ĐẠI HỌC DUY TÂN

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Kỷ yếu

KỲ THI OLYMPIC
Toán học Sinh viên

Lần thứ XXI

http://olympictoan.duytan.edu.vn

Đà Nẵng, 04/2013

ĐẠI HỌC DUY TÂN

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Kỳ thi OLYMPIC Toán Sinh viên toàn quốc Lần thứ XXI

Kỷ yếu

Đà Nẵng, 04/2013

Mục lục

Đôi nét về Đại học Duy Tân iv

I Đề thi dự tuyển năm 2013 1

1 Đại số 3
- 1.1 Không gian véc tơ - Ánh xạ tuyến tính . . . 3
- 1.2 Ma trận - Định thức . . . 4
- 1.3 Véc tơ riêng - Giá trị riêng . . . 11
- 1.4 Hệ phương trình tuyến tính . . . 12
- 1.5 Đa thức . . . 14

2 Giải tích 17
- 2.1 Dãy số . . . 17
- 2.2 Hàm số . . . 19
- 2.3 Phép tính vi phân hàm một biến . . . 22
- 2.4 Phép tính tích phân hàm một biến . . . 24
- 2.5 Lí thuyết chuỗi và tích phân suy rộng . . . 25

II Đề thi chính thức năm 2013 27

3 Đề thi 29
- 3.1 Đại số . . . 29
- 3.2 Giải tích . . . 30

4 Đáp án 33
- 4.1 Đại số . . . 33
- 4.2 Giải tích . . . 34

ĐẠI HỌC DUY TÂN

Đại học Tư thục Đầu tiên & Lớn nhất miền Trung

Huân chương Lao động Hạng 3

Cờ Thi đua Xuất sắc của Chính phủ và Bộ GD&ĐT

Kiểm định Chất lượng Giáo dục Quốc gia

Đôi nét về Đại học Duy Tân

Tọa lạc giữa trung tâm Tp. Đà Nẵng, bên bờ biển Thái Bình Dương quanh năm đầy nắng ấm, Đại học (ĐH) Duy Tân đang từng ngày vươn lên cùng thành phố với khát vọng đổi mới theo hướng hiện đại. Ra đời từ ngày 11/11/1994 theo Quyết định Số 666/TTg của Thủ tướng Chính phủ, Đại học Duy Tân là trường Đại học Tư thục Đầu tiên và Lớn nhất miền Trung đào tạo đa bậc, đa ngành, đa lĩnh vực.

Với những bước đi thiết thực và hiệu quả trong công tác dạy và học, Đại học Duy Tân đã tuyển sinh được 7 khóa Thạc sĩ với hơn 700 học viên; 18 khóa Đại học, Cao đẳng với gần 46.000 sinh viên; 1 khóa Cao đẳng Nghề với gần 900 sinh viên và 10 khóa Trung cấp chuyên nghiệp với hơn 10.000 sinh viên. Các ngành đào tạo tại Đại học Duy Tân khá đa dạng như: Công nghệ Thông tin, Quản trị Kinh doanh, Ngoại ngữ, Du lịch, Điện tử, Xây dựng, Kiến trúc, Y, Dược và cả các ngành khoa học xã hội gồm Văn -Báo chí, Quan hệ Quốc tế, Văn hóa Du lịch. Với 15 khóa tốt nghiệp, Duy Tân đã cung cấp cho thị trường lao động gần 30.000 Thạc sĩ, Kỹ sư, Kiến trúc sư, và Cử nhân. Sinh viên Duy Tân ra trường nhanh chóng tìm được việc làm với tỉ lệ 89% có việc trong vòng 6 tháng sau khi tốt nghiệp. Đặc biệt, 100% sinh viên ngành Công nghệ Phần mềm có việc làm ngay tại thời điểm ra trường.

Với phương châm "***đứng trên vai người khổng lồ***" để nâng tầm bản thân, Đại học Duy Tân đã liên kết hợp tác với các trường đại học danh tiếng ở Mỹ như ĐH Carnegie Mellon (CMU) - 1 trong 4 đại học hàng đầu về Công nghệ Thông tin ở Mỹ, ĐH Bang Pennsylvania (PSU) - 1 trong 3 đại học hàng đầu thế giới về Quản trị - Du lịch cũng như 1 trong 5 đại học công lớn nhất Mỹ, và ĐH Bang California (CSU Fullerton và Cal Poly) - một trong các đại học hàng đầu về đào tạo 2 ngành Xây dựng và Kiến trúc ở bờ Tây nước Mỹ. Không dừng lại ở việc "nhập khẩu" chương trình tiên tiến, Duy Tân còn tạo ra những bước ngoặt mới trong tiến trình hợp tác khi đưa sinh viên du học nước ngoài và lấy bằng quốc tế. Đại học Duy Tân chính thức triển khai các chương trình du học 2+2 (2 năm đầu ở Duy Tân và 2 năm sau tại Mỹ), 1+1+2 (1 năm đầu tại Duy Tân và 3 năm sau tại Mỹ) và 3+1 (3 năm đầu tại Duy Tân và 1 năm sau học tại Singapore hoặc Anh Quốc).

Đây cũng là một trong những bước đi quan trọng để nâng cao chất lượng đào tạo của Đại học Duy Tân.

19 năm nỗ lực và cống hiến, Đại học Duy Tân đã xây dựng được một đội ngũ giảng viên đồ sộ về cả số lượng và chất lượng. Có nhiều Tiến sĩ, Thạc sĩ công tác tại Đại học Duy Tân đã tốt nghiệp từ các trường có uy tín trong và ngoài nước (như ở Mỹ, Nga, Pháp, Đức, Canada, Hàn Quốc, Vương quốc Bỉ…)

Thụ hưởng các điều kiện tốt và tối ưu của một trường đại học có bề dày uy tín và chất lượng, sinh viên Duy Tân đã làm nên những thành tích đáng tự hào. Đó là Tạ Bá Thành Huy - giải Nhất Olympic Tin học năm 2008, Đặng Xuân Nam - giải Nhất (duy nhất) của cuộc thi Loa Thành năm 2010, Nguyễn Thu Quỳnh - giải Nữ sinh viên Tiêu biểu của Việt Nam trong lĩnh vực Công nghệ Thông tin năm 2012, Nhóm IDEERS Duy Tân - vị trí thứ 7 trong số 102 đội quốc tế tham gia Cuộc thi Thiết kế Mô hình Nhà chống Động đất tại Đài Loan năm 2012, và gần đây nhất, trong năm 2013, các đội ROBOCON của Đại học Duy Tân đã chiếm 4 trong tổng số 6 suất của miền Trung vào vòng chung kết ROBOCON 2013 Việt Nam.

19 năm hình thành và xây dựng với bao thăng trầm, Đại học Duy Tân đã luôn xứng đáng với sự giao phó và tín nhiệm của Đảng, của Nhà nước, cũng như của toàn xã hội. Nhà trường liên tiếp nhận được các Cờ thi Đua Xuất sắc của Bộ Giáo dục & Đào tạo và của Chính Phủ trong các năm 2010, 2011, 2012. Đây là sự ghi nhận đáng tự hào để Đại học Duy Tân tiếp tục phấn đấu trong sự nghiệp “trồng người”, đào tạo ra những thế hệ sinh viên có tâm, có tài cho đất nước. Bao việc làm có tên và không tên, bao thành quả trong và ngoài hoạch định, ước mơ và cả những điều đang dần vươn tới, để trọn vẹn hơn với ước vọng ban đầu của những người sáng lập cũng như của bao cán bộ, giảng viên, nhân viên và sinh viên sống chết vì mái trường này...

Khẩu hiệu đồng hành cùng Đại học Duy Tân trong 19 năm qua “***Tất cả vì quyền lợi học tập và việc làm của sinh viên***“ cùng quyết tâm lớn: “***Năm 2013, toàn trường phấn đấu tạo ra sự khác biệt vượt trội về đào tạo, nghiên cứu khoa học, việc làm cho sinh viên để tiến tới kỷ niệm 20 năm thành lập trường (11/11/1994-11/11/2014)***”, Nhà giáo Ưu tú Lê Công Cơ - Chủ tịch Hội đồng quản trị kiêm quyền Hiệu trưởng Đại học Duy Tân đang thổi bùng ngọn lửa đam mê, sáng tạo và cống hiến trong mỗi cán bộ, giảng viên để cùng góp phần cho một Đại học Duy Tân ngày càng lớn mạnh.

