Gợi ý. a) $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n!} > u_n,\ \forall n \geq 1.$

$u_2 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow u_n > u_2 = \dfrac{3}{2},\ \forall n \geq 3.$

b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$

c) (Phương pháp phản chứng)

Giả sử $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = L = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Xét $x = b!\left(L - \displaystyle\sum_{n=1}^{b} \frac{1}{n!}\right)$.

- $x = b!\left(\dfrac{a}{b} - \displaystyle\sum_{n=1}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \displaystyle\sum_{n=1}^{b} \frac{b!}{n!} \in \mathbb{Z}.$
- $x = b!\left(\dfrac{a}{b} - \displaystyle\sum_{n=1}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b!\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{b} \frac{1}{n!}\right) = \displaystyle\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$
- $n \geq b+1 \Rightarrow \dfrac{b!}{n!} = \dfrac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} \leq \dfrac{1}{(b+1)^{n-b}}$, và nhỏ hơn thực sự nếu $n \geq b+2$

$$\Rightarrow x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} \leq 1$$

□

Nhận xét. a) Ý (b) có thể giải theo cách sau. Khai triển Taylor của e^x tại $x_0 = 0$ tới cấp n với số dư dạng Lagrange

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

trong đó c ở giữa 0 và x. Khi đó

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

với $c \in (0, 1)$. Suy ra

$$e - 1 - u_n = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Áp dụng nguyên lý kẹp, ta được $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (e - 1 - u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = e - 1.$

b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ hội tụ, vì

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

c) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ phân kỳ. Thật vậy

$$\left|u_{2n} - u_n\right| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

nên $\left\{u_n\right\}$ không phải dãy Cauchy.