giới hạn hàm số tại điểm x_0, trong định nghĩa hàm liên tục tại x_0 ta không giả thiết $x \neq x_0$.

2/ Định nghĩa hàm liên tục tại x_0 có thể phát biểu lại qua khái niệm lân cận như sau:

Định nghĩa. Hàm f: $A \to R$ được gọi là liên tục tại $x_0 \in A$ nếu với mọi lân cận V của $f(x_0)$ tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $f(U \cap A) \subset V$.

Ví dụ. Hàm số f(x) = sinx liên tục trên R.

Thật vậy, cho $x_0 \in R$. Ta có

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x + x_0}{2}.\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|.$$

Vì thế, cho trước $\varepsilon > 0$ nếu chọn $\delta = \varepsilon$ thì với mọi $x \in R$ thỏa mãn $|x - x_0| < \delta$ ta có $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. Theo định nghĩa f(x) = sinx liên tục tại x_0. Vì x_0 là điểm bất kỳ của R, f liên tục trên R.

Tương tự ta chứng minh được rằng hàm số f(x) = cosx liên tục trên R.

2. Các phép toán trên các hàm số liên tục. Tính liên tục của hàm hợp

Định lý 22.II. Nếu f và g là hai hàm cùng xác định trên tập hợp A và liên tục tại điểm $x_0 \in A$ thì $\alpha f + \beta g$ (với α, β là những hằng số), f.g đều là những hàm liên tục tại x_o. Nếu $g(x_o) \neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ cũng là hàm liên tục tại x_o.

Chứng minh của định lý này suy ra trực tiếp từ tính chất 3 trên đây của hàm liên tục và định lý 5.II.

Định lý 23.II. Giả sử A, B là các tập hợp con của R, $f: A \to B$ liên tục tại $x_o \in A$, $g: B \to R$ liên tục tại $y_o = f(x_o) \in B$. Khi đó hàm hợp $g \circ f: A \to R$ liên tục tại x_o.

Chứng minh. Cho trước $\varepsilon > 0$. Vì g liên tục tại y_o nên tồn tại $\eta > 0$ sao cho $|g(y) - g(y_o)| < \varepsilon$ với mọi $y \in B$ thỏa mãn $|y - y_o| < \eta$. Do f liên tục tại x_o, với $\eta > 0$ nói trên tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(x_o)| < \eta$, với mọi $x \in A$ thỏa mãn $|x - x_o| < \delta$. Khi đó, với mọi $x \in \{x \in A \mid |x - x_o| < \delta\}$ ta có $|(gof)(x) - (gof)(x_o)| = |g(f(x)) - g(f(x_o))| < \varepsilon$.

Vậy gof liên tục tại x_o.

3. Tính liên tục một phía

Định nghĩa. Hàm $f: A \to R$ gọi là liên tục bên phải tại điểm $x_o \in A$ nếu mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x_o \leq x < x_o + \delta\}$ ta có $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Ta nói f liên tục bên trái tại $x_o \in A$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid x_o - \delta < x \leq x_o\}$ ta có $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$.

Các hàm số liên tục bên phải tại x_o hoặc liên tục bên trái tại x_o được gọi là liên tục một phía tại x_o.

Định lý 24.II. Hàm $f: A \to R$ liên tục tại $x_o \in A$ khi và chỉ khi f liên tục bên phải và liên tục bên trái tại x_o.

Chứng minh định lý này suy ra trực tiếp từ tính chất 2 nêu trên của hàm liên tục tại x_o và quan hệ giữa giới hạn thông thường với giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại x_o.

Ví dụ. Hàm E(x) = [x] liên tục bên phải tại mọi điểm $n \in Z$ (Z là tập tất cả các số nguyên).

4. Tính chất của một hàm số liên tục trên một đoạn

Định nghĩa. Cho hàm số f: $[a, b] \to R$. Nếu f liên tục trên (a, b), liên tục bên phải tại điểm a và liên tục bên trái tại điểm b thì ta nói f liên tục trên [a, b].

Định lý 25.II. Nếu hàm f liên tục trên đoạn [a, b] thì nó bị chặn trên đó.

Chứng minh (phản chứng). Giả sử f liên tục trên [a, b] nhưng không bị chặn trên đó. Khi đó với mọi $n \in N^*$ tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $|f(x_n)| > n$. Dãy $\{x_n\}_n$ là dãy bị chặn, theo nguyên lý Bolzano - Weierstrass nó có chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ hội tụ đến x_o. Vì $a \le x_{n_k} \le b$ với mọi k, nên cho $k \to \infty$ ta suy ra $a \le x_o \le b$. Do f liên tục tại x_o ta có $f(x_{n_k}) \to f(x_o)$, từ đó $|f(x_{n_k})| \to |f(x_o)|$ $(k \to \infty)$. Mặt khác $|f(x_{n_k})| \ge n_k$, vì thế $|f(x_{n_k})| \to +\infty$ $(k \to \infty)$, ta đi đến mâu thuẫn. Vậy hàm f phải bị chặn trên [a, b].

Định lý 26.II. Nếu hàm f liên tục trên đoạn [a, b] thì nó đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên đó, tức là tồn tại hai số x_o, $x'_o \in [a, b]$ sao cho $f(x_o) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $f(x'_o) = \inf\limits_{x\in[a,b]}(x)$.

Chứng minh. Theo định lý 25.II hàm f bị chặn trên [a, b], vì thế tồn tại $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M$, $M < +\infty$ và $\inf\limits_{x\in[a,b]}(x) = m$, $m > -\infty$.

Theo định nghĩa của cận trên đúng, tồn tại dãy $\{x_n\}_n \subset [a, b]$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Dãy $\{x_n\}_n$ là dãy bị chặn nên có chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}_k$, $x_{n_k} \to x_o \in [a, b]$. Khi đó, do f liên tục, ta có $M = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_o)$.

Tương tự ta chứng minh tồn tại $x'_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x'_0) = m$.

Định lý 27.II. (định lý Bolzano - Cauchy thứ nhất). Giả sử hàm $f: [a, b] \to R$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Định lý này có ý nghĩa hình học rất rõ ràng: nếu một đường cong liên tục đi từ một phía của trục x sang phía kia thì nó cắt trục này.

Chứng minh. Không mất tổng quát ta có thể giả thiết $f(a) < 0$ và $f(b) > 0$. Đặt $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$. Vì $a \in A$ nên $A \neq \varnothing$. Gọi $c = \sup A$. Ta chứng minh $f(c) = 0$. Theo định nghĩa của cận trên đúng tồn tại dãy $\{t_n\}_n \subset A$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = c$. Vì f liên tục tại c nên $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) \leq 0$. Do $f(b) > 0$ nên $c \neq b$ và do đó $c < b$. Nếu $f(c) < 0$ thì do f liên tục tại c, $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = f(c) < 0$, do đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho $c + \delta < b$ và $f(x) < 0$ với mọi $x \in [c, c + \delta]$. Đặc biệt $f(c + \delta) < 0$. Vì thế $c + \delta \in A$, điều này mâu thuẫn với c là cận trên của A. Vậy $f(c) = 0$.

Định lý 28.II (định lý Bolzano - Cauchy thứ hai). Giả sử f liên tục trên $[a, b]$. Khi đó f nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$, tức là với mọi số thực λ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \lambda$.

Chứng minh: Nếu $f(a) = f(b)$ định lý hiển nhiên đúng. Giả sử $f(a) \neq f(b)$. Không mất tổng quát ta có thể xem rằng $f(a) < f(b)$. Giả sử λ là số sao cho $f(a) < \lambda < f(b)$. Xét hàm $g(x) = f(x) - \lambda$. Ta có $g(a) < 0$, $g(b) > 0$. Theo định lý 27.II, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g(c) = 0$ hay $f(c) - \lambda = 0$. Do đó $f(c) = \lambda$.

5. Hàm số liên tục đều

Định nghĩa: Hàm số $f: A \to R$ được gọi là liên tục đều trên A nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ (chỉ phụ thuộc ε) sao cho với mọi $x, x' \in A$ thỏa mãn $|x - x'| < \delta$ ta đều có $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Rõ ràng là nếu f liên tục đều trên A thì nó liên tục trên A, điều ngược lại chưa chắc đúng.

Ví dụ: 1) Các hàm sinx, cosx liên tục đều trên R.

2) Hàm $f(x) = x^2$ liên tục trên R nhưng không liên tục đều trên đó.

Thật vậy để chứng minh f(x) không liên tục đều trên R ta cần chỉ ra rằng tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$ tồn tại $x_\delta, x'_\delta \in A$ thỏa mãn $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$ nhưng $|f(x_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon$.

Lấy $\varepsilon = 1$ ta thấy với mọi $\delta > 0$ nếu chọn $x_\delta = \frac{1}{\delta}$, $x'_\delta = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$

thì ta có $|x_\delta - x'_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta$ nhưng

$$\left|x_\delta^2 - x'^2_\delta\right| = \left|\frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon$$

Vậy hàm $f(x) = x^2$ không liên tục đều trên R.

Định lý 29.II. (Cantor): Cho hàm số f: [a, b] → R. Nếu f liên tục trên [a, b] thì f liên tục đều trên đó.

Chứng minh (phản chứng): Giả sử f không liên tục đều trên [a, b]. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta_n = \frac{1}{n} (n \in N)$ tồn tại x_n, x'_n thuộc [a, b] thỏa mãn điều kiện $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ và $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$. Dãy $\{x_n\}_n$ bị chặn nên nó chứa một dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ hội tụ đến $x_o \in [a, b]$ (do $a \leq x_{n_k} \leq b$ với mọi k). Mặt khác:

$$|x'_{n_k} - x_o| = |x'_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - x_o| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_o|$$

Khi $k \to \infty$ $|x'_{n_k} - x_{n_k}|$ và $|x_{n_k} - x_o|$ cùng tiến đến không, từ đó suy ra $x'_{n_k} \to x_o$. Từ các bất đẳng thức

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0 \ (k \in N^*)$$

cho $k \to \infty$, do f liên tục tại x_o ta suy ra

$$0 = |f(x_o) - f(x_0)| \geq \varepsilon > 0 \text{ vô lý.}$$

Vậy f phải liên tục đều trên [a, b].

6. Hàm đơn điệu, hàm ngược và tính liên tục của chúng

a) Phân loại điểm gián đoạn

Định nghĩa. Cho hàm số $f: [a, b] \to R$

Nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \alpha$ hữu hạn và $\alpha \neq f(a)$ thì ta nói a là điểm gián đoạn loại một của hàm f.

Nếu $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \beta$ hữu hạn và $\beta \neq f(b)$ thì b được gọi là điểm gián đoạn loại một.

Giả sử $x_o \in (a, b)$. Nếu tồn tại đồng thời hai giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x)$ và ít nhất một trong hai giới hạn này khác $f(x_o)$ thì x_o được gọi là điểm gián đoạn loại một.

Mỗi điểm gián đoạn của một hàm số không phải là điểm gián đoạn loại một được gọi là điểm gián đoạn loại hai.

Từ các định lý 20.II; 21.II về sự tồn tại giới hạn bên phải và giới hạn bên trái của hàm đơn điệu ta suy ra:

Định lý 30.II. Mọi điểm gián đoạn của hàm đơn điệu đều là điểm gián đoạn loại một.

Ví dụ: 1/ Hàm E(x) = [x] có các điểm gián đoạn là các điểm $n \in Z$. Các điểm này đều là điểm gián đoạn loại một.

2/ Hàm $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

nhận điểm x = 0 làm điểm gián đoạn loại hai.

3/ Hàm số Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu x hữu tỉ} \\ 0 & \text{nếu x vô tỉ} \end{cases}$

nhận mọi điểm $x \in R$ làm điểm gián đoạn loại hai. Thật vậy, như ta đã biết tập hợp Q các số hữu tỉ là trù mật trong R. Tập R \ Q các số vô tỉ cũng trù mật trong R vì nếu $x, y \in R$, $x < y$ thì $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ và tồn tại $r \in Q$ sao cho $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$ hay $x < r\sqrt{2} < y$, trong đó $r\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Vì thế nếu $x_o \in R$ thì với mọi $\delta > 0$, khoảng $(x_o - \delta, x_o)$ và $(x_o, x + \delta)$ chứa vô số số hữu tỉ cũng như vô số số vô tỉ. Do đó không tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x_o)$. Vậy x_o là điểm gián đoạn loại hai.

b) Quan hệ giữa tính đơn điệu và tính liên tục

Định lý 31.II. Cho $f: [a, b] \to R$ là một hàm đơn điệu. Điều kiện cần và đủ để hàm f liên tục trên [a, b] là tập giá trị của nó chính là đoạn với hai đầu mút f(a) và f(b).

Chứng minh. Ta xét trường hợp f là hàm tăng (nếu f là hàm giảm ta xét hàm $g = -f$, với g là hàm tăng).

i) Điều kiện cần. Giả sử f liên tục trên [a, b], ta chứng minh $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Với mọi $x \in [a, b]$ ta có $f(a) \le f(x) \le f(b)$, từ đó suy ra $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.

Ngược lại, lấy $\lambda \in [f(a), f(b)]$, do f liên tục, theo định lý Bolzano - Cauchy về giá trị trung gian, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $\lambda = f(c)$, do đó $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$. Vậy $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

ii) Điều kiện đủ. Giả sử f tăng và $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Ta chứng minh f liên tục trên [a, b].

Giả sử ngược lại f gián đoạn tại $x_o \in [a, b]$. Nếu $a < x_o < b$, ta gọi $\lim\limits_{x \to x_o -} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x \to x_o +} f(x) = \beta$, khi đó hoặc $\alpha < f(x_o)$, hoặc $f(x_o) < \beta$.

Nếu $\alpha < f(x_o)$ thì do $f(x) \le \alpha$ với mọi $x < x_o$ và $f(x) \ge f(x_o)$ với mọi $x \ge x_o$, $f([a, b])$ không chứa khoảng $(\alpha, f(x_o))$. Tương tự nếu $f(x_o) < \beta$ thì $f([a, b])$ không chứa khoảng $(f(x_o), \beta)$. Điều này trái với giả thiết $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

Trường hợp $x_o = a$ hoặc $x_o = b$ ta lập luận tương tự. Vậy f liên tục trên [a, b].

c) Tính liên tục của hàm ngược

Định lý 32.II. Giả sử f là hàm tăng thực sự và liên tục trên [a, b]. Khi đó f có hàm ngược f^{-1} xác định trên [f(a), f(b)]; f^{-1} cũng tăng thực sự và liên tục trên [f(a), f(b)].

Chứng minh. Theo định lý 31.II, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Vì thế với mỗi $y \in [f(a), f(b)]$, phương trình $f(x) = y$ có nghiệm duy nhất (do f tăng thực sự) $x \in [a, b]$. Ký hiệu f^{-1} ánh xạ cho tương ứng phần tử y với nghiệm x đó $f^{-1}: [f(a), f(b)] \to [a, b]$. Ta chứng minh f^{-1} là hàm tăng thực sự. Thật vậy, giả sử $y, y' \in [f(a), f(b)]$, $y < y'$. Khi đó tồn tại $x, x' \in [a, b]$ sao cho $y = f(x)$, $y' = f(x')$. Ta có $f(x) < f(x')$ vì thế $x < x'$ hay $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. Vậy f^{-1} tăng thực sự trên [f(a), f(b)]. Vì rõ ràng là $f^{-1}[f(a), f(b)] = [a, b]$ nên theo định lý 31.II f^{-1} liên tục.

Chú ý. Định lý còn đúng khi f là hàm giảm thực sự hoặc thay đoạn [a, b] bằng khoảng (a, b).

7. Tính liên tục của các hàm sơ cấp

Từ tính chất các phép toán về hàm liên tục và từ các ví dụ trên đây ta thấy rằng các đa thức là hàm liên tục, các phân thức hữu tỉ liên tục tại mọi điểm mà tại đó mẫu số khác 0, các hàm lượng giác sinx, cosx liên tục, tgx (với $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$) và cotgx(với $x \ne k\pi$) là hàm liên tục. Theo định lý về tính liên tục của hàm ngược ta suy ra các hàm lượng giác ngược arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx cũng liên tục trong các miền xác định của chúng.

Bây giờ ta xét tính liên tục của hàm số mũ. Trước hết ta nhắc lại định nghĩa và các tính chất của lũy thừa của số hữu tỉ.

Định nghĩa. Xét phương trình $x^n = a$ ($a > 0$, $n \in N^*$) nghiệm không âm duy nhất của phương trình này được gọi là căn bậc n của a, ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Nếu r là số hữu tỉ, $r = \frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N^*$, $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, ta đặt $a^r = \sqrt[n]{a^m}$ $(a > 0)$.

Ta đã biết các tính chất sau của lũy thừa với số mũ hữu tỉ: với mọi số hữu tỉ r, s và với mọi số thực a, b dương ta có

(1) $a^r.a^s = a^{r+s}$

(2) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

(3) $(ab)^r = a^r b^r$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

(5) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$

(6) $(a^r)^s = (a^s)^r = a^{rs}$

(7) Với $a > 1$, nếu $r < s$ thì $a^r < a^s$

với $0 < a < 1$, nếu $r < s$ thì $a^r > a^s$.

Để xây dựng lũy thừa với số mũ thực ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề. Nếu a là một số thực dương và $\{r_n\}_n$ là một dãy số hữu tỉ hội tụ thì dãy $\{a^{r_n}\}_n$ cũng hội tụ.

Chứng minh. Với $a = 1$ bổ đề rõ ràng đúng. Giả sử $a > 1$, ta chứng minh $\{a^{r_n}\}_n$ là dãy cơ bản. Vì dãy $\{r_n\}_n$ hội tụ, tồn tại một số hữu tỉ r sao cho $|r_n| \le r$ với mọi n. Khi đó $a^{-r} \le a^{r_n} \le a^r$ với mọi n. Gọi $M = a^r$. Cho trước $\varepsilon > 0$, vì $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, tồn tại n_o sao cho $1 - \dfrac{\varepsilon}{M} < a^{-\frac{1}{n_o}} < 1 < a^{\frac{1}{n_o}} < 1 + \dfrac{\varepsilon}{M}$

Dãy $\{r_n\}_n$ hội tụ nên là dãy cơ bản, vì thế tồn tại n_1 sao cho với mọi m, n > n_1 ta có $-\dfrac{1}{n_o} < r_m - r_n < \dfrac{1}{n_o}$, từ đó suy ra $a^{-\frac{1}{n_o}} < a^{r_m - r_n} < a^{\frac{1}{n_o}}$ và $1 - \dfrac{\varepsilon}{M} < a^{r_m - r_n} < 1 + \dfrac{\varepsilon}{M}$ với mọi m, n > n_1. Do đó

$$| a^{r_m} - a^{r_n} | = | a^{r_n}(a^{r_m - r_n} - 1) | < M.\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon, \text{ với mọi n, m} > n_1.$$

Vậy $\{a^{r_n}\}_n$ là dãy cơ bản nên nó hội tụ.

Nếu $0 < a < 1$ thì đặt $b = \dfrac{1}{a}$, ta có $b > 1$. Theo chứng minh trên dãy $\{b^{r_n}\}_n$ hội tụ, do đó dãy $\{a^{r_n}\}_n = \left\{\dfrac{1}{b^{r_n}}\right\}_n$ cũng hội tụ.

Định nghĩa. Cho a là một số thực dương. Với mỗi $x \in R$ tồn tại dãy số hữu tỉ $\{r_n\}_n$ hội tụ đến x. Đặt $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$

Ta gọi a^x là lũy thừa của a với số mũ thực x. Hàm số $f(x) = a^x$, $x \in R$, được gọi là hàm số mũ với cơ số a.

Để thấy định nghĩa trên là hợp lý ta cần phải chỉ ra rằng số a^x xác định như trên không phụ thuộc vào cách chọn dãy hữu tỉ $\{r_n\}_n$ hội tụ đến x.

Thật vậy, giả sử có dãy hữu tỉ khác $\{r'_n\}_n$ hội tụ đến x. Khi đó $r_n - r'_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Bằng lập luận tương tự như khi chứng minh $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ $(n \to \infty)$ ta suy ra $a^{r_n - r'_n} \to 1$ $(n \to \infty)$. Xuất phát từ hệ thức

$$a^{r'_n} = a^{r'_n} - a^{r_n} + a^{r_n} = a^{r'_n}(1 - a^{r_n - r'_n}) + a^{r_n}$$

ta nhận được $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$

Từ các tính chất của a^r với r hữu tỉ, bằng cách tiến qua giới hạn trong đẳng thức hoặc bất đẳng thức ta suy ra các tính chất tương ứng của a^x với x thực.

Định lý 33.II. Hàm số mũ a^x với cơ số $a > 0$ liên tục trên R.

Chứng minh. Cho x_o là một điểm tùy ý thuộc R. Ta chứng minh rằng nếu $x_n \to x_o$ thì $a^{x_n} \to a^{x_o}$ $(n \to \infty)$.

Thật vậy, với mỗi n ta chọn các số hữu tỉ r_n, s_n sao cho $x_n - \frac{1}{n} < r_n < x_n < s_n < x_n + \frac{1}{n}$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{n}\right) = x_o$ và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = x_o$.

Nếu $a > 1$ thì $a^{r_n} < a^{x_n} < a^{s_n}$

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{r_n} > a^{x_n} > a^{s_n}$

Theo định nghĩa của lũy thừa với số mũ thực

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^{x_o}$$

Vì thế trong cả hai trường hợp trên ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_o}$.

Nếu $a = 1$ thì rõ ràng $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1 = a^{x_o}$.

Vậy hàm a^x liên tục tại x_0 và do x_0 là điểm bất kỳ thuộc R, hàm a^x liên tục trên R.

Hàm a^x $(a > 0, a \neq 1)$ xác định trên $(-\infty, +\infty)$ với tập giá trị là $(0, +\infty)$ là hàm đơn điệu thực sự, do đó nó có hàm ngược xác định trong khoảng $(0, +\infty)$.

Hàm ngược của hàm số mũ $a^x(a > 0, a \neq 1)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a, ký hiệu là $\log_a x$. Nếu a = e ta ký hiệu $\log_e x$ là $l$nx và gọi nó là lôgarit tự nhiên hay logarit Neper của x.

Từ tính chất của hàm ngược (định lý 32.II) ta suy ra rằng $\log_a x$ là hàm liên tục, tăng nếu $a > 1$ hoặc giảm nếu $0 < a < 1$.

Đặt $x^\alpha = e^{\alpha l n x}$ $(x > 0)$, ta có hàm x^α cũng là hàm liên tục với mọi $x > 0$. Hàm $f(x) = x^\alpha$ được gọi là hàm lũy thừa.

Định nghĩa. Các hàm hữu tỉ hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm lượng giác và các hàm ngược của chúng được gọi là các hàm sơ cấp cơ bản.

Các hàm nhận được từ các hàm sơ cấp cơ bản bằng cách thực hiện một số hữu hạn các phép cộng, trừ, nhân, chia, lấy căn và phép hợp được gọi là hàm sơ cấp.

Từ các kết quả trên đây ta suy ra định lý sau:

Định lý 34.II. Mọi hàm sơ cấp liên tục trong miền xác định của nó.

Ví dụ. Các hàm lượng giác hyperbolic xác định dưới đây:

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

xác định và liên tục trên R.

Hàm $\mathrm{coth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ xác định và liên tục với $x \neq 0$.

8. Áp dụng tính liên tục của hàm số vào việc khảo sát giới hạn hàm số

Ta sử dụng tính liên tục của hàm số mũ, hàm số lôgarit, hàm lũy thừa để chứng minh các hệ thức giới hạn quan trọng sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ (1)

Đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$ (2)

tức là $ln(1 + x) \sim x$ khi $x \to 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = ln a$ $(a > 0)$ (3)

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (4)

a/ Thật vậy, vì $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ $(x \to 0)$ và hàm lôgarit là hàm liên tục ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e.$

b/ Đặt $y = a^x - 1$; do hàm mũ liên tục, khi $x \to 0$ ta có

$y = a^x - 1 \to a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, từ đó do $x = \log_a(1 + y)$ ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = ln a$$

c/ Đặt $y = (1 + x)^\alpha - 1$. Do hàm luỹ thừa liên tục, khi $x \to 0$, ta có $(1 + x)^\alpha - 1 \to 1 - 1 = 0$. Hơn nữa, do $1 + y = (1 + x)^\alpha$, từ đó suy ra $\alpha = \dfrac{ln(1+y)}{ln(1+x)}$ và $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{ln(1+y)}.\alpha.\dfrac{ln(1+x)}{x}$

Vì vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$, do đó $(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha x$ khi $x \to 0$.

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{\sin\gamma x}$ $\quad(\gamma \neq 0)$

Ta có $\dfrac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{\sin\gamma x}=\dfrac{\sqrt[3]{1+\beta x}\left[\sqrt{1+\alpha x}-1\right]+\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{\sin\gamma x}$

và $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{1+\beta x}=1$. Bằng cách thay các vô cùng bé bằng các vô cùng bé tương đương ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{2}}-1}{\sin\gamma x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{2}x}{\gamma x}=\frac{\alpha}{2\gamma}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\beta x)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin\gamma x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\beta}{3}x}{\gamma x}=\frac{\beta\alpha}{3\gamma}$$

Từ đó

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\alpha x}\sqrt[3]{1+\beta x}-1}{\sin\gamma x}=\frac{\alpha}{2\gamma}+\frac{\beta}{3\gamma}=\frac{3\alpha+2\beta}{6\gamma}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ $(a > 1)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^n} = 0$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ $(|q| < 1)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$; h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$ $(a > 0, a \neq 1)$

2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + ... + a^n}{1 + b + b^2 + ... + b^n}$ $(|a| < 1, |b| < 1)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + ... + \dfrac{2n-1}{2^n}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\ \sqrt[4]{2}\ \sqrt[8]{2} ... \sqrt[2^n]{2}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

3. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}...\dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$

4. Dùng định lý về sự tồn tại giới hạn của dãy đơn điệu bị chặn hãy chứng minh sự hội tụ của các dãy sau:

a) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{4}\right)...\left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$, $(n = 1, 2, ...)$;

b) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, ... $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\text{n căn}}$;

c) $x_n = p_o + \dfrac{p_1}{10} + \ldots + \dfrac{p_n}{10^n}$ (n = 1, 2, ...)

trong đó $0 \le p_i \le 9$, (i = 0, 1, 2, ...)

5. Dùng nguyên lý hội tụ Cauchy để xét tính hội tụ của các dãy sau:

a) $x_n = a_o + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, $|a_n| \le M$ (n = 1, 2, ...) ; $|q| < 1$

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, n = 1, 2, ...

c) $x_n = \dfrac{\sin\alpha}{2} + \dfrac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$ (n = 1, 2, ...)

6. Dùng nguyên lý hội tụ Cauchy chứng minh tính phân kỳ của các dãy sau:

a) $x_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{\ln n}$ (n = 2, 3 ...);

b) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{1}{3n-2} + \dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{1}{3n}$ (n = 1, 2 ...)

7. Giả sử dãy $\{x_n\}_n$ hội tụ, còn dãy $\{y_n\}_n$ phân kỳ. Có thể nói gì về sự hội tụ của các dãy sau:

a) $\{z_n\}_n = \{x_n + y_n\}_n$

b) $\{z_n\}_n = \{x_n.y_n\}_n$. Cho các ví dụ tương ứng.

8. Giả sử $\{x_n\}_n$ và $\{y_n\}_n$ là các dãy phân kỳ. Có thể nói gì về sự hội tụ của các dãy $\{x_n + y_n\}_n$ và $\{x_n.y_n\}_n$. Cho các ví dụ tương ứng.

9. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ thì có thể suy ra hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ được không?

10. Cho dãy $\{x_n\}_n$ xác định như sau $x_0 = 1$, $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$ $(n = 1, 2, ...)$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

11. Tìm giới hạn trên và giới hạn dưới của các dãy sau:

a) $x_n = (-1)^{n-1}(2 + \dfrac{3}{n})$ $(n = 1, 2, ...)$;

b) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$ $(n = 1, 2, ...)$;

c) $x_n = n[2 + (-1)^n]$ $(n = 1, 2, ...)$

12. Chứng minh rằng tập hợp $M = \left\{\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{n}{2n+1}, n = 1, 2 ...\right\}$ chỉ có hai điểm tụ là 0 và 1.

Kết hợp các phương pháp khác nhau để giải các bài toán sau:

13. Tìm giới hạn: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

14. Cho dãy $\{a_n\}_n$ xác định theo qui luật sau:

$$a_1 = 0,\ a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4}\ (n = 1, 2, ...)$$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_n$ cố giới hạn và tìm giới hạn đó.

15. Với giá trị nào của a và b thì dãy sau đây hội tụ:

$$x_0 = a,\ x_1 = 1 + bx_0,\ ...,\ x_{n+1} = 1 + bx_n,\ ...$$

16. Dãy $\{x_n\}_n$ được xác định theo quy luật sau:

$x_1 = x$, $x \in [0, 1]$; với $n \geq 2$ và chẵn thì $x_n = \dfrac{1}{2}x_{n-1}$; với $n > 2$ và lẻ thì $x_n = \dfrac{1 + x_{n-1}}{2}$

Tìm tất cả các điểm giới hạn của dãy đó.

17. Tính các giới hạn hàm số sau đây:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}$; $(n \in N^*)$

K c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$; $(n, m \in N^*)$

K d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$; $(n \in N^*)$

k e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$. $(m, n \in N^*)$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(x+1)(x^2+1)...(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$. $(n \in N^*)$

18. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ $(m, n \in N^*)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

19. Tính giới hạn các hàm lượng giác sau

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{tg^3x-3tgx}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

20. Tính các giới hạn dạng $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot g\pi x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; d) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

21. Bằng cách thay các vô cùng bé bằng các vô cùng bé tương đương, tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ ($b\neq 0$);

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln[\cos(\pi 2^x)]}$; d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ ($a>0$);

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ ($a>0$); f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

22. Tính các giới hạn một phía sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{\sin x}{|x|}$.

23. Xác định miền tồn tại của các hàm số sau:

a) $y = (x - 2)\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$; b) $y = lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$;

c) $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

24. Xác định hàm ngược $x = \varphi(y)$ và miền tồn tại của các hàm số đó.

a) $y = x^2$ trong các miền $-\infty < x \le 0$ và $0 \le x < +\infty$;

b) $y = \sqrt{1-x^2}$ khi $-1 \le x \le 0$ và $0 \le x \le 1$.

25. a) Chứng minh hàm số $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ bị chặn trong khoảng $(-\infty, +\infty)$.

b) Tìm cận trên đúng và cận dưới đúng của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ trong miền $0 \le x < +\infty$.

26. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ nếu $x \ne 2$ và $f(2) = A$ trong đó A là một hằng số nào đó;

b) $f(x) = \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ nếu $x \ne 0$ và $f(0) = 1$;

c) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$ nếu $x \ne 0$, $f(0) = 0$.

27. Xét tính liên tục và phân loại điểm gián đoạn của các hàm số sau:

a) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ nếu $x \neq 0$, $f(0) = a$, trong đó a là một hằng số nào đó.

b) $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{nếu } |x| \leq 1 \\ x - 1 & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$

28. Xét tính liên tục của hàm số hợp $f[g(x)]$ và $g[f(x)]$ nếu $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2$.

