TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

2

BÀI TẬP GIẢI TÍCH

TẬP III

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ - TÍCH PHÂN BỘI
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC LONG - NGUYỄN ĐÌNH SANG - HOÀNG QUỐC TOÀN

BÀI TẬP GIẢI TÍCH

Tập III

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ - TÍCH PHÂN BỘI
TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

(In lần thứ tư có sửa chữa và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

MỤC LỤC

Trang

Chương 10. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ 5

§1. Tích phân phụ thuộc tham số cận hữu hạn 5

§2. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số.................... 17

Chương 11. TÍCH PHÂN BỘI 35

§1. Định nghĩa 35

§2. Cách tính tích phân bội 37

§3. Công thức giá trị trung bình 40

§4. Tính diện tích và thể tích 51

Chương 12. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT........ 55

§1. Tích phân đường.. 55

§2. Tích phân mặt 68

§3. Sự liên hệ giữa tích phân đường, tích phân mặt và tích phân bội. Công thức Green, Stokes, Ostrogradski 76

§4. Ứng dụng của tích phân đường và mặt vào lý thuyết trường.. 93

ĐÁP SỐ VÀ LỜI GIẢI.. 97

PHỤ LỤC..249

Chương 10

TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§1. TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ CẬN HỮU HẠN

1. Giả sử f(x, y) là hàm số xác định với $x \in [a, b]$ và y thuộc một tập hợp số thực Y nào đó, sao cho với mỗi y cố định thuộc Y hàm f(x,y) khả tích trong đoạn [a,b].

Khi đó

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{1}$$

là một hàm số xác định trên tập Y và được gọi là tích phân phụ thuộc tham số của hàm f(x, y) trên đoạn [a,b].

2. Các tính chất

a. Tính liên tục: Nếu hàm f(x, y) xác định và liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ thì tích phân phụ thuộc tham số I(y) là một hàm số liên tục trên đoạn [c, d].

b.Tính khả vi:

Giả thiết:

i) Hàm f(x,y) là hàm số xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ và liên tục theo biến $x \in [a, b]$ với mỗi y cố định thuộc đoạn [c, d];

ii) Hàm f(x,y) có đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ là một hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$.

Khi đó tích phân phụ thuộc tham số I(y) là một hàm khả vi trong đoạn [c,d] và

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx\,, \qquad y \in [c,d].$$

(qui tắc Leibniz).

c. Tính khả tích: Nếu hàm f(x,y) xác định và liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ thì

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

3. Tích phân phụ thuộc tham số với cận tích phân thay đổi

Cho hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$ và C_1, C_2 là hai đường cong liên tục nằm trong $\mathcal{D}$ có các phương trình tương ứng là: $x = \alpha(y)$ và $x = \beta(y)$, $y \in [c,d]$.

Giả sử f(x,y) là hàm xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$, khả tích theo x trên [a,b] với mỗi y cố định thuộc đoạn [c,d]. Khi đó

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx\,, \qquad y \in [c,d] \qquad (2)$$

được gọi là tích phân phụ thuộc tham số với cận tích phân thay đổi.

a. Tính liên tục: Giả sử f(x,y) là hàm liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$, $\alpha(y), \beta(y)$ là các hàm liên tục trên đoạn [c,d]. Khi đó tích phân I(y) là hàm liên tục trên [c, d].

b.Tính khả vi:

Giả thiết:

i) Hàm f(x,y) xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$, liên tục theo x trên [a,b] với mỗi y cố định thuộc đoạn [c,d];

ii) Hàm f(x,y) có đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D}$;

iii) Các hàm $\alpha(y),\beta(y)$ khả vi trong [c,d].

Khi đó tích phân (2) I(y) là hàm khả vi trong đoạn [c,d] và ta có

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + f[\beta(y),y].\beta'(y) - f[\alpha(y),y].\alpha'(y),$$

$(y \in [c,d])$.

4. Tích phân

$$I(y) = \int_a^b f(x,y).g(x)dx$$

trong đó f(x,y) là hàm xác định trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d]$, g(x) là hàm khả tích (hoặc khả tích tuyệt đối theo nghĩa suy rộng) trên đoạn [a,b], có các tính chất tương tự như tích phân (1).

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1038. Tìm $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^2 x^2 \cos xy\,dx$

Giải : Gọi [c,d] là đoạn bất kì chứa điểm y = 0. Khi đó hàm $f(x,y) = x^2\cos xy$ liên tục trong hình chữ nhật $\mathcal{D} = [0,2] \times [c,d]$. Vì vậy tích phân phụ thuộc tham số $I(y) = \int_0^2 x^2 \cos xy dx$ là hàm liên tục theo y trong đoạn [c,d]. Do đó

$$\lim_{y \to 0} I(y) = I(0) = \int_0^2 x^2 \cos x.0 dx = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

1039. Xét tính liên tục của hàm số

$$F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$$

trong đó f(x) là hàm liên tục và dương trên đoạn [0,1].

Giải: Xét $y_o \neq 0$ bất kỳ.

Giả sử $y_o > 0$. Khi đó tồn tại số $c > 0$ sao cho $0 < c < y_o < d$, trong đó d là số dương nào đó.

Kí hiệu $\mathcal{D}$ là hình chữ nhật $[0,1] \times [c,d]$.

Theo giả thiết f(x) liên tục trong [0,1], nên hàm dưới dấu tích phân $\frac{yf(x)}{x^2 + y^2}$ liên tục trong $\mathcal{D}$. Do đó hàm F(y) liên tục trong đoạn [c,d], vì vậy F(y) liên tục tại y_o.

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng F(y) liên tục tại $y_o < 0$.

Vì y_o là điểm khác không tuỳ ý, nên từ chứng minh trên ta suy ra F(y) liên tục với mọi $y \neq 0$.

Ta xét tại điểm $y = 0$. Rõ ràng $F(0) = 0$.

Kí hiệu $m = \inf_{x \in [0,1]} f(x)$. Vì f(x) liên tục và dương trong đoạn [0,1] nên $m > 0$.

Với y cố định, hàm $\varphi(x) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ khả tích trong [0,1], còn hàm f(x) liên tục và dương trên đoạn đó, vì thế áp dụng định lý trung bình suy rộng ta có:

$$F(y) = f(c(y))\int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2}dx \;= f(c(y)).\ \text{arctg}\frac{1}{y},$$

$$\text{với } y \neq 0,\ 0 \leq c(y) \leq 1.$$

Từ đó với $y \neq 0$

$$|F(y) - F(0)| = |f(c(y))|.\left|\text{arctg}\frac{1}{y}\right| \geq m.\left|\text{arctg}\frac{1}{y}\right|$$

Cho $y \to 0$, $m\left|\text{arctg}\dfrac{1}{y}\right| \to m\dfrac{\pi}{2}$, do đó $F(y) \nrightarrow F(0)$ khi $y \to 0$.

Điều đó chứng tỏ rằng F(y) gián đoạn tại y = 0.

1040. Tính đạo hàm theo tham số của tích phân

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x)dx, \qquad (a > 1)$$

Từ đó tính tích phân I(a).

Giải: Hàm $f(a,x) = \ln(a^2 - \sin^2 x)dx$ liên tục trong miền $a > 1$ và $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$ và có đạo hàm riêng theo a

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x},\ a > 1$$

cũng là hàm liên tục trong miền đó. Vì thế ta có thể đạo hàm theo công thức Leibniz:

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{a^2 - \sin^2 x} dx = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 - 1) + \cos^2 x}$$

Đổi biến t = tgx, ta có

$$I'(a) = 2a \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + (a^2 - 1)t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} t \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Từ đó, bằng cách lấy tích phân theo a, ta nhận được

$$I(a) = \int \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} da = \pi \ln\left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right) + C \qquad (1)$$

Để xác định C,ta viết tích phân I(a) dưới dạng:

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[a^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)\right] dx =$$

$$= \pi \ln a + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 x\right) dx \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 x\right) dx - \pi \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - 1}}{a}$$

Cho $a \to +\infty$ và chú ý rằng:

$$\left|\ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)\right| \le \left|\ln\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right| \to 0 \;\; (a \to +\infty)$$

ta có $$\lim_{a\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1-\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)dx = 0$$

và $$\lim_{a\to+\infty}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a} = \ln 2.$$

Vậy: C = - πln2.

Thay C = - πln2 vào biểu thức của I(a), ta có

$$I(a)=\pi\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}.$$

1041. Bằng cách lấy tích phân dưới dấu tích phân hãy tính tích phân sau đây:

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}.\frac{dx}{\sin x},\quad (a>b>0).$$

Giải:

Hàm dưới dấu tích phân có thể viết dưới dạng

$$\frac{1}{\sin x}.\ln\frac{a+b\sin x}{a-b\sin x}=2ab\int_0^1\frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$$

Do đó $$K=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^1\frac{dy}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}.$$

Hàm $f(x,y)=\dfrac{1}{a^2-b^2y^2\sin^2 x}$ liên tục trong hình chữ nhật $D=\left\{(x,y):\ 0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le 1\right\}$, (a > b > 0) nên có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân và ta nhận được

$$K = 2ab\int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2\sin^2 x}$$

Bằng phép đổi biến t = tgx, ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 - b^2y^2\sin^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a^2 + (a^2 - b^2y^2)t^2} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2 - b^2y^2}}.$$

Vậy nên

$$K = \pi b.\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a^2 - b^2y^2}} = \pi \arcsin\frac{b}{a}.$$

1042. Cho tích phân $F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x}dx$. Tính F'(y).

Giải: Ta có

$$F'(y) = \int_0^y \frac{dx}{1+xy} + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{2\ln(1+y^2)}{y}$$

1043. Tìm đạo hàm theo tham số y của tích phân

$$I(y) = \int_0^y \frac{f(x)dx}{\sqrt{y-x}},$$

trong đó f(x) là hàm liên tục cùng với đạo hàm f'(x) của nó trong đoạn [0, a] và $0 < y \le a$.

Giải: Ta chú ý rằng, vì hàm dưới dấu tích phân không bị chặn trong lân cận của đường thẳng y = x, do đó không thể áp dụng trực tiếp qui tắc Leibniz để tính đạo hàm của tích phân I(y).

Dùng phép thế biến x = yt, ta đưa tích phân đã cho về dạng

$$I(y) = \sqrt{y}\int_0^1 \frac{f(yt)}{\sqrt{1-t}}dt$$

Hàm $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ khả tích (tuyệt đối) trên đoạn [0, 1] theo nghĩa suy rộng, còn hàm f(yt) liên tục và có đạo hàm theo biến y liên tục theo hai biến (y, t).

Vì thế theo mục 4 §1 ta có thể lấy đạo hàm theo qui tắc Leibniz và ta có

$$I'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\int_0^1 \frac{f(yt)}{\sqrt{1-t}}dt + \sqrt{y}\int_0^1 \frac{tf'(yt)}{\sqrt{1-t}}dt$$

Trở lại biến cũ, ta nhận được:

$$I'(y) = \frac{1}{2y}\int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}}dx + \frac{1}{y}\int_0^y \frac{xf'(x)}{\sqrt{y-x}}dx\,.$$

Biến đổi tích phân thứ nhất bằng cách lấy tích phân từng phần, ta có:

$$I'(y) = \frac{1}{y}\left[-\sqrt{y-x}\,f(x)\Big|_0^y + \int_0^y \sqrt{y-x}\,f'(x)dx + \int_0^y \frac{xf'(x)}{\sqrt{y-x}}dx\right] =$$

$$= \frac{f(0)}{\sqrt{y}} + \int_0^y \frac{f'(x)}{\sqrt{y-x}}dx.$$

1044. Tìm giới hạn

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx.$$

1045. Tìm giới hạn

$$\lim_{y\to 0}\int_{y}^{1+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

1046. Chứng minh rằng tích phân

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\,dx$$

của hàm gián đoạn f(x, y) = sgn(x - y) là hàm liên tục.

1047. Giả sử f(x) là hàm liên tục trên đoạn [a, b].

Chứng minh rằng

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h) - f(t)]dt = f(x) - f(a),\ a < x < b.$$

1048. Tìm I'(y) nếu:

a) $I(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx$,

b) $I(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x}\,dx$,

c) $I(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2)\,dx$.

1049. Tìm F''(x) nếu

$$F(x) = \int_0^x (x+y)\,f(y)\,dy,$$

trong đó f(y) là hàm khả vi.

1050. Có thể tính đạo hàm theo qui tắc Leibniz của hàm số

$$F(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,dx,$$

tại điểm y = 0 được không?

1051. Tìm F''(x) nếu

$$F(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h dy\int_0^h f(x+y+z)\,dz, \quad (h>0)$$

trong đó f(x) là hàm liên tục.

1052. Tìm đạo hàm của các tích phân eliptic toàn phần:

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \;,$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$(0 < k < 1)$ và biểu diễn chúng qua các hàm E(k) và F(k).

Chứng minh rằng hàm E(k) thỏa mãn phương trình vi phân

$$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

1053. Chứng minh rằng hàm Bessel chỉ số nguyên n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

thỏa mãn phương trình Bessel

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x) = 0\,.$$

1054. Hãy xấp xỉ hàm $f(x) = x^2$ trên đoạn [1, 3] bằng hàm tuyến tính a + bx sao cho tích phân

$$I(a,b) = \int_1^3 (a+bx-x^2)^2\,dx$$

có giá trị bé nhất.

1055. Chứng minh đồng nhất thức

$$\int_a^x dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2}\ldots\int_a^{t_1} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

trong đó f(t) là hàm liên tục.

1056. Giả sử f(x) là hàm hai lần khả vi, còn F(x) là hàm khả vi theo đối số của nó.

Chứng minh rằng

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz$$

thỏa mãn phương trình dao động của dây:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

với các điều kiện ban đầu u(x, 0) = f(x), $u'_t(x, 0) = F(x)$.

1057. Bằng cách đạo hàm theo tham số, hãy tính tích phân

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}, \left(|a| < 1\right).$$

1058. Bằng cách đạo hàm theo tham số, hãy tính tích phân

$$I(r) = \int_0^{\pi} \ln\left(1-2r\cos x + r^2\right)dx, \left(|r| < 1\right).$$

1059. Bằng cách đạo hàm theo tham số, hãy tính tích phân

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)dx,\ a^2+b^2 \neq 0.$$

1060. Bằng cách lấy tích phân dưới dấu tích phân, tính các tích phân sau đây:

a) $I_1(a,b) = \int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right).\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, $a > 0, b > 0$.

b) $I_2(a,b) = \int\limits_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right).\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, $a > 0, b > 0$.

1061. Dùng công thức

$$\frac{\text{arctg}x}{x} = \int\limits_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}, \quad (x \neq 0)$$

hãy tính tích phân

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\text{arctg}x}{x}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

§2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

1. Sự hội tụ đều

Ta nói tích phân

$$I(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, \; y \in Y$$

hội tụ đều trên tập Y nếu:

a) Với mỗi $y \in Y$ cố định, tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dy$ hội tụ,

b) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_o = A_o(\varepsilon) > a$ (không phụ thuộc y) sao cho

$\forall A > A_o$: $\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon \;\; \forall y \in Y$.

2. Tiêu chuẩn Cauchy

Điều kiện cần và đủ để cho tích phân

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\ ,\ \ y \in Y$$

hội tụ đều trên tập Y là:

$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A_o = A_o(\varepsilon)$ (không phụ thuộc y) sao cho với mọi A', A" > A_o :

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall y \in Y .$$

3. Dấu hiệu Weierstrass

Giả sử tồn tại một hàm φ(x) không âm trong khoảng [a, +∞] sao cho

$$|f(x,y)| \le \varphi(x)\ \ \forall x \in [a, +\infty),\ \ \forall y \in Y .$$

Khi đó nếu tích phân $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên tập Y.

4. Các dấu hiệu hội tụ đều khác

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y).g(x)\,dx\ ,\ \ y \in Y .$$

trong đó f(x, y) và g(x) là các hàm liên tục với x ∈ [a, +∞), y ∈ Y.

a) Nếu tích phân $\int_a^A f(x,y)\,dx$ bị chặn đều với mọi A > a và $y \in Y$, tức là

$\exists K = \text{const}$ sao cho: $\left|\int_a^A f(x,y)\,dx\right| \le K,\ \forall A \ge a,\ \forall y \in Y$, còn g(x) là hàm đơn điệu tiến đến không khi $x \to +\infty$ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x,y).g(x)\,dx$ hội tụ đều trên Y.

b) Nếu hàm f(x, y) đơn điệu theo x và bị chặn đều tức là: $\exists L = \text{const}$ sao cho: $|f(x,y)| \le L\ \forall x \ge a,\ \forall y \in Y$, còn tích phân $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(x,y).g(x)\,dx$ hội tụ đều trên Y.

5. Tính chất của tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

a. Tính liên tục: Giả sử hàm f(x, y) xác định và liên tục trên tập $[a, +\infty) \times [c, d]$. Khi đó nếu tích phân

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\ ,\quad y \in [c,d]$$

hội tụ đều trên đoạn [c, d] thì I(y) là hàm liên tục trên đoạn đó.

b. Tính khả tích: Giả sử hàm f(x, y), là hàm liên tục trên tập $[a, +\infty) \times [c, d]$. Khi đó nếu tích phân $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên [c, d] thì I(y) là hàm khả tích trên đoạn [c, d] và ta có công thức:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,.$$

c. Tính khả vi: Giả sử rằng:

i) Hàm f(x, y) liên tục theo biến $x \in [a, +\infty)$, $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ hội tụ;

ii) Tồn tại đạo hàm riêng $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ liên tục trong tập $[a, +\infty) \times [c, d]$;

iii) Tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dx$ hội tụ đều trên đoạn [c, d].

Khi đó hàm: $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ khả vi trên đoạn [c, d] và:

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx,\ y \in [c,d].$$

6. Các tích phân Euler

a. Tích phân Euler loại I hay là hàm Bê-ta xác định theo công thức:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx,\ a > 0, b > 0.$$

Hàm Bê-ta B(b, a) có các tính chất cơ bản:

$$B(a, b) = B(b, a) \text{ với mọi } a > 0, b > 0;$$

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1),\ a > 0,\ b > 1;$$

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a},\ 0 < a < 1.$$

b. Tích phân Euler loại II hay là hàm Gam-ma được xác định theo công thức:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x}\, dx, \ a > 0.$$

Hàm Gam-ma $\Gamma(a)$ có các tính chất cơ bản:

$$\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$$

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

$$\Gamma(a).\Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \ 0 < a < 1$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1062. Xác định miền hội tụ của tích phân:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx, \ \alpha > 0.$$

Giải: Trước hết ta chú ý rằng:

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{nếu} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Vì thế điểm $x = 0$ không phải là điểm kỳ dị của tích phân. Khi $x \to +\infty$ ta có:

$$\frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\alpha} . \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin x}{x^\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha}\left(1 - \frac{\sin x}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{\sin^2 x}{x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{x^\alpha} - \frac{1}{2x^{2\alpha}} + \frac{\cos 2x}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{2\alpha}}\right), \ x \to +\infty.$$

Ta nhận thấy rằng các tích phân:

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \quad \text{và} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^{2\alpha}} dx \quad , \text{ với } a > 0, \alpha > 0$$

hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet. Trong khi đó tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^{2\alpha}}$ hội tụ nếu $\alpha > \frac{1}{2}$, phân kỳ nếu $\alpha \le \frac{1}{2}$. Vì thế tích phân $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx$, $a > 0$, hội tụ nếu $\alpha > \frac{1}{2}$ và phân kỳ nếu $\alpha \le \frac{1}{2}$.

Cuối cùng tích phân:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx = \int_0^{a} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx + \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha + \sin x} dx \ , \ a > 0$$

hội tụ nếu $\alpha > \frac{1}{2}$ và phân kỳ nếu $\alpha \le \frac{1}{2}$.

1063. Chứng minh rằng tích phân Dirichlet:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

1) Hội tụ đều trên mọi đoạn [a, b] không chứa giá trị $\alpha = 0$,

2) Hội tụ không đều trên mọi đoạn [a, b] chứa giá trị $\alpha = 0$.

Giải: Vì $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x} = \alpha$ nên điểm x = 0 không phải là điểm kỳ dị của tích phân suy rộng.

Ta xét sự hội tụ đều trên đoạn [a, b] của tích phân với cận vô hạn.

1) Giả sử đoạn [a, b] không chứa điểm $\alpha = 0$. Khi đó với mọi $A > 0$ và $\alpha \in [a, b]$, ta có:

$$\left|\int_0^A \sin\alpha x\, dx\right| = \left|\frac{\cos\alpha A - 1}{\alpha}\right| \le \frac{2}{\min(|a|,|b|)},$$

Còn hàm $g(x) = \dfrac{1}{x}$ đơn điệu và dần về 0 khi $x \to +\infty$. Vì thế theo điều kiện 4a, tích phân Dirichlet $I(\alpha)$ hội tụ đều trong đoạn [a, b] không chứa điểm $\alpha = 0$.

2) Giả sử đoạn [a, b] chứa điểm $\alpha = 0$.

Với $A > 0$ cho trước ta xét tích phân $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$.

Để chứng minh $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ hội tụ không đều trên mọi đoạn [a, b] chứa $\alpha = 0$, ta phải chỉ ra rằng:

$\exists\varepsilon_o > 0\ \ \forall A > 0\ \ \exists A_o > A$ và $\exists\alpha_o \in [a, b]$ sao cho:

$$\left|\int_{A_o}^{+\infty}\frac{\sin\alpha_o x}{x}dx\right| > \varepsilon_o.$$

Cho trước $A > 0$ tùy ý, lấy $A_o > A$. Khi đó bằng cách đổi biến $t = \alpha x$, ta có: nếu $\alpha > 0$

$$\int_{A_o}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx = \int_{\alpha A_o}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt.$$

Từ đó ta suy ra:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_{A_o}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\lim_{\alpha\to0}\int_{\alpha A_o}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

Còn nếu $\alpha<0$ thì

$$\lim_{\alpha\to-0}\int_{A_o}^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\lim_{\alpha\to0}\int_{\alpha A}^{-\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin t}{t}dt=-\frac{\pi}{2}.$$

Vì vậy chọn $\varepsilon_o=\dfrac{\pi}{4}$, tồn tại α_o với $|\alpha_o|$ đủ bé sao cho:

$$\left|\int_{A_o}^{+\infty}\frac{\sin\alpha_o x}{x}dx\right|\geq\varepsilon_o=\frac{\pi}{4}.$$

Điều đó có nghĩa là:

$\exists\varepsilon_o=\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ $\forall A$ $\exists A_o>A$, $\exists\alpha_o$ với $|\alpha_o|$ đủ bé sao cho : $\left|\displaystyle\int_{A_o}^{+\infty}\frac{\sin\alpha_o x}{x}dx\right|>\varepsilon_o$.

Vậy tích phân Dirichlet hội tụ không đều trong mọi đoạn [a,b] chứa điểm $\alpha=0$.

1064. Chứng minh sự hội tụ đều của tích phân trong miền đã cho:

$$I(y)=\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx,\quad y\in(-\infty,+\infty).$$

Giải: Với mọi $A>1$ ta có:

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right|=\left|\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_A^{+\infty}\right|=\frac{A}{A^2+y^2}\leq\frac{1}{A}.$$

Do đó với $\varepsilon > 0$ cho trước, nếu chọn $A_o \geq \frac{1}{\varepsilon}$ thì với mọi $A > A_o$:

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right| \leq \frac{1}{A} < \frac{1}{A_o} < \varepsilon \quad \forall y \in (-\infty, +\infty).$$

Theo định nghĩa tích phân I(y) đã cho hội tụ đều trong khoảng $(-\infty, +\infty)$.

1065. Xét sự hội tụ đều của tích phân

$$I(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}dx$$

a) Trong miền $[\alpha_o, +\infty)$, trong đó $\alpha_o > 0$;

b) Trong miền $(0, +\infty)$.

Giải:

a) Với $0 < x < 1$ thì $x^{\alpha-1} < x^{\alpha_o-1}$, $\forall \alpha > \alpha_o > 0$.

Vì tích phân $\int_0^1 x^{\alpha_o-1}dx$ hội tụ nên theo dấu hiệu Weierstrass tích phân $I(\alpha)$ hội tụ đều trong miền $[\alpha_o, \infty)$.

b) Ta chú ý rằng với mọi $\eta > 0$

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{\eta} x^{\alpha-1}dx = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\eta^{\alpha}}{\alpha} = +\infty$$

Vì thế với $\varepsilon_o > 0$, với mọi $\eta > 0$ lấy $0 < \eta_o < \eta$ luôn luôn tồn tại $\alpha_o > 0$ đủ bé sao cho:

$$\left|\int_0^{\eta_o} x^{\alpha_o-1}dx\right| \geq \varepsilon_o.$$

Vậy ta đã chứng tỏ rằng:

$\exists \varepsilon_o > 0 \;\; \forall \eta > 0 \; \exists \eta_o < \eta \;\; \exists \alpha_o > 0$ sao cho

$\left|\int_0^{\eta_o} x^{\alpha_o - 1} dx\right| \geq \varepsilon_o$, tức là tích phân $I(\alpha)$ không hội tụ đều trong miền $\alpha \in (0, +\infty)$.

1066. Khảo sát tính liên tục của hàm:

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^\alpha}, \quad \alpha > 2.$$

Giải: Viết hàm $F(\alpha)$ dưới dạng:

$$F(\alpha) = \int_0^1 \frac{xdx}{2 + x^\alpha} + \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^\alpha} = F_1(\alpha) + F_2(\alpha).$$

Tích phân thứ nhất là tích phân xác định phụ thuộc tham số, vì hàm dưới dấu tích phân $f(x, \alpha) = \dfrac{x}{2 + x^\alpha}$ là hàm liên tục theo hai biến $(x, \alpha) \in [0, 1] \times (2, +\infty)$ nên hàm

$$F_1(\alpha) = \int_0^1 \frac{xdx}{2 + x^\alpha}$$

là hàm liên tục theo α.

Để chứng minh hàm $F_2(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{2 + x^\alpha}$ là hàm liên tục theo $\alpha \in (2, \infty)$, ta lấy α_o bất kỳ sao cho $\alpha_o > 2$ và chứng minh $F_2(\alpha)$ liên tục tại α_o.

Vì $\alpha_o > 2$ nên tồn tại số thực a sao cho $\alpha_o > a > 2$. Khi đó với mọi $x \geq 1$, $\alpha > a$, ta có:

$$\frac{x}{2+x^{\alpha}} \le \frac{x}{2+x^{a}}.$$

Mặt khác khi $x \to +\infty$ thì

$$\frac{x}{2+x^{a}} \sim \frac{1}{x^{a-1}} \quad (x \to +\infty).$$

Vì $a > 2$ nên $a - 1 > 1$ nên tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a-1}}$ hội tụ và do đó theo dấu hiệu so sánh ta suy ra tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^{a}}$ hội tụ.

Cuối cùng áp dụng dấu hiệu Weierstrass, tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{2+x^{\alpha}}$ hội tụ đều theo α trong khoảng $(a, +\infty)$. Hơn nữa hàm dưới dấu tích phân $f(x,\alpha) = \frac{x}{2+x^{\alpha}}$ liên tục theo hai biến (x, α) trong miền $x \ge 1$, $\alpha \ge a$. Vì thế $F_2(\alpha)$ là hàm liên tục với $\alpha \ge a$. Vì $\alpha_o > a$ nên $F_2(\alpha)$ liên tục tại α_o, từ đó suy ra $F_2(\alpha)$ liên tục trong miền $\alpha > 2$.

Vậy $F(\alpha) = F_1(\alpha) + F_2(\alpha)$ là hàm liên tục với $\alpha > 2$.

1067. Bằng cách đạo hàm theo tham số, tính tích phân:

$$I(\alpha,k) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x}.e^{-kx}\,dx, \quad (\alpha,k > 0)$$

Giải: Đặt $f(x,\alpha) = \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-kx}$.

Khi đó

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-kx} = 0.$$

Ta xác định thêm giá trị của hàm f(x, α) tại điểm x = 0, bằng cách đặt f(0, α) = 0, thì hàm f(x, α) trở thành hàm liên tục theo hai biến (x, α) trong miền $x \geq 0, \alpha > 0$.

Hơn nữa ta có:

$$f'_{\alpha}(x, \alpha) = e^{-kx}.\sin\alpha x$$

$$\left|f'_{\alpha}(x,\alpha)\right| \leq e^{-kx}\ ,\quad x \geq 0,\ \alpha \geq 0.$$

Vì tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}dx$, $k > 0$, hội tụ nên theo dấu hiệu Weierstrass tích phân

$$\int\limits_0^{+\infty} f'_{\alpha}(x,\alpha)dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}.\sin\alpha x\,dx\ ,\ k > 0, \alpha \geq 0$$

hội tụ đều theo α trong miền $\alpha \geq 0$. Do đó

$$I'_{\alpha}(\alpha,k) = \int\limits_0^{+\infty} f'_{\alpha}(x,\alpha)dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx}.\sin\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

Từ đó lấy tích phân theo α ta nhận được:

$$I(\alpha,k) = \frac{1}{2}\ln\left(\alpha^2+k^2\right)+C$$

Thay α = 0 vào hai vế ta có:

$$I(0) = 0 = \frac{1}{2}\ln k^2 + C.$$

Do đó suy ra: $\quad C = -\frac{1}{2}\ln k^2.$

Vậy: $I = \frac{1}{2}\ln\left(\alpha^2+k^2\right) - \frac{1}{2}\ln k^2 = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{k^2}\right).$

1068. Bằng cách tích phân dưới dấu tích phân, hãy tính tích phân sau đây:

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \ (b > a > 0).$$

Giải: Ta nhận thấy:

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-yx} dy.$$

Vì thế tích phân đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-yx} dy.$$

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$\int_0^{+\infty} e^{-yx} dx, \quad y \in [a,b].$$

Ta có: $e^{-yx} \leq e^{-ax}$ và tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$, $a > 0$, hội tụ. Vì thế theo dấu hiệu Weierstrass, tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-yx} dx$ hội tụ đều trong miền $y \in [a, b]$. Hơn nữa hàm $f(x, y) = e^{-yx}$ liên tục trong miền $[0, +\infty) \times [a, b]$ cho nên ta có thể lấy tích phân dưới dấu tích phân:

$$\int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-yx} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-yx} dx = I(a,b).$$

Vậy: $I(a, b) = \int_a^b \left(-\frac{1}{y} e^{-xy} \right) \Bigg|_0^{+\infty} dy = \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln\frac{b}{a}$, $b > a > 0$.

1069. Xác định miền hội tụ của tích phân:

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p + x^q} dx.$$

1070. Xét tích phân phụ thuộc tham số:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx, \quad y \geq 0.$$

a) Chứng minh bằng định nghĩa tích phân I(y) hội tụ đều trên mọi đoạn [c, d], $0 < c < d$.

b) Chứng minh rằng tích phân I(y) hội tụ không đều trên đoạn [0, d].

Xét sự hội tụ đều của các tích phân sau đây trong các miền đã cho tương ứng của tham số:

1071. $\int_0^{+\infty} e^{-tx} x^a \cos x\,dx$, $(a \geq 0)$ trong miền $t \geq t_o > 0$.

1072. $\int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3}.e^{-\frac{n}{2x^3}}\,dx$, $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$

1073. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}.\cos x\,dx$, trong mọi đoạn không chứa điểm $a = \pm 1$.

1074. Xét sự hội tụ đều của tích phân

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}\,dx$$

a) Trong miền $\quad y \leq y_o < 2$;

b) Trong miền $\quad y < 2$.

1075. Chứng minh sự hội tụ đều đối với n $(n = 1, 2, \ldots)$ của tích phân:

$$\int_0^1 \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}\right)\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx.$$

1076. Chứng minh rằng tích phân

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}dx\ ,\quad (0 < a < 1)$$

hội tụ đều theo tham số y trong miền $y \geq 0$.

1077. Giả sử hàm f(t) liên tục với $t \geq 0$. Chứng minh rằng nếu tích phân:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} t^y f(t)\,dt$$

hội tụ với $y = a$ và $y = b$ $(a < b)$, thì tích phân I(y) hội tụ đều với y trong đoạn [a, b].

1078. Chứng minh rằng tích phân:

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^a}dx\ ,\quad (0 < a < 1)$$

hội tụ đều đối với y trong miền $y \geq y_o > 0$ và hội tụ không đều trong miền $y > 0$.

1079. Chứng minh rằng tích phân:

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2}dx,\quad (\alpha,\beta > 0)$$

hội tụ đều theo tham số β trong miền $\beta \geq \beta_o > 0$.

Khảo sát sự hội tụ đều trong các khoảng đã cho của các tích phân sau:

1080. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a}$, $1 < a < +\infty$.

1081. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x\sqrt{x}}dx$, $0 \leq \alpha \leq 10$.

1082. $\int_0^{+\infty} \sqrt{y}\, e^{-yx^2}\, dx, \quad 0 \le y < +\infty.$

1083. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2}\, dx,$

a) $a \le y \le b$, b) $-\infty < y < +\infty.$

1084. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\, dx, \quad \alpha \ge 0.$

1085. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy, \quad -\infty < x < +\infty.$

1086. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \left(\frac{1}{x}\right) dx$

a) $p \ge p_o > 0$, b) $p > 0, \ (q > -1).$

1087. $\int_0^2 \frac{x^y\, dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, \quad \left(|y| < \frac{1}{2}\right).$

1088. $\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}\, dx, \ (0 \le \alpha \le 1).$

1089. Chứng minh rằng tích phân

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}\, dx$$

là một hàm liên tục theo tham số y.

1090. Tìm điểm gián đoạn của hàm

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x}\, dx .$$

Xét tính liên tục của các hàm sau đây trong các miền đã cho tương ứng:

1091. $F(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy^2}dx, \quad -\infty < y < +\infty.$

1092. $F(y) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}dx, \quad 0 < y < 2.$

Bằng phương pháp lấy đạo hàm theo tham số, hãy tính các tích phân sau:

1093. $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin \alpha x}{x}dx, \quad (k > 0).$

1094. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x . \sin \beta x}{x^2}e^{-kx}dx, \quad (k > 0).$

1095. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-t}}{t}\cos t dt.$

1096. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\, dx.$

1097. Chứng minh rằng tích phân Dirichlet

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}dx$$

có đạo hàm với $\alpha \neq 0$, tuy nhiên không thể lấy đạo hàm theo công thức Leibniz.

1098. Chứng minh rằng hàm

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + y)^2}dx$$

liên tục và khả vi trong miền $-\infty < y < +\infty$.

Tính các tích phân sau:

1099. $I(a) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right) \sin ax \, dx, \quad \alpha > 0, \ \beta > 0.$

1100. $I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (|a| \le 1).$

1101. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax . \cos bx}{x} dx.$

1102. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x} dx.$

1103. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx.$

1104. Bằng cách lấy tích phân dưới dấu tích phân, hãy tính tích phân sau:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \quad (a, b > 0).$$

Tính các tích phân sau đây qua các tích phân Euler:

1105. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx, \ (a > 0).$

1106. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x . \cos^4 x \, dx.$

1107. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, \ (n > 1).$

1108. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx, \ (n-$ nguyên dương).

Chương 11

TÍCH PHÂN BỘI

§1. ĐỊNH NGHĨA

1. Tích phân trên hình hộp

Để đơn giản ta xét hình hộp 3 chiều $V \subset R^3$.

$V = \{(x, y, z) :\ a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2,\ a_3 \le z \le b_3\}$

Giả sử $f : V \to R$ là một hàm số xác định trên V.

Xét T_j là phân hoạch bất kỳ của đoạn $[a_j, b_j]$ ($j = 1, 2, 3$) :

$$T_1 = \{a_1 = x_o < x_1 < \ldots < x_m = b_1\}$$

$$T_2 = \{a_2 = y_o < y_1 < \ldots < y_n = b_2\}$$

$$T_3 = \{a_3 = z_o < z_1 < \ldots < z_p = b_3\}$$

Ta gọi $T = \{T_1, T_2, T_3\}$ là phân hoạch của hình hộp V thành các hình hộp con $\{V_i\}_{i=1}^{k}$, như vậy $k = m.n.p$.

Ký hiệu $d(T) = \max\limits_{1 \le j \le 3} d(T_j)$, trong đó $d(T_j)$ là đường kính của phân hoạch T_j ($j = 1, 2, 3$), và $d(T)$ được gọi là đường kính của phân hoạch T của hình hộp V.

Lấy trong mỗi hình hộp V_i một điểm $\xi^i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ một cách tùy ý và lập tổng:

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^{k} f(\xi^i).v(V_i)$$

trong đó $v(V_i)$ là thể tích của hình hộp V_i ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Tổng $\sigma_T(f, \xi)$ được gọi là tổng tích phân của hàm f ứng với phân hoạch T của hình hộp V và cách chọn tùy ý các điểm $\xi^1, \xi^2, ... \xi^k$ trong mỗi hình hộp $V_1, V_2, ..., V_k$.

Ta nói họ $\{\sigma_T(f,\xi)\}$ có giới hạn hữu hạn I khi $d(T) \to 0$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ để sao cho với mọi phân hoạch T mà $d(T) < \delta$ và với mọi cách chọn các điểm $\xi^i \in V_i$ ($i = 1, 2, ..., k$), đều có :

$$|\sigma_T(f,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Khi đó ta nói hàm f khả tích trong hình hộp V và I được gọi là tích phân của f trên V. Ký hiệu :

$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = I = \lim_{d(T)\to 0} \sigma_T(f,\xi).$$

Nếu f khả tích trên V thì f bị chặn trên đó.

Từ định nghĩa ta thấy tích phân của hàm f(x, y, z) trên hình hộp V có những tính chất tương tự như tích phân xác định. Tương tự ta có định nghĩa tích phân trên hình hộp n chiều.

2. Tích phân trên miền tổng quát

Giả sử B là tập bị chặn trong R^n, $\chi_B(x)$ là hàm đặc trưng của tập B, tức là:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x \in B \\ 0 & \text{nếu} \quad x \in R^n \setminus B \end{cases}$$

a) Hàm f: $B \to R$ được gọi là khả tích trên B nếu tồn tại hình hộp V chứa B ($B \subset V$) sao cho $\chi_B.f$ là hàm khả tích trên V và khi đó ta ký hiệu:

$$\int_B f dx = \int_V (\chi_B.f)(x)\,dx.$$

b) Tập B được gọi là đo được theo nghĩa Jordan nếu hàm đặc trưng $\chi_B(x)$ khả tích trên một hình hộp V nào đó chứa B và số :

$$v(B) = \int_V \chi_B(x)\,dx$$

được gọi là thể tích của B.

Tập bị chặn $B \subset R^n$ là đo được khi và chỉ khi $v(\partial B) = 0$, tức là biên ∂B có thể tích không.

Nếu $f : B \to R$ là hàm khả tích trên B thì f bị chặn trên tập đó.

§2. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BỘI

1. Đưa tích phân bội về tích phân lặp

a. Giả sử B là tập đo được trong mặt phẳng R^2, được giới hạn bởi các đường thẳng x = a, x = b và các đường cong $y = y_1(x)$ và $y = y_2(x)$, trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là những hàm liên tục trong đoạn [a, b], $y_1(x) \le y_2(x)$, $x \in [a, b]$; f(x, y) là hàm khả tích trên B. Khi đó ta có công thức:

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

b. Giả sử B là tập đo được trong R^3 được giới hạn bởi hai mặt cong $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$. Giả thiết $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ là hai hàm liên tục trong miền $D \subset R^2$:

$$D = \{(x,y) :\ a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$$

trong đó $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai hàm liên tục trên đoạn [a, b]. f(x,y,z) là hàm liên tục trong B. Khi đó:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} fdz$$

2. Phép đổi biến trong tích phân bội

a. Phép đổi biến trong tích phân hai lớp

Giả sử B' là miền đóng bị chặn trong mặt phẳng (u, v) được ánh xạ vào miền đóng bị chặn B trong mặt phẳng (x, y) bởi ánh xạ:

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad (u, v) \in B'$$

trong đó x(u, v), y(u, v) là các hàm khả vi liên tục trong B' sao cho Jakobien của phép biến đổi khác không : $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$. Giả sử f(x, y) là hàm khả tích trên B. Khi đó:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{B'} f\left[x(u,v).\,y(u,v)\right]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.$$

Trong tích phân hai lớp, đối với miền lấy tích phân có dạng thích hợp ta có thể chuyển sang tọa độ cực để tính tích phân nhờ phép đổi biến:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r.$$

Khi đó : $\iint\limits_B f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{B'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi.$

b. Phép đổi biến trong tích phân ba lớp

Cho B là tập đóng bị chặn trong R^3 và f(x,y,z) là hàm khả tích trên B. Giả sử B' là tập đóng và bị chặn trong không gian (u,v,w) được ánh xạ lên B bởi ánh xạ:

$$x = x(u,v,w), \quad y = y(u,v,w), \quad z = z(u,v,w), \quad (u,v,w) \in B'$$

trong đó x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w) là các hàm khả vi liên tục trong B' sao cho Jakobien của phép biến đổi khác không:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,v,w)} \neq 0.$$

Khi đó:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{B'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)|J|\,dudvdw.$$

Hai phép đổi biến thường dùng là phép đổi biến qua hệ tọa độ cầu và qua hệ tọa độ trụ.

