TÀI LIỆU LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Phần I

Giải tích

1 Dãy số và hàm số

1.1 Tóm tắt lý thuyết

Định nghĩa 1.1. *Dãy (a_n) đơn điệu tăng (tương ứng giảm) nếu $a_n \le a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$). Dãy tăng (hoặc giảm) gọi chung là đơn điệu.*

Định nghĩa 1.2. *Dãy (a_n) bị chặn trên (tương ứng dưới) nếu $\exists C,\ a_n \le C,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$).*

Định lý 1.1. *Dãy (a_n) tăng và bị chặn trên (tương ứng dưới) bởi C thì có giới hạn L và $u_n \le L \le C,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$).*

Định lý 1.2 (Nguyên lý kẹp)**.** *Cho các dãy (a_n), (b_n), (c_n). Giả sử*

a) $\exists n_0,\ a_n \le b_n \le c_n,\ \forall n \ge n_0$; và

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Định lý 1.3 (Nguyên lý Cauchy)**.** *Dãy (a_n) hội tụ $\Leftrightarrow$ nó là dãy cơ bản (dãy Cauchy):*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n, m > n_0,\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Định lý 1.4 (Stolz)**.** *Cho hai dãy (a_n), (b_n). Giả sử*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$; và

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$

Hệ quả 1.1. *Cho dãy số dương (a_n). Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.*

HD. Áp dụng định lý Stolz với hai dãy $(\ln a_n)$ và (n). □

Định lý 1.5 (Đ/l trung bình Cesàro)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L$

Chú ý 1.1. Cho dãy $a_{n+1} = f(a_n)$. Xét hàm $f(x)$.

a) Giả sử $\alpha < f(x) < \beta,\ \forall x \in (\alpha, \beta)$. Khi đó $a_{n_0} \in (\alpha, \beta) \Rightarrow a_n \in (\alpha, \beta),\ \forall n \ge n_0$.

b) $f'(x) > 0,\ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$ dãy $(a_n)_{n \geq n_0}$ tăng (tương ứng giảm) nếu $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$ (tương ứng $\geq$).

c) $f'(x) < 0,\ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$ dãy chẵn (x_{2n}) đơn điệu và dãy lẻ $\left(x_{2n-1}\right)$ cũng đơn điệu.

Gợi ý. (Quy nạp)

b) $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$

c) $g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'[f(x)]\, f'(x) > 0$, và $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f[f(x_n)] = g(x_n)$.

□

Chú ý 1.2. Cho $f(x)$ liên tục tại a. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.
Chú ý 1.3. Cho dãy (a_n), xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$ trong đó f là hàm liên tục. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow L = f(L)$.

Định lý 1.6 (Nguyên lý ánh xạ co)**.** *Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$, $\alpha \leq a_0 \leq \beta$. Giả sử*

a) $\alpha \leq f(x) \leq \beta,\ \forall x \in \left[\alpha, \beta\right]$

b) $\exists q \leq (0, 1)\,,\ |f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|\,,\ \forall x, y \in \left[\alpha, \beta\right]$.

Khi đó

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \left[\alpha, \beta\right]$ *và* $L = f(L)$

b) Với $n \geq 1$

$$|a_n - L| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0|$$
$$|a_n - L| \leq \frac{q}{1-q}\,|a_n - a_{n-1}|$$

Chứng minh. a) $|a_{n+k} - a_n| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+k} \left(a_i - a_{i-1}\right)\right| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} |a_i - a_{i-1}|$

$|a_i - a_{i-1}| = \left|f\left(a_{i-1}\right) - f\left(a_{i-2}\right)\right| \leq q\,|a_{i-1} - a_{i-2}| \leq q^2\,|a_{i-2} - a_{i-3}| \leq ... \leq q^{i-1}\,|a_1 - a_0|$

$|a_{n+k} - a_n| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} q^{i-1}\,|a_1 - a_0| = q^n \dfrac{1-q^k}{1-q}\,|a_1 - a_0| \leq \dfrac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0| \xrightarrow{n\to\infty,\ k>0} 0 \Rightarrow (a_n)$ là dãy Cauchy.