1. Giải khuyến khích cuộc thi Quốc tế **Thiết kế Mô hình nhà chống động đất** năm 2012 tại Đài Loan (đội duy nhất ở Việt Nam)
2. Các đội ROBOCON của Đại học Duy Tân đã chiếm 4 trong tổng số 6 suất của miền Trung vào vòng chung kết ROBOCON 2013 Việt Nam.
3. Giải nữ sinh viên tiêu biểu của Việt Nam trong lĩnh vực Công nghệ Thông tin năm 2012
4. Nhóm tác giả phim **“Giấc mơ có thật”**, tác phẩm đạt **giải Nhất** cuộc thi sáng tác phim ngắn về Biến đổi Khí hậu
5. **Đặng Xuân Nam**, **giải Nhất Loa Thành** (duy nhất) 2010 cho ngành **Xây dựng & Kiến trúc**
6. **Tạ Bá Thành Huy** (giải Nhất) và **Nguyễn Anh Toàn** (giải Nhì) **Olympic Tin học Toàn quốc năm 2008**

Phần I

Đề thi dự tuyển năm 2013

Chương 1

Đại số

1.1 Không gian véc tơ - Ánh xạ tuyến tính

Bài 1 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho V là một không gian véc tơ trên trường $\mathbb{K}$. Giả sử $u_1, u_2, ..., u_n$ là một hệ véc - tơ độc lập tuyến tính của V, $a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \le j \le i \le n$. Chứng minh hệ véctơ:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_{11}u_1,\\
v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2,\\
v_3 &= a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + q_{33}u_3,\\
&\dots\\
v_n &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \dots a_{nn}u_n
\end{aligned}$$

là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $a_{11}a_{22}...a_{nn} \neq 0$.

Bài 2 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $f : V \longrightarrow W$ là một ánh xạ tuyến tính của các không gian vecto hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{K}$. Chứng minh rằng:

1. Nếu A là một không gian con k-chiều của $\mathbb{V}$ sao cho $A \cap Kerf$ là một không gian con r-chiều thì $\dim f(A) = k - r$.
2. Nếu B là một không gian con của W sao cho $B \cap Imf$ là một không gian con s-chiều thì $\dim f^{-1}(B) = \dim V + s - rank(f)$.

Bài 3 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $V = \mathbb{F}[x]$ và f là một tự đồng cấu của V xác định bởi $f(P) = xP$. Xác định các giá trị riêng và vecto riêng của tự đồng cấu $F : End(\mathbb{V}) \longrightarrow End(\mathbb{V})$ cho bởi $F(g) = f \circ g - g \circ f$.

Bài 4 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho A là một ma trận thực vuông cấp n và φ_A, ψ_A là các tự đồng cấu tuyến tính của không gian vecto thực $M(n,\mathbb{R})$ các ma trận thực vuông cấp n xác định bởi:

$$\varphi_A(X) = AX - XA,\ \psi_A(X) = AX.$$

Chứng minh rằng $\det(\varphi_A) = 0$ và $\det(\psi_A) = (\det A)^n$.

1.2 Ma trận - Định thức

Bài 5 (ĐH Bách Khoa - Tp. HCM)**.** Cho 4 số thực a, b, c, d tùy ý. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Bài 6 (ĐH Bách Khoa - Tp. HCM)**.** Cho W là tập các ma trận vuông cấp 3 có các phần tử chỉ nhận giá trị ± 1. Tìm số các ma trận trong W có định thức dương.

Bài 7 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho A là ma trận vuông cấp $n > 1$: $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, trong đó a_{ij} lẻ với $i \neq j$ và a_{ii} chẵn $(1 \le i, j \le n)$. Chứng minh rằng: $\det(A) \neq 0$.

Bài 8 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 3: $A = (a_{ij})$ và $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \le i, j \le n$, $\mathbb{K}$ là một trường. Chứng minh rằng: $A^2 = 0$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \operatorname{rank}(A) \le 1, \\ \operatorname{trace}(A) = 0 \end{cases}$.

Bài 9 (CĐ Tuyên Quang)**.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

Bài 10 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 2013. Chứng minh rằng nếu $\det\left(A^{-1}\right) = 2013$ thì tất cả các phần tử của A không thể cùng là số nguyên.

Bài 11 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp 2013 thoả mãn $AB^2A + BA^2B = I$ với I là ma trận đơn vị cấp 2013. Tìm tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận AB^2A.

Bài 12 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp 2013 thoả mãn $rank\,(AB) = rank\,(A)\,rank\,(B)$. Hãy xác định ma trận A nếu $rank\,(B) \geqslant 2$.

Bài 13 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho

$$f(x) = a_1 + a_2x + \ldots + a_nx^{n-1}$$

là đa thức hệ số thực và $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ là các giá trị căn bậc n của 1. Gọi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{bmatrix}$$

và

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_{n-1} & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \ldots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Tính $\det(A)$.

Bài 14 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 có các phần tử là 0 hoặc 1. Tìm giá trị lớn nhất của $\det(A)$.

Bài 15 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm A^{100}.

Bài 16 (CĐ Sư phạm Hà Nội)**.** Cho A là ma trận cấp 3×2, B là ma trận cấp 2×3 sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Tìm BA.

Bài 17 (CĐ Sư phạm Hà Nội)**.** Có tồn tại hay không ma trận vuông A cấp 3 sao cho $Tr(A) = 0$ và $A^T + A^2 = I$ trong đó $Tr(A)$ là tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận A.

Bài 18 (CĐ Sư phạm Hà Nội)**.** Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n sao cho

$$A^{2013} = 0, AB = BA, B \neq 0$$

Chứng minh rằng $rank(AB) \leq rank(B) - 1$.

Bài 19 (CĐ Sư phạm Hà Nội)**.** Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^3 = A + I$. Chứng minh rằng $det(A) > 0$.

Bài 20 (ĐH An Giang)**.**

1. Tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Giải phương trình $X^n = A$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 21 (ĐH An Giang)**.** Cho a, b, c là các số thực thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của định thức ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}.$$

Bài 22 (ĐH An Giang)**.** Cho $A \in M_2(\mathbb{C})$, đặt $Z(A) = \{B \in M_2(\mathbb{C}) | AB = BA\}$. Chứng minh rằng $|\det(A + B)| \geq |\det(B)|$ với mọi $B \in Z(A)$ khi và chỉ khi $A^2 = 0$.

Bài 23 (ĐH An Giang)**.** Cho dãy các số thực (u_n), (v_n), (w_n) được xác định bởi $u_0 = v_0 = 1$, $w_0 = 2$ và

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n - w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 5v_n - 2w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 2w_n. \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{w_n}$.

Bài 24 (ĐH Thăng Long)**.** Cho A là ma trận thực cỡ 4×2 và B là ma trận thực cỡ 2×4 thỏa mãn

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hãy tính BA.

Bài 25 (ĐH Thăng Long)**.** Cho $A, B \in M_3(\mathbb{Z})$ sao cho

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k(2k+1) \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

với $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng tồn tại ma trận $C \in M_3(\mathbb{Z})$ sao cho $BA = C^k$.

Bài 26 (ĐH Bà Rịa – Vũng Tàu)**.** Tính tổng tất cả các định thức của các ma trận vuông cấp n, $(n \geq 2)$, mà trên mỗi hàng, mỗi cột của mỗi ma trận đó có đúng một phần tử khác không và các phần tử khác không đôi một khác nhau, nhận giá trị trong tập hợp $\{1; 2; ...; n\}$.

Bài 27 (ĐH Bà Rịa – Vũng Tàu)**.** Giả sử A là ma trận vuông cấp 2013 thỏa mãn: vết của A^2 bằng 8052 và với mọi ma trận B vuông cấp 2013 đều viết được dưới dạng $B = B_1 + B_2$, trong đó $AB_1 = B_1A$ và $AB_2 = -B_2A$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên $m \leq 2013$ sao cho:

$$\det(A - I) = (-3)^m.$$

Bài 28 (ĐH Bà Rịa – Vũng Tàu)**.** Có tồn tại hay không hai ma trận vuông cấp 2 A, B sao cho ma trận $C = AB - BA$ giao hoán với A, B và C khác ma trận không?

Bài 29 (ĐH Bà Rịa – Vũng Tàu)**.** Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $Im(A) \cap Im(B) = \{0\}$, và$\{u_1, u_2, ..., u_k\}, \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ là các tập con tùy ý của R^n. Chứng minh rằng nếu $k > r(A) + r(B)$ ($r(A)$ là hạng của ma trận A) thì luôn tồn tại các số thực $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ không đồng thời bằng không sao cho:

$$\lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2 + ... + \lambda_k Au_k = \lambda_1 Bv_1 + \lambda_2 Bv_2 + ... + \lambda_k Bv_k.$$

Bài 30 (ĐH Bà Rịa – Vũng Tàu)**.** Gọi V là tập hợp mà mỗi phần tử của nó là một ma trận vuông cấp n có các phần tử đôi một khác nhau và là các số trong tập hợp $\{1; 2; ...; n^2\}$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $r(A)$ với $A \in V$ ($r(A)$ là hạng của ma trận A).