Phép đổi biến qua hệ tọa độ cầu được xác định như sau:

Đặt : $x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$z = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2 \sin\theta.$$

Khi đó :

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{B'} f\big(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\big) r^2 \sin\theta\,drd\theta d\varphi.$$

Phép đổi biến qua hệ tọa độ trụ là đặt:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r.$$

$(0 \le \varphi \le 2\pi)$

Khi đó:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{B'} f\big(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z\big) r\,drd\varphi dz.$$

§3. CÔNG THỨC GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Giả sử B là tập đóng bị chặn trong R^n, f(x) là hàm liên tục trong B. Khi đó ta có công thức giá trị trung bình:

$$\int_B f(x)\,dx = f(c).v(B),$$

trong đó c là một điểm nào đó thuộc B, còn v(B) là thể tích của B.

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1109. Tính tích phân:

$$I = \iint_V x^2y\,dxdy,$$

trong đó V = [0,1] × [0,2] là hình chữ nhật trong R^2.

Giải: $$I = \iint_V x^2y\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^2 x^2y dy = \int_0^1 x^2\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 dx$$

$$= \int_0^1 x^2.\frac{4}{2}dx = 2.\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

1110. Tính tích phân: $I = \iiint_V \sin(xy).x.z.dxdydz$, trong đó V là hình hộp ba chiều : V = [0, 1] × [0,1] × [0, 3].

Giải:

$$I = \int_0^1 dx\int_0^2 dy\int_0^3 x.z.\sin(xy)\,dz =$$

$$= \int_0^1 x\,dx.\int_0^2 \sin(xy)\,dy.\int_0^3 z\,dz = \int_0^1 x\,dx.\int_0^2 \sin(xy)\,dy.\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^3 =$$

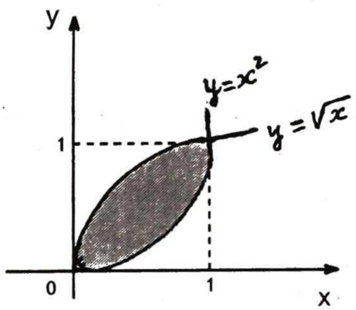
$$=\frac{9}{2}\int_0^1 dx\int_0^2 \sin(xy)\,d(xy)=\frac{9}{2}\int_0^1 -\cos(xy)\Big|_{y=0}^{y=2}dx=$$

$$=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\int_0^1 \cos 2x\,dx=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\sin 2x\Big|_0^1=\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\sin 2$$

1111. Tính tích phân:

$$I=\iint_D (x^3+xy)dxdy,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$.



Giải:

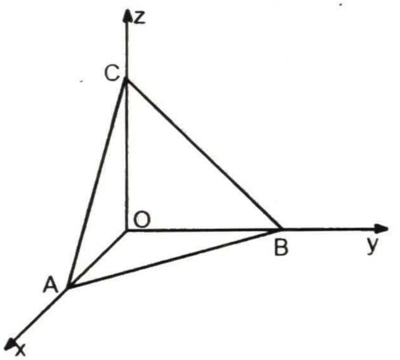
Ta xác định D là miền được giới hạn bởi 2 đường cong đã cho: $y = x^2$ và $y = \sqrt{x}$. Hai đường cong này cắt nhau tại hai điểm (0, 0) và (1, 1). Ta có:

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^3+xy)\,dy=$$

$$=\int_0^1\left(x^3y+x.\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^3\sqrt{x}-x^5+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^5\right)dx=\frac{5}{36}.$$

1112. Tính tích phân: $I = \iiint\limits_B \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, trong đó B là miền được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ x = 0, y = 0, z = 0 và mặt phẳng có phương trình x + y + z = 1.



Giải: B là tứ diện OABC bị chắn giữa hai mặt phẳng z = 0 và z = 1 – x – y, (x, y) ∈ D, trong đó D là tam giác OAB trong mặt phẳng Oxy. Vậy ta có :

$$I = \iint\limits_D dx\,dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= \iint\limits_D \left.\frac{(1+x+y+z)^{-2}}{-2}\right|_{z=0}^{z=1-x-y} dx\,dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right)dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left.\left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{1+x+y}\right)\right|_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right)dx =$$

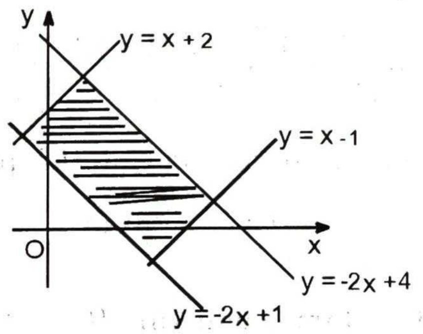
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

1113. Tính tích phân:

$$I = \iint_D (x+y)dxdy\,,$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường thẳng:

$$y = x + 2,\ y = x - 1,\ y = -2x + 1 \text{ và } y = -2x + 4.$$



Giải: Nhận xét: D là miền được tạo thành bởi giao của hai họ đường thẳng phụ thuộc tham số:

$$y = -2x + u\,, \qquad 1 \le u \le 4 \qquad \text{và}$$

$$y = x + v\,, \qquad -1 \le v \le 2.$$

Từ đó ta thấy: nếu thực hiện phép đổi biến:

$$u = 2x + y\,, \quad v = y - x$$

hay $$x = \frac{1}{3}(u - v)\,, \quad y = \frac{1}{3}(u + 2v)$$

thì miền D trong mặt phẳng (x, y) được đưa về hình chữ nhật D':

$$D' = \{ (u, v) : \ 1 \le u \le 4\,,\ -1 \le v \le 2 \}$$

trong mặt phẳng (u, v). Khi đó ta có:

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

và

$$I = \iint_{D'} \left[\frac{1}{3}(u-v) + \frac{1}{3}(u+2v)\right].\frac{1}{3}du\,dv = \frac{1}{9}\int_1^4 du\int_{-1}^2 (2u+v)dv =$$

$$= \frac{1}{9}\int_1^4 \left(2uv + \frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_{v=-1}^{v=2} du = \frac{1}{9}\int_1^4 \left(6u + \frac{3}{2}\right)du =$$

$$= \frac{1}{9}\left(6.\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}u\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{9}\left[6.\left(8 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}.3\right] = \frac{11}{2}.$$

1114. Chuyển qua tọa độ cực hãy tính tích phân :

$$I = \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

trong đó B_R là hình tròn tâm O bán kính R.

Giải:

Ta có: $B_R = \{ (x, y) : \quad 0 \le x^2 + y^2 \le R^2 \}$

Đổi sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ dxdy = rdrd\varphi$.

Khi đó :

$$I = \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr =$$

$$= 2\pi.\left(-\frac{1}{2}\right).e^{-r^2}\Bigg|_0^R = \left(1 - e^{-R^2}\right)\pi.$$

1115. Chuyển qua tọa độ cầu hãy tính tích phân :

$$I = \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dydz$$

trong đó B là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le z$.

Giải:

Ta có :

$$x^2+y^2+z^2-z=x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Như vậy

$$B=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{4}\right\},$$

tức là B là hình cầu tâm tại điểm $\left(0,\,0,\,\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{1}{2}$.

Đổi sang tọa độ cầu :

$$x = r\sin\theta\,.\,\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\,.\,\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta \qquad , \qquad 0\le\varphi\le 2\pi, \qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

Để xác định cận biến thiên của r, ta chú ý :

$$x^2+y^2+z^2\le z \quad\Leftrightarrow\quad r^2\le r\cos\theta \;\Rightarrow\; r\le\cos\theta.$$

$$dxdydz \;=\; r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$$

Vậy:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\cos\theta}r^3\sin\theta\,dr=2\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta.\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\cos\theta}d\theta=$$

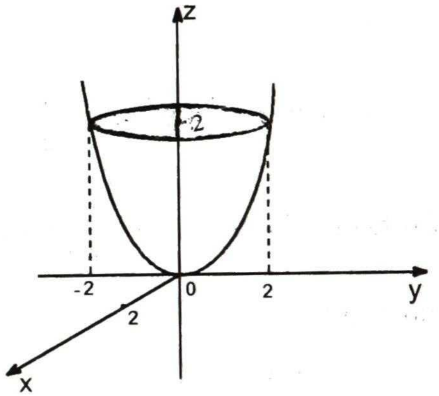
$$=\frac{\pi}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta.\sin\theta\,d\theta=-\frac{\pi}{2}.\,\frac{\cos^5\theta}{5}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

1116. Chuyển qua tọa độ trụ, hãy tính tích phân sau:

$$I = \iiint_B \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy\, dz$$

trong đó B là miền được giới hạn bởi các mặt :

$$x^2 + y^2 = 2z \quad \text{và} \quad z = 2.$$



Giải: Đổi sang hệ tọa độ trụ: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$,

$$z = z, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ta có : $x^2 + y^2 = r^2$, $dxdydz = rd\varphi drdz$.

Để xác định cận biến thiên của r và z ta chú ý rằng: mặt paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ cắt mặt phẳng $z = 2$ theo đường tròn $x^2 + y^2 = 4$, từ đó $0 \le r \le 2$.

Mặt khác trên mặt paraboloide:

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2z \quad \text{hay} \quad r^2 = 2z \;\Rightarrow\; z = \frac{r^2}{2}$$

Từ đó, trong miền B: $\dfrac{r^2}{2} \le z \le 2.$

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r^3 dz = 2\pi . \int_0^2 r^3\left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{16}{3}\pi .$$

Đưa tích phân dạng $\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$ *về tích phân lặp trong các trường hợp sau đây:*

1117. Ω là tam giác với các đỉnh O(0, 0), A(1, 0) và B(1, 1).

1118. Ω là hình thang với các đỉnh :

O(0, 0), A(1, 0), B(1, 2), C(0, 1).

1119. Ω là hình tròn $x^2 + y^2 \le y$.

1120. Ω là miền được giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$.

1121. Ω là hình vành khăn $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

Thay đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân sau:

1122. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

1123. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

1124. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

1125. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

1126. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.

1127. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

Tính các tích phân hai lớp sau đây:

1128. $\iint\limits_{\Omega} xy^2dxdy$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi parabol $y^2 = 2px$ và đường thẳng $x = \frac{p}{2}$, $p > 0$.

1129. $\iint\limits_{\Omega} |xy|dxdy$, trong đó Ω là hình tròn bán kính là a, và tâm là gốc tọa độ.

1130. $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)dxdy$, trong đó Ω là hình bình hành được giới hạn bởi các đường thẳng: $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$ $(a > 0)$.

1131. $\iint\limits_{\Omega} y^2dxdy$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi trục hoành và cung thứ nhất của đường cycloide:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Chuyển qua tọa độ cực: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ đối với tích phân hai lớp dạng: $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, hãy xác định cận tích phân trong các trường hợp sau đây:

1132. Ω là hình tròn $x^2 + y^2 \le ax$, $a > 0$.

1133. Ω là hình vành khăn $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$, $0 < a < b$.

1134. Ω là tam giác $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$.

1135. Ω là miền $-a \le x \le a$, $\frac{x^2}{a} \le y \le a$, $a > 0$.

Chuyển sang tọa độ cực và xác định cận lấy tích phân trong các tích phân sau:

1136. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$.

1137. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

1138. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$.

1139. $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy$, trong đó Ω là miền được giới hạn bởi đường cong có phương trình: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

1140. $\iint_\Omega f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$, trong đó: $\Omega = \left\{|y| \leq |x|, |x| \leq 1\right\}$.

1141. $\iint_{x^2+y^2\leq x} f\left(\dfrac{y}{x}\right)dxdy$.

Chuyển sang tọa độ cực, tính các tích phân sau đây:

1142. $\iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

1143. $\iint_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

1144. Cho tích phân $I = \int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x,y)\,dxdy$. Hãy thực hiện phép biến đổi: $u = x + y$, $v = x - y$.

1145. Cho tích phân $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $(a > 0)$, $x = 0$ và $y = 0$. Hãy thực hiện phép đổi biến $x = u\cos^4 v$, $y = u\sin^4 v$.

1146. Cho tích phân $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$, trong đó D là tam giác $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1 - x$. Hãy chọn phép thế biến thích hợp để đưa tích phân đã cho về tích phân trên hình vuông đơn vị.

1147. Cho tích phân $I = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$, trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong : $xy = 1$, $xy = 2$, $x - y + 1 = 0$ và $x - y - 1 = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$. Hãy chọn phép thế biến thích hợp để đưa tích phân đã cho về tích phân trên hình chữ nhật.

1148. Cho tích phân $I = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$, trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ và $y = 4x$, $(x > 0,\ y > 0)$. Hãy chọn phép thế biến thích hợp để đưa tích phân đã cho về tích phân trong hình chữ nhật.

Chọn phép đổi biến thích hợp, tính các tích phân sau:

1149. $\iint\limits_{D} (x + y)\,dxdy$, trong đó D là miền được giới hạn bởi đường cong : $x^2 + y^2 = x + y$.

1150. $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1} (|x| + |y|)\,dxdy$.

1151. $\iint\limits_{D} \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, trong đó D là miền được giới hạn bởi đường ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1152. $\iint\limits_{x^4+y^4\le 1} (x^2 + y^2)\,dxdy$.

1153. $\iint\limits_{D} (x + y)\,dxdy$, trong đó D là miền được giới hạn bởi các đường cong : $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

1154. $\iint\limits_{\substack{0\le x\le \pi \\ 0\le y\le \pi}} |\cos(x + y)|\,dxdy$.

1155. $\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ 0\le y\le 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$.

Tính các tích phân ba lớp sau đây:

1156. $\iiint\limits_B xy^2z^3\,dxdydz$, trong đó B là miền được giới hạn bởi các mặt $z = xy$, $y = x$, $x = 1$ và $z = 0$.

1157. $\iiint\limits_B xyz\,dxdydz$, trong đó B là miền được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

1158. $\iiint\limits_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, trong đó B là miền được giới hạn bởi mặt ellipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1159. $\iiint\limits_B \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, trong đó B là miền được giới hạn bởi các mặt $x^2 + y^2 = z^2$ và $z = 1$.

1160. $\iiint\limits_B (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$, trong đó B là miền được giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

1161. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$.

§4. TÍNH DIỆN TÍCH VÀ THỂ TÍCH

1. Diện tích của miền đo được D trong mặt phẳng Oxy được tính bằng công thức :

$$S = \iint_D dx\,dy$$

2. Khối trụ V được giới hạn phía trên bởi mặt cong có phương trình $z = f(x, y)$, trong đó $f(x, y)$ là hàm liên tục; phía dưới bởi mặt phẳng tọa độ $z = 0$, còn mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz, D là hình chiếu của V xuống mặt phẳng Oxy. Khi đó thể tích V của khối trụ được tính bằng công thức:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

3. Thể tích V của miền đo được B trong không gian Oxyz được tính bằng công thức:

$$V = \iiint_B dx\,dy\,dz.$$

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1162. Tính diện tích của miền D được giới hạn bởi các đường cong: $xy = a^2$, $x + y = \frac{5}{2}a$, $(a > 0)$.

1163. Tính diện tích của miền D được giới hạn bởi đường cong: $(x - y)^2 + x^2 = a^2$, $a > 0$.

1164. Tính diện tích của miền D được giới hạn bởi đường cong: $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \geq a^2$.

1165. Tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

1166. Tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong:

$$xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad y = x \quad \text{và} \quad y = 2x,$$

$$(x > 0, \ y > 0).$$

1167. Tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường thẳng: $x + y = a, \ x + y = b, \ y = \alpha x, \ y = \beta x$

$(0 < a < b, \quad 0 < \alpha < \beta)$.

1168. Tính diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong : $x^2 = ay, \ x^2 = by, \ x^3 = cy^2$ và $x^3 = dy^2$

$(0 < a < b, \quad 0 < c < d)$.

1169. Tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường các cong :

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \quad \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \quad 4\frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

$$(a > 0, b > 0).$$

Áp dụng tích phân hai lớp, tính thể tích của các vật thể được giới hạn bởi các mặt sau :

1170. $z = 1 + x + y, \ z = 0, \ x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0.$

1171. $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z = 0, (a \geq R\sqrt{2}).$

1172. $z = x^2 + y^2, \ y = x^2, \ y = 1, \ z = 0.$

1173. $z^2 = xy, \ x^2 + y^2 = a^2.$

1174. $z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 = x, \ x^2 + y^2 = 2x, \ z = 0.$

1175. $z = x^2 + y^2, \ z = x + y.$

1176. $z = xy, \ x^2 = y, \ x^2 = 2y, \ y^2 = x, \ y^2 = 2x, \ z = 0.$

1177. $x^2 + y^2 - az = 0, \ (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \ z = 0, \ (a > 0).$

1178. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$

1179. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\quad (z>0).$

Áp dụng tích phân ba lớp, tính thể tích của các vật thể được giới hạn bởi các mặt cong sau :

1180. $z=x^2+y^2,\quad z=2x^2+2y^2,\quad y=x,\quad y=x^2.$

1181. $z=x+y,\quad z=xy,\quad x+y=1,\quad x=0,\quad y=0.$

1182. $x^2+z^2=1,\quad x+y=\pm 1,\quad x-y=\pm 1.$

1183. $z=x^2+y^2,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}\ .$

1184. $x^2+y^2+z^2=2az\ ,\ x^2+y^2 \le z^2.$

1185. $x^2+y^2+z^2=a^2\ ,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad x^2+y^2=z^2,$ $(z \ge 0,\quad 0<a<b).$

1186. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}\ ,\quad (h>0).$

1187. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1,\qquad x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$

1188. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$

1189. $z=x^2+y^2\ ,\quad z=2(x^2+y^2)\ ,\quad xy=a^2\ ,\quad xy=2a^2,$

$x=2y,\quad 2x=y\qquad (x>0,\quad y>0).$

Chương 12

TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

1. Tích phân đường loại I

Giả sử C = AB là một đường cong trơn hay trơn từng khúc trong mặt phẳng Oxy được cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t)\ , \quad y = y(t)\ , \quad t \in [a, b]$$

trong đó x(t) và y(t) là các hàm khả vi liên tục trên đoạn [a, b]; f(x, y) là hàm xác định trên đoạn [a, b].

Khi đó, nếu tồn tại (hữu hạn)

$$I = \int_a^b f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

thì ta gọi I là tích phân đường loại *I* của hàm f(x, y) trên đường cong C = AB và ký hiệu là:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_a^b f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

Nếu đường cong C cho bởi phương trình dạng hiện:

$$y = y(x)\ , \quad x \in [a, b]$$

thì

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx\,.$$

Trong trường hợp C là đường cong trong không gian được cho bởi phương trình tham số:

$$x = x(t)\ , \quad y = y(t)\ , \quad z = z(t)\ , \qquad t \in [a, b]$$

thì tích phân đường loại I của hàm f(x, y, z) trên C được xác định theo công thức:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt\,.$$

Trong các công thức trên, các biểu thức $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$, hay là $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$ chính là vi phân cung ds của các đường cong C (trong mặt phẳng hay là trong không gian).

Ý nghĩa cơ học: Nếu AB là "đường cong vật chất" và $\rho(x,y,z)$ là mật độ khối lượng thì khối lượng m của đường cong AB là:

$$m = \int_{AB} \rho(x,y,z)\,ds\,.$$

2. Tích phân đường loại II

a. Cho AB là đường cong trơn (hay trơn từng khúc) trong mặt phẳng Oxy có phương trình tham số là:

$$x = x(t)\ , \quad y = y(t)\ , \qquad t \in [a, b].$$

Nếu ta chọn một hướng, chẳng hạn hướng từ A đến B và gọi là hướng dương của đường cong AB, thì hướng từ B đến A sẽ được gọi là hướng âm.

Giả sử AB là đường cong được định hướng dương từ A đến B. Khi đó ánh xạ:

$$\gamma : \quad [a, b] \to R^2$$

được xác định sao cho: với mọi $t \in [a, b]$ thì

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in AB.$$

được gọi là phép tham số hóa phù hợp với hướng dương của AB nếu khi t tăng liên tục từ a đến b thì điểm M(x(t), y(t)) biến thiên liên tục từ điểm A đến điểm B.

b. Giả sử AB là đường cong định hướng dương từ A đến B và $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ là phép tham số hóa phù hợp với hướng dương của AB, F(x, y) = (P(x,y), Q(x,y)) là hàm xác định trên đường cong AB. Khi đó nếu tồn tại (hữu hạn) tích phân:

$$I = \int_a^b [P(x(t), y(t)).\, x'(t) + Q(x(t), y(t)).y'(t)]dt$$

thì I được gọi là tích phân đường loại II của trường vectơ F = (P, Q) trên đường cong AB lấy theo hướng từ A đến B, và ký hiệu:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x(t), y(t)).\, x'(t) + Q(x(t), y(t)).\, y'(t)]dt.$$

c. Tương tự như trên: Nếu AB là đường cong trong không gian Oxyz được định hướng dương từ A đến B và $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ là phép tham số hóa phù hợp với hướng dương của AB.

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

là hàm xác định trên AB. Khi đó tích phân đường loại II của trường vectơ F = (P, Q, R) trên đường cong AB lấy theo hướng từ A đến B là:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$\int_a^b [P(x(t),y(t),z(t)).x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t)).y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)).z'(t)]dt$$

Chú ý: $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz$.

Công thức liên hệ giữa tích phân đường loại I và loại II:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

trong đó $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là các cosin định hướng của tiếp tuyến của cung AB tại điểm (x, y, z) hướng từ A đến B.

Ý nghĩa cơ học: Nếu F = (P, Q, R) là trường lực thì:

$$I = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$$

là công sinh ra khi một chất điểm chuyển động từ A đến B dưới tác dụng của lực F.

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1190. Tính $\int_C (x+y)ds$, trong đó C là chu vi của tam giác với các đỉnh O(0, 0), A(1, 0) và B(0, 1).

Giải: Ta có:

$$\int_C (x+y)ds = \int_{OA} (x+y)ds + \int_{AB} (x+y)ds + \int_{OB} (x+y)ds.$$

Trên OA thì y = 0 nên :

$$\int_{OA} (x+y)ds = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

Trên OB thì x = 0 nên :

$$\int_{OB} (x+y)ds = \int_0^1 ydy = \frac{1}{2}$$

Trên AB thì $y = 1 - x$, và $\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \sqrt{2}\,dx$.

Do đó:

$$\int_{AB}(x+y)\,ds = \int_0^1 [x+(1-x)].\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}$$

Vậy:

$$\int_C (x+y)\,ds = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

1191. Tính $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, trong đó C là chu vi của hình quạt được giới hạn đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $(x > 0, y > 0)$ và các đường thẳng $y = 0$ và $y = x$.

Giải: Gọi O, A và B là các đỉnh của hình quạt: O(0, 0), A(a, 0), $B\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, thì C bao gồm các đoạn thẳng OA, OB và cung tròn AB của đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$. Do đó:

$$\int_C e^{+\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds + \int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds + \int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds.$$

Chú ý rằng,trên OA thì $y = 0$ và $0 \le x \le a$, nên

$$\int_{OA} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^a e^x\,dx = e^a - 1$$

Trên OB thì $y = x$, $0 \le x \le a\frac{\sqrt{2}}{2}$, nên

$$\int_{OB} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds = \int_0^{a\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{\sqrt{2}x}.\sqrt{2}\,dx = e^a - 1$$

Trên cung AB, chuyển qua tọa độ cực : $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$ trong đó $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, ta có:

$$\int_{AB} e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi}\, d\varphi = ae^a.\frac{\pi}{4}$$

Vậy: $$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds = 2\left(e^a - 1\right) + a.e^a.\frac{\pi}{4}.$$

1192. Tính $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)ds$, trong đó C là phần đường xoắn có phương trình tham số:

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = bt,\quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải: Trên đường cong C ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2t^2$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, dt$$

Do đó:

$$I = \int_0^{2\pi} (a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)dt$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(a^2.2\pi + b^2\frac{8\pi^3}{3}\right) = 2\pi.\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{4}{3}\pi^2 b^2\right).$$

1193. Tính độ dài cung của đoạn đường cong $x^2 + y^2 = cz$, $\dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\dfrac{z}{c}$ từ điểm O(0, 0, 0) đến điểm $A\left(\dfrac{c\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \dfrac{c\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \dfrac{c\pi}{4}\right)$.

Giải: Độ dài đường cong được tính theo công thức

$$L = \int_{OA} ds.$$

Để tính tích phân đường ta hãy tham số hóa đường cong theo góc cực φ.

Đặt x = rcosφ, y = rsinφ, khi đó từ phương trình đường cong đã cho ta có:

$$r^2 = cz, \quad \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = tg\varphi = tg\frac{z}{c}.$$

Từ đó $z = c\varphi$, $r^2 = c.c\varphi = c^2\varphi$, $r = c\sqrt{\varphi}$.

Do đó : $x = c\sqrt{\varphi}\cos\varphi$; $y = c\sqrt{\varphi}\sin\varphi$, $z = c\varphi$

Vì $0 \le z \le \frac{c\pi}{4}$ nên $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Tính :

$$ds = \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)}\, d\varphi = c.\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\right)d\varphi.$$

Vậy nên :

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} c.\left(\frac{1}{2\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\varphi}\right)d\varphi = \frac{c\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{6}\right).$$

1194. Tính tích phân đường loại II:

$$I = \int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$$

trong đó C là phần của đường parabol $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, lấy theo hướng tăng của đối số x.

Giải: Ký hiệu C = AB, với A(-1, 1), B(1,1).

Khi đó:

$$I = \int_{-1}^{1} \left[(x^2 - 2x.x^2) + (x^4 - 2x.x^2).2x\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4\right)dx = -\frac{14}{15}.$$

1195. Tính tích phân

$$K = \int_C y^2dx - x^2dy$$

a) C là đường tròn tâm O(0, 0), bán kính R = 1.

b) C là đường tròn tâm (1, 1), bán kính R = 1 lấy theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Giải:

a) C là đường tròn tâm O(0, 0) bán kính R = 1 có phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

Tham số hóa qua tọa độ cực $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, $dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$.

Khi đó: $K = \int_C y^2dx - x^2dy = -\int_0^{2\pi}\left(\sin^3 t + \cos^3 t\right)dt = 0$.

b) C là đường tròn tâm (1, 1) bán kính R = 1 có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Tham số hóa qua tọa độ cực:

$x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

$dx = -\sin t dt$, $dy = \cos t dt$.

Khi đó:

$$K = \int_C y^2dx - x^2dy = \int_0^{2\pi}\left[-(1+\sin t)^2\sin t - (1+\cos t)^2\cos t\right]dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}(2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t)\,dt = -4\pi.$$

1196. Tính $I = \int_C ydx + zdy + xdz$, trong đó C là một phần đường xoắn ốc có phương trình tham số x = acost, y = asint, z = bt, $0 \le t \le 2\pi$, lấy theo hướng tăng của tham số.

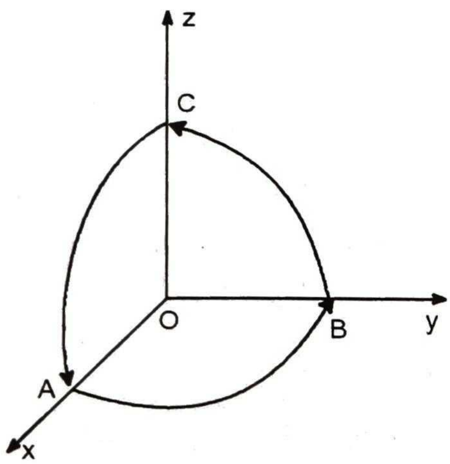
Giải: Ta có

$$I = \int_0^{2\pi} a\sin t\, d(a\cos t) + bt\, d(a\sin t) + a\cos t\, d(bt)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2\sin^2 t + ab\, t\cos t + ab(1+t)\cos t\right)dt$$

$$= -\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt + ab\int_0^{2\pi}(1+\ t)\cos t\,dt = -a^2\pi\ .$$

1197. Tính $I = \int_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, trong đó C là chu vi của tam giác cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ lấy theo chiều dương sao cho khi đi theo hướng này thì phía ngoài của tam giác cầu ở về bên trái.



Giải: A, B và C là ba điểm có các tọa độ:

$$A(1, 0, 0),\ B(0, 1, 0),\ C(0, 0,1).$$

Khi đó đường cong C bao gồm ba cung tròn

$$C = AB \cup BC \cup CA$$

được định hướng dương từ A đến B, từ B đến C và từ C đến A.

Đặt : $\omega = (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$

thì ta có:

$$\oint_C \omega = \int_{AB} \omega + \int_{BC} \omega + \int_{CA} \omega\ .$$

Do tính đối xứng của x, y, z nên ta sẽ có:

$$\oint_C \omega = 3\int_{AB} \omega = 3\int_{AB} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz\ .$$

Hơn nữa trên cung AB nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy thì $z = 0$, $dz = 0$, cho nên :

$$I = 3\int_{AB} y^2dx - x^2dy\ .$$

Chú ý rằng,cung AB là giao tuyến của mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

với mặt phẳng $z = 0$ có phương trình $x^2 + y^2 = 1$ được tham số hóa qua hệ tọa độ cực là:

$$x = \cos t\ , \quad y = \sin t\ , \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Vậy:

$$\int_{AB} y^2dx - x^2dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^3 t - \cos^3 t)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\, d\cos t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\, d(\sin t) = -\frac{4}{3}.$$

Do đó: $\quad I = -\frac{4}{3}.3 = -4.$

Tính các tích phân đường loại I sau đây:

1198. $\int_C y^2 ds$, trong đó C là cung cycloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

1199. $\int_C xy ds$, trong đó C là cung hyperbol

$$x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad 0 \le t \le t_o.$$

1200. $\int_C \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right) ds$, trong đó C là cung astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

1201. $\int_C |y| ds$, trong đó C là cung lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

1202. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

1203. $\int_C x^2 ds$, trong đó C là đường tròn

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0.$$

1204. $\int_C z ds$, trong đó C là đường xoắn

$$x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad z = t, \quad 0 \le t \le t_o.$$

1205. $\int\limits_C zds$, trong đó C là cung của đường cong $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 = ax$ từ điểm O(0, 0, 0) đến điểm A(a, a, $a\sqrt{2}$).

Tính độ dài cung của các đường cong sau đây:

1206. $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\sin t$, $z = e^{-t}$, $0 \le t \le +\infty$.

1207. $y = a.\ \arcsin\dfrac{x}{a}$, $z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ từ điểm O(0, 0, 0) đến điểm A(1, 1, -a), a > 1.

1208. $(x - y)^2 = a(x + y)$, $x^2 - y^2 = \dfrac{9}{8}z^2$ từ điểm O(0, 0, 0) đến điểm A(1, 2, 2).

1209. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2}.\mathrm{ch}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}\right) = a$ từ điểm A(a, 0, 0) đến điểm B(x, y, z).

1210. Tìm khối lượng của cung parabol $y^2 = 2px$, $\left(0 \le x \le \dfrac{p}{2}\right)$, biết mật độ khối lượng của dây là $\rho(x, y) = |y|$.

1211. Xác định tọa độ trọng tâm của dây cycloide đồng chất: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le \pi$.

1212. Xác định tọa độ trọng tâm của cung đồng chất:

$$x = e^t\cos t,\quad y = e^t\sin t,\quad z = e^t,\quad (-\infty \le t \le 0).$$

1213. Tính các tích phân đường loại II:

$$I = \int\limits_{OA} xdy - ydx$$

và

$$K = \int\limits_{OA} xdy + ydx$$

trong đó O là gốc tọa độ, còn A là điểm có tọa độ (1, 2) trong các trường hợp sau đây:

a) OA là đoạn thẳng nối hai điểm O và A.

b) OA là cung của parabol nhận trục Oy là trục đối xứng.

c) OA là đường gấp khúc OBA, trong đó OB là đoạn thẳng trên trục Ox, BA là đoạn thẳng song song với trục Oy.

Tính các tích phân đường loại II sau đây:

1214. $I = \int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, trong đó C là đường $y = 1 - |1 - x|$, $0 \le x \le 2$ lấy theo chiều tăng của x.

1215. $I = \int_C (x + y)dx + (x - y)dy$, trong đó C là đường ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ.

1216. $I = \int_C (2a - y)dx + x\,dy$, trong đó C là cung cycloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

1217. $I = \oint_C \frac{(x + y)dx - (x - y)dy}{x^2 + y^2}$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ.

1218. $I = \oint_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, trong đó ABCDA là chu vi hình vuông lấy theo chiều lần lượt từ đỉnh A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1).

1219. $I = \int_{OmAnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.dy - dx$, trong đó OmA là đoạn cung parabol $y = x^2$, OnA là đoạn thẳng $y = x$.

1220. $I = \int_C (y^2 - z^2)dx + 2yz\,dy - x^2 dz$, trong đó C là đường cong có phương trình tham số:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3, \quad 0 \le t \le 1,$$

lấy theo hướng tăng của tham số.

1221. $I = \oint\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x.tg\alpha$, $(0 < \alpha < \pi)$, lấy theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

1222. $I = \int\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz$, trong đó C là phần của đường cong Viviani $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ $(z \ge 0, a > 0)$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

§2. TÍCH PHÂN MẶT

1. Tích phân mặt loại I

Giả sử S là mặt hai phía, trơn hay trơn từng phần trong không gian R^3, có phương trình tham số:

$$x = x(u, v), \; y(u, v), \; z = z(u, v), \; (u, v) \in D \subset R^2.$$

f(x, y, z) là hàm xác định và liên tục trên S. Khi đó tích phân mặt loại I của hàm f(x, y, z) trên mặt S được xác định theo công thức :

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds \stackrel{d/n}{=} \iint\limits_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

trong đó E, G, F là các hệ số Gauss:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Trường hợp riêng khi S có phương trình dạng hiện

$$z = z(x, y), (x, y) \in D$$

thì:

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,ds = \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

Trong các công thức trên, các biểu thức $\sqrt{EG - F^2}\,dudv$ hay $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$ chính là biểu thức của vi phân diện tích mặt ds. Ta có công thức diện tích của mặt S là:

$$S = \iint\limits_S ds = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

Nếu S là "mặt vật chất" có mật độ khối lượng là ρ(x, y, z) thì khối lượng M của mặt S là:

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,ds$$

2. Tích phân mặt loại II

a. Giả sử S là mặt hai phía, trơn hay trơn từng phần có phương trình tham số

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

$$z = z(u, v), \quad (u, v) \in D \subset R^2.$$

Ta chọn một phía nào đó của S làm hướng dương của mặt. Khi đó mặt S được gọi là mặt định hướng và ký hiệu là S^+ và lấy vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

của mặt S hướng về phía được chọn làm hướng dương, làm vectơ định hướng của mặt S^+.

Như vậy, phía ngược lại của mặt S được gọi là hướng âm và ký hiệu là S^-, có vectơ định hướng là $-\vec{n}$.

Tại điểm $M(x, y, z) \in S^+$, các vectơ:

$$\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{và} \quad \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

nằm trên mặt phẳng tiếp xúc với mặt S tại điểm M, hướng theo chiều tăng của tham số u và v tương ứng. Nếu vectơ

$$\vec{N} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$$

cùng hướng với vectơ định hướng $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ của mặt S^+ thì ánh xạ $\gamma : D \to R^3$ sao cho

$$\forall (u, v) \in D: \gamma(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \in S$$

được gọi là phép tham số hóa phù hợp với định hướng dương của mặt S^+.

Chú ý rằng: Vectơ $\vec{N} = \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v}$ có các thành phần là (A, B, C), trong đó:

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \; B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \; C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}.$$

Do đó nếu $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vectơ định hướng của mặt S^+ và $\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in D$ là phép tham số hóa phù hợp với định hướng của S^+ thì

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Hơn nữa ta có:

$$ds = \sqrt{EG - F^2}\,dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dudv.$$

b. Giả sử P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) là những hàm số xác định và liên tục trên mặt định hướng S^+,

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D$$

là phép tham số hóa phù hợp với định hướng của mặt S^+. Khi đó tích phân mặt loại II của hàm vectơ F = (P, Q, R) trên mặt S lấy theo phía S^+ được xác định theo công thức:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_D (P.A + Q.B + R.C)dudv.$$

Trường hợp khi S được cho bởi phương trình

$$z = z(x, y),\quad (x, y) \in D \subset R^2$$

và S^+ là mặt định hướng dương theo phía trên thì:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_D (-P.z'_x - Q.z'_y + R)dxdy.$$

Từ định nghĩa ta có:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = -\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Ngoài ra ta có công thức liên hệ giữa tích phân mặt loại I và loại II:

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{S} (P.\cos\alpha + Q.\cos\beta + R.\cos\gamma)ds$$

trong đó $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vectơ định hướng của mặt S^+.

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1223. Tính tích phân mặt loại I:

$$I = \iint_{S} (2x + 2y + z - 1)\,ds$$

trong đó S là phần mặt phẳng $x + y + z = 1$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Giải: Trên mặt S ta có:

$$z = 1 - x - y, (x, y) \in D,$$

trong đó $D = \{(x, y):\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

Do đó:

$$I = \iint_{S} (x + y)\,ds = \iint_{D} (x + y).\sqrt{1 + x'^2_x + z'^2_y}\,dxdy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y)\,dy = \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

1224. Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ $(z \geq 0)$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Giải: Chú ý rằng mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ $(z \geq 0)$ cắt mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ theo một đường tròn nằm trên mặt phẳng $z = 1$, có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$. Gọi phần mặt cầu phải tính diện tích là S, ta có công thức:

$$S = \iint_{S} ds.$$

Tham số hóa mặt S theo tọa độ cầu, chú ý rằng $r = \sqrt{2}$:

$$x = \sqrt{2}\sin\theta.\cos\varphi$$

$$y = \sqrt{2}\sin\theta.\sin\varphi$$

$$z = \sqrt{2}.\cos\theta$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$= 2\cos^2\theta.\cos^2\varphi + 2\cos^2\theta.\sin^2\varphi + 2\sin^2\theta = 2.$$

Tương tự: $G = 2\sin^2\theta$, $\quad F = 0$.

Do đó: $\quad EG - F^2 = 4\sin^2\theta$, $\quad \sqrt{EG - F^2} = 2\sin\theta$.

Vậy:

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin\theta\, d\theta = 4\pi.\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

1225. Tính tích phân mặt loại II:

$$I = \iint_{S^+} xdydz + ydzdx - zdxdy,$$

trong đó S^+ là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ định hướng theo pháp tuyến hướng ra phía ngoài.

Giải: Chọn phép tham số hóa mặt S theo tọa độ cầu:

$$x = R\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = R\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = R\cos\theta$$

$$(0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Khi đó vectơ $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$ hướng ra phía ngoài mặt cầu, trong đó:

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} R\cos\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \\ -R\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = R^2\sin^2\theta.\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin^2\theta\sin\varphi,\ C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = R^2\sin\theta\cos\theta.$$

Vậy nên:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(R^3\sin^3\theta.\cos^2\varphi + R^3\sin^3\theta\sin^2\varphi - R^3\cos^2\theta.\sin\theta\right)d\theta$$

$$= R^3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta.(\sin^2\theta - \cos^2\theta).d\theta$$

$$= R^3.2\pi.\int_0^{\pi}(2\cos^2\theta - 1)\,d(\cos\theta) = \frac{4}{3}\pi.R^3.$$

Tính các tích phân mặt loại I và loại II sau đây:

1226. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,ds$, trong đó S là mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le h$.

1227. $\iint_S z\,ds$, trong đó S là phần của mặt trụ $x^2 + z^2 = 2az$, $(a > 0)$ bị cắt bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1228. $\iint_S (x + y + z)\,ds$, trong đó S là mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $(z \ge 0)$.

111.

1229. $\iint_S (x^2 + y^2)\,ds$, trong đó S là mặt biên của vật thể $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1$.

1230. $\iint\limits_S \dfrac{ds}{(1+x+y)^2}$, trong đó S là mặt biên của tứ diện:

$$x + y + z \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$$

1231. $\iint\limits_S |xyz|\,ds$, trong đó S là phần mặt $z = x^2 + y^2$ bị cắt
96
bởi mặt phẳng z = 1.

1232. $\iint\limits_S z^2\,ds$, trong đó S là phần mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \ge 0)$, bị cắt bởi mặt phẳng z = 1.

1233. $\iint\limits_S z\,ds$, trong đó S là mặt có phương trình tham số: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $(0 \le u \le a,\ 0 \le v \le 2\pi)$.

1234. $\iint\limits_S (xy + yz + zx)\,ds$, trong đó S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.

