Gợi ý. a) Xét $F(x)$ là một nguyên hàm của $\left|f'(x)\right|$ trên $[0,1]$, tức là $F'(x) = \left|f'(x)\right| \quad \forall x \in [0,1]$. Khi đó

$$VP = \int_0^1 x\left|f'(x)\right| dx = \int_0^1 x dF(x) = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx.$$

Chọn $F(x)$ sao cho $F(1) = 0$. Khi đó $F(x) = \int_1^x \left|f'(t)\right| dt + F(1) = -\int_x^1 \left|f'(t)\right| dt$, và

$$VP = -\int_0^1 F(x)\,dx.$$

Mặt khác $\int_x^1 \left|f'(t)\right| dt \geq \left|\int_x^1 f'(t)\,dt\right| = \left|f(t)\Big|_x^1\right| = \left|f(1) - f(x)\right| = \left|0 - f(x)\right| = \left|f(x)\right|$, nên $F(x) \leq -\left|f(x)\right|$. Suy ra

$$VP \geq \int_0^1 \left|f(x)\right| dx.$$

b) Chọn $f(x) = x(1-x)$ thì $\int_0^1 \left|f(x)\right| dx = \dfrac{1}{6}$, và $\int_0^1 x\left|f'(x)\right| dx = \dfrac{1}{4}$, ta được $\int_0^1 \left|f(x)\right| dx < \int_0^1 x\left|f'(x)\right| dx$.

□