Bài 31 (ĐH Hàng Hải)**.**

1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ và $n > 0$ là số nguyên. Tìm $(A^n)^{-1}$.
2. Cho A và B là các ma trận cỡ $n \times n$ khác nhau với các phần tử thực. Giả sử $A^3 = B^3$ và $A^2B = B^2A$, chứng minh rằng $A^2 + B^2$ không khả nghịch.

Bài 32 (ĐH Hàng Hải)**.** Tính định thức

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2000 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 1999 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1998 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & 1997 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2000 & 1999 & 1998 & 1997 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 33 (ĐH Hùng Vương – Phú Thọ)**.** Cho số thực a_0, dãy $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_{2013}\}$ lập thành cấp số cộng công sai d = 4. Tìm điều kiện của a_0 để ma trận A sau là khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{2012} & a_{2013} \\ a_1 & a_0 & a_1 & \dots & a_{2011} & a_{2012} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_{2010} & a_{2011} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{2012} & a_{2011} & a_{2010} & \dots & a_0 & a_1 \\ a_{2013} & a_{2012} & a_{2011} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Bài 34 (ĐH Khoa học Huế)**.** Tìm tất cả các ma trận A vuông cấp n sao cho với mọi ma trận B vuông cấp n ta đều có $\det(A + 2013.B) = \det A + 2013.\det B$.

Bài 35 (ĐH Hùng Vương – Phú Thọ)**.**

1. Cho $A,\ B \in Mat(n, \mathbb{R})$ sao cho tồn tại $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R} - \{0\})^2$ thỏa mãn:

$$AB + \alpha A + \beta B = 0.$$

   Chứng minh $AB = BA$.

2. Chứng minh rằng với mọi $A, B, C \in Mat(2, \mathbb{R})$ ta luôn có:

$$(AB - BA)^2 C - C(AB - BA)^2 = O.$$

Bài 36 (ĐH Ngoại Thương – Hà Nội)**.** Cho A là ma trận thực cớ 3×2, B là ma trận cỡ 3×2 thỏa mãn

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Chứng minh rằng ma trận BA khả nghịch.
2. Tìm ma trận BA.

Bài 37 (ĐH Ngoại Thương – Hà Nội)**.** Biết rằng định thức của ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bằng α và tổng các phần bù đại số của các phần tử của ma trận A bằng β $(\alpha, \beta \in R)$. Tính định thức của các ma trận sau:

1. $B = \begin{bmatrix} a_{11} + 2013 & a_{12} + 2013 & \dots & a_{1n} + 2013 \\ a_{21} + 2013 & a_{22} + 2013 & \dots & a_{2n} + 2013 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + 2013 & a_{n2} + 2013 & \dots & a_{nn} + 2013 \end{bmatrix}$.

2. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \dots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \dots & a_{3n} - a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \dots & a_{nn} - a_{1n} \end{bmatrix}$.

Bài 38 (ĐH Bách Khoa – Hà Nội)**.** Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn $rank(AB) = rank(B)$. Chứng minh rằng $ABX = ABY \Leftrightarrow BX = BY$ với mọi X, Y.

Bài 39 (ĐH Bách Khoa – Hà Nội)**.** Cho A và B là hai ma trận trực giao vuông cấp n thỏa mãn $\det(AB) < 0$. Chứng minh rằng $\det A + \det B = \det(A + B)$.

Bài 40 (ĐH Bách Khoa – Hà Nội)**.** Cho ma trận A vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu $\mathrm{trace}(A^T A) + n = 2.\mathrm{trace}(A)$ thì A khả nghịch.

Bài 41 (ĐH Bách Khoa – Hà Nội)**.** Cho A và B là hai ma trận vuông cấp 2013 thỏa mãn $AB + 2012A + 2013B = 0$. Chứng minh rằng $rank(A) + rank(B) \neq 2013$.

Bài 42 (ĐH Khoa học Huế)**.** Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 0, các phần tử còn lại bằng 1 hoặc bằng 2014 thì $rank(A) \geq n - 1$.

Bài 43 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho các ma trận vuông thực A, B thỏa mãn các điều kiện:

$$A^{2013} = 0,\ AB = 2012A + 2011B.$$

Chứng minh rằng $B^{2013} = 0$ và $\det(A - 2011I) \neq 0$.

Bài 44 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho ma trận thực $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$. Tính $f(A)$ biết $f(A) = 2013x^{2013} - 2012x^{2012} + \cdots - 2x^2 + x$.

Bài 45 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $n \in \mathbb{N}^*,\ A \in M(n, \mathbb{R})$ sao cho $A^3 = A + I_n$. Chứng minh rằng $\det(A) > 0$.

Bài 46 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Cho $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \ldots,\ \mathrm{A}_m \in Mat\,(m, \mathbb{R})\,, m \in \mathbb{Z}^+, m \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại các số $a_0, ..., a_m$ không đồng thời bằng không sao cho ma trận

$$B = a_0A_0 + a_1A_1 + ... + a_mA_m$$

là ma trận suy biến.

Bài 47 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Cho $A_n = [\mathrm{a_{ij}}]_n \in Mat\,(n, \mathbb{R})\,, n \geq 3$, trong đó $\mathrm{a_{ij}} = \pm 1$ Chứng minh rằng

$$|\det A_n| \leq (n-1)\,(n-1)!$$

Bài 48 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho ma trận $A \in Mat\,(n, \mathbb{R})$ thỏa mãn

$$A^3 + 2A^2 - A - 2I = 0; tr(A) = n.$$

Xác định ma trận A.

Bài 49 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho $A, B \in Mat\,(n, \mathbb{R})\,, n \geq 2$ thỏa mãn

$$rank\,(AB - BA) = 1.$$

Chứng minh rằng $(AB - BA)^2 = 0$.

1.3 Véc tơ riêng - Giá trị riêng

Bài 50 (ĐH Bách Khoa - Tp. HCM)**.** Cho 2 ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ và ma trận cấp 2 X thỏa mãn $AX - mX = B, m \in R$. Tìm số thực m để X có trị riêng bằng 1.

Bài 51 (ĐH Bách Khoa - Tp. HCM)**.** Cho $A, B \in M_n(R)$ giao hoán được với nhau. Chứng minh rằng nếu A có n trị riêng phân biệt thì B chéo hóa được.

Bài 52 (CĐSP Hà Nội)**.** Cho A là ma trận vuông cấp 3 có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Xác định các số thực a sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} a^n A^n$ tồn tại và khác không.

Bài 53 (ĐH An Giang)**.** Cho đa thức $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ và $A \in M_2(\mathbb{R})$. Trình bày cách tính $f(A)$. Từ đó tìm công thức tính ma trận A^n. Áp dụng tính A^{2013} biết $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Bài 54 (ĐH Thăng Long)**.** Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{1} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Hãy tìm các giá trị riêng và véc tơ riêng của B.

Bài 55 (ĐH Hùng Vương – Phú Thọ)**.** Cho A là ma trận thực vuông cấp 3, vết (vết là tổng các phần tử trên đường chéo chính) là 9. Tổng các phần tử trên mỗi cột của A bằng 4 và $\det A = 24$. Xác định các giá trị riêng của A.

Bài 56 (ĐH Ngoại Thương – Hà Nội)**.** Cho $A = (a_{ij})_{nxn}$ với $a_{\text{ij}} \in Z$.

1. Chứng minh rằng nếu mọi số nguyên k là một giá trị riêng của A thì $\det(A)$ chia hết cho k.
2. Giả sử m là một số nguyên và mỗi dòng của A có tổng bằng m $(\sum_{j=1}^{n} a_{\text{ij}} = m(i = \overline{1,n})$. Chứng minh rằng $\det(A)$ chia hết cho m.

Bài 57 (ĐH Bách Khoa – Hà Nội)**.** Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n , có vết khác 0 thỏa mãn $a_{ik}a_{kj} = a_{kk}a_{ij}$, $\forall i, j, k$. Chứng minh rằng A chéo hóa được.

Bài 58 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M(n \times p, \mathbb{F})$ và $B \in M(p \times n, \mathbb{F})$. Chứng minh đẳng thức về đa thức đặc trưng: $(-x)^n P_{BA}(x) = (-x)^p P_{AB}(x)$.

