TÀI LIỆU LUYỆN THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Phần I

Giải tích

1 Dãy số và hàm số

1.1 Tóm tắt lý thuyết

Đ/n 1.1. *Dãy (a_n) đơn điệu tăng (tương ứng giảm) nếu $a_n \le a_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$). Dãy tăng (hoặc giảm) gọi chung là đơn điệu.*

Đ/n 1.2. *Dãy (a_n) bị chặn trên (tương ứng dưới) nếu $\exists C, \ a_n \le C, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$).*

Đ/l 1.1. *Dãy (a_n) tăng và bị chặn trên (tương ứng dưới) bởi C thì có giới hạn L và $u_n \le L \le C, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$ (tương ứng $\ge$).*

Đ/l 1.2 (Nguyên lý kẹp)**.** *Cho các dãy (a_n), (b_n), (c_n). Giả sử*

a) $\exists n_0, \ a_n \le b_n \le c_n, \ \forall n \ge n_0;$ *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Đ/l 1.3 (Nguyên lý Cauchy)**.** *Dãy (a_n) hội tụ $\Leftrightarrow$ nó là dãy cơ bản (dãy Cauchy):*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0, \ \forall n, m > n_0, \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Đ/l 1.4 (Stolz)**.** *Cho hai dãy (a_n), (b_n). Giả sử*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty;$ *và*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$

Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$

H/q 1.1. *Cho dãy số dương (a_n). Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$

HD. Áp dụng định lý Stolz với hai dãy $(\ln a_n)$ và (n). □

Đ/l 1.5 (Đ/l trung bình Cesàro)**.** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = L$

Chú ý 1.1. *Cho dãy $a_{n+1} = f(a_n)$. Xét hàm $f(x)$.*

a) Giả sử $\alpha < f(x) < \beta, \ \forall x \in (\alpha, \beta)$. Khi đó $a_{n_0} \in (\alpha, \beta) \Rightarrow a_n \in (\alpha, \beta), \ \forall n \ge n_0$.

b) $f'(x) > 0,\ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$ *dãy* $(a_n)_{n \geq n_0}$ *tăng (tương ứng giảm) nếu* $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$ *(tương ứng* $\geq$*).*

c) $f'(x) < 0,\ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow$ *dãy chẵn* (x_{2n}) *đơn điệu và dãy lẻ* $\left(x_{2n-1}\right)$ *cũng đơn điệu.*

Gợi ý. (Quy nạp)

b) $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$

c) $g(x) = f[f(x)] \Rightarrow g'(x) = f'[f(x)]\, f'(x) > 0$, và $x_{n+2} = f(x_{n+1}) = f[f(x_n)] = g(x_n)$.

□

Chú ý 1.2. *Cho* $f(x)$ *liên tục tại a. Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Chú ý 1.3. *Cho dãy* (a_n)*, xác định bởi* $a_{n+1} = f(a_n)$ *trong đó f là hàm liên tục. Khi đó* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow L = f(L)$.

Đ/l 1.6 (Nguyên lý ánh xạ co)**.** *Cho dãy* (a_n) *xác định bởi* $a_{n+1} = f(a_n)$, $\alpha \leq a_0 \leq \beta$*. Giả sử*

a) $\alpha \leq f(x) \leq \beta,\ \forall x \in \left[\alpha, \beta\right]$

b) $\exists q \leq (0, 1),\ |f(x) - f(y)| \leq q\,|x - y|,\ \forall x, y \in \left[\alpha, \beta\right]$.

Khi đó

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \in \left[\alpha, \beta\right]$ *và* $L = f(L)$

b) Với $n \geq 1$

$$|a_n - L| \leq \frac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0|$$
$$|a_n - L| \leq \frac{q}{1-q}\,|a_n - a_{n-1}|$$

Chứng minh. a) $|a_{n+k} - a_n| = \left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+k}\left(a_i - a_{i-1}\right)\right| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} |a_i - a_{i-1}|$

$|a_i - a_{i-1}| = \left|f\left(a_{i-1}\right) - f\left(a_{i-2}\right)\right| \leq q\,|a_{i-1} - a_{i-2}| \leq q^2\,|a_{i-2} - a_{i-3}| \leq \ldots \leq q^{i-1}\,|a_1 - a_0|$

$|a_{n+k} - a_n| \leq \sum\limits_{i=n+1}^{n+k} q^{i-1}\,|a_1 - a_0| = q^n \dfrac{1-q^k}{1-q}\,|a_1 - a_0| \leq \dfrac{q^n}{1-q}\,|a_1 - a_0| \xrightarrow{n\to\infty,\ k>0} 0 \Rightarrow (a_n)$ là dãy Cauchy.