29. Chứng minh rằng nếu f(x) liên tục thì $|f(x)|$ cũng liên tục trong miền đó.

30. Chứng minh rằng nếu hàm f(x) liên tục trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ và tồn tại các giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ thì f(x) bị chặn trong $(-\infty, +\infty)$.

31. Chứng minh tính liên tục đều của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ trong khoảng $[0, +\infty)$

b) $f(x) = 2\sin x - \cos x$ trong khoảng $(-\infty, +\infty)$

c) $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$ nếu $x \neq 0$ và $f(0) = 0$, với $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

32. Chứng minh rằng hàm $f(x) = \sin x^2$ liên tục và bị chặn trong khoảng vô hạn $(-\infty, +\infty)$ nhưng không liên tục đều trong khoảng này.

Chương III

TÔ PÔ VÀ HÀM LIÊN TỤC TRÊN R^n

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ KHÔNG GIAN MÊTRIC

Cho hai số thực x, y. Ta gọi số $d(x, y) = |x - y|$ là khoảng cách giữa hai điểm x, y của đường thẳng thực R. Từ khái niệm khoảng cách này ta có thể đưa vào khái niệm hội tụ: dãy $\{x_n\}_n \subset R$ gọi là hội tụ đến x nếu khoảng cách $d(x_n, x) = |x_n - x| \to 0$ $(n \to \infty)$. Tiếp theo, ta xây dựng khái niệm lân cận, điểm tụ, v.v... Bằng cách khái quát hóa những tính chất cơ bản nhất của khoảng cách nói trên ta có thể đưa vào khái niệm khoảng cách giữa các phần tử trong một tập hợp bất kì và ta đi đến khái niệm không gian mêtric, tiếp đó ta xây dựng các khái niệm tương tự: Khái niệm hội tụ, lân cận, điểm tụ và các khái niệm tôpô khác.

1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa: Cho một tập hợp $X \neq \varnothing$ bất kì. Một khoảng cách hay một mêtric trên X là một ánh xạ $d: X \times X \to R$ thỏa mãn ba tiên đề sau:

T_1: $d(x, y) > 0$ nếu $x \neq y$, $d(x, y) = 0$ nếu $x = y$.

T_2: $d(x, y) = d(y, x)$, với mọi $x, y \in X$ (tính đối xứng).

T_3: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ với mọi $x, y, z \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

Tập hợp X cùng với một mêtric d xác định trên đó được gọi là một không gian mêtric, ký hiệu là (X, d). Ta cũng ký hiệu không gian mêtric bởi X nếu khoảng cách d đã xác định rõ. Phần tử $x \in X$ được gọi là điểm của không gian.

Ví dụ: 1) Cho A là một tập con của tập số thực R. Xét ánh xạ d: A × A → R xác định bởi d(x, y) = |x - y|. Khi đó (A, d) là một không gian mêtric.

2) Cho B là một tập con của tập số phức C, ánh xạ d: B × B → R xác định bởi:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

nếu $z_1 = x_1 + iy_1$; $z_2 = x_2 + iy_2 \in B$

(B, d) là một không gian mêtric.

3) Cho (X, d) là một không gian mêtric, A là một tập hợp con của X. Khi đó (A, d) cũng là một không gian mêtric. Nó được gọi là không gian con của không gian mêtric (X, d).

4) Giả thử $X = R^n$. Ta xác định khoảng cách giữa hai phần tử $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2,..., y_n)$ của nó theo công thức:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Rõ ràng tiên đề T_1 và T_2 về khoảng cách được thực hiện. Để kiểm tra tiên đề T_3 ta dùng bất đẳng thức Cauchy:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} \quad (a_i; b_i \in R \text{ với } i = 1, 2, ..., n)$$

Thật vậy, cho $x = (x_1, x_2,... x_n)$; $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ và $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$.

Ta có:

$$d^2(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2} + \sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2$$

$$d^2(x,y) \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i + y_i)^2} \right)^2 = \big(d(x,z) + d(z,y)\big)^2$$

từ đó suy ra $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

5) Cho tập hợp X bất kỳ. Đặt

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \ne y \\ 0 \text{ nếu } x = y \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng cả ba tiên đề về khoảng cách được thỏa mãn. Không gian mêtric (X, d) với d xác định như trên được gọi là không gian mêtric rời rạc.

2. Sự hội tụ trong không gian mêtric

Định nghĩa: Dãy điểm $\{x_n\}_n$ trong không gian mêtric X được gọi là hội tụ đến điểm $x \in X$ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Khi đó ta viết $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ hoặc $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Điểm x được gọi là giới hạn của dãy $\{x_n\}_n$.

Từ định nghĩa trực tiếp suy ra rằng nếu dãy $\{x_n\}_n$ hội tụ đến x thì mọi dãy con $\{x_{n_k}\}_k$ của nó cũng hội tụ đến x. Hơn nữa ta có:

Định lý 1.III. Trong không gian mêtric, một dãy hội tụ chỉ có một giới hạn duy nhất.

Chứng minh: Giả thử $x_n \to x$ và $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Theo định nghĩa ta có $d(x_n, x) \to 0$ và $d(x_n, y) \to 0$ $(n \to \infty)$. Theo bất đẳng thức tam giác và tiên đề T_1 ta có

$$0 \le d(x, y) \le d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

từ đó cho $n \to \infty$ ta suy ra $d(x, y) = 0$ và do tiên đề T_1 ta được $x = y$.

Ví dụ: 1) Trong không gian R các số thực với khoảng cách thông thường: $d(x, y) = |x - y|$ sự hội tụ của dãy điểm $\{x_n\}_n \subset R$ đến x chính là sự hội tụ của dãy số thực $\{x_n\}_n$ đến số thực x.

2) Trong không gian R^n sự hội tụ của dãy điểm $x_k = (\xi_{1,k}, ..., \xi_{n,k})$ (k=1, 2, ...) đến điểm $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ có nghĩa là $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_{i,k} - \xi_i)^2} = 0$.

Điều này tương đương với $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_{i,k} = \xi_i$ (i = 1, ..., n).

Vậy sự hội tụ của dãy điểm trong không gian R^n là sự hội tụ theo tọa độ.

3. Lân cận của một điểm

Cho một không gian mêtric X, một điểm $a \in X$ và một số $r > 0$. Tập hợp

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

được gọi là hình cầu mở tâm a bán kính r. Còn tập hợp

$$B[a, r] = \{x \in X : d(x, a) \le r\}$$

được gọi là hình cầu đóng tâm a bán kính r.

Chẳng hạn trong $R^1 = R$, $B(a, r) = (a - r, a + r)$, còn $B[a, r] = [a - r, a + r]$; trong R^2, B(a, r) là hình tròn tâm a bán kính r không kể biên, B[a, r] là hình tròn nói trên kể cả biên.

Cho a là một điểm trong không gian mêtric X. Một tập hợp V được gọi là lân cận của điểm a nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho hình cầu $B(a, r) \subset V$. Rõ ràng lân cận của một điểm bao giờ cũng chứa điểm đó. Hơn nữa giao của một số hữu hạn lân cận của điểm a cũng là một lân cận của điểm a. Thật vậy, giả thử V_1, V_2, ..., V_n là các lân cận của điểm a. Theo định nghĩa, tồn tại các số dương $r_1, r_2, ..., r_n$ sao cho $B(a, r_i) \subset V_i$ (i = 1, ..., n). Đặt $r = \min\limits_{1\le i\le n} r_i$

ta có $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset V_i$ (i = 1, ..., n). Do đó $B(a,r) \subset V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

Vậy V là một lân cận của điểm a.

4. Tập hợp mở và tập hợp đóng

Định nghĩa: Một tập hợp G trong không gian mêtric X được gọi là tập hợp mở nếu mỗi điểm $a \in G$ đều có một lân cận V của a sao cho $V \subset G$, điều này tương đương với điều kiện: với mọi $a \in G$ tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a, r) \subset G$.

Từ định nghĩa ta suy ra toàn bộ không gian X là mở. Ta qui ước xem tập $\varnothing$ là tập hợp mở.

Ví dụ: a) Khoảng (a, b) trên đường thẳng (với khoảng cách thông thường) là một tập hợp mở.

b) Hình cầu mở B(a, r) là một tập hợp mở. Thật vậy, cho $x \in B(a, r)$, khi đó $d(x, a) < r$ hay $r - d(x, a) > 0$. Lấy r' sao cho $0 < r' < r - d(x, a)$. Với mọi $y \in B(x, r')$ ta có:

$$d(y, a) \le d(y, x) + d(x, a) < r' + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r$$

Vậy $y \in B(a, r)$, do đó $B(x, r') \subset B(a, r)$. Theo định nghĩa B(a, r) là tập mở.

c) Mọi tập hợp trong không gian rời rạc là tập hợp mở.

Thật vậy, giả thử A là một tập hợp bất kỳ trong không gian rời rạc X và $x \in A$. Ta có $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subset A$. Vậy A là tập hợp mở.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của các tập hợp mở.

1) Hợp của một số bất kỳ các tập hợp mở là một tập hợp mở, tức là nếu G_i ($i \in I$) là các tập hợp mở thì $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ cũng là tập hợp mở.

Thật vậy, với mọi $x \in G$ tồn tại $i_0 \in I$ sao cho $x \in G_{i_0}$. Vì G_{i_0} là tập hợp mở, tồn tại lân cận V của x sao cho:

$x \in V \subset G_{i_0} \subset G$. Vậy G là tập hợp mở.

2) Giao của một số hữu hạn tập hợp mở là một tập hợp mở, tức là nếu G_i (i = 1, ..., n) là các tập hợp mở thì $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ cũng là tập hợp mở.

Thật vậy, cho $x \in G$ thì $x \in G_i$ (i = 1, ..., n). Vì G_i là tập hợp mở nên tồn tại các lân cận V_i sao cho $x \in V_i \subset G_i$ (i = 1, ..., n). Khi đó $x \in V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$, trong đó V là một lân cận của x. Vậy G là tập hợp mở.

Định nghĩa: Tập hợp F trong không gian mêtric X được gọi là tập hợp đóng nếu $F^c = X \setminus F$ là một tập hợp mở.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng tập hợp $\varnothing$ và toàn thể không gian X là những tập hợp đóng.

Ví dụ: a) Đoạn [a, b] là một tập đóng trong R (xét với khoảng cách thông thường).

b) Hình cầu đóng B[a, r] là một tập hợp đóng.

Thật vậy, cho $x \in G = X \setminus B[a, r]$, ta có $d(x, a) > r$ hay $d(x, a) - r > 0$. Chọn r' sao cho $0 < r' < d(x, a) - r$. Với mọi $y \in B(x, r')$ ta có.

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < r' + d(y, a) < d(x, a) - r + d(y, a)$$

Từ đó suy ra $r < d(y, a)$, do đó $B(x, r') \subset G$. Vậy G là tập hợp mở. Theo định nghĩa B[a, r] là tập hợp đóng.

c) Mọi tập hợp trong không gian rời rạc là tập hợp đóng.

Thật vậy, cho A là tập hợp bất kỳ trong không gian rời rạc. Phần bù của nó, X\A là tập hợp mở, nên A là tập hợp đóng.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của tập hợp đóng:

1) Giao của một số bất kỳ các tập hợp đóng là một tập hợp đóng, tức là nếu F_i $(i \in I)$ là các tập hợp đóng thì $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ cũng là tập hợp đóng.

Thật vậy, ta có $X \setminus F = X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$ là tập hợp mở vì mỗi $X \setminus F_i$ là mở do F_i là đóng. Vậy F là tập hợp đóng.

2) Hợp của một số hữu hạn các tập hợp đóng là một tập hợp đóng, tức là nếu F_i ($i = 1, ..., n$) là các tập hợp đóng thì $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ cũng là tập hợp đóng.

Thật vậy, ta có $X \setminus F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus F_i)$ là tập hợp mở vì mỗi $X \setminus F_i$ là mở do F_i là đóng. Vậy F là tập hợp đóng.

Ghi chú: Họ các tập hợp mở của không gian mêtric X được gọi là tôpô của không gian X. Một cách tổng quát cho một tập hợp bất kỳ X, nếu có xác định một họ $\mathcal{T}$ các tập con của X chứa tập X, $\varnothing$ và hợp bất kỳ các tập hợp cũng như giao hữu hạn các tập của họ đó đều thuộc về $\mathcal{T}$ thì ta nói rằng ta đã xác định một tôpô trên không gian X. Tập hợp X khi đó được gọi là không gian tôpô. Các tập hợp của họ $\mathcal{T}$ được gọi là các tập hợp mở trong X. Như vậy, không gian mêtric là một không gian tôpô.

5. Phần trong và bao đóng của một tập hợp

Định nghĩa: Cho một tập hợp A trong không gian mêtric X. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm trong của tập hợp A nếu tồn tại một lân cận V của x sao cho $x \in V \subset A$; điều kiện này tương đương với điều kiện tồn tại một số $r > 0$ sao cho hình cầu $B(x, r) \subset A$. Tập hợp tất cả các điểm trong của A, ký hiệu là $\overset{o}{A}$ hay int A.

Từ định nghĩa trực tiếp suy ra rằng:

a) int $A \subset A$ với mọi tập hợp $A \subset X$.

b) Tập hợp A là tập hợp mở khi và chỉ khi mọi điểm của A là điểm trong của nó, tức là khi và chỉ khi $\text{int } A = A$.

Ví dụ: Trên đường thẳng R (với mêtric thông thường) ta có $\text{int}[a, b] = (a, b)$.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của phần trong

1) Nếu $A \subset B$ thì $\text{int}A \subset \text{int}B$.

Thật vậy, nếu $x \in \text{int}A$ thì tồn tại lân cận V của x sao cho $x \in V \subset A \subset B$, do đó $x \in \text{int}B$. Vậy $\text{int}A \subset \text{int}B$.

2) Phần trong của tập hợp A là tập hợp mở lớn nhất chứa trong A.

Thật vậy, nếu $\text{int}A = \varnothing$ thì nó là tập hợp mở. Giả sử $\text{int } A \neq \varnothing$ và $x \in \text{int } A$. Theo định nghĩa tồn tại hình cầu mở $B(x, r) \subset A$. Vì $B(x, r)$ là tập hợp mở nên theo tính chất 1) ta có $B(x, r) = \text{int}B(x, r) \subset \text{int } A$. Theo định nghĩa intA là tập hợp mở. Nếu B là một tập hợp mở chứa trong A thì từ tính chất 1) ta suy ra $B = \text{int}B \subset \text{int}A$. Vậy intA là tập hợp mở lớn nhất chứa trong A.

3) Với mọi tập A, B trong không gian mêtric X ta có

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int}B$$

Thật vậy, do $A \cap B \subset A$ và $(A \cap B) \subset B$, theo tính chất 1) ta có $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}A$ và $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}B$, từ đó $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}A \cap \text{int}B$. Mặt khác theo tính chất 2) $\text{int}A \cap \text{int}B$ là một tập hợp mở chứa trong $A \cap B$, vì thế cũng theo tính chất đó $\text{int}A \cap \text{int}B \subset \text{int}(A \cap B)$, từ đó suy ra

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int}A \cap \text{int}B$$

Định nghĩa: Giả sử A là một tập hợp trong không gian mêtric X. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm dính của tập hợp A nếu mỗi lân cận của x đều chứa ít nhất một điểm của A, tức là với mọi lân cận V của x, $V \cap A \neq \varnothing$.

Tập hợp tất cả các điểm dính của A được gọi là bao đóng của tập hợp A, ký hiệu là $\overline{A}$.

Rõ ràng là $A \subset \overline{A}$.

Ví dụ: $\overline{(a,b)} = [a,b]$; $\overline{Q} = R$ (Q là tập tất cả các số hữu tỷ).

Các công thức sau đây cho ta mối quan hệ giữa phần trong và bao đóng.

a) $X \setminus \overline{A} = \text{int}\,(X \setminus A)$. (1)

Thật vậy, $x \in X \setminus \overline{A}$ khi và chỉ khi tồn tại một lân cận V của x không chứa điểm nào của A, tức là $V \cap A = \varnothing$ hay $V \subset X \setminus A$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $x \in \text{int}(X \setminus A)$. Từ đó ta có (1).

b) $X \setminus \text{int}A = \overline{X \setminus A}$ (2)

Thật vậy, trong (1) thay A bằng X\A ta có:

$X \setminus \overline{X \setminus A} = \text{int}(X \setminus (X \setminus A)) = \text{int}A$, từ đó suy ra (2).

Sau đây là một số tính chất cơ bản của bao đóng:

1) Nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Thật vậy, nếu $x \in \overline{A}$ thì với mọi lân cận V của x, $V \cap A \neq \varnothing$, do đó $V \cap B \neq \varnothing$ vì thế $x \in \overline{B}$. Vậy $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2) Bao đóng $\overline{A}$ của tập hợp A là tập hợp đóng nhỏ nhất chứa A.

Thật vậy, theo (1) $X \setminus \overline{A} = \text{int}(X \setminus A)$ là tập hợp mở, do đó $\overline{A}$ là tập hợp đóng. Hơn nữa, nếu B là tập hợp đóng sao cho $A \subset B$ thì X\B là tập hợp mở và $X \setminus B \subset X \setminus A$, từ đó

$X \setminus B = \text{int}(X \setminus B) \subset \text{int}(X \setminus A)$. Vì thế theo (1)

$$B \supset X \setminus \text{int}(X \setminus A) = \overline{A}.$$

Từ tính chất này ta suy ra tập hợp A là đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.

3) Với mọi tập hợp A, B trong không gian mêtric X ta có

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Thật vậy, từ các hệ thức $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$, theo tính chất 1) ta có $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, từ đó $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Mặt khác theo tính chất 2), $\overline{A}$, $\overline{B}$ là các tập hợp đóng, do đó $\overline{A} \cup \overline{B}$ là tập hợp đóng chứa $A \cup B$. Vì thế cũng theo tính chất đó $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$, từ đó suy ra $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Chú ý: Từ định nghĩa điểm dính ta trực tiếp suy ra rằng $x \in \overline{A}$ khi và chỉ khi $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in A$ với mọi n. Từ đó, do tính chất A đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$ ta suy ra rằng tập hợp A đóng khi và chỉ khi giới hạn của mọi dãy hội tụ $\{x_n\}_n \subset A$ đều thuộc về A, tức là khi và chỉ khi từ các điều kiện $x_n \in A$ $(n = 1, 2, ...)$, $x_n \to x (n \to \infty)$ ta suy ra $x \in A$.

6. Điểm tụ của một tập hợp

Định nghĩa: Cho tập hợp A trong không gian mêtric X. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm tụ hay điểm giới hạn của tập hợp A nếu mọi lân cận V của x đều chứa ít nhất một điểm của A khác x, tức là $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$.

Tập hợp tất cả các điểm tụ của A được gọi là tập hợp dẫn xuất của A, kí hiệu là A'.

Như vậy điểm $x \in X$ là điểm dính của tập hợp A khi và chỉ khi hoặc $x \in A$, hoặc $x \in A'$, do đó ta có $\overline{A} = A \cup A'$.

Từ đó ta suy ra rằng tập hợp A là đóng khi và chỉ khi A chứa mọi điểm tụ của nó. Thật vậy, theo trên tập hợp A là đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$, tức là $A = A \cup A'$, điều này tương đương với $A' \subset A$.

7. Điểm biên, biên giới của một tập hợp

Định nghĩa: Cho tập hợp A trong không gian mêtric X. Điểm $x \in X$ được gọi là điểm biên của tập hợp A nếu mọi lân cận của x đều chứa ít nhất một điểm thuộc A và một điểm không thuộc A. Tập hợp tất cả các điểm biên của A được gọi là biên giới của tập hợp A, ký hiệu là ∂A hay Fr(A). Như vậy $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Từ đó ta suy ra rằng biên giới của một tập hợp luôn luôn là một tập hợp đóng.

§2. TÔ PÔ TRÊN R^n

1. Chuẩn trên không gian vectơ và mêtric sinh ra bởi chuẩn

Bây giờ ta xét các không gian trên đó vừa xác định cấu trúc tuyến tính vừa xác định khoảng cách. Tất nhiên giữa cấu trúc tuyến tính và khoảng cách phải có một liên hệ nào đó, nếu không ta sẽ không thu được một kết quả nào mới ngoài những điều đã biết về không gian vectơ và về không gian mêtric. Việc xác định chuẩn trên không gian vectơ là một cách làm thông dụng theo hướng này.

Định nghĩa: Cho không gian vectơ X trên trường K (K là trường số thực hoặc trường số phức). Một ánh xạ $p: X \to R$ được gọi là một chuẩn trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện (tiên đề) sau:

1) $p(x) > 0$ nếu $x \neq 0$, $p(0) = 0$.

2) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ với mọi $\alpha \in K$ và với mọi $x \in X$ (thuần nhất).

3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ với mọi $x, y \in X$ (bất đẳng thức tam giác).

Không gian vectơ X trên đó có xác định một chuẩn được gọi là không gian tuyến tính định chuẩn hay không gian định chuẩn. Số p(x) được gọi là chuẩn của phần tử x và thường kí hiệu là $\|x\|$.

Tùy theo K là trường số thực hoặc trường số phức mà X được gọi là không gian định chuẩn thực hay không gian định chuẩn phức.

Nhận xét: Ba tiên đề trên về chuẩn là sự khái quát hóa các tính chất cơ bản nhất của độ dài các vectơ thông thường.

Trong không gian định chuẩn ta có thể xác định một khoảng cách theo công thức $d(x, y) = \|x - y\|$ với mọi $x, y \in X$. Từ các tiên đề về chuẩn ta dễ dàng suy ra rằng các tiên đề về khoảng cách được thực hiện. Ngoài các tính chất của khoảng cách thông thường, khoảng cách sinh ra bởi chuẩn xác định như trên còn có các tính chất sau:

a) Tính bất biến đối với phép tịnh tiến:

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y) \text{ với mọi } x, y, z \in X.$$

b) Tính thuần nhất

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\ \|x - y\| = |\alpha|\, d(x, y) \text{ với mọi } \alpha \in K \text{ và } x, y \in X.$$

Ngược lại nếu trên một không gian vectơ X có xác định một khoảng cách d có tính bất biến đối với phép tịnh tiến và tính thuần nhất thì bằng cách đặt $\|x\| = d(x, 0)$ (0 là phần tử không trong không gian vectơ X) X trở thành một không gian định chuẩn.

Trong không gian định chuẩn X sự hội tụ của dãy phần tử $\{x_n\}_n \subset X$ đến phần tử $x \in X$ có nghĩa là $d(x_n, x) = \|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó ta nói rằng dãy $\{x_n\}_n$ hội tụ theo chuẩn đến x. Từ các tiên đề về chuẩn ta suy ra:

1) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x - y\|$

Thật vậy, ta có $\|x\| = \|y + (x - y)\| \le \|y\| + \|x - y\|$, do đó

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|$$

Thay đổi vai trò của x và y ta được

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2) Nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ thì $x_n + y_n \to x + y$.

Điều này suy ra từ hệ thức

$$0 \leq \|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

3) Nếu $x_n \to x$, $\alpha_n \to \alpha$ thì $\alpha_n x_n \to \alpha x$

Thật vậy ta có

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n (x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x\| \leq |\alpha_n| . \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| . \|x\|$$

Cho $n \to \infty$ ta suy ra điều phải chứng minh.

4) Nếu $x_n \to x$ thì $\|x_n\| \to \|x\|$ (tính liên tục của chuẩn). Điều này suy ra từ hệ thức $0 \leq \big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Ví dụ: Không gian vectơ thực n chiều R^n là một không gian định chuẩn nếu ta xác định chuẩn trên đó theo công thức:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ nếu } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$$

Rõ ràng cả ba tiên đề về chuẩn đều được thực hiện. Thật vậy, nếu $x \neq 0$ thì tồn tại $x_i \neq 0$, khi đó $\|x\| > 0$; nếu $x = 0$ thì $x_i = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ khi đó $\|x\| = 0$.

Hơn nữa với mọi $\alpha \in R$ ta có

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\alpha| . \|x\|$$

Với mọi $x = (x_1, ..., x_n)$ và $y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$ ta có

$$\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$$

Từ đó suy ra $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Chuẩn xác định như trên được gọi là chuẩn Euclid trong R^n. Mêtric sinh ra bởi chuẩn này trùng với mêtric xác định trước đây trong R^n.

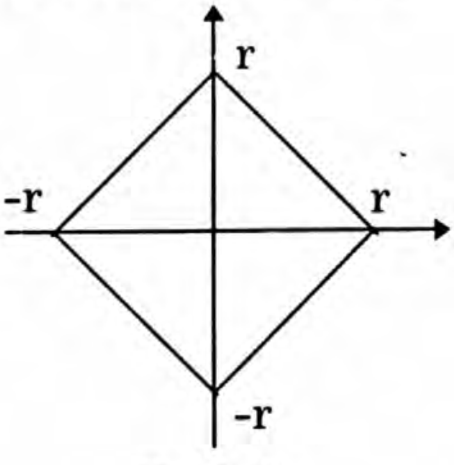
$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

Trên không gian vectơ R^n ngoài chuẩn Euclid ta còn thường dùng hai chuẩn sau:

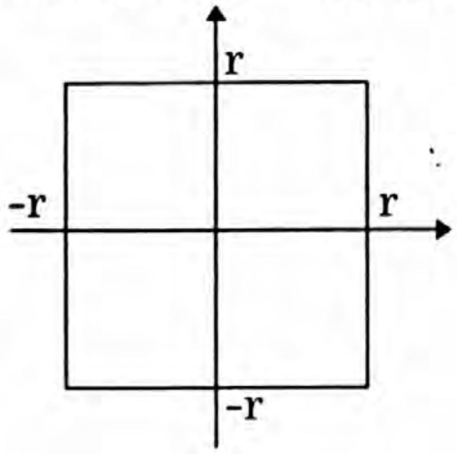
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ nếu } x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

$$\text{và } \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \text{ nếu } x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

Dễ dàng kiểm tra rằng cả hai chuẩn $\|.\|_1$ và $\|.\|_\infty$ đều thỏa mãn ba tiên đề về chuẩn. Với n = 2, hình cầu tâm O (gốc toạ độ) bán kính r trong R^2 đối với chuẩn Euclid là hình tròn tâm O bán kính r, đối với chuẩn $\|.\|_1$ và $\|.\|_\infty$ là các hình vuông tương ứng trong các hình vẽ dưới đây. Hình cầu tâm a, bán kính r là các hình thu được từ các hình nói trên bằng cách tịnh tiến theo vectơ a.



Hình 2.



Hình 3.

Sau đây, nếu không có gì đặc biệt, khi nói đến chuẩn trong R^n ta hiểu đó là chuẩn Euclid. Tuy nhiên, như sẽ thấy dưới đây, trong các khảo sát tiếp theo (trong giáo trình này) ta có thể dùng một chuẩn bất kỳ trong R^n. Trước hết ta mở rộng khái niệm tập hợp bị chặn cho không gian định chuẩn.

Định nghĩa: Một tập hợp A trong không gian định chuẩn X được gọi là bị chặn nếu tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho $\| x \| \leq M$ với mọi $x \in A$.

Một dãy phần tử $\{x_n\}_n \subset X$ được gọi là dãy bị chặn nếu các phần tử của dãy lập thành một tập hợp bị chặn trong X.

Ta có kết quả quan trọng sau đây:

Định lý 1.III (Bolzano - Weierstras). Trong không gian R^n mọi dãy bị chặn đều có chứa một dãy con hội tụ.

Chứng minh: Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp $n = 2$, trường hợp tổng quát chứng minh được tiến hành một cách tương tự.

Giả sử $\{x_k\}_k = \{(x_{1,k}; x_{2,k})\}_k$ là một dãy bị chặn trong R^2, tức là tồn tại $M > 0$ sao cho:

$$\|x_k\| = \sqrt{x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2} < M \ (k = 1, 2, ...)$$

Từ hệ thức $|x_{i,k}| \leq \|x_k\| < M$ $(i = 1, 2; k = 1, 2, ...,)$ ta suy ra các dãy số thực $\{x_{i,k}\}_k$ $(i = 1, 2)$ bị chặn. Theo nguyên lý Bolzano - Weierstras trong R, dãy $\{x_{1,k}\}_k$ có chứa một dãy con $\left\{x_{1,k_l}\right\}_l$ hội tụ đến một giới hạn $a_1 \in R$. Dãy con tương ứng $\left\{x_{2,k_l}\right\}_l$ của dãy $\left\{x_{2,k}\right\}_k$ cũng là dãy bị chặn trong R vì thế nó chứa một dãy con $\left\{x_{2,k_{l_m}}\right\}_m$ hội tụ đến một giới hạn $a_2 \in R$.

Dãy $\left\{x_{k_{l_m}}\right\}_m = \left\{\left(x_{1,k_{l_m}}, x_{2,k_{l_m}}\right)\right\}_m$ là dãy con của dãy $\{x_k\}_k$, dãy con này hội tụ đến $(a_1, a_2) \in R^2$.

Hệ quả: Nếu $A \subset R^n$ là tập hợp vô hạn bị chặn thì $A' \neq \varnothing$.

2. Chuẩn tương đương

Định nghĩa: Hai chuẩn p và q trên cùng một không gian vectơ X được gọi là tương đương nếu tồn tại các hằng số dương C_1 và C_2 sao cho $p(x) \leq C_1 q(x)$ và $q(x) \leq C_2 p(x)$ với mọi $x \in X$.

Từ tính chất bắc cầu của quan hệ « $\leq$ » ta suy ra rằng hai chuẩn cùng tương đương với chuẩn thứ ba thì tương đương với nhau.

Rõ ràng là nếu hai chuẩn tương đương với nhau và dãy phần tử $\{x_n\}_n \subset X$ hội tụ đến phần tử $x \in X$ theo một chuẩn thì cũng hội tụ đến x theo chuẩn kia.

Ví dụ: Trên R^n ba chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\ ;\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ ;\ \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

tương đương với nhau.

Thật vậy, ta có:

$$|x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad (i = 1, ..., n), \text{ từ đó } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|.$$

Mặt khác $|x_i| \leq \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ $(i = 1, ..., n)$, vì thế

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

Vậy hai chuẩn $\|\cdot\|$ và $\|\cdot\|_\infty$ tương đương.

Tương tự ta có $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le n \max_{1\le i\le n} |x_i| = n\|x\|_\infty$

Mặt khác $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$

Vậy hai chuẩn $\|\cdot\|_\infty$ và $\|\cdot\|_1$ tương đương. Do đó 3 chuẩn nói trên tương đương với nhau.

Tổng quát hơn, ta có kết quả sau đây:

Định lý 2.III. Hai chuẩn bất kỳ trên không gian vectơ n chiều R^n tương đương với nhau.

Chứng minh: Chỉ cần chứng minh rằng một chuẩn bất kỳ p trên R^n tương đương với chuẩn Euclid xác định bởi $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ nếu $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$.

