Mục lục

Chương 6

Quan hệ: hướng tiếp cận thứ hai

6.1 Quan hệ: thuộc tính và phép toán

Định nghĩa 6.1. *Cho các tập A, B. Mỗi tập con của $A \times B$ gọi là quan hệ (hai ngôi) từ A vào B. Mỗi tập con của $A \times A$ gọi là quan hệ (hai ngôi) trên A.*

Ví dụ 6.1. a) Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ bởi $a \mathcal{R} b$, hay (a, b), nếu $a \leq b$. Tập con này của $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là quan hệ "bé hơn hoặc bằng" trên $\mathbb{Z}$, và nó cũng có thể định nghĩa trên $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, nhưng không được trên $\mathbb{C}$.

b) Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Với $a, b \in \mathbb{Z}$, quan hệ $\mathcal{R}$ xác định bởi $a \mathcal{R} b$ nếu $n \mid (a - b)$, gọi là *quan hệ modulo n*. Chẳng hạn, với $n = 7$, ta có $9 \mathcal{R} 2$, $-3 \mathcal{R} 11$, $(14, 0) \in \mathcal{R}$, nhưng $3 \not\mathcal{R} 7$ (tức là, 3 không có quan hệ với 7).

c) Với $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, xét $C = \{1, 2, 3, 6\} \subseteq \mathcal{U}$. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ bởi $A \mathcal{R} B$ nếu $A \cap C = B \cap C$.

1) $\{1, 2, 4, 5\}$ và $\{1, 2, 5, 7\}$ có quan hệ vì $\{1, 2, 4, 5\} \cap C = \{1, 2\} = \{1, 2, 5, 7\} \cap C$.

2) $X = \{4, 5\}$ và $Y = \{7\}$ có quan hệ vì $X \cap C = \varnothing = Y \cap C$.

3) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $T = \{1, 2, 3, 6, 7\}$ không có quan hệ – tức là, $S \not\mathcal{R} T$ – vì $S \cap C = \{1, 2, 3\}$, nhưng $T \cap C = \{1, 2, 3, 6\}$.

6.1.1 Thuộc tính của quan hệ

Định nghĩa 6.2. *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A gọi là phản xạ nếu $(a, a) \in \mathcal{R},\ \forall a \in A$.*

Ví dụ 6.2. Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ (và cả trên $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$), quan hệ modulo n trên $\mathbb{Z}$ có tính phản xạ.

Ví dụ 6.3. Với $A = \{1, 2, 3, 4\}$, quan hệ $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ phản xạ khi và chỉ khi $\mathcal{R} \supseteq \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$. Theo đó, $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ không phản xạ trên A, và $\mathcal{R}_2 = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \leq b\}$ phản xạ trên A.

Ví dụ 6.4. Cho tập hữu hạn A cỡ n.

a) Có bao nhiêu quan hệ trên A?

b) Có bao nhiêu quan hệ phản xạ trên A?

Giải. a) $|A \times A| = n^2$, nên có 2^{n^2} quan hệ trên A.

b) Nếu $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, quan hệ $\mathbb{R}$ phản xạ khi và chỉ khi $\{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathcal{R}$. Mỗi cặp $(a_i, a_j) \in A \times A, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ trong $n^2 - n$ cặp còn lại có thể thuộc hoặc không thuộc $\mathcal{R}$ (2 lựa chọn). Theo quy tắc nhân, có $2^{n^2 - n}$ quan hệ phản xạ trên A.

□

Định nghĩa 6.3. *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên A gọi là đối xứng nếu $\forall a, b \in A,\ (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$.*

Ví dụ 6.5. Với $A = \{1, 2, 3\}$, xét các quan hệ trên A:

a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$ đối xứng, nhưng không phản xạ.

b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3)\}$ phản xạ, nhưng không đối xứng.

c) $\mathcal{R}_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ và $\mathcal{R}_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}$ phản xạ, và đối xứng.

d) $\mathcal{R}_5 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$ không phản xạ, cũng không đối xứng.

Ví dụ 6.6. Cho tập A cỡ n.

a) Có bao nhiêu quan hệ đối xứng trên A.

b) Có bao nhiêu quan hệ phản xạ và đối xứng trên A.

