Gợi ý. a) $1 + \dfrac{1}{4^k} > 0,\ \forall k \geq 1 \Rightarrow u_n > 0, \forall n \geq 1.$

$$\left(1 + \frac{1}{4^k}\right) > 1,\ \forall k \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{4^{k+1}}\right) > u_n,\ \forall n \geq 1. \tag{1}$$

$$u_1 = \frac{5}{4} \Rightarrow u_2 > u_1 = \frac{5}{4} \Rightarrow u_n \geq u_2 > \frac{5}{4},\ \forall n \geq 2.$$

b)

- $\ln u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{4^k}\right)$
- $f(x) = \ln(1+x) - x, \quad x \geq 0.$ (?)

  $f'(x) = -\dfrac{x}{1+x} < 0,\ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0),\ \forall x > 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x,\ \forall x > 0 \Rightarrow \ln\left(1 + \dfrac{1}{4^k}\right) < \dfrac{1}{4^k}.$
- $\ln u_n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} < \frac{1}{3} \Rightarrow u_n < e^{\frac{1}{3}} \leq 2023.$ (2)

c) (1)(2) $\Rightarrow \{u_n\}$ hội tụ, giả sử tới L.

d)

- Tương tự ý (b), chứng minh $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2},\ \forall x \geq 0$, bằng cách xét $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}, x \geq 0.$ (?)

$$g''(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} > 0,\ \forall x > 0$$
$$\Rightarrow g'(x) > g'(0) = 0,\ \forall x > 0$$
$$\Rightarrow g(x) > g(0) = 0,\ \forall x > 0.$$

- $\ln\left(1 + \dfrac{1}{4^k}\right) > \dfrac{1}{4^k} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4^k}\right)^2 = \dfrac{1}{4^k} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{16^k}.$
- $\ln u_n > \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^k} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{16^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{16^k} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 - \frac{1}{16}}$
- $\ln L \geq \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{15} = \dfrac{3}{10} \Rightarrow L \geq e^{\frac{3}{10}}.$ (3)
- (2)(3) $\Rightarrow e^{\frac{3}{10}} \leq L \leq e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 1.34986 \leq L \leq 1.39561 \Rightarrow L \approx 1.3.$

□

Nhận xét. a) Các ý có dấu (?), đều có gợi ý từ khai triển Maclaurin của $\ln(1+x)$.

b) Trong ý (b)(d), để chứng minh $x > \ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2},\ \forall x > 0$, nên sử dụng khai triển Taylor của $\ln(1+x)$ tại $x_0 = 0$ với số dư dạng Lagrange tới cấp n

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

trong đó c ở giữa 0 và x. Khi $x > 0$, thì $c > 0$.

- Với $n = 1$, $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} = -\dfrac{x^2}{2c^2} < 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$.
- Với $n = 2$, $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}} = \dfrac{x^3}{3c^3} > 0 \Rightarrow \ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

Tổng quát, khi $x > 0$, nếu n chẵn thì

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

và nhỏ hơn nếu n lẻ.

c) Trong ý (d) để tìm L có độ chính xác cao hơn, ta cần đánh giá $\ln\left(1 + \dfrac{1}{4^k}\right)$ có độ chính xác cao hơn, tức là cần so sánh kẹp $\ln(1+x)$ bởi hai phần chính trong khai triển Maclaurin có bậc cao hơn (trong bài này là bậc 1 và 2).

d) Một số dãy $\{u_n\}$ tương tự và hội tụ.

- $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{a^k}\right)$, $a > 1$ thì

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{1}{a^k}\right) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a^k} = \frac{1}{a} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n}{1 - \frac{1}{a}} < \frac{1}{a-1}.$$

- $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ thì

$$\ln u_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

- $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k!}\right)$ thì

$$\ln u_n < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} < 2.$$

e) Dãy $\{u_n\}$ tương tự và phân kỳ

- $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ thì

$$\ln u_n > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

trong đó dãy $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}_n$ phân kỳ, còn $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right\}_n$ hội tụ, nên $\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right\}_n$ phân kỳ. Do đó $\{\ln u_n\}$ phân kỳ.