1235. $\iint\limits_{S^+} (xdydz + ydzdx + zdxdy)$, trong đó S^+ là phía ngoài
111
của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1236. $\iint\limits_{S^+} (y - z)\,dydz + (z - x)\,dzdx + (x - y)\,dxdy$, trong đó S^+ là phía ngoài của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$.

1237. $\iint\limits_{S^+} \dfrac{dydz}{x} + \dfrac{dzdx}{y} + \dfrac{dxdy}{z}$, trong đó S^+ là phía ngoài của mặt ellipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

1238. $\iint\limits_{S^+} (x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy)$, trong đó S^+ là phía ngoài của mặt cầu $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

1239. $\iint\limits_{S^+} f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy$, trong đó S^+ là phía ngoài của mặt biên của hình hộp:

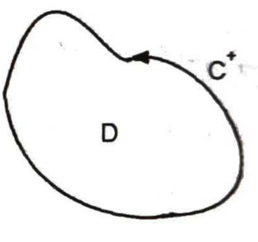
$$0 \le x \le a\,,\quad 0 \le y \le b\,,\quad 0 \le z \le c\,,$$

f(x), g(y), h(z) là các hàm liên tục.

§3. SỰ LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG, TÍCH PHÂN MẶT VÀ TÍCH PHÂN BỘI. CÔNG THỨC GREEN, STOKES, OSTROGRADSKI

1. Công thức Green

a. Giả sử D là miền bị chặn, đơn liên trong mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi chu tuyến C đóng, trơn từng khúc, không tự cắt. Chu tuyến C được định hướng dương theo hướng ngược chiều kim đồng hồ. Như vậy khi đi theo hướng đó thì miền D luôn luôn ở về phía bên trái.



Giả sử P(x, y), Q(x,y) là các hàm xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ trong miền đóng $\overline{D} = D \cup C$. Khi đó ta có công thức Green:

$$\oint\limits_{C} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Công thức Green cũng đúng đối với miền bị chặn D được giới hạn bởi đường cong đóng C gồm một số hữu hạn các đường cong trơn đóng, không tự cắt:

$$C = C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_k$$

được định hướng sao cho khi đi theo hướng đó thì miền D luôn luôn nằm về phía bên trái.

b. Công thức diện tích: Diện tích S của miền bị chặn D được giới hạn bởi đường cong C trơn, đóng, không tự cắt tính theo công thức:

$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

trong đó C được định hướng theo chiều ngược kim đồng hồ.

c. Sự không phụ thuộc của tích phân đường vào đường lấy tích phân

Giả sử P(x, y) và Q(x, y) là các hàm xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1: $\frac{\partial Q}{\partial x}$ và $\frac{\partial P}{\partial y}$ trong miền mở $D \subset R^2$. A và B là hai điểm thuộc D.

Khi đó điều kiện cần và đủ để cho tích phân đường loại II:

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy$$

lấy trên đường cong nối hai điểm A và B, nằm hoàn toàn trong D, không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in D \tag{1}$$

Khi đó tồn tại một hàm u(x, y) sao cho:

$$du = Pdx + Qdy$$

và
$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A).$$

Nếu điều kiện (1) thỏa mãn thì

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

với mọi đường cong C trơn hay trơn từng khúc, đóng, nằm hoàn toàn trong miền D.

Chú ý: Từ đây về sau,nếu không được giải thích thêm thì ta hiểu hướng dương của một đường cong đóng C là hướng mà nếu đi theo đó thì miền bị chặn được giới hạn bởi đường cong C luôn luôn nằm về phía bên trái.

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1240. Áp dụng công thức Green tính :

$$\oint_C xy^2dy - x^2ydx$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ.

Giải: Trong công thức Green ta đặt $P = -x^2y$ và $Q = xy^2$. Khi đó:

$$I = \oint_C(-x^2y\,dx + xy^2dy) = \iint_{x^2+y^2\le a^2}(y^2 + x^2)\,dxdy$$

Chuyển qua hệ tọa độ cực:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le a.$$

Ta có:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

1241. Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, trong đó C là chu tuyến đóng, không tự cắt, không đi qua gốc tọa độ, chạy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ.

Giải: Ta xét hai trường hợp:

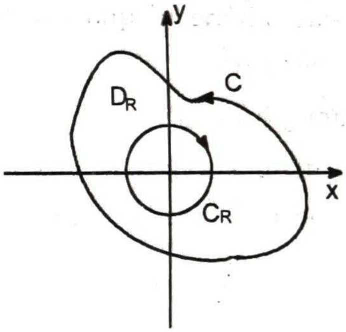
a) C là đường cong đóng không bao quanh gốc tọa độ. Khi đó miền bị chặn D được giới hạn bởi đường cong C không chứa gốc tọa độ. Do đó các hàm $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ và $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 trong miền đóng $\overline{D} = D \cup C$. Áp dụng công thức Green ta có:

$$\oint\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \iint\limits_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dxdy = 0.$$

b) Đường cong đóng C vòng quanh gốc tọa độ. Trong trường hợp này miền D chứa điểm gốc tọa độ, mà tại đó các hàm $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ không xác định. Vì vậy, không thể áp dụng được công thức Green.

Ta xét đường tròn C_R tâm O(0, 0), bán kính R đủ bé để sao cho C_R được bao ở bên trong C, Ký hiệu D_R là miền được giới hạn bởi các đường cong C và C_R, $C_o = C \cup C_R$ là biên của miền D_R được định hướng dương sao cho khi theo hướng đó thì miền D_R luôn luôn ở về phía bên trái. Như vậy trên C lấy theo chiều ngược kim đồng hồ, còn trên C_R lấy theo chiều thuận kim đồng hồ, tức là $C_o^+ = C^+ \cup C_R^-$ (ký hiệu C_R^+: sẽ là lấy chiều ngược kim đồng hồ!).



Áp dụng công thức Green trong D_R ta có:

$$\oint_{C_o^+}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_{D_R}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \iint_{D_R}\left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dxdy = 0$$

Như vậy:

$$\oint_{C_o^+}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \oint_{C^+}\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} + \int_{C_R^-}\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = 0.$$

Từ đó:

$$I = \oint_{C^+}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\oint_{C_R^-}\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \int_{C_R^+}\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Chọn tham số hóa $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ $dx = -R\sin\varphi d\varphi$, $dy = R\cos\varphi d\varphi$. Ta có:

$$\oint_{C_R^+}\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi}\frac{R\cos\varphi.R\cos\varphi - R\sin\varphi.(-R\sin\varphi)}{R^2}d\varphi = 2\pi.$$

Vậy khi C bao quanh gốc tọa độ thì:

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi .$$

1242. Tính diện tích của miền được giới hạn bởi đường ellipse :

$$x = a\cos t , \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Giải: Áp dụng công thức:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx)$$

trong đó C là đường ellipse có phương trình tham số:

$$x = a\cos t , \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Khi đó:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a\cos t . b\cos t - b\sin t . (-a \sin t)]dt$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi .ab .$$

1243. Tính diện tích của lá Descartes có phương trình

$$x^3 + y^3 = 3axy , \quad a > 0.$$

Giải:

Miền D được giới hạn bởi đường cong C có phương trình $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$ nằm trong góc phần tư $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Áp dụng công thức:

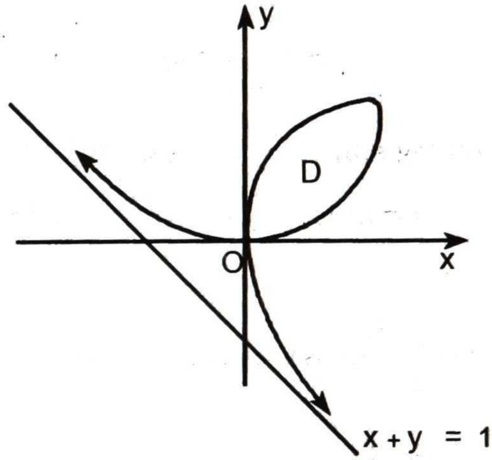
$$S = \frac{1}{2} \int_C x dy - ydx .$$

Để tham số hóa đường cong C ta đặt: $y = tx$.

Khi đó: $x^3 + t^3x^3 = 3ax.tx = 3ax^2t$.

Từ đó: $x = \dfrac{3at}{(1+t^3)}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

$$dx = 3a.\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt, \quad dy = 3a\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}dt.$$



Chú ý rằng khi (x, y) nằm trên đường cong C thì $t = \dfrac{y}{x} = tg\varphi$ vì $x \geq 0, y \geq 0$ nên $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq t < +\infty$.

Vậy:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{3at}{1+t^3}.3a.\frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}.3a.\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}\right]dt$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2+t^5}{(1+t^3)^3}dt = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

1244. Tính $\int_{AB} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$, trong đó AB là đường cong bất kỳ nối hai điểm A(0, 0) và B(a, b).

Giải: Đặt $P(x, y) = e^x\cos y$ và $Q(x, y) = -e^x\sin y$.

Xét tích phân :

$$I = \int_{AB} Pdx + Qdy .$$

Vì $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -e^x \sin y$ với mọi $(x, y) \in R^2$.

Như vậy Pdx + Qdy là biểu thức vi phân hoàn chỉnh. Do đó tích phân đã cho không phụ thuộc vào đường cong nối hai điểm A và B.

Ta hãy tìm hàm u(x, y) sao cho:

$$du = Pdx + Qdy$$

Từ đó: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = e^x \cos y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = -e^x \sin y$

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y) = \int e^x \cos y\,dx + C(y)$$

$$u(x,y) = e^x \cos y + C(y),$$

trong đó C(y) là hàm phải tìm để sao cho $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ hay là :

$$-e^x\sin y + C'(y) = Q(x, y) = -e^x\sin y$$

Từ đó: $\qquad C'(y) = 0$

hay $\qquad C(y) = C$, C – là hằng số tùy ý.

Ta chọn C = 0 hay $C(y) \equiv 0\ \forall y$.

Thay vào biểu thức của u(x, y) ta nhận được:

$$u(x, y) = e^x\cos y.$$

Vậy: $\int\limits_{AB} e^x(\cos y dx - \sin y dy) = u(B) - u(A) = e^a \cos b - 1$.

1245. Áp dụng công thức Green tính tích phân đường:

$$I = \oint\limits_C (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$$

trong đó C là đường gấp khúc ABCA chạy theo hướng dương với các đỉnh A(1, 1), B(3, 2) và C(2, 5).

Áp dụng công thức Green tính tích phân đường sau đây:

1246. $I = \oint\limits_C (x+y)dx - (x-y)dy$, trong đó C là đường ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ.

1247. $I = \oint\limits_C e^x\left[(1-\cos y)dx - (y - \sin y)dy\right]$, trong đó C là đường cong giới hạn miền:

$$P = \{(x, y):\ 0 \le x \le \pi,\quad 0 \le y \le \sin x\}$$

lấy theo hướng dương.

1248. $I = \oint\limits_C e^{-(x^2 - y^2)}(\cos 2xy\, dx + \sin 2xy\, dy)$, trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$ lấy theo chiều ngược kim đồng hồ.

1249. So sánh hai tích phân:

$$I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

và $$I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

trong đó AmB là đoạn thẳng nối hai điểm A(1, 1) và B(2, 6) còn AnB là parabol có trục song song với trục Oy, đi qua hai điểm A, B và gốc tọa độ.

1250. Tính tích phân:

$$I = \int_{AnO} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy$$

trong đó AnO là đường tròn $x^2 + y^2 = ax$, $(y \geq 0)$, lấy theo hướng từ điểm A(a, 0) đến điểm O(0, 0).

1251. Tính tích phân:

$$I = \int_{AmB} \left[\varphi(y)e^x - my\right]dx + \left[\varphi'(y)e^x - m\right]dy$$

trong đó $\varphi(y)$ và $\varphi'(y)$ là các hàm liên tục, AmB là đường cong tùy ý nối hai điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ sao cho miền được giới hạn bởi đường cong AmBA có diện tích bằng S cho trước.

1252. Xác định các hàm P(x, y), Q(x, y) khả vi liên tục hai lần sao cho tích phân đường:

$$I = \oint_C P(x+\alpha, y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy$$

với mọi chu tuyến đóng C không phụ thuộc α và β.

1253. Hàm F(x, y) phải thỏa mãn điều kiện nào để cho tích phân:

$$\int_{AmB} F(x,y)\,(ydx + xdy)$$

không phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

1254. Tính $I = \dfrac{1}{2\pi}\oint_C \dfrac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$, trong đó $X = ax + by$, $Y = cx + dy$, C là chu tuyến đóng, không tự cắt bao quanh gốc tọa độ, $ad - bc \neq 0$, $ac = -db$.

Tính các tích phân sau đây :

1255. $\int\limits_{AB}(x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, trong đó AB là đường cong bất kỳ nối hai điểm A(0, 1) và B(2, 3).

1256. $\int\limits_{AB}\frac{ydx-xdy}{x^2}$, trong đó AB là đường cong nối hai điểm A(2, 1) và B(1, 2) không cắt trục Oy.

1257. $\int\limits_{AB}\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$, trong đó AB là đường cong nối hai điểm A(0, -1) và B(1, 0) không cắt đường thẳng y = x.

1258. Chứng minh rằng nếu f(u) là hàm liên tục, còn C là đường cong nối hai điểm A(0, 0) và B(a, b) thì

$$\int\limits_{C}f(x+y)\,(dx+dy) = \int\limits_{0}^{a+b}f(u)\,du.$$

Tính diện tích các miền được giới hạn bởi các đường cong sau đây:

1259. Đường astroid $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$.

1260. $(x + y)^2 = ax$ và trục ox, $(a > 0)$.

1261. Đường lemniscate $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

1262. $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ (lá Descartes).

1263. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

2. Công thức Stokes

a. Cho B là một tập mở trong R^3, S là một mặt cong hai phía, trơn hay trơn từng phần nằm hoàn toàn trong tập B, được giới hạn bởi đường cong đóng C, trơn hay trơn từng khúc, không tự cắt, được định hướng.

Hướng dương của mặt S^+ được xác định bởi vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ hướng về phía đó. Còn hướng dương của đường cong C được xác định sao cho khi ta đứng tại một điểm bất kỳ $M \in S$, thẳng đứng theo chiều của pháp tuyến định hướng $\vec{n}$ thì thấy hướng dương của đường cong C ngược với chiều kim đồng hồ.

Giả sử P(x, y, z), Q(x, y, z) và R(x, y, z) là các hàm khả vi liên tục trong B. Khi đó ta có công thức Stokes:

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{S^+} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx$$

$$= \iint_{S} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]ds$$

hay để cho dễ nhớ,ta sử dụng công thức hình thức sau:

$$\oint_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds$$

b. Giả sử P, Q, R là các hàm xác định và liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của nó trong miền mở $B \subset R^3$; M, N là hai điểm tùy ý trong B.

Khi đó điều kiện cần và đủ để cho tích phân đường loại II:

$$\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz$$

lấy trên đường cong nối hai điểm M và N, nằm hoàn toàn trong B, không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \forall(x,y,z) \in B \qquad (1)$$

Khi đó tồn tại một hàm u(x, y, z) sao cho:

$$du = Pdx + Qdy + Rdz$$

và
$$\int_{MN} Pdx + Qdy + Rdz = u(N) - u(M)$$

Nếu điều kiện (1) thỏa mãn thì :

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

với mọi đường cong C trơn hay trơn từng khúc, đóng, nằm hoàn toàn trong B.

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1264. Áp dụng công thức Stokes tính tích phân đường:

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz$$

trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, lấy theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

Giải: Lấy S là hình tròn tâm O(0, 0, 0) bán kính a, nằm trên mặt phẳng x + y + z = 0, nói cách khác S là tiết diện hình tròn tạo thành khi cắt hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ bởi mặt phẳng x + y + z = 0. Hướng dương của S được xác định bởi vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ chọn phù hợp với hướng dương của C. Như vậy $\vec{n}$ sẽ hợp với các trục Ox, Oy, và Oz những góc nhọn.

Áp dụng công thức Stokes với P = y, Q = z, R = x, ta có:

$$I = \oint_C ydx + zdy + xdz = \iint_S -dxdy - dydz - dzdx$$

$$= -\iint_S dxdy + dydz + dzdx.$$

Do tính đối xứng của x, y và z nên

$$I = -3\iint_S dxdy = -3\iint_S \cos\gamma\, ds$$

trong đó $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, do đó:

$$I = -3\iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} ds = -\sqrt{3}\pi a^2.$$

ở đây ta chú ý rằng,diện tích của hình tròn S là πa^2.

1265. Giả sử C là một chu tuyến đóng, trơn hay trơn từng phần nằm trong mặt phẳng: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$,trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin định hướng của pháp tuyến của mặt phẳng, giới hạn một miền D có diện tích S. Tính

$$\oint_C (z\cos\beta - y\cos\gamma)\,dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,dy + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,dz$$

trong đó tích phân lấy theo hướng dương của C.

Áp dụng công thức Stokes tính các tích phân sau:

1266. $\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, trong đó C là ellipse $x^2 + y^2 = a^2$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ $(a > 0, h > 0)$ lấy theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

1267. $\oint\limits_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$, trong đó C là đường cong $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$, $(0<r<R)$, $z>0$ lấy theo chiều dương sao cho phần có diện tích bé nhất của phía ngoài hình cầu $x^2+y^2+z^2=2Rx$ được giới hạn bởi đường cong C, luôn luôn nằm về phía bên trái.

1268. $\oint\limits_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$, trong đó C là giao tuyến của mặt phẳng $x+y+z=\frac{3}{2}a$ với mặt của hình hộp $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$, lấy theo chiều ngược kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

3. Công thức Ostrogradski

Giả sử B là miền bị chặn, đo được trong R^3, được giới hạn bởi mặt S trơn hay trơn từng phần: P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của nó trong miền đóng $\overline{B}=B\cup S$. Khi đó ta có công thức Ostrogradski :

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds=\iiint\limits_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

trong đó $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ là các cosin định hướng của vectơ pháp tuyến ngoài của mặt S.

Nếu ta chọn mặt ngoài của S là hướng dương và ký hiệu là S^+ thì công thức này có dạng:

$$\iint\limits_{S^+} (Pdydz+Qdzdx+Rdxdy)=\iiint\limits_S\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

Từ công thức này cho P = x, Q = 0, R = 0, ta nhận được công thức tính thể tích V của vật thể B:

$$V = \iint_{S^+} x dydz.$$

Tương tự:

$$V = \iint_{S^+} y dzdx = \iint_{S^+} z dxdy$$

hay :

$$V = \frac{1}{3}\iint_{S^+} x dydz + y dzdx + z dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{S} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, ds.$$

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1269. Áp dụng công thức Ostrogradski tính tích phân mặt sau đây:

$$I = \iint_{S} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy,$$

trong đó S là phía ngoài của mặt biên của hình hộp B: $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a$.

Giải: Áp dụng công thức Ostrogradski với $P = x^2$, $Q = y^2$, $R = z^2$, ta nhận được :

$$I = \iint_{S} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$= 2\iiint_{B} (x + y + z)\, dxdydz$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z)\,dz$$

$$= 2\int_0^a dx \int_0^a \left[a(x+y)+\frac{a^2}{2}\right]dy$$

$$= 2\int_0^a (a^2x + a^3)\,dx = 3a^4 .$$

Áp dụng công thức Ostrogradski tính các tích phân:

1270. $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

1271. $\iint_S (x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$, trong đó S là phía ngoài của mặt : $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

1272. $\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds$, trong đó S là phần của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$, $(0 \le z \le h)$ và $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin định hướng của pháp tuyến ngoài của mặt nón.

1273. $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, trong đó tích phân lấy theo phía ngoài của mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$.

1274. Chứng minh rằng, nếu S là một mặt hai phía, kín, trơn hay trơn từng phần, không tự cắt, $\vec{e}$ là một hướng không đổi bất kỳ. Khi đó:

$$\iint_S \cos(n,e)\,ds = 0$$

trong đó $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là pháp tuyến ngoài của mặt S, cos(n, e) là cosin của góc xen giữa hai hướng $\vec{n}$ và $\vec{e}$.

§4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ MẶT VÀO LÝ THUYẾT TRƯỜNG

1. Giả sử u(x, y, z) là một hàm số (hay là một trường vô hướng) khả vi liên tục trong miền $B \subset R^3$. Ta ký hiệu gradu là vectơ:

$$\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

vectơ gradu được gọi là gradient của trường vô hướng.

Véctơ gradu tại điểm (x, y, z) hướng theo pháp tuyến của mặt mức u(x, y, z) = C tại điểm này. Nếu $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là một hướng nào đó trong không gian, thì đạo hàm của hàm u(x, y, z) tại điểm $(x, y, z) \in B$ theo hướng $\vec{e}$ là:

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \text{gradu}.e = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

Giả sử F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) là hàm véctơ (hay là một trường véctơ) khả vi liên tục trong B. Ta ký hiệu:

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\text{Rot}\,\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Như vậy $\text{div}\,\vec{F}$ là một đại lượng vô hướng, còn $\text{Rot}\,\vec{F}$ là một véctơ xác định trong B.

Ta gọi $\text{div}\,\vec{F}$ là divergent, còn $\text{Rot}\,\vec{F}$ là rota (hay là véctơ xoáy) của trường véctơ $\vec{F}$.

Ta đưa vào ký hiệu:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \text{ (toán tử vi phân Haminton)}$$

thì : $$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla.\vec{F}\ , \quad \operatorname{Rot}\vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}$$

Ngoài ra ta chú ý rằng:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0.$$

2. Thông lượng của trường véctơ

Giả sử S là mặt cong hữu hạn trơn hay trơn từng phần, nằm hoàn toàn trong miền $B \subset R^3$; $F = (P, Q, R)$ là trường véctơ xác định trong B; $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là pháp tuyến của mặt S tại điểm (x, y, z).

Ta gọi thông lượng (hay là dòng) của trường véctơ $\vec{F}(x,y,z)$ đi qua mặt S theo hướng pháp tuyến $\vec{n}$ là đại lượng:

$$J = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

$$= \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

trong đó tích phân mặt loại II lấy theo phía hướng theo pháp tuyến $\vec{n}$.

Nếu S là mặt cong kín, trơn hay trơn từng phần giới hạn vật thể V, $\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của mặt S thì

$$J = \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz.$$

3. Giả sử C = AB là cung trơn hay trơn từng khúc, $\vec{F} = (P, Q, R)$ là trường véctơ khả vi liên tục trên C. Ta đặt

$$Q = \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} \vec{F}.\vec{\tau}\,dl$$

trong đó tích phân đường loại II lấy trên cung AB từ điểm A đến điểm B, $\vec{\tau}$ là véctơ đơn vị chỉ phương của tiếp tuyến hướng từ A đến B.

Nếu $\vec{F}$ là trường lực thì Q là công sinh ra khi chất điểm chuyển động trên cung AB từ điểm A đến điểm B dưới tác động của lực $\vec{F}$; nếu $\vec{F}$ là trường vận tốc thì Q được gọi là lưu thông của trường lực F dọc theo cung AB.

Nếu C là đường cong kín và S là mặt trơn hay trơn từng mảnh có biên là C, được định hướng theo hướng pháp tuyến $\vec{n}$ sao cho khi đứng thẳng theo hướng của $\vec{n}$, chuyển động theo chiều dương của C, thấy mặt S luôn ở về phía bên trái, thì ta có:

$$Q = \oint_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S^+} \text{Rot}\,\vec{F}.\vec{n}.ds \text{ (công thức Stokes).}$$

Trong trường hợp này Q được gọi là lưu số của trường $\vec{F}$.

CÁC VÍ DỤ VÀ BÀI TẬP

1275. Tìm thông lượng của véctơ $\vec{r} = (x, y, z)$:

a) Qua mặt bên của hình nón $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le h$;

b) Qua đáy của hình nón đó.

1276. Tìm thông lượng của bán kính véctơ $\vec{r} = (x, y, z)$ qua mặt $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$.

1277. Tìm thông lượng của véctơ $\vec{F} = (x^3, y^3, z^3)$ qua mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

1278. Tính công của trường véctơ $\vec{F} = \vec{r}$ dọc theo đoạn đường xoắn $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi$.

1279. Tính công của trường véctơ $\vec{F} = \left(\frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{x}\right)$ dọc theo đoạn thẳng nối các điểm M(1, 1, 1) và N(2, 4, 8).

1280. Tính lưu số của trường véctơ $\vec{F} = (-y, x, c)$ (c – là hằng số):

a) Dọc theo đường tròn $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$;

b) Dọc theo đường tròn $(x - z)^2 + y^2 = 1,\ z = 0$.

ĐÁP SỐ VÀ LỜI GIẢI

1044. Vì hàm dưới dấu tích phân $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ liên tục theo hai biến (x, y) trong hình chữ nhật $[-1, 1] \times [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$ nên tích phân là hàm liên tục theo tham số y. Do đó ta có:

$$\lim_{y \to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \lim_{y \to 0} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx = \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1.$$

1045. Hàm $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ liên tục trong hình chữ nhật $[0, 1] \times [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$, còn các hàm $\alpha(y) = y$, $\beta(y) = 1 + y$ liên tục trên đoạn $[-\delta, \delta]$, vì vậy tích phân phụ thuộc tham số là hàm liên tục theo y trong đoạn $[-\delta, \delta]$. Do đó ta có:

$$\lim_{y \to 0} \int_{y}^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

1046. Chú ý rằng

$$f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad x > y \\ 0 & \text{nếu} \quad x = y \\ -1 & \text{nếu} \quad x < y \end{cases}$$

Với $x \in [0, 1]$, nếu $y < 0$ thì $x > y$ do đó $f(x, y) = 1$, nếu $y > 1$ thì $x < y$, do đó $f(x, y) = -1$. Từ đó ta có:

Nếu $\quad y < 0: \quad F(y) = \int_{0}^{1} 1.dx = 1$

Nếu $\quad y > 1: \quad F(y) = \int_{0}^{1} (-1)\, dx = -1$

Nếu $\quad 0 \le y \le 1,$

$$F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\,dx = \int_0^y (-1)\,dx + \int_y^1 1\,dx = -y+1-y = 1-2y$$

Từ đó suy ra F(y) là hàm liên tục với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$.

1047. Vì f(t) là hàm liên tục trên đoạn [a, b] nên tồn tại nguyên hàm F(t) trên đoạn đó.

Với mỗi h cố định, F(t + h) là nguyên hàm của hàm f(t + h), $t \in [a-h, b-h]$.

Theo công thức Newton – Leibniz, với $|h|$ đủ bé, ta có:

$$\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = F(x+h) - F(x) - F(a+h) + F(a).$$

Vì vậy:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$= f(x) - f(a).$$

1048. a) Giả sử $y \ne 0$, chẳng hạn $y > 0$. Xét hình chữ nhật $[0, 1] \times [c, d]$, sao cho $0 < c < y < d$. Trong hình chữ nhật này các điều kiện để áp dụng qui tắc Leibniz thỏa mãn. Do đó:

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{-x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Với $y < 0$ ta có kết quả tương tự.

b) Chú ý rằng: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin xy}{x} = y$, cho nên $x = 0$ không phải là điểm kỳ dị của tích phân.

Giả sử y_o là điểm tùy ý. Ta xét hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ sao cho $c < y_o < d$.

Trong hình chữ nhật $[a, b] \times [c, d]$ tích phân

$$I(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx$$

thỏa mãn các điều kiện để lấy đạo hàm theo tham số và ta có:

$$I'(y_o) = \int_{a+y_o}^{b+y_o} \cos xy_o dx + \frac{\sin(b+y_o).y_o}{b+y_o} - \frac{\sin(a+y_o).y_o}{a+y_o}$$

c) Giả sử $y \neq 0$, chẳng hạn $y > 0$. Xét hình chữ nhật $[0,1] \times [c,d]$ sao cho $0 < c < y < d$. Trong hình chữ nhật này ta có thể áp dụng được công thức Leibniz và ta có:

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int_0^1 \ln(x^2+y^2)dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2y}{x^2+y^2}dx = 2\text{arctg}\frac{1}{y}, \quad (y > 0).$$

Tương tự ta cũng cho $I'(y) = 2\text{arctg}\dfrac{1}{y}$ với $y < 0$.

Tại $y = 0$ ta không thể áp dụng qui tắc Leibniz để lấy đạo hàm của tích phân, vì hàm dưới dấu tích phân không bị chặn trong lân cận của điểm $(0, 0)$.

Trước hết với $y \neq 0$, bằng cách tính tích phân từng phần ta có:

$$I(y) = \int_0^1 \ln(x^2+y^2)dx = \ln(1+y^2) - 2 + 2y\text{arctg}\frac{1}{y}$$

Với y = 0:

$$I(0)=\int_0^1 \ln x^2dx = 2\int_0^1 \ln x dx = 2\left(x.\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x.\frac{1}{x}dx\right) = -2.$$

Ta xét :

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{I(y)-I(0)}{y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}\left[\ln(1+y^2)-2+2y\text{arctg}\frac{1}{y}+2\right]$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{y}+2\text{arctg}\frac{1}{y}\right]$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y^2)}{y^2}.y+\lim_{y\to 0^+}2.\text{arctg}\frac{1}{y}=\pi.$$

Vậy: $I'_+(0) = \pi$.

Chú ý:

$$I'_+(0)=\pi\neq\int_0^1\left[\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^2+y^2)\right]_{y=0}dx=\int_0^1\frac{2y}{x^2+y^2}\Bigg|_{y=0}dx=0.$$

Do đó không thể áp dụng công thức Leibniz tại điểm y = 0.

1049. Ta có:

$$F'(x)=\int_0^x f(y)dy+2xf(x)$$

$$F''(x)=f(x)+2f(x)+2xf'(x)=3f(x)+2xf'(x).$$

1050. Áp dụng tích phân từng phần ta nhận được:

$$F(y)=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(x^2+y^2)dx=\frac{1}{2}x\ln(x^2+y^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+y^2)-1+y\text{arctg}\frac{1}{y},\quad \text{với } y\neq 0.$$

$$F(0) = \int_0^1 \ln x\, dx = -1 .$$

Từ đó ta có :

$$F'_+(0) = \lim_{y\to 0^+} \frac{F(y)-F(0)}{y} = \lim_{y\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+y^2)}{y} + \operatorname{arctg}\frac{1}{y}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Mặt khác ta lại có :

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx = \int_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}\,dx .$$

Từ đó ta suy ra :

$$F'_+(0) = \frac{\pi}{2} \neq \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\bigg|_{y=0} dx = 0 .$$

Vậy không thể áp dụng công thức Leibniz để tính đạo hàm của F(y) tại điểm y = 0. Dễ dàng thấy rằng $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ không liên tục tại điểm (0, 0), có nghĩa là điều kiện để áp dụng qui tắc Leibniz không thỏa mãn.

1051. Đổi biến $t = x + y + z$, ta có :

$$F(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h dy \int_{x+y}^{h+x+y} f(t)\,dt,$$

$$F'(x) = \frac{1}{h^2}\int_0^h [f(h+x+y) - f(x+y)]dy$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\int_{h+x}^{2h+x} f(y)dy - \int_x^{x+h} f(y)dy\right].$$

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(2h+x) - f(h+x) - f(h+x) + f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[f(2h+x) - 2f(h+x) + f(x)\right].$$

1052. Áp dụng công thức Leibniz ta có :

$$E'(k) = -\int_0^{\pi/2} \frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi = \frac{1}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{1-k^2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$= \frac{1}{k}\left[\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Vậy:

$$E'(k) = \frac{E(k) - F(k)}{k} \tag{1}$$

Tương tự ta cũng có:

$$F'(k) = \frac{1}{k}\left[\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}d\varphi - \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$$

Chú ý đồng nhất thức:

$$\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{-3/2} =$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{1/2} - \frac{k}{1-k^2}\frac{d}{d\varphi}\left[\sin\varphi.\cos\varphi\,(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}\right]$$

ta suy ra :

$$\int_0^{\pi/2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-3/2}d\varphi = \frac{1}{1-k^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{E(k)}{1-k^2}$$

Vậy :

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k} \qquad (2)$$

Từ (1) ta có : $F(k) = E(k) - kE'(k)$.

Do đó: $F'(k) = E'(k) - E'(k) - kE''(k)$,

hay $$F'(k) = -kE''(k) \qquad (3)$$

So sánh (2) và (3) ta nhận được :

$$-k.E''(k) = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{E(k) - kE'(k)}{k}$$

Từ đó : $$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{1}{k^2}E(k)\left(\frac{1}{1-k^2} - 1\right) = 0$$

hay $$E''(k) + \frac{1}{k}E'(k) + \frac{1}{1-k^2}E(k) = 0.$$

1053. Áp dụng qui tắc Leibniz ta có :

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\varphi - x\sin\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\cos\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi.\cos(n\varphi - x\sin\varphi)(n - x\cos\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi.\cos(n\varphi - x\sin\varphi)d\varphi - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\sin^2\varphi).\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi$$

Từ đó :

$$J_n'(x) = \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi.\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi - xJ_n(x) - xJ_n''(x) \qquad (1)$$

Mặt khác ta lưu ý rằng :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi).(n - x\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d(n\varphi - x\sin\varphi) = \frac{1}{\pi}\sin(n\varphi - x\sin\varphi)\Big|_0^{\pi} = 0$$

hay là :

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi.\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Từ đó ta có :

$$\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi.\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi = nJ_n(x) \qquad (2)$$

Nhân hai vế của đẳng thức (1) với x và sử dụng đẳng thức (2) ta nhận được :

$$xJ_n'(x) = n.\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi.\cos(n\varphi - x\sin\varphi)\,d\varphi - x^2J_n(x) - x^2J_n''(x)$$

$$= n^2J_n(x) - x^2J_n(x) - x^2J_n''(x).$$

Từ đó ta suy ra :

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0$$

tức là hàm $J_n(x)$ thỏa mãn phương trình Bessel.

1054. Vì hàm dưới dấu tích phân $f(a, b, x) = a + bx - x^2$ liên tục theo a và b, và có các đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}$ là những hàm liên tục nên ta có thể áp dụng qui tắc Leibniz để tính các đạo hàm riêng của tích phân :

$$I(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2\,dx.$$

Ta có:

$$\frac{\partial I}{\partial a}=2\int_1^3(a+bx-x^2)\,dx = 2\left(2a+4b-\frac{26}{3}\right)$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = 2\int_1^3(a+bx-x^2)x\,dx = 2\left(4a+\frac{26}{3}b-20\right).$$

Để tìm cực tiểu của hàm I(a, b) ta tìm điểm dừng:

Giải hệ $\frac{\partial I}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial I}{\partial b} = 0$, ta nhận được : $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$.

Hơn nữa : $\frac{\partial^2 I}{\partial a^2} = 4$, $\frac{\partial^2 I}{\partial a\partial b} = 8$, $\frac{\partial^2 I}{\partial b^2} = \frac{52}{3}$.

Từ đó:

$$d^2I = 4da^2 + 16\,da\,db + \frac{52}{3}db^2 = 4(da+2db)^2 + \frac{4}{3}db^2 > 0.$$

Vậy tại điểm dừng $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ hàm I(a, b) nhận giá trị cực tiểu, điều đó có nghĩa là hàm tuyến tính cần tìm là : $y = 4x - \frac{11}{3}$.

1055. Ta chứng minh bằng qui nạp.

Với n = 1, đẳng thức đúng : $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$.

Giả sử đẳng thức đúng với n, ta hãy chứng minh đẳng thức đúng với n + 1.

Ký hiệu : $I_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$

Khi đó : $I_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$.

Đạo hàm hai vế đẳng thức này theo x, ta nhận được

$$I'_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x n(x-t)^{n-1} f(t)\,dt = I_n(x)$$

Từ đó lấy tích phân hai vế theo biến t_n, ta có :

$$\int_a^x I'_{n+1}(t_n)dt_n = I_{n+1}(x) - I_{n+1}(a) = \int_a^x I_n(t_n)\,dt_n\,.$$

Chú ý rằng $I_n(a) = 0$ với mọi n, ta nhận được đẳng thức :

$$I_{n+1}(x) = \int_a^x I_n(t_n)\,dt_n$$

Theo giả thiết qui nạp :

$$I_n(t_n) = \int_a^{t_n} dt_{n-1}\int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_a^{t_1} f(t)\,dt$$

Bằng cách thay $I_n(t_n)$ bởi biểu thức của nó, ta có :

$$I_{n+1}(x) = \int_a^x I_n(t_n)dt_n = \int_a^x dt_n \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-1} \ldots \int_a^{t_1} f(t)\,dt\,.$$

Điều này có nghĩa đẳng thức cần chứng minh đúng với n + 1.

1056. Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[f'(x-at) + f'(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\left[F(x+at) - F(x-at)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{2}\left[f'(x+at) - f'(x-at)\right] + \frac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left[f''(x-at) + f''(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\left[F'(x+at) - F'(x-at)\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{2}\left[f''(x+at) + f''(x-at)\right] + \frac{a}{2}\left[F'(x+at) - F'(x-at)\right].$$

Từ đó suy ra hàm u(x, t) thỏa mãn phương trình dao động của dãy $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ với điều kiện ban đầu u(x, 0) = f(x), $u'_t(x,0) = F(x)$.

1057. Đặt $f(x,a) = \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}.\frac{1}{\cos x}, \quad |a| < 1.$

Chú ý rằng :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x,a) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\frac{2a\cos x}{1-a\cos x}\right).\frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2a\cos x}{1-a\cos x}.\frac{1}{\cos x} = 2a$$

Vì thế nếu bổ sung thêm giá trị của hàm f(x, a) tại $x = \frac{\pi}{2}$ bằng cách đặt $f\left(\frac{\pi}{2}, a\right) = 2a$ thì f(x, a) là hàm liên tục trong miền $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times [-a_o, a_o]$ trong đó a_o là số bất kỳ sao cho $0 < a_o < 1$.

Hơn nữa $\frac{\partial f(x,a)}{\partial a} = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$ cũng là hàm liên tục trong hình chữ nhật nói trên. Vì vậy áp dụng công thức Leibniz ta có:

$$I'(a) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-a^2\cos^2 x} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Từ đó :

$$I(a) = \pi \arcsin a + C, \quad |a| \le a_o < 1.$$

Vì I(0) = 0, ta suy ra C = 0, và $I(a) = \pi\arcsin a$, $|a| \le a_o$. Do a_o là số dương bất kỳ trong (0, 1), nên cuối cùng ta có.

$$I(a) = \pi \arcsin a, \quad |a| < 1.$$

1058. Trước hết ta có $I(0) = \int_0^{\pi} \ln 1\, dx = 0$.

Giả sử $r \neq 0$. Ta chọn $a > 0$ sao cho $0 < |r| < a < 1$. Hàm $f(x,r) = \ln(1 - 2r\cos x + r^2)$ và đạo hàm riêng của nó

$$\frac{\partial f(x,r)}{\partial r} = \frac{-2\cos x + 2r}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

là những hàm liên tục trong hình chữ nhật $[0, \pi] \times [-a, a]$. Do vậy có thể áp dụng công thức Leibniz trong miền này. Ta có:

$$I'(r) = 2\int_0^{\pi} \frac{-\cos x + r}{1 - 2r\cos x + r^2} dx, \quad |r| \leq a < 1.$$

Dùng phép thế biến $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ta nhận được :

$$I'(r) = 4\int_0^{+\infty} \frac{r - 1 + (r+1)t^2}{(1+t^2)\left[(1-r)^2 + (1+r)^2 t^2\right]} dt, \quad |r| \leq a < 1$$

$$= \frac{2}{r}\left[\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} + (r^2 - 1)\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1-r^2) + (1+r)^2 t^2}\right]$$

$$= \frac{2}{r}\left[\operatorname{arctg} t \Big|_0^{+\infty} + \frac{r^2 - 1}{(1+r)^2} \cdot \frac{1+r}{1-r} \cdot \operatorname{arctg}\frac{1+r}{1-r} \cdot t \Big|_0^{+\infty}\right]$$

$$= \frac{2}{r}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Từ đó suy ra $I(r) = C$, $|r| \leq a < 1$.

Vì $I(0) = 0$ và $I(r)$ liên tục ta suy ra $C = 0$, hay $I(r) = 0$, $|r| \leq a < 1$.

Vậy : $\quad I(r) = 0, \ |r| < 1$.