Bài 59 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $A \in M(3, \mathbb{R})$ sao cho $A^3 + A = 0$ và $A \neq 0$. Chứng minh rằng A đồng dạng với ma trận $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4 Hệ phương trình tuyến tính

Bài 60 (ĐH Bách Khoa - Tp. HCM)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_n^3 = 0 \\ \qquad \ldots \\ x_1^n + x_2^n + x_3^n + \ldots + x_n^n = 0 \end{cases}.$$

Bài 61 (CĐ Ngô Gia Tự - Bắc Giang)**.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} *x & + & *y & + & *z & = & 0 \\ *x & + & *y & + & *z & = & 0 \\ *x & + & *y & + & *z & = & 0 \end{cases}$$

Hai người lần lượt điền mỗi số thực vào mỗi chỗ đánh dấu *. Chứng minh rằng người đi đầu bao giờ cũng có thể làm cho hệ phương trình chỉ có nghiệm tầm thường. Người thứ hai có luôn đạt được điều đó không? Đối với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 2013 ẩn, 2013 phương trình thì sao?

Bài 62 (ĐH Thăng Long)**.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + 2013x_{2013} & = \dfrac{2012}{2013}x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \cdots + 2014x_{2013} & = \dfrac{2012}{2013}x_2 \\ \cdots & \cdots \\ 2013x_1 + 2014x_2 + \cdots + 4025x_{2013} & = \dfrac{2012}{2013}x_{2013} \end{cases}$$

Bài 63 (ĐH Hùng Vương – Phú Thọ)**.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - ... - x_n = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - ... - x_n = 12 \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - ... - x_n = 24 \\ .... \\ -x_1 - x_2 - x_3 - ... + (2^n - 1)x_n = 3.2^n \end{cases}$$

Bài 64 (ĐH Hàng Hải)**.**

1. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x_5 + x_2 & = mx_1 \\ x_1 + x_3 & = mx_2 \\ x_2 + x_4 & = mx_3 \\ x_3 + x_5 & = mx_4 \\ x_4 + x_1 & = mx_5 \end{cases},$$

   trong đó m là tham số.

2. Cho $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V trên trường $\mathbb{R}$. Chứng minh

$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_5, v_5 + v_1\}$$

   cũng là một cơ sở của V.

Bài 65 (ĐH Ngoại Thương – Hà Nội)**.** Cho $2n$ số thực dương a_1, a_2, ..., a_n và b_1, b_2, ..., b_n. Xét hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1+b_1} + \frac{x_2}{a_1+b_2} + ... + \frac{x_n}{a_1+b_n} = 0 \\ \frac{x_1}{a_2+b_1} + \frac{x_2}{a_2+b_2} + ... + \frac{x_n}{a_2+b_n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{x_1}{a_n+b_1} + \frac{x_2}{a_n+b_2} + ... + \frac{x_n}{a_n+b_n} = 0 \end{cases}$$

Tìm điều kiện cần và đủ để hệ phương trình tuyến tính trên có nghiệm duy nhất $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$.

1.5 Đa thức

Bài 66 (CĐ Tuyên Quang)**.** Tìm đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$P[x] = x(x-1)P''(x) + (x+2)P'(x)$$

.

Bài 67 (ĐH An Giang)**.** Cho đa thức

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$$

thỏa $P(z) \in \mathbb{Z}$ với mọi $z \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng $a_n.n! \in \mathbb{Z}$.

Bài 68 (ĐH Hùng Vương – Phú Thọ)**.**

1. Cho $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \in \mathbb{R}[x], \deg f(x) = n$. Chứng minh rằng tồn tại các số thực $a_0, a_1, ..., a_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho đa thức $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{2^i}$ chia hết cho *f(x)*.
2. Cho đa thức với hệ số thực $P(x)$ bậc n $(n \geq 1)$ có m nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = (4x^2+3)P(x) + P'(x)$ có ít nhất m nghiệm thực.

Bài 69 (ĐH Bách Khoa – Hà Nội)**.** Cho đa thức $f(x) = 2013x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + ... + a_1x + a_0$ có 2013 nghiệm thực $x_1, x_2, ..., x_{2013}$ và $g(x)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2012. Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{2013} \frac{g(x_i)}{f'(x_i)} = 0$.

Bài 70 (ĐH Cần Thơ)**.** Cho ma trận $A \in M_{2013}(R)$ sao cho $A^{2013} + 2012A^{2012} = 2013A^{2011}$. Chứng minh rằng $TrA \leq 2013$ (với TrA là vết của A).

Bài 71 (ĐH Cần Thơ)**.** Cho $C = (c_{ij}) \in M_{2013}(\mathbb{R})$ sao cho $c_{ij} = 1$, với mọi i, j. Hỏi có tồn tại ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ thuộc $M_{2013}(\mathbb{R})$ (với a_{ij},b_{ij} là các số nguyên) thỏa điều kiện $2013AB - 2011BA = C$? Tại sao?

Bài 72 (ĐH Cần Thơ)**.** Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_{2013} = -1 \\ 2^{2012}x_1 + 2^{2011}x_2 + ... + x_{2013} = -2^{2013} \\ .... \\ 2013^{2012}x_1 + 2013^{2011}x_2 + ... + x_{2013} = -2013^{2013} \end{cases}.$$

Bài 73 (ĐH Cần Thơ)**.** Cho ma trận vuông cấp 2013:

$$A = \begin{bmatrix} m & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m & n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m & n \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & m \end{bmatrix}$$

với m, n là các số tự nhiên. Chứng minh rằng A suy biến khi và chỉ khi $A = O$.

Bài 74 (ĐH Cần Thơ)**.** Cho đa thức $Q(x) = 1 + 4x + 4x^2 + ... + 4x^{2n}$ thuộc $\mathbb{R}$[x] (n là số tự nhiên). Tìm tất cả các đa thức P(x) trên $\mathbb{R}$[x] sao cho $[P(x)]^2 = Q(x)$.

Bài 75 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ với hệ số thực và có n nghiệm thực. Chứng minh rằng:

$$(n-1)[P'(x)]^2 \geq nP(x)P''(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 76 (ĐH Khoa học Huế)**.** Cho $P(x)$ là đa thức bậc n với hệ số thực có n nghiệm thực phân biệt khác 0. Chứng minh rằng các nghiệm của đa thức

$$x^2P''(x) + 3xP'(x) + P(x)$$

là thực và phân biệt.

Bài 77 (ĐH Khoa học Huế)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ thỏa

$$1 + P(x) = \frac{1}{2}[P(x-1) + P(x+1)].$$

Bài 78 (ĐH Sư Phạm Hà Nội 2)**.** Cho $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ là các đa thức bậc dương bất kỳ thỏa mãn

$$P\left(x^5\right) + xQ\left(x^3\right) = \left(1 + x + x^2\right)^{2013}.$$

Chứng minh rằng: *P(1)= Q(1) = 0.*

Chương 2
2 Giải tích

2.1 Dãy số

Bài 79 (ĐH Bách Khoa Hà Nội)**.** Tính giới hạn của dãy số $\{a_n\}$, trong đó $1 \leq a_1 \leq 2$, $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$.

Bài 80 (ĐH Bách Khoa Hà Nội)**.** Cho $\{a_n\}$ là dãy Fibonacci :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \ n \geq 0 \end{cases}.$$

Tính tổng sau: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+2}}$.

Bài 81 (ĐH Hàng Hải)**.** Cho dãy $x_n, \ n \in N^*$, xác định như sau:

$x_1 = 2013, \ x_2 = 4026, \ x_{n+2} = \frac{n+2}{n+1} x_{n+1} + \frac{2(n+2)}{n} x_n$ với mọi $n \geq 1$.
Chứng minh rằng dãy $u_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ xác định với mọi $n \in N^*$và hội tụ. Tính giới hạn của dãy u_n.

Bài 82 (ĐH Thủy Lợi Hà Nội)**.** Cho $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số dương được xác định bởi:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_{n-1}}}, \quad n = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k b_k$. Hãy tìm giới hạn $\lim\limits_{n \to +\infty} = S_n$.

Bài 83 (ĐH Thủy Lợi Hà Nội)**.** Xét $Q(x) = x^2 + 4x + 2013$. Giả sử đa thức:

$$P(x) = x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + ... + a_1x + a_0$$

có 2013 nghiệm thực phân biệt và đa thức $P(Q(x))$ không có nghiệm thực.

Hãy chứng minh rằng: $P(2013) > 4^{2013}$.

Bài 84 (HV Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông)**.** Cho $x_1 = a > 0$và dãy (x_n) được xác định bởi

$$(n+3)^2 x_{n+1} = n^2 x_n + 2n + 3.$$

Tìm giới hạn: $I = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Bài 85 (ĐH Bạc Liêu)**.** Cho $x_n = a \in (0, \pi); x_{n+1} = \sin x_n, \forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} + x_n x_{n+1} - x_n}{x_n^2}$.