□

Chú ý 1.4. Điều kiện (b) trong Định lý 1.6 thỏa mãn nếu $\left|f'(x)\right| \leq q < 1,\ \forall x \in \left[\alpha, \beta\right]$. Thật vậy theo định lý Lagrange, $\exists c \in (x, y)\,,\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$, suy ra

$$\left|f(x) - f(y)\right| = \left|f'(c)\right| \times |x - y| \leq q\,|x - y|$$

Các dạng sau gồm Định lý 1.7, Mệnh đề 1.1 thì ít gặp hơn

Định lý 1.7 (Phương pháp Newton trong giải tích số)**.** *Cho dãy (a_n) xác định bởi* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, $a_0 \in \left[\alpha, \beta\right]$ *trong đó* *a)* f', f'' *không đổi dấu trên* $[\alpha, \beta]$*; và*

b) $f(\alpha) f(\beta) < 0$*; và*

c) $f(a_0) f'' > 0$

Khi đó

a) Dãy (a_n) *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f' f'' < 0$ *(tương ứng* $>$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và* L *là nghiệm duy nhất của* f *trên* $[\alpha, \beta]$

c)

$$|a_n - L| \leq \frac{M}{2m} |a_n - a_{n-1}|^2, \ \forall n \geq 1$$
$$|a_n - L| \leq \frac{|f(a_n)|}{m}, \ \forall n$$

trong đó $M \geq |f''(x)|$, $0 < m \leq |f'(x)|$, $\forall x \in [a, b]$

Chú ý 1.5 (Phương pháp Newton cải biên)**.** Nếu $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_0)}$, thì các các mục trong Định lý 1.7 vẫn đúng trừ kết luận (c).

Mệnh đề 1.1 (Phương pháp dây cung trong giải tích số)**.** *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(r)} (a_n - r)$*, trong đó*

a) f', f'' *không đổi dấu trên* $[x_0, r]$*; và*

b) $f(x_0) f(r) < 0$*; và*

c) $f' f'' > 0$ *ứng với* $x_0 < r$*, và ngược lại*

Khi đó

a) Dãy (a_n) *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f' f'' > 0$ *(tương ứng* $<$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và* L *là nghiệm duy nhất của* f *trên* $[x_0, r]$

c)

$$|a_n - L| \leq \left(\frac{M}{m} - 1\right) |a_n - a_{n-1}|^2, \ \forall n \geq 1$$
$$|a_n - L| \leq \frac{|f(a_n)|}{m}, \forall n$$

trong đó $0 < m \leq |f'(x)| \leq M$, $\forall x \in [a_0, r]$

1.2 Kiến thức bổ sung

1.2.1 Nguyên lý quy nạp

Xét khẳng định $S(n)$, $n \geq n_0$.

Dạng đơn giản Giả sử

a) Khẳng định đúng tại $n = n_0$.

b) Nếu khẳng định đúng **tại** n, $n \geq n_0$, thì cũng đúng tại $n + 1$.

Khi đó, khẳng định $S(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$.

Dạng tổng quát Giả sử

a) Khẳng định đúng với $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n_1$.

b) Nếu khẳng định đúng **từ $\mathbf{n_0}$ tới n**, $n \geq n_1$, thì cũng đúng tại $n + 1$.

Khi đó, khẳng định $S(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$.

Chú ý 1.6. Khi chứng minh $S(n)$, chỉ cần giả thiết của $S(n)$, $S(n-1)$,..., và xa nhất là $S(n-k)$, $k \geq 0$, thì $n_1 = n_0 + k$.

1.2.2 Khai triển Taylor, Maclaurin

1.3 Đề thi chính thức các năm

Ví dụ 1.1 (2022)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$.

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > \dfrac{3}{2}$.

b) Chứng minh (u_n) hội tụ.

c) (A) Chứng minh giới hạn của dãy số là một số vô tỷ.