1059. Nếu b = 0, tích phân có dạng :

$$I(a,0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\sin x)^2 dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|a|dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\, dx$$

$$= \pi \ln \frac{|a|}{2}.$$

Tương tự :

$$I(0,b) = \pi \ln \frac{|b|}{2}.$$

Giả sử $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Xét tích phân như là hàm phụ thuộc tham số a :

$$I(a,b) = J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)dx$$

Xét [c, d] là đoạn không chứa điểm a = 0 sao cho $c \leq a \leq d$. Khi đó trong hình chữ nhật $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [c, d]$ hàm

$$f(x,a) = \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x) \text{ và } \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$$

là những hàm liên tục theo hai biến (x, a). Vì thế có thể áp dụng qui tắc Leibniz để tính đạo hàm J'(a) :

$$J'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} dx$$

Đặt t = cotgx, ta được :

$$J'(a)=2a\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(a^2+b^2t^2)(1+t^2)}=\frac{2a}{b^2-a^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{b^2dt}{a^2+b^2t^2}-\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$=\frac{2a}{b^2-a^2}\left(\frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}t-\operatorname{arctg}t\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$

Nếu a.b > 0:

$$J'(a)=\frac{2a}{b^2-a^2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{a}-1\right)=\frac{\pi}{a+b}$$

Khi đó : $J(a)=\pi\ln|a+b|+C$

Nếu a.b < 0:

$$J'(a)=\frac{2a}{b^2-a^2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{b}{a}+1\right)$$

Khi đó : $J(a)=\pi\ln|a-b|+C$

Chú ý rằng nếu ab > 0 thì $|a+b|=|a|+|b|$, nếu ab < 0 thì $|a-b|=|b-a|=|a|+|b|$.

Vì vậy trong cả hai trường hợp ta đều có :

$$I(a,b)=J(a)=\pi\ln\left(|a|+|b|\right)+C \qquad (*)$$

Nếu a = b, ta có :

$$I(b,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln b^2dx=\pi\ln|b|.$$

Mặt khác theo công thức (*) ta lại có :

$$I(b,b)=\pi\ln 2|b|=\pi\ln 2+\pi\ln|b|+C.$$

Từ đó suy ra C = -πln2.

Vậy :

$$I(a,b) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}, \; a^2 + b^2 \neq 0 .$$

Chú ý: Từ những tính toán trên đây ta thấy rằng kết quả này vẫn đúng cả trong trường hợp a = 0 hoặc b = 0.

1060. a) Ta có thể xem a < b mà không ảnh hưởng đến kết quả. Trước hết ta chú ý rằng :

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy, \quad 0 < a < b$$

Vì vậy ta có thể viết :

$$I_1(a,b) = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right).\frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dy .$$

Ký hiệu : $\quad f(x,y) = x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right).$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) = 0$, nên nếu ta xác định thêm giá trị f(0, y) = 0 thì hàm f(x,y) liên tục trong hình chữ nhật, [0, 1] × [a, b]. Do đó ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân.

Ta có :

$$I_1(a,b) = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right) dx$$

Đổi biến $x = e^{-t}$. Khi đó

$$I_1(a,b) = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(1+y)} \sin t\, dt$$

trong đó

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(1+y)}\sin t\,dt = \frac{-(1+y)\sin t - \cos t}{1+(1+y)^2}\,e^{-(1+y)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+(1+y)^2}$$

Vì thế :

$$I_1(a,b) = \int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2} = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1)$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(1+a)(1+b)}.$$

b) Tương tự ta có :

$$I_2(a,b) = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right).\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = \int_0^1 dx\int_a^b x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy$$

$$= \int_a^b dy\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx.$$

Đổi biến $x = e^{-t}$, ta được :

$$I_2(a,b) = \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-t(1+y)}\cos t\,dt = \int_a^b \frac{(1+y)dy}{1+(1+y)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

1061. Ta có :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2}$$

Hàm $\dfrac{1}{1+x^2y^2}$ liên tục trong hình vuông [0, 1] × [0, 1], còn hàm $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ khả tích (tuyệt đối) theo nghĩa suy rộng trên [0,1]. Vì vậy ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân (4. $1).

Ta có :

$$I = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Dùng phép thế biến x = sint. Khi đó :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\, dt}{(1+y^2\sin^2 t).\cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cot gt}{1+y^2+\cot g^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+y^2+u^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1+y^2}} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Từ đó :

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

1069. Vì trong biểu thức $f(x) = \dfrac{x\cos x}{x^p + x^q}$ vai trò của p và q như nhau nên ta có thể giả thiết $p \geq q$ (trường hợp $p < q$ được xét tương tự).

Ta viết tích phân đã cho dưới dạng :

$$I = \int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p + x^q}\, dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}} \frac{1}{(1+x^{q-p})}\, dx.$$

Ta xét tích phân $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{p-1}}\, dx.$

Ta có với mọi A > π thì : $\left|\int\limits_{\pi}^{A}\cos x\,dx\right| = |\sin A| \le 1$. Còn nếu p > 1 thì hàm $\frac{1}{x^{p-1}}$ đơn điệu giảm đến 0 khi $x \to +\infty$. Do đó theo dấu hiệu Dirichlet thì tích phân : $\int\limits_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}dx$ hội tụ với p > 1.

Mặt khác với p ≥ q thì hàm $\frac{1}{1+x^{q-p}}$ dx đơn điệu và bị chặn với x > π. Vì vậy theo dấu hiệu Abel, tích phân đã cho :

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}}\,\frac{dx}{1+x^{q-p}}$$

hội tụ.

Xét tương tự, nếu q > p và q > 1 thì tích phân đã cho cũng hội tụ.

Vậy nếu max (p, q) > 1 thì tích phân hội tụ.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu p ≤ 1 và q ≤ 1 thì tích phân phân kỳ.

Trước hết ta chú ý rằng tích phân đã cho hội tụ hoặc phân kỳ cùng với tích phân :

$$\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{p-1}+x^{q-1}}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\frac{\pi}{2}(2n+1)}^{\frac{\pi}{2}(2n+3)}\frac{\cos x\,dx}{x^{p-1}+x^{q-1}}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\xi_n^{p-1}+\xi_n^{q-1}}$$

trong đó $\frac{\pi}{2}(2n+1) < \xi_n < \frac{\pi}{2}(2n+3)$, (ở đây ta đã áp dụng định lý trung bình suy rộng).

Vì $p \le 1$ và $q \le 1$ nên chuỗi ở vế phải phân kỳ do số hạng tổng quát của chuỗi không dần về không.

Vậy nếu $p \le 1$ và $q \le 1$ thì tích phân phân kỳ.

1070. Với $y = 0$: $I(0) = 0$.

Với $y > 0$, $\quad I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy}\,dx = -e^{-xy}\Big|_0^{+\infty} = 1$

Như vậy, với $y \ge 0$, tích phân $I(y)$ hội tụ.

Để khảo sát tính hội tụ đều của tích phân, ta xét tích phân

$$\int_A^{+\infty} y e^{-xy}\,dx$$

với $A > 0$ bất kỳ.

Nếu $y = 0$ thì tích phân này bằng 0 với mọi $A > 0$.

Nếu $y > 0$, ta dùng phép thế biến $t = xy$.

Khi đó :

$$\int_A^{+\infty} y e^{-xy}\,dx = \int_{Ay}^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-Ay}$$

a) Giả sử $[c, d]$ là đoạn bất kỳ : $0 < c < d$.

Với $y \in [c, d]$, ta có : $e^{-Ay} < e^{-Ac}$. Vì thế với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước để cho $e^{-Ay} < \varepsilon$, chỉ cần chọn A sao cho $e^{-Ac} < \varepsilon$ hay

$$A > \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{c}.$$

Như vậy, có thể lấy $A_o = \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{c}$, khi đó $\forall A > A_o$

$$e^{-Ay} < e^{-Ac} < \varepsilon \quad \forall y \in [c, d], 0 < c < d.$$

Theo định nghĩa, tích phân I(y) hội tụ đều trên [c, d].

b) Chú ý rằng với mọi A > 0, $\lim\limits_{y\to 0} e^{-Ay} = 1$. Vì thế tồn tại ε_o, với $0 < \varepsilon_o < 1$, khi đó để với $A_o > 0$ bất kỳ có thể chọn y_o đủ bé sao cho $e^{-Ay_0} > \varepsilon_o$. Điều đó có nghĩa là :

$$\exists \varepsilon_o > 0, (\varepsilon < 1)\ \forall A\ \exists A_o > A\ \exists y_o \in [c, d]$$

sao cho :

$$\int_{A_o}^{+\infty} y_o e^{-xy} dx = e^{-A_o y_o} > \varepsilon_o > 0.$$

Vậy tích phân I(y) hội tụ không đều trong mọi đoạn [0, d], d > 0.

1071. Với mọi $t \ge t_o > 0$, ta có :

$$\left| e^{-tx} x^a \cos x \right| \le e^{-t_o x} x^a$$

Vì tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-t_o x} x^a dx$ hội tụ, nên theo dấu hiệu Weierstrass, tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-tx} x^a \cos dx$ hội tụ đều trong miền $t \ge t_o > 0$.

1072. Với mọi $A_o > 1$ ta có :

$$\int_{A_o}^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx = e^{-\frac{n}{2x^2}} \Bigg|_{A_o}^{+\infty} = 1 - e^{-\frac{n}{2A_o^2}} \to 1 \text{ khi } n \to \infty$$

Vì thế với $0 < \varepsilon_o < 1$, tìm được n_o đủ lớn sao cho :

$$\int_{A_0}^{+\infty} \frac{n_o}{x^3} e^{-\frac{n_o}{2x^2}} dx > \varepsilon_o .$$

Như vậy $\exists \varepsilon_o > 0$ $(\varepsilon_o < 1)$ $\forall A > 1$ $\exists A_o > A$ $\exists n_o$ sao cho :

$$\int_{A_0}^{+\infty} \frac{n_o}{x^3} e^{-\frac{n_o}{2x^2}} dx > \varepsilon_o ,$$

có nghĩa là tích phân đã cho không hội tụ đều.

1073. Tích phân đã cho có thể viết dưới dạng :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}.\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x}{x} dx$$

Giả sử $[\alpha, \beta]$ là đoạn bất kỳ không chứa các điểm $a = \pm 1$. Theo bài tập 1060, các tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a+1)x}{x} dx$ và $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(a-1)x}{x} dx$ hội tụ đều trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Do đó tích phân đã cho hội tụ đều trên đoạn $[\alpha, \beta]$ bất kỳ không chứa các điểm $a = \pm 1$.

1074. a) Với mọi $x \in (0, 1]$, ta có :

$$\left|\frac{\sin x}{x^y}\right| \le \frac{1}{x^{y_o - 1}} \quad \forall y: \ y \le y_o < 2 .$$

Vì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{x^{y_o-1}} dx$, với $y_o < 2$, hội tụ nên theo dấu hiệu Weierstrass tích phân $I(y)$ hội tụ đều trong miền $y \le y_o < 2$.

b) Vì $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nên tồn tại $\eta_o > 1$ sao cho với mọi x : $0 < x < \eta_o$: $\frac{\sin x}{x} \ge \frac{1}{2}$. Khi đó $\forall \eta' : 0 < \eta' < \eta_o$ ta có :

$$\int_0^{\eta'} \frac{\sin x}{x^y}\,dx \geq \frac{1}{2}\int_0^{\eta'} \frac{dx}{x^{y-1}} = \frac{1}{2(2-y)}\,\eta'^{(2-y)} \to +\infty$$

khi $y \to 2 - 0$.

Từ đó ta suy ra rằng :

$\exists \varepsilon_o > 0\ \forall \eta\ \exists \eta' < \eta$ (có thể chọn $0 < \eta' < \eta_o$). $\exists y_o \in (2 - \delta, 2)$ ($\delta > 0$) sao cho :

$$\int_0^{\eta'} \frac{\sin x}{x}\,dx > \varepsilon_o > 0.$$

Vậy tích phân I(y) không hội tụ đều trong miền $y \in (-\infty, 2)$.

1075. Ta chú ý rằng :

Với $0 < x < 1 : \left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right)\sqrt{\ln\frac{1}{x}} < \frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}$

Khi $x \to 1$, ta có :

$$\frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\left(1+\frac{1-x}{x}\right)} \sim \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/2} \sim \frac{1}{(1-x)^{1/2}}.$$

Mặt khác :

$$\lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x\to+0} x^{1/2}(-\ln x)^{1/2} = 0.$$

Vì các tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ và $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{1/2}}$ đều hội tụ nên tích phân :

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-x}\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx$$

hội tụ. Vậy theo dấu hiệu Weierstrass tích phân :

$$I(n) = \int_0^1 \left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right)\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx \quad \text{hội tụ đều với mọi n.}$$

1076. Ta viết tích phân dưới dạng :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx = \int_0^1 e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx$$

Xét tích phân thứ nhất. Ta có :

$$\left|\cancel{e^{-xy}}\frac{\cos x}{x^a}\right| \le \frac{1}{x^a},\ \ \forall x \in (0,1),\ \ y \ge 0$$

với $0 < a < 1$ thì $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$ hội tụ. Do đó theo dấu hiệu Weierstrass,

tích phân

$$\int_0^1 e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx,\ \ 0 < a < 1$$

hội tụ đều trong miền $y > 0$.

Đối với tích phân thứ hai, ta nhận thấy :

$\left|e^{-xy}\right| \le 1 \ \ \forall y \ge 0$ và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,dx \ (0 < a < 1)$

hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet. Vì thế tích phân :

$$\int_1^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}\,dx,\ \ 0 < a < 1$$

hội tụ đều trong miền $y \ge 0$.

Vậy tích phân $\int_1^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^a}dx,\ 0 < a < 1$, hội tụ đều trong miền $y \geq 0$.

1077. Ta viết tích phân I(y) dưới dạng :

$$\int_0^{+\infty} t^y f(t)\,dt = \int_0^1 t^y f(t)\,dt + \int_1^{+\infty} t^y f(t)\,dt,\quad y \in [a,b].$$

Xét tích phân thứ nhất. Ta có :

$$\int_0^1 t^y f(t)\,dt = \int_0^1 t^{y-a} t^a f(t)\,dt\ .$$

Theo giả thiết tích phân $\int_0^1 t^a (f(t)$ hội tụ, còn hàm t^{y-a} với $y \geq a$ đơn điệu và $\left|t^{y-a}\right| \leq 1\ \forall t \in [0,1],\ y \geq a$. Vì thế tích phân

$$\int_0^1 t^y f(t)\,dt$$

hội tụ đều đối với $y \geq a$.

Tương tự như vậy, tích phân $\int_1^{+\infty} t^y f(t)\,dt$ hội tụ đều đối với $y \leq b$.

Vậy tích phân $\int_1^{+\infty} t^y f(t)\,dt$ hội tụ đều với $y \in [a, b]$.

1078. Với mọi $A \geq 1$ ta có :

$$\left|\int_1^A \cos xy\,dx\right| = \left|\frac{\sin Ay}{y}\right| \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y_o},\ \forall y \geq y_o > 0$$

Còn hàm $\frac{1}{x^a}$, $0 < a < 1$, đơn điệu giảm, tiến đến 0 khi $x \to +\infty$. Do đó tích phân

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^a} dx,\ 0 < a < 1$$

hội tụ đều đối với y trong miền $y \ge y_o > 0$.

Mặt khác bằng phép đổi biến $xy = t$ với $y > 0$ ta có :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos xy}{x^a} dx = y^{a-1} \int_{Ay}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Ta chú ý rằng tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet. Đặt : $I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$.

Khi đó : với $\varepsilon_o = 1$ với mọi $A > 1$, chọn $A_o > A$, đủ lớn sao cho $A_o^{1-a} |I| \ge \varepsilon_o = 1$ và chọn $y_o = A_o^{-1}$, ta có :

$$\left| \int_{A_o}^{+\infty} \frac{\cos xy_o}{x^a} dx \right| = y_o^{a-1} \left| \int_{A_o y_o}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right| = A_o^{1-a} |I| \ge \varepsilon_o.$$

Vậy tích phân I(y) không hội tụ đều đối với y trong miền $y > 0$.

1079. Với $A > 0$ bất kỳ ta có :

$$\left| \int_0^A \sin\beta\, dx \right| = \left| \frac{1 - \cos A\beta}{\beta} \right| \le \frac{2}{\beta_o}\ \forall \beta \ge \beta_o > 0.$$

Mặt khác hàm $\frac{x}{\alpha^2 + x^2}$, (không chứa tham số β), đơn điệu theo x (với $x \ge \alpha$) và tiến dần về 0 khi $x \to +\infty$. Vì thế tích phân

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, \quad (\alpha, \beta > 0)$$

hội tụ đều đối với β trong miền $\beta \geq \beta_o > 0$.

1080. Trước hết ta thấy rằng với $a > 1$ thì tích phân

$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^a}$ hội tụ. Mặt khác với $A > 1$ ta có :

$$\int_A^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^a} > \frac{1}{2} \int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{2} . \frac{A^{1-a}}{a - 1} \to +\infty$$

khi $a \to 1 + 0$.

Vì thế với $\varepsilon_o > 0$, với bất kỳ $A > 1$, luôn luôn tìm được $A_o > A$ và a_o khá gần 1 sao cho

$$\left| \int_{A_o}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{a_o}} \right| > \frac{1}{2} \frac{A_o^{1-a}}{a_o - 1} \geq \varepsilon_o > 0 .$$

Vậy tích phân đã cho hội tụ không đều đối với a trong miền $a > 1$.

1081. Với $x \geq e$ ta có :

$$\frac{\ln^\alpha x}{x \sqrt{x}} \leq \frac{\ln^{10} x}{x \sqrt{x}} = \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} . \frac{1}{x \sqrt[4]{x}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 10.$$

Vì hàm $\frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}}$ liên tục với $x \geq 1$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} = 0$ nên tồn tại số $M > 0$ sao cho :

$$\left| \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}} \right| \leq M, \ \forall x \geq 1 .$$

Mặt khác vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}$ hội tụ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại số A_o đủ lớn sao cho

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}}\right| \le \frac{\varepsilon}{M},\ \forall A > A_o$$

Khi đó : $\forall A > A_o$

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x\sqrt{x}}dx\right| \le \int_A^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{\sqrt[4]{x}}.\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}dx \le M\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[4]{x}} < M.\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon .$$

Vậy : $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_o > 1\ \forall A > A_o$

$$\left|\int_A^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x\sqrt{x}}dx\right| \le \int_A^{+\infty} \frac{\ln^{10} x}{x\sqrt{x}}dx < \varepsilon,\ 0 \le \alpha \le 10 .$$

Theo định nghĩa, tích phân đã cho hội tụ đều theo α : $0 \le \alpha \le 10$.

1082. Trước hết ta chú ý rằng tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ hội tụ (vì với t đủ lớn thì $e^{-t^2} < \frac{1}{t^2}$ và $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$, $a > 0$, hội tụ). Từ đó, nhờ phép đổi biến : $\sqrt{y}\,x = t$, ta có :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{y}\,e^{-yx^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \text{ hội tụ với mọi } y \ge 0.$$

Với B > 0 bất kỳ, ta xét tích phân :

$$\int_B^{+\infty} \sqrt{y}\,e^{-yx^2}dx = \int_{B\sqrt{y}}^{+\infty} e^{-t^2}dt .$$

Lấy $\varepsilon_o > 0$ sao cho $\varepsilon_o < \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$, khi đó với mọi $B > 0$, chọn $B_o > B$ và $y_o = \dfrac{1}{B_o^2}$ thì

$$\int\limits_{B_o}^{+\infty} \sqrt{y_o}\, e^{-y_o x^2} dx = \int\limits_{B_o\sqrt{y_o}}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int\limits_1^{+\infty} e^{-t^2}dt > \varepsilon_o > 0.$$

Theo định nghĩa, tích phân đã cho hội tụ không đều theo y trong khoảng $y \geq 0$.

1083. a) Đặt $m = \max\left(|a|, |b|\right)$. Khi đó

$$e^{-(x-y)^2} \leq e^{-(x-m)^2} \text{ nếu } x \geq 0 \text{ và } y \in [a,b]$$

$$e^{-(x-y)^2} \leq e^{-(x+m)^2} \text{ nếu } x < 0 \text{ và } y \in [a,b]$$

Vì các tích phân $\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x-m)^2}dx$ và $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-(x+m)^2}dx$ hội tụ nên với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại số $A_o > 0$ sao cho với mọi $A > A_o$ và với mọi $A' < -A_o$ ta có :

$$\int\limits_A^{+\infty} e^{-(x-m)^2}dx < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } \int\limits_{-\infty}^{A'} e^{-(x+m)^2}dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Từ đó $\forall A > A_o$, $\forall A' < -A_o$ thì :

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx - \int\limits_{A'}^{A} e^{-(x-y)^2}dx \right| = \int\limits_{-\infty}^{A'} e^{-(x-y)^2}dx + \int\limits_A^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{A'} e^{-(x+m)^2}dx + \int\limits_A^{+\infty} e^{-(x-m)^2}dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall y \in [a, b].$$

Theo định nghĩa, tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx$ hội tụ đều theo $y \in [a, b]$.

b) Đổi biến $x - y = t$, ta có :

$$\int_{-\infty}^{A'} e^{-(x-y)^2}dx + \int_{A}^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx = \int_{-\infty}^{A'-y} e^{-t^2}dt + \int_{A-y}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

Chọn $\varepsilon_o > 0$ sao cho $\varepsilon_o < \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, khi đó với mọi A, A', lấy $y_o = A$ (hoặc $y_o = A'$) ta sẽ có :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y_o)^2}dx - \int_{A'}^{A} e^{-(x-y_o)^2}dx\right| = \int_{-\infty}^{A'} e^{-(x-y_o)^2}dx + \int_{A}^{+\infty} e^{-(x-y_o)^2}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{A'-y_o} e^{-t^2}dt + \int_{A-y_o}^{+\infty} e^{-t^2}dt > \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt > \varepsilon_o.$$

Vậy tích phân hội tụ không đều trong khoảng $(-\infty, +\infty)$.

1084. Đặt $t = x^2$ ta nhận được :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t\, dt}{2(1+t^{\alpha/2})\sqrt{t}},$$

trong đó tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet, còn hàm $\frac{1}{2(1+t^{\alpha/2})}$ đơn điệu và bị chặn :

$$\left|\frac{1}{2(1+t^{\alpha/2})}\right| \le \frac{1}{2} \quad \forall t \ge 0,\ \alpha \ge 0.$$

Vì thế tích phân đã cho hội tụ đều với $\alpha \ge 0$.

1085. Ta có :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x\, dy = e^{-x^2} \sin x \int_0^{+\infty} e^{-x^2y^2}dy$$

Nếu $x = 0$ thì $I(0) = 0$.

Nếu x > 0, đặt u = xy, khi đó :

$$I(x) = e^{-x^2}\frac{\sin x}{x}\int_0^{-\infty} e^{-u^2}du$$

Nếu x < 0, đặt u = -xy, khi đó :

$$I(x) = -e^{-x^2}\frac{\sin x}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

Ký hiệu $C = \int_0^{-\infty} e^{-u^2}du$, $C > 0$.

Như vậy :

$$I(x) = \begin{cases} C.e^{-x^2}\dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu} \quad x > 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \\ -C.e^{-x^2}\dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu} \quad x < 0 \end{cases}$$

Do đó : $\lim\limits_{x\to 0+} I(x) = C > 0$, $\lim\limits_{x\to 0-} I(x) = -C < 0$. Từ đó suy ra I(0) là hàm gián đoạn tại điểm x = 0.

Mặt khác ta chú ý rằng hàm dưới dấu tích phân

$$f(x,y) = e^{-x^2(1+y^2)}\sin x, \ -\infty < x < +\infty, \ y \geq 0$$

là hàm liên tục theo hai biến (x, y) trong miền đang xét. Vì thế tích phân I(x) đã cho hội tụ không đều đối với biến $x \in (-\infty, +\infty)$.

1086. Đặt $x = e^{-t}$, $(t > 0)$, ta có :

$$I(p) = \int_0^1 x^{p-1}\ln^q\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^{+\infty} t^q.e^{-pt}dt$$

a) Với mọi $p \geq p_o > 0$, $t^q e^{-pt} \leq t^q e^{-p_o t}$. hơn nữa ta có : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{q+2}e^{-p_o t} = 0$ nên tồn tại số $t_o > 0$ sao cho $\forall t > t_o : t^q e^{-p_o t} < \dfrac{1}{t^2}$.

Từ đó do $\int_{1}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ hội tụ, theo dấu hiệu so sánh, ta suy ra tích phân $\int_{1}^{+\infty}t^q e^{-p_o t}dt$ hội tụ.

Mặt khác khi $t \to +0$ thì

$$t^q e^{-p_o t} \sim \frac{1}{t^{-q}}$$

Với $q > -1$, tức là $-q < 1$, tích phân $\int_{0}^{1}\frac{dt}{t^{-q}}$ hội tụ, theo dấu hiệu so sánh ta suy ra tích phân $\int_{0}^{1}t^q e^{-p_o t}dt$ hội tụ. Vậy tích phân

$$\int_{0}^{+\infty}t^q e^{-p_o t}dt = \int_{0}^{1}t^q e^{-p_o t}dt + \int_{1}^{+\infty}t^q e^{-p_o t}dt$$

hội tụ.

Áp dụng dấu hiệu Weierstrass ta suy ra tích phân I(p) hội tụ đều theo p trong miền $p \geq p_o > 0$.

b) Cho $A > 0$ bất kỳ. Dùng phép thế biến $u = pt$ ta có :

$$\int_{A}^{+\infty}t^q e^{-pt}dt = \frac{1}{p^{q+1}}\int_{Ap}^{+\infty}u^q e^{-u}du\ .$$

Do tích phân $\int_{0}^{+\infty}u^q e^{-u}du$ hội tụ và $q + 1 > 0$ nên :

$$\lim_{p\to+0}\int_{A}^{+\infty}t^q e^{-pt}dt = \lim_{p\to+0}\frac{1}{p^{q+1}}\int_{Ap}^{+\infty}u^q e^{-u}du = +\infty$$

Từ đó suy ra với $\varepsilon_o > 0$ cho trước và với $A > 0$ tùy ý luôn luôn tìm được $p > 0$ đủ bé sao cho :

$$\int_A^{+\infty} t^q e^{-pt} dt = \frac{1}{p^{q+1}} \int_{Ap}^{+\infty} u^q e^{-u} du > \varepsilon_o > 0 .$$

Vậy tích phân đã cho không hội tụ đều trong miền $p > 0$.

1087. Tích phân $I(y) = \int_0^2 \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx$, $|y| < \frac{1}{2}$, có ba điểm kỳ dị là $x = 0$, $x = 1$ và $x = 2$.

Ta viết tích phân đã cho dưới dạng :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx + \int_1^2 \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx = I_1(t) + I_2(y)$$

a) Với $0 < x < 1$ ta có :

$$\left| \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \right| = \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \le \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}, |y| < \frac{1}{2}$$

Khi $x \to +0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{4}.\sqrt{x}}$$

Khi $x \to 1 - 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Hơn nữa các tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{4}.\sqrt{x}}$ và $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ đều hội tụ.

Do đó tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}}$ hội tụ.

Từ đó áp dụng dấu hiệu Weierstrass ta suy ra tích phân $I_1(y) = \int_0^1 \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}dx$ hội tụ đều trong miền $|y| < \frac{1}{2}$.

b) Với $1 < x < 2$ ta có :

$$\left|\frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\right| \le \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}},\ |y| \le \frac{1}{2}$$

Khi $x \to 1 + 0$:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

Khi $x \to 2 - 0$:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$$

Hơn nữa các tích phân $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ và $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ hội tụ. Do đó tích phân $\int_1^2 \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}dx$ hội tụ.

Từ đó áp dụng dấu hiệu Weierstrass ta suy ra tích phân $I_2(y) = \int_1^2 \frac{x^y}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}dx$ hội tụ đều trong miền $|y| < \frac{1}{2}$.

Vậy tích phân $I(y) = I_1(y) + I_2(y)$ hội tụ đều trong miền $|y| < \frac{1}{2}$.

1088. Để chứng minh tích phân $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx$,

$0 \le \alpha < 1$ hội tụ đều, ta phải chứng minh rằng :

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\eta, \eta' > 0: 0 < \eta < \delta, 0 < \eta' < \delta$ sao cho

$$\left|\int_{\alpha-\eta'}^{\alpha+\eta} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx\right| < \varepsilon,\ \forall\alpha \in [0, 1]$$

Trước hết ta có ước lượng :

Với mọi $\eta, \eta' > 0$:

$$\left|\int_{\alpha-\eta'}^{\alpha+\eta} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx\right| \le \int_{\alpha-\eta'}^{\alpha+\eta} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}$$

$$= \int_{\alpha-\eta'}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}} + \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}} = 2(\sqrt{\eta'} + \sqrt{\eta}).$$

Cho trước $\varepsilon > 0$, chọn $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{16}$, khi đó với $0<\eta'< \delta = \frac{\varepsilon^2}{16}$

$0 < \eta < \delta = \frac{\varepsilon^2}{16}$ thì

$$= \left|\int_{\alpha-\eta'}^{\alpha+\eta} \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx\right| \le 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon,\ \forall\alpha \in [0, 1]$$

Vậy tích phân $I(\alpha)$ hội tụ đều theo α trong miền $0 \le \alpha \le 1$.

1089. Dùng phép thế biến $x - y = u$ ta nhận được :

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx = \int_{-y}^{+\infty} e^{-u^2}du = \int_{-y}^{0} e^{-u^2}du + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$$

$$= \int_0^{y} e^{-u^2}du + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Vì hàm e^{-u^2} liên tục theo biến u nên tích phân $\int_0^y e^{-u^2}du$ là hàm liên tục theo cận trên, còn tích phân $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$ là hằng số.

Vậy nên I(y) là hàm liên tục theo $y \in (-\infty, +\infty)$.

1090. Ta có $F(\pm 1) = 0$.

Nếu $a \neq \pm 1$,ta đặt $t = (1 - a^2)x$. Khi đó :

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} \text{ nếu } |a| < 1$$

và
$$F(a) = \int_0^{-\infty} \frac{\sin t}{t}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du = -\frac{\pi}{2} \text{ nếu } |a| > 1.$$

Như vậy hàm F(a) gián đoạn tại các điểm $a = \pm 1$.

1091. Trước hết ta có $F(0) = 0$.

Với $y \neq 0$, đổi biến $xy^2 = u$, ta được :

$$F(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy^2}dx = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} e^{-u}du = -\frac{1}{y}e^{-u}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y}$$

Vậy :

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \quad y = 0 \\ \dfrac{1}{y} & \text{nếu } \quad y \neq 0 \end{cases}$$

do đó F(y) liên tục với mọi $y \neq 0$, gián đoạn tại điểm $y = 0$.

1092. Tích phân F(x) có hai điểm kỳ dị $x = 0$ và $x = \pi$. Ta viết tích phân F(y) dưới dạng :

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}dy + \int_1^{\pi-1} \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}dx + \int_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}dx$$

$$= F_1(y) + F_2(y) + F_3(y).$$

Cho trước y_o tùy ý trong khoảng (0, 2): $0 < y_o < 2$ chọn a sao cho: $0 < a < y_o < 2 - a$.

Xét hàm $F_1(y) = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y} dx$

Ta có :

$$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}\right| \le \frac{x}{x^y(\pi - x)^y} \le \frac{1}{x^{1-a}}, \quad \forall y \in [a, 2-a], x \in (0,1)$$

Với a > 0, tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^{1-a}} dx$ hội tụ, do đó tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y} dx$ hội tụ đều $\forall y \in [a, 2-a]$ theo dấu hiệu Weierstrass. Hơn nữa hàm $f(x, y) = \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}$ liên tục theo $(x, y) \in (0,1] \times [a, 2-a]$. Do đó $F_1(y)$ là hàm liên tục trong đoạn [a, 2 – a]. Vì $y_o \in [a, 2-a]$ nên $F_1(y)$ liên tục tại y_o.

Xét hàm $F_2(y) = \int\limits_1^{\pi-1} \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y} dx$

Vì hàm $f(x, y) = \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}$ liên tục trong hình chữ nhật $[1, \pi - 1] \times [a, 2-a]$, nên $F_2(y)$ là hàm liên tục theo $y \in [a, 2-a]$, do đó $F_2(y)$ liên tục tại y_o.

Xét hàm $F_3(y) = \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y} dx$

Ta có :

$$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}\right| = \left|\frac{\sin(\pi - x)}{x^y(\pi - x)^y}\right| \le \frac{1}{(\pi - x)^{1-a}},$$

với mọi $x \in (\pi - 1, \pi)$, mọi $y \in [a, 2 - a]$.

Với a > 0, tích phân $\int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{dx}{(\pi - x)^{1-a}} dx$ hội tụ, nên tích phân

$F_3(y) = \int\limits_{\pi-1}^{\pi} \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y} dx$ hội tụ đều theo dấu hiệu Weierstrass trên đoạn [a, 2 – a]. Hơn nữa hàm $f(x,y) = \frac{\sin x}{x^y(\pi - x)^y}$ liên tục theo $(x,y) \in [\pi - 1, \pi] \times [a, 2 - a]$, do đó $F_3(y)$ là hàm liên tục theo $y \in [a, 2 - a]$. Vì $y_o \in [a, 2 - a]$ nên $F_3(y)$ liên tục tại y_o.

Cuối cùng hàm $F(y) = F_1(y) + F_2(y) + F_3(y)$ liên tục tại điểm y_o, và do y_o là điểm tùy ý trong khoảng (0, 2) nên từ đó ta suy ra F(y) liên tục trong khoảng (0, 2).

1093. Ký hiệu $f(x,y) = e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x}$, (k > 0)

Đạo hàm hàm dưới dấu tích phân theo α, ta có :

$$\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} = e^{-kx} \cos \alpha x$$

Vì $\left| e^{-kx} \cos \alpha x \right| \le e^{-kx}$, $\forall x \ge 0$, $\forall \alpha$ và $\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} dx$, (k > 0) hội tụ nên tích phân $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x} dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x \, dx$ hội tụ đều đối với α, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Do đó ta có thể lấy đạo hàm dưới dấu tích phân

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial x} dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} \cos \alpha x \, dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$$

Từ đó :

$$I(\alpha) = \int \frac{k}{\alpha^2 + k^2} d\alpha = \text{arctg} \frac{\alpha}{k} + C$$

Mặt khác rõ ràng I(0) = 0, nên ta suy ra : C = 0.

Vậy : $$I = \text{arctg}\,\frac{\alpha}{k}.$$

Nhận xét : Vì $\left|e^{-kx}\right| \le 1$ với k > 0 và mọi x ≥ 0 và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx$ hội tụ, nên tích phân $\int_1^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ hội tụ đều đối với k ≥ 0. Vì thế tích phân $I(k) = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ là hàm liên tục theo k ≥ 0. Do đó ta có :

$$I_o = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx = \lim_{k\to+0} \text{arctg}\,\frac{\alpha}{k} = \text{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

(với α > 0).

Thay α = 1, ta nhận được tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

1094. Ký hiệu $f(x,\alpha) = \frac{\sin\alpha x.\sin\beta x}{x^2}e^{-kx}$, k > 0.

Ta thấy $\lim_{x\to+0} f(x,\alpha) = 0$ nên tích phân đã cho chỉ có điểm kỳ dị x = +∞. Mặt khác ta có

$$\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right| = e^{-kx}\left|\frac{\cos\alpha x.\sin\beta x}{x}\right| \le |\beta|.e^{-kx},\ x > 0$$

Vì $\int_0^{+\infty} e^{-kx}dx$, k > 0, hội tụ nên tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\cos\alpha x.\sin\beta x}{x}dx$$

hội tụ đều với mọi $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Vì vậy ta có thể đạo hàm dưới dấu tích phân

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\beta x.\cos\alpha x}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x - \sin(\alpha-\beta)x}{x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}dx.$$

Áp dụng kết quả bài tập 1093, ta có :

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}\right)$$

Từ đó lấy tích phân theo α ta nhận được :

$$I = \frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{k}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2} + C$$

Cho $\alpha = 0$, vì $I(0) = 0$ ta suy ra $C = 0$.

Vậy :

$$I = \frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{k}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k} + \frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}.$$

1095. Bằng cách đưa vào tham số α, ta xét tích phân

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\,dt, \quad (\alpha > 0).$$

Đặt $\qquad f(t,\alpha) = \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t$

Khi đó $\left|\dfrac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}\right| = \left|e^{-\alpha t}\cos t\right| \le e^{-\alpha t} \le e^{-at}$

$$(\forall\alpha \ge a > 0,\ \forall t > 0)$$

Vì $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$, $a > 0$, hội tụ, nên tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial \alpha} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos t\, dt$$

hội tụ đều theo α, trong miền $\alpha \geq a > 0$.

Vì vậy có thể đạo hàm dưới dấu tích phân

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos t\, dt = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$

Lấy tích phân theo α, ta nhận được :

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\ln(1+\alpha^2) + C$$

Mặt khác ta có :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\, dt = \int_0^{1} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t dt + \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\, dt$$

Chú ý rằng $\lim\limits_{t\to+0} f(t,\alpha) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t = \alpha$, nên tích phân

$I_1(\alpha) = \int_0^{t} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\, dt$ là hàm liên tục theo α, vì hàm f(t, α) sau khi bổ sung giá trị α tại t = 0, là hàm liên tục với $t \in [0, 1]$, và $0 \leq \alpha \leq \alpha_o$.

Đối với tích phân thứ hai, ta thấy

$$\left|1-e^{-\alpha t}\right| \leq 1 \ \forall \alpha \geq 0, \ \ \forall t > 0$$

và tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ hội tụ. Do đó tích phân $I_2(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t}\cos t\, dt$ hội tụ đều theo α, α > 0. Vì thế $I_2(\alpha)$ là hàm liên tục theo α > 0.

Từ đó ta suy ra $I(\alpha) = I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$ là hàm liên tục theo α, $0 \le \alpha \le \alpha_o$.

Vì $I(0) = 0$, và $I(\alpha)$ liên tục tại $\alpha = 0$ nên :

$$I(0) = \lim_{\alpha \to 0} \left[\ln(1+\alpha^2) + C \right] = C = 0$$

Vậy $I(\alpha) = \dfrac{1}{2}\ln(1+\alpha^2)$

Cho $\alpha = 1$, ta nhận được $I(1) = \dfrac{1}{2}\ln 2$,

hay là : $$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^t}{t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}\ln 2.$$

1096. Ký hiệu $f(x,b) = e^{-x^2}\cos 2bx$

Khi đó :

$$\left|\frac{\partial f(x,b)}{\partial b}\right| = \left|-2xe^{-x^2}\sin 2bx\right| \le 2xe^{-x^2}, \quad \forall x \ge 0, \forall b.$$

Từ đó ta thấy vì tích phân $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ hội tụ, nên theo dấu hiệu Weierstrass, tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,b)}{\partial b}dx = -2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin 2bx\,dx$$

hội tụ đều theo $b \in (-\infty, +\infty)$.

Áp dụng công thức Leibniz ta có :

$$\frac{dI}{db} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,b)}{\partial b}dx = -2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin 2bx\,dx$$

Bằng cách lấy tích phân từng phần ta nhận được :

$$-2\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin 2bx\,dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}e^{-x^2}\sin 2bx\,\Bigg|_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.2b.\cos 2bx\,dx\right)$$

$$= -2b\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx.$$

Như vậy :

$$\frac{dI}{db} = -2bI$$

hay là
$$\frac{dI}{I} = -2b\,db$$

Từ đó lấy tích phân hai vế ta được :

$$\ln|I| = -b^2 + C = -b^2 + \ln|C_1|$$

$$I = C_1 e^{-b^2}$$

Thay $b = 0$:

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = C_1.$$

Vậy :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

1097. Với $\alpha \neq 0$ đặt $\alpha x = t$, ta có :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2} \text{ nếu } \alpha > 0$$

$$I(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} \text{ nếu } \alpha > 0 \text{ (xem 1093)}.$$

Như vậy $I(\alpha)$ là hàm khả vi với mọi $\alpha \neq 0$. Tuy nhiên tích phân

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin \alpha t}{t}\right) dt = \int_0^{+\infty} \cos \alpha t \, dt$$

phân kỳ với $\alpha \neq 0$, nên không thể tính $I'(\alpha)$ theo công thức Leibniz.

1098. Đặt $x + y = t$. Ta có :

$$F(y) = \int_y^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x+y)^2} dx = \int_y^{+\infty} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2} dt - \int_0^{y} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2} dt = F_1(y) + F_2(y).$$

Xét hàm $F_1(y)$.

Vì $\left|\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$, $\forall y \in (-\infty, +\infty)$, $\forall t \geq 0$

và tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ hội tụ, nên theo dấu hiệu Weierstrass tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2} dt$ hội tụ đều với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$. Mặt khác hàm $\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}$ liên tục với (t, y), $t \geq 0$, $y \in (-\infty, +\infty)$, cho nên ta suy ra hàm $F_1(y)$ liên tục đối với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$.

Còn hàm $F_2(y) = -\int_0^{y} \frac{\cos(t-y)}{1+t^2} dt$ cũng là hàm liên tục với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$, vì hàm dưới dấu tích phân $\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}$ liên tục với mọi (t, y), $t \geq 0$, $y \in (-\infty, +\infty)$ và cận trên $\varphi(y) = y$ cũng là hàm liên tục.

Vậy hàm $F(y) = F_1(y) + F_2(y)$ là hàm liên tục với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$.