Giả sử $e_1, ..., e_n$ là cơ sở chính tắc của R^n. Khi đó phần tử $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ có thể viết dưới dạng $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Ta có:

$$p(x) = p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| p(e_i) \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [p(e_i)]^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = C_1\|x\|$$

trong đó $C_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [p(e_i)]^2}$

Gọi $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$. Đặt $\alpha = \inf_{x\in S} p(x)$

Ta chứng minh $\alpha > 0$. Thật vậy, theo định nghĩa của cận dưới đúng, tồn tại một dãy $\{x_k\}_k \subset S$ sao cho $\lim_{k\to\infty} p(x_k) = \alpha$. Dãy $\{x_k\}_k$

là dãy bị chặn trong $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ vì $\|x_k\| = 1$ với mọi k. Do đó theo định lý 1.III tồn tại một dãy con $\{x_{k_l}\}_l$ của dãy $\{x_k\}_k$ sao cho $\{x_{k_l}\}_l$ hội tụ theo chuẩn $\|\cdot\|$ đến phần tử $a \in R^n$. Do tính liên tục của chuẩn, $\|x_{k_l}\| \to \|a\|$ $(l \to \infty)$. Vì $\|x_{k_l}\| = 1$ với mọi l nên $\|a\| = 1$, tức là $a \in S$. Mặt khác ta có

$$\left|p\left(x_{k_l}\right) - p(a)\right| \le p\left(x_{k_l} - a\right) \le C_1 \left\|x_{k_l} - a\right\| \to 0 \ (l \to \infty)$$

Vì thế $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} p(x_k) = \lim\limits_{l\to\infty} p\left(x_{k_l}\right) = p(a) > 0$ vì $a \neq 0$ do $\|a\| = 1$.

Giả sử x là một phần tử khác 0 bất kỳ của R^n. Ta có $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, nên $\dfrac{x}{\|x\|} \in S$. Vì thế $p\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \ge \alpha$ hay $\|x\| \le \dfrac{1}{\alpha} p(x) = C_2 p(x)$ với $C_2 = \dfrac{1}{\alpha}$.

Vậy chuẩn p tương đương với chuẩn Euclid $\|\cdot\|$.

Nhận xét: Vì các chuẩn trên R^n là tương đương nên nếu tập $V \subset R^n$ là lân cận của điểm a xét đối với một chuẩn nào đó thì V cũng là lân cận của điểm a xét đối với mọi chuẩn khác. Vì vậy, nếu một tập hợp $G \subset R^n$ là mở theo một chuẩn nào đó thì nó cũng là mở theo mọi chuẩn khác; nói một cách khác tô pô sinh ra bởi mọi chuẩn trên R^n là trùng nhau. Đối với mọi khái niệm khác xây dựng từ khái niệm lân cận hoặc từ tô pô của R^n như khái niệm tập đóng, điểm tụ, điểm dính v.v..., ta cũng có kết luận tương tự.

3. Nguyên lý Cauchy

Ta mở rộng nguyên lý hội tụ Cauchy của dãy số thực cho các dãy điểm trong R^n.

Định nghĩa: Một dãy điểm $\{x_k\}_k$ trong không gian R^n được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại k_0 sao cho với mọi k, $l \geq k_0$ ta có $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

Định lý 3.III (Cauchy): Dãy $\{x_k\}_k \subset R^n$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.

Chứng minh: ***a) Điều kiện cần***. Giả sử dãy $\{x_k\}_k \subset R^n$ hội tụ đến $a \in R^n$. Theo định nghĩa với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại k_0 sao cho $\|x_k - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ với mọi $k > k_0$.

Khi đó với mọi k, $l > k_0$ ta có

$$\|x_k - x_l\| \leq \|x_k - a\| + \|a - x_l\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vậy $\{x_k\}_k$ là dãy cơ bản.

b) Điều kiện đủ: Ngược lại giả sử dãy $\{x_k\}_k = \{(x_{1,k}, ..., x_{n,k})\}_k$ là dãy cơ bản trong R^n. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại k_0 sao cho $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$ với mọi k, $l > k_0$. Từ các bất đẳng thức $\left|x_{i,k} - x_{i,l}\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i,k} - x_{i,l}\right)^2} < \varepsilon$ với mọi k, $l > k_i$ (i = 1, ..., n), ta suy ra rằng với mỗi i cố định dãy số thực $\{x_{i,k}\}_k$ là dãy cơ bản. Theo nguyên lý Cauchy trong R tồn tại $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i,k} = a_i$ (i = 1, ..., n). Đặt $a = (a_1, ..., a_n) \in R^n$. Vì sự hội tụ trong R^n là sự hội tụ theo tọa độ, ta suy ra dãy $\{x_k\}_k$ hội tụ đến a trong R^n.

4. Tập hợp compac

Định nghĩa: Một tập hợp $A \subset R^n$ được gọi là tập compac nếu mọi dãy điểm $\{x_k\}_k \subset A$ đều có một dãy con $\left\{x_{k_l}\right\}_l$ hội tụ đến một giới hạn thuộc A.

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn để xét tính compac của một tập hợp.

Định lý 4.III: Tập $A \subset R^n$ là compac khi và chỉ khi A là đóng và bị chặn.

Chứng minh: *a) Điều kiện cần.* Giả sử A là tập compac và $\{x_k\}$ là một dãy phần tử của A sao cho $x_k \to a$. Ta chứng minh $a \in A$. Vì A là tập compac, theo định nghĩa dãy $\{x_k\}_k$ có chứa một dãy con $\left\{x_{k_l}\right\}_l$ hội tụ đến một giới hạn thuộc A. Ta có

$$a = \lim_{k \to +\infty} x_k = \lim_{l \to \infty} x_{k_l} \in A.$$ Vậy A là tập đóng.

Giả sử ngược lại tập A không bị chặn. Khi đó với mỗi $k \in N^*$ tồn tại $x_k \in A$ sao cho $\|x_k\| > k$. Vì tập A là tập compac dãy $\{x_k\}_k \subset A$ có chứa một dãy con $\left\{x_{k_l}\right\}_l$ sao cho $x_{k_l} \to a \in A$ $(l \to \infty)$. Do tính liên tục của chuẩn ta có $\left\|x_{k_l}\right\| \to \|a\|$ điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức $\left\|x_{k_l}\right\| > k_l$ với mọi $l \in N^*$. Vậy tập A phải bị chặn.

b) Điều kiện đủ: Giả sử tập $A \in R^n$ là tập hợp đóng và bị chặn và $\{x_k\}_k$ là dãy phần tử bất kỳ của A. Khi đó $\{x_k\}_k$ là dãy bị chặn. Theo định lý 1.III (định lý Bolzano - Weierstrass) dãy $\{x_k\}_k$ có chứa một dãy con $\left\{x_{k_l}\right\}_l$ sao cho $x_{k_l} \to a$ $(l \to \infty)$. Vì A là tập đóng nên $a \in A$. Vậy A là tập compac.

Có thể chứng minh rằng tập $A \subset R^n$ là compac khi và chỉ khi nếu G_α $(\alpha \in I)$ là các tập mở trong R^n sao cho $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \supset A$ thì tồn tại $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} \supset A$ (xem [6] hoặc [7]).

5. Nguyên lý Cantor

Sau đây ta sẽ mở rộng nguyên lý Cantor về dãy đoạn lồng nhau và thắt lại cho các tập compac trong R^n.

Định nghĩa: Cho tập hợp bị chặn $A \subset R^n$. Ta gọi số
$$d(A) = \sup_{x,y\in A} \|x - y\|$$
là đường kính của tập hợp A.

Dãy các tập hợp bị chặn $\{A_k\}_k \subset R^n$ được gọi là lồng nhau và thắt lại nếu:
$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_k \supset ...$$
$$\text{và } d(A_k) \to 0 \ (k \to +\infty)$$

Định lý 5.III (Cantor): Trong không gian R^n mọi dãy các tập hợp compac không rỗng lồng nhau và thắt lại đều có một điểm chung duy nhất.

Chứng minh: Giả sử $\{A_k\}_k \subset R^n$ là dãy các tập hợp compac không rỗng sao cho
$$A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_k \supset ...$$
và $d(A_k) \to 0$ $(k \to \infty)$. Với mỗi $k \in N^*$ ta lấy một phần tử $a_k \in A_k$; phần tử này tồn tại vì $A_k \neq \varnothing$. Dãy $\{a_k\}_k$ bị chặn vì $\{a_k\}_k \subset A_1$ và A_1 là tập bị chặn. Vì thế theo định lý 1.III, dãy $\{a_k\}_k$ có chứa một dãy con $\left\{a_{k_l}\right\}_l$ sao cho $a_{k_l} \to a$ $(l \to \infty)$. Ta chứng minh $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Thật vậy, với mỗi $s \in N^*$ cố định ta có $k_s \geq s$. Vì thế với mọi $p \in N^*$ ta có $k_{s+p} \geq s + p > s$, do đó $a_{k_{s+p}} \in A_{k_{s+p}} \subset A_s$. Từ đó $a = \lim\limits_{l\to\infty} a_{k_l} = \lim\limits_{p\to\infty} a_{k_{s+p}} \in A_s$ vì A_s là tập hợp đóng. Điều này đúng với mọi $s \in N^*$. Vậy $a \in \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$. Điểm a chung cho các tập hợp A_s này là duy nhất. Thật vậy, giả sử tồn tại $a' \in \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} A_s$. Khi đó ta có $0 \leq \|a - a'\| \leq d(A_s) \to 0$ $(s \to \infty)$. Từ đó suy ra $\|a - a'\| = 0$, do đó $a = a'$.

§ 3. HÀM LIÊN TỤC TRÊN R^n

1. Hàm vectơ n biến

Định nghĩa: Cho tập $A \subset R^n$. Ánh xạ $f : A \to R^p$ được gọi là hàm vectơ n biến với miền xác định là A và với giá trị trong R^p.

Nếu p = 1 tức là nếu $f : A \to R$ thì ta có một hàm số thực của n biến.

Cho $f : A \subset R^n \to R^p$ với mỗi $x \in A$, f(x) là một phần tử của R^p. Ký hiệu $f_1(x), ..., f_p(x)$ là các tọa độ của f(x): $f(x) = (f_1(x)), ..., f_p(x)) \in R^p$. Như vậy mỗi hàm vectơ $f: A \subset R^n \to R^p$ xác định p hàm thành phần (hay p hàm tọa độ) $f_1, ..., f_p$. Các hàm thành phần này là các ánh xạ từ A vào R: $f_i: A \subset R^n \to R$, tức là các hàm số của n biến (i = 1, ..., p).

Ngược lại nếu cho p hàm $g_i: A \subset R^n \to R$ (i = 1, ..., p) thì ta có thể xác định một hàm $g: A \subset R^n \to R^p$ bằng cách đặt $g(x) = (g_1(x), ..., g_p(x))$, $x \in A$. Ký hiệu $g = (g_1, ..., g_p)$.

Định nghĩa: Hàm $f: A \subset R^n \to R^p$ được gọi là bị chặn trên A nếu f(A) là tập bị chặn trong R^p, tức là nếu tồn tại số M > 0 sao cho $\|f(x)\| \le M$ với mọi $x \in A$.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng hàm $f = (f_1, ..., f_p)$ ánh xạ $A \subset R^n$ vào R^p là bị chặn khi và chỉ khi các hàm thành phần f_i (i = 1, ..., p) của nó là các hàm số bị chặn.

Thật vậy, nếu $f : A \to R^p$ là hàm bị chặn thì từ hệ thức $|f_i(x)| \le \|f(x)\| \le M$ với mọi $x \in A$, ta suy ra các hàm f_i (i=1,..., p) bị chặn.

Ngược lại giả sử các hàm $f_i: A \to R$ bị chặn ($i \le 1, ..., p$) thì từ hệ thức $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} f_i^2(x)} \le \sqrt{p} \sup_{i=1,...,p} |f_i(x)|$ ta suy ra hàm f bị chặn.

2. Giới hạn của hàm véc tơ

Định nghĩa: Cho hàm vectơ f: $A \subset R^n \to R^p$ và điểm $a \in A'$.

Ta nói rằng hàm f tiến đến giới hạn $b \in R^p$ khi x tiến đến a hay b là giới hạn của hàm f tại a nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ (δ phụ thuộc ε) sao cho với mọi $x \in A$ thỏa mãn $0 < \|x - a\| < \delta$ ta có $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Khi đó ta viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ hay $f(x) \to b$ khi $x \to a$.

Chú ý: Vì sự hội tụ trong không gian R^n là sự hội tụ theo tọa độ nên với $x = (x_1, ..., x_n)$, $a = (a_1, ..., a_n)$ ta còn dùng ký hiệu

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, ..., x_n) = b$$

Các tính chất sau đây của giới hạn hàm vectơ của n biến được chứng minh một cách tương tự như đối với giới hạn của hàm số một biến số.

Định lý 6.III: Giả sử $A \subset R^n$, $a \in A'$ và f: $A \to R^p$. Khi đó

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_k\}_k \subset A \setminus \{a\}$, $x_k \to a$ $(k \to \infty)$ ta có $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = b$.

2) Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ thì giới hạn đó là duy nhất.

3) (Nguyên lý Cauchy) Hàm f: $A \subset R^n \to R^p$ có giới hạn tại a khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$ với mọi $x, x' \in A$ thỏa mãn $0 < \|x - a\| < \delta$, $0 < \|x' - a\| < \delta$.

Định lý 7.III: Cho $A \subset R^n$, $a \in A'$ và f, g: $A \to R^p$. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó

$$\lim_{x\to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) + \beta \lim_{x\to a} g(x) \text{ với mọi } \alpha, \beta \in R.$$

Đặc biệt với p = 1 thì $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x).\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Nếu ngoài ra $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ thì ta có:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

Bây giờ ta xét mối liên hệ giữa giới hạn của hàm vectơ với giới hạn của các hàm thành phần.

Định lý 8.III: Cho hàm f: $A \subset R^n \to R^p$, $f = (f_1, ..., f_p)$ và $b = (b_1, ..., b_p)$. Ta có $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$ $(i = 1, ..., p)$.

Chứng minh: Theo định lý 6.III $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_k\} \subset A\backslash\{a\}$, $x_k \to a$ ta có $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = b$.

Vì sự hội tụ trong R^p là sự hội tụ theo tọa độ, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\lim\limits_{k\to\infty} f_i(x_k) = b_i$ $(i = 1, ..., p)$.

Theo tính chất của giới hạn hàm số các hệ thức trên tương đương với $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$ $(i = 1, ..., p)$. Vậy

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i \ (i = 1, ..., p).$$

Ví dụ: 1) Xét hàm $f(x, y) = x^y$ $(x > 0, y \in R)$. Giả sử $a > 0$, $b \in R$. Ta có $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} x^y = a^b$

Thật vậy, với mọi dãy số dương $\{x_k\}_k$, $x_k \to a$ và với mọi dãy $\{y_k\}_k \subset R$, $y_k \to b$, dãy $\{(x_k, y_k)\}_k$ hội tụ đến (a, b) và ta có

$f(x_k, y_k) = x_k^{y_k} = e^{y_k \ln x_k} \to e^{b.\ln a} = a^b$ $(k \to \infty)$, từ đó theo tính chất của giới hạn ta suy ra điều phải chứng minh.

2) Tìm $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Hàm này xác định trong $R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ và (0, 0) là điểm tụ của tập hợp này.

Xét hai dãy điểm $\left\{\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right)\right\}_k$ và $\left\{\left(\dfrac{2}{k}, \dfrac{1}{k}\right)\right\}_k$. Các dãy điểm này hội tụ đến (0, 0) khi $k \to \infty$. Ta có

$f\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{2}$ với mọi $k \in N^*$ và $f\left(\dfrac{2}{k}, \dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{2}{5}$ với mọi $k \in N^*$.

Từ đó suy ra rằng giới hạn nói trên không tồn tại.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

Điều này suy ra từ bất đẳng thức $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}|x|$, $(x^2 + y^2 \neq 0)$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$

Với $(x, y) \neq (0, 0)$ ta có $\dfrac{x^2}{|x|+|y|} \le |x|$, $\dfrac{y^2}{|x|+|y|} \le |y|$, do đó

$$0 < \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \le |x| + |y| \to 0 \text{ khi } (x, y) \to (0, 0)$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0$

3. Giới hạn lặp

Ngoài giới hạn đã xét ở trên của hàm số $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ khi $x = (x_1, ..., x_n) \to a = (a_1, ..., a_n)$ tức là khi đồng thời các biến $x_i \to a_i$ $(i = 1, ..., n)$, ta còn cần xét đến một loại giới hạn khác khi mỗi biến x_i riêng biệt lần lượt tiến đến giới hạn a_i $(i = 1, ..., n)$ theo một thứ tự nào đó. Giới hạn loại này được gọi là giới hạn lặp; giới hạn đã xét trước đây còn gọi là giới hạn bội và trong trường hợp $n = 2$ ta cũng gọi là giới hạn kép.

Để đơn giản ta xét trường hợp hàm của hai biến số.

Giả sử A, B là hai tập hợp số thực có các điểm tụ tương ứng là a, b. Khi đó (a, b) là điểm tụ của tập hợp $A \times B \subset R^2$. Cho ánh xạ $f: A \times B \to R^p$.

Nếu với mỗi y cố định thuộc B hàm một biến số $x \to f(x, y)$ (ánh xạ A vào R^p) có giới hạn khi $x \to a$ thì giới hạn này nói chung phụ thuộc vào y:

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y)$$

Sau đó ta xét giới hạn của hàm $\varphi(y)$ khi $y \to b$:

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \cdot \lim_{x \to a} f(x, y)$$

Giới hạn này được gọi là giới hạn lặp. Tương tự, ta xét giới hạn lặp theo thứ tự ngược lại:

$$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y)$$

Chú ý rằng hai giới hạn lặp trên đây (trong trường hợp chúng tồn tại) không nhất thiết bằng nhau.

Ví dụ: 1) Xét hàm số $f: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to R$ xác định bởi $f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$.

Lấy a = 0, b = 0 với mỗi y > 0 ta có

$$\varphi(y) = \lim_{x\to 0} f(x, y) = y - 1;\ \lim_{y\to 0} \varphi(y) = \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y) = -1$$

Trong khi đó với mỗi x > 0 ta có

$$\varphi(x) = \lim_{y\to 0} f(x, y) = x + 1;\ \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) = 1$$

Có thể xảy ra trường hợp một trong hai giới hạn lặp tồn tại còn giới hạn kia không tồn tại như trong hai ví dụ sau:

2) Xét hàm số $f: (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to R$ xác định bởi

$$f(x,y) = \frac{x\sin\frac{1}{x} + y}{x+y}$$

Lấy a = 0, b = 0. Với mỗi y > 0 ta có

$$\lim_{x\to 0} f(x, y) = 1;\ \text{do đó}\ \lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y) = 1$$

Trong khi đó với mỗi x > 0 ta có $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = \sin\dfrac{1}{x}$.

Vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$, nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$.

3) Xét hàm số $f(x, y) = x \sin\dfrac{1}{y}$ $(y \neq 0)$. Ta có

$\lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$, do đó $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = 0$.

Tuy nhiên với mỗi $x \neq 0$ không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{y\to 0} x \sin\dfrac{1}{y}$. Vì thế không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$.

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để các giới hạn lặp bằng nhau đồng thời cho ta mối liên hệ giữa các giới hạn lặp và giới hạn kép.

Định lý 9.III: Giả sử A, B $\subset$ R, a $\in$ A', b $\in$ B' và f: A $\times$ B $\to R^n$.

Nếu:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = l$

b) Với mỗi y $\in$ B tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to a} f(x, y) = \varphi(y)$ thì tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$ và $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x, y)$.

Chứng minh: Ta chứng minh cho trường hợp a, b hữu hạn. Từ giả thiết a), theo định nghĩa của giới hạn, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $(x, y) \in A \times B$ thỏa mãn $0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ ta có $\|f(x, y) - l\| < \varepsilon$. Lấy $\delta_1 = \dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$, ta có $0 < \delta_1 < \delta$ và nếu $|x - a| < \delta_1$, $|y - b| < \delta_1$, thì $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$.

Lấy $(x, y) \in A \times B\backslash(a, b)$ sao cho $|x - a| < \delta_1$, $|y - b| < \delta_1$.

Khi đó $\|f(x, y) - l\| < \varepsilon$. (1)

Cố định y với $0 < |y - b| < \delta_1$. Khi đó từ (1) cho $x \to a$ ta được $\|\varphi(y) - l\| \le \varepsilon$, với mọi y thỏa mãn $0 < |y - b| < \delta_1$. Theo định nghĩa của giới hạn ta có $\lim\limits_{y\to b} \varphi(y) = l$ hay

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) = l = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$$

Chú ý: 1) Nếu cùng với điều kiện a), điều kiện c) sau đây được thực hiện.

c) Với mỗi x cố định thuộc A tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{y\to b} f(x, y) = \varphi(x)$ thì tồn tại giới hạn lặp $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x, y)$ và $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y)$

Từ đó nếu các điều kiện a, b, c đồng thời được thực hiện thì ta có

$\lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{y\to b} f(x, y) = \lim\limits_{y\to b} \lim\limits_{x\to a} f(x, y)$.

2) Từ định lý trên ta suy ra rằng trong các ví dụ 1) và 2) xét ở trên không tồn tại giới hạn kép $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$. Tuy nhiên trong ví dụ 3) ta có $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$. Điều này suy từ hệ thức

$$\left|x \sin\frac{1}{y}\right| \le |x|$$

Từ đó ta thấy rằng điều kiện a) của định lý không kéo theo điều kiện c).

3) Nếu cả hai giới hạn lặp tồn tại và bằng nhau ta cũng không suy ra được rằng tồn tại giới hạn kép. Chẳng hạn xét hàm $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

Ta có $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x, y) = 0$.

Tuy nhiên $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ không tồn tại vì

- *Với* $x_n = y_n = \dfrac{1}{n} (n \in N^*)$: ta có

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \to 0$$

- *Với* $x'_n = \dfrac{1}{n}$, $y'_n = \dfrac{1}{n^3} - \dfrac{1}{n}$: ta có

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{n} - n \to -\infty \; (n \to \infty)$$

4. Hàm liên tục

Định nghĩa: Cho tập hợp $A \subset R^n$. Hàm vectơ f: $A \to R^p$ được gọi là liên tục tại $a \in A$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in A \mid \|x - a\| < \delta\}$ ta có $\|f(x) - f(a)\| \le \varepsilon$.

Chú ý:

a) Trong định nghĩa này ta không đòi hỏi $x \neq a$ vì tại $x = a$ ta có $f(x) - f(a) = 0$.

b) Định nghĩa này có thể phát biểu lại như sau:

Hàm f: $A \subset R^n \to R^p$ được gọi là liên tục tại a nếu với mọi lân cận V của f(a) tồn tại lân cận U của a sao cho $f(U \cap A) \subset V$.

c) Theo định nghĩa của giới hạn hàm nhiều biến nếu $a \in A'$ thì f liên tục tại a khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

d) Từ tính chất của giới hạn ta thấy hàm f: $A \to R^p$ liên tục tại a khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_k\}_k \subset A$, $x_k \to a$ ta đều có $f(x_k) \to f(a)$ khi $k \to \infty$.

Định nghĩa: a) Hàm $f : A \subset R^n \to R^p$ được gọi là liên tục trên A nếu f liên tục tại mọi điểm $a \in A$.

b) Hàm f được gọi là liên tục đều trên A nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (chỉ phụ thuộc ε) sao cho với mọi x, $x' \in A$ thỏa mãn $\|x - x'\| < \delta$ ta đều có $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

Sau đây là một số tính chất cơ bản của hàm vectơ liên tục nhiều biến mở rộng một cách trực tiếp các tính chất của hàm số liên tục một biến.

1) Cho các tập $A \subset R^n$, $B \subset R^m$. Nếu hàm $f: A \to B$ liên tục tại $a \in A$ và hàm $g: B \to R^p$ liên tục tại $b = f(a)$ thì hàm hợp $gof: A \to R^p$ liên tục tại a.

2) Giả sử $f, g: A \subset R^n \to R^p$ là những hàm liên tục tại $a \in A$. Khi đó hàm $\alpha f + \beta g$, $(\alpha, \beta \in R)$ cũng là hàm liên tục tại a.

Chứng minh hai tính chất được tiến hành một cách hoàn toàn tương tự như đối với hàm số một biến.

3) Hàm $f = (f_1, ..., f_p): A \subset R^n \to R^p$ liên tục tại $a \in A$ khi và chỉ khi các hàm thành phần $f_1, ..., f_p$ của nó liên tục tại a.

Thật vậy, giả sử $\{x_k\}_k \subset A$ là một dãy phần tử bất kỳ hội tụ đến a. Hàm f liên tục tại a khi và chỉ khi $f(x_k) \to f(a)$ khi $k \to \infty$. Vì sự hội tụ trong không gian R^p là sự hội tụ theo tọa độ, điều này xảy ra khi và chỉ khi $f_i(x_k) \to f_i(a)$ khi $k \to \infty$ $(i = 1, ..., p)$ tức là khi và chỉ khi các hàm f_i $(i = 1, ..., p)$ liên tục tại a.

Chú ý: Tính liên tục xét ở trên đây còn được gọi là tính liên tục theo tập hợp các biến để phân biệt với tính liên tục theo từng biến được nêu ra dưới đây.

5. Hàm liên tục theo từng biến

Định nghĩa: Hàm $f: A \subset R^n \to R^p$ được gọi là liên tục theo biến x_i tại điểm $a = (a_1, ..., a_n)$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x_i \in A_i = \{x_i \in R \mid (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in A\}$ thỏa mãn $|x_i - a_i| < \delta$ ta đều có $\|f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...,a_n)\| < \varepsilon$.

Từ định nghĩa ta trực tiếp suy ra rằng nếu hàm f liên tục tại điểm $a = (a_1, ..., a_n)$ (theo tập hợp các biến) thì f liên tục theo từng biến x_i $(i = 1, ..., n)$.

Thật vậy, do f liên tục tại $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in A$ thỏa mãn $\|x - a\| < \delta$ ta đều có $\|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$. Đặc biệt với $x = (x_1, ..., x_n) \in A$ sao cho $x_j = a_j$ $(j \neq i)$ và $|x_i - a_i| < \delta$ ta có $\|x - a\| < \delta$ và do đó

$$\|f(a_1,...,a_{i-1},x_i,a_{i+1},...,a_n) - f(a_1,...a_n)\| < \varepsilon$$

Theo định nghĩa f liên tục theo biến x_i tại a $(i = 1, ..., n)$.

Chú ý: Ngược lại nếu f liên tục theo từng biến với tất cả các biến thì chưa chắc f liên tục theo tập hợp các biến. Chẳng hạn xét hàm:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta có $f(x, 0) = 0$ với mọi $x \in R$, vì thế f liên tục theo x tại (0, 0). Tương tự $f(0, y) = 0$ với mọi $y \in R$, nên f liên tục theo y tại (0, 0). Tuy nhiên $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ với mọi n, nên $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$. Do đó f không liên tục theo tập hợp hai biến tại (0, 0).

6. Các tính chất của hàm liên tục trên tập compac và trên tập liên thông

Định lý 10.III. Cho hàm $f: A \subset R^n \to R^p$ là hàm liên tục trên A. Nếu A là tập compac trong R^n thì f(A) là tập compac trong R^p.

Chứng minh: Giả sử $\{y_k\}_k$ là dãy phần tử bất kỳ trong f(A). Với mỗi $k \in N$ tồn tại $x_k \in A$ sao cho $y_k = f(x_k)$. Vì A là tập compac dãy $\{x_k\}_k \subset A$ có chứa một dãy con $\left\{x_{k_l}\right\}_l$ sao cho $x_{k_l} \to a \in A$. Do f liên tục tại a ta có $f(x_{k_l}) \to f(a) \in f(A)$. Như vậy dãy $\{y_k\}_k \subset f(A)$ có chứa dãy con $\{y_{k_l}\}_l$ với $y_{k_l} \to f(a) \in f(A)$. Theo định nghĩa f(A) là tập compac.

Hệ quả: Nếu $f: A \subset R^n \to R^p$ là hàm liên tục trên A và A là tập compac trong R^n thì f(A) là tập bị chặn trong R^p.

Định lý 11.III: Nếu $f: A \subset R^n \to R$ là hàm liên tục và A là tập compac trong R^n thì hàm f đạt được cận trên đúng và cận dưới đúng trên A.

Chứng minh: Theo hệ quả trên f(A) là tập bị chặn trong R. Vì thế tồn tại $M = \sup\limits_{x \in A} f(x)$ và $m = \inf\limits_{x \in A} f(x)$.

Theo định nghĩa của cận trên đúng tồn tại $\{x_k\}_k \subset A$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = M$. Do A compac dãy $\{x_k\}_k \subset A$ có chứa một dãy con $\{x_{k_l}\}_l$ sao cho $x_{k_l} \to a \in A$. Vì f liên tục tại a, ta có $\lim\limits_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = f(a) \in f(A)$. Vậy $M = f(a) \in f(A)$.

Tương tự ta chứng minh được rằng tồn tại $b \in A$ sao cho $f(b) = m$.

Định lý 12.III (Cantor): Nếu $f: A \subset R^n \to R^p$ là hàm liên tục trên A và A là tập compac thì hàm f liên tục đều trên A.

Chứng minh: Giả sử ngược lại f liên tục trên A nhưng không liên tục đều trên đó. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta_k = \dfrac{1}{k}$ $(k \in N^*)$ tồn tại $x_k, x'_k \in A$ thỏa mãn $\|x_k - x'_k\| < \dfrac{1}{k}$ nhưng $\|f(x_k) - f(x'_k)\| \geq \varepsilon$. Vì A là tập compac dãy $\{x_k\}_k \subset A$ có chứa một dãy con $\{x_{k_l}\}_l$ sao cho $x_{k_l} \to a \in A$ khi $l \to \infty$.

Từ hệ thức:

$$\|x'_{k_l} - a\| \leq \|x'_{k_l} - x_{k_l}\| + \|x_{k_l} - a\| \to 0 \ (l \to \infty)$$

ta suy ra $x'_{k_l} \to a$. Từ đó, do f liên tục tại a ta có

$$0 = \|f(a) - f(a)\| = \lim_{l\to\infty}\left\|f(x_{k_l}) - f\left(x'_{k_l}\right)\right\| \geq \varepsilon \text{ vô lý}$$

Vậy hàm f liên tục đều trên A.

Định nghĩa: Tập hợp $A \subset R^n$ được gọi là tập liên thông đường nếu hai điểm bất kỳ a, b ∈ A đều nối được với nhau bằng một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong A, tức là tồn tại một hàm liên tục $\varphi: [\alpha, \beta] \subset R \to A$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$.

Định lý 13.III. Giả sử $f: A \subset R^n \to R$ là hàm liên tục trên A và $A \subset R^n$ là tập hợp liên thông đường. Cho a và b là hai điểm của A sao cho $f(a) \neq f(b)$. Khi đó với bất kỳ λ nằm giữa f(a) và f(b) tồn tại $c \in A$ sao cho $f(c) = \lambda$.

Chứng minh: Do A là tập liên thông đường, tồn tại một hàm liên tục $\varphi: [\alpha, \beta] \subset R \to A$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$.