Giải. a) Để quan hệ $\mathcal{R}$ trên $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ đối xứng, xét mỗi cặp $(a_i, a_j) \in A \times A, 1 \leq i, j \leq n$:

1) $\mathcal{R}$ có thể có cặp (a_i, a_i), $1 \leq i \leq n$ hoặc không, tức là, mỗi cặp có hai lựa chọn.

2) $\mathcal{R}$ chứa $\mathcal{R}_{ij} = \{(a_i, a_j), (a_j, a_i)\}$, $1 \leq i < j \leq n$ khoặc không. Mỗi $\mathcal{R}_{ij}$ cũng có hai lựa chọn. Có $\dfrac{n^2 - n}{2}$ tập $\mathcal{R}_{ij}$ như vậy.

Do đó, có $2^{n + \frac{n^2-n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ quan hệ đối xứng trên một tập cỡ n.

b) Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ phản xạ và đối xứng trên A thì $(a_i, a_i) \in \mathcal{R}$, $\forall i = \overline{1, n}$, tức là mỗi cặp (a_i, a_i) chỉ có một lựa chọn. Vậy có $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ quan hệ phản xạ và đối xứng trên tập cỡ n.

□

Định nghĩa 6.4. *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A gọi là bắc cầu nếu $\forall a, b, c \in A$, $(a, b), (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$. (Nếu a "liên quan đến" b, và b "liên quan đến" c, ta muốn a "liên quan đến" c, với b đóng vai trò "trung gian".)*

Ví dụ 6.7. Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ (và cả trên $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$) và quan hệ modulo n trên $\mathbb{Z}$ có tính bắc cầu.

Ví dụ 6.8. Định nghĩa *quan hệ ước* $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}^+$ bởi $a \mathcal{R} b$ nếu $a \mid b$, tức là, $b = ac$ với $c \in \mathbb{Z}^+$. Kiểm tra các thuộc tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu của $\mathcal{R}$.

Giải. $\mathcal{R}$ phản xạ, nhưng không đối xứng, chẳng hạn, $2 \mathcal{R} 6$ nhưng $6 \not\mathcal{R} 2$.

Giả sử $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} c$, tức là $b = as$ với $s \in \mathbb{Z}^+$ và $c = bt$ với $t \in \mathbb{Z}^+$. Vì thế, $c = bt = (as)t = a(st)$ trong đó $st \in \mathbb{Z}^+$, nên $a \mathcal{R} c$. Do đó $\mathcal{R}$ bắc cầu. □

Ví dụ 6.9. Quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ xác định bởi $a \mathcal{R} b$ nếu $ab \geq 0$. Kiểm tra các thuộc tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu của $\mathcal{R}$.

Giải. a) Mọi số nguyên x đều thỏa mãn $aa = a^2 \geq 0$, nên $a \mathcal{R} a$, tức là, $\mathcal{R}$ phản xạ.

b) Nếu $a, b \in \mathbb{Z}$ và $a \mathcal{R} b$, thì $a \mathcal{R} b \Rightarrow ab \geq 0 \Rightarrow ba \geq 0 \Rightarrow b \mathcal{R} a$, nên $\mathcal{R}$ đối xứng.

c) Nếu $a \mathcal{R} b$ và $b, \mathcal{R} c$ liệu có $a \mathcal{R} c$, hay $ab \geq 0$ và $bc \geq 0$ có suy ra $ac \geq 0$? Ta có $(ab)(bc) \geq 0$ hay $(ac)b^2 \geq 0$. Điều này chỉ dẫn đến $ac \geq 0$ khi $b^2 > 0$, tức là, $b \neq 0$. Với $b = 0$, ta luôn có $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} c$, $\forall a, c \in \mathbb{Z}$, nhưng không phải lúc nào cũng có $ac \geq 0$, chẳng hạn $a = 1, c = -1$. Do đó $\mathcal{R}$ không bắc cầu.