HD. c) (Phương pháp phản chứng)

Giả sử $e = \dfrac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$ là số hữu tỷ. Xét $x = b!\left(e - \displaystyle\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right)$

1. $x = b!\left(\dfrac{a}{b} - \displaystyle\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \displaystyle\sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!} \in \mathbb{Z}$

2. $x = b!\left(\dfrac{a}{b} - \displaystyle\sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b!\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = \displaystyle\sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$

3. $n \geq b + 1 \Rightarrow \dfrac{b!}{n!} = \dfrac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} \leq \dfrac{1}{(b+1)^{n-b}}$, và nhỏ hơn thực sự nếu $n \geq b + 2$

$$\Rightarrow x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} \leq 1$$

□

Ví dụ 1.2 (2019)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \dfrac{2x_n}{2 + x_n}$. Chứng minh

a) Dãy (x_n) không âm.

b) $\exists c \in (0, 1)\,,\ |x_{n+1} - x_n| \leq c\,|x_n - x_{n-1}|\,,\ \forall n \geq 2.$

c) (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Ví dụ 1.3 (2018)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2018}x_n^2 + \dfrac{2017}{2018}x_n$.

a) Chứng minh (x_n) tăng, không bị chặn trên.

b) Chứng minh $\dfrac{x_n}{x_{n+1} - 1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$

c) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{x_{k+1} - 1}$

Chú ý 1.7. Tổng quát cho $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = bx_n^2 + (1 - b)\,x_n$ với $0 < b < 1$.

Ví dụ 1.4 (2017)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1$.

Bảng A: Chứng minh (u_n) hội tụ, và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bảng B: Chứng minh

a) $-1 < u_n < 0,\ \forall n \geq 2$

b) (u_n) có giới hạn, và giới hạn đó là $1 - \sqrt{3}$

Ví dụ 1.5 (2016)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

a) Tìm a để (u_n) hội tụ

b) Tìm giới hạn của (u_n) khi nó hội tụ

Chú ý 1.8. Tổng quát cho $u_{n+1} = u_n + (u_n - b)^2$.

Ví dụ 1.6 (2015)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$, $n \geq 0$.

a) Chứng minh (a_n) đơn điệu

b) Cho $a_0 = 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

c) Tìm tất cả giá trị của a_0 để (a_n) có giới hạn hữu hạn. Khi đó tìm $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$

Ví dụ 1.7 (2014)**.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$, $a \geq 0$. Tìm a để (u_n) hội tụ, và tìm giới hạn đó.

HD. Bình phương hệ thức rồi khử $\to$ tính u_n^2 theo a □

Ví dụ 1.8 (2013)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = a \in \mathbb{R}, \quad (n+1)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ví dụ 1.9 (2012)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = \alpha$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} a_n - \dfrac{2}{n}$, $n \geq 1$. Tìm α để dãy (a_n) hội tụ.

Ví dụ 1.10 (2011)**.** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{e^x}{(x+1)^2}$. Chứng minh

a) Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trong $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, và $f'(x)$ đồng biến.

b) Dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = f(u_n)$ thỏa mãn $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $\forall n$.

Ví dụ 1.11 (2011)**.** Cho hai dãy (x_n), (y_n)thỏa mãn $x_{n+1} \geq \dfrac{x_n + y_n}{2}$, và $y_{n+1} \geq \sqrt{\dfrac{x_n^2 + y_n^2}{2}}$ với $n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh các dãy $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ là những dãy đơn điệu tăng.

b) Giả sử (x_n), (y_n) bị chặn. Chứng minh chúng cùng hội tụ về một điểm.

Ví dụ 1.12 (2011)**.** Cho $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\alpha+n} < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\beta+n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm $\min |\alpha - \beta|$.

Ví dụ 1.13 (2010)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n\left(1 + x_n^{2010}\right)$, $n \geq 1$.

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x_1^{2010}}{x_2} + \dfrac{x_2^{2010}}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n^{2010}}{x_{n+1}}\right)$.