Khi đó hàm hợp $g = f o \varphi: [\alpha, \beta] \to R$ là hàm số liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Giả sử λ là số nằm giữa $g(\alpha) = f(a)$ và $g(\beta) = f(b)$. Theo định lý Bolzano-Cauchy về giá trị trung gian tồn tại $\xi \in [\alpha, \beta]$ sao cho $g(\xi) = \lambda$ hay $f(\varphi(\xi)) = \lambda$. Đặt $c = \varphi(\xi) \in A$. Ta có $f(c) = \lambda$.

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Giả sử d là một khoảng cách trên tập hợp X. Đặt $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, $d_2(x, y) = \ln[1 + d(x, y)]$ và $d_3(x, y) = \min[1, d(x, y)]$.

Chứng minh rằng d_1, d_2 và d_3 cũng là những khoảng cách trên X.

2. Hàm liên tục $u = f(v)$ trên R phải thỏa mãn điều kiện gì nếu đẳng thức $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ xác định một khoảng cách trên tập hợp số thực R.

3. Hãy xây dựng một không gian mêtric có chứa các hình cầu $B(x_1, r_1)$ và $B(x_2, r_2)$ với $r_1 > r_2$ sao cho $B(x_1, r_1) \subset B(x_2, r_2)$.

4. Chứng minh rằng trong không gian mêtric bao đóng của hình cầu mở chứa trong hình cầu đóng có cùng tâm và bán kính. Cho ví dụ về trường hợp bao hàm thức thực sự xảy ra.

5. Cho A, B là hai tập hợp trong không gian mêtric X. Chứng minh rằng $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

6. Cho A là một tập hợp bất kỳ trong không gian mêtric X. Chứng minh rằng A' là một tập hợp đóng.

7. Chứng minh rằng trong không gian định chuẩn bao đóng của hình cầu mở là hình cầu đóng có cùng tâm và bán kính.

8. Cho A, B là hai tập hợp trong không gian R^n. Đặt

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

a) Chứng minh rằng nếu một trong các tập hợp A và B là mở thì A + B là mở.

b) Chứng minh rằng nếu A và B là các tập hợp compac thì A + B là tập hợp compac.

c) Chứng minh rằng nếu A là tập hợp đóng, B là tập hợp compac thì A + B là tập hợp đóng.

d) Nếu A và B là các tập hợp đóng thì A + B có là tập hợp đóng không? Cho ví dụ.

9. Giả sử $A \subset [0, 1]$ là hợp của các khoảng mở (a_i, b_i) sao cho mỗi điểm hữu tỉ giữa 0 và 1 chứa trong một khoảng (a_i, b_i) nào đó. Chứng minh rằng $[0, 1] \setminus A$ là biên của tập hợp A.

10. Hãy mô tả các tập hợp sau đây trong mặt phẳng

a) $|x - 1| + |y| = 1$

b) $x^2 + y^2 \leq y$, $y \geq x^2$

c) $[x, y] = 0$ trong đó $[x + y]$ là phần nguyên của $x + y$.

11. Khảo sát giới hạn lặp và giới hạn (kép) của các hàm số sau tại điểm (0, 0)

a) $f(x, y) = (x + y) \sin\dfrac{1}{x} \sin\dfrac{1}{y}$

b) $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x^2 + y^2}$

c) $f(x, y) = \dfrac{(x + y)\cos(x + y)}{\sin(x - y)}$

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$

e) $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2} \sin\dfrac{1}{xy}$

f) $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$

g) $f(x, y) = (x + y)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}$

12. Tìm các giới hạn lặp sau đây

a) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \dfrac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left(x^2 + y^2\right) e^{-(x+y)}$

13. Chứng minh rằng nếu $A \subset R^n$ là một tập hợp mở, $f: A \to R$ là một hàm liên tục thì tập hợp:

$$B = \{x \in A: \alpha < f(x) < \beta\}$$

trong đó α, β là những số thực cho trước, là một tập hợp mở.

14. Giả sử $A = \{(x, y) \in R^2 : x > 0 \text{ và } 0 < y < x^2\}$. Ta xác định hàm số $f: R^2 \to R$ bằng cách đặt $f(x) = 0$ nếu $x \,\overline{\in}\, A$ và $f(x) = 1$ nếu $x \in A$. Đối với mọi điểm $h \in R^2$ ta đặt $g_h(t) = f(th)$.

Chứng minh rằng mọi hàm $g_h(t)$ liên tục tại $t = 0$ nhưng hàm $f(x)$ không liên tục tại $(0, 0)$.

15. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & \text{nếu } |x| + |y| \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } |x| + |y| = 0 \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x||y|}} & \text{nếu } xy \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } xy = 0 \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x \sin y}{x^2 + y^2} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

d) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} & \text{nếu } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{nếu } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

16. Khảo sát tính liên tục đều của hàm $f(x, y) = \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

a) Trong miền $A = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$

b) Trong miền $B = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 > 1\}$

17. Nghiên cứu tính liên tục đều của các hàm sau trong R^2:

a) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

b) $f(x, y) = \sqrt{|x + y|}$

18. Chứng minh rằng nếu hàm $f: A \subset R^n \to R^m$ liên tục đều trên tập bị chặn A thì f bị chặn trên A.

Chương IV

PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN

§1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP MỘT

1. Khái niệm hàm khả vi

Nhiều bài toán trong hình học, vật lý, cơ học v.v..., như tìm hệ số góc của tiếp tuyến với một đường cong, tìm mật độ khối dài của một thanh kim loại, tìm vận tốc chuyển động của một chất điểm, dẫn đến khái niệm đạo hàm.

Xét hàm số $y = f(x)$ xác định trong một lân cận điểm $x_0 \in R$. Cho x_0 một số gia Δx khá bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó số $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia của hàm số ứng với số gia đối số Δx tại điểm x_0.

Định nghĩa: Nếu tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ có giới hạn hữu hạn khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm f đối với x tại x_0 và được kí hiệu là $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Khi đó ta nói rằng hàm f khả vi tại x_0.

Ví dụ: Tìm đạo hàm của hàm $y = \ln x$ $(x > 0)$. Ta có

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$ Do đó

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} \to \frac{1}{x} \text{ khi } \Delta x \to 0.$$

Vậy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$

Định nghĩa: Cho U là tập hợp mở trong R, f: U → R là một hàm xác định trên U. Hàm f được gọi là khả vi trên U nếu f khả vi tại mọi điểm của U. Khi đó hàm số

$$f': U \to R, x \to f'(x)$$

được gọi là đạo hàm của hàm số f trên U.

Nếu f ' liên tục trên U thì ta nói rằng f khả vi liên tục trên U hay f thuộc lớp $C^1(U)$.

Định lý 1.IV. Cho tập hợp mở $U \subset R$ và hàm số f: U → R.

Nếu f khả vi tại $x_0 \in U$ thì

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h).h \qquad (1)$$

trong đó $r(h) \to 0$ khi $h \to 0$.

Chứng minh. Đặt $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = r(h)$

Do f khả vi tại x_0 ta có $r(h) \to 0$ khi $h \to 0$. Do đó

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r(h)h$$

Hệ quả: Điều kiện cần để hàm f khả vi tại x_0 là f liên tục tại đó.

Điều này trực tiếp suy ra từ công thức (1).

Chú ý: Nếu f liên tục tại x_0 thì chưa chắc f khả vi tại đó. Chẳng hạn hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x_0 = 0$, tuy nhiên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ tức là f không khả vi tại $x_0 = 0$.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

Ta nhắc lại không chứng minh các quy tắc tính đạo hàm đã được biết trong giáo trình giải tích và đại số lớp 12.

Định lý 2.IV. Cho U là tập mở trong R, f và g: U $\to$ R là các hàm khả vi tại $x_0 \in U$. Khi đó các hàm $f \pm g$. cf (c bất kỳ thuộc R), f . g và $\frac{f}{g}$ (nếu $g(x_0) \neq 0$) là các hàm khả vi tại x_0 và ta có:

a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

b) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$

c) $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

3. Đạo hàm hàm hợp và đạo hàm hàm ngược

Định lý 3.IV. Cho các tập hợp U, V trong R và các hàm f: U $\to$ V, g: V $\to$ R. Giả sử f khả vi tại $x_0 \in U$ và g khả vi tại $y_0 = f(x_0) \in V$. Khi đó hàm hợp gof khả vi tại x_0 và $(gof)(x_0) = g'[f(x_0)] \,.\, f'(x_0)$.

Chứng minh: Cho x_0 một số gia Δx đủ bé sao cho $x_0 + \Delta x \in U$. Khi đó f có số gia Δf; ứng với số gia Δf này hàm số h = gof có số gia Δh, đó chính là số gia của h ứng với Δx. Nếu $\Delta f \neq 0$ ta có

$$\Delta h = g'(f(x_0))\,\Delta f + r(\Delta f).\Delta f \qquad (2)$$

trong đó $r(\Delta f) \to 0$ khi $\Delta f \to 0$. Đẳng thức này cũng đúng cả khi $\Delta f = 0$ vì khi đó

$$\Delta h = g(f(x_0) + \Delta f) - g(f(x_0)) = g(f(x_0)) - g(f(x_0)) = 0$$

Chia hai vế của (2) cho Δx ta được

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = g'\big(f(x_0)\big)\frac{\Delta f}{\Delta x} + r(\Delta f)\frac{\Delta f}{\Delta x} \to g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0) \text{ khi } \Delta x \to 0$$

tức là ta có $(gof)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Ví dụ: Tính $(\ln|x|)'$, $(x \neq 0)$. Ta có

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}\cdot(|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{nếu } x > 0 \\ -\frac{1}{|x|} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

tức là $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Định lý 4. IV. Giả sử rằng

1) Hàm số $f: (a, b) \to R$ liên tục và đơn điệu thực sự trong khoảng (a, b).

2) f có đạo hàm $f'(x_0) \neq 0$ tại $x_0 \in (a, b)$.

Khi đó hàm ngược $g = f^{-1}$ của hàm f có đạo hàm tại điểm $y_0 = f(x_0)$ và $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Chứng minh. Với mọi $y \in (c, d) = f[(a, b)]$, $y \neq y_0$ do g cũng là đơn điệu thực sự ta có $x = g(y) \neq g(y_0) = x_0$.

Khi đó $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$.

Khi $y \to y_0$, do hàm ngược g cũng là hàm liên tục, ta có $x \to x_0$. Từ đó ta có:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

hay $$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Ví dụ: 1) Xét hàm $y = a^x$ $(a > 0)$. Ta có $\ln y = x\ln a$ hay $x = \dfrac{\ln y}{\ln a}$,

do đó $x'_y = \dfrac{1}{y\ln a}$. Từ đó suy ra $y'_x = y\ln a = a^x\ln a$, tức là $(a^x)' = a^x\ln a$.

Đặc biệt $(e^x)' = e^x$.

2) Xét hàm $y = \text{arctg}x$. Hàm này là hàm ngược của hàm $x = \text{tg}y$ $(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2})$ và ta có

$$x'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2. \text{ Vậy}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1+x^2} \text{ tức là } (\text{acrtg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

3) Xét hàm $y = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$. Hàm này là hàm ngược của hàm $x = \sin y$, $y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Ta có

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1))$$

Tương tự ta có

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1))$$

$$(\text{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in (-\infty, +\infty))$$

4. Đạo hàm của hàm cho bởi tham số

Giả sử $y = f(x)$ là hàm cho bởi tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta)$$

trong đó y = y(t) và x = x(t) là các hàm khả vi tại $t = t_0$ với $x'(t_0) \neq 0$. Hơn nữa giả sử rằng hàm x = x(t) liên tục và đơn điệu thực sự trong khoảng (α, β). Khi đó theo định lý 4. IV hàm x = x(t) có hàm ngược t = t(x) khả vi tại $x_0 = x(t_0)$ và $t'_x(x_0) = \frac{1}{x'(t_0)}$. Lấy đạo hàm của hàm y đối với x tại x_0 theo quy tắc đạo hàm hợp ta được

$$y'_x(x_0) = y'(t_0)t'_x(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$

Ví dụ: Cho hàm y = y(x) cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có $y'_x = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t$.

Nếu dùng hệ thức biểu diễn y trực tiếp theo x : $y = \sqrt{1 - x^2}$ và lấy đạo hàm theo x ta có

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{\sin t}{\cos t}.$$

5. Bảng đạo hàm một số hàm sơ cấp

Ta nêu ra dưới đây bảng đạo hàm của một số hàm sơ cấp thường gặp đã biết trong giáo trình giải tích lớp 12 hoặc trong các ví dụ ở trên.

1. $y = c$ (c hằng số), $y' = 0$
2. $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$
3. $y = x^\alpha$, $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
4. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$ $(a > 0)$
5. $y = e^x$, $y' = e^x$
6. $y = \ln|x|$, $y' = \frac{1}{x}$

7. $y = \log_a |x|$, $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$

8. $y = \sin x$, $y' = \cos x$

9. $y = \cos x$, $y' = -\sin x$

10. $y = \mathrm{tg}x$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

11. $y = \mathrm{cotg}x$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

12. $y = \arcsin x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $y = \mathrm{arctg}x$, $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

14. $y = \mathrm{arcctg}x$, $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

15. $y = \mathrm{sh}x$, $y' = \mathrm{ch}x$

16. $y = \mathrm{ch}x$, $y' = \mathrm{sh}x$

$$\left(\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

6. Đạo hàm một phía

Định nghĩa: Cho hàm số f: $[x_0, b) \to R$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm bên phải của f tại x_0, kí hiệu là $f'_+(x_0)$.

Tương tự, xét hàm số f: $(a, x_0] \to R$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm bên trái của f tại x_0, kí hiệu là $f'_-(x_0)$.

Nếu U là một lân cận của x_0 và f: $U \to R$ thì từ các tính chất của giới hạn ta suy ra rằng hàm số f có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi nó có đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái tại x_0 và hai đạo hàm này bằng nhau.

Ví dụ: Xét hàm $f(x) = |x|$. Tại điểm $x_0 = 0$ ta có

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1\text{, hay } f'_+(0) = 1 \text{ và}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1, \text{ hay } f'_-(0) = -1$$

Như vậy không tồn tại đạo hàm của hàm f tại $x_0 = 0$.

7. Các định lý cơ bản của hàm khả vi

Định nghĩa. Cho tập hợp mở $U \subset R$ và hàm số $f: U \to R$. Ta nói rằng hàm f đạt cực đại địa phương (tương ứng cực tiểu địa phương) tại $x_0 \in U$ nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset U$ và $f(x) \le f(x_0)$ (tương ứng $f(x) \ge f(x_0)$) với mọi $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Điểm x_0 mà tại đó hàm f đạt cực đại địa phương hoặc cực tiểu địa phương được gọi chung là điểm cực trị của hàm f.

Định lý 5. IV (Fermat). Cho tập hợp mở $U \subset R$ và hàm $f: U \to R$. Nếu điểm $c \in U$ là điểm cực trị của hàm f và nếu tồn tại $f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.

Chứng minh. Giả sử f đạt cực đại địa phương tại $c \in U$. Theo định nghĩa tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(c - \delta, c + \delta) \subset U$ và $f(c + \Delta x) - f(c) \le 0$ với mọi Δx có $|\Delta x| < \delta$. Nếu $\Delta x > 0$ thì $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \le 0$, cho $\Delta x \to 0$, $\Delta x > 0$ ta có $f'(c) \le 0$.

Nếu $\Delta x < 0$ thì $\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0$, cho $\Delta x \to 0$, $\Delta x < 0$ ta có $f'(c) \ge 0$. Vậy $f'(c) = 0$.

Trong trường hợp f đạt cực tiểu địa phương tại c chứng minh được tiến hành một cách tương tự.

Chú ý: Điểm x_0 tại đó $f'(x_0) = 0$ được gọi là điểm dừng của hàm f. Như vậy nếu hàm $f: U \to R$ (U mở) là hàm khả vi trên U thì những điểm cực trị của f phải nằm trong số các điểm dừng của f.

Định lý 6.IV (Rolle). Giả sử hàm số $f: [a, b] \to R$ có các tính chất:

a) f liên tục trên [a, b];

b) f khả vi trong (a, b);

c) f(a) = f(b).

Khi đó, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Chứng minh: Hai trường hợp có thể xảy ra là:

1) Hàm f là hằng số trên [a, b] tức là f(x) = f(a) = f(b) = hằng số. Khi đó $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$.

2) Hàm f(x) không là hằng số trên [a, b]. Vì là hàm liên tục trên [a, b] nên f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên [a, b] và ít nhất một trong hai giá trị này đạt được tại điểm c trong khoảng mở (a, b) vì f(a) = f(b). Theo giả thiết đạo hàm tồn tại ở mọi điểm trong (a, b) và vì thế tại điểm c trong khoảng này tại đó f đạt cực trị ta có $f'(c) = 0$ theo định lý Fermat.

Định lý 7.IV (Lagrange). Giả sử hàm số $f: [a, b] \to R$ có các tính chất:

1) f liên tục trên [a, b];

2) f khả vi trong (a, b).

Khi đó tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (3).

Chứng minh. Xét hàm $F: [a, b] \to R$ xác định bởi

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Hàm F liên tục trên [a, b], khả vi trong (a, b) và F(b) = F(a) = 0.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, từ đó suy ra (3).

Chú ý. 1) Định lý Rolle là một trường hợp riêng của định lý Lagrange.

2) Công thức (3) được gọi là công thức số gia hữu hạn Lagrange. Công thức này còn có thể viết dưới dạng sau:

Lấy $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, khi đó $b - a = \Delta x$. Vì c ở giữa x_0 và $x_0 + \Delta x$ nên c có thể viết dưới dạng $c = x_0 + \theta\Delta x$, trong đó $0 < \theta < 1$. Công thức (3) có thể viết lại dưới dạng:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x .$$

Hệ quả. Giả sử hàm số $f: [a, b] \to R$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b). Khi đó:

a) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f là một hằng số trên $[a, b]$.

b) Nếu $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a, b)$ thì f tăng (giảm) thực sự trên $[a, b]$.

Chứng minh. a) Giả sử $a \le x_1 < x_2 \le b$. Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{4}$$

Vì $f'(c) = 0$, từ đó ta suy ra $f(x_1) = f(x_2)$. Vậy hàm f là một hằng số.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì từ (4) do $f'(c) > 0$ ta suy ra $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Vậy f là hàm tăng.

Định lý 8. IV (Cauchy). Giả sử các hàm $f, g: [a, b] \to R$ có các tính chất:

1) f và g liên tục trên $[a, b]$

2) f và g khả vi trong (a, b)

Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \tag{5}$$

Nếu hơn nữa $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì công thức (5) có thể viết là

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{6}$$

Chứng minh. Xét hàm h: [a, b] → R xác định bởi

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Hàm h liên tục trên [a, b], khả vi trong (a, b) và

$h(a) = f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a) = h(b)$. Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$h'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$$

từ đó suy ra (5).

Nếu hơn nữa $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì $g(b) - g(a) \neq 0$ vì nếu không sẽ tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho $g'(\xi) = 0$, trái với giả thiết. Khi đó từ (5) ta suy ra (6).

Chú ý: Định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy với hàm $g(x) = x$.

8. Vi phân và ứng dụng của vi phân vào phép tính gần đúng

Định nghĩa: Cho tập hợp mở $U \subset R$ và ánh xạ $f: U \to R$ khả vi tại $x_0 \in U$. Ta gọi ánh xạ tuyến tính từ R vào R xác định bởi $f'(x_0)$ là vi phân của f tại x_0, ký hiệu là $df(x_0)$. Như vậy

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h, \text{ với mọi } h \in R.$$

Từ định nghĩa của đạo hàm và vi phân ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0)(h) + 0(h)$$

trong đó 0(h) là vô cùng bé cấp cao hơn h khi $h \to 0$. Nếu $f'(x_0) \neq 0$ ta có $f(x_0 + h) - f(x_0) \sim df(x_0)(h)$ khi $h \to 0$.

Giả sử f, g là các hàm khả vi tại $x_0 \in U$. Ta kí hiệu df, dg là các vi phân của f và g tại x_0. Từ các quy tắc tính đạo hàm ta suy ra các quy tắc sau đây của phép tính vi phân.

$$d(f + g) = df + dg$$

$$d(cf) = cdf$$

$$d(fg) = df.g + f.dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df.g - f.dg}{g^2} \text{ (nếu } g(x_0) \neq 0).$$

Kí hiệu $h = \Delta x$, vi phân của hàm khả vi $y = f(x)$ tại x được viết lại dưới dạng $dy = df(x) = f'(x)\,\Delta x$. Nếu $f(x) = x$ thì $f'(x) = 1$, khi đó $dy = dx = 1\,\Delta x = \Delta x$ và do đó vi phân của hàm $y = f(x)$ có thể viết là

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Công thức này cũng đúng cả khi x là hàm của biến độc lập khác. Thật vậy nếu $y = f[\varphi(t)]$ ta có

$$dy = [f(\varphi(t))]'dt = f'(x)\,.\,\varphi'(t)dt = f'(x)dx.$$

Tính chất này gọi là tính bất biến của vi phân cấp một. Bây giờ ta xét ứng dụng của vi phân vào tính gần đúng.

Từ hệ thức $f(x_0+h)-f(x_0) \sim df(x_0)(h)$ khi $h \to 0$ ta thấy nếu $|h|$ đủ nhỏ ta có $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + df(x_0)(h)$.

Ví dụ: 1) Tính gần đúng $\sin 31^0$. Xét hàm $f(x) = \sin x$.

Ta có $\sin(x + h) \approx \sin x + h\cos x$, do đó

$$\sin 31^0 \approx \sin 30^0 + \frac{\pi}{180}\cos 30^0 \approx 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01745 \approx 0{,}5151$$

2) Xét hàm $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Với $|h|$ đủ nhỏ ta có

$$\sqrt[n]{x+h} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}h$$

Đặc biệt với $x = a^n$ $(a > 0)$ ta có $\sqrt[n]{a^n + h} \approx a + \dfrac{h}{na^{n-1}}$.

Chẳng hạn ta có $\sqrt{408} \approx 20 + \dfrac{8}{2.20} = 20{,}2$

$$\sqrt{390} = \sqrt{20^2 - 10} \approx 20 - \frac{10}{2.20} = 19{,}75$$

§2. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

1. Định nghĩa đạo hàm cấp cao

Giả sử $U \subset R$ là tập hợp mở, $f : U \to R$ là hàm khả vi trên U. Khi đó có xác định hàm $f': U \to R$, $x \to f'(x)$.

Định nghĩa: Nếu tại $x_0 \in U$ hàm $f': U \to R$ khả vi thì ta gọi đạo hàm của f ' tại x_0 là đạo hàm cấp hai của hàm f tại x_0 và kí hiệu là $f''(x_0)$: $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

Hàm f có đạo hàm cấp hai tại x_0 còn gọi là khả vi cấp hai tại đó.

Một cách tổng quát, giả sử tồn tại đạo hàm cấp n - 1 của f trên U, khi đó có xác định hàm $f^{(n-1)}: U \to R$, $x \to f^{(n-1)}(x)$. Nếu hàm $f^{(n-1)}$ khả vi tại $x_0 \in U$ thì ta gọi đạo hàm của $f^{(n-1)}$ tại x_0 là đạo hàm cấp n của f tại x_0 và kí hiệu là $f^{(n)}(x_0)$: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$. Hàm f có đạo hàm cấp n tại x_0 còn gọi là khả vi cấp n tại đó. Đạo hàm của hàm số f được gọi là đạo hàm cấp một của f.

Ta quy ước đạo hàm cấp không của hàm số f chính là f.

Ví dụ: Cho hàm số f(x) = sinx. Ta có

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2\frac{\pi}{2})$$

Bằng quy nạp ta có $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$

Tương tự ta có $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$

Chú ý: Đạo hàm bên phải và đạo hàm bên trái cấp cao được định nghĩa một cách tương tự:

$$f''_+(x_0) = (f'_+)_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f'_+(x_0 + h) - f'_+(x_0)}{h}$$

$$f''_-(x_0) = (f'_-)_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f'_-(x_0 + h) - f'_-(x_0)}{h} \text{ v.v...}$$

Định nghĩa. Cho tập hợp mở $U \subset R$. Hàm $f: U \to R$ được gọi là thuộc lớp C^n trên U, kí hiệu $f \in C^{(n)}(U)$, nếu f khả vi cấp n tại mọi $x \in U$ và hàm $f^{(n)}: U \to R$, $x \to f^{(n)}(x)$ liên tục trên U.

Hàm f được gọi là khả vi vô hạn trên U hay thuộc lớp C^∞ trên U, kí hiệu $f \in C^\infty(U)$ nếu với mọi n hàm f thuộc lớp C^n trên U.

2. Công thức Leibniz

Cho tập hợp mở $U \subset R$. Giả sử $f, g: U \to R$ là hai hàm khả vi cấp n trên U. Ta có công thức Leibniz sau đây về đạo hàm cấp n của tích f.g:

$$(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \qquad (1)$$

Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp. Với n = 1 công thức (1) chính là công thức đạo hàm của tích đã biết:

$$(f.g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Giả sử công thức (1) đúng với n, ta chứng minh nó đúng cho n + 1. Ta có

$$(f.g)^{(n+1)}(x) = \left((f.g)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)\right)$$

$$= f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x)$$

$$= f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x)$$

Nhưng $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Vì thế

$$(f.g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

tức là (1) đúng với n + 1. Vậy công thức (1) đúng với n bất kỳ.

3. Vi phân cấp cao

Cho tập hợp $U \subset R$ và hàm $f: U \to R$. Giả sử $f \in C^n(U)$.

Định nghĩa: Ta gọi biểu thức d(df) là vi phân cấp hai của hàm f, kí hiệu là d^2f: $d^2f = d(df)$.

Chú ý rằng $df = f'(x)dx$, trong đó dx là hằng số, ta có:

$$d^2f = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dxdx$$

Kí hiệu $dxdx = dx^2$ ta có $d^2f = f''(x)dx^2$.

Tổng quát vi phân cấp n của hàm f là biểu thức $d(d^{n-1}f)$, kí hiệu là d^nf:

$$d^nf = d(d^{n-1}f)$$

Ta có $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$.

Từ công thức Leibniz về đạo hàm cấp cao của tích ta suy ra công thức Leibniz về vi phân cấp cao

$$d^n(f.g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f d^{n-k} g$$

Ở đây f, g là những hàm khả vi cấp n trên U.

Chú ý rằng: nếu x không là biến độc lập mà là hàm của tham số khác thì ta có:

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx)$$

Nhưng $d(f'(x)) = f''(x)dx$ và $d(dx) = d^2x$. Vì thế ta có:

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

Như vậy vi phân cấp hai không có tính bất biến như vi phân cấp một.

4. Công thức Taylor

Bây giờ ta tìm cách xấp xỉ một hàm số bằng một đa thức. Ta có

Định lý 9. IV (Công thức Taylor với số dư dạng Lagrange). Giả sử hàm f: (a, b) → R có đạo hàm đến cấp n + 1 trong (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Khi đó với mọi $x \in (a, b)$ ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (2)$$

trong đó c là một điểm ở giữa x và x_0.

Chứng minh. Xét hàm

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

trong đó biến độc lập t biến thiên trên $[x_0, x]$ (để xác định ta xem rằng $x > x_0$). $\varphi(t)$ liên tục trên $[x_0, x]$. Kí hiệu

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \; r_n(x) = f(x) - p_n(x), \text{ ta có}$$

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \; \varphi(x) = 0 \qquad (3)$$

Lấy đạo hàm của hàm số $\varphi(t)$ theo t ta được

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \left[\frac{f''(t)}{1!}(x-t) - f'(t)\right] - \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right]$$

$$-\cdots-\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right] \text{ hay}$$

$$\varphi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \qquad (4)$$

Giả sử $\psi(t)$ là một hàm nào đó liên tục trên đoạn $[x_0, x]$ và có trong khoảng (x_0, x) đạo hàm $\psi'(t) \neq 0$. Khi đó áp dụng định lý Cauchy cho cặp hàm $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ta suy ra tồn tại một điểm c ở giữa x_0 và x, có dạng $x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, sao cho

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

Từ (3) và (4) ta suy ra

$$r_n(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = -\frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (5)$$

Nếu ta chọn $\psi(t) = (x - t)^{n+1}$ thì các điều kiện nói trên đối với hàm $\psi(t)$ được thực hiện và ta có

$$\psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}, \ \psi(x) = 0, \ \psi'(c) = -(n+1)(x-c)^n$$

Thay vào (5) ta được $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Vậy ta có:

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Công thức (2) đã được chứng minh.

Chú ý: 1) Vì c nằm giữa x và x_0 nên công thức (2) có thể viết lại dưới dạng:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

trong đó $0 < \theta < 1$.

Đại lượng $r_n(x) = \dfrac{f^{n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ được gọi là số dư thứ n của công thức Taylor dưới dạng Lagrange.

2) Nếu trong công thức (5) ta lấy hàm $\psi(t) = x - t$ thì ta có $\psi(x_0) = x - x_0$, $\psi(x) = 0$, $\psi'(c) = -1$. Bởi vì

$$(x - c)^n = [x - x_0 - \theta(x - x_0)]^n = (1 - \theta)^n(x - x_0)^n$$

từ đó ta đi đến biểu thức sau đây của số dư

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x - x_0)\big)}{n!}(1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1} \qquad (6)$$

Biểu thức (6) được gọi là số dư dưới dạng Cauchy của khai triển Taylor.

Đôi khi ta không quan tâm đến biểu thức cụ thể của số dư mà chỉ cần biết bậc của số dư so với vô cùng bé $x - x_0$ khi $x \to x_0$. Khi đó điều kiện của định lý có thể giảm nhẹ đôi chút. Cụ thể ta có:

Định lý 10. IV. Cho tập hợp mở $U \subset R$. Giả sử hàm $f: U \to R$ khả vi đến cấp n trong một lân cận nào đó của $x_0 \in U$ và $f^{(n)}(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó với x ở trong lân cận nói trên của x_0 ta có

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + 0\big((x - x_0)^n\big).$$

Công thức trên đây được gọi là công thức khai triển Taylor của hàm f trong lân cận của x_0.

Chứng minh. Trong công thức (2) thay n bởi n - 1 ta có

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n \quad (7)$$

trong đó c ở giữa x và x_0. Đặt $\alpha(x)=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Vì khi $x \to x_0$ ta cũng có $c \to x_0$ nên do tính liên tục của $f^{(n)}(x)$ tại x_0 ta có $f^{(n)}(c) \to f^{(n)}(x_0)$ và do đó $\alpha(x) \to 0$. Vì thế $\alpha(x)(x - x_0)^n = 0((x - x_0)^n)$.

Trong (7) thay $\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ bằng $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha(x)$ ta được

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+0\left((x-x_0)^n\right).$$

Như vậy $\quad r_n(x) = 0((x - x_0)^n). \quad (8)$

Số dư dạng (8) của khai triển Taylor được gọi là số dư dạng Peano.