□

Ví dụ 6.10. Với $A = \{1, 2, 3, 4\}$, xét hai quan hệ trên A:

a) $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (2, 4)\}$ bắc cầu.

b) $\mathcal{R}_2 = \{(1, 3), (3, 2)\}$ không bắc cầu vì $\{(1, 3), (3, 2) \in \mathcal{R}_2\}$ nhưng $(1, 2) \notin \mathcal{R}_2$.

Định nghĩa 6.5. *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên A gọi phản xứng nếu $\forall a, b \in A$, $(a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b$. (Cách duy nhất để có cả a "liên quan đến" b và b "liên quan đến" a là khi a và b là một – cùng là một phần tử của A.)*

Ví dụ 6.11. Cho tập $\mathcal{U}$, định nghĩa quan hệ tập con $\mathcal{R}$ trên $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ bởi $(A, B) \in \mathcal{R}$ nếu $A \subseteq B$, với $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Nếu $A \mathcal{R} B$ và $B \mathcal{R} A$, thì $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$, nên $A = B$. Do đó, $\mathcal{R}$ phản xứng. Ngoài ra, $\mathcal{R}$ phản xạ và bắc cầu, nhưng không đối xứng.

Cần lưu ý, "không đối xứng" không đồng nghĩa với "phản xứng".

Ví dụ 6.12. Với $A = \{1, 2, 3\}$, quan hệ $\mathcal{R}$ trên A được cho bởi $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$ không đối xứng vì $(3, 2) \notin \mathcal{R}$, và không phản xứng vì $(1, 2), (2, 1) \in \mathcal{R}$ nhưng $1 \neq 2$. Quan hệ $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1), (3, 3)\}$ vừa đối xứng, vừa phản xứng.

Ví dụ 6.13. Cho tập A cỡ n.

a) Với $n = 3$, có bao nhiêu quan hệ phản xứng trên A?

b) Với n bất kỳ, có bao nhiêu quan hệ phản xứng trên A?

Giải. a) Tách

$$A \times A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \cup \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

để thấy muốn xây dựng một quan hệ phản xứng $\mathcal{R}$ trên A, cần

1) Mỗi $(a, a) \in A \times A$ thuộc $\mathcal{R}$ hay không cũng không ảnh hưởng đến tính phản xứng của $\mathcal{R}$.

2) Với phần tử dạng (a, b), $a \neq b$, ta phải xét cả (a, b) và (b, a). Để $\mathcal{R}$ vẫn phản xứng, có ba phương lựa chọn: (a) chỉ $(a, b) \in \mathcal{R}$; (b) chỉ $(b, a) \in \mathcal{R}$; hoặc (c) cả (a, b) và (b, a) đều không thuộc $\mathcal{R}$.

Vì vậy theo quy tắc nhân, số quan hệ phản xứng trên A là $2^3 \cdot 3^3$.

a) Tương tự ý (a), ta chỉ ra có $2^n \cdot 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$ quan hệ phản xứng trên A.

$\square$

Ví dụ 6.14. Đặt $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}\}$. Với $f, g \in \mathcal{F}$, định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathcal{F}$ bởi $f \mathcal{R} g$ nếu $f \in O(g)$. Khi đó $\mathcal{R}$ phản xạ và bắc cầu.
Nếu $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ xác định bởi $f(n) = n$ và $g(n) = n + 5$, thì $f \mathcal{R} g$ và $g \mathcal{R} f$ nhưng $f \neq g$, vì thế $\mathcal{R}$ *không phản xứng*. Ngoài ra, nếu $h : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ cho bởi $h(n) = n^2$, thì $f \mathcal{R} h$ nhưng $h \not\mathcal{R} f$. Do đó, $\mathcal{R}$ cũng *không đối xứng*.

Định nghĩa 6.6. *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A gọi là thứ tự (bộ phận), nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, phản xứng, và bắc cầu.*

Ví dụ 6.15. Quan hệ $\leq$ trên $\mathbb{Z}$ (và cả trên $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$) , quan hệ tập con là các quan hệ thứ tự bộ phận, nhưng quan hệ đồng dư modulo n thì không vì nó không phản xứng.