Bài 86 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Tính giới hạn của dãy $\{a_n\}$ sau: $1 \le a_1 \le 2$, $a_{n+1}^2 = 3a_n - 2$.

Bài 87 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2013\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Bài 88 (CĐ Ngô Gia Tự Bắc Giang)**.** Cho dãy số $\{\mathrm{u}_n\}$ thỏa mãn điều kiện

$$u_n = \frac{n+1}{2013^{n+1}} \left(\frac{2013}{1} + \frac{2013^2}{2} + ... + \frac{2013^n}{n} \right),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh dãy $\{\mathrm{u}_n\}$ hội tụ và tính $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)$.

Bài 89 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Cho dãy số u_n thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_n = nu_{n-1} - 2n + 2, & \forall n \ge 2 \\ u_1 = 1 \end{cases}.$$

Tính u_{2013}.

2.2 Hàm số

Bài 90. Với $|q| < 1$, tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thỏa mãn $f(x) + f(qx) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 91 (ĐH Hàng Hải)**.** Cho hàm f liên tục trên đoạn $[0, 2]$, khả vi trên khoảng $(0, 2)$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0, 2)$ sao cho:

$$f'(c) + \frac{1-c}{c(2-c)} sh(f(c)) = 0,$$

trong đó $sh(x)$ là hàm số được định nghĩa bởi: $sh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Bài 92 (ĐH Thủy Lợi Hà Nội)**.** Chọn một trong hai câu sau:

1. Chứng minh rằng : không thể tồn tại một hàm số khả vi liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các tính chất : $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f'(x) = f(f(x)) \end{cases}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Cho $f : [0; N] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục đến cấp hai và với mọi $x \in [0; N]$ ta luôn có $|f'(x)| < 2013$ và $f''(x) > 0$. Với k số tự nhiên $m_1, m_2, ..., m_k :\ 0 \le m_1 < m_2 < ... < m_k \le N$ ta đặt:

   $$n_i = f(m_i), \quad b_i = n_i - n_{i-1}, \quad a_i = m_i - m_{i-1}\ ,\ i = \overline{1, k}$$

   Hãy chứng minh rằng:

   $$-2013 < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < ... < \frac{b_k}{a_k} < 2013.$$

Bài 93 (ĐH Thủy Lợi Hà Nội)**.** Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4026x + 2013.2014, \quad x \in \mathbb{R}$. Định nghĩa $f^n(x) = f\left(f^{n-1}(x)\right)$ với $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$. Hãy tính tích phân sau:

$$I = \int_0^1 f^{2013}(x)dx.$$

Bài 94 (ĐH Thủy Lợi Hà Nội)**.** Cho $f \in C^n(0; +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ với $n \in \mathbb{N}$. Giả sử rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a,\ a \in \mathbb{R}$. Hãy tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) =?$.

Bài 95 (HV Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông)**.** Cho hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn

$$f(0) = 2013,\ f(1) = 2014,\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos\frac{\pi y}{2} \quad \forall x, y \in R.$$

Hãy tìm hàm số $f(x)$.

Bài 96 (ĐH Bạc Liêu)**.** Cho

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Chứng minh rằng

$$A(x) = f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$$

là ánh xạ hằng.

Bài 97 (ĐH Bạc Liêu)**.**

1. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại một đa thức duy nhất $P_n \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$x^{4n}(1-x)^{4n} = (1+x^2)P_n(x) + (-1)^n 4^n.$$

2. Đặt $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} \displaystyle\int_0^1 P_n(x)dx$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Bài 98 (ĐH Bạc Liêu)**.** Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\int_1^x e^t \ln t dt}{e^x \ln x}$

Bài 99. Giả sử f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$.

1. Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = +\infty$.
2. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx = +\infty$ thì có kết luận được $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ hay không? Tại sao?

Bài 100. Có tồn tại hay không hàm số $f:\ (0,1) \to (0,1)$ thỏa mãn điều kiện $|f(y) - f(x)| > |y - x|, \forall x, y \in (0;1), x \neq y$?

Bài 101 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Với $|q| < 1$, tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại 0 và thỏa mãn $f(x) + f(qx) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 102 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho f là hàm khả vi trên đoạn [0,1], f(0) = 0, f(**??**) = 1. Chứng minh rằng với mỗi α, $\beta > 0$ tồn tại x_1, x_2 $\in$(0,1) sao cho $x_1 \neq x_2$ và $\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{\beta}{f'(x_2)} = \alpha + \beta$.

Bài 103 (CĐ Tuyên Quang)**.** Tìm hàm số f : R $\backslash\{0,\ 1\} \to$ R thỏa mãn: $f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x$, $\forall$x$\in$R

Bài 104 (CĐ Ngô Gia Tự Bắc Giang)**.** Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định với mọi x và thỏa mãn các điều kiện sau

1. $(\alpha - \beta).f(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta).f(\alpha - \beta) = 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)$ với $\forall\alpha, \forall\beta$
2. $f(1) = 2$.

Bài 105 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện

$xf(y) + yf(x) \leq \frac{2013}{\pi}, \quad \forall x, y \in [0,1]$.

Chứng minh rằng $\int_0^1 f(x)d\text{x} \leq \frac{2013}{4}$.

Bài 106 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Cho $f(x) = x.\ln x$ với $x > 0$.

1. Chứng minh rằng với mọi $x > 0, x \neq 1$ tồn tại duy nhất $c_x > 0, c_x \neq 1$ sao cho
$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$
2. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{c_x - 1}{x - 1}$.

Bài 107 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Cho $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ là hàm liên tục. Đặt $g(x) = 1 + \dfrac{3}{2}\int\limits_0^x f(t)dt$. Giả sử

$g(x) \geq [f(x)]^3$ với mọi $x \geq 0$.

Chứng minh rằng: $[g(x)]^2 \leq (x+1)^3$ với mọi $x \geq 0$.

Bài 108 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{x+2y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Tìm hàm $f(x)$.

Bài 109 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Sinh viên chọn một trong 2 câu sau:

1. Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)-2x^4$, $f(x)-x$ là hàm đồng biến. Chứng minh rằng: $f(x)-x^2$ cũng là hàm đồng biến.
2. Cho $f:[0,1]\to[-1;1]$ có đạo hàm trên đoạn $[0,1]$ và $f(0)=f(1)=0$. Chứng minh rằng phương trình

$$f'(x)+2\tan f(x)=0$$

   có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0,1)$.

2.3 Phép tính vi phân hàm một biến

Bài 110. Giả sử f khả vi liên tục cấp 2 trên $(0,+\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} xf''(x)=0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x)=0$.

Bài 111. Chứng minh phương trình $\sin(\cos x)=x$ và $\cos(\sin x)=x$ có nghiệm duy nhất trên $[0,\frac{\pi}{2}]$. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của hai phương trình nói trên, chứng minh $x_1<x_2$.

Bài 112. Cho hàm $u(x)$ liên tục và khả vi trên $(0,+\infty)$, hơn nữa $u(x)$, $u'(x)>0$ với mọi $x\in(0,+\infty)$. Biết $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{u(x)+u'(x)}$ hội tụ. Chứng minh $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{u(x)}$ cũng hội tụ.

Bài 113 (HV Công Nghê Bưu Chính Viễn Thông)**.** Cho hàm $f(x)$ khả vi 2 lần trên $[0,\ 1]$ và

$$\begin{cases} f(0)=f(1)=0,\\ \min\{f(x):x\in[0,\ 1]\}=-1.\end{cases}$$

Chứng minh rằng: $max\{f''(x):x\in[0,\ 1]\}\geq 8$.

Bài 114 (ĐH Bạc Liêu)**.** Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ thỏa các tính chất sau: $f'''(x) < 3, \forall x \in [-1,1]$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 1$, $f(0) = 0$ và $f'(0) = 0$.

Bài 115.

1. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^{x^2} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{t}})dt$.

2. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^{x^2} \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{t}})dt$.

Bài 116 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Giả sử f khả vi liên tục cấp 2 trên $(0,+\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} xf''(x) = 0$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Bài 117 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho f là hàm khả vi đến cấp 2 trên đoạn $[a,b]$ và $f'(a) = f'(b) = 0$. Chứng minh tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

Bài 118 (CĐ Ngô Gia Tự Bắc Giang)**.** Cho

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

với $x_1 < x_2 < x_3$. Chứng minh rằng

$$\frac{P^{//}(x_1)}{p^{/}(x_1)} + \frac{P^{//}(x_2)}{p^{/}(x_2)} + \frac{P^{//}(x_3)}{p^{/}(x_3)} = 0.$$

Bài 119 (CĐ Ngô Gia Tự Bắc Giang)**.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in (a,b), b > a > 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$\frac{\mathrm{af}(b) - bf(a)}{a - b} = f(c) - c.f^{/}(c).$$

Bài 120 (CĐ Ngô Gia Tự Bắc Giang)**.** Cho hàm số $f(x)$ cùng đạo hàm của nó liên tục trên đoạn trên đoạn $[0,1]$. Giả sử $f(0) = 0, f(1) = 1$.