Ví dụ 1.14 (2009)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = x_2 = 1$, $x_n = (n-1)\left(x_{n-1} + x_{n-2}\right)$, $n \geq 3$. Tính x_{2009}.

Ví dụ 1.15 (2009)**.** Cho hai dãy (x_n), (y_n) xác định bởi

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2},\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}},\ n \geq 1$$

Chứng minh $x_n, y_n \in (2, 3)$ với $n \geq 2$, và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Ví dụ 1.16 (2008)**.** Cho dãy (a_n) xác định bởi $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + a_n$, $n \geq 1$. Tính a_{2008}.

Ví dụ 1.17 (2008)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{2008} + 2^{2008} + \cdots + n^{2008}}{n^{2009}}$.

Ví dụ 1.18 (2007)**.** Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_0 = 2007$, $x_n = -2007\dfrac{x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n}$, $n \geq 1$.

Tìm liên hệ giữa x_n, x_{n-1} với $n \geq 1$. Từ đó tính tổng $S = x_0 + 2x_1 + 4x_2 + \cdots + 2^{2007} x_{2007}$.

Ví dụ 1.19 (2007)**.** Cho $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq c - b$. Dãy (u_n), (v_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1} + b - c},\ n \geq 1$$

Biết $\lim u_n = \alpha$, tìm $\lim v_n$.

Ví dụ 1.20 (2006)**.** Cho dãy (a_n) thỏa mãn $x_1 = 2$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n^2 x_n$, $n \geq 2$. Tính x_{2006}.

Ví dụ 1.21 (2006)**.** (Lời giải có vấn đề!) Xác định các dãy số (x_n) biết $x_{2n+1} = 3x_n + 2$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

1.4 Luyện tập

Ví dụ 1.22 (Olympic SV Bắc Mỹ). $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ lần}}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n(2-x_n)$.

HD.

1. $x_1 = \sqrt[3]{6}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}$
2. $f(x) = \sqrt[3]{6+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(6+x)^2}}$
3. Dự đoán $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: $L = f(L)$
4. $0 < x_n < 2$, $\forall n$
5. (x_n) tăng
6. $L = 2$
7. $2 - x_n = f(2) - f(x_{n-1}) = f'(c)(2 - x_{n-1}) < \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(6+0)^2}}(2 - x_{n-1})$
8. Đặt $q = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{36}} < \dfrac{1}{6} \Rightarrow 2 - x_n < q^{n-1}(1-x_1) \Rightarrow 6^n(2-x_n) = \dfrac{1-x_1}{q}(6q)^n$

□

Chú ý 1.9. Tương tự với $x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n}$ khi $a \in \{2, 6, 12, 20\}$, hoặc $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\cdots+\sqrt[3]{a}}}}_{n}$ khi $a \in \{24, 60, 120\}$. Riêng $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Ví dụ 1.23 (Olympic SV Bắc Mỹ). Cho $a_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)x_{n-1} + \dfrac{1}{n}x_{n-2}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

HD.

1. $x_n - x_{n-1}$
2. x_n

□

Ví dụ 1.24. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 \in (0,1)$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

HD. Dạng giống Ví dụ 1.6 ý (c) □

Ví dụ 1.25. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2002}$. Chứng minh $x_{2002} < \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 1.26. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$

2 Khai triển Taylor, Maclaurin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left[(x - x_0)^n\right], \quad f \in C^n(a, b), \ x_0 \in (a, b)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right), \quad f \in C^n(a, b), \ 0 \in (a, b)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

Ví dụ 2.1. Chứng minh π là số vô tỷ.

HD. □

3 Tích phân

3.1 Tóm tắt lý thuyết

Mệnh đề 3.1. *Cho $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nếu f thỏa mãn điều kiện Lipschitz*

$$\exists L \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in A$$

thì f liên tục trên A.

3.2 Đề thi chính thức các năm

Ví dụ 3.1 (2023A)**.** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu $\displaystyle\int_0^1 f(x)[P(x)]^m = 0$ với mọi $m \in \mathbb{N}$ và đa thức bậc hai P thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$

b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu điều kiện P là đa thức bậc hai được thay bằng điều kiện P là đa thức bậc nhất?