Ví dụ 6.16. a) Đặt $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, là tập các ước dương của 12. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên A bởi: $a \mathcal{R} b$ nếu $a \mid b$.

i) Liệt kê các cặp của $\mathcal{R}$.

ii) Chứng minh $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự bộ phận.

b) Tổng quát, cho số nguyên dương $n > 1$, xét $A = \{a \in \mathbb{Z}^+ : a \mid n\}$, là tập các ước dương của $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$. Theo định lý cơ bản của số học $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$, trong đó $k \in \mathbb{Z}^+, p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, p_i nguyên tố và $e_i \in \mathbb{Z}^+$ với $1 \leq i \leq k$.

Trên A vẫn xét quan hệ ước $\mathcal{R}$. Tính $|\mathcal{R}|$.

Giải. a) i) $\mathcal{R}$ gồm 18 cặp:

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (1, 12), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 12),$$
$$(3, 3), (3, 6), (3, 12), (4, 4), (4, 12), (6, 6), (6, 12), (12, 12)\}.$$

ii) Giống như quan hệ ước trên $\mathbb{Z}^+$, $\mathcal{R}$ phản xạ và bắc cầu. Ngoài ra, nếu $a, b \in A$, ta có $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} a$, thì

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow b = as, \text{ với } s \in \mathbb{Z}^+, \text{ và}$$
$$b \mathcal{R} a \Rightarrow a = bt, \text{ với } t \in \mathbb{Z}^+.$$

Do đó, $b = as = (bt)s = b(st)$, và vì $b \neq 0$ nên $st = 1$. Mặt khác $s, t \in \mathbb{Z}^+$ nên $s = t = 1$, vì vậy $a = b$ và $\mathcal{R}$ phản xứng. Vậy $\mathcal{R}$ là thứ tự bộ phận trên A.

b) Mỗi ước dương của n có dạng $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ trong đó $0 \leq r_i \leq e_i$ với $1 \leq i \leq k$, nên r_i có $e_i + 1$ lựa chọn. Theo quy tắc nhân, $|A| = \prod_{i=1}^{k} (e_i + 1)$. Mỗi $(a, b) \in \mathcal{R}$ có dạng

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} \text{ và } b = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k},$$

trong đó $0 \leq r_i \leq s_i \leq e_i$ với $1 \leq i \leq e_i$. Các cặp (r_i, s_i) gồm hai dạng: (i) (r_i, r_i), $0 \leq r_i \leq e_i$ với $e_i + 1$ lựa chọn, và (ii) (r_i, s_i), $0 \leq r_i < s_i \leq e_i$ với $\binom{e_i + 1}{2}$ lựa chọn. Vì vậy, số cặp (r_i, s_i) là

$$(e_i + 1) + \binom{e_i + 1}{2} = (e_i + 1) + \frac{(e_i + 1)e_i}{2} = \frac{(e_i + 1)(e_i + 2)}{2} = \binom{e_i + 2}{2}.$$

Theo quy tắc nhân, $|\mathcal{R}| = \prod_{i=1}^{k} \binom{e_i + 2}{2}$.

□

Định nghĩa 6.7. *Quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A gọi là tương đương, nếu $\mathcal{R}$ phản xạ, đối xứng và bắc cầu.*

Ví dụ 6.17. a) Quan hệ modulo n là quan hệ tương đương.

b) Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Khi đó

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}, \text{ và}$$
$$\mathcal{R}_4 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\} = A \times A$$

là các quan hệ tương đương trên A.

c) Với tập A tùy ý, $A \times A$ là quan hệ tương đương lớn nhất trên A, và *quan hệ bằng nhau* $\mathcal{R} = \{(a, a) \mid a \in A\}$ là quan hệ tương đương nhỏ nhất trên A.

d) Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{x, y, z\}$, và toàn ánh $f : A \to B$

$$f = \{(1, x), (2, z), (3, x), (4, y), (5, z), (6, y), (7, x)\}.$$

Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên A bởi: $a \mathcal{R} b$ nếu $f(a) = f(b)$. Chẳng hạn, $1 \mathcal{R} 1$, $1 \mathcal{R} 3$, $2 \mathcal{R} 5$, $3 \mathcal{R} 1$, và $4 \mathcal{R} 6$.