Chú ý: Khai triển Taylor của hàm f(x) trong lân cận của điểm $x_0 = 0$ còn được gọi là khai triển Mac - Laurin:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Sau đây là khai triển Mac Laurin một số hàm sơ cấp cơ bản.

a) Hàm $f(x) = e^x$. Hàm này khả vi vô hạn và $f^{(n)}(x) = e^x$ với mọi $n \in N$. Tại $x_0 = 0$ ta có $f^{(n)}(0) = 1$ với mọi n. Do đó

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n)$$

b) Hàm f(x) = sinx khả vi mọi cấp và $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Tại $x_0 = 0$ ta có $f^{(2n)}(0) = \sin n\pi = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Do đó

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + 0(x^{2n})$$

c) Tương tự ta có

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0\left(x^{2n+1}\right)$$

d) Hàm $f(x) = \ln(1 + x)$ khả vi mọi cấp với $x > -1$ và $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n - 1)!\,(1 + x)^{-n}$. Tại $x_0 = 0$ ta có $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n - 1)!$. Do đó

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$$

e) Hàm $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in R$ $(x > -1)$ có

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)(1 + x)^{\alpha-k}.$$

Tại $x_0 = 0$ ta có $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - k + 1)$. Do đó

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + 0(x^n).$$

Ví dụ 1: Nếu $f(x) = P_n(x)$ là một đa thức bậc n của x thì $f^{(n+1)}(x) = 0$ với mọi x. Do đó ta có

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P'_n(a)}{1!}(x - a) + \frac{P''_n(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Chẳng hạn ta biểu diễn hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ dưới dạng tổng của các luỹ thừa của nhị thức $x + 1$.

Ta có $f(-1) = -9$, $f'(-1) = 17$, $f''(-1) = -18$, $f'''(-1) = 12$.

Do đó $f(x) = -9 + 17(x + 1) - \frac{18}{2!}(x + 1)^2 + \frac{12}{3!}(x + 1)^3$

$= 2(x + 1)^3 - 9(x + 1)^2 + 17(x + 1) - 9.$

Ví dụ 2: Tính gần đúng số e với sai số nhỏ hơn 0,001.

Ta có $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Vì thế $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$.

Ta chọn n sao cho $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}001$.

Ta thấy với $n \geq 6$ bất đẳng thức trên được thỏa mãn.

Vậy $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2{,}718$.

5. Ứng dụng đạo hàm vào việc tìm giới hạn. Quy tắc L'Hospital

Ta sử dụng đạo hàm để tìm các giới hạn vô định.

a) Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Định lý 11. IV (L'Hospital). Giả sử các hàm f, g khả vi trong một lân cận của x_0, $f(x_0) = g(x_0) = 0$ và $g'(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ điểm x_0).

Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ thì ta cũng có $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Chứng minh. Ta có $g(x) \neq 0$ nếu $x \neq x_0$ và khá gần x_0 vì nếu $g(x) = g(x_0) = 0$ thì theo định lý Rolle tồn tại c ở giữa x và x_0 sao cho $g'(c) = 0$ trái với giả thiết $g'(x) \neq 0$ khi x khá gần x_0 ($x \neq x_0$). Vì $f(x_0) = g(x_0) = 0$ nên với x khá gần x_0 ta có

$$\frac{fx)}{g(x)} = \frac{f(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Áp dụng định lý Cauchy ta suy ra tồn tại c ở giữa x và x_0 sao cho $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{g'c)}$.

Khi $x \to x_0$ ta có $c \to x_0$, từ đó

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{g'(c)} = A.$$

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3}{2^x\ln 2} = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$

Chú ý: Nếu cả hai đạo hàm f ' và g' vẫn tiến đến 0 khi $x \to x_0$ và chúng là các hàm khả vi trong một lân cận của x_0 đồng thời $g''(x) \neq 0$ trong lân cận đó có thể trừ điểm x_0 thì ta lại có thể áp dụng quy tắc L'Hospital một lần nữa.

Ví dụ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}-3}{10\sin 5x\cos 5x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9e^{3x}}{50\cos 10x} = \frac{9}{50}.$$

Một cách tổng quát nếu trong một lân cận nào đó của x_0 các hàm f và g có đạo hàm đến cấp n và $g^{(n)}(x) \neq 0$ trong lân cận đó (có thể trừ điểm x_0) đồng thời

$$f(x_0) = g(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = g^{(n-1)}(x_0) = 0$$

thì bằng cách áp dụng quy tắc L'Hospital n lần ta có:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Chú ý: Quy tắc L'Hospital còn đúng khi xét các giới hạn một phía.

Bây giờ ta xét trường hợp $x_0 = \pm\infty$. Sau đây ta phát biểu và chứng minh cho trường hợp $x_0 = +\infty$. Trường hợp $x_0 = -\infty$ được xét một cách hoàn toàn tương tự.

Định lý 12. IV. Giả sử f và g là những hàm xác định trên $(a, +\infty)$ sao cho:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

2) f và g khả vi trên $(a, +\infty)$ và $g'(x) \neq 0$ trên đó

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Chứng minh. Đặt $t = \dfrac{1}{x}$, khi $x \to +\infty$ thì $t \to 0_+$.

Kí hiệu $F(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Khi đó

$$\lim_{t\to0^+} F(t) = \lim_{t\to0^+} G(t) = 0$$

Mặt khác $F'(t) = -\dfrac{1}{t^2}f'\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $G'(t) = -\dfrac{1}{t^2}g'\left(\dfrac{1}{t}\right)$ và $\dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \dfrac{f'\left(\dfrac{1}{t}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{t}\right)}$

Sử dụng định lý 11. IV ta có

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0^+} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to0^+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

b) Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Định lý 13. IV. Giả sử f, g là hai hàm xác định trên một lân cận U của c sao cho

1) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$

2) f và g khả vi trên U và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in U\setminus\{c\}$

3) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Khi đó $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Chứng minh. Từ giả thiết 3) ta suy ra với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\eta > 0$ đủ nhỏ sao cho $(c, c + \eta)$ nằm trong lân cận nêu trong giả thiết của định lý và

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } x \in (c, c + \eta)$$

Đặt $c + \eta = x_0$ và lấy x ở giữa c và x_0. Áp dụng định lý Cauchy đối với cặp hàm f, g trên đoạn $[x, x_0]$ ta có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ x < \xi < x_0$$

Do đó $\left|\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Mặt khác ta có đồng nhất thức

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = \frac{f(x_0) - lg(x_0)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right]$$

Vì $g(x) \to +\infty$ khi $x \to c$ nên tồn tại $\delta > 0$, $\delta \leq \eta$ sao cho với x thỏa mãn $c < x < c + \delta$ ta có $g(x) > g(x_0)$ và

$$\left|\frac{f(x_0) - lg(x_0)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Với x sao cho $c < x < x + \delta$ ta có

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vậy $\lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Tương tự ta chứng minh được hệ thức $\lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Do đó $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$

Chú ý:

1) Nếu $l = +\infty$ thì định lý vẫn còn đúng

Thật vậy, khi đó do giả thiết ta có $f'(x) \neq 0$ với x đủ gần c. Thay đổi vai trò của f và g ta có

$$\lim_{x \to c} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

Do đó theo định lý vừa chứng minh $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, từ đó $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

2) Kết quả trên đây còn đúng khi $c = \pm\infty$.

3) Định lý cũng vẫn còn đúng nếu $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to c} g(x) = -\infty$.

Ví dụ 1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^2 x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln x}{3x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{6x^3} = 0$.

2. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$, $\alpha > 0$ và $a > 1$. Ta có.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = 0 \text{ nếu } \alpha \leq 1$$

Nếu $1 < \alpha \leq 2$ thì áp dụng quy tắc L'Hospital một lần nữa ta có

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^x \ln^2 a} = 0.$$

Nếu α là một số hữu hạn thì sau một số hữu hạn lần áp dụng liên tiếp quy tắc L'Hospital ta cũng sẽ có giới hạn đó bằng 0.

4) Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ thì cũng chưa thể kết luận không tồn tại $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Ví dụ: Tìm $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$. Ta có

$$\left| x^2 \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sin x} \right| \le \frac{|x|}{\left| \frac{\sin x}{x} \right|} \to 0 \text{ khi } x \to 0$$

Vì thế $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$.

Trong khi đó $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$, giới hạn này không tồn tại.

c) Các dạng vô định khác

Quy tắc L'Hospital còn được sử dụng để khử các dạng vô định $\infty - \infty$, $0.\infty$, ∞^0, 1^∞.

Ví dụ:

1) Tìm $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{tgx}$. Đặt $\mu = \left(\frac{1}{x} \right)^{tgx}$, ta có $\ln\mu = -tgx \ln x$.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln \mu = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0^+} - \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot tgx = 0$$

Vì vậy $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln\mu} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\mu} = e^0 = 1$.

2) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Đặt $\mu = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$, ta có $\ln\mu = \dfrac{\ln\cos x}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\ln\mu = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{tgx}{2x} = -\frac{1}{2}.$$ Do đó

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln\mu} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln\mu} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

3) Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{k}{1+\ln x}}$ (dạng vô định 0^0). Đặt $\mu = x^{\frac{k}{1+\ln x}}$ ta có

$$\lim_{x\to 0^+}\ln\mu = \lim_{x\to 0^+}\frac{k\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{k\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k.$$ Do đó

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\mu} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\mu} = e^k.$$

4) Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (dạng vô định $\infty - \infty$). Ta có

$$\lim_{x\to 0}\left(ctg^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x}.$$ Nhưng

$$\frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x\cos x + \sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}$$ và

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x + \sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) = 2.$$

Còn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\sin x.\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\dfrac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{ctg}^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)=2\cdot\dfrac{-1}{3}=-\dfrac{2}{3}$.

5) Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ (dạng vô định 0^0)

Đặt $u=\left(\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$, ta có $\ln u=\dfrac{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}x\right)}{\ln x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln u=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{1+x^2}}{\text{arctg}x-\dfrac{\pi}{2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1.$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

6. Hàm lồi

a) Định nghĩa. Hàm f xác định trên [a, b] được gọi là lồi (chính xác hơn - lồi dưới) nếu với bất kỳ x_1, $x_2\in[a, b]$ ta có

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1f(x_1)+q_2f(x_2)\qquad(1)$$

với mọi q_1, q_2 thỏa mãn điều kiện $q_1>0$, $q_2>0$, $q_1+q_2=1$.

Hàm f được gọi là lõm (hay lồi trên) nếu thay cho (1) ta có

$$f(q_1x_1) + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

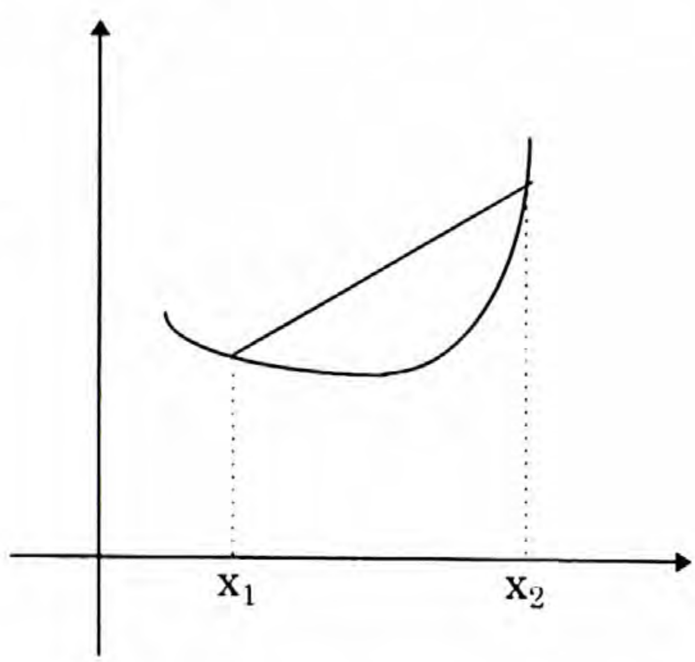
Rõ ràng là nếu f là lồi (tương ứng - lõm) thì hàm -f là lõm (tương ứng - lồi) và ngược lại.

Chú ý:

1) Nếu hệ thức (1) được thực hiện với dấu bất đẳng thức thì hàm f được gọi là lồi chặt. Hàm lõm chặt được định nghĩa một cách tương tự.

2) Hệ thức (1) cho ta thấy nếu f là hàm lồi thì tất cả các điểm của một cung bất kỳ của đồ thị của nó ở dưới dây cung tương ứng (hoặc trùng với điểm tương ứng của dây cung - trường hợp dấu bằng xảy ra trong (1)).

Hình 4



3) Người ta chứng minh được rằng: nếu f: [a, b] $\rightarrow$ R là hàm lồi thì f liên tục trong (a, b) (không nhất thiết liên tục tại các đầu mút a và b); nếu f là hàm liên tục và f thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ với mọi $x_1, x_2 \in [a, b]$ thì f là hàm lồi.

b) Các tính chất của hàm lồi

Tính chất 1. Tích của một hàm lồi với một hằng số dương là một hàm lồi.

Tính chất 2. Tổng của hai hàm lồi là một hàm lồi.

Hai tính chất này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa. Chú ý rằng tích của hai hàm lồi không nhất thiết là một hàm lồi.

Tính chất 3. Nếu $\varphi(\mu)$ là một hàm lồi và ngoài ra là một hàm tăng, còn hàm $\mu = f(x)$ là một hàm lồi thì hàm hợp $\varphi(f(x))$ cũng là hàm lồi.

Thật vậy, do tính lồi của f tính tăng của φ ta có:

$\varphi(f(q_1x_1 + q_2x_2)) \leq \varphi(q_1f(x_1) + q_2(x_2))$, $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$

Do φ là hàm lồi ta lại có

$$\varphi(q_1f(x_1) + q_2f(x_2)) \leq q_1\,\varphi(f(x_1) + q_2\varphi(f(x_2)).$$

Vậy $\varphi(f(q_1x_1 + q_2x_2)) \leq q_1\varphi(f(x_1)) + q_2\varphi(f(x_2))$, điều này chứng tỏ $\varphi$of là hàm lồi.

Tính chất 4. Nếu $y = f(x)$ và $x = g(y)$ là các hàm ngược của nhau (trong các miền tương ứng) và f là hàm lồi tăng thì g là hàm lõm tăng.

Thật vậy, nếu đặt $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ thì $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Do f là hàm lồi ta có

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2) = q_1y_1 + q_2y_2$$

Theo định lý về hàm ngược hàm g(y) cũng tăng nên ta có

$$g(q_1y_1 + q_2y_2) \geq g(f(q_1x_1 + q_2x_2)) = q_1g(y_1) + q_2g(y_2),$$

điều này chứng tỏ rằng g là hàm lõm.

Tính chất 5. Hàm lồi f: (a, b) $\to$ R và khác hằng số không đạt được giá trị lớn nhất trong (a, b).

Thật vậy, giả sử ngược lại f đạt được giá trị lớn nhất tại $x_0 \in (a, b)$. Vì hàm này khác hằng số nên tồn tại một khoảng (x_1, x_2) chứa x_0 sao cho tại một đầu mút giá trị của hàm thực sự nhỏ hơn $f(x_0)$.

Giả sử chẳng hạn $f(x_1) < f(x_0)$, $f(x_2) \leq f(x_0)$

Biểu diễn x_0 dưới dạng $x_0 = q_1x_1 + q_2x_2$ trong đó $q_1 > 0$, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$, ta có:

$$q_1f(x_1) + q_2f(x_2) < q_1f(x_0) + q_2f(x_0) = f(x_0) = f(q_1x_1 + q_2x_2),$$

điều này mâu thuẫn với tính lồi của f.

Tính chất 6. Nếu đoạn $[x_1, x_2]$ trong đó $x_1 < x_2$ được chứa trong một đoạn mà trên đó hàm f là lồi thì với mọi $x \in (x_1, x_2)$ hệ thức (1) được thực hiện hoặc luôn luôn với dấu = hoặc luôn luôn với dấu <.

Về mặt hình học điều này có nghĩa là hoặc cung $\overset{\frown}{A_1A_2}$ trùng với dây cung A_1A_2, hoặc toàn bộ cung đó (trừ hai đầu mút ở dưới dây cung).

Thật vậy, xét hàm tuyến tính

$$l(x) = y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2$$

Tại $x = x_1$ và $x = x_2$ nó nhận các giá trị $y_1 = l(x_1)$, $y_2 = l(x_2)$.

Đặt $\varphi(x) = f(x) - l(x) = f(x) + [-l(x)]$. Vì hàm f và $-l$ là hàm lồi nên φ là hàm lồi. Khi đó hoặc $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in (x_1, x_2)$ hoặc đồng nhất thức không xảy ra. Trong trường hợp thứ nhất $f(x) \equiv l(x)$ tức là cung trùng với dây cung và hệ thức (1) luôn luôn được thực hiện với dấu =. Trong trường hợp thứ hai trong toàn khoảng (x_1, x_2) ta luôn luôn có $\varphi(x) < 0$ vì nếu φ nhận trong khoảng này cả giá trị không âm thì nó đạt được giá trị lớn nhất trên $[x_1, x_2]$ tại điểm trong của đoạn này (vì $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$), điều này theo tính chất 5 nêu trên của hàm lồi là không thể được. Như vậy với mọi

$x \in (x_1, x_2)$ ta có $f(x) < l(x)$, tức là cung đường cong nằm dưới dây cung và hệ thức (1) luôn luôn được thực hiện với dấu <.

c) Tiêu chuẩn hàm lồi

Bây giờ ta tìm điều kiện để một hàm là lồi. Điều kiện (1) có thể viết lại như sau

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2), \; x_1 < x < x_2$$

hay $$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \ge 0 \qquad (2)$$

Định lý 14. IV. Giả sử $f: (a, b) \to R$ là hàm khả vi trong (a, b). Để cho f là hàm lồi điều kiện cần và đủ là đạo hàm f' tăng.

Chứng minh. + Điều kiện cần

Giả sử f là hàm lồi và $x_1 < x < x_2$. Điều kiện (2) có thể viết lại là

$$(x_2 - x)f(x_1) + (x_1 - x + x - x_2)f(x) + (x - x_1)f(x_2) \ge 0$$

hay $$(x - x_1)(f(x_2) - f(x)) \ge (x_2 - x)(f(x) - f(x_1)),$$

hay $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (3)$$

Từ (3) cho $x \to x_1$ ta được $f'(x_1) \le \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Từ (3) cho $x \to x_2$ ta được $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2)$.

Do đó $f'(x_1) \le f'(x_2)$ tức là $f'(x)$ là hàm tăng.

+ Điều kiện đủ

Giả sử f' là hàm tăng. Để chứng minh bất đẳng thức (3) ta áp dụng đối với mỗi vế của nó công thức số gia hữu hạn:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \; \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2)$$

trong đó $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Theo giả thiết f ' tăng nên $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$ tức là bất đẳng thức (3) đúng, từ đó suy ra (2). Vậy f là hàm lồi.

Định lý 15. IV. Giả sử f: (a, b) → R là hàm hai lần khả vi trong (a, b). Để cho f là hàm lồi, điều kiện cần và đủ là $f''(x) \ge 0$ trong (a, b).

Chứng minh. Vì f ' tăng khi và chỉ khi $f''(x) \ge 0$, định lý này suy ra trực tiếp từ định lý 1.

Chú ý: Nếu $f''(x) > 0$ thì hàm f là lồi chặt vì theo tính chất 6) ở trên khả năng f là tuyến tính trong một đoạn nào đó là không thể xảy ra do f ' tăng thực sự.

d) Các ví dụ

1) Hàm bậc nhất f(x) = ax + b đồng thời là lồi và lõm vì $f''(x) = 0$.

2) Hàm $f(x) = x^2$ là hàm lồi vì $f''(x) = 2 > 0$.

3) Hàm a^x ($a > 0$, $a \ne 1$) là hàm lồi trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ vì $f''(x) = a^x(\ln a)^2 > 0$.

4) Hàm lnx (x > 0) là hàm lõm vì $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

5) Hàm xlnx, x > 0 là hàm lồi vì

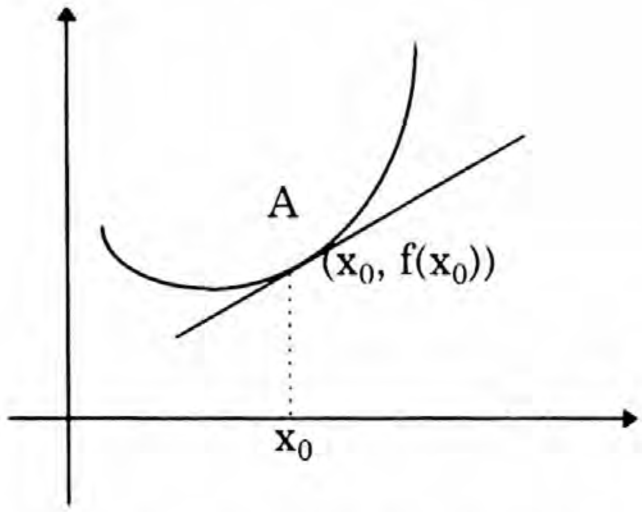
$$(x\ln x)' = 1 + \ln x,\ (x\ln x)'' = \frac{1}{x} > 0.$$

6) Hàm x^α, $0 < x < +\infty$, có đạo hàm cấp hai là $\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$, từ đó suy ra rằng với $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$ hàm là lồi với $0 < \alpha < 1$ hàm là lõm.

Định lý sau đây cho ta một đặc trưng hình học khác của hàm lồi.

Định lý 16. IV. Giả sử hàm f: (a, b) → R khả vi trong (a, b). Để cho f là hàm lồi điều kiện cần và đủ là các điểm của đồ thị nằm phía trên tiếp tuyến bất kỳ của nó.

Hình 5



Chứng minh. Điều kiện cần: Tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $A_0(x_0, f(x_0))$ có hệ số góc là $f'(x_0)$. Phương trình tiếp tuyến được viết dưới dạng

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ta cần chứng minh rằng nếu f là hàm lồi thì với bất kỳ x_0, $x \in (a, b)$ ta có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{4}$$

Bất đẳng thức này tương đương với hai bất đẳng thức sau:

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ nếu } x > x_0 \tag{5}$$

$$\text{và } f'(x_0) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ nếu } x < x_0 \tag{6}$$

Như trong chứng minh của định lý 14. IV, từ tính lồi của f ta suy ra

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{7}$$

$$f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{8}$$

Trong bất đẳng thức (7) thay x_2 bằng x, x_1 bằng x_0, trong bất đẳng thức (8) thay x_2 bằng x_0, x_1 bằng x, $x_1 < x < x_2$, ta có (5) và (6)

Điều kiện đủ

Ngược lại giả sử điều kiện của định lý được thỏa mãn. Khi đó ta có (4) hay tương đương với (4) là (5) và (6). Trong (5) thay x_0 bằng x_1, x bằng x_2 ta có (7), trong (6) thay x_0 bằng x_2. x bằng x_1 ta có (8); $x_1 < x < x_2$.

Như vậy ta có $f'(x_1) \le f'(x_2)$ nếu $x_1 < x_2$, do đó f ' là hàm tăng. Theo định lý 14. IV, f là hàm lồi.

e) Bất đẳng thức Jensen và ứng dụng

Cho f là hàm lồi trên [a, b]. Khi đó ta có bất đẳng thức Jensen sau đây:

$$f(q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_nx_n) \le q_1f(x_1) + q_2f(x_2) + \ldots + q_nf(x_n) \qquad (9)$$

trong đó $q_1, \ldots, q_n > 0$; $q_1 + \ldots + q_n = 1$.

Thật vậy, với n = 2 bất đẳng thức này được nghiệm đúng. Giả sử bất đẳng thức được nghiệm đúng đến một số nguyên dương n nào đó, ta chứng minh nó đúng cho n + 1. Giả sử $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [a, b]$ và $q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}$ là các số dương sao cho $q_1 + \ldots + q_n + q_{n+1} = 1$.

Chú ý rằng

$$q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1} = (q_n + q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right),$$

theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}
&f(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1})\\
&\quad = f\left(q_1x_1 + \ldots + (q_n + q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right)\right)\\
&\quad \le q_1f(x_1) + \ldots + (q_n + q_{n+1})\, f\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right)\\
&\quad \le q_1f(x_1) + \ldots + q_nf(x_n) + q_{n+1}f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức (9) đúng với mọi n.

Thay cho các thừa số q_i có tổng bằng 1 ta thường dùng các số dương tuỳ ý p_i. Trong bất đẳng thức Jensen đặt $q_i = \dfrac{p_i}{p_1 + \ldots + p_n}$ ta có:

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leq \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i}$$

Áp dụng:

1) Lấy $f(x) = x^k$ $(x > 0, k > 1)$. f là hàm số lồi.

Ta có: $$\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right)^k \leq \frac{\sum p_i x_i^k}{\sum p_i}$$

hay $$\left(\sum p_i x_i\right)^k \leq \left(\sum p_i\right)^{k-1} \cdot \sum p_i x_i^k$$

Thay p_i bởi $b_i^{\frac{k}{k-1}}$, x_i bởi $\dfrac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$, a_i, b_i là các số dương, ta đi đến bất đẳng thức Holder sau:

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_i b_i^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Đặt $k' = \dfrac{k}{k-1}$, ta có $k' > 0$, $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'} = 1$, bất đẳng thức Holder được viết dưới dạng

$$\sum a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_i b_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$(a_i, b_i > 0, k, k' > 0, \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'} = 1)$.

2) Hàm f(x) = xlnx (x > 0) là hàm lồi. Do đó

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \ln\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \le \frac{\sum p_i x_i \ln x_i}{\sum p_i}.$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \le \left(\prod x_i^{p_i x_i}\right)^{\frac{1}{\sum p_i x_i}}$.

Ở đây $\prod a_i = a_1.a_2...a_n$. Lấy $p_i = \dfrac{1}{x_i}$ ta có $\dfrac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \le \sqrt[n]{\prod x_i}$

Thay x_i bởi $\dfrac{1}{x_i}$ ta được $\sqrt[n]{x_1.x_2...x_n} \le \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Tính f '(1), f '(2), f '(3) của hàm số

$$f(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2(x - 3)$$

2. Áp dụng các công thức tính đạo hàm để tính đạo hàm của các hàm số sau đây:

a) $y = (2 + x)\sqrt{2 + x^2}.\sqrt{2 + x^3}$

b) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

c) $y = \sin[\cos^2(tg^3x)]$

d) $y = \sin(\cos^2x).\cos(\sin^2x)$

e) $y = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$ $(a > 0, b > 0)$

f) $y = x + x^x + x^{x^x}$;

g) $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$;

h) $y = \text{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}$

3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = x|x|$; b) $y = |(x - 1)(x + 1)^2|$

4. Xét tính khả vi của hàm số

$$y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{với } |x| \le 1 \\ |x| - 1 & \text{với } |x| > 1 \end{cases}$$

5. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$

không có đạo hàm bên trái và bên phải tại $x = 0$

6. Xác định miền tồn tại của hàm ngược $x = x(y)$ và tìm đạo hàm $x'(y)$ nếu:

a) $y = x + \ln x$; $x > 0$

b) $y = x + e^x$.

7. Tìm đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}$ của hàm số cho dưới dạng tham số sau:

a) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

8. Tìm đạo hàm $\dfrac{dy}{dx}$ của hàm số cho dưới dạng hàm ẩn sau

a) $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$

b) $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

9. Tính đạo hàm cấp cao tương ứng của các hàm số sau

a) $y = e^{\sin x}\cos(\sin x)$; Tính y''

b) $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$; Tính $y^{(8)}$

c) $y = x^2e^{2x}$; Tính $y^{(20)}$

d) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; Tính $y^{(100)}$.

10. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

b) $y = \cos ax.\cos bx$

c) $y = \ln\dfrac{a + bx}{a - bx}$: $b \neq 0$

d) $y = \cos^2 x$

11. Tính vi phân cấp cao của các hàm số sau

a) $y = x\cos 2x$. Tính $d^{10}y$

b) $y = x^n.e^x$. Tính $d^n y$

12. Kiểm tra sự đúng đắn của định lý Rolle đối với hàm

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

13. Hàm $y = |x - 1|$ trong đoạn $[0, 2]$ có thỏa mãn định lý Rolle hay không? Tại sao?

14. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0$, trong đó p, q là các hằng số thực, không thể có quá hai nghiệm thực nếu n chẵn, không thể có quá ba nghiệm thực nếu n lẻ.

15. Hàm số f(x) xác định theo công thức

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Hãy xác định giá trị $c \in (0, 2)$ sao cho

$$f(2) - f(0) = 2f'(c)$$

16. Giả sử $f \in C^1(-\infty, +\infty)$ thỏa mãn đồng nhất thức

$$f(x + h) - f(x) \equiv xf'(x) \text{ với mọi } x \text{ và } h$$

Chứng minh rằng $f(x) = ax + b$ với a và b là các hằng số nào đó

17. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

b) $|\text{arctg}x - \text{arctg}y| \leq |x - y|$

18. Kiểm tra các giả thiết của định lý Cauchy cho các hàm $f(x) = \sin x$ và $f(x) = x + \cos x$ trên đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$.

19. Khai triển hàm $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ theo luỹ thừa của $x + 1$.

20. Khai triển các hàm sau theo luỹ thừa nguyên dương của x đến cấp được cho tương ứng

a) $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ đến x^4

b) $f(x) = e^{2x-x^2}$ đến x^5

c) $f(x) = \ln\cos x$ đến x^6

21. Tìm ba số hạng đầu của khai triển Taylor của hàm $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$ trong lân cận của điểm $x_0 = 2$. Áp dụng khai triển đó để tính gần đúng f(2, 02) và f(1, 97).

22. Khai triển hàm $f(x) = \sqrt{1-x^2} - x$ $(x > 0)$ theo luỹ thừa nguyên dương của $\frac{1}{x}$ đến số hạng chứa $\frac{1}{x^3}$

23. Áp dụng quy tắc L'Hospital để tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\text{tg}\frac{\pi x}{2}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot gx-\dfrac{1}{x}\right)$

24. Dùng khai triển Taylor để tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\cot gx\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[1-(\cos x)^{\sin x}\right]$.

Chương V

PHÉP TÍNH VI PHÂN TRÊN R^n

§1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP MỘT

1. Khái niệm về ánh xạ khả vi

Trong mục này ta sẽ mở rộng khái niệm đạo hàm hàm một biến số thực đã xét trong chương IV cho hàm vectơ nhiều biến số thực, tức là cho các ánh xạ:

$$f: U \to R^m$$

trong đó U là tập hợp mở trong R^n.

Trước hết ta nhớ lại rằng hàm f: U → R trong đó U là tập mở trong R, được gọi là khả vi tại điểm a ∈ U nếu tồn tại một số f '(a) sao cho:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \qquad (1)$$

Rõ ràng đẳng thức này không có nghĩa nếu f là hàm vectơ nhiều biến số. Tuy nhiên để mở rộng định nghĩa này cho hàm vectơ, ta sẽ phát biểu lại định nghĩa dưới dạng sau đây:

Gọi A : R → R là ánh xạ tuyến tính được xác định bởi công thức:

$$A(h) = f'(a).h \text{ với mọi } h \in R.$$

Khi đó đẳng thức (1) tương đương với đẳng thức sau:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-A(h)}{h}=0$$

Như vậy định nghĩa về tính khả vi của hàm số một biến số có thể phát biểu lại như sau:

Giả sử U là tập hợp mở trong R, hàm f : U → R được gọi là khả vi tại điểm a ∈ U nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính A: R → R sao cho:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-A(h)|}{|h|}=0$$

Chúng ta hãy mở rộng định nghĩa cho hàm vectơ nhiều biến số.