□

Chú ý 1.4. *Điều kiện (b) trong Đ/l 1.6 thỏa mãn nếu* $|f'(x)| \leq q < 1,\ \forall x \in \left[\alpha, \beta\right]$*. Thật vậy theo định lý Lagrange,* $\exists c \in (x, y),\ f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$*, suy ra*

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \times |x - y| \leq q\,|x - y|$$

Các dạng sau gồm Đ/l 1.7, M/đ 1.1 thì ít gặp hơn

Đ/l 1.7 (Phương pháp Newton trong giải tích số)**.** *Cho dãy* (a_n) *xác định bởi* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, $a_0 \in \left[\alpha, \beta\right]$ *trong đó* *a)* f', f'' *không đổi dấu trên* $\left[\alpha, \beta\right]$*; và*

b) $f(\alpha) f(\beta) < 0$*; và*

c) $f(a_0) f'' > 0$

Khi đó

a) Dãy (a_n) *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f' f'' < 0$ *(tương ứng* $>$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và* L *là nghiệm duy nhất của* f *trên* $\left[\alpha, \beta\right]$

c)

$$|a_n - L| \le \frac{M}{2m}|a_n - a_{n-1}|^2, \ \forall n \ge 1$$
$$|a_n - L| \le \frac{|f(a_n)|}{m}, \ \forall n$$

trong đó $M \ge |f''(x)|, 0 < m \le |f'(x)|, \ \forall x \in [a, b]$

Chú ý 1.5 (Phương pháp Newton cải biên)**.** *Nếu* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_0)}$*, thì các các mục trong Đ/l 1.7 vẫn đúng trừ kết luận (c).*

M/đ 1.1 (Phương pháp dây cung trong giải tích số)**.** *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f(a_n) - f(r)}(a_n - r)$*, trong đó*

a) f', f'' *không đổi dấu trên* $[x_0, r]$*; và*

b) $f(x_0) f(r) < 0$*; và*

c) $f' f'' > 0$ *ứng với* $x_0 < r$*, và ngược lại*

Khi đó

a) Dãy (a_n) *tăng (tương ứng giảm) nếu* $f' f'' > 0$ *(tương ứng* $<$*)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$*, và* L *là nghiệm duy nhất của* f *trên* $[x_0, r]$

c)

$$|a_n - L| \le \left(\frac{M}{m} - 1\right)|a_n - a_{n-1}|^2, \ \forall n \ge 1$$
$$|a_n - L| \le \frac{|f(a_n)|}{m}, \forall n$$

trong đó $0 < m \le |f'(x)| \le M, \ \forall x \in [a_0, r]$

1.2 Kiến thức bổ sung

1.2.1 Nguyên lý quy nạp

Xét khẳng định $S(n)$, $n \ge n_0$.

Dạng đơn giản Giả sử

a) Khẳng định đúng tại $n = n_0$.

b) Nếu khẳng định đúng **tại** n, $n \geq n_0$, thì cũng đúng tại $n + 1$.

Khi đó, khẳng định $S(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$.

Dạng tổng quát Giả sử

a) Khẳng định đúng với $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, n_1$.

b) Nếu khẳng định đúng **từ $\mathbf{n_0}$ tới n**, $n \geq n_1$, thì cũng đúng tại $n + 1$.

Khi đó, khẳng định $S(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$.

Chú ý 1.6. *Khi chứng minh $S(n)$, chỉ cần giả thiết của $S(n)$, $S(n-1), \ldots$, và xa nhất là $S(n-k)$, $k \geq 0$, thì $n_1 = n_0 + k$.*

1.2.2 Khai triển Taylor, Maclaurin

1.3 Đề thi chính thức các năm

Vd 1.1 (2022)**.** *Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$.*

a) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > \frac{3}{2}$.

b) Chứng minh (u_n) hội tụ.

c) (A) Chứng minh giới hạn của dãy số là một số vô tỷ.

