AA

# TÀI LIỆU LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

## Phần I

# Giải tích

## 1 Dãy số và hàm số

### 1.1 Tóm tắt lý thuyết

**Đ/n 1.1.** *Dãy $(a_n)$ đơn điệu tăng (tương ứng giảm) nếu $a_n \le a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$). Dãy tăng (hoặc giảm) gọi chung là đơn điệu.*

**Đ/n 1.2.** *Dãy $(a_n)$ bị chặn trên (tương ứng dưới) nếu $\exists C, \ a_n \le C, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$).*

**Đ/l 1.1.** *Dãy $(a_n)$ tăng và bị chặn trên (tương ứng dưới) bởi $C$ thì có giới hạn $L$ và $u_n \le L \le C, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$).*

**Đ/l 1.2** (Stolz)**.** *Cho hai dãy $(a_n)$, $(b_n)$. Giả sử*

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$

*Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$

**H/q 1.1.** *Cho dãy số dương $(a_n)$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*

*HD.* Áp dụng định lý Stolz với hai dãy $(\ln a_n)$ và $(n)$. □

**Đ/l 1.3** (Đ/l trung bình Cesàro)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L$

**Chú ý 1.1.** *Cho dãy $(a_n)$ xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$. Nếu*

*a)* $\alpha < a_n < \beta, \ \forall n \ge n_0$

*b)* $f'(x) > 0, \ \forall x \in (\alpha, \beta)$

*thì dãy $(a_n)_{n \ge n_0}$ tăng (tương ứng giảm) nếu $a_{n_0} \le a_{n_0+1}$ (tương ứng $\ge$).*

*Gợi ý.* Chứng minh bằng quy nạp, chẳng hạn $a_{n+2} = f(a_{n+1}) \ge f(a_n) = a_{n+1}$. □

**Chú ý 1.2.** *Cho $f(x)$ liên tục tại a. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

**Chú ý 1.3.** *Cho dãy $(a_n)$, xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$ trong đó f là hàm liên tục. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow L = f(L)$.*

**Đ/l 1.4** (Nguyên lý ánh xạ co)**.** *Cho dãy $(a_n)$ xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$, $\alpha \le a_0 \le \beta$. Giả sử*

*a)* $\alpha \le f(x) \le \beta,\ \forall x \in [\alpha, \beta]$

*b)* $\exists q \le (0,1)\,,\ |f(x) - f(y)| \le q\,|x - y|\,,\ \forall x, y \in [\alpha, \beta]$.

*Khi đó*

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in [\alpha, \beta]$ *và* $L = f(L)$

*b) Với* $n \ge 1$

$$|a_n - L| \le \frac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0|$$
$$|a_n - L| \le \frac{q}{1-q}\,|a_n - a_{n-1}|$$

**Chú ý 1.4.** *Điều kiện (b) trong Đ/l 1.4 thỏa mãn nếu $|f'(x)| \le q < 1,\ \forall x \in [\alpha, \beta]$. Thật vậy theo định lý số gia giới nội Lagrange, $\exists c \in (x, y)\,,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, suy ra*

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \times |x - y| \le q\,|x - y|$$

Các dạng sau gồm Đ/l 1.5, M/đ 1.1 thì ít gặp hơn

**Đ/l 1.5** (Phương pháp Newton trong giải tích số)**.** *Cho dãy $(a_n)$ xác định bởi $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, $a_0 \in [\alpha, \beta]$ trong đó*

*a)* $f', f''$ *không đổi dấu trên* $[\alpha, \beta]$

*b)* $f(\alpha)\, f(\beta) < 0$

*c)* $f(a_0)\, f'' > 0$

*Khi đó*

*a) Dãy $(a_n)$ tăng (tương ứng giảm) nếu $f' f'' < 0$ (tương ứng $>$)*

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và L là nghiệm duy nhất của f trên* $[\alpha, \beta]$

*c)*

$$|a_n - L| \le \frac{M}{2m}|a_n - a_{n-1}|^2,\ \forall n \ge 1$$
$$|a_n - L| \le \frac{|f(a_n)|}{m},\ \forall n$$

*trong đó* $M \ge |f''(x)|$, $0 < m \le |f'(x)|\,,\ \forall x \in [a, b]$

**Chú ý 1.5** (Phương pháp Newton cải biên). *Nếu* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_0)}$, *thì các các mục trong Đ/l 1.5 vẫn đúng trừ kết luận (c).*