Để xét tính khả vi của hàm F(y), ta lần lượt xét các hàm $F_1(y)$ và $F_2(y)$.

Đối với hàm $F_1(y)$, trước hết ta thấy :

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\right)\right| = \left|\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2},\ \forall y \in (-\infty, +\infty).$$

Vì tích phân $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ hội tụ, nên tích phân

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos(t-y)}{1+t^2}\right)dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}\,dt$$

hội tụ đều với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$. Do đó tích phân $F_1(y)$ là hàm khả vi và :

$$F'_1(y) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}dt.$$

Còn $F_2(y)$ cũng là hàm khả vi theo y và ta có :

$$F'_2(y) = \int_0^{y}\frac{\sin(t-y)}{1+t^2}dt + \frac{1}{1+y^2}$$

Vậy $F(y) = F_1(y) + F_2(y)$ là hàm khả vi với mọi $y \in (-\infty, +\infty)$.

1099. Đặt :

$$f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\alpha x} - e^{\beta x}}{x}\sin ax & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

thì f(x, a) là hàm liên tục với $x \geq 0$ và $-\infty \leq a < +\infty$.

Hơn nữa :

$$f'_a(x,a) = \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos ax .$$

Do đó :

$$\left|f'_a(x,a)\right| = \left|(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}).\cos ax\right| \le \left|e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right|.$$

Vì tích phân $\int_0^{+\infty}\left|e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right|dx,\ (\alpha > 0, \beta > 0)$ hội tụ nên tích phân :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}f(x,a)\,dx = \int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})\cos ax\,dx$$

hội tụ đều với mọi $a \in (-\infty, +\infty)$. Từ đó ta suy ra tích phân $I(a) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin ax\,dx$ khả vi và

$$I'(a) = \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\sin ax\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + a^2} - \frac{\beta}{\beta^2 + a^2}.$$

Lấy tích phân theo a, ta có :

$$I(a) = \operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\beta} + C .$$

Lưu ý rằng $I(0) = 0$, ta có $C = 0$.

Vậy :

$$I(a) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin ax\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a(\alpha - \beta)}{\alpha\beta + a^2}.$$

1100. Giả sử a_o là số tùy ý $|a_o| < 1$. Khi đó tồn tại số $\alpha > 0$ để sao cho : $|a_o| < \alpha < 1$.

Ta xét với mọi a : $|a| < \alpha < 1$.

Khi đó các hàm :

$$f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ -a^2 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

và
$$f'_a(x,a) = \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

liên tục đối với (x, a) trong miền $|a| \le \alpha,\ 0 \le x < 1$.

Mặt khác vì

$$\lim_{x\to+0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -a^2$$

và khi $x \to 1-0$ thì $\dfrac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \sim \dfrac{\ln(1-a^2)}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, |a|<\alpha<1$

nên tích phân

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,\ |a| < \alpha < 1$$

hội tụ.

Hơn nữa vì

$$|f'_a(x,a)| \le \frac{2}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = |a| \le \alpha < 1,\ 0 \le x < 1$$

và tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{(1-\alpha^2x^2)}.\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ hội tụ, cho nên tích phân

$\displaystyle\int_0^1 f'_a(x,a)dx$ hội tụ đều trong miền $|a| < \alpha < 1$.

Do đó, áp dụng công thức Leibniz ta có :

$$I'(a) = -2a\int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = -2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-a^2\sin^2 t}.$$

Đặt $u = tgt$, $dt = \dfrac{du}{1+u^2}$, $\dfrac{dt}{1-a^2\sin^2 t} = \dfrac{1}{1+(1-a^2)u^2}$,

ta nhận được :

$$I'(a) = -2a\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1-a^2)u^2} = -2a.\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\text{arctg}\sqrt{1-a^2}.u\,\Big|_0^{+\infty}$$

$$= -2a\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}, |a| \le \alpha < 1.$$

Vì $|a_o| < \alpha$, nên ta có :

$$I'(a_o) = -\frac{\pi a_o}{\sqrt{1-a_o^2}}.$$

Hơn nữa a_o là số tùy ý trong khoảng (-1, 1) nên từ đó ta suy ra :

$$I'(a) = -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}, |a| < 1.$$

Lấy tích phân hai vế, ta có

$$I'(a) = \pi\sqrt{1-a^2} + C.$$

Thay a = 0, do I(0) = 0, nên ta suy ra : C = -π.

Vậy :

$$I(a) = \pi\left(\sqrt{1-a^2} - 1\right), |a| < 1.$$

Ta chú ý rằng :

$$\left|\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right| \le \left|\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|,\ |a| \le 1,\ 0 \le x < 1$$

từ đó, vì tích phân $\int\limits_0^1 \frac{|\ln(1-x^2)|}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$ hội tụ, ta suy ra tích phân $I(a)$ hội tụ đều trong miền $|a| \le 1$, do đó $I(a)$ là hàm liên tục trong miền $|a| \le 1$, nên $I(a) = \pi\left(\sqrt{1-a^2} - 1\right)$ với mọi a: $|a| \le 1$.

1101. Áp dụng lời giải bài 1090, ta có :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a+b)x}{x}dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a-b)x}{x}dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\operatorname{sgn}(a+b) + \operatorname{sgn}(a-b)\right).$$

1102. Ta có :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 ax}{x}dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx - \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3ax}{x}dx$$

$$= \frac{3\pi}{8}\operatorname{sgn} a - \frac{\pi}{8}\operatorname{sgn} 3a = \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} a.$$

1103. Vì $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 = a^2$ nên hàm :

$$f(x,a) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin ax}{x}\right)^2 & \text{nếu} \quad x \ne 0 \\ a^2 & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

là hàm liên tục theo (x, a) trong miền $0 \le x < +\infty$, $-\infty < a < +\infty$ do đó tích phân

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx$$

chỉ có điểm kỳ dị tại $+\infty$.

Ta viết I(a) dưới dạng :

$$I(a) = \int_0^1 \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx + \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx = I_1(a) + I_2(a).$$

Trong đó $I_1(a) = \int_0^1 \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 dx$ là hàm liên tục đối với $a \in (-\infty, +\infty)$. ta sẽ xét tích phân $I_2(a)$.

Ta có :

$$\left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2 \le \frac{1}{x^2},\ \forall a \in (-\infty, +\infty),\ \forall x \ge 1.$$

Vì tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ hội tụ, nên tích phân $I_2(a)$ hội tụ đều theo $a \in (-\infty, +\infty)$, do đó $I_2(a)$ là hàm liên tục với $a \in (-\infty, +\infty)$.

Mặt khác ta lại có :

$$f'_a(x, a) = \frac{\sin 2ax}{x}$$

với $a \neq 0$ ta xét tích phân :

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x, a)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx$$

Lấy $a_o \neq 0$, khi đó tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $|a_o| \ge \alpha > 0$. Khi đó, với mọi $A > 0$, ta có :

$$\left|\int_0^A \sin 2ax\, dx\right| = \left|-\frac{1}{2a}(\cos 2aA - 1)\right| \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{\alpha},$$

với mọi a: $|a| \geq \alpha > 0$. Còn hàm $\frac{1}{x}$ đơn điệu giảm về 0 khi $x \to +\infty$. Do đó tích phân :

$$\int_0^{+\infty} f'_a(x,a)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x}\,dx$$

hội tụ đều theo a : $|a| \geq \alpha > 0$.

Vì vậy có thể áp dụng được công thức Leibniz và ta có :

$$I'_a = \int_0^{+\infty} f'_a(x,a)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a,$$

với mọi a : $|a| \geq \alpha > 0$.

Vì $|a_o| \geq \alpha$ nên ta có :

$$I'(a_o) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a_o.$$

Hơn nữa a_o là số tùy ý khác không, nên từ đó ta suy ra :

$$I'(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a,\ (a \neq 0).$$

Lấy tích phân hai vế, ta nhận được :

$$I(a) = \frac{\pi}{2}|a| + C,\ (a \neq 0).$$

Do I(a) là hàm liên tục với mọi $a \in (-\infty, +\infty)$ nên :

$$I(0) = \lim_{a \to 0} I(a) = \lim_{a \to 0}\left(\frac{\pi}{2}|a| + C\right) = C.$$

Vì I(0) = 0, nên C = 0.

Vậy :

$$I(a) = \frac{\pi}{2}|a| \qquad (-\infty < a < +\infty).$$

1104. Chú ý công thức :

$$\frac{\cos ax - \cos bx}{x} = \int_a^b \sin xy\, dy,$$

ta có thể viết tích phân đã cho dưới dạng :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx \int_a^b \sin yx\, dy = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x} dy.$$

Xét tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx$.

Trước hết ta chú ý rằng vì $\lim_{x \to +0} \frac{\sin yx}{x} = y$ nên tích phân đang xét chỉ có điểm kỳ dị $+\infty$.

Với $y \geq y_o > 0$ ta có :

$$\left| \int_0^A \sin yx\, dx \right| = \left| -\frac{1}{y}(\cos yA - 1) \right| \leq \frac{2}{y} \leq \frac{2}{yo}, \forall y \geq y_o,$$

còn hàm $\frac{1}{x}$ đơn điệu giảm về 0 khi $x \to +\infty$, do đó tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx$ hội tụ đều trong miền $y \geq y_o > 0$. Ngoài ra hàm :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin yx}{x} & \text{nếu} \quad x \neq 0 \\ y & \text{nếu} \quad x = 0 \end{cases}$$

liên tục trong miền $[0, +\infty) \times [a, b]$. Vì thế ta có thể thay đổi thứ tự lấy tích phân.

Ta có :

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \frac{\sin yx}{x} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} \frac{\sin yx}{x} dx.$$

Chú ý rằng với y > 0, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, nên ta có

$$I = \int_a^b \frac{\pi}{2}dx = \frac{\pi}{2}(b-a).$$

1105. Đặt $x = a\sqrt{t}$, (t > 0), ta nhận được

$$I = \int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}dt$$

$$= \frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma(3)} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

1106. Đặt $\sin x = \sqrt{t}$, (t > 0), ta nhận được :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x.\cos^6 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{3/2}t^{5/2}dt$$

$$= \frac{1}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right).\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{3\pi}{512}.$$

1107. Đặt $x = t^{1/n}$, (t > 0), ta nhận được :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}dt$$

$$= \frac{1}{n}B\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

1108. Đặt $x = \sqrt{t}$, (t > 0) ta nhận được :

$$I = \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{n-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\pi.$$

1117. $\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dx = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dy.$

1118. $\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x,y)\,dx.$

1119. Chú ý rằng Ω là miền được giới hạn bởi đường tròn tâm $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Từ đó :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{+\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dy$$

1120. Chú ý rằng parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = 1$ cắt nhau tại hai điểm (-1, 1) và (1, 1). Từ đó :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$$

1121. Chú ý rằng miền $\Omega = \left\{(x,y):\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$ đối xứng qua hai trục tọa độ, do đó vai trò của x và y như nhau. Để đưa tích phân hai lớp trên Ω về tích phân lặp ta chia Ω thành 4 miền con bởi các đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$ (hoặc $y = -1$ và $y = 1$). Khi đó :

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_{-1}^{1} dx \left\{ \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f\,dy + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right\} +$$

$$+ \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

1122. Miền lấy tích phân Ω giới hạn bởi các đường thẳng $y = x$, $y = 2x$ và $x = 2$. Do đó :

$$\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx.$$

1123. Miền lấy tích phân Ω giới hạn bởi đường parabol $y = \dfrac{x^2}{4} - 1$ và đường thẳng $y = 2 - x$, chúng cắt nhau tại hai điểm (-6, 8) và (2, 0). Do đó :

$$\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

1124. Miền lấy tích phân Ω giới hạn bởi đường tròn $(x-1)^2 + y^2 = 1$, đường thẳng $y = 2 - x$, chúng cắt nhau tại hai điểm (1, 1) và (2, 0). Do đó :

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

1125. Miền lấy tích phân được giới hạn bởi đường cong $y = \ln x$, trục tọa độ Ox và đường thẳng $x = e$, giao điểm của đường cong $y = \ln x$ và đường thẳng $x = e$ là $(e, 1)$. Do đó :

$$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx.$$

1126. Miền lấy tích phân được giới hạn bởi đường parabol $y = 1 - x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, chúng tiếp xúc tại điểm (0, 1) và cắt nhau tại hai điểm (-1, 0) và (1, 0). Bởi vậy miền lấy tích phân có thể chia thành hai miền con bởi trục tọa độ Ox. Do đó :

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx.$$

1127. Miền lấy tích phân được giới hạn bởi đường cong $y = \sin x$, $(0 \le x \le 2\pi)$ và trục Ox. Ta chia miền lấy tích phân thành hai miền con và viết tích phân dưới dạng :

$$\int_{0}^{2\pi} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy - \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^{0} f(x,y)\,dy.$$

Chú ý rằng khi y biến thiên từ 0 đến 1 thì x biến thiên từ arcsiny đến π - arcsiny, còn khi y biến thiên từ -1 đến 0 thì x biến thiên từ π - arcsiny đến 2π + arcsiny. Do đó thay đổi thứ tự lấy tích phân ta có :

$$\int_{0}^{2\pi} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx - \int_{-1}^{0} dy \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx.$$

1128. Parabol $y^2 = 2px$ và đường thẳng $x = \dfrac{p}{2}$, $(p > 0)$ cắt nhau tại hai giao điểm $\left(\dfrac{p}{2}, -p\right)$ và $\left(\dfrac{p}{2}, p\right)$. Do đó

$$\iint_{\Omega} xy^2\,dxdy = \int_{-p}^{p} dy \int_{\frac{1}{2p}y^2}^{\frac{p}{2}} xy^2\,dx = \int_{-p}^{p} y^2 dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} x\,dx$$

$$= \int_{-p}^{p} y^2 \frac{1}{8}\left(p^2 - \frac{y^4}{p^2}\right) dy = \frac{1}{8}\, 2\int_{0}^{p} \left(p^2y^2 - \frac{y^6}{p^2}\right) dy = \frac{p^5}{21}.$$

1129. Chú ý rằng miền lấy tích phân :

$$\Omega = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le a^2\right\}$$

đối xứng với hai trục tọa độ, còn hàm $f(x,y) = |xy|$ chẵn đối với x và y. Do đó :

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a}|xy|\,dxdy = \int_{-a}^{a}dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{+\sqrt{a^2-y^2}}|xy|\,dx = 4\int_0^a ydy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}x\,dx$$

$$= 4\int_0^a y\frac{1}{2}\left(a^2-y^2\right)dy = \frac{a^4}{2}.$$

1130. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdy = \int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx$

$$= \int_a^{3a}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}(y-a)^3 + y^2a\right]dy = 14a^4.$$

1131. Chú ý rằng khi t biến thiên từ 0 đến 2π thì x biến thiên từ 0 đến $2\pi a$. Vì vậy :

$$I = \iint\limits_{\Omega}y^2dxdy = \int_0^{2\pi a}dx\int_0^{y[t(x)]}y^2dy = \int_0^{2\pi a}\frac{1}{3}y^3[t(x)]dx$$

chuyển sang biến t : $x = a(t - \sin t)$

$$y = y[t(x)] = a(1-\cos t)$$

$$dx = a(1-\cos t)\,dt.$$

Do đó :

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a}y^3[t(x)]dx = \frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\,dt$$

$$= \frac{16a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\,dt = \frac{32a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\,du =$$

$$= \frac{64a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 u\,du = \frac{64a^4}{3}\cdot\frac{7!!}{8!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{35\pi a^4}{12}$$

(Xem bài tập 682).

1132. Chú ý rằng Ω là miền được giới hạn bởi đường tròn tâm tại điểm $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, bán kính $R = \frac{a}{2}$. Do đó chuyển qua tọa độ cực : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ thì φ biến thiên từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$. Để tính cận biến thiên của r, ta lưu ý trong miền Ω : $x^2 + y^2 \le ax$ hay $r^2 \le ar\cos\varphi \Rightarrow r \le a\cos\varphi$.

Do đó :

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

1133. $$\iint_{a^2\le x^2+y^2\le b^2} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

1134. Miền lấy tích phân là tam giác có các đỉnh O(0, 0). A(1, 0), B(0, 1). Khi chuyển qua tọa độ cực : $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ thì φ biến thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$. Còn bên trong miền Ω :

$$0 \le y \le 1 - x$$

hay $$r\sin\varphi \le 1 - r\cos\varphi \Rightarrow 0 \le r \le \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

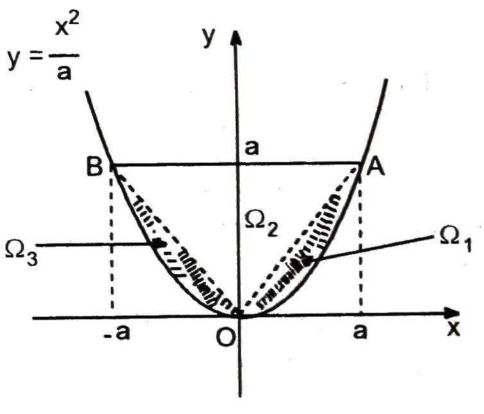
Do đó :

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}} rf(r\sin\varphi, r\cos\varphi)\,dr.$$

1135. Miền lấy tích phân Ω được giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{x^2}{a}$ và đường thẳng y = a. Để chuyển sang tọa độ cực ta hãy chia miền lấy tích phân thành ba miền con bởi các đường thẳng y = x và y = -x. Khi đó Ω được chia thành 3 miền con:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$$

miền Ω_1 được giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{x^2}{a}$ và đường y = x, Ω_3 được giới hạn bởi parabol $y = \dfrac{x^2}{a}$ và đường y = -x, còn Ω_2 là tam giác có các đỉnh : O(0, 0), A(a, a), B(-a, a).



Trong Ω_1 : $\qquad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{x^2}{a} \le y \Leftrightarrow \frac{r^2\cos^2\varphi}{a} \le r\sin\varphi$$

hay
$$0 \le r \le \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Trong Ω_3: $\qquad \dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \pi$

$$0 \le r \le \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Trong Ω_2 : $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$

$$y \le a \Rightarrow r\sin\varphi \le a \Rightarrow 0 \le r \le \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Vậy:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega_3} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr +$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

1136. Miền lấy tích phân là hình vuông $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Để chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta hãy chia miền lấy tích phân thành hai miền con bởi đường thẳng $y = x$:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

trong đó

Ω_1 : là tam giác có 3 đỉnh O(0, 0), A(1, 0) và B(1,1)

Ω_2 : là tam giác có 3 đỉnh O(0, 0), B(1, 1) và C(0,1).

Khi đó :

trong Ω_1 : $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $x \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le \frac{1}{\cos\varphi}$,

trong Ω_2 : $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $y \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le \frac{1}{\sin\varphi}$.

Khi đó :

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

1137. Miền lấy tích phân Ω được giới hạn bởi nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geq 0)$ và đường thẳng $y = 1 - x$, có giao điểm tại A(1, 0) và B(0, 1).

Đổi qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, thì trong Ω ta có: $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$; để xác định cận biến thiên của r, ta chú ý rằng: trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ thì $r = 1$, còn trên đường thẳng $y = 1 - x$ thì

$$r = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$$

Cho nên :

$$\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \leq r \leq 1.$$

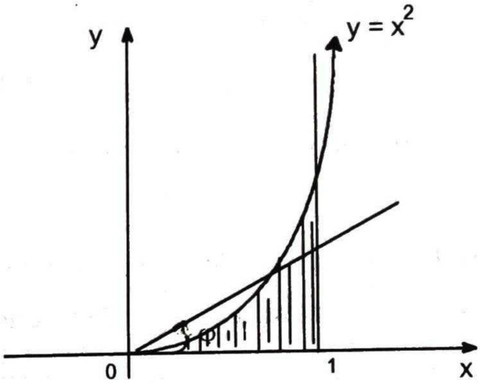
Vậy :

$$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}}^{1} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

1138. Miền lấy tích phân được giới hạn bởi parabol $y = x^2$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

Đổi qua tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Trong miền lấy tích phân : $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$



Còn trên parabol $y = x^2$ thì $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, trên đường thẳng $x = 1$ thì $r = \frac{1}{\cos\varphi}$. Do đó ứng với mỗi góc φ cố định, trong miền lấy tích phân

$$\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \le r \le \frac{1}{\cos\varphi}$$

Vậy :

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,.$$

1139. Đổi sang tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, đường cong đã cho có phương trình : $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Vì vậy $\cos 2\varphi \ge 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$ (ứng với $x > 0$)

Do đó :

$$-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \text{ và } 0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

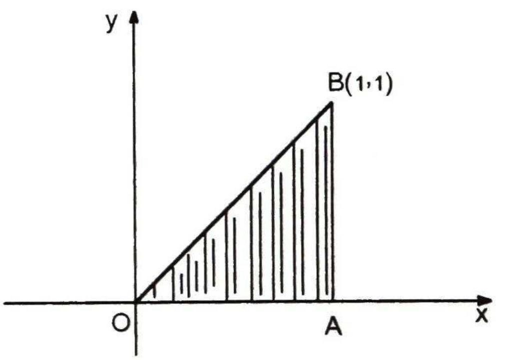
Vậy :

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

1140. Do miền lấy tích phân đối xứng qua các trục tọa độ và hàm $f(x, y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ chẵn đối với x và y, cho nên :

$$I = \iint_{\Omega} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = 4\iint_{\Omega_1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$

trong đó $\Omega_1 = \{(x,y):\ 0 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$. Nói cách khác Ω_1 là tam giác với 3 đỉnh là O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1).



Đổi biến qua tọa độ cực : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$.

Khi đó trong Ω_1 : $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le r\cos\varphi \le 1 \Rightarrow 0 \le r \le \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Do đó :

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r)\,dr.$$

Chú ý : Nếu ta chia miền Ω_1 thành hai miền con D_1 và D_2 tức là $\Omega_1 = D_1 \cup D_2$, trong đó :

$$D_1 = \left\{0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$D_2 = \left\{1 \le r \le \sqrt{2},\ \ \arccos\frac{1}{r} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

thì :

$$I = 4\iint_{\Omega_1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy = 4\left(\iint_{D_1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy + \iint_{D_2} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy\right)$$

$$= 4\left(\int_0^1 rf(r)\,dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\,dr \int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\right)$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{4}\int_0^1 rf(r)\,dr + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\,dr\right)$$

$$= \pi\int_0^1 r\,f(r)\,dr + \int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right) r\,f(r)\,dr.$$

1141. Miền lấy tích phân là miền được giới hạn bởi đường tròn $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, (tâm tại điểm $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$).

Đổi sang tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, khi đó trong miền lấy tích phân : $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Để xác định cận biến thiên của r ta lưu ý :

$$x^2 + y^2 \le x \Leftrightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le r\cos\varphi$$

hay $r \le \cos\varphi$.

Vậy :

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le x} f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(tg\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi} r\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi . f(tg\varphi)\,d\varphi .$$

1142. Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le a$ $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Do đó ta có :

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} r.r\,dr = 2\pi\int\limits_0^{a} r^2 dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

1143. Đặt $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \pi \le r \le 2\pi$ $\sin\sqrt{x^2+y^2} = \sin r$. Do đó ta có :

$$\iint\limits_{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin r.r\,dr$$

$$= 2\pi\left(-r\cos r\,\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi} \cos r\,dr\right) = -6\pi^2 .$$

1144. Miền lấy tích phân D được giới hạn bởi các đường thẳng x = 0, x = 2, y = 1 – x và y = 2 – x hay x + y = 1, x + y = 2. Đổi biến u = x + y, v = x – y, thì miền D được đưa về miền D' trong mặt phẳng (u, v).

Vì : trong D : $1 \le x + y \le 2$ nên

trong D': $1 \le u \le 2$

Mặt khác : $v = x - y = x - (u - x) = 2x - u$.

Vì trong D : $0 \le x \le 2$ hay $0 \le 2x \le 4$, do đó trong D' ta có :

$$-u \le 2x - u \le 4 - u$$

hay $$-u \le v \le 4 - u$$

Vậy nên : $D' = \{ (u, v) : 1 \le u \le 2,\ -u \le v \le 4 - u \}$

Ngoài ra ta có :

$$x = \frac{1}{2}(u + v),\ y = \frac{1}{2}(u - v) \text{ và } \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy:

$$I = \iint_{D'} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

1145. Đổi biến $x = u.\cos^4 v$, $y = u.\sin^4 v$

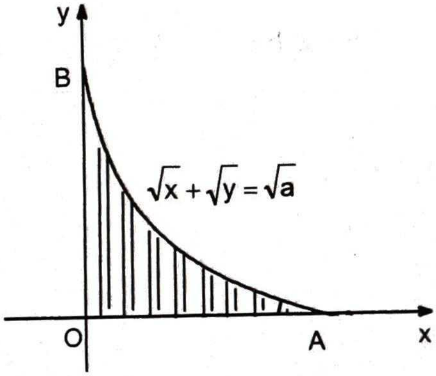
Để xác định cận biến thiên của u và v ta chú ý rằng :

Trên đường cong $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ta có :

$\sqrt{u}.\cos^2 v + \sqrt{u}\sin^2 v = \sqrt{a}$ hay $\sqrt{u} = \sqrt{a}$, do đó : $u = a$. Gốc tọa độ $(0, 0) = (u\cos^4 v, u\sin^4 v)$ ứng với giá trị $u = 0$, trên OB, tại $B = (0, a)$, thì $x = 0 \Rightarrow u\cos^4 v = 0$ nên $\cos^4 v = 0 \Rightarrow v = \dfrac{\pi}{2}$, còn trên OA, với $A = (a, 0)$, thì $y = 0$ hay $u.\sin^4 v = 0$ nên $\sin^4 v = 0 \Rightarrow v = 0$.

Như vậy miền D được biến thành miền D' :

$$D' = \left\{ (u,v):\ 0 \le u \le a,\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$



Hơn nữa :

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos^4 v & -4u\cos^3 v.\sin v \\ \sin^4 v & 4u\sin^3 v.\cos v \end{vmatrix} = 4u\sin^3 v.\cos^3 v.$$

Vậy :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = 4\int_0^a udu\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u\cos^4 v, u\sin^4 v)\sin^3 v.\cos^3 v\,dv.$$

1146. Miền lấy tích phân D là tam giác có 3 đỉnh O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1), trong đó cạnh AB là đoạn thẳng nằm trên đường $y = 1 - x$.

Ta có nhận xét : miền D được tạo thành bởi giao của hai họ đường thẳng $x + y = \xi,\ 0 \le \xi \le 1$ và $y = kx,\ k > 0$ trong đó k là hệ số góc.

Gốc tọa độ ứng với $\xi = 0$, đoạn AB có phương trình $y = 1 - x$ ứng với $\xi = 1$. Cạnh OA ứng với $k = 0$, cạnh OB ứng với $k = +\infty$. Khi đường thẳng $y = kx$ biến thiên liên tục từ cạnh OA đến cạnh OB thì k biến thiên liên tục từ 0 đến $+\infty$.

Chú ý rằng : Với điểm $(x, y) \in D$, thì (x, y) đồng thời nằm trên hai đường thẳng $x + y = \xi$ và $y = kx$ với ξ và k nào đó. Khi đó :

$$y = kx = k(\xi - y) = k\xi - ky$$

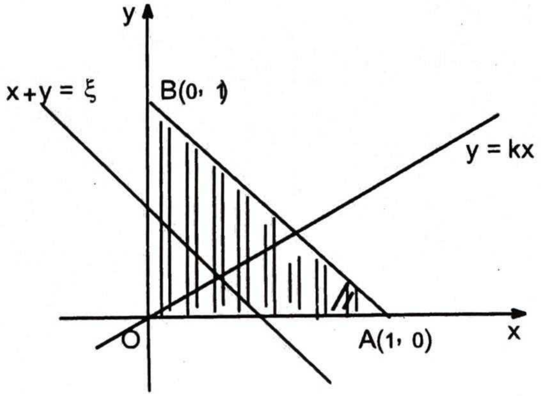
hay
$$y = \frac{k}{1+k}\xi.$$

Rõ ràng khi $k \to +\infty$ thì $\frac{k}{1+k} \to 1$. Đặt : $\eta = \frac{k}{1+k}$.

Như vậy nếu đổi biến : $x + y = \xi$, $y = \xi\eta$ thì miền D trong mặt phẳng (x, y) được biến thành hình vuông

$$D' = \left\{(\xi,\eta):\ 0 \le \xi \le 1,\ 0 \le \eta \le 1\right\}$$

trong mặt phẳng (ξ,η).



Khi đó : $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \xi$ và

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(\xi - \xi\eta, \xi\eta)\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta$$

$$= \int_0^1 d\xi \int_0^1 \xi . f(\xi - \xi\eta,\ \xi\eta)\,d\eta.$$

1147. Miền D được giới hạn bởi hai đường thẳng $y = x + 1$, $y = x - 1$ và các hyperbol $xy = 1$ và $xy = 2$. Như vậy miền D có thể xem là giao của hai họ đường cong :

$$xy = u, \quad 1 \le u \le 2$$

và
$$y = x + v, \quad -1 \le v \le 1$$

Do đó nếu đổi biến : $u = xy$, $v = y - x$ thì miền D trong mặt phẳng (x, y) được ánh xạ thành hình chữ nhật:

$$D' = \{ (u, v) : \ 1 \le u \le 2, \quad -1 \le v \le 1 \}$$

trong mặt phẳng (u, v). Khi đó :

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + 4u} - v, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + 4u}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_1^2 du \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}\sqrt{v^2 + 4u} - v, \frac{1}{2}\sqrt{v^2 + 4u}\right)\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dv$$

1148. Miền D được giới hạn bởi hai đường thẳng $y = x$, $y = 4x$ và hai đường hyperbol $xy = 1$ và $xy = 2$. Do đó D có thể xem là giao của họ hyperbol

$$xy = u,\ 1 \le u \le 2, \quad (x > 0, y > 0)$$

và họ đường thẳng $y = vx$, $1 \le u \le 4$.

Như vậy nếu đổi biến :

$$u = xy$$

$$v = \frac{y}{x}$$

thì miền D trong mặt phẳng (x, y) được ánh xạ thành hình chữ nhật : $D = \{ (u, v) : \ 1 \le u \le 2, \quad 1 \le v \le 4 \}$ trong mặt phẳng (u,v). Khi đó :

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \ \ y = \sqrt{u.v}, \ \text{ và } \ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{2v}$$

Cho nên

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^4 \frac{1}{v}.f\left(\sqrt{\frac{u}{v}},\ \sqrt{u.v}\right)dv.$$

1149. Miền lấy tích phân D là miền được giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$ hay $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Đổi qua tọa độ cực (suy rộng):

$$x - \frac{1}{2} = r\cos\varphi, \quad y - \frac{1}{2} = r\sin\varphi$$

hay

$$x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, \quad y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r, \quad x + y = 1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

Do đó :

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)\right] r\,dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r\,dr + \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r^2 dr$$

$$= 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

1150. Miền lấy tích phân $D = \{(x,y): |x| + |y| \le 1\}$ đối xứng qua hai trục tọa độ và hàm dưới dấu tích phân $f(x,y) = |x| + |y|$ là hàm chẵn đối với x và y. Do đó :

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\left(|x|+|y|\right)dxdy = 4\iint\limits_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1-x}}(x+y)dxdy$$

$$= 4\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x+y)dy = 4\int_0^1 x(1-x)dx + 4\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2dx = \frac{4}{3}.$$

1151. Áp dụng phép biến đổi qua hệ tọa độ cực suy rộng

$$\frac{x}{a} = r\cos\varphi,\quad \frac{y}{b} = r\sin\varphi$$

hay : $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le 1$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$$

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{1-r^2}\ .$$

Khi đó :

$$\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,rdr$$

$$= -\frac{ab}{2}.2\pi\int_0^1(1-r^2)^{\frac{1}{2}}d(1-r^2)$$

$$= ab\pi\,\frac{2}{3} = \frac{2ab\pi}{3}.$$

1152. Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Ta có $0\le\varphi\le 2\pi,\ r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi\le 1$

hay $$r\le\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}$$

Khi đó : $$I = \iint\limits_{x^4+y^4\le 1}(x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt[4]{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}}r^3dr =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}.$$

Đặt $t = tg\varphi$ khi đó :

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

1153. Miền lấy tích phân D được giới hạn bởi các đường cong $y^2 = 2x$ $(x > 0)$, $x + y = 4$ và $x + y = 12$.

Chú ý rằng : đường thẳng $x + y = 4$ cắt đường parabol $y^2 = 2x$ tại hai điểm có hoành độ $x = 2$ và $x = 8$, còn đường thẳng $x + y = 12$ cắt đường $y^2 = 2x$ tại hai điểm có hoành độ $x = 8$ và $x = 18$. Do đó để tính tích phân ta chọn miền D thành hai miền con D_1 và D_2 bởi đường $x = 8$, $D = D_1 \cup D_2$, trong đó :

D_1 được giới hạn bởi parabol $y^2 = 2x$, đường thẳng $x + y = 4$ và đường thẳng $x = 8$, tức là :

$$D_1 = \left\{(x,y): 1 \le x \le 8,\quad 4 - x \le y \le \sqrt{2x}\right\}.$$

D_2 được giới hạn bởi parabol $y^2 = 2x$, đường thẳng $x = 8$ và đường thẳng $x + y = 12$, tức là :

$$D_2 = \left\{(x,y): 8 \le x \le 18,\quad -\sqrt{2x} \le y \le 12 - x\right\}$$

Vậy :

$$I = \iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_{D_1}(x+y)\,dxdy + \iint_{D_2}(x+y)\,dxdy$$

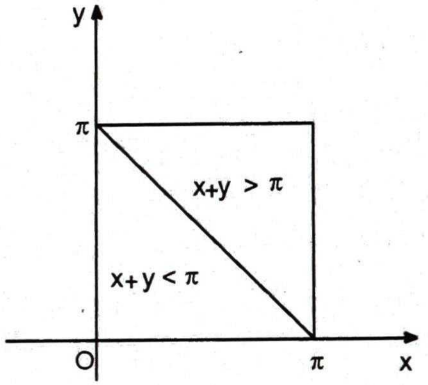
$$= \int_2^8 dx\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\,dy + \int_8^{18}dx\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\,dy =$$

$$= \int_2^8 \left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\,x^{3/2} + x - 8 \right) dx + \int_8^{18} \left(72 - \frac{x^2}{2} + \sqrt{2}\,x^{3/2} - x \right) dx$$

$$= 543\,\frac{11}{15}.$$

1154. Chia miền $D = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$ thành hai miền D_1 và D_2 bởi đường thẳng $x + y = \pi$. Khi đó

$$\iint_D |\cos(x+y)|dxdy = \iint_{D_1} |\cos(x+y)|dxdy + \iint_{D_2} |\cos(x+y)|dxdy$$



Trong đó : $D_1 = \{(x, y) : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi - x\}$

$$\iint_{D_1} |\cos(x+y)|dxdy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} |\cos(x+y)|dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\pi - x} |\cos(x+y)|dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} |\cos(x+y)|dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2} - x} \cos(x+y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2} - x}^{\pi - x} \cos(x+y)dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi - x} \cos(x+y)dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin s)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \pi \ .$$

Tương tự : $\iint\limits_{D_2} |\cos(x+y)| dxdy = \pi$

Vậy:

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \pi}} |\cos(x+y)| dxdy = \pi + \pi = 2\pi \ .$$

1155. D là hình chữ nhật [-1, 1] × [0, 2]. Chia D thành hai miền con D_1 và D_2 bởi parabol $y = x^2$, trong đó

$$D_1 = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$$

$$D_2 = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 2\}.$$

Chú ý rằng $y - x^2 \le 0$ trong D_1, $y - x^2 \ge 0$ trong D_2 cho nên :

$$I = \iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}\, dxdy = \iint\limits_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\, dxdy + \iint\limits_{D_2} \sqrt{y - x^2}\, dxdy$$

Đưa về tích phân lặp ta có:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} x^2 |x| dx + \int_{-1}^{1} \frac{2}{3} (2 - x^2)^{3/2} dx$$

Trong đó:

$$\frac{2}{3} \int_{-1}^{1} x^2 |x| dx = \frac{2}{3}\left(-\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_0^1 x^3 dx \right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}.$$

Để tính tích phân $\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{3/2}dx$ ta đổi biến $x = \sqrt{2}\sin t$,

khi đó $dx = \sqrt{2}\cos t dt$

$2 - x^2 = 2 - 2\sin^2 t = 2\cos^2 t$

$(2 - x^2)^{3/2} = 2\sqrt{2}\cos^3 t$.

Khi đó :

$$\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{3/2}dx = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4.\cos^3 t\cos t\,dt = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2 t)^2 dt = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)^2 dt$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2t+\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt = \frac{\pi}{2}+\frac{4}{3}$$

Vậy : $I = \frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}+\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}+\frac{5}{3}$.

1156. Miền lấy tích phân

$$B = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x,\ 0 \le z \le xy\}$$

Do đó :

$$\iiint_B xy^2z^3\,dxdydz = \int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz$$

$$= \int_0^1 xdx\int_0^x y^2.\frac{1}{4}(xy)^4dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 x^5 dx \int_0^x y^6 dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12} dx = \frac{1}{364}.$$

1157. **Đổi sang tọa độ cầu :**

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = r\cos\theta & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

Ta có:

$$\iiint_B xyzdxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r^3\sin^2\theta.\cos\theta.\sin\varphi.\cos\varphi) r^2 \sin\theta dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^5 dr = \frac{1}{48}.$$

1158. **Đổi sang hệ tọa độ cầu suy rộng:**

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = br\sin\theta\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = cr\cos\theta & 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$$

Ta có: $$\iiint_B \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 abcr^2 \sin\theta dr$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr = 2\pi abc.2.\frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5} abc.$$

1159. Đổi qua tọa độ trụ :

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ ta có:

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ r \le z \le 1$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r, \quad \sqrt{x^2+y^2} = r.$$

Khi đó :

$$\iiint_B \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r.rdz$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-r)r^2 dr = 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

1160. Chú ý rằng phương trình của mặt là

$$x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$$

$$\text{hay } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Vậy miền lấy tích phân B chính là hình cầu tâm tại điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đổi sang tọa độ cầu :

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}=r\sin\theta\cos\varphi \\ y-\dfrac{1}{2}=r\sin\theta\sin\varphi \\ z-\dfrac{1}{2}=r\cos\theta \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+r\sin\theta\cos\varphi \\ y=\dfrac{1}{2}+r\sin\theta\sin\varphi \\ z=\dfrac{1}{2}+r\cos\theta \end{cases}$$

Trong đó : $0\le\varphi\le2\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

và $$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$$

$$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}+r^2+r\sin\theta\cos\varphi+r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta$$

Khi đó :

$$\iiint\limits_B (x^2+y^2+z^2)dxdydz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[\frac{3}{4}+r^2+r(\sin\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi+\cos\theta)\right]r^2\sin\theta dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2\left[\frac{3}{4}+r^2+r\sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi)+r\cos\theta\right]dr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2\left(\frac{3}{4}+r^2+r\cos\theta\right)d\theta+$$

$$+\int_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r^3dr$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\left(\frac{3\sqrt{3}}{32}+\frac{9\sqrt{3}}{160}+\frac{9}{64}\cos\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{3\pi\sqrt{3}}{10}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta+2\pi.\frac{9}{64}\int_0^{\theta}\sin\theta\cos\theta\, d\theta=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi .$$

1161. Miền lấy tích phân B được giới hạn bởi mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, hai mặt cong này cắt nhau theo phần tư đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Đổi qua tọa độ cầu :

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi & 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4} \\ y=r\sin\theta\sin\varphi & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ z=r\cos\theta & 0\le r\le\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta .$$

Khi đó :

$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}z^2dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^4\cos^2\theta.\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta.\sin\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^4dr$$

$$=\frac{\pi}{2}.\frac{4\sqrt{2}}{5}.\frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{15}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

1162. Đường cong $xy = a^2$ cắt đường thẳng $x+y=\frac{5}{2}a$, $a > 0$, tại hai giao điểm có hoành độ $x = \frac{a}{2}$ và $x = 2a$.