Ví dụ 3.2 (2023B)**.** Cho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

a) Chứng minh rằng nếu $\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$ với mọi hàm liên tục $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $g(0) = g(1) = 0$ thì $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$

b) Kết luận ở ý (a) còn đúng không nếu ta thêm điều kiện $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$?

Ví dụ 3.3 (2022)**.** Gọi $\mathcal{F}$ là lớp tất cả các hàm $f : [-1, 1] \to [0, \infty)$ sao cho $f(-1) = f(1) = 1$ và

$$|f(x) - f(y)| \leq 2022\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in [-1, 1]$$

a) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì f liên tục

b) Chứng minh rằng nếu $f \in \mathcal{F}$ thì $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq \frac{1}{2022}$

c) (A) Dấu đẳng thức trong ý (b) có đạt được hay không? (Nếu câu trả lời là “không”, hãy chứng minh; nếu câu trả lời là “có”, hãy chỉ ra ví dụ về một hàm f làm cho đẳng thức xảy ra.)

HD. a) Áp dụng Mệnh đề 3.1

□

Ví dụ 3.4 (2019)**.** Cho f là một hàm số khả vi liên tục trên $[0, 1]$ và có $f(1) = 0$.

a) Chứng minh $\int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 x\,|f'(x)|\,dx$

b) Tìm ví dụ về một hàm số f khả vi liên tục trên $[0, 1]$, với $f(1) = 0$, sao cho $\int_0^1 |f(x)|\,dx < \int_0^1 x\,|f'(x)|\,dx$

Ví dụ 3.5 (2019)**.** Cho $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ là một hàm số liên tục và đơn điệu không tăng.

a) Giả sử tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) + \int_0^x f(t)\,dt\right] < \infty$. Chứng minh $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 0$

b) Tìm ví dụ về một hàm số $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ liên tục, đơn điệu không tăng, sao cho

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) + \int_0^x f(t)\,dt\right] = \infty \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$$

Ví dụ 3.6 (2018A)**.** Giả sử $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi sao cho $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)\,dx$

Ví dụ 3.7 (2018A)**.** Cho hai số thực $a < b$. Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số khả vi liên tục sao cho $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Chứng minh $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{8}\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$

HD. Áp dụng định lý trung bình thứ hai, rồi xét hàm $G(x) = e^{-kf(x)}\int_0^x f(t)\,dt$ □

Ví dụ 3.8 (2018B)**.** Giả sử $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục sao cho $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx$. Chứng minh $\exists c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 2018\int_0^c f(x)\,dx$

HD. Áp dụng định lý trung bình thứ hai, rồi xét hàm $G(x) = e^{-kx}\int_0^x f(t)\,dt$ □

Ví dụ 3.9 (2017A)**.** Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm số liên tục thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1$

a) Tìm một ví dụ về hàm số liên tục f thỏa mãn cả hai điều kiện trên

b) Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở $(a,b)\subset(0,1)$ không rỗng, sao cho $|f(x)| > 4 \quad \forall x\in(a,b)$

Ví dụ 3.10 (2017B)**.** Tính $\int_0^3 \sqrt{2+\sqrt{1+x}}dx$

Ví dụ 3.11 (2016A)**.** Với mỗi số thực $0 < \alpha \neq 1$, gọi f_α) là hàm số được xác định trên khoảng $(1,\infty)$ bởi công thức $f_\alpha(x) = \int_x^{x^\alpha}\frac{dt}{\ln t}, \quad (x > 1)$

a) Chứng minh rằng f_α là một phép đồng phôi, tức là một song ánh liên tục, từ khoảng $(1,\infty)$ lên một khoảng $I_\alpha\subset\mathbb{R}$ nào đó sao cho ánh xạ ngược $f_\alpha^{-1}: I_\alpha\to(1,\infty)$ cũng liên tục

b) Tìm I_α

Ví dụ 3.12 (2016B)**.** Cho $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi công thức $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t}, \quad (x > 1)$. Tìm tập giá trị của f