Giả sử U là tập mở trong R^n, f : U → R^m là hàm vectơ xác định trên U sao cho với x ∈ U

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in R^m$$

Trong đó: f_i : U → R (i = 1, 2, ..., m) là các hàm thành phần của hàm vectơ f, xác định trên U.

Ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa: Hàm f: U → R^m được gọi là khả vi tại điểm $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in U$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính A: $R^n \to R^m$ sao cho:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-A(h)\|}{\|h\|}=0 \qquad (2)$$

hay là:

$$\|f(a+h)-f(a)-A(h)\| = \varepsilon(h).\|h\| \qquad (2')$$

trong đó $h = (h_1, h_2,..., h_n) \in R^n$, ε(h) là vô cùng bé khi $\|h\| \to 0$, tức là $\varepsilon(h) \to 0$ khi $\|h\| \to 0$.

Ánh xạ tuyến tính A được gọi là đạo ánh hay đạo hàm của hàm vectơ f và thường được ký hiệu là Df(a) hay f '(a).

Nếu f khả vi tại mọi điểm $a \in U$ thì ta nói f khả vi trong U.

Chú ý: Trong công thức (2) phần tử $h \in R^n$ vì thế $\|h\|$ là chuẩn của phần tử trong R^n. Nếu $\|h\|$ đủ nhỏ thì $a + h \in U$ do U mở, khi đó $f(a + h) \in R^m$ và

$$[f(a + h) - f(a) - A(h)] \in R^m$$

Như vậy chuẩn của $f(a + h) - f(a) - A(h)$ là chuẩn trong R^m, hơn nữa từ định nghĩa hàm f khả vi tại điểm $a \in U$ ta có:

$$\|f(a+h)-f(a)-A(h)\| = 0(\|h\|)$$

Định lý 1.V. Giả thiết tập mở $U \subset R^n$, hàm $f: U \to R^m$ khả vi tại $a \in U$. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $A: R^n \to R^m$ sao cho:

$$\|f(a+h)-f(a)-A(h)\| = 0(\|h\|) \qquad (3)$$

Chứng minh: Giả sử (3) đúng với $A = A_1$ và $A = A_2$, đặt $B = A_1 - A_2$, ta có

$$\|B(h)\| = \|A_1(h)-A_2(h)\| \le \|f(a+h)-f(a)-A_1(h)\|$$

$$+\|f(a+h)-f(a)-A_2(h)\| = 0(\|h\|)$$

và $\|B(h)\| = \|h\|\alpha(\|h\|)$ với $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\alpha(\|h\|) = 0$

Với h cố định khác không, $t \in R$, $t > 0$ đủ nhỏ $\|B(th)\| = \|th\|\alpha(t\|h\|)$ ta suy ra $\|B(h)\| = \|h\|\alpha(t\|h\|)$. Cho $t \to 0$, $\|B(h)\|$ có thể bé tuỳ ý, có nghĩa là $B(h) = 0$ $\forall h \in R^n$ tức là $B = A_1 - A_2 = 0$ hay $A_1 = A_2$.

Sau đây ta chứng minh một vài tính chất của ánh xạ tuyến tính. Để đơn giản với ánh xạ tuyến tính ta viết Ax thay cho A(x).

Bổ đề 1: Mọi ánh xạ tuyến tính A: $R^n \to R^m$ đều liên tục. Hơn nữa tồn tại một hằng số C > 0 sao cho $\|Ax\| \le C\|x\|$ với mọi $x \in R^n$.

Chứng minh: Giả sử $e_1, e_2, ..., e_n$ là cơ sở chính tắc của không gian R^n, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in R^n$ là một điểm bất kỳ của R^n, $x_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} e_i$ (k = 1, 2, ...) là một dãy phần tử của R^n hội tụ đến x: $x_k \to x$ ($k \to \infty$). Vì sự hội tụ trong không gian R^n là sự hội tụ theo tọa độ nên $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{ik} = \lambda_i \quad \forall i = 1, ..., n$. Do A là ánh xạ tuyến tính

$$\lim_{k\to\infty} Ax_k = \lim_{k\to\infty} A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} e_i\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} Ae_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Ae_i = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = Ax .$$

Do tính tuỳ ý của x nên A liên tục trên R^n.

Tiếp theo ta chứng minh tồn tại một hằng số C > 0 sao cho $\|Ax\| \le C$ với mọi $x \in R^n$ mà $\|x\| = 1$. Giả sử ngược lại, nếu điều đó không xảy ra thì với mọi $k \in N^*$ tồn tại x_k, $\|x_k\| = 1$ sao cho $\|Ax_k\| > k$ hay $\left\|A\left(\frac{x_k}{k}\right)\right\| > 1$, khi đó $x'_k = \frac{x_k}{k} \to 0$ khi $k \to \infty$ nhưng $Ax'_k \not\to 0 = A0$, từ đó suy ra A không liên tục tại điểm 0, trái với giả thiết.

Cuối cùng nếu $x \in R^n$, $x \ne 0$, do tồn tại C > 0 sao cho với mọi $x \in R^n$ mà $\|x\| = 1$ ta có $\|Ax\| \le C$ nên $\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le C$ hay $\|Ax\| \le C\|x\|$.

Hiển nhiên bất đẳng thức này còn đúng cả với x = 0. Bổ đề chứng minh xong.

Đặt $\|A\| = \inf\{C \mid \|Ax\| \leq C\|x\| \ \forall x \in R^n\}$. Có thể kiểm tra được rằng nó thỏa mãn các tiên đề về chuẩn. Số $\|A\|$ được gọi là chuẩn của ánh xạ tuyến tính A. Ta có $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \quad \forall x \in R^n$.

Định lý 2.V. Cho tập U mở $\subset R^n$, $f : U \to R^m$. Nếu f khả vi tại $a \in U$ thì f liên tục tại a.

Chứng minh:

Giả sử f khả vi tại a. Đặt

$$f(a + h) - f(a) - Df(a).h = r(h).$$

Theo hệ thức (3) $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$, mặt khác theo tính liên tục của ánh xạ tuyến tính ta có:

$$\lim_{h \to 0} Df(a)(h) = Df(a)(0) = 0.$$

Vì thế $\lim\limits_{h \to 0} f(a + h) - f(a) = 0$. Vậy hàm f liên tục tại a.

Ví dụ: Nếu A: $R^n \to R^m$ là ánh xạ tuyến tính thì với mọi $x \in R^n$ ta có A'(x) = A.

Thật vậy, do A là ánh xạ tuyến tính với mọi x cố định thuộc R^n và với mọi $h \in R^n$ ta có:

$$A(x + h) - Ax - Ah = 0.$$

Như vậy, tử số trong vế trái của (2) bằng 0, do đó (2) xảy ra và A'(x) = A.

Định lý 3.V. (Quy tắc lấy đạo hàm hàm hợp). Giả sử U là một tập mở trong R^n, f: $U \to R^m$ khả vi tại $x_0 \in U$; V là tập mở chứa f(U), g: $V \to R^p$ khả vi tại $f(x_0)$. Khi đó ánh xạ $F = g \circ f: U \to R^p$ khả vi tại x_0 và

$$F'(x_0) = g'(f(x_0))_0 f'(x_0).$$

Chứng minh: Đặt $y_0 = f(x_0)$, $A = f'(x_0)$, $B = g'(y_0)$ và

$$u(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah$$
$$v(k) = g(y_0 + k) - g(y_0) - Bk$$

với mọi $h \in R^n$, $k \in R^m$ tại đó $f(x_0 + h)$ và $g(x_0 + k)$ được xác định. Khi đó ta có:

$$\|u(h)\| = \varepsilon(h)\|h\|,\ \|v(k)\| = \eta(k)\|k\| \qquad (4)$$

trong đó $\varepsilon(h) \to 0$ khi $h \to 0$ và $\eta(k) \to 0$ khi $k \to 0$.

Cho trước h, đặt $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Khi đó

$$\|k\| = \|Ah + u(h)\| \le [\|A\| + \varepsilon(h)]\|h\| \qquad (5)$$

và $F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh = g(y_0 + k) - g(y_0) - BAh$

$$= B(k - Ah) + v(k) = Bu(h) + v(k)$$

với $h \neq 0$ từ (4) và (5) ta suy ra:

$$\frac{\|F(x_0 + h) - F(x_0) - BAh\|}{\|h\|} \le \|B\|\,\varepsilon(h) + [\|A\| + \varepsilon(h)]\eta(k).$$

Cho $h \to 0$, khi đó $\varepsilon(h) \to 0$. Do (5) $k \to 0$, vì thế $\eta(k) \to 0$. Từ đó do BA là ánh xạ tuyến tính theo định nghĩa ta suy ra:

$$F'(x_0) = BA = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

2. Đạo hàm riêng

Bây giờ ta xét vấn đề tìm đạo hàm theo mỗi biến của hàm số nhiều biến số.

Giả sử $e_1, e_2, \ldots e_n$ là cơ sở chính tắc trong không gian R^n, U là một tập hợp mở trong R^n và $f : U \to R$ là một hàm số của n biến số, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$.

Định nghĩa: Giới hạn

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

nếu nó tồn tại thì được gọi là đạo hàm riêng thứ i của hàm f tại x hay đạo hàm riêng theo biến x_i của hàm f tại x và ký hiệu là $D_if(x)$ hay $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ hoặc $f'_{x_i}(x)$.

Nếu hàm f có tất cả các đạo hàm riêng $D_if(x)$ (i = 1, 2, ..., n) tại mọi điểm $x \in U$ và các đạo hàm riêng này là những hàm liên tục trên U thì ta nói rằng f thuộc lớp C^1 trên U ký hiệu là $f \in C^1(U)$.

Chẳng hạn nếu $f: U \subset R^2 \to R$ và $x = (x_1, x_2) \in U$ thì:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{h_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)}{h_2}.$$

Chú ý: Khi tính đạo hàm riêng của hàm f theo một biến nào đó thì ta xem các biến khác là hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến số.

Ví dụ: 1) Cho $f(x, y) = x^y$, $x > 0$. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln x.$$

2) Cho $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^6 + y^3} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Hãy tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

Chú ý rằng tuy hàm f có cả hai đạo hàm riêng theo hai biến x, y tại (0, 0) nhưng nó không liên tục tại (0, 0). Thật vậy, xét dãy $\left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_n$, ta có: $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, khi $n \to \infty$

Nhưng $$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{n^4}{n^3+1} \to \infty, \text{ khi } n \to \infty$$

Như vậy hàm f không khả vi tại (0, 0), bởi vì theo định lý 1.V, nếu f khả vi tại (0, 0) thì f liên tục tại đó.

Tuy nhiên ta có:

Định lý 3.V. Cho U là một tập hợp mở trong R^n, $f: U \to R$. Nếu f khả vi tại $a \in U$ thì f có đạo hàm riêng theo mọi biến tại a và $f'(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$, trong đó $h = (h_1, \ldots, h_n) \in R^n$.

Chứng minh. Do f khả vi tại a theo (3) ta có

$$f(a + te_i) - f(a) = f'(a)(te_i) + r(te_i)$$

trong đó $\frac{|r(te_i)|}{|t|} \to 0$ khi $t \to 0$. Do $f'(a)$ là ánh xạ tuyến tính từ đó ta suy ra

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = f'(a)e_i.$$

Vậy đạo hàm riêng thứ i của f tồn tại và $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a)e_i$.

Giả sử $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in R^n$. Bằng cách viết $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$, do $f'(a)$ là ánh xạ tuyến tính (từ R^n vào R) ta có

$$f'(a)h = f'(a)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i f'(a)e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i .$$

Vì $f'(a)$ là ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R nên nó được xác định bởi ma trận cấp $1 \times n$. Theo định lý trên, đó là ma trận $(D_1f(a), \ldots, D_nf(a))$.

Chú ý rằng điều ngược lại nói chung không đúng, ví dụ ở trước định lý này cho ta thấy điều đó. Tuy nhiên nếu ta thêm một điều kiện phụ nữa thì định lý đảo là đúng. Cụ thể ta có:

Định lý 4.V. Nếu hàm f: U mở $\subset R^n \to R$ có các đạo hàm riêng $D_1f(x), \ldots, D_nf(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và chúng là các hàm số liên tục tại a thì hàm f khả vi tại a và

$$Df(a)h = \sum_{i=1}^{n} D_i f(a) h_i .$$

Chứng minh: Để đơn giản việc ký hiệu ta chứng minh cho trường hợp n = 2, trường hợp tổng quát chứng minh được tiến hành một cách tương tự. Ta có:

$$f(a + h) - f(a) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$$
$$= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn đối với hàm một biến ta có:

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) = D_1f(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2).h_1$$

$$f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = D_2f(a_1, a_2 + \theta_2 h_2)\, h_2$$

trong đó $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

Bunhia.

$$|f(a+h)-f(a)-D_1f(a)h_1-D_2f(a)h_2)| =$$

$$|[D_1f(a_1+\theta_1h_1, a_2+h_2)-D_1f(a)]h_1+[D_2f(a_1, a_2+\theta_2h_2)-D_2f(a)]h_2|$$

$$\leq \sqrt{[D_1f(a_1+\theta_1h_1, a_2+h_2)-D_1f(a)]^2+[D_2f(a_1, a_2+\theta_2h_2)-D_2f(a)]^2} \times$$

$$\times \sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

Với $\|h\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, do tính liên tục của các đạo hàm riêng tại a, từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}|f(a+h)-f(a)-D_1f(a)h_1-D_2f(a)h_2|=0$$

Chú ý rằng ánh xạ A: $R^2 \to R$ xác định bởi

$$Ah = D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2 \text{ với } h = (h_1, h_2)$$

là ánh xạ tuyến tính, theo định nghĩa ta suy ra hàm f khả vi tại a và $Df(a)h = D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2$.

Định nghĩa: Ta gọi đại lượng $\sum_{i=1}^{n} D_if(a)h_i$ là vi phân toàn phần của hàm f tại a và ký hiệu

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} D_if(a)h_i = f'(a)h$$

Thông thường các số gia của các biến độc lập được ký hiệu là $h_i = dx_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Khi đó

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} D_if(a)dx_i$$

3. Đạo hàm theo hướng

Cho U là một tập hợp mở trong R^n, $a \in U$, $x \in R^n$ và $f: U \to R$, $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in R^n$.

Định nghĩa: nếu hàm g: $t \to f(a + tv)$ khả vi tại t = 0 thì g'(0) được gọi là đạo hàm của f theo hướng v tại a, ký hiệu là $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$, hay $f'_v(a)$ hoặc $D_v f(a)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

Ví dụ: Giả sử e_i (i = 1, ..., n) là cơ sở chính tắc trong R^n. Khi đó

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Định lý 5.V. Nếu f khả vi tại a thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại a và

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i \quad \text{với mọi } v = (v_1, ..., v_n)$$

Chứng minh: Vì f khả vi tại a, theo (3) ta có

$$f(a + tv) - f(a) = f'(a)(tv) + r(tv)$$

Do đó $\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = f'(a)(v) + \frac{r(tv)}{t}$

Vì $\lim_{t\to 0}\left\|\frac{r(tv)}{t}\right\| = \lim_{t\to 0}\frac{\|r(tv)\|}{\|tv\|}\|v\| = 0$ nên ta có

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = f'(a)v$$

$$\text{hay} \quad \frac{\partial f(a)}{\partial v} = f'(a)v = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}v_i$$

Chú ý: Nói chung $D_{v_1+v_2}f(a) \neq D_{v_1}f(a) + D_{v_2}f(a)$.

Tuy nhiên, từ định nghĩa rõ ràng ta có

$$D_{\alpha v}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\alpha v)-f(a)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\alpha\frac{f(a+t\alpha v)-f(a)}{\alpha t} = \alpha D_v(a)$$

với mọi $\alpha \in R$.

Nếu f là hàm khả vi tại a thì do f '(a) là ánh xạ tuyến tính ta có:

$$D_{v_1+v_2}f(a) = f'(a)(v_1+v_2) = f'(a)v_1 + f'(a)v_2$$

$$= D_{v_1}f(a) + D_{v_2}f(a)$$

4. Công thức số gia hữu hạn

Ta gọi một đoạn trong R^n với hai đầu mút a, b $\in R^n$ là tập hợp $[a, b] = \{(1 - t)a + tb, 0 \le t \le 1\}$.

Định lý 6.V. (Công thức số gia hữu hạn)

Giả sử U là một tập hợp mở trong R^n, [a, b] là một đoạn chứa trong U và f: U $\to$ R là một hàm khả vi trên U. Khi đó tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)$

trong đó $a = (a_1, ..., a_n)$; $b = (b_1, ..., b_n)$.

Chứng minh: Giả sử hàm số g(t) = f((1 - t)a + tb) xác định trên một tập con của R chứa [0, 1]. Ta có g(0) = f(a); g(1) = f(b). Theo công thức số gia hữu hạn của hàm một biến số, tồn tại $t_0 \in (0,1)$ sao cho $g(1) - g(0) = g'(t_0)$. Chú ý rằng ánh xạ φ: t $\to$ tb là ánh xạ tuyến tính từ R^1 và R^n vì thế $\varphi' = \varphi$ tức là φ' là ánh xạ tuyến tính từ R^1 vào R^n xác định bởi b : φ' : t $\to$ tb. Hơn nữa, từ định nghĩa rõ ràng ánh xạ hằng có đạo hàm bằng 0. Vì thế ánh xạ h: t $\to$ (1 - t)a + tb có đạo hàm là ánh xạ tuyến tính từ R^1 vào R^n xác định bởi b - a: h'(t) = t(b - a). Theo định lý về đạo hàm hàm hợp ta có:

$$g'(t) = Df[(1-t)a + tb](b-a)$$

Từ đó ta có

$$f(b) - f(a) = g(1) - g(0) = g'(t_0)$$

$$= Df(c)(b-a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i)$$

với $c = (1 - t_0)a + t_0 b$.

5. Các phép tính về đạo ánh

Định lý 7.V. Cho U là một tập hợp mở trong R^n, $f, g : U \to R$. Nếu f, g khả vi tại $a \in U$ thì ta có các công thức sau:

a) $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$;

b) $D(f \cdot g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$

c) Nếu $g(a) \neq 0$ thì $D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{g^2(a)}$

Chứng minh.

a) Do f, g là hàm khả vi ta có

$$f(a+h) - f(a) = Df(a)h + r_1(h) \qquad (6)$$

$$g(a+h) - g(a) = Dg(a)h + r_2(h) \qquad (7)$$

trong đó $$\lim_{h\to 0} \frac{|r_1(h)|}{\|h\|} = 0, \quad \lim_{h\to 0} \frac{|r_2(h)|}{\|h\|} = 0 \qquad (8)$$

$$f(a+h) + g(a+h) - (f(a) + g(a)) = [Df(a) + Dg(a)]h + r_1(h) + r_2(h)$$

$Df(a) + Dg(a)$ là ánh xạ tuyến tính và

$$\lim_{h\to 0} \frac{|r_1(h) + r_2(h)|}{\|h\|} = 0$$

Theo định nghĩa f + g khả vi và

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

b) Ta có

$$f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a) - [f(a)Dg(a) + g(a)Df(a)]h$$

$$= f(a + h)[g(a + h) - g(a) - Dg(a)h] + g(a)[f(a + h) - f(a) - Df(a)h]$$

$$+ [f(a + h) - f(a)]Dg(a)h$$

Từ đó do (6) (7) (8) và chú ý rằng $|Dg(a)h| \leq \|Dg(a)\| . \|h\|$ ta suy ra:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left| f(a + h)g(a + h) - f(a)g(a) - [f(a)Dg(a) + g(a)Df(a)]\, h \right| = 0$$

Vì $f(a)Dg(a) + g(a)Df(a)$ là ánh xạ tuyến tính, theo định nghĩa ta suy ra f.g khả vi và $D(f.g)a = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a)$.

Tính chất c) được chứng minh một cách tương tự.

6. Biểu diễn đạo hàm bởi ma trận

Định lý 7.V. Giả sử U là một tập hợp mở trong R^n, $f = (f_1, ..., f_m)$ là một ánh xạ từ U vào R^m và $a \in U$. Ánh xạ f khả vi tại a khi và chỉ khi mỗi hàm thành phần, f_i khả vi tại a. Khi đó $Df(a) = (Df_1(a), ..., Df_m(a))$.

Chứng minh. a) Giả sử f khả vi tại a. Gọi P_i $(i = 1, ..., m)$ là phép chiếu R^m lên không gian tọa độ thứ i:

$$P_i : y = (y_1, ..., y_i, ..., y_m) \to y_i \ (i = 1, ..., m)$$

Rõ ràng P_i là ánh xạ tuyến tính, vì thế nó là ánh xạ khả vi và $DP_i = P_i$. Hơn nữa $f_i = P_i of$.

Theo định lý về đạo hàm hàm hợp f_i cũng là ánh xạ khả vi tại a và $Df_i = DP_i oDf = P_i o\, Df$ $(i = 1, ..., m)$.

Như vậy, Df_i là thành phần thứ i của Df tức là:

$$Df(a) = (Df_1(a) ... Df_m(a)).$$

b) Ngược lại, giả sử mỗi hàm thành phần f_i khả vi tại a. Đặt $A = (Df_1(a), ..., Df_m(a))$. Vì mỗi ánh xạ $Df_i(a)$ là ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R nên A là ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R^m. Ta có:

$$f(a + h) - f(a) - Ah = (f_1(a + h) - f_1(a) - Df_1(a)h, ..., f_m(a + h) - f_m(a) - Df_m(a)h)$$

Vì thế:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{|f_i(a+h) - f_i(a) - Df_i(a)h|^2}{\|h\|^2}} = 0$$

Theo định nghĩa hàm f khả vi tại a và:

$$Df(a) = A = (Df_1(a), ..., Df_m(a))$$

Theo định lý 4.V mỗi $Df_i(a)$ có ma trận là:

$$(D_1f_i(a), D_2f_i(a), ..., D_nf_i(a))$$

Vì thế ma trận của ánh xạ tuyến tính $Df(a) : R^n \to R^m$ là

$$\begin{pmatrix} D_1f_1(a) & D_2f_1(a) & \cdots & D_nf_1(a) \\ D_1f_2(a) & D_2f_2(a) & \cdots & D_nf_2(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_m(a) & D_2f_m(a) & \cdots & D_nf_m(a) \end{pmatrix}$$

Ma trận này được gọi là ma trận Jacôbi của hàm f tại a, ký hiệu là $J_f(a)$. Khi m = n ma trận này là một ma trận vuông và định thức của nó được gọi là Jacôbian của f tại a, ký hiệu là $\frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(x_1, ..., x_n)}$

$$\det J_f(a) = \frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(x_1, ..., x_n)}$$

7. Đạo hàm riêng của hàm hợp

Cho các tập hợp mở $U \subset R^n$, $V \subset R^m$ và các ánh xạ $f: U \to V$ khả vi tại $a \in U$, $g: V \to R$ khả vi tại $b = f(a)$. Theo định lý về đạo hàm hợp, ánh xạ hợp g o f khả vi tại a, ta có

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b)_{\circ} Df(a)$$

Vì ma trận của tích 2 ánh xạ tuyến tính bằng tích 2 ma trận của các ánh xạ tuyến tính thành phần nên $J_{gof}(a) = J_g(b).J_f(a)$. Với $f = (f_1, ..., f_m)$ đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(gof)(a) \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}(gof)(a)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(b) \ldots \frac{\partial g}{\partial y_m}(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

ở đây $y = (y_1, ..., y_m) \in R^m$. Thực hiện phép nhân ma trận ta được:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(gof)(a) \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}(gof)(a)\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a) \ldots \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)\right)$$

So sánh các phần tử của hai ma trận ta đi đến công thức tính đạo hàm riêng của hàm hợp sau đây:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(gof)(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a), \; j = 1, ..., n$$

Chẳng hạn cho $f: U \subset R^3 \to V \subset R^3$ xác định bởi $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z); t(x, y, z))$, $g: V \to R$ thì $h = g \circ f$ có dạng $h = g(u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z))$. Khi đó các đạo hàm riêng của h được tính theo các công thức sau:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z}.$$

8. Một vài ứng dụng của khái niệm đạo hàm

a) Tính gần đúng giá trị hàm số.

Nếu f là hàm khả vi tại a thì ta có:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + o(\|h\|)$$

trong đó $h = (h_1, \dots, h_n)$. Vì thế nếu $\|h\|$ đủ nhỏ ta có công thức xấp xỉ $f(a+h) \approx f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$.

Ví dụ: Tính gần đúng $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2}$.

Xét hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Các đạo hàm riêng này liên tục trong lân cận của điểm (4, 3), vì thế f khả vi tại (4, 3). Ta có

$$f(4 + 0{,}05; 3 + 0{,}07) \approx f(4, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(4{,}3).0{,}05 + \frac{\partial f}{\partial y}(4{,}3).0{,}07$$

hay $\sqrt{(4{,}05)^2 + (3{,}07)^2} \approx 5 + \frac{4}{5}0{,}05 + \frac{3}{5}0{,}07 = 5{,}08$

b) Khảo sát cực trị của hàm số nhiều biến số

Định nghĩa: Cho hàm f: U mở → R. Điểm $a \in U$ được gọi là cực trị địa phương của hàm f nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho hình cầu $B(a, r) \subset U$ và với mọi $x \in B(a, r)$ hiệu $f(x) - f(a)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(x) - f(a) \leq 0$ với mọi $x \in B(a, r)$ thì a được gọi là điểm cực đại của hàm f.

Nếu $f(x) - f(a) \geq 0$ với mọi $x \in B(a, r)$ thì a được gọi là điểm cực tiểu của hàm f.

Định lý 8.V. (Fermat). Nếu $f : U$ mở $\subset R^n \to R$ là hàm khả vi tại a và a là điểm cực trị của f thì

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Do đó $Df(a) = 0$.

Chứng minh: Lấy v bất kỳ thuộc R^n. Xét hàm $g(t) = f(a + tv)$. Từ giả thiết ta suy ra rằng g(t) đạt cực trị tại $t = 0$. Theo định lý Fermat (đối với hàm số một biến số) ta có $g'(t) = 0$ hay $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$

Cho v lần lượt bằng $e_1, ..., e_n$ (các vectơ của cơ sở chính tắc của R^n) ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Với mọi $h \in R^n$ ta có

$$Df(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i = 0.$$

Vậy $Df(a) = 0$.

§2. HÀM NGƯỢC VÀ HÀM ẨN

1. Hàm ngược

Giả sử $f : R \to R$ là hàm khả vi liên tục trên một tập hợp mở chứa a và $f'(a) \neq 0$. Nếu $f'(a) > 0$ thì do tính liên tục của f, tồn tại một khoảng mở V chứa a sao cho $f'(x) > 0$ với mọi $x \in V$.

Nếu $f'(a) < 0$ ta cũng có kết quả tương tự. Như vậy f tăng (hay giảm) thực sự trên V và vì vậy là đơn ánh và có hàm ngược f^{-1} xác định trên một khoảng mở W chứa f(a). Hàm f^{-1} cũng là hàm khả vi và với mọi $y \in W$ ta có

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Bây giờ ta xét vấn đề tương tự cho các ánh xạ trong các không gian nhiều chiều.

Ta cần đến bổ đề sau:

* **Bổ đề**: Giả sử $B \subset R^n$ là một hình cầu và $f: B \to R^n$ là một hàm thuộc lớp $C^1(B)$. Nếu tồn tại một số M sao cho $|D_j f_i(x)| \leq M$ với mọi i, j và với mọi $x \in \text{int}B$ thì

$$\|f(x) - f(y)\| \leq n^2 M \|x - y\|, \quad \forall x, y \in B.$$

Chứng minh: Giả sử $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$ và $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B$. Ta có:

$$\begin{aligned} f_i(y) - f_i(x) &= f_i(y_1, \ldots, y_n) - f_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) + f_i(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n) \\ &\quad - f_i(y_1, \ldots, y_{n-2}, x_{n-1}, x_n) + \ldots + f_i(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} f_i(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f_i(y_1, \ldots y_{j-1}, x_j, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn Lagrange ta được $f_i(y_1,..., y_j, x_{j+1},..., x_n) - f_i(y_1,..., y_{j-1}, x_j,..., x_n) = D_jf_i(z_{ij})(y_j - x_j)$ với z_{ij} nào đó. Theo giả thiết ta có $|D_jf_i(z_{ij})(y_j - x_i)| \le M|y_j - x_j|$. Do đó

$$\left|f_i(y) - f_i(x)\right| \le \sum_{j=1}^{n} M\left|y_j - x_j\right| \le nM\|y - x\|$$

do $\left|y_j - x_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - x_j\right)^2} = \|y - x\|$ với mỗi j.

Vì vậy:

$$\|f(y) - f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(y) - f(x_i)\right)^2} \le \sqrt{nn^2M^2\|y - x\|^2}$$

$$\le n^2M\|y - x\|$$

Định lý 9.V (về hàm ngược): Giả sử f: U mở $\subset R^n \to R^n$, $f \in C^1(U)$, $a \in U$ và $\det J_f(a) \ne 0$. Khi đó tồn tại một tập mở V chứa a và một tập hợp mở W chứa f(a) sao cho ánh xạ $f : V \to W$ có ánh xạ ngược liên tục $f^{-1} : W \to V$ khả vi với mọi $y \in W$ và thỏa mãn hệ thức:

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

* *Chứng minh*: Đặt A = Df(a). Do $\det J_f(a) \ne 0$, A có ánh xạ nghịch đảo A^{-1}. Chú ý rằng A^{-1} là ánh xạ tuyến tính ta có:

$$D\left(A^{-1} o f\right)(a) = D\left(A^{-1}\right)\left(f(a)\right) o Df(a) = A^{-1} o D f(a) = I$$

trong đó I là ánh xạ đồng nhất. Nếu định lý đúng với $A^{-1}of$ thì do $f = AoA^{-1}of$, nó cũng đúng với f. Vì vậy bằng cách thay f bằng $A^{-1}of$, ta có thể xem rằng A là ánh xạ đồng nhất: A = I.

Do f khả vi tại a ta có

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - Ih\|}{\|h\|} = 0 \qquad (1)$$

Từ đó ta suy ra rằng tồn tại một hình cầu đóng B chứa a như là một điểm trong, sao cho

$$f(x) \neq f(a) \text{ nếu } x \in B \text{ và } x \neq a. \tag{2}$$

Thật vậy nếu không tồn tại một hình cầu B như vậy thì có một dãy $\{h_n\}_n$ sao cho $h_n \to 0$ và $f(a + h_n) = f(a)$. Nhưng khi đó

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f(a+h_n) - f(a) - Ih_n\|}{\|h_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|h_n\|}{\|h_n\|} = 1$$

điều này trái với (1).

Vì $f \in C^1(U)$, nếu cần thu nhỏ B lại, ta có thể xem rằng $\det J_f(x) \neq 0$ với mọi $x \in B$ (3) và

$$|D_j f_i(x) - D_j f_i(a)| < \frac{1}{2n^2} \tag{4}$$

với mọi i, j và với mọi $x \in B$.