1) Với mỗi $a \in A$, $f(a) = f(a)$ vì f là hàm, vì thế $a \mathcal{R} a$, và $\mathcal{R}$ phản xạ.
2) Giả sử $a, b \in A$ và $a \mathcal{R} b$. Khi đó $f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow a \mathcal{R} b$, nên $\mathcal{R}$ đối xứng.
3) Nếu $a, b, c \in A$ với $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} c$, thì $f(a) = f(b)$ và $f(b) = f(c)$. Khi đó $f(a) = f(c)$ hay $a \mathcal{R} c$, và $\mathcal{R}$ bắc cầu.

Vậy $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương. Cụ thể

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 7), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 7), (4, 4), (4, 6), (5, 2), (5, 5), (6, 4), (6, 6), (7, 1), (7, 3), (7, 7)\}.$$

e) Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ trên A, thì $\mathcal{R}$ vừa là quan hệ tương đương, vừa là thứ tự bộ phận trên A khi và chỉ khi $\mathcal{R}$ là quan hệ bằng nhau trên A.

6.1.2 Phép toán giữa các quan hệ

Các quan hệ vốn là tập hợp, nên trước hết, có thể thực hiện phép toán tập hợp thông thường đối với chúng. Ngoài ra, xét phép toán quan hệ đặc biệt sau

Định nghĩa 6.8. *Cho các tập A, B, C và các quan hệ $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$, $\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$. Quan hệ hợp thành $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ từ A vào C xác định bởi $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(x, z) \mid x \in A, z \in C \text{ và } \exists y \in B,\ (x, y) \in \mathcal{R}_1, (y, z) \in \mathcal{R}_2\}$.*

Ví dụ 6.18. Cho $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{w, x, y, z\}$, và $C = \{5, 6, 7\}$. Xét $\mathcal{R}_1 = \{(1, x), (2, x), (3, y), (3, z)\} \subseteq A \times B$, và $\mathcal{R}_2 = \{(w, 5), (x, 6)\} \subseteq B \times C$. Khi đó $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(1, 6), (2, 6)\} \subseteq A \times C$. Nếu $\mathcal{R}_3 = \{(w, 5), (w, 6)\} \subseteq B \times C$, thì $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3 = \varnothing$.

Ví dụ 6.19. Đặt A là tập các nhân viên của một trung tâm tin học, B là tập các ngôn ngữ lập trình cấp cao, và C là tập các dự án $\{p_1, p_2, \ldots, p_8\}$ mà người quản lý phải phân công cho những người trong A. Xét $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B$, trong đó một cặp (N. V. An, Java) để chỉ nhân viên N. V. An thành thạo Java (và có thể cả các ngôn ngữ lập trình khác). Quan hệ

$\mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$ chứa các cặp như (Java, p_2) để chỉ Java là ngôn ngữ được cân nhắc để triển khai dự án p_2. Trong quan hệ hợp thành $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ có cặp (N. V. An, p_2), tức là có thể phân công N. V. An về dự án p_2. Quan hệ $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ mô tả quá trình đối chiếu giữa nhân viên và dự án dựa trên kiến thức của nhân viên về các ngôn ngữ lập trình cụ thể.

Định lý 6.1. *Cho các tập A, B, C, D và các quan hệ $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B, \mathcal{R}_2 \subseteq B \times C, \mathcal{R}_3 \subseteq C \times D$. Khi đó $\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_3$.*

Nhờ định lý này, ta có thể viết $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_3$ mà không gây nhầm lẫn.

Định nghĩa 6.9. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Lũy thừa của $\mathcal{R}$ là các quan hệ được định nghĩa đệ quy bởi*

a) $\mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$; *và*

b) $\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{n-1}$. *với $n = 2, 3, \ldots$*

Ví dụ 6.20. Nếu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, thì $\mathcal{R}^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$, $\mathcal{R}_3 = \{(1, 4)\}$, và với $n \geq 4$, $\mathcal{R}^n = \varnothing$.