Ví dụ 3.13 (2015A)**.** Cho $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ là một hàm liên tục. Biết rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\int_0^x [f(t)]^2 dt = a\in(0,\infty)$. Hãy tìm $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}f(x)$

Ví dụ 3.14 (2015B)**.** Cho $f:[0,1]\to(-\infty,1]$ là một hàm liên tục, thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Chứng minh $\int_0^1 [f(x)]^3 dx \le \frac{1}{4}$

Ví dụ 3.15 (2015B)**.** Cho $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ là một hàm liên tục. Đặt $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}\int_0^x \frac{dt}{f(t)}, \quad (x \ge 0)$. Chứng minh rằng g không bị chặn trên $[0,\infty)$

Ví dụ 3.16.

Ví dụ 3.17.

4 Đề thi vòng loại 2024

Ví dụ 4.1. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{3x_n+1}{x_n+2}$, $n\ge 1$.

a) Chứng minh dãy đơn điệu giảm.

b) Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Ví dụ 4.2. Cho dãy (a_n) thỏa mãn $a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n + 2$, $n \ge 1$.

a) Với $a_1 = \dfrac{3}{2}$, tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Tìm a_1 để dãy hội tụ.

Ví dụ 4.3. Cho hàm số $f_n(x) = \cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos(3x) \cdots \cos(nx)$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất để $\left|f_n''(0)\right| \geq 120$.

Ví dụ 4.4. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{1}{x}, & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0, & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Chứng minh hàm số gián đoạn tại $x = 0$. Khi đó $x = 0$ là điểm gián đoạn loại mấy?

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{nếu } x \text{ là số hữu tỷ} \\ \cos x, & \text{nếu } x \text{ là số vô tỷ} \end{cases}$. Chứng minh f liên tục tại $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Ví dụ 4.5. Một lỗi tính toán rất hay gặp đó là khi tính đạo hàm, một số người lầm tưởng rằng quy tắc tính đạo hàm của tích đó là $(fg)' = f'g'$.

a) Hãy chỉ ra ví dụ để chứng minh quy tắc trên là sai.

b) Hãy đưa ra ví dụ hai hàm f và g không phải hàm hằng trên một khoảng mở (a, b) nào đó mà quy tắc trên vẫn đúng.

Phần II

Đại số

5 Đề thi vòng loại trường 2024

Ví dụ 5.1. Cho định thức $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, trong đó a, b, c là ba nghiệm của phương trình $x^3 - 2024x + 2025 = 0$.

Ví dụ 5.2. Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{4\times 4}$, biết a_{ij} là số các cặp số tự nhiên (m, n) sao cho $mi + nj = 4$, ví dụ, $a_{11} = 5$. Tính $\det A$.

Ví dụ 5.3. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 5.4. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để đa thức $P(x) = x^4 + 9x^3 + mx^2 + 9x + 4$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 5.5. a) Cho A là ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $A^{2024} = O$. Chứng minh $A^2 = O$.

b) Cho A, B là hai ma trận vuông cùng cấp, biết $I + AB$ khả nghịch. Chứng minh $I + BA$ cũng khả nghịch.

HD. a) Xét 2 khả năng

1) A chéo hóa được. Khi đó $A = C^{-1}DC$, trong đó $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$. Suy ra $A^{2024} = C^{-1}D^{2024}C$, trong đó $D^{2024} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{2024} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2024} \end{bmatrix}$
$A^{2024} = O \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = O$.

2) A không chéo hóa được, thì A có dạng Jordan, $A = C^{-1}JC$, trong đó $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Khi đó $A^{2024} = C^{-1}J^{2024}C$, trong đó $J^{2024} = \begin{bmatrix} \lambda^{2024} & 2024\lambda^{2023} \\ 0 & \lambda^{2024} \end{bmatrix}$
$A^{2024} = O \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow J^2 = O \Rightarrow A^2 = O$.

□