Xét hàm $g: U \to R^n$ xác định bởi $g(x) = f(x) - x$. Ta có $Dg(x) = Df(x) - DI(x) = Df(x) - I = Df(x) - Df(a)$. Vì thế $|D_j g_i(x)| = |D_j f_i(x) - D_j f_i(a)| \leq \dfrac{1}{2n^2}$ với mọi i, j và với mọi $x \in B$ theo (4). Áp dụng bổ đề trên cho hàm g ta được

$$\|f(x_1) - x_1 - (f(x_2) - x_2)\| \leq n^2 . \frac{1}{2n^2}\|x_1 - x_2\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

với mọi $x_1, x_2 \in B$. Từ hệ thức

$$\|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|(f(x_1) - x_1) - (f(x_2) - x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

ta suy ra:

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|, \ \forall x_1, x_2 \in B. \tag{5}$$

Vì f liên tục và biên giới ∂B của B là tập hợp compac, $f(\partial B)$ cũng là tập hợp compac. Theo (2) tập hợp này không chứa f(a). Vì vậy tồn tại một số d > 0 sao cho $\|f(a)-f(x)\| \ge d$ với mọi $x \in \partial B$.

Đặt $W = \left\{ y : \|y - f(a)\| < \frac{d}{2} \right\}$. Nếu $y \in W$ và $x \in \partial B$ thì ta có:

$$\|y-f(x)\| = \|(f(a)-f(x))-(f(a)-y)\| \ge \|f(a)-f(x)\| - \|f(a)-y\| \ge d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

Vậy $$\|y-f(x)\| > \|y-f(a)\|, \ \forall y \in W, \ \forall x \in \partial B. \qquad (6)$$

Ta chứng minh rằng với bất kỳ $y \in W$ tồn tại một điểm x duy nhất trong B sao cho f(x) = y. Muốn vậy xét hàm $h : B \to R$ xác định bởi đẳng thức

$$h(x) = \|y - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i(x))^2 .$$

Hàm đó liên tục vì vậy đạt giá trị nhỏ nhất trên tập compac B. Nếu $x \in \partial B$ thì do (6) h(a) < h(x). Do đó h không đạt giá trị nhỏ nhất trên ∂B và như vậy tồn tại $x \in \mathrm{int}B$ tại đó h đạt giá trị nhỏ nhất. Theo điều kiện cần của cực trị ta có:

$D_j h(x) = 0$ với mọi j, tức là

$$\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - f_i(x)) D_j f_i(x) = 0, \ \forall j$$

Nhưng theo (3) $\det J_f(x) \neq 0$, vì vậy từ các đẳng thức trên ta suy ra $y_i - f_i(x) = 0$ với mọi i, tức là y = f(x).

Vậy ta đã chứng minh được sự tồn tại của phần tử x. Từ (5) ta suy ra rằng phần tử x như vậy là duy nhất.

Đặt $V = \mathrm{int}B \cap f^{-1}(W)$. Ta đã chứng minh rằng hàm $f: V \to W$ có hàm ngược $f^{-1}: W \to V$. Bây giờ ta viết lại bất đẳng thức (5) dưới dạng:

$$\left\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\right\| \le 2\left\|y_1 - y_2\right\|, \ \forall y_1, y_2 \in W \qquad (7)$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ rằng f^{-1} liên tục. Ta còn phải chứng minh rằng f^{-1} khả vi. Giả sử $C = Df(x)$. Ta chứng minh rằng f^{-1} khả vi tại điểm $y = f(x)$ và có đạo hàm là C^{-1}. Theo định nghĩa do f khả vi tại x, với mọi $x_1 \in V$ ta có

$$f(x_1) = f(x) + C(x_1 - x) + r(x_1 - x)$$

trong đó $$\lim_{x_1 \to x} \frac{\left\|r(x_1 - x)\right\|}{\left\|x_1 - x\right\|} = 0.$$

Vì vậy $C^{-1}(f(x_1) - f(x)) = x_1 - x + C^{-1}(r(x_1 - x))$. Vì mỗi $y_1 \in W$ có dạng $f(x_1)$ trong đó $x_1 \in V$ nên đẳng thức trên có thể viết lại như sau:

$$f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y) + C^{-1}(y_1 - y) - C^{-1}(r(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)).$$

Do C^{-1} cũng là ánh xạ tuyến tính, chỉ cần chứng minh rằng

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{\left\|C^{-1}\left(r(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right)\right\|}{\left\|y_1 - y\right\|} = 0$$

C^{-1} là ánh xạ tuyến tính nên liên tục, vì vậy chỉ cần chứng minh rằng

$$\lim_{y_1 \to y} \frac{\left\|r\left(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right)\right\|}{\left\|y_1 - y\right\|} = 0$$

Nhưng $$\frac{\left\|r\left(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right)\right\|}{\left\|y_1 - y\right\|} = \frac{\left\|r\left(f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right)\right\|}{\left\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right\|} \cdot \frac{\left\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y)\right\|}{\left\|y_1 - y\right\|}$$

Vì f^{-1} liên tục, $f^{-1}(y_1) \to f^{-1}(y)$ khi $y_1 \to y$. Vì vậy thừa số đầu tiên ở vế phải tiến đến không. Theo (7) thừa số thứ hai ở vế phải không vượt quá 2, vì thế tích ở vế phải tiến đến không. Theo định nghĩa hàm f^{-1} khả vi và $Df^{-1}(y) = C^{-1} = (Df(f^{-1}(y))^{-1}$.

Định lý được chứng minh xong.

Chú ý: Hàm ngược f^{-1} có thể tồn tại ngay cả trong trường hợp $\det J_f(a) = 0$. Chẳng hạn nếu $f: R \to R$ được xác định bởi đẳng thức $f(x) = x^3$ thì $\det J_f(0) = f'(0) = 0$ nhưng f có hàm ngược $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Tuy nhiên nếu $\det J_f(a) = 0$ thì f^{-1} không thể khả vi tại f(a) được. Để chứng minh điều đó ta chú ý rằng $(f o f^{-1})(x) = x$. Nếu f^{-1} khả vi tại f(a) thì theo quy tắc đạo hàm hàm hợp ta có:

$$f'(a) o (f^{-1})'(f(a)) = I$$

và do đó $\det J_f(a).\det J_{f^{-1}}(f(a)) = 1$, điều này mâu thuẫn với đẳng thức $\det J_f(a) = 0$.

2. Hàm ẩn

Giả sử hai biến x và y liên hệ với nhau bởi một phương trình dạng $F(x, y) = 0$ trong đó $F(x, y)$ là một hàm của hai biến số. Nếu với mỗi giá trị $x \in U \subset R$ có tương ứng một và chỉ một $y \in V \subset R$ sao cho $F(x, y) = 0$ thì ta nói hệ thức $F(x, y) = 0$ xác định một hàm ẩn $f: U \to V$ sao cho $F(x, f(x)) = 0$ với mọi $x \in U$.

Chẳng hạn từ hệ thức $x^3 + y^3 = 1$ ta xác định được $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$. Ta nói rằng $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ là hàm ẩn được xác định từ hệ thức đã cho.

Một cách tổng quát có thể đặt bài toán như sau: Giả sử $F: R^n \times R \to R$ và tại điểm $(a, b) = (a_1, a_2, ..., a_n, b) \in R^n \times R$, $F(a, b) = 0$. Hãy xét xem khi nào với mỗi điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ thuộc một lân cận U nào đó trong R^n của điểm a có thể tìm được một phần tử duy nhất y thuộc một lân cận $V \subset R$ của điểm b sao cho

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = F(x, y) = 0$$

Có thể đặt bài toán một cách tổng quát hơn như sau:

Giả sử f_i: $R^n \times R^m \to R$ (i = 1, 2, ..., m) và $(a, b) = (a_1, ..., a_n, b_1, ... b_m) \in R^n \times R^m$ sao cho:

$$f_i(a, b) = f_i(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) = 0 \ (i = 1, ..., m)$$

Hãy xét xem với điều kiện nào tồn tại một lân cận U của a trong R^n và một lân cận V của b trong R^m sao cho với mỗi $x \in U$ có thể tìm được một phần tử duy nhất $y \in V$ sao cho:

$$f_i(x, y) = 0 \ \ (i = 1, ..., m)$$

Định lý 10. V (về hàm ẩn). Giả sử U là tập hợp mở trong $R^n \times R^m$ và $f = (f_1, ..., f_m) : U \to R^m$, $f \in C^1(U)$ $(a, b) \in U$ và $f(a, b) = f(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m) = 0$.

Giả sử M là ma trận vuông cấp m $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\le i,j\le m}$

Khi đó nếu $\det M \neq 0$ thì tồn tại một tập mở $A \subset R^n$ chứa a và một tập mở $B \subset R^m$ chứa b sao cho đối với bất kỳ $x \in A$ có duy nhất $g(x) \in B$ thỏa mãn điều kiện $f(x, g(x)) = 0$. Hàm $g: A \to B$ là khả vi.

* *Chứng minh*: Ta xác định hàm $F : R^n \times R^m \to R^n \times R^m$ bởi đẳng thức $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Khi đó ma trận của DF(a, b) là

$$J_F(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \\ D_1 f(a,b) & \cdots & D_n f_1(a,b) D_{n+1} f_1 & \cdots & D_{n+m} f_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1 f_m & \cdots & D_n f_m D_{n+1} f_m & \cdots & D_{n+m} f_m \end{pmatrix}$$

Vì thế $\det J_F(a, b) = \det M \neq 0$. Theo định lý về hàm ngược tồn tại một tập mở W chứa điểm $F(a, b) = (a, f(a, b)) = (a, 0)$ và một tập hợp mở trong $R^n \times R^m$ chứa điểm (a, b) mà tập hợp này có thể xem là có dạng A × B, A mở ⊂ R^n. B mở ⊂ R^m sao cho hàm F: A × B → W có hàm ngược khả vi h: W → A × B.

Vì F có dạng (x, f(x, y)) nên h có dạng h(x, y) = (x, k(x, y)) trong đó k là một hàm khả vi nào đó. Giả sử $\Pi : R^n \times R^m \to R^m$ là hàm xác định bởi đẳng thức Π(x, y) = y. Khi đó $\Pi_o F = f$. Vì vậy

$$f(x, k(x, y)) = f_o h(x, y) = (\Pi_o F)_o h(x, y)$$

$$= \Pi_o (F_o h)(x, y) = \Pi(x, y) = y$$

Như vậy f(x, k(x, 0)) = 0, do đó có thể lấy g(x) = k(x, 0).

Định lý đã được chứng minh xong.

Chú ý: Khi đã biết hàm g khả vi thì dễ dàng tính được các đạo hàm riêng của nó. Thật vậy, từ các hệ thức $f_i(x, g(x)) = 0$ (i = 1, ..., m) với $g = (g_1, \ldots, g_m)$ bằng cách lấy đạo hàm riêng theo biến thứ j cả hai vế đẳng thức đó ta được:

$$D_j f_i(x, g(x)) + \sum_{k=1}^{m} D_{n+k} f_i(x, g(x)) D_j g_k(x) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Vì det M ≠ 0 hệ m phương trình đó có thể giải được đối với $D_j g_k(x)$.

Chẳng hạn nếu các hàm u = u(x, y) và v = v(x, y) là các hàm ẩn của hai biến x, y xác định bởi các hệ thức F(x, y, u, v) = 0 và G(x, y, u, v) = 0 trong đó F, G : $R^2 \times R^2 \to R$ là các hàm khả vi liên tục trong một tập hợp mở nào đó và

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0$$

thì các hàm u(x, y) và v(x, y) cũng là những hàm khả vi trong một tập mở V nào đó trong R^2 và các đạo hàm riêng của nó được tính từ các hệ thức:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Xem $\frac{\partial u}{\partial x}$ và $\frac{\partial v}{\partial x}$ là các ẩn của hệ phương trình

$$\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Do giả thiết, hệ phương trình tuyến tính này có định thức khác không, từ đó ta xác định được $\frac{\partial u}{\partial x}$ và $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Tương tự ta tính được $\frac{\partial u}{\partial y}$ và $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Ví dụ: Tính các đạo hàm riêng của hàm ẩn z = f(x, y) xác định bởi phương trình $F = \sin xy + z + e^z = 0$.

Ta có $\frac{\partial F}{\partial x}=y\cos xy$, $\frac{\partial F}{\partial y}=x\cos xy$ và $\frac{\partial F}{\partial z}=1+e^z\neq 0$

Từ đó ta có $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{y\cos xy}{1+e^z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{x\cos xy}{1+e^z}$.

§ 3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP CAO

1. Đạo hàm riêng cấp cao

Cho tập hợp mở $U \subset R^n$ và điểm $a \in U$. Giả sử $f: U \subset R$ là hàm số sao cho $D_i f(x)$ tồn tại với mọi $x \in U$. Như thế ta có ánh xạ $D_i f : U \to R$, $x \to D_i f(x)$

Nếu hàm số $D_i f$ có đạo hàm theo biến thứ j tại a tức là nếu tồn tại $D_j(D_i f)(a)$ thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của f tại a theo các biến thứ i và thứ j hay theo các biến x_i và x_j và được ký hiệu là $D_{i,j}f(a)$ hay $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right)(a)$$

Chú ý rằng cách viết này đảo ngược thứ tự của i và j, nhưng đó là cách ký hiệu truyền thống.

Bằng quy nạp ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng các cấp theo các biến.

Ví dụ: Cho $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + x_1 x_2 x_3$. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 x_3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + x_1 x_3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_2; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3} = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 x_2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = x_2; \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_3 \partial x_1^2} = 0$$

v.v... ở đây ta ký hiệu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}$ là $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$ và tương tự đối với các biến khác.

Một vấn đề đặt ra ngay là nếu ta thay đổi thứ tự lấy đạo hàm thì quan hệ giữa các đạo hàm này như thế nào, liệu có đẳng thức giữa $D_{i,j}f(x)$ và $D_{j,i}f(x)$ không?

Ta hãy xét ví dụ sau. Xét hàm

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}y+\dfrac{4x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2>0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0 \end{cases}$$

Từ đó ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$ và do đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}=-1$$

Tương tự ta có

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{nếu } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{nếu } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1$$

Như vậy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$

Tuy nhiên ta có

Định lý 11.V (Schwarz). Giả sử U là tập hợp mở trong R^n, $a \in U$, $f: U \to R$. Nếu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y)$ và $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ tồn tại trên U và liên tục tại a thì ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Chứng minh. Để đơn giản ta chứng minh cho trường hợp n = 2, trường hợp tổng quát chứng minh được tiến hành một cách tương tự.

Xét biểu thức:

$W = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2)$

Ta có thể xem W như số gia của hàm

$$\Phi(x_1) = f(x_1, a_2 + h_2) - f(x_1, a_2)$$

khi x_1 biến thiên từ a_1 đến $a_1 + h_1$:

$$W = \Phi(a_1 + h_1) - \Phi(a_1)$$

Theo công thức số gia hữu hạn Lagrange ta có:

$$W = \Phi'(a_1 + \theta_1 h_1)h_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1,\ a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2)\right] h_1$$

với một θ_1 nào đó, $0 < \theta_1 < 1$. Ta lại áp dụng công thức số gia hữu hạn Lagrange một lần nữa đối với biến thứ hai, ta được

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) h_2 h_1,\ 0 < \theta_2 < 1 \qquad (1)$$

Mặt khác chính đại lượng W đó có thể xem như số gia của hàm:

$$\psi(x_2) = f(a_1 + h_1, x_2) - f(a_1, x_2)$$

khi x_2 biến thiên từ a_2 đến $a_2 + h_2$: $W = \psi(a_2 + h_2) - \psi(a_2)$. Ta lại áp dụng công thức số gia hữu hạn Lagrange liên tiếp hai lần ta được:

$$W = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} f(a_1 + \xi_1 h_1, a_2 + \xi_2 h_2) h_1 h_2 \qquad (2)$$

với các ξ_1, ξ_2 nào đó, $0 < \xi_1 < 1$, $0 < \xi_2 < 1$.

So sánh các biểu thức (1) và (2) và rút gọn $h_1 h_2$ ta có:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \xi_1 h_1, a_2 + \xi_2 h_2)$$

Cho $h_1 \to 0$ và $h_2 \to 0$. Do giả thiết liên tục của các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$ tại $a = (a_1, a_2)$ tại giới hạn ta thu được:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)$$

Định lý được chứng minh xong.

Chú ý: Nếu f: U mở $\subset R^n \to R$ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp k trong U thì ta nói rằng f thuộc lớp C^k trên U, kí hiệu là $f \in C^k(U)$. Khi đó bằng cách áp dụng liên tiếp định lý Schwarz ta suy ra rằng thứ tự của các chỉ số $i_1, \ldots, i_l$ ($l \le k$) trong $D_{i_1 \ldots i_l} f(x)$, $x \in U$ là hoàn toàn không quan trọng.

2. Đạo hàm và vi phân cấp hai

Cho tập hợp mở $U \subset R^n$, f: $U \to R$, $a \in U$. Giả sử $f \in C^2(U)$. Như ta đã biết hàm f khả vi tại a và với $h = (h_1, \ldots, h_n)$ ta có

$$Df(a)h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

Mỗi đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ là một ánh xạ từ U vào R. Vì $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ có các đạo hàm riêng liên tục nên nó là hàm khả vi tại a và với $k = (k_1, ..., k_n)$ ta có

$$D\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} k_j .$$

Biểu thức $D\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i\right)k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j$ là một dạng song tuyến tính trên $R^n \times R^n$, ma trận của dạng song tuyến tính là ma trận vuông $\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

Ánh xạ song tuyến tính từ $R^n \times R^n \to R$ xác định bởi ma trận này được gọi là đạo ánh hay đạo hàm cấp hai của f tại a, ký hiệu là $D^2f(a)$ hay $f''(a)$. Theo giả thiết các đạo hàm riêng cấp hai liên tục vì thế ta có $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, tức là ma trận của đạo ánh là một ma trận đối xứng và do đó đạo ánh cấp hai là một ánh xạ song tuyến tính đối xứng từ $R^n \times R^n$ vào R.

Nếu lấy k = h thì biểu thức

$$D^2 f(a)(h,h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j$$

được gọi là vi phân cấp hai của f tại a, kí hiệu là $d^2f(a)$. Thông thường ta ký hiệu $h_i = dx_i$, khi đó vi phân cấp hai được viết dưới dạng $d^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$

Chú ý: Ta có thể định nghĩa đạo hàm cấp hai một cách tổng quát hơn như sau:

Cho hàm f: U mở $\subset R^n \to R$. Giả sử f khả vi tại mỗi điểm của U. Khi đó đạo hàm Df xác định ánh xạ Df : U $\to \mathcal{L}(R^n, R)$, $x \in U \to Df(x)$, ở đây $\mathcal{L}(R^n, R)$ là không gian các ánh xạ tuyến tính từ R^n vào R. Như đã biết chuẩn của phần tử $A \in \mathcal{L}(R^n, R)$ được xác định bởi công thức

$$\|A\| = \inf\{k : \|Ax\| \le k\|x\|, \ \forall x \in R^n\}$$

và ta có $\|Ax\| \le \|A\|.\|x\|$. Bây giờ ta kiểm tra rằng các tiên đề về chuẩn được thỏa mãn.

Thật vậy nếu Ax = 0 với mọi x thì rõ ràng là $\|A\| = 0$. Ngược lại nếu $\|A\| = 0$ thì Ax = 0, với mọi x. Với mọi $\alpha \in R$ ta có

$$\|\alpha A\| = \inf\{k : \|(\alpha A)x\| \le k\|x\|, \ \forall x \in R^n\}$$

$$= |\alpha| \inf\{k : \|Ax\| \le k\|x\|, \ \forall x \in R^n\} = |\alpha|.\|A\|.$$

Nếu A, B $\in \mathcal{L}(R^n, R)$ thì ta có

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|A\|.\|x\| + \|B\|.\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

với mọi $x \in R^n$. Vì thế, $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$

Như vậy phép tương ứng $A \to \|A\|$ cho ta một chuẩn trên $\mathcal{L}(R^n, R)$ và khi đó $\mathcal{L}(R^n, R)$ trở thành một không gian định chuẩn.

Ánh xạ Df : U $\to \mathcal{L}(R^n, R)$ được gọi là khả vi tại $a \in U$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính B : $R^n \to \mathcal{L}(R^n, R)$ sao cho

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|Df(a + h) - Df(a) - Bh\|}{\|h\|} = 0$$

Ánh xạ B khi đó được gọi là đạo hàm của ánh xạ Df tại a hay đạo hàm cấp hai của f, ký hiệu là $D^2f(a)$ hay $f''(a)$. Hàm f khi đó được gọi là khả vi hai lần tại a và biểu thức $D^2f(a)(h)(h)$ gọi là vi phân cấp hai của f tại a ứng với số gia h.

Vì f khả vi tại $x \in U$ nên tồn tại các đạo hàm riêng

$$D_if(x) \text{ và } Df(x)k = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)k_i\,, \quad k = (k_1, ..., k_n) \qquad (1)$$

Tương tự như đối với hàm số, do Df khả vi tại a, tồn tại các đạo hàm riêng $D_j(Df)(a)$ và ta có

$$D(Df)(a)h = \sum_{j=1}^{n} D_j(Df)(a)h_j\,,\ h = (h_1, ..., h_n)$$

Chú ý rằng ở đây vì $Df \in \mathcal{L}(R^n, R)$ nên $D_j(Df) \in \mathcal{L}(R^n, R)$.

Do đó:

$$D^2f(a)(h)(k) = \sum_{j=1}^{n} h_j D_j(Df)(a)k \qquad (2)$$

Từ (1) với $k = e_i$ ta có $Df(x)e_i = D_if(x)$. Từ đó do Df khả vi tại a ta suy ra rằng tồn tại các đạo hàm riêng cấp hai $D_{i,j}f(a)$. Lấy đạo hàm tại a hai vế của (1) theo biến thứ j ta được:

$$D_j(Df(x)k) = \sum_{i=1}^{n} D_{i,j}f(a)k_i$$

Từ đó thay vào (2) ta được

$$D^2f(a)(h)(k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} D_{i,j}f(a)h_jk_i$$

Như vậy $D^2f(a)$ là một dạng song tuyến tính trên $R^n \times R^n$ có ma trận là $(D_{i,j}\, f(a))_{1 \le i,j \le n}$.

Có thể chứng minh rằng dạng song tuyến tính này là đối xứng tức là $D_{i,j}\, f(a) = D_{j,i}\, f(a)$ với mọi i, j = 1, ..., n.

Như vậy nếu f: U → R khả vi hai lần tại a thì tồn tại các đạo hàm riêng $D_{i,j} f(a)$ và

$$D_{i,j} f(a) = D_{j,i} f(a); \quad i, j = 1, 2, ..., n.$$

Tương tự ta định nghĩa các đạo hàm cấp cao của f.

3. Công thức Taylor đối với hàm nhiều biến

Giả sử U là tập mở trong R^n, $a \in U$ và $f : U \to R$.

Ta ký hiệu $T_a(.)$ là toán tử:

$$T_a(\cdot) = (x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

xác định như sau:

$$T_a(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \text{ ở đây } a = (a_1, ..., a_n)$$

và $T_a^k(.)$ là luỹ thừa hình thức

$$T_a^k(\cdot) = \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k$$

Ví dụ: Với n = 2 ta có

$$T_a(f) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

$$T_a^k(f) = \left[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial}{\partial x_2}\right]^k (f)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_i^k (x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^{k-i} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^i \partial x_2^{k-i}}(a)$$

Định lý 12.V. (Công thức Taylor). Giả sử U là một tập hợp mở trong R^n, $a \in U$ và $r > 0$ sao cho $B(a, r) \subset U$. Cho $f \in C^k(U)$, khi đó với mọi $x \in B(a, r)$ tồn tại $\xi \in [a, x]$ sao cho:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a(f) + \frac{1}{2!}T_a^2(f) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}T_a^{k-1}(f) + \frac{1}{k!}T_\xi^k(f)$$

Chứng minh: Giả sử $x \in B(a, r)$. Khi đó $a + t(x - a) \in B(a, r)$ nếu $t \in (-(1 + \varepsilon), 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Xét hàm

$$g(t) = f(a + t(x - a)) = f(a_1 + t(x_1 - a_1), ..., a_n + t(x_n - a_n))$$

Vì $f \in C^k(U)$ nên $g \in C^k(-\delta, \delta)$ với $\delta = 1 + \varepsilon$. Áp dụng công thức khai triển Mac-Laurin đối với hàm số một biến số g(t) ta có:

$$g(t) = g(0) + \frac{1}{1!}g'(0)t + \frac{1}{2!}g''(0)t^2 + \cdots$$

$$+ \frac{1}{(k-1)!}g^{(k-1)}(0)t^{k-1} + \frac{1}{k!}g^{(k)}(c)t^k \qquad (3)$$

trong đó c là một số nào đó ở giữa 0 và t.

Theo công thức đạo hàm hợp ta có:

$$g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = T_a^1(f)$$

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) = T_a^2(f)$$

Một cách tổng quát ta có $g^{(i)}(0) = T^i_a(f)$ ($i = 1, ..., k -1$). Với $t = 1$ thì c ở giữa 0 và 1 và ta có $g^{(k)}(c) = T_\xi^k(f)$, trong đó $\xi = a + c(x - a)$

Thay các giá trị đạo hàm vừa tìm được vào công thức (3) với $t = 1$, ta được:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}T_a f + \frac{1}{2!}T_a^2(f) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}T_a^{k-1}(f) + \frac{1}{k!}T_\xi^k(f)$$

Nhận xét: Đặt $x_i - a_i = h_i$, ta thấy $T_a(f) = df(a)$.

$T_a^{2}(f) = d^2f(a)$. Ký hiệu $d^if(a) = T_a^{i}(f)$ và gọi biểu thức này là vi phân cấp i của f, công thức Taylor có thể viết lại dưới dạng

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a) + \frac{1}{2!}d^2f(a) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(a) + \frac{1}{k!}d^kf(a+\theta(x-a)),\ 0 < \theta < 1$$

Bây giờ ta nêu ra một dạng khác của công thức Taylor mà ta sẽ sử dụng khi khảo sát điều kiện đủ của cực trị. Ta cần đến tính chất sau của ánh xạ song tuyến tính.

Bổ đề 2. Giả sử $\varphi : R^n \times R^n \to R$ là một phiếm hàm song tuyến tính. Khi đó tồn tại $C > 0$ sao cho

$$|\varphi(x,y)| \le C\|x\|.\|y\|,\ \forall x, y \in R^n$$

Chứng minh. Vì sự hội tụ trên R^n là sự hội tụ theo tọa độ nên mọi phiếm hàm song tuyến tính là liên tục trên $R^n \times R^n$. Trước hết ta chứng minh rằng tồn tại $C > 0$ sao cho

$$|\varphi(x,y)| \le C$$

với mọi $x \in X$, $y \in Y$ mà $\|x\| = \|y\| = 1$

Thật vậy, nếu điều này không xảy ra thì với mọi n tồn tại x_n, y_n với $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ sao cho $|\varphi(x_n, y_n)| > n$. Đặt $x'_n = \frac{x_n}{\sqrt{n}}$, $y'_n = \frac{y_n}{\sqrt{n}}$, ta có $x'_n \to 0$, $y'_n \to 0$, trong khi đó:

$$|\varphi(x'_n, y'_n)| = \frac{1}{n}|\varphi(x_n, y_n)| > 1 \text{ với mọi n.}$$

Do đó $\varphi(x'_n, y'_n) \not\to 0 = \varphi(0, 0)$, trái với tính liên tục của φ. Vậy tồn tại $C > 0$ với tính chất nói trên. Với $x \neq 0$, $y \neq 0$ ta có $\left\|\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \le C$, từ đó suy ra:

$$|\varphi(x,y)| \le C\|x\| . \|y\|, \ \forall\ x, y \in R^n.$$

Đặt $\|\varphi\| = \inf \left\{C > 0 : |\varphi(x, y)| \le C.\|x\|.\|y\|, \forall\ x, y \in R^n \right\}.$

Số $\|\varphi\|$ được gọi là chuẩn của phiếm hàm song tuyến tính φ. Ta có:

$$|\varphi(x,y)| \le \|\varphi\| . \|x\| . \|y\|$$

với mọi $x, y \in R^n$.

Định lý 13. V. Giả sử U là tập hợp mở trong R^n, $a \in U$, $f : U \to R$ thuộc lớp $C^2(U)$. Khi đó với $h \in R^n$ với $\|h\|$ khá nhỏ ta có:

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2} D^2f(a)(h, h) + 0\left(\|h\|^2\right).$$

Chứng minh.

Đặt $\qquad \mu (h) = f(a + h) - f(a) - Df(a)h - \frac{1}{2} D^2f(a)(h, h).$

Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức này, chú ý rằng Df(a) là ánh xạ tuyến tính ta có:

$$D\mu(h) = Df(a + h) - Df(a) - \frac{1}{2} D[D^2f(a)(h, h)] \qquad (1)$$

Đặt $\psi(h) = D^2f(a)(h, h)$. Ta chứng minh rằng

$$D\psi(h)k = 2D^2f(a)(h, k)$$

Ta có:

$\psi(h + k) - \psi(h) = D^2f(a)(h + k, h + k) - D^2f(a)\ (h, h)$

$= D^2f(a)(h, h) + D^2f(a)(h, k) + D^2f(a)(k, h) + D^2f(a)(k, k) - D^2f(a)(h, h)$

$= D^2f(a)(h, k) + D^2f(a)(k, h) + D^2f(a)(k, k)$

$= 2\ D^2f(a)(h, k) + D^2f(a)(k, k)$

do tính đối xứng của đạo hàm cấp hai.

Từ đó theo bổ đề trên ta có

$$\left|\psi(h+k)-\psi(h)-2D^2f(a)(h,k)\right| = \left|D^2f(a)(k,k)\right| \le C\|k\|^2 = 0(\|k\|).$$

Vậy hàm ψ khả vi và $D\psi(h)k = 2D^2f(a)(h, k)$ hay

$$D\psi(h) = 2D^2f(a)h.$$

Thay giá trị này của $D\psi(h) = D(D^2f(a))(h, h)$ vào (1) ta được:

$$D\mu(h) = Df(a + h) - Df(a) - D[Df(a)]h.$$

Do Df(x) khả vi tại $a \in U$, theo định nghĩa ta có

$$\|D\mu(h)\| = \|Df(a+h) - Df(a) - D[Df(a)]h\| = 0(\|h\|).$$

Như vậy, với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi h có $\|h\| < \delta$ ta có:

$$\frac{\|D\mu(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon \quad \text{hay} \quad \|D\mu(h)\| < \varepsilon\|h\|.$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn cho hàm $\mu(h)$ ta được:

$$\mu(h) - \mu(0) = D\mu(\xi)h \text{ với } \xi \in [0, h].$$

Từ đó, do $\mu(0) = 0$ ta có

$$|\mu(h)| \le \|D\mu(\xi)\|.\|h\| < \varepsilon\|h\|.\|h\| \text{ hay}$$

$$\frac{|\mu(h)|}{\|h\|^2} < \varepsilon, \text{ với mọi h có } \|h\| < \delta$$

Vậy $\lim\limits_{h\to 0} = \dfrac{|\mu(h)|}{\|h\|^2} = 0$ hay $\mu(h) = 0\left(\|h\|^2\right)$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Tổng quát hơn người ta chứng minh được kết quả sau đây:

Định lý 14.V. Giả sử U là tập hợp mở trong R^n, $a \in U$, $f : U \to R$ lớp $C^{(k)}_{(U)}$. Khi đó với mọi $h \in R$ với $\|h\|$ khá nhỏ ta có

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}Df(a)h + \frac{1}{2!}D^2f(a)(h^2) + \cdots + \frac{1}{k!}D^kf(a)(h^k) + 0\left(\|h\|^k\right)$$

trong $D^kf(a)(h^k) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^k f(a)$

Công thức này được gọi là công thức Taylor cho hàm số nhiều biến số với số dư dạng Peano.