HD. c) (Phương pháp phản chứng)

Giả sử $e = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$ là số hữu tỷ. Xét $x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right)$

1. $x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!} \in \mathbb{Z}$

2. $x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = b!\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} > 0$

3. $n \geq b+1 \Rightarrow \frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)\cdots n} \leq \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$, và nhỏ hơn thực sự nếu $n \geq b+2$

$$\Rightarrow x = \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b} \leq 1$$

□

Vd 1.2 (2019)**.** *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 2019, \quad x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \dfrac{2x_n}{2 + x_n}$*. Chứng minh*

a) *Dãy* (x_n) *không âm.*

b) $\exists c \in (0,1)\,,\ |x_{n+1} - x_n| \le c\,|x_n - x_{n-1}|\,,\ \forall n \ge 2.$

c) (x_n) *có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.*

Vd 1.3 (2018)**.** *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2018}x_n^2 + \dfrac{2017}{2018}x_n$.

a) *Chứng minh* (x_n) *tăng, không bị chặn trên.*

b) *Chứng minh* $\dfrac{x_n}{x_{n+1} - 1} = 2018\left(\dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}\right)$

c) *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{x_{k+1} - 1}$

Chú ý 1.7. *Tổng quát cho* $x_1 = a > 0$, $x_{n+1} = bx_n^2 + (1 - b)\,x_n$ *với* $0 < b < 1$.

Vd 1.4 (2017)**.** *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - 1$.

Bảng A: *Chứng minh* (u_n) *hội tụ, và tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

Bảng B: *Chứng minh*

a) $-1 < u_n < 0,\ \forall n \ge 2$

b) (u_n) *có giới hạn, và giới hạn đó là* $1 - \sqrt{3}$

Vd 1.5 (2016)**.** *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

a) *Tìm* a *để* (u_n) *hội tụ*

b) *Tìm giới hạn của* (u_n) *khi nó hội tụ*

Chú ý 1.8. *Tổng quát cho* $u_{n+1} = u_n + (u_n - b)^2$.

Vd 1.6 (2015)**.** *Cho dãy* (a_n) *xác định bởi* $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$, $n \ge 0$.

a) *Chứng minh* (a_n) *đơn điệu*

b) *Cho* $a_0 = 1$*. Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

c) *Tìm tất cả giá trị của* a_0 *để* (a_n) *có giới hạn hữu hạn. Khi đó tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$

Vd 1.7 (2014)**.** *Cho dãy* (u_n) *xác định bởi* $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}$, $a \ge 0$*. Tìm* a *để* (u_n) *hội tụ, và tìm giới hạn đó.*

HD. Bình phương hệ thức rồi khử $\to$ tính u_n^2 theo a □

Vd 1.8 (2013)**.** *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $x_1 = a \in \mathbb{R}, \quad (n+1)^2\,x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 1$*. Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

1.4 Luyện tập

Vd 1.9 (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\cdots+\sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ lần}}$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n(2-x_n)$.

HD. 1. $x_1 = \sqrt[3]{6}$, $x_{n+1} = \sqrt[3]{6+x_n}$

2. $f(x) = \sqrt[3]{6+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(6+x)^2}}$

3. Dự đoán $L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$: $L = f(L)$

4. $0 < x_n < 2,\ \forall n$

5. (x_n) tăng

6. $L = 2$

7. $2 - x_n = f(2) - f\left(x_{n-1}\right) = f'(c)\left(2 - x_{n-1}\right) < \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(6+0)^2}}\left(2 - x_{n-1}\right)$

8. Đặt $q = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{36}} < \dfrac{1}{6} \Rightarrow 2 - x_n < q^{n-1}(1-x_1) \Rightarrow 6^n(2-x_n) = \dfrac{1-x_1}{q}(6q)^n$

□

Chú ý 1.9. *Tương tự với* $x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n}$ *khi* $a \in \{2,6,12,20\}$, *hoặc* $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{a+\sqrt[3]{a+\cdots+\sqrt[3]{a}}}}_{n}$ *khi* $a \in \{24,60,120\}$. *Riêng* $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

Vd 1.10 (Olympic SV Bắc Mỹ)**.** *Cho* $a_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)x_{n-1} + \dfrac{1}{n}x_{n-2}$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

HD. 1. $x_n - x_{n-1}$

2. x_n

□

Vd 1.11. *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $x_1 \in (0,1)$, $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$. *Tìm* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

HD. Dạng giống Vd 1.6 ý (c) □

Vd 1.12. *Cho dãy* (x_n) *xác định bởi* $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2}{2002}$. *Chứng minh* $x_{2002} < \dfrac{1}{2}$.

Vd 1.13. *Tính* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{C_n^k}\right)^n$

2 Khai triển Taylor, Maclaurin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left[(x - x_0)^n\right], \quad f \in C^n(a, b),\ x_0 \in (a, b)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o\left(x^n\right), \quad f \in C^n(a, b),\ 0 \in (a, b)$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

Vd 2.1. *Chứng minh e là số vô tỷ.*

HD. □

Vd 2.2. *Chứng minh π là số vô tỷ.*

HD. □