Chứng minh rằng tồn tại hai số α, β sao cho $0 < \alpha < \beta < 1$ thỏa mãn: $f^{/}(\alpha).f^{/}(\beta) = 1$.

2.4 Phép tính tích phân hàm một biến

Bài 121 (HV Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông)**.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,\ 1]$ và $0 \leq f(x) \leq 1\ \ \forall x \in [0,\ 1]$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \left(\int_0^1 f(x^{2013})dx\right)^{2013}.$$

Bài 122 (HV Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông)**.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,\ 1]$. Chứng minh rằng: Tồn tại c $\in [0,\ 1]$ sao cho

$$\int_0^1 x^{2013} f(x)dx = \frac{1}{2014} f(c).$$

Bài 123 (ĐH Thủy Lợi Hà Nội)**.** Tìm hàm liên tục $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\ ; \quad x \in (0; 1]\,.$$

Bài 124 (HV Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông)**.**

1. Cho hàm $u(x)$ khả vi liên tục trên $(0, +\infty)$ và

   $$u(x) > 0\ \ \forall x \in (0, +\infty),\ u'(x) > 0\ \ \forall x \in (0, +\infty),$$

   và
   $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{u(x) + u'(x)} < +\infty.$$
   Chứng minh rằng: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{u(x)} < +\infty$.
2. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ $\ (a_n > 0\ \forall n)$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số
   $$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{k^2 + n^2}$$
   hội tụ.

Bài 125 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Cho hàm $u(x)$ liên tục và khả vi trên $(0, +\infty)$, hơn nữa $u\,(x)\,,\ u'\,(x) > 0$ với mọi $x \in (0, +\infty)$. Biết $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{u(x)+u'(x)}$ hội tụ. Chứng minh $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{u(x)}$ cũng hội tụ.

Bài 126 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho f là hàm khả vi liên tục trên đoạn [a,b], f(a) = 0. Chứng minh rằng

$$\int_a^b |f(x).f'(x)|\,dx \le \frac{(b-a)}{2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx.$$

Bài 127 (CĐ Tuyên Quang)**.** Cho f là một hàm số chẵn liên tục trên $[-a,a], a > 0$; g là một hàm liên tục nhận giá trị dương trên $[-a,a]$ và $g(-x) = \frac{1}{g(x)}, \forall x \in [-a,a]$

a) Chứng minh rằng $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)dx}{1+g(x)} = \int_0^a f(x)dx$.

b) Tính $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-x+\sqrt{x^2+1}}dx$.

Bài 128 (CĐ Ngô Gia Tự Bắc Giang)**.** Tính tích phân $\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$

Bài 129 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} x\cos^4 x dx$.

2.5 Lí thuyết chuỗi và tích phân suy rộng

Bài 130 (ĐH Hàng Hải)**.** Chứng minh rằng chuỗi sau hội tụ và tính tổng của nó:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^n}.$$

Bài 131. Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2013x}\frac{(\sin t)^{2012}}{t^{2013}}dt$.

Bài 132. Cho (x_n) là dãy số tăng và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ hội tụ.

Bài 133 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Chứng minh phương trình $\sin(\cos x) = x$ và $\cos(\sin x) = x$ có nghiệm duy nhất trên $[0,\frac{\pi}{2}]$. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của hai phương trình nói trên, chứng minh $x_1 < x_2$.

Phần II

Đề thi chính thức năm 2013

Chương 3

3 Đề thi

3.1 Đại số

Câu 1. Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots + & x_n & = & 1, \\ x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & + & \cdots + & x_n & = & 1, \\ & . & . & & . & & . & . & & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \cdots - & [n(n+1)-1]x_n & = & 1. \end{cases}$$

1. Giải phương trình với $n = 5$.
2. Giải phương trình với n bất kỳ.

Câu 2. Cho $f_1(x), ..., f_n(x)$ lần lượt là các nguyên hàm nào đó của các hàm số $e^x, ..., e^{x^n},\ n \geq 1$. Chứng minh rằng các hàm số này độc lập tuyến tính trong không gian $C[0, 1]$ các hàm liên tục trên đoạn $[0, 1]$.

Câu 3. Cho $a_0, a_1, ..., a_n$ là các số thực, $n \geq 2$. Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} a_0 - a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_1 & a_1 - a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 - a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} - a_n \end{vmatrix}.$$

Câu 4. Cho a là một số nguyên lẻ và $b_1, ..., b_n$ là các số nguyên sao cho $b_1 + \cdots + b_n$ lẻ, $n \geq 1$. Chứng minh rằng đa thức

$$P(x) = ax^{n+1} + b_1x^n + \cdots + b_nx + a$$

không có nghiệm hữu tỷ.

Câu 5. Có bao nhiêu ma trận vuông cấp n có đúng $n+1$ phần tử bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0 và có định thức bằng 1?

3.2 Giải tích

Câu 1. Cho $x_1 = a \in \mathbb{R}$ và dãy (x_n) được xác định bởi $(n+1)^2x_{n+1} = n^2x_n + 2n + 1$. Tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Câu 2. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{nx^n}{2013 + x^n} dx.$$

Câu 3. Cho $\alpha \geq \beta > 0$. Hãy tìm các hàm số $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x) = \max\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \geq x\} \text{ với mọi } x \in (0, \infty).$$

Câu 4. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và khả vi trong $(0, 1)$, thỏa mãn $f(0) = 0; f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại các số phân biệt $x_1, x_2, ..., x_{2013} \in (0, 1)$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{2013} \frac{kx_k}{f'(x_k)} = \frac{2013 \times 1007}{2}.$$

Câu 5. Cho $f(x)$ là hàm dương, liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và thoả mãn điều kiện

$$f(x) + f((1 - \sqrt{x})^2)) \leq 1$$

với mọi $x \in [0, 1]$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\, dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{8}.$$

Hãy chỉ ra rằng dấu đẳng thức không thể xảy ra.

Câu 6. Thí sinh chọn một trong hai câu:

6a. Cho (a_n) là dãy số dương sao cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ. Chứng minh rằng tồn tại dãy số dương (b_n) sao cho $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n < \infty$ cũng hội tụ.

6b. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng nếu tồn tại hàm $g(x)$ đơn điệu thực sự (tức là đơn điệu và $g(x) \neq g(y)$ nếu $x \neq y$) và liên tục trên đoạn $[0,1]$ sao cho

$$\int_0^1 f(x) g^k(x)\, dx = 0 \qquad \text{với mọi } k = 0, 1, 2, ..., 2013.$$

thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 2014 nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(0,1)$. Hãy chỉ ra thí dụ nếu bỏ tính đơn điệu của hàm $g(x)$ thì định lý có thể không đúng.

Chương 4
Đáp án

4.1 Đại số

Bài 1. (5 điểm)

- Câu a) (3 điểm)

Tính ra được nghiệm

$$x_1 = - - 3, x_2 = -1, x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = -\frac{3}{10}, x_5 = -\frac{1}{5}.$$

Chấp nhận các kết quả có số lẻ bấm từ máy tính.

- Câu b) (2 điểm)

Đặt $S = x_1 + \cdots + x_n$. Từ hệ đầu suy ra $x_i = S/i(i+1) - 1$.

- (2 điểm) Cộng tất cả các hệ thức mới lại (hoặc thế vào phương trình đầu), sẽ cho $S = -n$.

- (1 điểm) Do đó: $x_i = -\frac{n+1}{i(i+1)}$.

Bài 2. (5 điểm)

(2 điểm) Giả sử $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$. Lấy đạo hàm suy ra $a_1 e^x + \cdots + a_n e^{x^n} = 0$.

(1 điểm) Lấy đạo hàm tiếp có $a_1 e^x + 2a_2 x e^{x^2} + \cdots + n a_n x^{n-1} e^{x^n} = 0$.

(2 điểm) Cho $x \to 0$ suy ra $a_1 = 0$. Thay $a_1 = 0$ rồi chia 2 vế cho x, lại suy ra $a_2 = 0$, ... Cứ thế cho đến $a_n = 0$.

Bài 3. (5 điểm)

- (1 điểm) Khai triển Laplace để có

$$D_n = (a_0 - a_1)D_{n-1} + a_1^2 D_{n-2}.$$

- (1 điểm) Tính $D_2 = a_0a_1 - a_0a_2 + a_1a_2$.