§ 4. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. Cực trị tự do

Cho tập hợp mở $U \subset R^n$ và hàm $f : U \to R$. Ta trở lại nghiên cứu vấn đề tìm cực trị của hàm f. Như đã biết trong **§**1, nếu $a \in U$ là điểm cực trị của hàm f thì a phải thỏa mãn điều kiện $Df(a) = 0$, nói cách khác a phải là nghiệm của hệ phương trình

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0 \;\; (i = 1, 2, ..., n).$$

Đó là điều kiện cần của cực trị. Bây giờ dùng đạo hàm và vi phân cấp hai ta tìm điều kiện đủ để hàm số có hay không có cực trị.

Ta cần đến một khái niệm và kết quả sau đây trong đại số.

Định nghĩa. Dạng toàn phương φ trên R^n được gọi là xác định dương nếu $\varphi(x) > 0$ với mọi x khác không thuộc R^n.

Bổ đề 3. Nếu φ là một dạng toàn phương xác định dương thì tồn tại một số $\lambda > 0$ sao cho

$$\varphi(x) \geq \lambda\|x\|^2, \;\; \forall x \in R^n.$$

Chứng minh. Giả sử $S = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị trong R^n. S là một tập hợp compac trong R^n. Vì φ là hàm liên tục trên S nên tồn tại $\xi_0 \in S$ sao cho $\varphi(\xi_0) = \inf_S \varphi(x) = \lambda$. Do $\xi_0 \neq 0$ nên $\lambda > 0$ và $\varphi(x) \geq \lambda$ với mọi $x \in S$.

Cho $x \in R^n$, $x \neq 0$. Khi đó $\frac{x}{\|x\|} \in S$ và do đó $\frac{1}{\|x\|^2}\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \lambda$,

từ đó suy ra

$$\varphi(x) \geq \lambda\|x\|^2.$$

Bất đẳng thức này rõ ràng cũng đúng cả với $x = 0$, tức là đúng với mọi x.

Định lý 15.V (điều kiện đủ để có hay không có cực trị). Cho U là tập hợp mở trong R^n, $f \in C^2(U)$. Giả sử $a \in U$ là điểm dừng của f, tức là $Df(a) = 0$. Khi đó:

a) Nếu $d^2f(a)$ là dạng toàn phương xác định dương thì a là điểm cực tiểu của f.

b) Nếu $d^2f(a)$ là dạng toàn phương xác định âm thì a là điểm cực đại của f.

c) Nếu $d^2f(a)$ đổi dấu thì hàm f không có cực trị.

Chứng minh. a) Giả sử $d^2f(a)$ xác định dương theo bổ đề 3 tồn tại $\lambda > 0$ sao cho

$$D^2f(a)(h,h) \geq \lambda\|h\|^2 \text{ với mọi } h \in R^n \quad (1)$$

Vì theo giả thiết $Df(a) = 0$ nên công thức Taylor đối với f có dạng

$$f(a + h) - f(a) = \frac{1}{2} D^2f(a)(h, h) + \varepsilon(h) \|h\|^2$$

trong đó $\varepsilon(h) \to 0$ khi $h \to 0$. Áp dụng bất đẳng thức (1) trên đây ta có:

$$f(a+h)-f(a) \geq \left[\frac{\lambda}{2}+\varepsilon(h)\right]\|h\|^2 > 0$$

nếu $h \neq 0$ và đủ nhỏ. Từ đó suy ra a là điểm cực tiểu địa phương.

b) Nếu $d^2f(a)$ xác định âm thì ta xét hàm $g = -f$, khi đó $d^2g(a)$ xác định dương và g có cực tiểu tại a, từ đó suy ra f có cực đại tại a.

c) Theo giả thiết tồn tại $k_1, k_2 \in R^n$ sao cho $D^2f(a)(k_1, k_1) > 0$ và $D^2f(a)(k_2, k_2) < 0$. Xét hàm

$$g_i(t) = f(a + tk_i) \quad (i = 1, 2)$$

với t đủ nhỏ. Ta có:

$$g'_i(t) = Df(a + tk_i)k_i \quad (i = 1, 2)$$

Do đó $g'_i(0) = 0$, $i = 1, 2$. Hơn nữa

$$g''_i(t) = D^2f(a + tk_i)(k_i, k_i), \quad (i = 1, 2)$$

Vì thế $$g''_1(0) = D^2f(a)(k_1, k_1) > 0.$$

$$g''_2(0) = D^2f(a)(k_2, k_2) < 0.$$

Như vậy $t = 0$ là điểm cực tiểu của $f(a + tk_1)$ và là điểm cực đại của $f(a + tk_2)$, do đó a không là điểm cực trị của f.

Xét trường hợp đặc biệt $n = 2$. Khi đó ta có

$$D^2f(a)(h,h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)h_2^2$$

ở đây $h = (h_1, h_2)$. Giả sử rằng $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ ký hiệu

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

a) Nếu $A > 0$ và $AC - B^2 > 0$ thì dạng toàn phương $d^2f(a)$ là xác định dương và hàm f đạt cực tiểu tại a.

b) Nếu $A < 0$ và $AC - B^2 > 0$ thì dạng toàn phương $d^2f(a)$ là xác định âm và hàm f đạt cực đại tại a.

c) Nếu $AC - B^2 < 0$ thì vì định thức cấp hai (chẵn) là số âm, theo định lý Sylvester trong đại số dạng toàn phương $d^2f(a)$ không xác định dấu, do đó điểm a không là điểm cực trị của hàm f.

d) Nếu $AC - B^2 = 0$ thì ta chưa thể kết luận được gì.

Ví dụ: 1) Tìm cực trị của hàm $f = x^3 + y^3 - 3xy$.

Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x^2 - y) = 0 \\ 3(y^2 - x) = 0 \end{cases}$

ta thấy các điểm dừng của f là $P_1(0, 0)$ và $P_2(1, 1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

Tại P_1 ta có $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ và $AC - B^2 = -9 < 0$, P_1 không phải là điểm cực trị của f.

Tại P_2 ta có $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$ và $AC - B^2 = 27 > 0$. Hàm f đạt cực tiểu tại P_2.

2) Tìm cực trị của hàm $f = x^2y + yz + 32x - z^2$.

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 32 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = y - 2z = 0 \end{cases}$$

ta thấy điểm dừng là $a = (2, -8, -4)$

Khi đó dạng toàn phương $d^2f(a)$ có ma trận là

$$U = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Xét đa thức đặc trưng của ma trận

$$P(\lambda) = \det(U - \lambda I) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 15\lambda - 48$$

Ta có $P(-3) > 0$, $P(0) < 0$, $P(2) > 0$. Như vậy $P(\lambda)$ có nghiệm âm và nghiệm dương nên $d^2f(a)$ không xác định dấu. Hàm số không có cực trị

2. Cực trị có điều kiện (cực trị ràng buộc)

Cho tập hợp mở $U \subset R^2$ và hàm $f: U \to R$. Ta xét bài toán tìm cực trị của hàm f khi các biến x, y thỏa mãn phương trình sau:

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (*)$$

Ta nói rằng tại điểm $(x_0, y_0) \in U$ thỏa mãn điều kiện $\varphi(x_0, y_0) = 0$ hàm f có cực đại tương đối (tương ứng cực tiểu tương đối) nếu tồn tại một lân cận $V \subset U$ của (x_0, y_0) sao cho $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$ (tương ứng $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$) với mọi $(x, y) \in V$ thỏa mãn điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Điểm (x_0, y_0) được gọi là điểm cực trị ràng buộc của hàm $f(x, y)$, còn điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ được gọi là điều kiện ràng buộc của bài toán. Nếu trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) từ hệ thức $\varphi(x, y) = 0$ ta xác định được hàm số $y = y(x)$ thì rõ ràng $f(x_0, y(x_0))$ là cực trị địa phương của hàm một biến $g(x) = f(x, y(x))$. Như vậy trong trường hợp này, bài toán tìm cực trị ràng buộc đưa về bài toán tìm cực trị tự do của hàm $g(x) = f(x, y(x))$.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 < 1$$

với điều kiện $x + y - 1 = 0$.

Từ hệ thức x + y - 1 = 0 ta suy ra y = 1 - x. Thay vào biểu thức của f ta có:

$$g(x) = f(x, y(x)) = \sqrt{1 - x^2 - (1-x)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x - x^2}$$

Vậy việc tìm cực trị có điều kiện được đưa về việc tìm cực trị địa phương của hàm số $g(x) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x - x^2}$ xác định với $x - x^2 \geq 0$ hay $0 \leq x \leq 1$.

Ta có $g'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-2x}{\sqrt{x - x^2}} = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$ và $g'(x) > 0$ với $0 < x < \frac{1}{2}$, $g'(x) < 0$ với $\frac{1}{2} < x \leq 1$.

Do đó g(x) đạt cực đại với điều kiện x + y-1 = 0 tại điểm $M_0(x_0, y_0)$, trong đó $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ và $z_{max} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tuy nhiên không phải bao giờ ta cũng tìm được hàm y = y(x) từ điều kiện φ(x, y) = 0. Do đó không phải lúc nào bài toán tìm cực trị có điều kiện cũng đưa được về bài toán tìm cực trị tự do. Trong trường hợp đó ta dùng phương pháp nhân tử Lagrange được trình bày dưới đây.

Giả sử (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm số f(x, y) với điều kiện φ(x, y) = 0. Khi đó $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Ta giả thiết thêm rằng:

a) Các hàm f(x, y), φ(x, y) có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một lân cận nào đó của (x_0, y_0).

b) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Theo định lý về hàm ẩn trong một lân cận nào đó của điểm (x_0, y_0) tồn tại duy nhất một hàm khả vi y = y(x) thỏa mãn

$\varphi(x, y(x)) = 0$ và $y_0 = y(x_0)$. Khi đó hàm $g(x) = f(x, y(x))$ xác định và có đạo hàm liên tục trong một lân cận nào đó của điểm x_0. Hơn nữa tại điểm $x = x_0$ hàm số $g(x) = f(x, y(x))$ đạt cực trị địa phương.

Do đó $\frac{dg}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y(x_0))y'(x_0) = 0$

hay
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy = 0. \tag{1}$$

Mặt khác ta cũng có

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy = 0 \tag{2}$$

Nhân hai vế của (2) với tham số λ bây giờ tạm thời còn là tuỳ ý chưa được xác định rồi cộng từng vế các đẳng thức thu được với (1) ta có:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)\right]dx + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)\right]dy = 0$$

Hệ thức này thỏa mãn với mọi λ, do đó nếu ta chọn λ sao cho

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \tag{3}$$

tức là $\lambda = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)}$, thì ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \tag{4}$$

Số λ xác định như trên được gọi là nhân tử Lagrange.

Như vậy điểm cực trị (x_0, y_0) của hàm f phải thỏa mãn điều kiện ràng buộc và các hệ thức (3) và (4). Ta có thể phát biểu lại kết quả trên dưới dạng định lý sau:

Định lý 16.V. Giả sử U là một tập hợp mở trong R^2, $f : U \to R$ và (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm f với điều kiện $\varphi(x,y)=0$. Hơn nữa, giả sử rằng:

a) Các hàm số $f(x,y)$ và $\varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm (x_0, y_0).

b) $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

Khi đó tồn tại một số λ sao cho cùng với x_0 và y_0 tạo thành nghiệm của hệ phương trình sau (đối với λ, x và y):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases} \qquad (5)$$

Đó chính là điều kiện cần của cực trị ràng buộc.

Đặt $\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$. Hàm $\Phi(x,y,\lambda)$ được gọi là hàm Lagrange. Hệ phương trình (5) khi đó có thể viết lại dưới dạng:

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}=0 \end{cases}$$

Bây giờ ta xét xem khi nào thì có cực đại hoặc cực tiểu. Với (x, y) thỏa mãn $\varphi(x, y) = 0$ ta có:

$$\Phi(x,y,\lambda_0)-\Phi(x_0,y_0,\lambda_0)=f(x,y)+\lambda_0\varphi(x,y)-\big(f(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi(x_0,y_0)\big)$$
$$= f(x,y)-f(x_0,y_0)$$

Vậy nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm $\Phi(x,y,\lambda_0)$ thì (x_0, y_0) cũng là điểm cực trị của hàm f(x, y) với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Do đó ta hãy tìm cực trị của hàm Lagrange $\Phi(x,y,\lambda_0)$.

Từ điều kiện ràng buộc $\varphi(x, y) = 0$ lấy vi phân hai vế đẳng thức này ta có:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\,dy=0$$

Xét dạng toàn phương

$$d^2\Phi(x_0,y_0,\lambda_0)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x_0,y_0,\lambda_0)\,dx^2+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0)\,dxdy+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x_0,y_0,\lambda_0)\,dy^2$$

trong đó dx và dy liên hệ bởi hệ thức

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy=0$$

hay

$$dy=-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0)}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)}dx$$

Thay biểu thức này của dy vào $d^2\Phi(x_0,y_0,\lambda_0)$ ta có

$$d^2\Phi(x_0,y_0,\lambda_0)=G(x_0,y_0,\lambda_0)\,dx^2$$

Từ đó suy ra:

a) Nếu $G(x_0,y_0,\lambda_0)>0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu có điều kiện.

b) Nếu $G(x_0,y_0,\lambda_0)<0$ thì (x_0, y_0) là điểm cực đại có điều kiện.

Ví dụ: Tìm cực trị của hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Ta lập hàm Lagrange

$$\Phi(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\right).$$

Từ hệ phương trình

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{a} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{b} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

ta có: $-2ax = \lambda = -2by$ hay $x = \frac{b}{a}y$. Từ đó thay vào phương trình cuối ta được

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{b}{a}y + \frac{y}{b} - 1 = 0 \text{ hay } \left(\frac{b}{a^2} + \frac{1}{b}\right)y = 1$$

Vậy hệ phương trình trên có nghiệm là

$$y_0 = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$$

$$x_0 = \frac{b}{a}y_0 = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

$$\lambda_0 = -2ax_0 = -\frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Hơn nữa $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2;\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2;\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$

Vì thế $d^2\Phi(x_0, y_0, \lambda_0) = 2dx^2 + 2dy^2 = 2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)dx^2$.

Vậy điểm $(x_0, y_0) = \left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right)$ là điểm cực tiểu của hàm $f(x, y) = x^2 + y^2$ với điều kiện $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ và

$$z_{min} = \frac{a^2b^4}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{a^4b^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

Chú ý: 1) Kết quả trên đây có thể mở rộng cho các hàm số với số biến nhiều hơn như sau:

Cho tập hợp mở $U \subset R^n \times R^m$ và hàm $f: U \to R$. Ta xét vấn đề tìm cực trị của hàm f với điều kiện các biến $x_1, ..., x_{n+m}$ thỏa mãn m điều kiện ràng buộc sau:

$$\varphi_i(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

trong đó φ_i là các hàm ánh xạ $R^n \times R^m \to R$.

Giả sử rằng các hàm f và φ_i (i = 1, ..., m) đều thuộc lớp $C^1(U)$. Ta lập hàm Lagrange

$$\Phi(x_1, ..., x_{n+m}, \lambda_1, ...\lambda_m)$$

$$= f(x_1, ..., x_{n+m}) + \lambda_1\varphi_1(x_1, ..., x_{n+m}) + \cdots + \lambda_m\varphi_m(x_1, ..., x_{n+m})$$

Khi đó điểm cực trị có điều kiện của hàm f phải nằm trong số các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_j} = 0 & (j = 1, ..., n + m) \\ \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda_i} = \varphi_i = 0 & (i = 1, ..., m) \end{cases}$$

Sau đó ta khảo sát dạng toàn phương $d^2\Phi$ để xét xem điểm dừng nào cho ta cực đại, cực tiểu hoặc không cho ta cực trị.

2) Giả sử f: $A \to R$ là hàm liên tục trên tập hợp compac A trong R^n. Khi đó f đạt được giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên A. Để tìm các giá trị này ta hãy tìm giá trị của hàm số tại tất cả các điểm dừng trong miền A cũng như tại các điểm đạo hàm riêng không tồn tại. So sánh các giá trị này với các giá trị của hàm trên biên ∂A của A.

§ 5. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA PHÉP TÍNH VI PHÂN

1. Phương trình tiếp tuyến của một đường cong

Định nghĩa: Một ánh xạ liên tục $\gamma : [\alpha, \beta] \to R^3$ được gọi là một đường cong trong R^3. Với mỗi $t \in [\alpha, \beta]$ ta có:

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big).$$

Tập hợp $L = \gamma\big([\alpha,\beta]\big)$ được gọi là giá của đường cong.

Nếu x(t), y(t), z(t) là những hàm khả vi liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và các đạo hàm của chúng không đồng thời bằng không tại mọi điểm $t \in [\alpha, \beta]$ thì ta nói γ là một đường cong trơn.

Ta hãy lập phương trình tiếp tuyến của đường cong trơn.

Lấy $M_0\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big) \in L$. Giả sử rằng ít nhất một trong các đạo hàm $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ khác không. Nếu điều kiện này không xảy ra thì M_0 được gọi là điểm kỳ dị của đường cong và ta sẽ không xét trường hợp này. Cho t_0 một số gia Δt. Ứng với giá trị tham số $t = t_0 + \Delta t$ ta có điểm $M\big(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)\big) \in L$.

Gọi O là gốc tọa độ. Đặt $\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

Khi đó vectơ $\frac{1}{\Delta t}\Delta\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{M_0M}$ có các thành phần là:

$$\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t)-y(t_0)}{\Delta t}, \frac{z(t)-z(t_0)}{\Delta t}\right).$$

Cho $\Delta t \to 0$, do giả thiết về tính khả vi của các hàm x, y, z ta có:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\overrightarrow{M_0M} = \vec{v}(t_0) = \left(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\right).$$

Vectơ $\vec{v}(t_0)$ được gọi là vectơ chỉ phương của tiếp tuyến của cung γ tại điểm M_0. Từ đó phương trình của tiếp tuyến của đường cong γ tại M_0 là:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

trong đó $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$ và $z_0 = z(t_0)$.

Đặc biệt nếu γ là đường cong phẳng, $\gamma : [\alpha,\beta] \subset R \to R^2$, với $\gamma(t) = \left(x(t), y(t)\right)$, $t \in [\alpha, \beta]$, trong đó x = x(t), y = y(t) là các hàm khả vi thì phương trình tiếp tuyến của đường cong γ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ là

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)}$$

2. Phương trình mặt phẳng tiếp xúc của một mặt cong

Cho D là một tập compac trong R^2. Ánh xạ liên tục σ: D $\to R^3$ được gọi là một mặt cong trong R^3. Tập hợp S = σ(D) được gọi là giá của mặt cong σ. Sau đây để thuận tiện ta cũng nói S là mặt cong. Giả sử rằng $\sigma(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ $(u,v) \in D$, trong đó $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(uv)$ là những hàm khả vi liên tục trong D_1 và

$$\text{hạng } \sigma'(u,v) = \text{hạng}\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 .$$

Lấy điểm $M_0(x_0,y_0,z_0) \in S$, trong đó $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$; $z_0 = z(u_0,v_0), (u_0,v_0) \in D$. Nếu trong các hàm thành phần của σ ta cố định $v = v_0$, tức là xét các hàm của tham số u: $x = x(u,v_0)$, $y = y(u,v_0)$, $z = z(u,v_0), (u,v_0) \in D$ thì các hàm này xác định một đường cong γ_1 có giá nằm trên S và chứa M_0. γ_1 có vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại M_0 là

$$\overrightarrow{v_1}(u_0) = \left(x'_u(u_0,v_0), y'_u(u_0,v_0), z'_u(u_0,v_0)\right).$$

Tương tự nếu ta cố định $u = u_0$ thì các hàm $x = x(u_0,v)$, $y = y(u_0,v)$ và $z = z(u_0,v)$ xác định một đường cong γ_2 có giá nằm trên S và chứa M_0. γ_2 có vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại M_0 là

$$\overrightarrow{v_2}(v_0) = \left(x'_v(u_0,v_0), y'_v(u_0,v_0), z'_v(u_0,v_0)\right).$$

Đặt $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{v_1}(u_0) \wedge \overrightarrow{v_2}(v_0)$. Hơn nữa nếu ký hiệu:

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{v_1}(u_0) \wedge \overrightarrow{v_2}(v_0) = (A, B, C)$$

thì ta có:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} z'_u(u_0,v_0) & x'_u(u_0,v_0) \\ y'_v(u_0,v_0) & x'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}$$

Gọi P là mặt phẳng chứa hai vectơ $\overrightarrow{v_1}(u_0)$ và $\overrightarrow{v_2}(v_0)$ thì mặt phẳng P đi qua điểm $M_0 \in S$, vuông góc với vectơ $\overrightarrow{N}$ và chứa mọi tiếp tuyến của các đường cong γ nằm trên mặt S và đi qua điểm M_0.

Ta gọi mặt phẳng P là mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong S tại điểm M_0, vectơ $\overrightarrow{N}$ được gọi là vectơ pháp tuyến, còn đường thẳng d nhận vectơ $\overrightarrow{N}$ làm vectơ chỉ phương được gọi là pháp tuyến của mặt S tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Khi đó điểm M(x, y, z) nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt S tại điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ trực giao với vectơ $\overrightarrow{N}$ (A, B, C) tức là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Đó là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc của mặt cong σ tại M.

Chú ý: 1) Phương trình (1) có thể được viết dưới dạng

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

2) Nếu mặt cong được cho bởi phương trình z = f(x, y) tức là ánh xạ σ có dạng $\sigma = \big(x, y, f(x, y)\big)$ thì ta có

$$A = \begin{vmatrix} 0 & f'_x(x_0, y_0) \\ 1 & f'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0); \quad B = \begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & 1 \\ f'_y(x_0, y_0) & 0 \end{vmatrix} = -f'_y\, x_0, y_0)$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong trong trường hợp này có dạng

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{2}$$

3) Giả sử mặt cong được xác định bởi phương trình F(x, y, z) = 0 trong đó F là một hàm khả vi và $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó ánh xạ σ có dạng σ = (x, y, z(x, y)) với z(x, y) được xác định từ phương trình F(x, y, z) = 0 bằng cách lấy đạo hàm riêng theo x và theo y hai vế đẳng thức F(x, y, z(x, y)) = 0 ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Từ đó suy ra $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$.

Khi đó từ (2) ta thấy phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại $M_0(x_0, y_0, z_0)$ là

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \quad (3)$$

3. Phương trình pháp tuyến của mặt cong

Cho một mặt cong trong không gian xác định bởi phương trình F(x, y, z) = 0 trong đó F(x, y, z) là hàm khả vi trong một tập mở $U \subset R^3$. Giả sử điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ thỏa mãn $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ và $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Khi đó phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cong tại M_0 là phương trình (3). Do đó vectơ

$$\overrightarrow{\mathrm{GradF}}(M_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

là vectơ chỉ phương của pháp tuyến của mặt cong tại M_0. Vì thế phương trình của pháp tuyến của mặt cong tại M_0 là:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}.$$

4. Bao hình của một họ đường cong

Trước hết ta chú ý rằng nếu đường cong trong mặt phẳng được xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$ với F là một hàm khả vi, tức là ánh xạ γ: $[\alpha, \beta] \to R^2$ có dạng $\gamma = (x, y(x))$ trong đó $y = y(x)$ được xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$ thì phương trình tiếp tuyến của đường cong tại $M_0(x_0, y_0)$ là

$$x-x_0=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}.$$

Chú ý rằng $y'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$, ta có thể viết lại phương trình của tiếp tuyến tại M_0 dưới dạng

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Hai đường cong có chung tiếp tuyến tại M_0 được gọi là tiếp xúc với nhau tại M_0.

Định nghĩa: Trong mặt phẳng cho một họ đường cong phụ thuộc tham số m: $F(x, y, m) = 0$. Nếu tồn tại một đường cong tiếp xúc với mọi đường cong của họ và cả đường cong chỉ là những tiếp điểm đó thì đường cong đó được gọi là bao hình của họ $F(x, y, m) = 0$.

Cho họ đường cong $F(x, y, m) = 0$, ta hãy tìm phương trình bao hình của họ đó.

Giả sử tiếp điểm của bao hình với họ đường cong có tọa độ $x = \varphi(m)$, $y = \psi(m)$. Khi đó ta có:

$$F(\varphi(m), \psi(m), m) = 0 .$$

Lấy đạo hàm hai vế đẳng thức này theo m ta được:

$$F'_x \varphi'(m) + F'_y . \psi'(m) + F'_m = 0 . \qquad (4)$$

Mặt khác vì tiếp tuyến của đường cong cho dưới dạng $F(x, y, m) = 0$ cũng là tiếp tuyến của bao hình nên

$$\frac{\psi'(m)}{\varphi'(m)} = -\frac{F'x}{F'y} \Leftrightarrow F'_x . \varphi'(m) + F'_y \psi'(m) = 0 .$$

Kết hợp với (4) ta nhận được $F'_m = 0$.

Như vậy nếu bao hình tồn tại thì tọa độ các điểm của nó $x = x(m)$, $y = y(m)$ phải thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} F(x, y, m) = 0 \\ F'_m(x, y, m) = 0 \end{cases}$$

Ví dụ: Tìm bao hình của họ đường cong

$$y = x\cos m + \sin^2 m$$

Từ hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x\cos m + \sin^2 m \\ x = 2\cos m \end{cases}$$

khử m đi ta được $y = \frac{x^2}{4} + 1$.

Vì phương trình $x\cos m + \sin^2 m = \frac{x^2}{4} + 1$ có nghiệm kép với mọi m nên đường cong $y = \frac{x^2}{4} + 1$ là bao hình của họ đường cong đã cho.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Dùng định nghĩa chứng minh các hàm số f: $R^2 \to R$ dưới đây khả vi tại các điểm tương ứng

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ tại (1, 1)

b) $f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}$ tại (0, 0)

Hãy tìm đạo hàm của các hàm số đó tại các điểm đã cho.

2. Cho hàm số $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

Hãy chứng minh rằng:

a) f(x, y) liên tục tại điểm (0, 0).

b) f có các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ là những hàm bị chặn nhưng f không khả vi tại (0, 0).

3. Cho hàm số $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Chứng minh rằng:

a) f(x, y) liên tục tại điểm (0, 0).

b) f có cả hai đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) f(x, y) không khả vi tại (0, 0).

4. Cho hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

a) Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}$ và $\frac{\partial f}{\partial y}$. Chứng minh rằng các đạo hàm riêng này gián đoạn tại điểm (0, 0).

b) Chứng minh rằng hàm f khả vi tại (0, 0).

5. Xét tính khả vi của các hàm số sau:

a) $$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0\end{cases}$$

b) $$f(x,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{nếu } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x^2+y^2=0\end{cases}$$

6. Tính các đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ của hàm $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. Xét tính khả vi của f tại (0, 0).

7. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau:

a) $f(x,y)=\text{arctg}\,\dfrac{y}{x}$

b) $f(x,y)=\text{arctg}\,\dfrac{x+y}{1-xy}$

c) $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

d) $f(x,y,z)=x^{y^z}$

e) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

8. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số

a) $u(x, y, z) = \ln \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $u(x, y) = \arcsin \dfrac{x}{y}$

9. Giả sử $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Tìm Δu nếu

a) $u = \sin x - \mathrm{ch} y$

b) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

10. Tìm $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ nếu

a) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

b) $u = f\left(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2\right)$

trong đó f là một hàm số có các đạo hàm riêng cấp hai theo các biến của nó.

11. Tìm vi phân cấp 1 và cấp 2 của các hàm số sau

a) $u = f(x^2, y^2, z^2)$

b) $u = f(\xi, \eta)$ trong đó $\xi = x + y$, $\eta = x - y$

c) $u = f(\xi, \eta, \zeta)$

trong đó $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$ và $\zeta = 2xy$

12. Tính các hàm riêng cấp cao được chỉ ra của các hàm số sau đây:

a) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$ nếu $u = x\ln(xy)$

b) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ nếu $u = e^{xyz}$

c) $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ nếu $u = \left(x^2 + y^2\right)e^{x+y}$

13. Tính $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(0,0)$ nếu $f(x, y) = e^x \sin y$

14. Tính đạo hàm của hàm số $z = 1 - \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ tại điểm $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ theo hướng pháp tuyến trong tại điểm này của elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

15. Tìm đạo hàm của hàm số $z = x^2 - y^2$ tại điểm M(1, 1) theo hướng $\vec{e}$ lập với hướng dương của trục Ox một góc 60^0.

16. Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm $z = z(x, y)$ nếu

a) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

b) $x + y + z = e^z$

c) $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$

17. Tìm $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ với x = 1, y = -2, z = 1 nếu

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2y - z - 9 = 0$$

18. Viết khai triển Taylor của hàm số $f(x,y) = e^{x+y}\sin y$ tại điểm (0, 0) đến bậc 4.

19. Viết khai triển Taylor của hàm số

$$f(x) = x^3 + y^3 + z^3 + 2xy + 2xz + 2yz$$

tại M(1, 2).

20. Tìm cực trị địa phương của các hàm số

a) $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

b) $u = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$

c) $u = \left(x^2 + y^2\right)e^{-(x^2+y^2)}$

d) $u = x + y + 4\sin x \sin y$

21. Tìm cực trị có điều kiện của các hàm số sau

a) $z = xy$ nếu $x + y = 1$

b) $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$ nếu $x^2 + y^2 = 1$

c) $z = x^2 + y^2 + z^2$ nếu $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (a, b, c > 0)

d) $u = 2y + 2z$ nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

e) $u = xyz$ nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$

f) $u = xy + yz$ nếu $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ (x, y, z > 0)

22. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $u = x + y + z$ nếu $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$

b) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ nếu $x^2 + y^2 + x^2 \leq 100$.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 7547936; (04) 9718312. Fax: (04) 9714899

Email: nxb@vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Hội đồng nghiệm thu giáo trình

Trường ĐHKHTN – Đại học Quốc gia Hà Nội

Nhận xét: GS. TS. PHAN VĂN HẠP

GS. TSKH. NGUYỄN DUY TIẾN

PGS. TS. NGUYỄN THỊ NGỌC QUYÊN

Biên tập: NGỌC QUYÊN

Biên tập tái bản: LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: NGỌC ANH

GIÁO TRÌNH GIẢI TÍCH. TẬP 1

Mã số: 1K - 38ĐH2005

In 2000 cuốn, khổ 14,5x20,5 tại Xưởng in Tổng cục Công nghiệp Quốc phòn

Số xuất bản: 17/1006/XB-QLXB, ngày 27/6/2005. Số trích ngang: 139 KH/X

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2005.

GIÁO TRÌNH

CHỦ NGHĨA XÃ HỘI KHOA HỌC

Giá: 17.800đ