6.2 Biểu diễn quan hệ

6.2.1 Biểu diễn quan hệ bằng ma trận

Định nghĩa 6.10. *Ma trận $E = (e_{ij})_{m \times n}$ có $e_{ij} \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ gọi là ma trận 0–1.*

Định nghĩa 6.11. *Cho hai tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ khác rỗng. Cố định vị trí các phần tử. Quan hệ $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ được biểu diễn bằng ma trận quan hệ, ký hiệu $M(\mathcal{R})$, hay $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})_{m \times n}$ xác định bởi* $m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } (a_i, b_j) \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin \mathcal{R}. \end{cases}$

Ví dụ 6.21. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{w, x, y, z\}$, và $\mathcal{R} = \{(1, w), (1, z), (2, x), (2, z), (3, w)\} \subseteq A \times B$, thì

$$M(\mathcal{R}) = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

trong đó $M(\mathcal{R})$ có các hàng được đánh dấu bởi các phần tử của A, các cột được dánh dấu bởi các phần tử của B.

$M(\mathcal{R}) = \mathbf{0}$ (ma trận toàn 0) $\Leftrightarrow \mathcal{R} = \varnothing$, và $M(\mathcal{R}) = \mathbf{1}$ (ma trận toàn 1) $\Leftrightarrow \mathcal{R} = A \times B$.

Trong Chương 5, hàm $f : A \to B$ là quan hệ đặc biệt từ A vào B. Với ma trận biểu diễn, ta xác định được

Quan hệ f từ A vào B là hàm, nếu mỗi phần tử của A xuất hiện đúng một lần ở thành phần thứ nhất trong các cặp của f, tức là

$$\forall i, \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

Hàm $f : A \to B$ là đơn ánh, nếu mỗi phần tử của B xuất hiện không quá một lần ở thành phần thứ hai trong các cặp của f, tức là

$$\forall j, \sum_{i=1}^{m} m_{ij} \leq 1.$$

Hàm $f : A \to B$ là toàn ánh, nếu mỗi phần tử của B xuất hiện ít nhất một lần ở thành phần thứ hai trong các cặp của f, tức là

$$\forall j, \sum_{i=1}^{m} m_{ij} \geq 1.$$

Đối với ma trận 0–1, ta vẫn dùng phép cộng và nhân ma trận thông thường, như Ví dụ 1.8 ở Trang 5, nhưng *quy ước* $1 + 1 = 1$ (gọi là phép cộng Boole).

Định lý 6.2. *Cho các tập hữu hạn khác rỗng A, B, C, và các quan hệ $\mathcal{R}_1 \subseteq A \times B, \mathcal{R}_2 \subseteq B \times C$. Khi đó $M(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) = M(\mathcal{R}_1) \cdot M(\mathcal{R}_2)$.*

Ví dụ 6.22. Xét lại các tập A, B, C và quan hệ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ trong Ví dụ 6.18. Tính $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ thông qua ma trận quan hệ.

Giải. Ta có $M(\mathcal{R}_1) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} w & x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$, $M(\mathcal{R}_2) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (w) \\ (x) \\ (y) \\ (z) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$. Suy ra

$$M(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) = M(\mathcal{R}_1) \cdot M(\mathcal{R}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

và cho kết quả $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 = \{(1,6),(2,6)\}$. □

```python
import numpy as np
M1 = np.array([[0, 1, 0, 0],
               [0, 1, 0, 0],
               [0, 0, 1, 1],
               [0, 0, 0, 0]], dtype=bool)
M2 = np.array([[1, 0, 0],
               [0, 1, 0],
               [0, 0, 0],
               [0, 0, 0]], dtype=bool)
M = M1.dot(M2)
np.array(M, dtype=int)
```

Cho tập hữu hạn khác rỗng A và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Cố định vị trí các phần tử của A. Khi đó $M(\mathcal{R}^m) = [M(\mathcal{R})]^m, \ \forall m \in \mathbb{Z}^+$.

Ví dụ 6.23. Cho $A = \{1,2,3,4\}$ và $\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,2)\}$, như trong Ví dụ 6.20. Xác định $\mathcal{R}^m$, $m = 2, 3, \ldots$ thông qua ma trận quan hệ.

