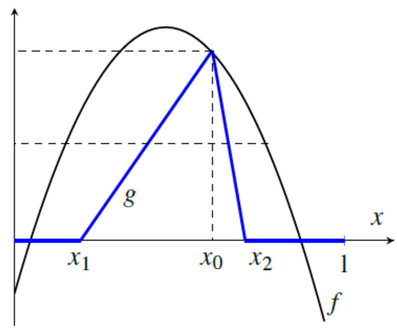
Gợi ý. a) Từ tính liên tục của f, chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0, 1)$. Giả sử ngược lại, tức là $\exists x_0 \in (0, 1) \quad f(x_0) \not\equiv 0$. Có thể giả sử $f(x_0) > 0$. Khi đó ta tìm được $\varepsilon > 0$, $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ sao cho

$$f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

Xét hàm g trên $[0, 1]$ xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \le x \le x_1 \\ f(x_0)\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} & \text{nếu } x_1 \le x \le x_0 \\ f(x_0)\dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_0} & \text{nếu } x_0 \le x \le x_2 \\ 0 & \text{nếu } x_2 \le x \le 1. \end{cases}$$



Khi đó $g \ge 0$, liên tục trên $[0, 1]$, và $g(0) = g(1) = 1$. Theo giả thiết

$$0 = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx = \left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^1\right) f(x) g(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x)\, dx \ge$$
$$\ge \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} g(x)\, dx = \varepsilon \left[\int_{x_1}^{x_0} f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx + \int_{x_0}^{x_2} f(x_0)\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} dx\right] = \varepsilon f(x_0)\frac{x_2 - x_1}{2} > 0,$$

dẫn đến mâu thuẫn.

b) Lập luận tương tự ý (a), ta cũng có $f \equiv 0$ trên $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ và trên $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, tức là ta vẫn có $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

□