- (3 điểm) Dự đoán và chứng minh bằng qui nạp $D_n = (-1)^n \sum_{i=0}^n (-1)^i a_0 \cdots a_n / a_i$ (tức bỏ thừa số a_i ở số hạng thứ i).

Bài 4. (5 điểm)

- (1 điểm) Giả sử có nghiệm là $\alpha = p/q,\ (p, q) = 1$. Khi đó $f(p) = 0$, trong đó

$$f(x) = ax^{n+1} + b_1qx^n + \cdots + b_nq^nx + q^{n+1}a = 0.$$

- (1 điểm) Nếu q chẵn thì p lẻ. Suy ra ap^{n+1} chẵn, vô lí. Vậy q lẻ.

- (2 điểm) Chú ý $f(1) = f(1) - f(p) \vdots (1 - p)$. Mà $f(1) \equiv 2a + \sum b_i (mod\ 2)$ lẻ, nên p chẵn.

- (1 điểm) Do $f(p) = 0$ suy ra aq^{n+1} chẵn, vô lí.

Bài 5. (5 điểm)

Trên mỗi hàng (cột) của ma trận vuông cấp n có $n + 1$ phần tử bằng 1 với định thức khác không khi và chỉ khi có duy nhất một hàng (cột) có 2 phần tử 1 và các hàng (cột) còn lại chỉ có 1 phần tử 1.

Từ ma trận đơn vị ta đặt lần lượt số 1 vào một vị trí không nằm trên đường chéo chính ta sẽ nhận được ma trận có định thức bằng 1. Từ đó có $n^2 - n$ ma trận như vậy.

Từ ma trận đơn vị bằng phép đổi dòng (cột) ta có ma trận có định thức bằng 1 hoặc -1. Có tất cả $n!$ cách hoán vị như vậy. Suy ra sẽ có $\frac{n!}{2}$ ma trận có định thức bằng 1.

Vậy có tất cả $\frac{n(n-1))n!}{2}$.

4.2 Giải tích

Câu 1. (5 điểm) Đặt $y_n = x_n - 1$ ta thu được

$$(n+1)^2 y_{n+1} = n^2 y_n \Longrightarrow y_n = \frac{a-1}{n^2}.$$

- Tính được nghiệm $x_n = 1 + \frac{a-1}{n^2}$ 4 điểm
- Chỉ ra giới hạn 1 điểm

Câu 2. (5 điểm) Ta có

$$\int_0^1 \frac{nx^n}{2013 + x^n} = \int_0^1 xd\ \ln(2013 + x^n) = \ln\frac{2014}{2013} - \int_0^1 \ln(1 + \frac{x^n}{2013})\,dx.$$

3 điểm

Sử dụng bất đẳng thức $0 \leq \ln(1 + \frac{x^n}{2013}) \leq \frac{x^n}{2013}$ ta thấy $\int_0^1 \ln(1 + \frac{x^n}{2013})\,dx \to 0$ khi $n \to \infty$.

Đáp số: $\ln\frac{2014}{2013}$ **2 điểm**

Câu 3. (5 điểm) Từ điều kiện $f(x) = \max\{x^\alpha y^\beta - f(y) : y \geq x\}$ ta thấy $f(x) \geq x^\alpha y^\beta - f(y)$ với mọi $y \geq x$. Cho $y = x$ ta có

$$f(x) \geq \frac{x^{\alpha+\beta}}{2}.$$ **1 điểm**

Suy ra

$$x^\alpha y^\beta - f(y) \leq x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2}.$$

Ta chứng minh

$$x^\alpha y^\beta - \frac{y^{\alpha+\beta}}{2} \leq \frac{x^{\alpha+\beta}}{2}.$$

Hay là

$$2 \leq \left(\frac{x}{y}\right)^\beta + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha.$$ **3 điểm**

Đẳng thức này đúng do $x \leq y$ và $\alpha \geq \beta$. Theo định nghĩa

$$f(x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2}.$$

Vậy

$$f(x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2}.$$ **1 điểm**

Thử lại, ta thấy hàm này thỏa điều kiện đề bài đã cho.

Câu 4. (5 điểm) Đặt $T = 1+2+3+\cdots+2013 = \frac{2013.2014}{2}$; $y_k = \frac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{k} i$. Rõ ràng với mọi $k = 1, 2, ..., 2012$ thì $y_k \in (0,1)$. Vì f liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $\bar{x}_k$ để $f(\bar{x}_k) = y_k$. Ta chú ý rằng do $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$ nên ta có thể chọn $\bar{x}_i \neq \bar{x}_{i+1}$ (thậm chí có thể chọn $\bar{x}_i$ tăng dần). Đặt $\bar{x}_0 = 0; \bar{x}_{2013} = 1$. áp dụng liên tiếp định lý Cauchy cho 2013 đoạn $[0, \overline{x}_1], [\overline{x}_1, \overline{x}_2], ..., [\overline{x}_{2012}, 1]$ với các hàm f và $g(x) = x^2$ ta tìm được các điểm $x_1 \in (0, \overline{x}_1), x_2 \in (\overline{x}_1, \overline{x}_2), ..., x_{2013} \in (\overline{x}_{2012}, 1)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x_1)}{2x_1} &= \frac{f(\overline{x_1}) - f(0)}{\overline{x}_1^2 - 0^2} \Rightarrow \overline{x}_1^2 - 0^2 = \frac{2}{T}\frac{1x_1}{f'(x_1)} \\
\frac{f'(x_2)}{2x_2} &= \frac{f(\overline{x}_2) - f(\overline{x}_1)}{\overline{x}_2^2 - \overline{x}_1^2} \Rightarrow \overline{x}_2^2 - \overline{x}_1^2 = \frac{2}{T}\frac{2x_2}{f'(x_2)} \\
\frac{f'(x_{2013})}{2x_{2013}} &= \frac{f(1) - f(\overline{x}_{2012})}{1 - \overline{x}_{2012}^2} \Rightarrow 1 - \overline{x}_{2012}^2 = \frac{2}{T}\frac{2013x_{2013}}{f'(x_{2013})}
\end{aligned}$$

Cộng lại ta được

$$1 = \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{2013}\frac{kx_k}{f'(x_k)} \Rightarrow \frac{T}{2} = \sum_{k=1}^{2013}\frac{kx_k}{f'(x_k)}$$

Hay là

$$\frac{T}{2} = \sum_{k=1}^{2013}\frac{kx_k}{f'(x_k)}.$$

Câu 5. (5 điểm) Ta có

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(\cos^4 x)}\cos^3 x\sin x\,dx \\
&\leq 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^4 x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin^2 x\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(\sin^4 x)}\sin^3 x\cos x\,dx \\
&\leq 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^4 x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^2 x\,dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

. **(2 điểm)**

Vì vậy

$$2\left(\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx\right)^2 \le 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(\cos^4 x)+f(\sin^4 x)\big)\,dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^2 x\,dx$$
$$\le 16\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^2 x\,dx. \qquad \textbf{(1 điểm)}$$

Ta lại có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5.3}{6.4.2}-\frac{7.5.3}{8.6.4.2}\right)=\frac{\pi}{2}\frac{5.3}{8.6.4.2}.$$

Vậy

$$\int_0^1 \sqrt{f(x)}\,dx \le \frac{\pi\sqrt{5}}{8}.$$

Các đẳng thức trên xẩy ra khi và chỉ khi

$$f(\cos^4 x) = k\cos^3 x\sin x;\, f(\sin^4 x) = h\sin^3 x\cos x,$$

với k, h là hai hằng số.