Giải. Ta có

$$M(\mathcal{R}) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M(\mathcal{R}^2) = [M(\mathcal{R})]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M(\mathcal{R}^3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M(\mathcal{R}^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow M(\mathcal{R}^m) = \mathbf{0}, \ \forall m \geq 4.$$

Ta được $\mathcal{R}^2 = \{(1,2),(1,4),((3,4))\}$, $\mathcal{R}^3 = \{(1,4)\}$, và $\mathcal{R}^m = \varnothing$, $\forall m \geq 4$. □

```python
import numpy as np
M = np.array([[0, 1, 1, 0],
              [0, 0, 0, 1],
              [0, 1, 0, 0],
              [0, 0, 0, 0]], dtype=bool)

m = 4
L = M.copy()
for k in range(2, m+1):
    L = M.dot(L)  # lưu M^k
    print(k, np.array(L, dtype=int))
```

Định nghĩa 6.12. *Cho $E = (e_{ij})_{m\times n}$, $F = (f_{ij})_{m\times n}$ là hai ma trận 0-1. Ta nói E đứng trước, hay nhỏ hơn, F, và viết $E \leq F$ nếu $e_{ij} \leq f_{ij}$, $\forall i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.*

Ví dụ 6.24. Với $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ta có $E \leq F$. Ở đây, có 8 ma trận 0-1 G thỏa mãn $E \leq G$.

Định nghĩa 6.13. *Với $n \in \mathbb{Z}^+$, ma trận đơn vị $I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ là ma trận 0-1 trong đó* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } i = j \\ 0, \text{ nếu } i \neq j. \end{cases}$

Định nghĩa 6.14. *Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận 0-1. Chuyển vị của A là ma trận ký hiệu $A^t = (a^*_{ji})_{n\times m}$ trong đó $a^*_{ji} = a_{ij}$, $\forall j = \overline{1,n}, i = \overline{1,m}$.*

Ví dụ 6.25. Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, thì $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ở đây, và tổng quát, hàng (cột) i của A bằng cột (hàng) i của A^t. Tức là, A^t thu được từ A bằng cách viết từng hàng của A thành cột (hoặc cột thành hàng).

Với ma trận quan hệ, ta có thể nhận dạng tính phản xạ, đối xứng, phản xứng và bắc cầu của một quan hệ.

Định lý 6.3. *Cho tập A cỡ $n > 0$ và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A, có ma trận biểu diễn $M_{\mathcal{R}}$. Khi đó*

a) *$\mathcal{R}$ phản xạ $\Leftrightarrow I_n \leq M_{\mathcal{R}}$, tức là các phần tử trên đường chéo chính của $M_{\mathcal{R}}$ đều bằng 1.*

b) *$\mathcal{R}$ đối xứng $\Leftrightarrow M_{\mathcal{R}} = M^t_{\mathcal{R}}$, tức là $M_{\mathcal{R}}$ đối xứng. Nói cách khác, các phần tử của $M_{\mathcal{R}}$ đối xứng với nhau qua đường chéo chính.*

c) *$\mathcal{R}$ bắc cầu $\Leftrightarrow M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}} = M^2_{\mathcal{R}} \leq M_{\mathcal{R}}$.*

d) *$\mathcal{R}$ phản xứng $\Leftrightarrow M_{\mathcal{R}} \wedge M^t_{\mathcal{R}} \leq I_n$. (Ma trận $M \wedge M^t$ được xây dựng bằng cách thực hiện phép toán hội $\wedge$ giữa các thành phần cùng vị trí của M và M^t.)*

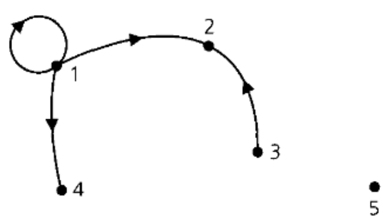
6.2.2 Biểu diễn đồ thị của quan hệ

Định nghĩa 6.15. *Cho V là tập hữu hạn khác rỗng. Một đồ thị có hướng G trên V gồm các phần tử của V, gọi là các đỉnh của G, và một tập con E của $V \times V$ chứa các cạnh của G. Ta viết $G = (V, E)$.*
Nếu $(a, b) \in E$, ta nói có cạnh từ a tới b. Đỉnh a là đỉnh đầu của cạnh, b là đỉnh cuối. Ta nói a kề trước b, hay b kề sau a. Cạnh có dạng (a, a) gọi là vòng. Đỉnh không có cạnh gọi là đỉnh cô lập.