Do đó diện tích của miền D là :

$$D = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5}{2}a-x} dy = \int_{\frac{a}{2}}^{2a}\left(\frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{15}{8} - 2\ln 2\right)a^2.$$

1163. Từ phương trình của đường cong $(x-y)^2 = a^2 - x^2$, $a>0$ ta có nhận xét : $a^2 - x^2 \geq 0$ hay $|x| \leq a$. Với $|x| \leq a$ thì

$$y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Vậy diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong $(x-y)^2 + x^2 = a^2$, $|x| \leq a$ là :

$$D = \int_{-a}^{a} dx \int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2-x^2}} dy = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Đổi biến $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$

$$D = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\cos t.a\cos t dt = 4a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \pi a^2.$$

1164. Chuyển qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, miền cần tính diện tích được giới hạn bởi các đường cong:

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$$

và $\quad r^2 = a^2,\ r^2 \geq a^2$

Giao điểm của chúng ứng với các góc φ thỏa mãn phương trình

$$2a^2\cos 2\varphi = a^2$$

Từ đó $\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \ k = 0, 1$

Vậy các giao điểm là

$$\left(a, \frac{\pi}{6}\right), \left(a, -\frac{\pi}{6}\right), \left(a, \frac{5\pi}{6}\right) \text{ và } \left(a, \frac{7\pi}{6}\right)$$

Do tính đối xứng của miền nên :

$$D = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)d\varphi$$

$$= 2a^2(\sin 2\varphi - \varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}a^2.$$

1165. Viết phương trình đường cong dưới dạng:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{a}{2h}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{b}{2k}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}$$

Chuyển sang tọa độ cực suy rộng

$$\frac{x}{a} - \frac{a}{2h} = r\cos\varphi, \ \frac{y}{b} - \frac{b}{2k} = r\sin\varphi$$

hay $\begin{cases} x = \dfrac{a^2}{2h} + ar\cos\varphi \\ y = \dfrac{b^2}{2k} + br\sin\varphi \end{cases}$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{\frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}}$$

Vậy

$$D = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}} r dr = \frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right).$$

1166. Đổi biến $xy = u,\ a^2 \le u \le 2a^2$

$$y = vx,\ 1 \le v \le 2$$

hay $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$

$$D = \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{1}{2v} dv = \frac{a^2}{2}\ln 2.$$

1167. Tính diện tích miền

$$D = \left\{(x,y): a \le x + y \le b, \alpha \le \frac{y}{x} \le \beta\right\}.$$

Đổi biến $\begin{cases} u = x + y & a \le u \le b \\ v = \dfrac{y}{x} & \alpha \le v \le \beta \end{cases}$

Từ đó :

$$x = \frac{u}{1+v},\quad y = \frac{uv}{1+v}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

Do đó :

$$D = \int_a^b udu\int_\alpha^\beta \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2}(b^2-a^2)\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(b^2-a^2)\frac{\beta-\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

1168. Tính diện tích miền

$$D = \left\{(x,y): a \le \frac{x^2}{y} \le b,\ c \le \frac{x^3}{y^2} \le d\right\}$$

Đổi biến $u = \dfrac{x^2}{y}$, $v = \dfrac{x^3}{y^2}$

hay $x = \dfrac{u^2}{v}$, $y = \dfrac{u^3}{v^2}$, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\dfrac{u^4}{v^4}$

$$a \le u \le b, \qquad c \le v \le d$$

$$D = \int_a^b u^4 du\int_c^d \frac{dv}{v^4} = \frac{1}{15}\,\frac{(b^5-a^5)(c^3-d^3)}{c^3d^3}.$$

1169. Đặt $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$, $1 \le u \le 2$

$$v = \frac{y}{x},\ \frac{b}{a} \le v \le \frac{4b}{a}.$$

Ta có : $u = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{vx}{b}} = \sqrt{x}\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}} + \sqrt{\dfrac{v}{b}}\right)$

Từ đó

$$x = \frac{au^2}{\left(1+\frac{\sqrt{av}}{\sqrt{b}}\right)^2}, \quad y = vx = \frac{au^2v}{\left(1+\frac{\sqrt{av}}{\sqrt{b}}\right)^2}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{2a^2u^3}{\left(1+\frac{\sqrt{av}}{b}\right)}$$

Khi đó :

$$D = 2a^2\int_1^2 u^3du\int_{\frac{b}{a}}^{4\frac{b}{a}}\frac{dv}{\left(1+\frac{\sqrt{av}}{\sqrt{b}}\right)^2} = \frac{15a^2}{2}.\int_{\frac{b}{a}}^{4\frac{b}{a}}\frac{dv}{\left(1+\frac{\sqrt{av}}{\sqrt{b}}\right)^2}.$$

Đổi biến : $y = \frac{\sqrt{av}}{\sqrt{b}}$, $dv = \frac{2b}{a}ydy$

$$D = \frac{15a^2}{2}.\frac{2b}{a}\int_1^2\frac{ydy}{(1+y)^4} = \frac{15a^2}{2}.\frac{2b}{a}\left(\int_1^2\frac{dy}{(1+y)^3} - \int_1^2\frac{dy}{(1+y)^4}\right)$$

$$= 15ab.\frac{13}{324} = \frac{65ab}{108}.$$

1170. $V = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1+x+y)dy = \int_0^1\frac{1}{2}\left[4-(1+x)^2\right]dx$

$$= 2\int_0^1 dx - \frac{1}{2}\int_0^1(1+x)^2dx = 2-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}(1+x)^3\Big|_0^1$$

$$= 2-\frac{7}{6} = \frac{5}{6}.$$

1171. $V = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le R^2\\ x\ge 0,\, y\ge 0}}(a-x-y)dxdy$

Đổi qua tọa độ cực

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le R$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (a - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r dr$$

$$= a\frac{\pi}{2}.\frac{R^2}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi) d\varphi \int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{a\pi R^2}{4} - \frac{2}{3}R^3.$$

1172. $V = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy,$

trong đó : $D = \{(x, y): -1 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$

Do đó :

$$V = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2) dy = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + x^2 - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{88}{105}.$$

1173. $V = 2\iint_D \sqrt{xy}\, dxdy,$

trong đó : $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \le a^2,\ xy > 0\}$.

Đổi qua tọa độ cực : $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2},\ 0 \le r \le a$$

Vậy

$$V = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}\, r^2 dr + \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}\, d\varphi \int_0^a r^2 dr\right]$$

$$= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi + \frac{2a^3}{3}\int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{1/2}\varphi\sin^{1/2}\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{4a^3}{3}B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) = \frac{4a^3\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{3\sqrt{\pi}}$$

trong đó $B\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ là giá trị của hàm Bê-ta tại điểm $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$,

còn $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ là giá trị của hàm Gamma tại điểm $\frac{3}{4}$.

1174. $V = 2\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, trong đó : D là miền được giới hạn bởi hai đường tròn $x^2 + y^2 = x$ và $x^2 + y^2 = 2x$, hay $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ và $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Đổi qua tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \cos\varphi \le r \le 2\cos\varphi$$

Vậy : $V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(16\cos^4\varphi - \cos^4\varphi)d\varphi$

$$= \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{15}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \frac{15}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi+2\cos 2\varphi\right)d\varphi=\frac{45}{32}\pi .$$

1175. $V = \iint_D \left|x+y-x^2-y^2\right| dxdy,$

trong đó D là hình chiếu của vật thể V được giới hạn giữa hình paraboloide $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = x + y$.

Chú ý rằng hai mặt này cắt nhau bởi đường cong C mà hình chiếu của nó xuống mặt phẳng Oxy là đường tròn có phương trình :

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \text{hay} \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Vậy : $\quad D = \left\{(x, y): \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}\right\}$

Đổi qua tọa độ cực : $\quad x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, \quad y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$x + y - x^2 - y^2 = 1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi - \left(\frac{1}{2}+r\cos\varphi\right)^2 - \left(\frac{1}{2}+r\sin\varphi\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} - r^2.$$

Khi đó :

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2}-r^2\right) r dr = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2}r - r^3\right) dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

1176. $V = \iint_D xydxdy$, trong đó D là miền phẳng trong mặt phẳng Oxy được giới hạn bởi các parabol :

$$x^2 = y, \quad x^2 = 2y,$$

$$y^2 = x, \quad y^2 = 2x.$$

Đổi biến : $u = \dfrac{x^2}{y}, \ 1 \le u \le 2$

$$v = \frac{y^2}{x}, \ 1 \le v \le 2$$

Khi đó $x = u^{2/3}.v^{1/3},$

$$y = u^{1/3}.v^{2/3}.$$

$$\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \frac{1}{3}$$

Vậy :

$$V = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{3} u.v.dv = \frac{1}{3}\int_1^2 udu \int_1^2 vdv = \frac{3}{4}$$

1177. Vật thể V được giới hạn bởi các mặt :

$z = \dfrac{1}{a}\left(x^2 + y^2\right)$ (mặt paraboloide), mặt $z = 0$ và mặt trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ mà đường chuẩn là đường lemniscate có phương trình trong tọa độ cực là :

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

trong đó : $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ và $\dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$, đối xứng qua các trục tọa độ.

Vậy :

$$V = \iint_D \frac{1}{a}\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

trong đó : D là miền được giới hạn bởi đường cong lemniscate. Chuyển qua tọa độ cực :

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{1}{a}.r^2.rdr$$

$$= \frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4}{4}\cos^2 2\varphi d\varphi = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}.$$

1178. Vật thể V nằm trong góc phần tám $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ được giới hạn bởi các mặt phẳng tọa độ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ và mặt

$$z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2}$$

Vì vậy thể tích

$$V = c\iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2}\, dxdy$$

trong đó D là tam giác trong mặt phẳng Oxy

$$D = \left\{(x,y):\ 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right\}.$$

Đổi biến $x = ar\cos^2\varphi,\ y = br\sin^2\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \left(r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi\right)^2 = r^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

do đó : $$0 \leq r \leq 1$$

$$\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}=\sqrt{1-r^2}\ ,\quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=2abr\cos\varphi\sin\varphi$$

Vậy nên :

$$V=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{abc}{3}.$$

1179. Vật thể V được tạo thành bởi mặt ellipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ cắt mặt nón $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $(z>0)$ theo giao tuyến : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2},\quad z=\frac{c}{\sqrt{2}}$.

Do đó :

$$V=\iint_D\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy$$

trong đó : $D=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le\frac{1}{2}\right\}$

Chuyển qua tọa độ cực suy rộng

$$x=ar\cos\varphi\ ,\quad y=br\sin\varphi,\quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=abr$$

$$0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{1-r^2}\ ,\quad \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}=r$$

Vậy :

$$V=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}/2}r\left(\sqrt{1-r^2}-r\right)dr$$

$$= abc\,2\pi\left(\int_0^{\sqrt{2}/2}\sqrt{1-r^2}\,r\,dr - \int_0^{\sqrt{2}/2} r^2\,dr\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\,abc\left(2-\sqrt{2}\right).$$

1180. Miền B được giới hạn bởi hai mặt paraboloide $z = x^2 + y^2$ và $z = 2(x^2 + y^2)$, có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền D được giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$.

$$B = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x,\ x^2 + y^2 \le z \le 2x^2 + 2y^2$$

Vậy :

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2 + y^2)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right) dx = \frac{3}{35}.$$

1181. $B = \{(x,y,z):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ xy \le z \le x + y$

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y - xy)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{24}$$

1182. Vật thể B được giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + z^2 = 1$ (có đường sinh song song với trục Oy), có hình chiếu D trên mặt phẳng Oxy là hình vuông có các đỉnh A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0), D(0, -1) tức là miền D được giới hạn bởi các đường thẳng $x + y = \pm 1$ và $x - y = \pm 1$.

Do vật thể B đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ nên :

$$V = 8\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = 8\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - 8\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 8\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1\right) = \frac{2}{3}(3\pi - 4).$$

1183. Vật thể B được giới hạn bởi mặt paraboloide $z = x^2 + y^2$ và mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, hai mặt này cắt nhau theo mặt phẳng $z = 1$, tạo thành giao tuyến $x^2 + y^2 = 1$. Vậy :

$$B = \left\{ (x, y, z):\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$

Cho nên :

$$V = 4\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz$$

$$= 4\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\right) dy.$$

Đổi qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\varphi}{2},\ \ 0 \leq r \leq 1,\quad \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = r$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2 = r - r^2.$$

Khi đó : $$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r - r^2) r\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 (r^2 - r^3)\,dr$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

1184. Chú ý phương trình của mặt cầu :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az = x^2 + y^2 + (z-a)^2 - a^2 = 0$$

Như vậy vật thể B tạo thành bởi mặt cầu $z^2 + y^2 + z^2 = 2az$ và mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ ($x^2 + y^2 \le z^2$), nằm trong nửa không gian $z \ge 0$. Hai mặt này cắt nhau theo đường cong :

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = a.$$

Như vậy hình chiếu của vật thể xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn : $x^2 + y^2 \le a^2$.

Vậy :

$$B = \left\{(x,y,z): x^2+y^2 \le a^2,\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le a + \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right.$$

Đổi sang tọa độ trụ : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le a,\ \ r \le z \le a + \sqrt{a^2 - r^2}$$

Khi đó :

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz = 2\pi\int_0^a r\left(a + \sqrt{a^2-r^2} - r\right)dr$$

$$= 2\pi\left(a\int_0^a r\,dr + \int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr - \int_0^a r^2 dr\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) = \pi a^3.$$

1185. Vật thể B nằm giữa hai mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $(b > a)$, bị chắn bởi mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$, $z \ge 0$. Chú ý rằng đường sinh của mặt nón tạo thành với trục Oz một góc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Do đó chuyển qua tọa độ cầu

$$x = r\sin\theta.\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta.\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

thì $$0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ a \le r \le b$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\theta$$

Vậy :

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta \int_a^b r^2 dr = 2\pi.\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right).\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

1186. Chú ý rằng $\frac{x}{h} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2$ nên $x \ge 0$, nói cách khác vật thể B nằm trong nửa không gian $x \ge 0$. Đổi sang hệ tọa độ cầu suy rộng :

$$\begin{cases} x = ar\sin\theta.\cos\varphi \\ y = br\sin\theta.\sin\varphi \\ z = cr\cos\theta \end{cases}$$
$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = abc\, r^2\sin\theta$$

trong đó : $$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le r \le \sqrt[3]{\frac{a\sin\theta.\cos\varphi}{h}}$$

Vậy :

$$V = abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a\sin\theta\cos\varphi}{h}}} r^2 dr$$

$$= abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{1}{3h} a.\sin^2\theta.\cos\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{a^2bc}{3h}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\pi a^2 bc}{3h}.$$

1187. Vật thể B nằm trong góc phần tám thứ nhất của không gian $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Đổi sang tọa độ cầu suy rộng :

$$\begin{cases} x = ar\sin^4\theta.\cos^4\varphi & 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ y = br\sin^4\theta.\sin^4\varphi & 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} \\ z = cr\cos^4\theta & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = 16abc.r^2.\cos^3\theta.\sin^7\theta.\cos^3\varphi.\sin^3\varphi$$

Khi đó :

$$V = 16abc\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi.\sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta.\sin^7\theta\, d\theta.\int_0^1 r^2 dr$$

Ta có : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi.\sin^3\varphi\, d\varphi = \int_0^1 t^3(1-t^2)\,dt = \frac{1}{12}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta.\sin^7\theta\, d\theta = \int_0^1 t^3(1-t^2)^3\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \tau(1-\tau)^3\,d\tau = \frac{1}{40}.$$

Vậy :

$$V = 16abc.\frac{1}{12}.\frac{1}{40}.\frac{1}{3} = \frac{abc}{90}.$$

1188. Vật thể V đối xứng qua các mặt phẳng tọa độ.

Đổi sang tọa độ cầu suy rộng :

$$\begin{cases} x = ar\sin^2\theta.\cos^2\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = br\sin^2\theta.\sin^2\varphi & 0 \le \theta \le \pi \\ z = cr\cos^2\theta & 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = 9abc.r^2\cos^2\theta.\sin^5\theta.\cos^2\varphi.\sin^2\varphi$$

Do đó :

$$V = 8.9abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi.\sin^2\varphi\, d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta.\sin^5\theta\, d\theta\int_0^1 r^2\,dr$$

$$= 72.abc.\frac{1}{3}\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,dt\int_0^1 t^2(1-t^2)^2\,dt = \frac{4\pi abc}{35}.$$

1189. Vật thể B bị chắn giữa hai mặt cong

$$z = x^2 + y^2 \text{ và } z = 2(x^2+y^2)$$

có hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là miền D được giới hạn bởi các đường cong :

$$xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = \frac{1}{2}x \text{ và } y = 2x$$

Vậy nên :

$$V = \iint_D dxdy\int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy.$$

Chú ý rằng miền D gồm hai miền con D_1 và D_2 đối xứng nhau qua đường thẳng y = -x. Do đó :

$$V = 2\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,dxdy\,, \qquad D_1 \subset \{(x,y)\in D,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

Đổi biến : $\quad xy = u,\ y = vx$

hay : $\quad x = u^{1/2}.v^{-1/2}\,,\ \ y = u^{1/2}.v^{1/2}$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{2v}\,,\quad a^2 \le u \le 2a^2,\ \frac{1}{2} \le v \le 2$$

Khi đó :

$$V = 2\int_{a^2}^{2a^2} du \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2v}\left(\frac{u}{v}+uv\right)dv$$

$$= \int_{a^2}^{2a^2} u\,du \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{v^2}\right)dv = \frac{3}{2}a^4.3 = \frac{9a^4}{2}.$$

1198. Ta có $\quad dx = a(1-\cos t)dt\,, \quad dy = a\sin t dt$

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$\int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2.a\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$= a^3\sqrt{2}\int_0^{2\pi} 4.\sin^4\frac{t}{2}\,\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$$= 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\,du$$

$$= -16a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)^2\,d\cos u$$

$$= -16a^3\int_0^{\pi}(1+\cos^4 u - 2\cos^2 u)\,d\cos u = \frac{256}{15}a^3.$$

1199. $\int\limits_C xyds = \int\limits_0^{t_0} a^2 cht.sht.a\sqrt{ch\,2t}\,dt$

$$= \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{t_0}\sqrt{ch\,2t}\ \frac{1}{2}d\,ch\,2t$$

$$= \frac{a^3}{6}\,ch\,2t.\sqrt{ch\,2t}\ \Big|_0^{t_o} = \frac{a^3}{6}\left(ch^{3/2}t_o - 1\right).$$

1200. Phương trình tham số của đường astroide là :

$$x = a\cos^3 t,\quad y = a\sin^3 t,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$ds = 3a\left|\sin t.\cos t\right|dt$$

$$x^{4/3} + y^{4/3} = a^{4/3}(\cos^4 t + \sin^4 t).$$

Vậy ta có :

$$I = \int\limits_C \left(x^{4/3} + y^{4/3}\right)ds = 3a^2.\sqrt[3]{a}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 t + \sin^4 t)\left|\sin t.\cos t\right|dt.$$

Viết tích phân trên đoạn $[0, 2\pi]$ thành tổng các tích phân trên 4 đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ và $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, sau đó áp dụng những phép thay biến thích hợp ta nhận được :

$$I = 3.a^2\sqrt[3]{a}.4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)\sin t\cos t\,dt$$

$$= 12.a^2\sqrt[3]{a}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t.\sin t\,dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t.\cos t\,dt\right)$$

$$= 12.a^2\sqrt[3]{a}.\frac{1}{6}\left(\sin^6 t - \cos^6 t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{7/3}.$$

1201. Chuyển qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, đường Lemniscate có phương trình : $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ với $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ hoặc $\frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4}$.

Từ đó suy ra phương trình tham số của nó có dạng :

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\cos\varphi, \quad y = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\sin\varphi$$

trong đó : $\left|\varphi - k\pi\right| \le \frac{\pi}{4}$ với k = 0, và k = 1.

$$x'(\varphi) = -\frac{a\sin 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad y'(\varphi) = -\frac{a\cos 3\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$ds = \frac{a\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Vậy :

$$I = \int_C |y|\,ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\sqrt{\cos 2\varphi}.|\sin\varphi|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{a^2\sqrt{\cos 2\varphi}.|\sin\varphi|}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi$$

$$= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin\varphi|\,d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\,d\varphi = 2a^2\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

1202. Chuyển qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, thay vào phương trình của đường tròn $x^2 + y^2 = ax$, ta có :

$$r^2 = ar\cos\varphi \quad \text{hay} \quad r = a\cos\varphi$$

Từ đó suy ra phương trình tham số của đường tròn đã cho là :

$$x = a\cos^2\varphi, \quad y = a\cos\varphi.\sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$x'(\varphi) = -2a\cos\varphi.\sin\varphi = -a\sin 2\varphi$$

$$y'(\varphi) = a\cos 2\varphi$$

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 2\varphi + a^2\cos^2 2\varphi}\,d\varphi = a\,d\varphi$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2\cos^4\varphi + a^2\cos^2\varphi.\sin^2\varphi} = a\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Vậy :

$$I = \int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi = 2a^2.$$

1203. Mặt phẳng $x + y + z = 0$ đi qua gốc tọa độ và cắt mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ theo một đường tròn C tâm O(0, 0, 0) bán kính a. Vì vai trò của x, y và z là như nhau cho nên :

$$\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds$$

Do đó :

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3}\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$$

Trên đường tròn C thì $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nên :

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3}\int_C a^2 ds = \frac{a^2}{3}.2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}$$

trong đó ta lưu ý $\int_C ds = 2\pi a$ là độ dài của đường tròn C.

1204. Ta có $dx = (\cos t - t\sin t)dt$, $dy = (\sin t + t\cos t)dt$, $dz = dt$, $ds = \sqrt{t^2+2}\,dt$

$$I = \int_C z\,ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{1}{3}\left[(t_0^2+2)^{3/2} - 2^{3/2}\right].$$

1205. Chọn x làm tham số của đường cong, ta có :

$$y = \sqrt{ax},\ z = \sqrt{x^2 + ax},\quad 0 \le x \le a$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}},\quad z'(x) = \frac{2x + a}{2\sqrt{x^2 + ax}}$$

$$ds = \frac{\sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}}{2\sqrt{x^2 + ax}}\,dx$$

$$I = \int_C z\,ds = \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{x^2 + ax}\ \frac{\sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}}{\sqrt{x^2 + ax}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\ dx$$

$$= \frac{a^2}{256.\sqrt{2}}\left(100.\sqrt{38} - 72 - 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right).$$

1206. $x'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)$, $z'(t) = -e^{-t}$, $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = 3e^{-2t}$:

Do đó :

$$L = \int_0^{+\infty}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{e^{-2t}}\,dt = \sqrt{3}\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \sqrt{3}\,.$$

1207. Tham số hóa đường cong bằng cách đặt :

$$x = t,\quad y = a.\arcsin\frac{t}{a},\quad z = \frac{a}{4}\ln\frac{a - t}{a + t},\quad 0 \le t \le 1.$$

Khi đó :

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\ dt\,.$$

Thay $y'(t) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - t^2}}$, $\quad z'(t) = -\dfrac{a^2}{2(a^2 - t^2)^2}$, $\quad x'(t) = 1$

ta nhận được : $$ds = \frac{3a^2 - 2t^2}{2(a^2 - t^2)}dt$$

Áp dụng công thức tính độ dài cung :

$$L = \int_C ds = \int_0^1 \frac{1}{2}.\frac{3a^2 - 2t^2}{a^2 - t^2}dt$$

$$= \int_0^1 dt + \frac{a^2}{2}\int_0^1 \frac{dt}{a^2 - t^2} = 1 + \frac{a}{4}\ln\frac{a+1}{a-1}.$$

Chú ý rằng $\frac{a}{4}\ln\frac{a+1}{a-1} = -\frac{a}{4}\ln\frac{a-1}{a+1} = -z(1) = +a$

Vậy độ dài của đường cong là :

$$L = 1 + a \quad (a > 1).$$

1208. Tham số hóa đường cong bằng cách đặt : $z = t$. Từ phương trình của đường cong ta có :

$$x + y = \frac{(x-y)^2}{a}, \text{ do đó : } \quad x - y = \frac{9}{8}z^2\frac{a}{(x-y)^2}$$

hay : $$x - y = \frac{3^{2/3}a^{1/3}t^{2/3}}{2}$$

và $$x + y = \frac{3^{4/3}a^{-1/3}t^{4/3}}{4}$$

Từ đó nhận được phương trình tham số của đường cong là :

$$x = \frac{1}{4}\left(3^{2/3}a^{1/3}t^{2/3} + \frac{3^{4/3}a^{-1/3}t^{4/3}}{2}\right)$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{3^{4/3}a^{-1/3}t^{4/3}}{2} - 3^{2/3}a^{1/3}t^{2/3}\right), \quad z = t$$

$$dx = \frac{1}{2}\left(3^{-1/3}a^{1/3}t^{-1/3} + 3^{1/3}a^{-1/3}t^{1/3}\right)dt$$

$$dy = \frac{1}{2}\left(3^{1/3}a^{-1/3}t^{1/3} - 3^{-1/3}a^{1/3}t^{-1/3}\right)dt$$

$$dz = dt.$$

Vậy nên :

$$ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 \left(3^{-1/3}a^{1/3}t^{-1/3} + 3^{1/3}a^{-1/3}t^{1/3}\right)dt,\ 0 \le t \le 2$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(3^{-1/3}a^{1/3}t^{-1/3} + 3^{1/3}a^{-1/3}t^{1/3}\right)dt = \frac{3}{4\sqrt{2}}\left(2\sqrt[3]{\frac{4a}{3}} + \sqrt[3]{\frac{48}{a}}\right).$$

1209. Chuyển qua tọa độ trụ : $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.\ z = z$ chú ý rằng $\varphi = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$, ta nhận được phương trình đường cong là $r^2 + z^2 = a^2,\quad r\text{ch}\varphi = a.$

Từ đó $r = \dfrac{a}{\text{ch}\,\varphi},\quad z^2 = a^2\left(1 - \dfrac{1}{\text{ch}^2\varphi}\right) = a^2.\text{th}^2\varphi$

Vậy :

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\text{ch}\,\varphi},\quad y = \frac{a\sin\varphi}{\text{ch}\,\varphi},\quad z = \pm\, a\,\text{th}\varphi$$

$$x'(\varphi) = -a\,\frac{\sin\varphi\text{ch}\varphi + \cos\varphi\text{sh}\varphi}{\text{ch}^2\varphi}$$

$$y'(\varphi) = a\,\frac{\cos\varphi\text{ch}\varphi - \sin\varphi\text{sh}\varphi}{\text{ch}^2\varphi}$$

$$z'(\varphi) = \pm\,\frac{a}{\text{ch}^2\varphi}$$

$$x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi) = \frac{a^2(1 + \text{ch}^2\varphi + \text{sh}^2\varphi)}{\text{ch}^4\varphi} = \frac{2a^2}{\text{ch}^2\varphi}.$$

Do đó : $$ds = \frac{a\sqrt{2}}{\text{ch}\,\varphi}\,|d\varphi|$$

$$L = a\sqrt{2}\int_0^{|\varphi|}\frac{dt}{\operatorname{ch}t} = a\sqrt{2}\int_0^{\varphi}\frac{\operatorname{ch}t\,dt}{\operatorname{ch}^2 t}$$

$$= a\sqrt{2}\int_0^{|\varphi|}\frac{d\left|\operatorname{sh}\varphi\right|}{1+\operatorname{sh}^2\varphi} = a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sh}|\varphi|\right)$$

$$= a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left|\operatorname{sh}\varphi\right|.$$

Chú ý rằng :

$$\operatorname{sh}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \pm\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}} \text{ nên } L = a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

1210. Khi x biến thiên từ 0 đến $\frac{p}{2}$ thì y biến thiên trong khoảng (-p, p). Ta có :

$$ds = \sqrt{1+x'^2(y)}\,dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}\,dy = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

Do đó khối lượng của cung là :

$$M = \int_C \rho(x,y)\,ds = \int_{-p}^{p}|y|\frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}\,dy = \frac{2}{p}\int_0^p y\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

$$= \frac{2p^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

1211. Tính khối lượng M của cung cicloide đồng chất :

$$M = \int_C ds = \int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,du = 4a.$$

Tọa độ trọng tâm của cung được tính bằng công thức :

$$x_o = \frac{1}{M}\int_C x\,ds, \quad y_o = \frac{1}{M}\int_C y\,ds$$

Do đó :

$$x_o = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(t-\sin t).2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}dt - a\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt = \frac{4a}{3}$$

$$y_o = \frac{1}{4a}\int_0^{\pi} a(1-\cos t).2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt - \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{4a}{3}.$$

1212. Ta có : $x'(t) = e^t(\cos t - \sin t)$, $y'(t) = e^t(\cos t + \sin t)$, $z'(t) = e^t$,

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = e^{2t}\left[(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1\right]$$

$$= 3e^{2t}$$

do đó : $$ds = \sqrt{3}\, e^t\, dt.$$

Khối lượng M của dây cung đồng chất là :

$$M = \int_C ds = \sqrt{3}\int_{-\infty}^{0} e^t dt = \sqrt{3}$$

Tọa độ trọng tâm (x_o, y_o, z_o) được tính theo các công thức :

$$x_o = \frac{1}{M}\int_C x\,ds = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{0} e^t\cos t.\sqrt{3}\,e^t dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\cos t\,dt$$

$$= \frac{e^{2t}}{5}(\sin t + 2\cos t)\Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{2}{5}$$

$$y_o = \frac{1}{M}\int_C y\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}\sin t\,dt = \frac{e^{2t}}{5}(2\sin t - \cos t)\Big|_{-\infty}^{0} = -\frac{1}{5}$$

$$z_o = \frac{1}{M}\int_C z\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt = \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}.$$

1213. a) Đoạn thẳng nối hai điểm O(0,0) và A(1, 2) có phương trình : $y = 2x$

$$I = \int_{OA} x\,dy - y\,dx = \int_0^1 (2x - 2x)\,dx = 0$$

$$K = \int_{OA} x\,dy + y\,dx = \int_0^1 4x\,dx = 2$$

b) Parabol đi qua hai điểm O(0, 0) và A(1, 2) nhận Oy là trục đối xứng : $y = 2x^2$, $dy = 4xdx$.

$$I = \int_{OA} x\,dy - y\,dx = \int_0^1 (x\,4x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$K = \int_{OA} x\,dy + y\,dx = \int_0^1 (x\,4x + 2x^2)\,dx = 6\int_0^1 x^2dx = 2.$$

c) $$I = \int_{OA} x\,dy - y\,dx = \int_{OB} x\,dy - y\,dx + \int_{BA} x\,dy - y\,dx$$

Chú ý rằng trên OB thì $y = 0$, $dy = 0$, còn trên BA thì $x = 1$, $dx = 0$, do đó :

$$I = 0 + \int_0^2 1\,dy = 2$$

$$K = \int_{OA} x\,dy + y\,dx = \int_{OB} x\,dy + y\,dx + \int_{BA} x\,dy + y\,dx$$

$$= 0 + \int_0^2 1\,dy = 2.$$

1214. Chú ý rằng $y = 1 - |1-x| = \begin{cases} x & \text{với } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{với } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Như vậy trên đoạn [0, 1] đường cong C có phương trình $y = x$, còn trong đoạn [1, 2] đường cong C có phương trình $y = 2 - x$. Ký hiệu C_1 là đoạn thẳng $y = x$, $0 \le x \le 1$, C_2 là đoạn thẳng $y = 2 - x$, $1 \le x \le 2$, thì $C = C_1 \cup C_2$.

Ta có :

$$I = \int\limits_{OA} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \int\limits_{C_1} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy + \int\limits_{C_2} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

trong đó :

$$\int\limits_{C_1} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\int\limits_{C_2} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \int_1^2 \left[x^2 + (2-x)^2 - x^2 + (2-x)^2\right] dx$$

$$= 2\int_1^2 (2-x)^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

Vậy : $$\int\limits_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

1215. Phương trình tham số của đường ellipse là :

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$$dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = b\cos t\,dt$$

$$\oint_C (x+y)\,dx + (x-y)\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-a^2 \cos t \sin t - ab\sin^2 t + ab\cos^2 t - b^2 \cos t \sin t \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(ab\cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt = 0.$$

1216. Trên đường cong C : $dx = a(1 - \cos t)dt$, $dy = a\sin t dt$.

$$(2a - y)\,dx + x.dy = \left[(2a - a + a\cos t).a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a\sin t\right]dt$$

$$= a^2 t\sin t dt.$$

Vậy :

$$\int_C (2a - y)\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} a^2 t\sin t\,dt$$

$$= a^2 \left(-t\cos t + \sin t\right)\Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2 .$$

1217. Tham số hóa đường tròn C : $x^2 + y^2 = a^2$ qua hệ tọa độ cực ta có :

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$dx = -a\sin\varphi d\varphi, \quad dy = a\cos\varphi d\varphi,$$

$$\frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2} = -d\varphi.$$

Do đó :

$$\int_C \frac{(x+y)\,dy - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2} = -\int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi.$$

1218. Hình vuông ABCDA có bốn cạnh AB, BC, CD và DA. Cạnh AB có phương trình $x + y = 1$, $0 \le x \le 1$, nên $dx + dy = d(x + y) = 0$. Do đó :

$$\int\limits_{AB} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0.$$

Cạnh BC có phương trình $y - x = 1$ hay $y = x + 1$, $-1 \le x \le 0$, $dx = dy$ và $|x| + |y| = -x + x + 1 = 1$. Do đó :

$$\int\limits_{BC} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 2\int\limits_{BC} dx = 2\int\limits_{0}^{-1} dx = -2.$$

Cạnh CD có phương trình $x + y = -1$, $-1 \le x \le 0$, nên $dx + dy = d(x + y) = 0$. Do đó :

$$\int\limits_{CD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0.$$

Cạnh DA có phương trình $y - x = -1$ hay $y = x - 1$, $0 \le x \le 1$, nên $dx = dy$ và $|x| + |y| = x + 1 - x = 1$. Do đó :

$$\int\limits_{DA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 2\int\limits_{DA} dx = 2\int\limits_{0}^{1} dx = 2.$$

Vậy :

$$\int\limits_{ABCDA} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0.$$

1219. Đường parabol $y = x^2$ và đường thẳng $y = x$ cắt nhau tại hai điểm O(0, 0) và A(1, 1). Do đó :

Trên cung OmA : $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $\text{arctg}\dfrac{y}{x} = \text{arctg}x$ $(0 \le x \le 1)$. Do đó :

$$\int\limits_{OmA} \text{arctg}\frac{y}{x}\,dy - dx = \int\limits_{0}^{1}(2x\,\text{arctg}x - 1)\,dx$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \text{arctg}\,x.dx^2 - 1 = x^2\text{arctg}\,x\Big|_0^1 - \int\limits_{0}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}dx - 1$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - 2 + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - 2.$$

Trên đoạn thẳng OnA : $y = x$, $0 \le x \le 1$, $dy = dx$, $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$. Do đó :

$$\int_{AnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dy - dx = \int_1^0 \left(\frac{\pi}{4} - 1\right)dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Vậy :

$$\int_{OmAnO} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dy - dx = \frac{\pi}{2} - 2 + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 1.$$

1220. Trên đường cong C ta có :

$$(y^2 - z^2)dx + 2yz\,dy - x^2dz$$
$$= (t^4 - t^6)dt + 4t^6\,dt - 3t^4dt$$
$$= (3t^6 - 2t^4)\,dt\,, \quad 0 \le t \le 1.$$

Do đó :

$$\int_C (y^2 - z^2)dx + 2yz\,dy - x^2dz = \int_0^1 (3t^6 - 2t^4)dt = \frac{1}{35}.$$

1221. C là giao tuyến giữa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ và mặt phẳng $y = x.\text{tg}\alpha$, $(0 < \alpha < \pi)$. Như vậy C là một đường tròn tâm tại gốc tọa độ O(0, 0, 0) và bán kính R = a.

Trong mặt phẳng $y = x.\text{tg}\alpha$ ta xây dựng hệ tọa độ mới (ξ, η), trong đó gốc tọa độ trùng với O, trục $O\xi$ là đường thẳng $y = x.\text{tg}\alpha$, còn $O\eta = Oz$. Khi đó phương trình của C là:

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2$$

Tham số hóa đường cong C :

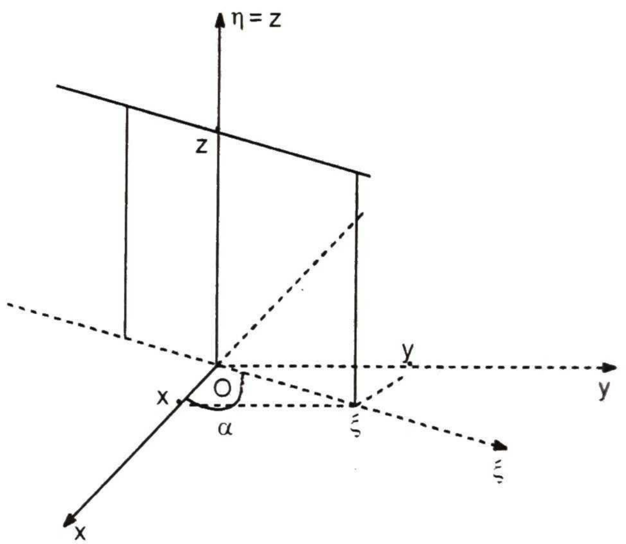
$$\xi = a\cos\varphi,\ \eta = a\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Trở lại biến (x, y, z) ta có :

$$\begin{cases} x = \xi\cos\alpha = a\cos\varphi\cos\alpha \\ y = \xi\sin\alpha = a\cos\varphi\sin\alpha \\ z = a\sin\varphi \end{cases}$$

trong đó α là góc cho trước, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$dx = -a\cos\alpha\sin\varphi d\varphi,\ dy = -a\sin\alpha\sin\varphi d\varphi,\ dz = a\cos\varphi d\varphi$$



Từ đó :

$$(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz = a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)d\varphi$$

Vậy nên tích phân I cần tính là :

$$I = \oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)d\varphi = a^2(\cos\alpha - \sin\alpha)2\pi$$

$$= 2\pi\sqrt{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

1222. Trong hệ tọa độ cực $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, phương trình đường Viviani là :

$$r = a\cos\varphi,\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - r^2},\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

Từ đó ta nhận được phương trình tham số của đường cong :

$$x = r\cos\varphi = a\cos^2\varphi$$

$$y = r\sin\varphi = a\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}a\sin 2\varphi$$

$$z = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi} = a\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = a|\sin\varphi|$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$$

$$dx = -2a\cos\varphi\sin\varphi d\varphi = -a\sin 2\varphi d\varphi$$

$$dy = a\cos 2\varphi d\varphi$$

$$dz = a\cos\varphi.\mathrm{sgn}(\sin\varphi)d\varphi$$

$$y^2dx + z^2dy + x^2dz =$$

$$= \left(-\frac{1}{4}a^2\sin^2 2\varphi a\sin 2\varphi + a^2\sin^2\varphi a\cos 2\varphi + a^2\cos^4\varphi a\cos\varphi\mathrm{sgn}(\sin\varphi)\right)d\varphi$$

$$= a^3\left(-\frac{1}{4}\sin^3 2\varphi + \sin^2\varphi\cos 2\varphi + \cos^5\varphi\mathrm{sgn}(\sin\varphi)\right)d\varphi.$$

Vì :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{4}\sin^3 2\varphi + \cos^5\varphi\mathrm{sgn}(\sin\varphi)\right)d\varphi = 0$$

nên : $I = \int\limits_C y^2dx + z^2dy + x^2dz = a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos 2\varphi d\varphi$

$$= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\cos 2\varphi d\varphi$$

$$= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos 2\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\varphi\right) d\varphi = -\frac{a^3}{2}\frac{1}{2}\pi = -\frac{\pi a^3}{4}.$$

1226. Mặt toàn phần của hình trụ $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le R$ gồm đáy dưới D_1, đáy trên D_2 và mặt trụ S_b

$D_1 = \left\{(x, y, 0): x^2 + y^2 \le R^2\right\}$ nằm trong mặt phẳng $z = 0$

$D_2 = \left\{(x, y, h): x^2 + y^2 \le R^2\right\}$ nằm trong mặt phẳng $z = h$

$S_b = \left\{(x, y, z): x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \le z \le h\right\}$

Và : $S = D_1 \cup D_2 \cup S_b$. Do đó ta có :

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) ds =$$

$$= \iint_{D_1} (x^2 + y^2) ds + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 + h^2) ds + \iint_{S_b} (x^2 + y^2 + z^2) ds.$$

Trong D_1 và D_2 thì $ds = dxdy$, cho nên :

$$\iint_{D_1} (x^2 + y^2) ds + \iint_{D_2} (x^2 + y^2 + h^2) ds$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le R^2} \left[2(x^2 + y^2) + h^2\right] dxdy$$

$$= \pi R^2 h^2 + 2 \iint_{x^2+y^2 \le R^2} (x^2 + y^2) dxdy.$$

Đổi qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, ta có :

$$2\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)\,dxdy = 2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^3dr = 2.2\pi.\frac{R^4}{4} = \pi R^4 .$$

Vậy :

$$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\,ds + \iint\limits_{D_2}(x^2+y^2+h^2)\,ds = \pi R^2h^2 + \pi R^4 .$$

Mặt S_b được chia thành 2 mặt con S_b^1 và S_b^2: trong đó

$$S_b^1 = \left\{(x,y,z):\ y = +\sqrt{R^2-x^2},\ \ 0\le z\le h\right\}$$

$$S_b^2 = \left\{(x,y,z):\ y = -\sqrt{R^2-x^2},\ \ 0\le z\le h\right\}$$

và $S_b = S_b^1 \cup S_b^2$.

