Gợi ý. b) – (Bổ đề) Giả sử $f \in C[a,b]$ và $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh $f \equiv 0$ trên $[a,b]$.

Thật vậy, dễ thấy với mọi đa thức P, ta có $\int_a^b P(x) f(x)\,dx = 0$. Theo định lý xấp xỉ Weierstrass, có dãy đa thức $\{P_n\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ tới f. Khi đó

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b P_n(x) f(x)\,dx = \int_a^b f(x) f(x)\,dx = \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Mặt khác, $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$, suy ra $f^2(x)$ cũng liên tục trên đó, và $f^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$, nên $f^2(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$, tức là $f \equiv 0$ trên $[a,b]$.

– Chọn $P(x) = x$ thì $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Theo bổ đề trên $f \equiv 0$ trên $[0,1]$.

a) – Ta chứng minh nhận xét sau bằng quy nạp: x^{2n-1}, $n \in \mathbb{Z}^+$, luôn biểu diễn tuyến tính (bdtt) được theo các đa thức có dạng $[P(x)]^m$, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc hai, và $m \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, trước hết $x = \left(x^2 + x\right) - \left(x^2\right)$. Giả sử x^{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, bdtt được theo các đa thức có dạng $[P(x)]^m$ trong đó $P(x)$ là đa thức bậc hai, và $m \in \mathbb{N}$. Xét

$$\left(x^2 + x\right)^{n+1} - \left(x^2\right)^{n+1} = (n+1)\,x^{2n+1} + Q(x)$$

trong đó $Q(x)$ là đa thức bậc $\leq 2n$. Các đơn thức của $Q(x)$ gồm hai dạng

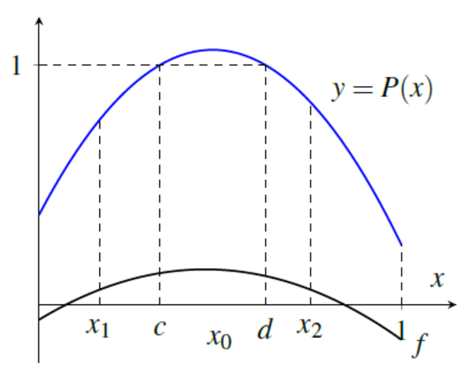
- $x^{2k} = \left(x^2\right)^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- x^{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots, n$. Theo giả thiết quy nạp, các đơn thức này bdtt theo các đa thức có dạng đã cho.

Do đó $Q(x)$ bdtt theo các các thức đã cho. Theo quy lý quy nạp, x^{2n-1}, $n \in \mathbb{Z}^+$, bdtt được theo các đa thức đã cho.

– Từ nhận xét trên suy ra $\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Theo ý (b), $f \equiv 0$ trên $[a,b]$.

□

Lời giải gốc. a) Từ tính liên tục của của f, chỉ cần chứng minh $f \equiv 0$ trên $(0,1)$. Giả sử ngược lại $\exists x_0 \in (0,1) \quad f(x_0) \neq 0$. Ta có thể giả thiết $f(x_0) > 0$. Khi đó có $0 < x_1 < x_0 < x_2 < 1$ sao cho $f(x) > 0 \quad \forall x \in [x_1, x_2]$.



Đặt $c = \dfrac{x_1 + x_0}{2},\ d = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$, ta có $x_1 < c < x_0 < d < x_2$. Xét đa thức

$$P(x) = (x - c)(d - x) + 1.$$

Dễ thấy $P \geq 0$ trên $[0, 1]$, và $P \geq 1$ trên $[c, d] \subset [x_1, x_2] \subset (0, 1)$. Từ tính đơn điệu của P ta thấy

$$0 \leq P(x) \leq P(x_1) < 1 \quad \forall x \in [0, x_1] \quad \text{và} \quad 0 \leq P(x) \leq P(x_2) < 1 \quad \forall x \in [x_2, 1].$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 f(x)\,[P(x)]^m dx = \left(\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{c} + \int_c^d + \int_d^{x_2} + \int_{x_2}^1\right) f(x)\,[P(x)]^m dx \geq \\
&\geq \left(\int_0^{x_1} + \int_c^d + \int_{x_2}^1\right) f(x)\,[P(x)]^m dx \\
&\geq -[P(x_1)]^m \int_0^{x_1} \left|f(x)\right| dx + \int_c^d f(x)\,dx - [P(x_2)]^m \int_{x_2}^1 \left|f(x)\right| dx.
\end{aligned}$$

Do $0 \leq P(x_1),\ P(x_2) < 1$, nên qua giới hạn khi $m \to \infty$, ta có

$$\int_c^d f(x)\,dx \leq 0.$$

Đây là điều vô lý vì f liên tục và $f > 0$ trên $[c, d]$.

b) Do mọi đa thức, vì thế kể cả đa thức có dạng $[P(x)]^m$ trong ý (a), đều là tổ hợp tuyến tính của các đơn thức x^n, $n \in \mathbb{N}$, trong đó x ở đây là một đa thức bậc nhất. Suy ra, nếu $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \quad \forall n \in N$ thì $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,[P(x)]^m dx = 0$ với mọi đa thức có dạng $[P(x)]^m$ trong ý (a). Do đó, ta vẫn có $f \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

□

Nhận xét. Phân tích ưu nhược điểm của hai cách giải:

a) Lời giải gốc

- Ưu điểm: m không nhất thiết $\in \mathbb{N}$ bất kỳ, chỉ cần thuộc tập con vô hạn bất kỳ của $\mathbb{N}$ là được.
- Nhược điểm: chọn đa thức P và cách đánh giá tích phân khá “kỹ thuật”, khó áp dụng trong trường hợp khác, chẳng hạn, P là đa thức bất khả quy bậc hai, hoặc $\deg P = 3$.

b) Cách tự giải

- Ưu điểm: quy bài toán ban đầu về một bài toán tổng quát đã biết. Bài toán tổng quát này còn có nhiều hệ quả khác nữa.
- Nhược điểm: cần nhớ và vận dụng linh hoạt nhiều lý thuyết.