**M/đ 1.1** (Phương pháp dây cung trong giải tích số). *Cho dãy* $(x_n)$ *xác định bởi* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(r)}(a_n - r)$, *trong đó*

a) $f', f''$ *không đổi dấu trên* $[x_0, r]$

b) $f(x_0) f(r) < 0$

c) $f' f'' > 0$ *ứng với* $x_0 < r$, *và ngược lại*

*Khi đó*

a) *Dãy* $(a_n)$ *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f' f'' > 0$ *(tương ứng* $<$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, *và L là nghiệm duy nhất của f trên* $[x_0, r]$

c)

$$|a_n - L| \le \left(\frac{M}{m} - 1\right) |a_n - a_{n-1}|^2,\ \forall n \ge 1$$

$$|a_n - L| \le \frac{|f(a_n)|}{m}, \forall n$$

*trong đó* $0 < m \le |f'(x)| \le M,\ \forall x \in [a_0, r]$

## 1.2 Đề thi chính thức các năm

**Vd 1.1** (2018). *Cho dãy* $(x_n)$ *xác định bởi* $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2018}x_n^2 + \dfrac{2017}{2018}x_n$.

a) *Chứng minh* $(x_n)$ *tăng, không bị chặn trên.*

b) *Chứng minh* $\dfrac{x_n}{x_{n+1} - 1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$

c) *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{x_{k+1} - 1}$

**Chú ý 1.6.** *Tổng quát cho* $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = bx_n^2 + (1 - b)x_n$ *với* $0 < b < 1$.

**Vd 1.2** (2017). *Cho dãy* $(u_n)$ *xác định bởi* $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1$.

**Bảng A:** *Chứng minh* $(u_n)$ *hội tụ, và tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

**Bảng B:** *Chứng minh*

a) $-1 < u_n < 0,\ \forall n \ge 2$

*b) $(u_n)$ có giới hạn, và giới hạn đó là $1 - \sqrt{3}$*

**Vd 1.3** (2016)**.** *Cho dãy $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.*

*a) Tìm a để $(u_n)$ hội tụ*

*b) Tìm giới hạn của $(u_n)$ khi nó hội tụ*

**Chú ý 1.7.** *Tổng quát cho $u_{n+1} = u_n + (u_n - b)^2$.*

**Vd 1.4** (2015)**.** *Cho dãy $(a_n)$ xác định bởi $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$, $n \geq 0$.*

*a) Chứng minh $(a_n)$ đơn điệu*

*b) Cho $a_0 = 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$*

*c) Tìm tất cả giá trị của $a_0$ để $(a_n)$ có giới hạn hữu hạn. Khi đó tìm $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$*

**Vd 1.5** (2014)**.** *Cho dãy $(u_n)$ xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$, $a \geq 0$. Tìm a để $(u_n)$ hội tụ, và tìm giới hạn đó.*

*HD.* Bình phương hệ thức rồi khử $\to u_n^2$ theo $a$ □

## 1.3 Luyện tập

**Vd 1.6** (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ lần}}$. *Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n (2 - x_n)$.*

*HD.*

1. $x_1 = \sqrt[3]{6}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{6+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6+x)^2}}$
3. Dự đoán $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: $L = f(L)$
4. $0 < x_n < 2$, $\forall n$
5. $(x_n)$ tăng
6. $L = 2$
7. $2 - x_n = f(2) - f\left(x_{n-1}\right) = f'(c)\left(2 - x_{n-1}\right) < \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(6+0)^2}}\left(2 - x_{n-1}\right)$
8. Đặt $q = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{36}} < \dfrac{1}{6} \Rightarrow 2 - x_n < q^{n-1}(1 - x_1) \Rightarrow 6^n (2 - x_n) = \dfrac{1 - x_1}{q}(6q)^n$

□

**Chú ý 1.8.** *Tương tự với* $x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n}$ *khi* $a \in \{2, 6, 12, 20\}$, *hoặc* $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\cdots+\sqrt[3]{a}}}}_{n}$ *khi* $a \in \{24, 60, 120\}$. *Riêng* $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

**Vd 1.7** (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** *Cho* $a_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x_{n-1} + \dfrac{1}{n} x_{n-2}$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

*HD.*

1. $x_n - x_{n-1}$
2. $x_n$

□

**Vd 1.8.** *Cho dãy* $(x_n)$ *xác định bởi* $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

*HD.* Dạng giống Vd 1.4 ý (c) □

**Vd 1.9.** *Cho dãy* $(x_n)$ *xác định bởi* $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2002}$. *Chứng minh* $x_{2002} < \dfrac{1}{2}$.

**Vd 1.10.** *Tính* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$