Chú ý rằng các mặt S_b^1 và S_b^2 có hình chiếu trên mặt phẳng xOz là hình chữ nhật :

$$-R\le x\le R,\ \ 0\le z\le h$$

và đều có vi phân mặt :

$$ds = \sqrt{1+y'^2_x+y'^2_z}\,dxdz = \frac{R\,dxdz}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

Do đó :

$$\iint\limits_{S_b}(x^2+y^2+z^2)\,ds = \iint\limits_{S_b}(R^2+z^2)\,ds$$

$$= 2\iint\limits_{S_b^1}(R^2+z^2)\,ds = 2\int_{-R}^{R}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^h(R^2+z^2)\,dz$$

$$= 4R\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^h(R^2+z^2)\,dz = 2\pi Rh\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right)$$

Vậy :

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \pi R^2 h^2 + \pi R^4 + 2\pi R h\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right).$$

1227. Phương trình mặt trụ $x^2 + z^2 = 2az$ có thể viết lại dưới dạng : $(z - a)^2 = a^2 - x^2$, $|x| \le a$.

Từ đó : $z = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$

Gọi S là phần của mặt trụ $z = a + \sqrt{a^2 - x^2}$, $|x| \le a$ bị cắt bởi mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Hình chiếu của mặt S xuống mặt phẳng Oxy là miền D được giới hạn bởi đường cong C đóng có phương trình :

$$2x^2 + y^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$$

Trên mặt S ta có : $z'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $z'_y = 0$

$$ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dxdy$$

Vậy :

$$I = \iint_S z\, ds = a\iint_D \left(a + \sqrt{a^2 - x^2}\right)\frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a\iint_D \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dxdy.$$

Chuyển sang tọa độ cực $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, thay vào phương trình đường C ta có :

$$2r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2ar \quad \text{hay:} \quad r = \frac{2a}{1 + \cos^2\varphi}$$

Vậy trong miền D : $0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le \dfrac{2a}{1+\cos^2\varphi}$.

Mặt khác do D là miền đối xứng qua 2 trục tọa độ nên

$$I = a\iint_D \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)dxdy = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2\cos^2\varphi}}\right) rdr$$

$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^2 \frac{d\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2} - 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2a}{1+\cos^2\varphi}} \frac{a\,d(a^2 - r^2\cos^2\varphi)}{2\cos^2\varphi\sqrt{a^2 - r^2\cos^2\varphi}}$$

$$= 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2} - 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{\cos^2\varphi}\left(\frac{1-\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi} - 1\right)d\varphi$$

$$= 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+\cos^2\varphi)^2} + 8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\cos^2\varphi}$$

$$= 8a^3\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(tg\varphi)}{(2+tg^2\varphi)} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(tg\varphi)}{(2+tg^2\varphi)^2}\right)$$

$$= 8a^3\left(\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{tg\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{tg\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{tg\varphi}{4(2+tg^2\varphi)}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4\pi a^3\left(\sqrt{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{7\pi\sqrt{2}\,a^3}{2}.$$

1228. S là nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ nên có phương trình $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $\ x^2 + y^2 \le a^2$

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Do đó $ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \dfrac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

Từ đó :

$$I = \iint\limits_S (x + y + z)\,ds = a\iint\limits_D \left(x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)\frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= a\iint\limits_D \left(1 + \frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right) dxdy$$

trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \le a^2$.

Chuyển qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le a$, ta có :

$$I = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{a^2 - r^2}} + 1\right) rdr$$

$$= a\int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi \int_0^a \frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}\,dr + a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr = \pi a^3.$$

1229. S là mặt nón có đáy trên D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ nằm trong mặt phẳng $z = 1$, mặt xung quanh S_1 là mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(0 \le z \le 1)$.

Trên D: $ds = dxdy$, $x^2 + y^2 \le 1$.

Chuyển qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, ta có :

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 rdr = 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Mặt bên S_1 có phương trình $z = \sqrt{x^2 + y^2} \le 1$; hình chiếu của S_1 xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, ds = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\ dxdy = \sqrt{2}\ dxdy$$

Vậy nên chuyển qua tọa độ cực $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, ta có :

$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\,ds = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\,dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^3dr = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Cuối cùng ta nhận được

$$I = \iint_D(x^2+y^2)\,ds + \iint_{S_1}(x^2+y^2)\,ds = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

1230. Tứ diện S $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ gồm 4 mặt bên

$$S_1 = \{(x,y,z):\ z = 0,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1-x\}$$
$$S_2 = \{(x,y,z):\ x = 0,\ \ 0 \le y \le 1,\ \ 0 \le z \le 1-y\}$$
$$S_3 = \{(x,y,z):\ y = 0,\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le z \le 1-x\}$$
$$S_4 = \{(x,y,z):\ z = 1-x-y,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$$

Trên S_1, $ds = dxdy$, do đó

$$\iint_{S_1}\frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{(1+x)}\right)dx = -\frac{1}{2} + \int_0^1\frac{dx}{1+x} = -\frac{1}{2} + \ln 2\,.$$

Trên S_2, $ds = dydz$, do đó

$$\iint_{S_2}\frac{ds}{(1+x+y)^2} = \int_0^1\frac{dy}{(1+y)^2}\int_0^{1-y}dz = \int_0^1\frac{1-y}{(1+y)^2}\,dy = 1-\ln 2$$

Tương tự $\displaystyle\iint_{S_3}\frac{ds}{(1+x+y)^2} = 1-\ln 2\,.$

Trên $S_4 : z = 1 - x - y,\ z'_x = -1,\ \ z'_y = -1,\ ds = \sqrt{3}\ dxdy$

nên : $\iint\limits_{S_4} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3} \iint\limits_{S_1} \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$

Vậy :

$$\iint\limits_{S} \frac{ds}{(1+x+y)^2} = -\frac{1}{2} + \ln 2 + 2(1 - \ln 2) + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \left(\sqrt{3} - 1\right)\ln 2 .$$

1231. Giao tuyến của mặt $z = x^2 + y^2$ với mặt phẳng $z = 1$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trên mặt phẳng $z = 1$. Do đó mặt S có phương trình $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1$.

$$z'_x = 2x,\ z'_y = 2y,\ \ ds = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\ dxdy$$

Do đó :

$$I = \iint\limits_{S} |xyz|\, ds = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|xy(x^2+y^2)\right| \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\ dxdy$$

Do tính đối xứng của miền lấy tích phân và tính chẵn đối với x và y của hàm dưới dấu tích phân, cho nên :

$$I = 4\iint\limits_{D} xy(x^2+y^2)\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\ dxdy$$

trong đó $D = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$.

Đổi qua hệ tọa độ cực $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 1$, ta nhận được :

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 r^5 \sqrt{1+4r^2}\ dr$$

$$I = 2\int_1^0 r^5\sqrt{1+4r^2}\,dr.$$

Đổi biến : $u = \sqrt{1+4r^2}$, $u^2 = 1 + 4r^2$, $2u\,du = 8r\,dr$

hay : $$r\,dr = \frac{1}{4}u\,du, \quad r^4 = \frac{(u^2-1)^2}{16}$$

$$I = 2\int_1^{\sqrt{5}} \frac{(u^2-1)^2}{16}u\frac{1}{4}u\,du = \frac{1}{32}\int_1^{\sqrt{5}}(u^6 - 2u^4 + u^2)\,du = \frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

1232. Mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$ có giao tuyến với mặt phẳng $z = 1$ là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ nằm trên mặt phẳng đó. Vì vậy hình chiếu của phần mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ bị cắt bởi mặt phẳng $z = 1$ xuống mặt phẳng tọa độ Oxy là hình tròn D: $x^2 + y^2 \leq 1$.

Ta có phương trình của S : $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy$$

Vậy :

$$I = \iint_S z^2 dxdy = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy$$

Chuyển qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$, ta có :

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2.r\,dr = \sqrt{2}\,2\pi\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

1233. Ký hiệu $D = \{(u,v):\ 0 \leq u \leq a\ ,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$

Áp dụng công thức :

$$I = \iint_S z\,ds = \iint_D v.\sqrt{EG - F^2}\,dudv$$

trong đó E, G, F là các hệ số Gauss :

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1,\ \ G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2$$

$$F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0.$$

Do đó $EG - F^2 = 1 + u^2$, và ta có :

$$I = \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du \int_0^{2\pi} v\,dv = 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= \pi^2\left(a\sqrt{1+a^2} + \ln\left(a + \sqrt{1+a^2}\right)\right).$$

1234. S là phần mặt nón $z = \sqrt{x^2+y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2+y^2=2ax$ ($a > 0$), do đó hình chiếu của S xuống mặt phẳng tọa độ Oxy chính là hình tròn D: $(x-a)^2 + y^2 \le a^2$. Vì vậy :

$$I = \iint_S (xy + yz + zx)\,ds = \iint_D \left(xy + (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)\sqrt{2}\,dxdy.$$

Chuyển qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$, chú ý rằng: $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 2a\cos\varphi$, ta có :

$$I = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)\,d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^3 dr$$

$$= 4\sqrt{2}\,a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos^5\varphi + \cos^4\varphi)\sin\varphi + \cos^5\varphi\right]d\varphi$$

$$= 4\sqrt{2}\,a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\,d\varphi = 4\sqrt{2}\,a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi.\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= 4\sqrt{2}\,a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sin^4\varphi - 2\sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi) = \frac{64\sqrt{2}}{15}\,a^4.$$

1235. Đổi biến qua hệ tọa độ cầu :

$x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta, 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = a^2\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = a^2\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = a^2\sin\theta\cos\theta$$

Áp dụng công thức :

$$I = \iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (x.A + y.B + z.C)\,d\theta$$

Ta có :

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \Big(a\sin\theta\cos\varphi a^2\sin^2\theta\cos\varphi + a\sin\theta\sin\varphi a^2\sin^2\theta\sin\varphi + $$
$$+ a\cos\theta\, a^2\sin\theta\cos\theta\Big)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[a^3\sin^3\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + a^3\sin\theta\cos^2\theta\right]d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} a^3\sin\theta\,d\theta = a^3 2\pi \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = 4a^3\pi.$$

1236. Đổi qua hệ tọa độ cầu :

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$. Khi đó trên mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$ thì $\theta = 45°,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Do đó phương trình tham số của mặt nón là :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}r\cos\varphi,\ \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}r\sin\varphi,\ \ z = \frac{\sqrt{2}}{2}r,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Mặt lấy tích phân S^+ là phần giới hạn của mặt nón $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$. Do đó

$$0 \le \frac{\sqrt{2}}{2} r \le h \quad \text{hay} \quad 0 \le r \le \sqrt{2}\, h.$$

Ta có :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\varphi,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} r\cos\varphi$$

Tương tự :

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\varphi,r)} = \frac{1}{2} r\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\varphi,r)} = -\frac{1}{2} r$$

Khi đó véctơ pháp tuyến ngoài của mặt nón có các tọa độ (A, B, C). Vậy :

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}h} \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} r\right) A + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r - \frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi\right).B + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} r\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} r\sin\varphi\right).C \right] dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sqrt{2}}{4} r^2 \left[(\sin\varphi - 1)\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\sin\varphi + (\cos\varphi - \sin\varphi)\right] dr$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (\sin\varphi - \cos\varphi)\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}h} \frac{\sqrt{2}}{4} r^2 dr = 0.$$

1237. Chuyển qua hệ tọa độ cầu suy rộng : Phương tham số của mặt S $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ là :

$$x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = b\sin\theta\sin\varphi,\quad z = c.\cos\theta$$

$$(0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$$

Chú ý rằng véctơ pháp tuyến ngoài của S là $\vec{n} = (A, B, C)$ trong đó :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = b.c\sin^2\theta.\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = a.c\sin^2\theta.\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = ab\cos\theta.\sin\theta$$

Khi đó :

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{bc.\sin^2\theta.\cos\varphi}{a\sin\theta\cos\varphi} + \frac{ac\sin^2\theta\sin\varphi}{b\sin\theta\sin\varphi} + \frac{ab\cos\theta\sin\theta}{c\cos\theta} \right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \sin\theta\, d\theta$$

$$= 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) = 4\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

1238. Chuyển qua hệ tọa độ cầu suy rộng, ta có phương trình mặt S

$$x = a + R\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = b + R\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = c + R\cos\theta \qquad , \quad 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Pháp tuyến ngoài của mặt cầu S là $\vec{n} = (A, B, C)$, trong đó :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = R^2 \sin^2\theta.\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = R^2 \sin^2\theta.\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = R^2 \sin\theta.\cos\theta$$

Khi đó :

$$I = \iint\limits_{S^+} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (x^2 A + y^2 B + z^2 C)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[(a + R\sin\theta\cos\varphi)^2 A + (b + R\sin\theta\sin\varphi)^2 B + (c + R\cos\theta)^2 C\right] d\theta$$

$$= R^2 \int_0^{2\pi} (a^2 \cos\varphi + b^2 \sin\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta +$$

$$+ R^4 \int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^4\theta\, d\theta + c^2 R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^3\theta \sin\theta\, d\theta +$$

$$+ 2R^3 \int_0^{2\pi} (a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi)\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta + 2cR^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

Chú ý rằng :

$$\int_0^{2\pi} (a^2 \cos\varphi + b^2 \sin\varphi)\, d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) - \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2\varphi) d(\cos\varphi) = 0$$

$$\int_0^{\pi} (\cos^3\theta \sin\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi} \cos^3\theta\, d(\cos\theta) = 0$$

Do đó :

$$I = 2R^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{a}{2}(1+\cos 2\varphi) + \frac{b}{2}(1-\cos 2\varphi) \right] d\varphi \int_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1) d(\cos\theta) +$$

$$+ 2cR^3\, 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d(-\cos\theta)$$

$$= 2R^3(a\pi + b\pi)\frac{4}{3} + 4cR^3\pi\,\frac{2}{3} = \frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$$

1239. Biên của hình hộp $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, gồm sáu mặt :

$$\begin{array}{llll} S_1: & x = 0, & 0 \le y \le b, & 0 \le z \le c; \\ S_2: & x = a, & 0 \le y \le b, & 0 \le z \le c; \\ S_3: & y = 0, & 0 \le x \le a, & 0 \le z \le c; \\ S_4: & y = b, & 0 \le x \le a, & 0 \le z \le c; \\ S_5: & z = 0, & 0 \le x \le a, & 0 \le y \le b; \\ S_6: & z = c, & 0 \le x \le a, & 0 \le y \le b. \end{array}$$

Vì tích phân lấy theo phía ngoài S^+ của hình hộp và chú ý rằng trên S_1, S_2 : $dx = 0$, trên S_3, S_4 : $dy = 0$, trên S_5, S_6 : $dz = 0$, ta có :

$$I = \iint_{S^+} f(x)\,dydz + g(y)\,dzdx + h(z)\,dxdy$$

$$= -\iint_{S_1} f(x)\,dydz + \iint_{S_2} f(x)\,dydz - \iint_{S_3} g(y)\,dzdx +$$

$$+ \iint_{S_4} g(y)\,dzdx - \iint_{S_5} h(z)\,dxdy + \iint_{S_6} h(z)\,dxdy$$

$$= -f(0).bc + f(a).bc - g(0)ac + g(b)ac - h(0)ab + h(c)ab$$

$$= [f(a) - f(0)]bc + [g(b) - g(0)]ac + [h(c) - h(0)]db$$

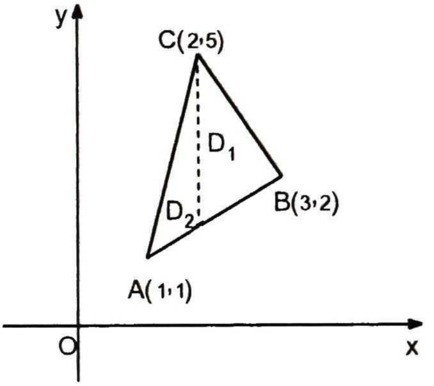
$$= \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right] abc\,.$$

1245. Gọi D là tam giác ABC trong mặt phẳng Oxy, trong đó A(1, 1) B(3,2) và C(2,5).

Cạnh AB có phương trình : $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Cạnh BC có phương trình : $y = -3x + 11$

Cạnh CA có phương trình : $y = 4x - 3$.



Áp dụng công thức Green :

$$I = \oint_C (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = \iint_D (-2x - 2x - 2y)dxdy$$

$$= -\iint_D (4x + 2y)\,dxdy$$

$$= -\iint_{D_1} (4x+2y)dxdy - \iint_{D_2} (4x+2y)dxdy$$

trong đó D_1 và D_2 là các miền sau đây :

$$D_1 = \left\{ (x,y):\ 1 \le x \le 2,\ \ \frac{1}{2}(x+1) \le y \le 4x-3 \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x,y):\ 2 \le x \le 3,\ \ \frac{1}{2}(x+1) \le y \le -3x+11 \right\}$$

Sau khi tính các tích phân hai lớp trên D_1 và D_2, ta nhận được

$$I = \oint_C (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy = -\frac{140}{3}.$$

1246. Ký hiệu D là hình ellipse có biên $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Áp dụng công thức Green đối với tích phân đường lấy trên đường ellipse (C), theo chiều ngược kim đồng hồ ta có :

$$I = \oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x+y) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right]dxdy$$

$$= -2\iint_D dxdy = -2\pi ab$$

trong đó $\iint_D dxdy = \pi ab$ là diện tích hình ellipse.

1247. Áp dụng công thức Green ta nhận được :

$$I = \oint_C e^x(1-\cos y)\,dx - e^x(y-\sin y)\,dy = -\iint_D y.e^x\,dxdy$$

$$= -\int_0^{\pi} e^x dx \int_0^{\sin x} y\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^x(1-\cos 2x)\,dx = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x\,dx + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^{\pi}-1\right) + \frac{1}{20}\left(e^{\pi}-1\right) = -\frac{1}{5}\left(e^{\pi}-1\right).$$

1248. Áp dụng công thức Green với

$$P(x,y) = e^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy - 2xe^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy$$

$$Q(x, y) = e^{-(x^2-y^2)} \sin 2xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xe^{-(x^2-y^2)} \sin 2xy + 2ye^{-(x^2-y^2)} \cos 2xy.$$

Do đó : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$. Vậy ta có :

$$I = \oint_C e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$$

trong đó D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$.

1249. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(1, 1) và B(2, 6) là $y = 5x - 4$, còn dạng tổng quát của parabol có trục thẳng đứng đi qua ba điểm A, B và gốc tọa độ là : $y = ax^2 + bx + c$. Từ đó suy ra : $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$, vậy : $y = 2x^2 - x$.

Chú ý rằng hiệu $I_2 - I_1$ là tích phân đường loại II lấy theo chu tuyến đóng AnBmA theo chiều dương. Áp dụng công thức Green ta có :

$$I_2 - I_1 = \oint_{AnBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-(x-y)^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)^2\right] dxdy = -4\iint_D x\,dxdy$$

trong đó D là miền được giới hạn bởi chu tuyến đóng AnBmA.

Tính tích phân trên miền D :

$$-4\iint_D x\,dxdy = -4\int_1^2 x\,dx \int_{2x^2-x}^{5x-4} dy = -4\int_1^2 (6x^2 - 4x - 2x^3)dx = -2$$

Vậy : $I_2 - I_1 = 2$ hay $I_2 = I_1 + 2$.

1250. Ký hiệu C là chu tuyến đóng gồm đoạn thẳng OA nối hai điểm O(0, 0) và A(a, 0), và cung nửa đường tròn AnO, lấy theo chiều dương từ O đến A, D là hình phẳng (nửa hình tròn $x^2 + y^2 \le ax$ $(y \ge 0)$, bán kính $R = \frac{a}{2}$).

Áp dụng công thức Green ta có :

$$I = \oint_C (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó : $P = e^x \sin y - my$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - m$

$Q = e^x \cos y - m$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y$

và $$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - (e^x \cos y - m) = m$$

Cho nên :

$$I = \iint_D m\,dxdy = m\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{m\pi a^2}{8}$$

trong đó $\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{8}$ là diện tích của miền D.

Từ đó :

$$I = \frac{m\pi a^2}{8} - \int_{OA} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy$$

Chú ý rằng trên đoạn OA thì $y = 0$ nên $\sin y = 0$, $dy = 0$. Do đó tích phân đường lấy trên OA bằng 0.

Vậy $$I = \frac{m\pi a^2}{8}.$$

1251. Chú ý rằng : $\oint\limits_{AmBA} = \int\limits_{AmB} + \int\limits_{BA}$, nên ta biểu diễn tích phân I lấy theo đường cong AmB dưới dạng :

$$I = \oint_{AmBA} \big(\varphi(y)e^x - my\big)\,dx + \big(\varphi'(y)e^x - m\big)dy +$$

$$+ \int_{AB} \big(\varphi(y)e^x - my\big)dx + \big(\varphi'(y)e^x - m)\,dy\big).$$

Ký hiệu D là miền được giới hạn bởi chu tuyến đóng AmBA, có diện tích S cho trước. Áp dụng công thức Green ta có :

$$\oint\limits_{AmBA}\left(\varphi(y)e^{x} - my\right)dx + \left(\varphi'(y)e^{x} - m\right)dy =$$

$$= \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi'(y)e^{x} - m\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(y)e^{x} - my\right)\right]dxdy = m\iint\limits_{D} dxdy = mS$$

Bây giờ ta hãy tính tích phân lấy theo đoạn thẳng AB.

$$I_1 = \int\limits_{AB}\left(\varphi(y)e^{x} - my\right)dx + \left(\varphi'(y)e^{x} - m\right)dy$$

AB là đoạn thẳng nối hai điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$, nằm trên đường thẳng có phương trình :

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$dy = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}dx.$$

Ta có :

$$I_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left[\varphi(y)e^{x} - m\left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right) + \left(\varphi'(y)e^{x} - m\right)\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]dx$$

trong đó :

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(y)e^{x}dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(y)de^{x} = \varphi(y)e^{x}\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi'(y)e^{x}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}dx$$

$$= \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - \int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi'(y)e^{x}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}dx.$$

$$-m\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\right)dx =$$

$$= -m\left[y_1(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)\right].$$

Thay các kết quả này vào biểu thức của tích phân I_2, ta có :

$$I_2 = \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - my_1(x_2 - x_1) -$$

$$-\frac{m}{2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) - m(y_2 - y_1) =$$

$$= \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2).$$

Vậy :

$$I = mS + \varphi(y_2)e^{x_2} - \varphi(y_1)e^{x_1} - m(y_2 - y_1) - \frac{m}{2}(x_2 - x_1)(y_1 - y_2).$$

1252. Để cho tích phân I không phụ thuộc α và β, với chu tuyến đóng C tùy ý thì :

$$I = \oint_C P(x+\alpha, y+\beta)\,dx + Q(x+\alpha, y+\beta)\,dy$$

$$= \oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

tức là :

$$I_1 = \oint_C \left[P(x+\alpha,\ y+\beta) - P(x,y)\right]dx + \left[Q(x+\alpha, y+\beta) - Q(x,y)\right]dy = 0$$

với chu tuyến đóng C tùy ý.

Điều kiện cần và đủ để cho tích phân $I_1 = 0$ với chu tuyến C tùy ý là :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x+\alpha, y+\beta) - Q(x,y)\right] \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x+\alpha, y+\beta) - P(x,y)\right] \ \forall (x,y)$$

Đặt $\xi = x + \alpha$, $\eta = y + \beta$, khi đó từ điều kiện trên suy ra

$$\frac{\partial Q(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial P(\xi,\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

hay

$$\frac{\partial Q(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial P(\xi,\eta)}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

Vế trái của đẳng thức này chỉ phụ thuộc ξ, η, còn vế phải chỉ phụ thuộc x, y nên :

$$\frac{\partial Q(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial P(\xi,\eta)}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = C, \ \forall (x,y)$$

trong đó C là hằng số nào đó.

Từ điều kiện $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C$, suy ra :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - Cx\right) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(P(x,y) + h(x)\right)$$

trong đó h(x) là hàm tùy ý chỉ phụ thuộc x.

Từ đó :

$$Q(x,y) - Cx = \frac{\partial}{\partial y}\int\left[P(x,y) + h(x)\right]dx + \Psi(y)$$

trong đó ψ(y) là hàm tùy ý chỉ phụ thuộc y.

Đặt $$u(x,y) = \int\left[P(x,y) + h(x)\right]dx$$

thì $$Q(x,y) = C.x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \Psi(y)$$

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - h(x) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \varphi(x)$$

Vậy các hàm P(x, y), Q(x, y) có dạng :

$$P(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \varphi(x), \ Q(x,y) = C.x + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \Psi(y)$$

trong đó φ(x), ψ(y) là các hàm hai lần khả vi liên tục, còn u(x, y) là hàm ba lần khả vi liên tục.

1253. Ký hiệu AnB là cung bất kỳ nối hai điểm A và B. Gọi D là miền phẳng được giới hạn bởi chu tuyến đóng AmBnA. Tích phân

$$I = \int_{AmB} F(x,y)(y\,dx + x\,dy)$$

không phụ thuộc vào đường lấy tích phân, tức là :

$$\int_{AmB} F(x,y)(y\,dx + x\,dy) = \int_{AnB} F(x,y)(y\,dx + x\,dy)$$

hay là :

$$\int_{AmBnA} F(x,y)(y\,dx + x\,dy) = 0$$

Áp dụng công thức Green ta có :

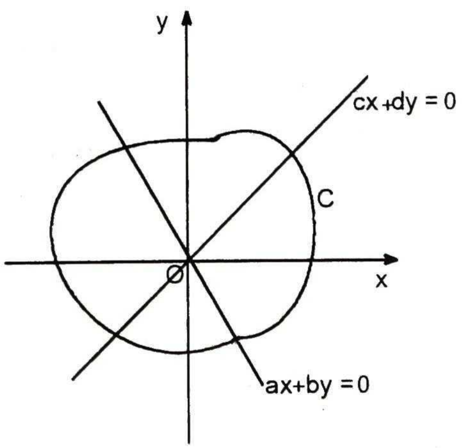
$$0 = \int_{AmBnA} F(x,y)(y\,dx + x\,dy) = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(xF) - \frac{\partial}{\partial y}(yF) \right] dxdy.$$

Vậy hàm F(x, y) phải thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{\partial}{\partial x}(xF) \equiv \frac{\partial}{\partial y}(yF), \ \forall (x,y).$$

1254. Thực hiện phép đổi biến :

$$X = ax + by, \ Y = cx + dy$$



Gốc tọa độ O(0, 0) được giữ nguyên qua phép đổi biến đã cho.

Để ý rằng hệ số góc của đường thẳng $ax + by = 0$ là $k_1 = -\frac{a}{b}$, của đường thẳng $cx + dy = 0$ là $k_2 = -\frac{c}{d}$. Do đó :

Nếu $k_2 > k_1$ tức là $-\frac{c}{d} > -\frac{a}{b}$

hay : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad - bc > 0$, thì hệ tọa độ OXY là hệ tọa độ thuận. Khi đó qua phép biến đổi tọa độ, đường cong C trong hệ tọa độ Oxy biến thành đường cong C_1 trong hệ tọa độ OXY bảo toàn hướng.

Nếu $k_2 < k_1$ tức là $ad - bc < 0$, thì hệ OXY là hệ tọa độ nghịch. Khi đó chiều của C_1 trong hệ OXY ngược với chiều của C.

Vì vậy :

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{\operatorname{sgn}(ad - bc)}{2\pi}\oint_{C_1} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

Chú ý rằng C_1 là đường cong đóng bao quanh gốc tọa độ.

Ký hiệu C_R là đường tròn tâm O, bán kính R đủ bé trong mặt phẳng OXY, sao cho C_R được bao trong C_1. Gọi D_R là miền được giới hạn bởi C_1 và C_R.

Trên C_R ta định hướng dương ngược chiều kim đồng hồ, và ký hiệu là C_R^+, còn C_R^- là C_R được định hướng âm thuận chiều kim đồng hồ.

Nếu $ad - bc > 0$ thì C và C_1 cùng hướng. Ta đặt $L = C_1 \cup C_R^-$ là biên của D_1.

Áp dụng công thức Green :

$$\oint_L \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \iint_{D_1}\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{X}{X^2 + Y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial Y}\left(-\frac{Y}{X^2 + Y^2}\right)\right]dXdY = 0$$

Từ đó :

$$\oint_{C_1} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = -\oint_{C_R^-} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = \oint_{C_R^+} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}.$$

Tương tự nếu $ad - bc < 0$, thì đặt $L = C_1 \cup C_R^+$, và suy ra :

$$\oint_{C_1} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = -\oint_{C_R^+} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2}$$

Để tính tích phân trên C_R^+ ta đặt : $X = R\cos\varphi$, $Y = R\sin\varphi$, $(0 \le \varphi \le 2\pi)$. Khi đó :

$$\int_{C_R^+} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Vậy :

$$I = \frac{\operatorname{sgn}(ad-bc)}{2\pi} \oint_{C_1} \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2+Y^2} = \operatorname{sgn}(ad-bc).$$

1255. Nhận xét: trong tích phân $\int_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ ta có $\frac{\partial}{\partial x}(x-y) \equiv \frac{\partial}{\partial y}(x+y) = 1 \ \forall (x,y)$. Do đó tích phân này chỉ phụ thuộc vào hai điểm A và B, $A(0,1)$, $B(2,3)$.

Hơn nữa :

$$(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = (x\,dx - y\,dy) + (y\,dx + x\,dy)$$
$$= d\left(\frac{1}{2}(x^2-y^2) + xy\right) = dF.$$

Vậy nên

$$\int_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = F(B) - F(A) = F(2,3) - F(0,1)$$
$$= -\frac{5}{2} + 6 + \frac{1}{2} = 4.$$

1256. Chú ý rằng $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2} = \dfrac{y}{x^2}dx - \dfrac{1}{x}dy = d\left(-\dfrac{y}{x}\right)$.

Đặt $F(x,y) = -\dfrac{y}{x}$, ta có :

$$\int\limits_{AB} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \int\limits_{A}^{B} d\left(-\frac{y}{x}\right) = F(B) - F(A) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

trong đó A(2, 1), B(1, 2).

1257. Xét biểu thức dưới dấu tích phân

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2} = -\frac{y\,dx}{(x-y)^2} + \frac{x\,dy}{(x-y)^2} = P\,dx + Q\,dy$$

Vì $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{x+y}{(x-y)^3}$ nên biểu thức này là một biểu thức vi phân hoàn chỉnh tức là tồn tại hàm F(x, y) sao cho :

$$dF = -\frac{y}{(x-y)^2}dx + \frac{x}{(x-y)^2}dy$$

Như vậy, ta phải tìm hàm F(x, y) sao cho :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{(x-y)^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}$$

Ta có :

$$F(x,y) = \int \frac{x}{(x-y)^2}dy + \varphi(x) = \frac{x}{(x-y)} + \varphi(x)$$

trong đó φ(x) là hàm tùy ý chỉ phụ thuộc x. Hãy xác định φ(x) sao cho $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\dfrac{y}{(x-y)^2}$.

Đạo hàm biểu thức của $F(x,y) = \dfrac{x}{(x-y)} + \varphi(x)$ theo x ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x-y}\right) + \varphi'(x) = -\frac{y}{(x-y)^2} + \varphi'(x).$$

Để cho $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -\dfrac{y}{(x-y)^2}$ thì φ'(x) = 0 hay φ(x) = const tùy ý.

Ta chọn $\varphi(x) \equiv 0$. Khi đó : $F(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$.

Vậy :

$$\int\limits_{AB} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2} = \int\limits_{A}^{B} dF(x,y) = F(B) - F(A) = F(1,0) - F(0,1)$$

$$= 1 - 0 \qquad = 1.$$

1258. Biểu thức f(x +y) (dx + dy) = f(x + y) d(x + y) = f(u)du là biểu thức vi phân hoàn chỉnh, trong đó u = x + y

Đặt $$F(u) = \int\limits_0^u f(t)\,dt$$

Khi đó :

$$\int\limits_{AB} f(x+y)(dx+dy) = F(B) - F(A) = F(a+b) - F(0+0)$$

$$= \int\limits_0^{a+b} f(t)\,dt\,.$$

1259. Diện tích miền D giới hạn bởi đường astroide $x^{2/3} + y^{2/3} + a^{2/3}$ được tính theo công thức :

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C (x\,dy - y\,dx)$$

Tham số hóa đường cong C : $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^2 t$, $(0 \le t \le 2\pi)$ và chú ý rằng đường astroide đối xứng qua hai trục tọa độ nên:

$$S = \frac{1}{2}4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a.\cos^3 t.3a\sin^2 t.\cos t + a\sin^3 t.3a\cos^2 t.\sin t\right)dt$$

$$= 2.3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\sin^2 t\,dt = 6a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2t\,dt$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

1260. Từ phương trình parabol $(x + y)^2 = ax$, $a > 0$, ta suy ra miền D được giới hạn bởi parabol $(x + y)^2 = ax$ và trục Ox nằm trong nửa mặt phẳng $x \geq 0$.

Ta có :

$$(x+y) = \pm\sqrt{ax} \quad \text{hay} \quad y = \pm\sqrt{ax} - x.$$

Từ đó xác định được hai giao điểm của parabol với trục Ox là O(0, 0) và A(a, 0).

Ký hiệu C là chu tuyến đóng gồm đoạn thẳng OA trên trục Ox và cung AO của parabol, lấy theo hướng dương, khi đó :

$$S = -\oint_C y\,dx = -\int_{OA} y\,dx - \int_{AO} y\,dx$$

Vì trên đoạn thẳng OA thì $y = 0$, còn trên cung parabol AO thì $y = \sqrt{ax} - x$, nên :

$$S = -\int_a^0\left(\sqrt{ax} - x\right)dx = \int_0^a\sqrt{a}.\sqrt{x}\,dx - \int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{6}.$$

1261. Đặt $t = tg\varphi$, trong đó φ là góc cực, và $y = tx$. Thay vào phương trình đường Lemniscate ta có :

$$\left(x^2 + x^2t^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - x^2t^2\right)$$

$$x^2 = \frac{a^2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}.$$

Từ đó suy ra $|t| \le 1$ hay $|\text{tg}\,\varphi| \le 1$, vậy nên $-\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ và $\dfrac{3\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{5\pi}{4}$.

Chuyển qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta có :

$$r^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$

hay
$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

Vậy phương trình tham số của Lemniscate là :

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\cos\varphi, \quad y = a\sqrt{\cos 2\varphi}.\sin\varphi$$

$$\left(-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}\right).$$

Chú ý rằng đường Lemniscate đối xứng qua các trục tọa độ nên diện tích của miền D là :

$$S = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx) = 4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [x(\varphi).y'(\varphi) - y(\varphi).x'(\varphi)]d\varphi$$

trong đó :
$$x'(\varphi) = -a\left(\frac{\sin 2\varphi.\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + \sqrt{\cos 2\varphi}.\sin\varphi\right)$$

$$y'(\varphi) = a\left(-\frac{\sin 2\varphi.\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + \sqrt{\cos 2\varphi}.\cos\varphi\right).$$

Thay vào biểu thức của diện tích S ta nhận được :

$$S = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = a^2.$$

1262. Chuyển qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, ta nhận được phương trình lá Descartes dưới dạng :

$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Do đó phương trình tham số của nó là :

$$x = r\cos\varphi = \frac{3a\sin\varphi\cos^2\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$$

$$y = r\sin\varphi = \frac{3a\sin^2\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$dx = \frac{3a}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\left(\cos^6\varphi + \cos^4\varphi\sin^2\varphi - 2\cos^3\varphi\sin^3\varphi - 2\cos\varphi\sin^5\varphi\right)d\varphi$$

$$dy = \frac{3a}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\left(2\sin\varphi\cos^5\varphi + 2\cos^3\varphi\sin^3\varphi - \sin^4\varphi\cos^2\varphi - \sin^6\varphi\right)d\varphi$$

$$x\,dy - y\,dx = \frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)^2}\,d\varphi$$

Vậy nên :

$$S = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi.\cos^2\varphi}{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2\varphi\, d(tg\varphi)}{(1+tg^3\varphi)^2} = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(1+tg^3\varphi)}{(1+tg^3\varphi)^2} = \frac{3}{2}a^2.$$

1263. Chuyển qua hệ tọa độ cực : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Ta có : $\quad r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = a^2r^2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \text{ hay } r = \frac{a}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}$$

Do đó phương trình tham số của đường cong là :

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}, \quad y = \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$dx = \frac{-a}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^{3/2}}\left(\sin^5\varphi + 2\sin^3\varphi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos^4\varphi\right)d\varphi$$

$$dy = \frac{a}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^{3/2}}\left(\cos^5\varphi + 2\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \cos\varphi\sin^4\varphi\right)d\varphi$$

$$x\,dy - y\,dx = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\,d\varphi.$$

Chú ý đến tính đối xứng qua các trục tọa độ của đường cong, ta có :

$$S = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\mathrm{tg}^2\varphi)\,d\mathrm{tg}\varphi}{1+\mathrm{tg}^4\varphi}$$

$$= 2a^2\int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}\,dt = \sqrt{2}.a^2.\mathrm{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\Bigg|_0^{+\infty} = \pi\sqrt{2}.a^2.$$

1265. Áp dụng công thức Stokes với :

$$P = z\cos\beta - y\cos\gamma,\ Q = x\cos\gamma - z\cos\alpha,\ R = y\cos\alpha - x\cos\beta$$

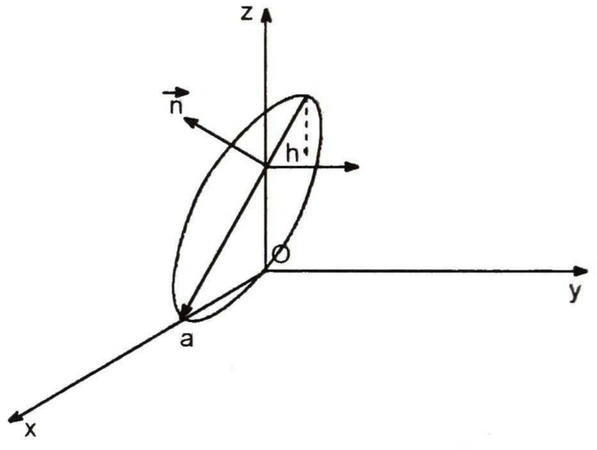
ta có :

$$\oint_C (z\cos\beta - y\cos\gamma)\,dx + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,dx + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,dz$$

$$= \iint_D 2\cos\gamma\,dxdy + 2\cos\alpha\,dydz + 2\cos\beta\,dzdx$$

$$= 2\iint_D (\cos^2\gamma + \cos^2\alpha + \cos^2\beta)\,ds = 2S.$$

1266. Ký hiệu S là thiết diện ellipse tạo thành khi cắt hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$ bởi mặt phẳng $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > 0,\ h > 0)$ và C là chu tuyến ellipse được định hướng dương ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox. Như vậy mặt S được định hướng phù hợp với hướng dương của C bởi pháp tuyến $\vec{n}$ hướng lên phía trên của S.



Ta có : $\vec{n} = (A, B, C)$, trong đó :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(x,y)} = -\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{h}{a},\quad B = \frac{D(z,x)}{D(x,y)} = 0,\quad C = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1$$

Áp dụng công thức Stokes, ta nhận được :

$$I = \oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$$

$$= -2\iint_S dxdy + dydz + dzdx = -2\iint_D (A + B + C)\,dxdy$$

trong đó D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy.

Vậy nên : D là hình tròn $x^2 + y^2 \le a^2$.

Do đó : $I = -2\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le a^2}\left(\frac{h}{a} + 1\right)dxdy = -2\left(\frac{h}{a} + 1\right)\pi a^2$

$$I = -2\pi a\,(a + h).$$

1267. C là giao tuyến của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ $(z > 0)$ và mặt trụ $x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, lấy theo hướng dương sao cho phần có diện tích bé nhất ở phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ $(z > 0)$ được giới hạn bởi C luôn ở về phía bên trái. Ta ký hiệu phần mặt cầu đó là S. Khi đó S được định hướng dương theo pháp tuyến ngoài của mặt cầu. Do đó pháp tuyến $\bar{n}$ định hướng của mặt S có các thành phần (A, B, C), trong đó :

$$A = \frac{D(y,z)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{R-x}{z} & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} = \frac{x-R}{z}$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(x,y)} = \frac{y}{z}, \quad C = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1 .$$

Áp dụng công thức Stokes ta có :

$$I = \oint_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$$

$$= 2\iint_S (y - z)\,dydz + (z - x)\,dzdx + (x - y)\,dxdy$$

$$= 2\iint_D \left[(y - z)A + (z - x)B + (x - y)C\right]dxdy$$

trong đó D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy, tức D là hình tròn $x^2 + y^2 \le 2rx$.