Nhưng khi đó thì

$$f(\cos^4 x) + f(\sin^4 x) = k\cos^3 x\sin x + h\sin^3 x\cos x$$

Theo điều kiện đầu bài

$$k\cos^3 x\sin x + h\sin^3 x\cos x \le 1$$

với mọi x. Mặt khác, để có dấu bằng thì

$$\int_0^1 (f(\cos^4 x) + f(\sin^4 x))\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Điều này kéo theo

$$k\cos^3 x\sin x + h\sin^3 x\cos x \equiv 1 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Nhưng điều này không thể. **1 điểm**

Câu 6. (5 điểm)

6a. Do chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên ta có thể chọn được dãy các số nguyên $k_m \uparrow \infty$ sao cho

$$\sum_{i=k_m}^{\infty} a_i < \frac{1}{m^3}. \qquad \textbf{(4 điểm)}$$

Đặt $b_n = m$ nếu $k_m < n \leq k_{m+1}$. Ta thấy $b_n \uparrow \infty$ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=k_m+1}^{k_{m+1}} a_n b_n \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ. **1 điểm**

6b. Giả sử ngược lại hệ có k nghiệm như vậy và $k < 2014$. Ta bỏ qua các nghiệm bội mà tại đó hàm số không đổi dấu và sắp xếp các nghiệm còn lại theo thứ tự tăng dần $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < 1$ $(m \leq k)$. Đặt $x_0 = 0$ và $x_{m+1} = 1$. Ta nhận thấy trên hai khoảng liên tiếp (x_i, x_{i+1}) và (x_{i+1}, x_{i+2}) hàm số $f(x)$ nhận các giá trị khác dấu nhau. Đặt $\phi(x) = \prod_{i=1}^{m}(g(x) - g(x_i))$. Do g đơn điệu thực sự nên trên hai khoảng liên tiếp (x_i, x_{i+1}) và (x_{i+1}, x_{i+2}) hàm số $\phi(x)$ cũng nhận các giá trị khác dấu nhau. Vì vậy hàm số $f(x).\phi(x)$ sẽ hoặc dương hoặc âm. Từ đó

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)\,dx \neq 0. \qquad \text{(4 điểm)}$$

Điều đó mâu thuẫn với giả thiết.

Thí dụ: xét $h_1(x)$ là hàm lẻ và h_2 là hàm chẵn. Đặt $f(x) = h_1(x - \frac{1}{2})$ và $g(x) = h_2(x - \frac{1}{2})$. Khi đó, fg^k là hàm có tâm đối xứng là $(1/2, 0)$ nên $\int_0^1 f(x)g^k(x)\,dx = 0$ với mọi k.

BẬC ĐẠI HỌC

Mã trường: DDT

TÊN NGÀNH	Mã ngành	Mã CN	Khối
Công nghệ Thông tin:			
Kỹ thuật Mạng	D480103	101	A, A1, D
Công nghệ Phần mềm	D480103	102	A, A1, D
Thiết kế Đồ họa/Game/Multimedia	D480103	111	A, A1, D, V, H
Hệ thống Thông tin Quản lý	D340405	410	A, A1, D
Xây dựng:			
Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp	D580201	105	A, A1, V
Xây dựng Cầu đường	D510102	106	A, A1, V
Kiến trúc:			
Kiến trúc Công trình	D580102	107	V
Thiết kế Nội thất	D580102	108	V
Điện - Điện Tử:			
Điện Tự động	D510301	110	A, A1, D
Thiết kế Số	D510301	104	A, A1, D
Điện tử - Viễn thông	D510301	109	A, A1, D
Công nghệ Môi trường:			
Công nghệ & Kỹ thuật Môi trường	D510406	301	A, A1, B
Quản Trị Kinh Doanh:			
Quản Trị Kinh Doanh Tổng hợp	D340101	400	A, A1, D
Quản Trị Marketing	D340101	401	A, A1, D
Du Lịch:			
Quản trị Du lịch & Khách sạn	D340103	407	A, A1, D
Quản trị Du lịch & Lữ hành	D340103	408	A, A1, D
Tài Chính - Ngân Hàng:			
Tài chính Doanh nghiệp	D340201	403	A, A1, D
Ngân hàng	D340201	404	A, A1, D
Kế toán:			
Kế toán Kiểm toán	D340301	405	A, A1, D
Kế toán Doanh nghiệp	D340301	406	A, A1, D
Ngoại ngữ:			
Tiếng Anh Biên - Phiên dịch	D220201	701	D, D1
Tiếng Anh Du lịch	D220201	702	D, D1
Khoa học Xã hội & Nhân văn:			
Văn - Báo Chí	D220330	601	C, D
Quan hệ Quốc tế	D310206	608	C, D
Y - Dược:			
Điều dưỡng Đa khoa	D720501	302	A, B
Điều dưỡng Sản phụ khoa	D720501	309	A, B
Dược (*Dược sĩ Đại học*)	D720401	303	A, B

BẬC CAO ĐẲNG

** Liên thông lên Đại học*

TÊN NGÀNH	Mã ngành	Mã chuyên ngành	Khối
Xây dựng	C510102	C65	A, A1
Kế toán	C340301	C66	A, A1, D
Công nghệ Thông tin	C480201	C67	A, A1, D
Du lịch	C340107	C68	A, A1, D
Điện tử - Viễn thông	C510301	C69	A, A1, D
Tài chính - Ngân hàng	C340201	C70	A, A1, D
Đồ họa Máy tính & Multimedia	C480201	C71	A, A1, D, V, H
Điều dưỡng	C720501	C72	A, B
Anh văn	C220201	C73	D, D1
Môi trường	C510406	C74	A, A1, B
Văn hóa Du lịch	C220113	C75	C, D
Quản trị & Nghiệp vụ Marketing	C340101	C76	A, A1, D

CHƯƠNG TRÌNH TIÊN TIẾN & QUỐC TẾ

TÊN NGÀNH	Bậc học	Mã ngành	Mã chuyên ngành	Khối
CARNEGIE MELLON (CMU, 1 trong 4 trường mạnh nhất về Công nghệ Thông tin cuả Mỹ)				
An ninh Mạng (/Kỹ thuật Mạng)	Đại học	D480103	101 (CMU)	A, A1, D
Công nghệ Phần mềm	Đại học	D480103	102 (CMU)	A, A1, D
Hệ thống Thông tin Quản lý (Kinh tế)	Đại học	D340405	410 (CMU)	A, A1, D
Công nghệ Thông tin	Cao đẳng	C480201	C67 (CMU)	A, A1, D
PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY (PSU, 1 trong 5 trường Đại học Công lập lớn nhất)My				
Quản trị Kinh doanh	Đại học	D340101	400 (PSU)	A, A1, D
Tài chính - Ngân hàng	Đại học	D340201	404 (PSU)	A, A1, D
Kế toán (& Kiểm toán)	Đại học	D340301	405 (PSU)	A, A1, D
Quản trị Du lịch & Khách sạn	Đại học	D340103	407 (PSU)	A, A1, D
Quản trị Du lịch & Nhà hàng	Đại học	D340103	409 (PSU)	A, A1, D
Kế toán	Cao đẳng	C340301	C66 (PSU)	A, A1, D
Du lịch	Cao đẳng	C340107	C68 (PSU)	A, A1, D
Tài chính - Ngân hàng	Cao đẳng	C340201	C70 (PSU)	A, A1, D
CALIFORNIA STATE UNIVERSITY (CSU Fullerton, lớn nhất hệ thống Đại học Bang California)				
Xây dựng Dân dụng & Công nghiệp	Đại học	D580201	105 (CSU)	A, A1, V
Kiến trúc	Đại học	D580102	107 (CSU)	V

Du học Hoa Kỳ qua chương trình 2+2 ở Duy Tân với Đại học Appalachian State (AppState, thành viên Đại học North Carolina - UNC)

APPALACHIAN MOUNTAINEERS

2 NĂM 1+2 — Ở Việt Nam, tại Đại học Duy Tân

\+

2 NĂM 3+4 — Ở Mỹ, tại Đại học Appalachian State (AppState - UNC), lấy bằng của Đại học Appalachian State

Du học Hoa Kỳ qua chương trình 1+1+2 ở Duy Tân với Lorain County, Ohio (LCCC)

1 NĂM 1 — Ở Việt Nam, tại Đại học Duy Tân

\+

1 NĂM 2 — Ở Mỹ, tại Cao đẳng Cộng đồng Lorain County, Ohio (LCCC)

\+

2 NĂM 3+4 — Học ở Mỹ tại LCCC để lấy Bằng Đại học Ohio State hoặc Cleveland State hoặc Toledo,...

Du học Anh Quốc hoặc Singapore qua chương trình 3+1 với Học viện Quản trị Auston (AIM) và và các đại học đối tác ở Anh Quốc

AUSTON

3 NĂM 1+2+3 — Ở Việt Nam, tại Đại học Duy Tân

\+

1 NĂM 4 — Ở Singapore tại Học viện Quản trị Auston (AIM) để lấy bằng của một trong những trường sau: University of London, Dublin Institute of Technology, Coventry University, University of Chichester, Oxford-Brookes University,... hoặc ở Anh Quốc ngay tại những trường đã nêu.

182 Nguyễn Văn Linh, Tp. Đà Nẵng
Tel.: (0511) 3653561 - 3650403 - 3827111
Hotline: 0905294390 - 0905294391
Fax: (0511) 3650443
Email: dtu@dtu.edu.vn - tuyensinh@duytan.edu.vn
Website: http://duytan.edu.vn
http://tuyensinh.duytan.edu.vn
http://nhungdieucanbiet.edu.vn