Vậy nên :

$$I = 2\iint_D \left[(y - z)\frac{x - R}{z} + (z - x)\frac{y}{z} + (x - y)\right]dxdy$$

$$= 2R\iint_D \left(1 - \frac{y}{z}\right)dxdy .$$

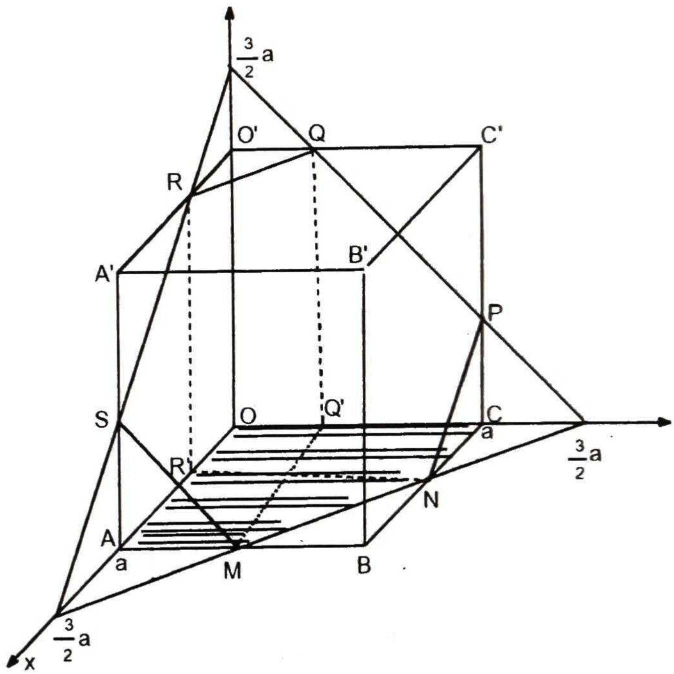
Chú ý rằng : $\iint_D \frac{y}{z}dxdy = \iint_D \frac{y}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}\,dxdy = 0$

Nên : $$I = 2R\iint_D dxdy = 2R\pi r^2 = 2\pi R r^2.$$

1268. Các đỉnh của hình lập phương là :

O, A(a, 0, 0), B(a, a, 0), C(0, a, 0)

O'(0, 0, a), A'(a, 0, a), B'(a, a, a) và C'(0, a, a).



Mặt phẳng $x + y + z = \dfrac{3}{2}a$ cắt các cạnh AB, BC, CC', C'O', O'A' và AA' tại các điểm giữa và tạo thành thiết diện S là hình lục giác đều : MNPQRS, mà hình chiếu D của thiết diện trên mặt phẳng Oxy là hình được giới hạn bởi các đường thẳng :

$$x = 0,\quad y = 0,\; x = a, y = a,\quad x + y = \frac{3}{2}a,\quad x + y = \frac{1}{2}a.$$

Ký hiệu C là chu tuyến của thiết diện S, định hướng theo chiều MNPQRS. Thiết diện S được định hướng, phù hợp với hướng của C, bởi pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Oz một góc nhọn, nghĩa là $\vec{n}$ hướng lên phía trên.

Áp dụng công thức Stokes ta có :

$$I = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$$

$$= -2\iint_S (y+z)dydz + (z+x)dy + (x+y)dxdy$$

$$= -2\iint_D \left[(y+z)A + (z+x)B + (x+y)C\right]dxdy$$

trong đó (A, B, C) là tọa độ của pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt : $x + y + z = \frac{3}{2}a$

$$A = \frac{D(y,z)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,\ \ B = \frac{D(z,x)}{D(x,y)} = 1,\ C = \frac{D(x,y)}{D(x,y)} = 1$$

Vậy nên :

$$I = -4\iint_D (y + y + z)dxdy = -4\iint\left(x + y + \frac{3}{2}a - x - y\right)dxdy$$

$$= -6a\iint_D dxdy = -6a.B.$$

trong đó $B = \iint_D dxdy$ là diện tích của hình chiếu D.

Dễ dàng thấy :

$$B = a^2 - 2\,\frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\frac{a}{2} = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2.$$

(B bằng diện tích của hình vuông OABC, trừ đi hai lần diện tích của tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là $\frac{a}{2}$).

Vậy :

$$I = -6a\,\frac{3}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3.$$

1270. Áp dụng công thức Ostrogradski ta nhận được :

$$I = 3\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz,$$

trong đó V là hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$.

Chuyển qua hệ tọa độ cầu :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta\ ,\quad 0 \le \theta \le \pi\ ,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\ ,\quad 0 \le r \le a$$

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^a r^4 dr = \frac{12}{5}\pi a^5.$$

1271. Ký hiệu V là vật thể được giới hạn bởi mặt S :

$$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1.$$

Áp dụng công thức Ostrogradstri, ta nhận được :

$$I = \iint\limits_S (x - y + z)\,dydz + (y - z + x)\,dzdx + (z - x + y)\,dxdy$$

$$= \iiint\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(x - y + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y - z + x) + \frac{\partial}{\partial z}(z - x + y)\right] dxdydz$$

$$= 3\iiint\limits_V dxdydz.$$

Đổi biến số $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}} = \frac{1}{4}.$$

Khi đó :

$$I = \frac{3}{4}\iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\le 1} dudvdw = \frac{3}{4}8\iiint\limits_{\substack{u+v+w\le 1\\(u\ge 0, v\ge 0, w\ge 0)}} dudvdw$$

$$= 6\int_0^1 du\int_0^{1-u} dv\int_0^{1-u-v} dw = 6\int_0^1 du\int_0^{1-u}(1-u-v)dv$$

$$= 6\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{2}du = 1 .$$

1272. Ký hiệu S_1 là mặt tròn $x^2 + y^2 \le h^2$ nằm trong mặt phẳng z = h, định hướng bởi pháp tuyến $\vec{n}$ hướng lên phía trên, do đó $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, và $\cos\gamma = 1$, $ds = dxdy$.

Vì vậy :

$$\iint\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds = \iint\limits_{S_1} h^2 dxdy = h^2\pi h^2 = \pi h^4$$

Gọi V là hình nón : $x^2 + y^2 \le z^2 \le h^2$, $z > 0$. Khi đó áp dụng công thức Ostrogradski ta có :

$$I_1 = \iint\limits_{S\cup S_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)ds = 2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$$

Chuyển qua tọa độ trụ : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, ta nhận được :

$$I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h r\,dr\int_r^h \left[r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z\right]dz$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h \left[r(h-r)(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]rdr$$

$$= 2\int_0^{2\pi}(\cos\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi\int_0^h r^2(h-r)\,dr + 2\pi h^2\int_0^h r\,dr - 2\pi\int_0^h r^3 dr$$

$$= 0 + 2\pi h^2\,\frac{h^2}{2} - 2\pi\,\frac{h^4}{4} = \frac{1}{2}\,\pi h^4.$$

Vậy :

$$I = \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,ds = I_1 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

1273. Chú ý rằng :

$$I = \iint_S x^2 dxdy + y^2 dzdx + z^2 dxdy$$

$$= \iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,ds$$

trong đó $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ là các cosin định hướng của pháp tuyến ngoài của mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$. Vì vậy tương tự như bài 1272 ta có :

$$I = -\frac{\pi}{2}.$$

1274. Giả sử $l = (\cos\alpha_o, \cos\beta_o, \cos\gamma_o)$ là véctơ đơn vị cố định khi đó :

$$\cos(n, l) = \langle n, l\rangle = \cos\alpha\cos\alpha_o + \cos\beta\cos\beta_o + \cos\gamma\cos\gamma_o.$$

Áp dụng công thức Ostrogradski ta có :

$$\iint_S \cos(n,l)\,ds = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_o + \frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_o + \frac{\partial}{\partial z}\cos\gamma_o\right)dxdydz = 0$$

trong đó V là vật thể được giới hạn bởi mặt S.

1275. Áp dụng công thức tính thông lượng :

$$J = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds$$

a) S là mặt bên của hình nón $x^2 + y^2 \le z^2$ $(0 \le z \le h)$. Tại điểm $(x, y, z) \in S$, véctơ $\vec{F} = \vec{r} = (x, y, z)$ trực giao với pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt S nên

$$J = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iint_S \vec{r}.\vec{n}\, ds = 0.$$

b) S là đáy của hình nón $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le h$. Trên mặt đáy S của hình nón đã cho, véctơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ của mặt S cùng hướng với trục Oz. Do đó :

$$\vec{F}.\vec{n} = \vec{r}.\vec{n} = z$$

cho nên

$$J = \iint_S \vec{r}.\vec{n}\, ds = \iint_S z\, ds = \iint_{x^2+y^2 \le h^2} h\, dxdy = \pi h^3 .$$

1276. Từ phương trình $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ta có :

$$(z - 1)^2 = x^2 + y^2, \quad (0 \le z \le 1)$$

Đây là phương trình của mặt nón.

Như vậy S là mặt biên của hình nón V (bao gồm phần của mặt nón $(z - 1) = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$ và mặt đáy $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$).

Áp dụng công thức tính thông lượng, ta có :

$$J = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\, ds = \iint_S \vec{r}\,\vec{n}\, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{r}\, dxdydz$$

$$= \iiint_V 3\, dxdydz = 3v(V)$$

trong đó v(V) là thể tích của hình nón V, có đáy là hình tròn, bán kính R = 1, và chiều cao h = 1. Do đó :

$$J = 3v(V) = 3\,\frac{\pi}{3} = \pi.$$

1277. Ta viết phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = x$ dưới dạng :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Áp dụng công thức tính thông lượng, ta có :

$$J = \iint_S \vec{F}.\vec{n}\,ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz$$

trong đó V là hình cầu tâm tại điểm $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, bán kính $a = \frac{1}{2}$.

Chuyển qua hệ tọa độ cầu:

$$x = \frac{1}{2} + r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\left(0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \frac{1}{2}\right),\ \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta,$$

ta có :

$$J = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} + r\sin\theta\cos\varphi\right)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2 + (r\cos\theta)^2\right] r^2\sin\theta\,dr$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{4} + r^2\right) r^2\sin\theta + r^3\sin^2\theta.\cos\varphi\right] dr$$

$$= 3.2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}r^2 + r^4\right) dr + 3\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^{\frac{1}{2}} r^3\,dr$$

$$= 6\pi.2\left(\frac{1}{4}.\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = 12\pi\left(\frac{1}{12}\frac{1}{8} + \frac{1}{5}\frac{1}{32}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

1278. Áp dụng công thức tính công của lực $\vec{F} = (P, Q, R)$. ta có :

$$A = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_C x\,dx + y\,dy + z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[x(t).x'(t) + y(t).y'(t) + z(t).z'(t) \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[a\cos t.(-a\sin t) + a\sin t.a\cos t + bt.b \right] dt = \int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2 b^2 .$$

1279. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm M(1, 1, 1) và N(2,4,8) là :

$$x - 1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{7}.$$

Tham số hóa đường thẳng bởi hệ phương trình

$$x = t\ ,\ \ y = 3t - 2\ ,\ \ z = 7t - 6\ ,\ \ 1 \le t \le 2.$$

Áp dụng công thức tính công ta có :

$$A = \int_{MN} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{MN} \frac{1}{y}dx + \frac{1}{z}dy + \frac{1}{x}dz$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{3t-2} + \frac{1}{7t-6}3 + \frac{1}{t}7 \right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ln(3t-2) + \frac{3}{7}\ln(7t-6) + 7\ln t \right] \Big|_1^2 = \frac{188}{21}\ln 2 .$$

1280. Áp dụng công thức tính lưu số của trường lực $\vec{F}$ trên đường cong kín :

$$A = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_C -y\,dx + x\,dy + c\,dz$$

a) C là đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$

Tham số hóa đường tròn C :

$$x = \cos\varphi,\ \ y = \sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ta có :

$$A = \int_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi.$$

b) C là đường tròn : $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Tham số hóa đường tròn C :

$$x = 2 + \cos\varphi$$

$$y = \sin\varphi,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Ta có :

$$A = \int_0^{2\pi}\left[-\sin\varphi(-\sin\varphi) + (2+\cos\varphi).\cos\varphi\right]d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\right)d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\varphi\right)d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi + 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = 2\pi.$$

PHỤ LỤC

Để giúp bạn đọc nắm vững lý thuyết hơn, trong phần phụ lục này chúng tôi bổ sung một số bài tập có tính chất lý thuyết cũng như một số bài tập tương đối khó.

1. Giả sử f: $[0,1] \times [0,1] \to R$ xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x < \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{nếu } \dfrac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích và

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f dv = \frac{1}{2}.$$

2. Giả sử f: A $\to$ R là hàm khả tích và g = f khắp nơi, trừ ra tại một số hữu hạn điểm. Chứng minh rằng hàm g khả tích trên A và

$$\int_A f dV = \int_A g dV$$

3. Cho hàm f: A $\to$ R và phân hoạch P của A. Chứng minh rằng hàm f khả tích khi và chỉ khi với mọi hình hộp S của phân hoạch P hàm $f|_S$ (thu hẹp của f trên S) khả tích trên S và trong trường hợp này ta có

$$\int_A f dV = \sum_S \int_S f|_S \, dV$$

4. Cho hàm f: $[0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ nếu x vô tỷ} \\ 0 \text{ nếu x hữu tỷ, y vô tỷ} \\ \dfrac{1}{q} \text{ nếu x hữu tỷ, } y=\dfrac{p}{q} \text{ phân số tối giản} \end{cases}$$

Chứng minh rằng f khả tích và

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f\,dxdy = 0$$

5. Chứng minh rằng đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$ với $a < b$ không có độ đo không.

6. a) Chứng minh rằng tập hợp có độ đo không không có điểm trong.

b) Hãy chỉ ra rằng nếu một tập hợp không có điểm trong thì điều này không nhất thiết có nghĩa là tập này có độ đo không.

c) Cho ví dụ về tập có độ đo không (trong $\mathbb{R}^n$) có bao đóng là toàn thể không gian $\mathbb{R}^n$.

7. Chứng minh rằng tập bị chặn B có thể tích

$$v(B) = \int\limits_A \chi_B dV = 0$$

(A là hình hộp chứa B) khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại một số hữu hạn các hình hộp đóng (hoặc mở) phủ B có tổng thể tích nhỏ hơn ε.

8. Chứng minh rằng nếu hình chiếu của một tập hợp bị chặn $E \subset R^n$ trên siêu phẳng R^{n-1} có thể tích (n - 1) - chiều bằng 0 thì chính tập E có thể tích n - chiều bằng 0.

9. Chứng minh rằng hình hộp $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_n,b_n]$ không thể có độ đo không ($a_i < b_i$, $i = 1,2,...,n$).

10. a) Chứng minh rằng nếu tập hợp B có thể tích không thì biên giới của nó cũng có thể tích không.

b) Cho ví dụ về tập hợp bị chặn B có độ đo không nhưng biên giới của nó không có độ đo không.

c) Cho ví dụ về tập bị chặn B có độ đo không đối với nó $\int\limits_A x_B dV$ không tồn tại.

11. Chứng minh rằng tập hợp đo được Jordan không có điểm trong có thể tích bằng 0 (hãy so sánh với bài 6 b)).

12. Chứng minh rằng nếu B là tập bị chặn có độ đo không và $\int\limits_A \chi_B dV$ tồn tại thì giá trị của tích phân bằng không (A là hình hộp chứa B).

13. Chứng minh rằng nếu $f: A \to R$ là hàm không âm và $\int\limits_A f dV = 0$ thì tập hợp $\{x: f(x) \neq 0\}$ có độ đo không.

14. Chứng minh rằng tập hợp $B \subset A$ trong đó A là hình hộp đóng là đo được Jordan khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một phân hoạch P của A sao cho $\sum\limits_{S \in \mathscr{S}_1} v(S) - \sum\limits_{S \in \mathscr{S}_2} v(S) < \varepsilon$, trong đó $\mathscr{S}_1$

gồm tất cả các hình hộp của phân hoạch P giao với B, còn $\mathscr{S}_2$ gồm tất cả các hình hộp chứa trong B.

15. Hãy kiểm tra định lý Fubini đối với hàm

$$f: [0,1]\times[0,1] \to R$$

xác định bởi

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ vô tỷ} \\ 1 \text{ nếu } x \text{ hữu tỷ và } y \text{ vô tỷ} \\ 1-\dfrac{1}{q} \text{ nếu } x=\dfrac{p}{q} \text{ phân số tối giản và } y \text{ hữu tỷ} \end{cases}$$

16. Giả sử $C \subset A \times B$ là tập hợp có thể tích không và $A' \subset A$ là tập hợp tất cả các $x \in A$ sao cho tập hợp $\{y \in B: (x,y) \in C\}$ không có thể tích không. Chứng minh rằng A' là tập hợp có độ đo không.

17. Giả sử A và B là các tập đo được Jordan trong R^3, $A_c = \{(x,y): (x,y,c) \in A\}$ và $B_c = \{(x,y): (x,y,c) \in B\}$.

Giả sử rằng A_c và B_c đối với mỗi c đo được và có cùng diện tích. Chứng minh rằng A và B có cùng thể tích.

18. Chứng minh rằng $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy)^{xy}\,dxdy = \int_0^1 y_y\,dy$

19. Với mọi $n \in N^*$ ta ký hiệu

$D_n = \{(x_1,\dots,x_n) \in R^n: x_i \geq 0$ với $i = 1,\dots,n;\ x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$

Với $(k_1,\dots,k_n) \in N^n$ hãy tính

$$I_n(k_1,...,k_n) = \int_{D_n}\!\!\cdots\!\int x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}dx_1\dots dx_n.$$

20. Tìm thể tích của đơn hình n chiều

$$T_n = \{(x_1,...,x_n) \in R^n: x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0, x_1 + ... + x_n \leq h\}$$

21. Tính thể tích của hình cầu n chiều

$$V_n = \{(x_1,x_2,...,x_n) \in R^n: x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq R^2\}$$

22. Tính tích phân mặt

$$I = \iint_{(S)} x^3dydz + y^3dzdx + z^2dxdy$$

trong đó (S) là phía ngoài của phần mặt paraboloid $z = x^2 + y^2$ được cắt bởi mặt phẳng $z = 2x$.

BÀI GIẢI

1. Vì khi ta bổ sung thêm điểm chia các tổng Darboux trên không tăng, còn các tổng Darboux dưới không giảm nên ta có thể giả thiết rằng các phân hoạch P xét đến có chứa điểm chia $x = \frac{1}{2}$. Khi đó $\underline{I}(f,P) = \frac{1}{2}$ và do đó $I^* = \sup \underline{I}(f,P) = \frac{1}{2}$. Với $\varepsilon > 0$ cho trước ($\varepsilon < \frac{1}{2}$) nếu lấy đường kính của phân hoạch d(P) < ε thì ta có $\bar{I}(f,P) < \frac{1}{2} + \varepsilon$. Mặt khác rõ ràng $\bar{I}(f,P) \geq \frac{1}{2}$. Do đó $I^* = \inf \bar{I}(f,P) = \frac{1}{2}$. Vậy f khả tích và tích phân $\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}$.

2. Ta có g - f = 0 khắp nơi trừ ra tại một số hữu hạn điểm và g = f + (g - f), do đó $\int\limits_A gdV = \int\limits_A fdV + \int\limits_A (g-f)dV$. Ta chứng minh $\int\limits_A (g-f)dV = 0$. Xét phân hoạch P bất kỳ của $[0,1]\times[0,1]$ và cách chọn bất kỳ $\xi_i \in S_i$. Vì trong tổng tích phân $\sigma(g-f),P) = \sum\limits_i (g-f)(\xi_i)v(S_i)$ chỉ có cùng lắm là một số hữu hạn số hạng khác không và khi đường kính của phân hoạch $d(P) \to 0$ ta có $v(S_i) \to 0$ nên

$$\int\limits_A (g-f)dV = \lim_{d(P)\to 0} \sum_i (g-f)(\xi_i)v(S_i) = 0.$$

Vậy $\int\limits_A gdV = \int\limits_A fdV.$

3. Giả sử f khả tích trên A. Khi đó với $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại phân hoạch P' của A sao cho $\bar{I}(f,P') - \underline{I}(f,P') < \varepsilon$. Vì nếu thêm các điểm chia thì $\bar{I}(f,P')$ không tăng, $\underline{I}(f,P')$ không giảm nên có thể giả thiết P' mịn hơn P. Gọi $P'|_S$ là hạn chế của P' lên S. Ta có $\bar{I}(f|_{S'}, P'|_{S'}) - \underline{I}(f|_{S'}, P'|_{S'}) \le \bar{I}(f,P') - \underline{I}(f,P') < \varepsilon$. Vậy f khả tích trên S với mọi S của P. Khi đó ta có

$$\int\limits_A fdV = I^* = \inf \bar{I}(f,P') = \inf \sum_S \bar{I}(f|_S, P'|_{S'})$$

$$= \sum \inf I(f|_S, P|_S) = \sum_S \int\limits_S f|_S \, dV.$$

Ngược lại, giả sử $f|_S$ khả tích trên S với mọi hình hộp S của P. Khi đó với mỗi S tồn tại một phân hoạch P_S của S sao cho $\bar{I}(f|_S, P_S) - \underline{I}(f|_S, P_S) < \dfrac{\varepsilon}{k}$, trong đó ε là số dương cho trước, k là số các hình hộp S của phân hoạch P. Giả sử $P' = \bigcup\limits_S P_S$, P' là một phân hoạch của A và ta có

$$\bar{I}(f,P') - \underline{I}(f,P') = \sum_S (\bar{I}(f|_S, P_S) - \underline{I}(f|_S, P_S)) < k.\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Vậy f khả tích trên A.

4. Vì $f \ge 0$ nên $0 \le I^* \le I^*$. Ta chứng minh $I^* = 0$. Cho trước $\varepsilon > 0$. Chỉ có một số hữu hạn các số nguyên dương q sao cho

$q \le \dfrac{2}{\varepsilon}$ và do đó chỉ có một số hữu hạn các phân số tối giản $\dfrac{p}{q}$ với $\dfrac{1}{q} \ge \dfrac{\varepsilon}{2}$. Giả sử số các phân số đó là k.

Xét phân hoạch P của $[0,1]\times[0,1]$ với đường kính $d(P) < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2k}}$. Khi đó mọi hình hộp S của P có $v(S) < \dfrac{\varepsilon}{2k}$. Trong phân hoạch này có nhiều nhất là k hình hộp chứa các điểm có toạ độ x là các phân số tối giản $\dfrac{p}{q}$ với $q \le \dfrac{2}{\varepsilon}$. Vì $f \le 1$ nên ta có

$$\bar{I}(f,P) = \sum_S{}' M_S(f) + \sum_S{}'' M_S(f) < k\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

trong đó $\sum{}'$ là tổng lấy theo các hình hộp S có chứa các điểm có toạ độ x là các phân số tối giản $\dfrac{p}{q}$ với $q \le \dfrac{2}{\varepsilon}$, $\sum{}''$ là tổng còn lại.

Vậy $I^* = 0$ và do đó $I_* = 0$, vì thế

$$\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} f dxdy = 0.$$

5. (Phản chứng) Giả sử đoạn [a,b] có độ đo không. Khi đó với $0 < \varepsilon < b - a$ cho trước tồn tại một hệ khoảng $\{(a_n,b_n)\}_n$ sao cho $\bigcup_n (a_n, b_n) \supset [a,b]$ và $\sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon$. Vì [a,b] là tập compăc nên tồn tại (a_i,b_i) $(i = 1,2,\dots,k)$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i) \supset [a,b]$.

Ta chứng minh $\sum_{i=1}^{k}(b_i - a_i) \geq b - a$ và như vậy ta đi đến mâu thuẫn, từ đó suy ra điều phải chứng minh. Ta chứng minh điều này bằng quy nạp. Với n=1 điều khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử điều này đúng cho k, ta chứng minh đúng cho k+1. Thật vậy nếu $\bigcup_{i=1}^{k+1}(a_i, b_i) \supset [a, b]$ thì bằng cách đánh số lại nếu cần ta có thể xem rằng $a \in (a_1,b_1)$. Nếu $b_1 \geq b$ thì $b_1 - a_1 \geq b-a$. Nếu $b_1 < b$ thì $\bigcup_{i=2}^{k+1}(a_i, b_i) \supset [b_1, b]$. Khi đó theo giả thiết quy nạp (áp dụng cho đoạn $[b_1,b]$) ta có $\sum_{i=2}^{k+1}(b_i - a_i) \geq b - b_1$. Vì thế

$$\sum_{i=2}^{k+1}(b_i - a_i) \geq b_1 - a_1 + b - b_1 \geq b - a.$$

6. a) Giả sử tập A có điểm trong a. Theo định nghĩa của điểm trong tồn tại một lân cận của a là một hình hộp S tâm a có thể tích $v(S) > 0$ (xem bài tập 9). Lấy $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < v(S)$. Khi đó không thể phủ A bằng hệ hình hộp có tổng thể tích nhỏ hơn v(S). Vậy nếu a có độ đo không thì A không có điểm trong.

b) Gọi B là tập các điểm vô tỷ trong đoạn [0,1]. Vì tập các điểm hữu tỷ là trù mật trong R nên B không có điểm trong. Rõ ràng là B không có độ đo không.

c) Tập $Q^n = \{(r_1,r_2,\ldots,r_n)$: r_i hữu tỷ $\forall i\}$ là tập đếm được nên có độ đo không. Tuy nhiên $\overline{Q^n} = R^n$.

7. Do $\chi_B \geq 0$ nên $v(B) = \int_A \chi_B dV = 0$ khi và chỉ khi tích phân trên $\int_A^* \chi_B dV = 0$ hay $\sup_P \bar{I}(\chi_B, P) = 0$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại phân hoạch P sao cho $\bar{I}(\chi_B, P) = \sum_{S\cap B\neq 0} v(S) < \varepsilon$. Rõ ràng họ các tập $\{S: S \cap B \neq \varnothing\}$ phủ B.

8. Vì hình chiếu của E trên R^{n-1} có thể tích (n - 1) - chiều bằng – nên theo bài 7 hình chiếu này phủ được bởi các hình hộp (n - 1) - chiều $S_1,S_2,...,S_k$ có tổng thể tích nhỏ tùy ý. Vì E là bị chặn nên toạ độ thứ n của các điểm của E phải nằm trong một đoạn [a,b] nào đó. Cho trước $\varepsilon > 0$, giả sử $S_1,S_2,...,S_k$ là các hình hộp (n - 1) - chiều phủ hình chiếu của E lên R^{n-1} với $\sum_{i=1}^{k} v(S_i) < \frac{\varepsilon}{k(b-a)}$. Khi đó

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{k} S_i \times [a,b] \text{ và } \sum_{i=1}^{k} v(S_i \times [a,b]) < k\frac{\varepsilon}{k(b-a)}.(b-a) = \varepsilon.$$

Vậy E có thể tích n - chiều bằng 0.

9. Vì $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times ... \times [a_n,b_n]$ là tập compăc nên nếu nó có độ đo không thì cũng có thể tích bằng 0 (theo bài 7). Như vậy ta có

$$0 = v(A) = \int_A \chi_A dV = \int_A 1dV = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n) > 0.$$

ta đi đến mâu thuẫn.

Chú ý: Sử dụng bài 5 ta có thể chứng minh bằng quy nạp theo n.

10. a) Theo bài 7 nếu B có thể tích bằng 0 thì có thể phủ B bằng một số hữu hạn hình hộp đóng $S_1, S_2, ..., S_k$: $B \subset \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ và $\sum_{i=1}^{k} v(S_i) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ cho trước. Vì S_i là tập đóng nên $B \cup \partial B = \overline{B} \subset \bigcup_{i=1}^{k} S_i$. Vậy ∂B có thể tích không.

b) Lấy $B = Q \cap [0,1]$, trong đó Q là tập các số hữu tỷ. Vì B là tập đếm được nên B có độ đo không. Tuy nhiên $\partial B = [0,1]$ không có độ đo không.

c) Với $B = Q \cap [0,1]$ ta có B là tập các độ đo không

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu x hữu tỷ thuộc } [0,1] \\ 0 \text{ nếu x vô tỷ} \end{cases}$$

Khi đó $\int_{[0,1]} \chi_B dx$ không tồn tại.

11. Giả sử B là tập đo được Jordan không có điểm trong. Theo định nghĩa tồn tại hình hộp A sao cho χ_B khả tích trên A và $v(B) = \int_A \chi_B dV$.

Vì χ_B khả tích trên A nên $\int_A \chi_B dV = \int_* \chi_B dV = \sup_P \underline{I}(\chi_B, P)$

trong đó $\underline{I}(\chi_B, P) = \sum_S m_S(\chi_B) v(S)$.

Do B không có điểm trong nên với mọi S, $S \cap (A \setminus B) \neq \varnothing$ vì thế $m_S(\chi_B) = 0$ nên $\underline{I}(\chi_B, P) = 0$ và do đó $v(A) = \int_A \chi_B dV = 0.$

12. Vì $\int_A \chi_B dV$ tồn tại nên theo định nghĩa B là tập đo được Jordan và do đó ∂B có độ đo 0. Như vậy $\overline{B} = B \cup \partial B$ cũng có độ đo không và do $\overline{B}$ là tập compăc nên $\overline{B}$ có thể tích không. Vậy $v(B) = \int_A \chi_B dV = 0.$

13. Đặt $B_n = \{x : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Vì $f \geq 0$ nên $\{x: f(x) \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

Ta có $0 = \int_A f dV = \int_{B_n} f dV + \int_{B_n} f dV \geq \int_{B_n} f dV \geq \frac{1}{n} v(B_n)$

Vậy B_n có độ đo không và do đó $\{x: f(x) \neq 0\}$ có độ đo không.

14. Theo định nghĩa B đo được Jordan nếu χ_B khả tích trên A, điều này xảy ra khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại phân hoạch P sao cho

$$\sum_S M_S(\chi_B) v(S) - \sum_S m_S(\chi_B) v(S) < \varepsilon \quad (1)$$

trong đó $M_S(\chi_B) = \sup_{x \in S} \chi_B(x), m_S(\chi_B) = \inf_{x \in S} \chi_B(x)$

Nhưng với mỗi hình hộp S của phân hoạch P ta có $M_S(\chi_B) = 1$ nếu $S \cap B \neq \varnothing$, $M_S(\chi_B) = 0$ nếu $S \cap B = \varnothing$,

$M_S(\chi_B) = 1$ nếu $S \subset B, m_S(\chi_B) = 0$ nếu $S \not\subset B$. Vì vậy (1) có thể viết lại là $\sum_{S\cap B\neq\varnothing} v(S) - \sum_{S\subset B} v(S) < \varepsilon$.

15. Ta có f(x,y) = 1 - φ(x,y), trong đó φ(x,y) là hàm xác định như trong bài tập 4 và đổi chỗ x và y. Vì φ(x,y) khả tích và $\iint_{[0,1]\times[0,1]} \varphi(x,y)dxdy = 0$ nên f khả tích và $\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = 1$.

Nhưng $\int_0^1 f(x,y)dy = 1$ nếu x vô tỷ và không tồn tại nếu x hữu tỷ.

Vì thế nếu tích phân $h(x)= \int_0^1 f(x,y)dy$ khi nó không tồn tại ta đặt bằng 0 thì hàm h không khả tích. Tuy nhiên với mọi $x\in[0,1]$ ta có $\int_{[0,1]}^{*} f(x,y)dy = 1$ và vì thế

$$\int_{[0,1]} [\int_{[0,1]}^{*} f(x,y)dy]dx = 1 = \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy.$$

Đặt $f_y(x) = f(x,y)$ $(x \in [0,1])$. Ta có nếu y vô tỷ $f_x(y) \equiv 1$; nếu y hữu tỷ thì $f_y(x)=\begin{cases} 1 \text{ nếu } x \text{ vô tỷ} \\ 1-\dfrac{1}{q} \text{ nếu } x = \dfrac{p}{q} \end{cases}$

Vì thế $\int_0^1 f(x,y)dx = 1$ với mọi y. Do đó

$$\int_0^1\left[\int_0^1 f(x,y)dx\right]dy = \int_0^1 1dy = 1 = \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy.$$

16. Ta có $v(C)= \int_{A\times B}\chi_C dxdy = 0$. Do đó

$$\int_A\left[\int_B \chi_C(x,y)dy\right]dx = 0$$

Vì hàm $\int_B \chi_C(x,y)dy \geq 0$ nên theo bài 13 tập hợp tất cả các x sao cho $\int_B \chi_C(x,y)dy > 0$ phải có độ đo 0 hay A' có độ đo 0.

17. Ta có $v(A)= \int_{C_1}^{C_2} v(A_z)dz$, $v(B)= \int_{C_1}^{C_2} v(B_z)dz$.

Theo giả thiết $v(A_z) = v(B_z)$, từ đó suy ra $v(A) = v(B)$.

18. Ta cho giá trị hàm dưới dấu tích phân bằng 1 tại xy=0 thì hàm này liên tục trên $[0,1]\times[0,1]$. Ta có

$$\int_0^1\left[\int_0^1 (xy)^{xy}dx\right]dy = \iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy)^{(xy)}dxdy.$$

Đối với tích phân bên trong ở vế trái ta thực hiện phép đổi biến xy = t (y = const>0) sau đó lấy tích phân từng phần ta được

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy)^{xy}dxdy = \int_0^1 \frac{dy}{y}\int_0^y t^t dt = \ln y\int_0^y t^t dt\Big|_0^1 - \int_0^1 y^y \ln y dy$$

Ta có $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\int_0^y t^t dt = \lim\limits_{t\to 0} t^t = 1$ tức là $\int_0^y t^t dt \sim y$.

Do đó $\lim\limits_{y\to 0} \ln y \int_0^y t^t dt = 0$. Vậy

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy)^{xy} dxdy = -\int_0^1 y^y \ln y dy$$

Sử dụng đẳng thức $(y^y)' = y^y\ln y + y^y$ ta có

$$\int_0^1 y^y \ln y dy = \int_0^1 (y^y)' dy - \int_0^1 y^y dy = (y^y)\Big|_0^1 - \int_0^1 y^y dy = -\int_0^1 y^y dy.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

19. Ký hiệu $D(x_n) = \{(x_1,\dots,x_{n-1}) \in R_{n-1}, x_i \geq 0, \forall i, x_1+\dots+x_{n-1} \leq 1-x_n\}$

Ta có $I_n(k_1,\dots,k_n) = \int_0^1 x_n^{k_n} \left[\int\limits_{D(x_n)}\!\!\dots\!\!\int x_1^{k_1}\dots x_{n-1}^{k_{n-1}} dx_1\dots dx_{n-1}\right] dx_n$.

Đặt $K(x_n) = \int\limits_{D(x_n)}\!\!\dots\!\!\int x_1^{k_1}\dots x_{n-1}^{k_{n-1}} dx_1\dots dx_{n-1}$, bằng phép đổi

biến $x_i = t_i(1 - x_n)$ $(i = 1,\dots,n - 1)$, x_n cố định, ta có

$$K(x_n) = (1-x_n)^{k_1+\dots+k_{n-1}+n-1} \int\limits_{D_{n-1}}\!\!\dots\!\!\int t_1^{k_1}\dots t_{n-1}^{k_{n-1}} dt_1\dots dt_{n-1}$$

$$= (1-x_n)^{k_1+\dots+k_{n-1}+n-1} I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})$$

Từ đó $I_n(k_1,\dots,k_n)=I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})\int_0^1 x_n^{k_n}(1-x_n)^{k_1+\dots+k_{n-1}+n-1}dx_n$

$$=I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})B(k_n+1,k_1+\dots+k_{n-1}+n)$$

trong đó $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ là hàm Bê-ta.

Vậy $I_n(k_1,\dots,k_n)=I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})\dfrac{\Gamma(k_n+1)\Gamma(k_1+\dots+k_{n-1}+n)}{\Gamma(k_1+\dots+k_n+n+1)}$

$$=I_{n-1}(k_1,\dots,k_{n-1})\frac{k_n!(k_1+\dots+k_{n-1}+n-1)!}{(k_1+\dots+k_n+n)!}$$

Vì $I_1(k_1)=\dfrac{1}{1+k}$, ta suy ra

$$I_n(k_1,\dots,k_n)=\frac{k_1!\dots k_n!}{(k_1+\dots+k_n+n)!}$$

20. Đổi biến $x_1=h\xi_1$, $x_2=h\xi_2,\dots$, $x_n=h\xi_n$, ta có

$$v(T_n)=\int\underset{T_n}{\dots}\int dx_1\dots dx_n=h^n\int\underset{\substack{\xi_1\ge0,\dots,\xi_n\ge0\\ \xi_1+\dots+\xi_n\le1}}{\dots}\int d\xi_1\dots d\xi_n$$

Áp dụng kết quả bài 19 với $k_1=\dots=k_n=0$ ta được $v(T_n)=\dfrac{h^n}{n!}$.

21. Ta có $v(V_n)=\int\underset{V_n}{\dots}\int dx_1\dots dx_n$

Đặt $x_1=R\xi_1$, $x_2=R\xi_2,\dots$, $x_n=R\xi_n$, ta có $v(V_n)=\beta_n R^n$

trong đó β_n là thể tích hình cầu n chiều bán kính 1

$$\beta_n = \int_{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\le 1}\cdots\int d\xi_1\ldots d\xi_n = \int_{-1}^{1} d\xi_n \int_{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2\le 1-\xi_n^2}\cdots\int d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}$$

Tích phân bên trong là thể tích hình cầu (n - 1) - chiều bán kính $\sqrt{1-\xi_n^2}$ và do đó bằng $\beta_{n-1}(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$. Thay vào công thức trên và đổi biến $\xi_n = \cos\varphi$ ta được

$$\beta_n = 2\beta_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi d\varphi$$

Chú ý rằng

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n\varphi d\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } n = 2k \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!} & \text{nếu } n = 2k+1 \end{cases}$$

(xem bài 682, tập II)

ta suy ra

$$v(V_{2m}) = \frac{\pi^m}{m!}R^{2m}, v(V_{2m+1}) = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}R^{2m+1}$$

Đặc biệt $v(V_1) = 2R$, $v(V_2) = \pi R^2$, $v(V_3) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

22. Mặt Paraboloid có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = r^2 \end{cases}$$

Mặt này cắt bởi mặt phẳng $z = 2x$, nên từ điều kiện $0 \le z \le 2x$ ta suy ra $r \le 2\cos\varphi$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Miền biến thiên của tham số

$$D = \{(r,\varphi) : -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi\}$$

Ta có

$$A = \frac{D(y,z)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi & 2r \\ r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = -2r\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} 2r & \cos\varphi \\ 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} = -2r^2\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Vì $C = r > 0$ nên véctơ $\vec{N} = (A, B, C)$ lập với Oz một góc nhọn tức là $\vec{N}$ hướng lên trên, trong khi đó pháp tuyến ngoài của paraboloid hướng xuống dưới nên ta có

$$I = \int_D\int x^3 dydz + y^3 dzdx + z^2 dxdy = -\int_D\int (AP + BQ + CR) drd\varphi$$

trong đó $P = x^3$, $Q = y^3$, $R = z^2$. Vậy

$$I = \int_D\int (2r^2\cos\varphi . r^3\cos^3\varphi + 2r^2\sin\varphi r^3\sin^3\varphi - r^5)drd\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^4\varphi + 2\sin^4\varphi - 1)d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^5 dr$$

$$= \frac{2^6}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^{10}\varphi + 2\sin^4\varphi\cos^6\varphi - \cos^6\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{2^6}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^{10}\varphi + 2(1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\cos^6\varphi - \cos^6\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{2^6}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^{10}\varphi - 4\cos^8\varphi + \cos^6\varphi)d\varphi$$

Ta có (xem bài 682 và 683, Bài tập giải tích, Tập II)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi d\varphi = \frac{3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8\varphi d\varphi = \frac{3.5.7}{2.4.6.8}\frac{\pi}{2} = \frac{35\pi}{256}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\varphi d\varphi = \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

Vậy

$$I = \frac{2^6}{3}\frac{126 - 140 + 40}{256}\pi = \frac{13\pi}{6}$$

Chú ý: Ta cũng có thể áp dụng công thức Ostrogradski để tính bằng cách bổ sung thêm mặt đáy là phần của mặt phẳng $z = 2x$ nằm trong paraboloid $z = x^2 + y^2$.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899

E-mail: nxb@vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Hội đồng nghiệm thu giáo trình

Trường ĐHKHTN – Đại học Quốc gia Hà Nội

Người nhận xét: GS. TSKH. NGUYỄN DUY TIẾN
GS. TS. PHAN VĂN HẠP
PGS. TS. NGUYỄN NGỌC QUYÊN

Biên tập: ĐỖ HỮU PHÚ

Biên tập tái bản: LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: NGỌC ANH

BÀI TẬP GIẢI TÍCH. TẬP III

Mã số: 1K-444ĐH2005

In 2000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 tại Xưởng in Tổng cục Công nghiệp Quốc phòng

Số xuất bản: 19/1006/XB-QLXB, ngày 27/6/2005.

Số trích ngang: 157 KH/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2005.