Một quan hệ $\mathcal{R}$ trên A được biểu diễn bằng đồ thị có hướng $G = (A, \mathcal{R})$.

Ví dụ 6.26. Cho một biểu diễn của đồ thị $G = (V, E)$ trong đó $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, và $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (3, 2)\}$.

Giải.



□

Biểu diễn đồ thị thuận tiện để nhận dạng một số thuộc tính của quan hệ, phù hợp nhất với quan hệ cỡ nhỏ trên tập cỡ nhỏ.

Cho tập hữu hạn A, và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A.

a) $\mathcal{R}$ phản xạ $\Leftrightarrow$ có vòng tại mọi đỉnh.

b) $\mathcal{R}$ đối xứng $\Leftrightarrow$ giữa hai cặp đỉnh khác nhau a và b, hoặc không có cạnh, hoặc có cả hai cạnh (a, b) và (b, a).

c) $\mathcal{R}$ phản xứng $\Leftrightarrow$ giữa hai cặp đỉnh khác nhau có không quá một cạnh.

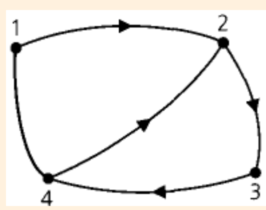
Định nghĩa 6.16. *Đồ thị có hướng G gọi là*

a) *liên thông mạnh nếu luôn có đường đi từ mỗi đỉnh tới mọi đỉnh khác, tức là* $\forall a, b \in V$ *mà* $a \neq b$, $(a, b) \in G$ *hoặc có các đỉnh phân biệt* $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ *sao cho* $(a, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_n, b) \in G$.

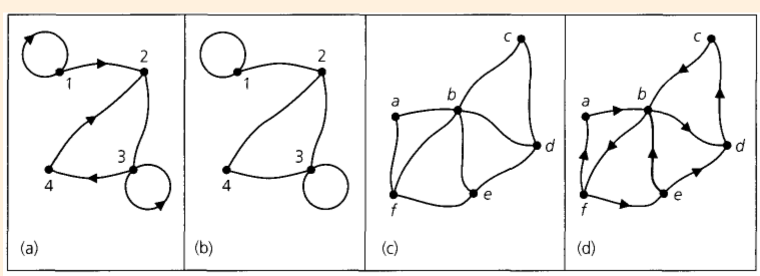
b) *liên thông yếu nếu có đường đi giữa 2 đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng tương ứng với đồ thị đã cho. Tức là hủy bỏ các hướng của các cạnh trong đồ thị.*

c) *liên thông một phần (unilaterally connected) nếu với mọi cặp đỉnh, có ít nhất một đường đi từ một đỉnh đến đỉnh còn lại.*

Ví dụ 6.27. Đồ thị sau liên thông mạnh và không có vòng



Ví dụ 6.28. Trong các đồ thị



đồ thị (a) liên thông yếu, còn đồ thị (b) liên thông mạnh.

Bài tập 6.2

6.1. Thông qua ma trận quan hệ, lập trình kiểm tra một quan hệ là

a) hàm   b) đơn ánh   c) toàn ánh

6.2. Từ ma trận quan hệ, lập trình kiểm tra một quan hệ có thuộc tính

a) phản xạ   b) đối xứng   c) phản xứng   d) bắc cầu

6.3 Thứ tự bộ phận: biểu đồ Hasse

Xét tập A và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Cặp $(A, \mathcal{R})$ gọi là *tập được sắp* (*thứ tự bộ phận*), nếu quan hệ $\mathcal{R}$ trên A là quan hệ thứ tự. Khi nói A là tập được sắp, ta hiểu có quan hệ thứ tự $\mathcal{R}$ trên A.

Ví dụ 6.29. Cho A là tập các môn học. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên A bởi $a \mathcal{R} b$ nếu a, b là cùng một môn hoặc a là môn tiên quyết của b. Khi đó $\mathcal{R}$ sắp thứ tự tập A.

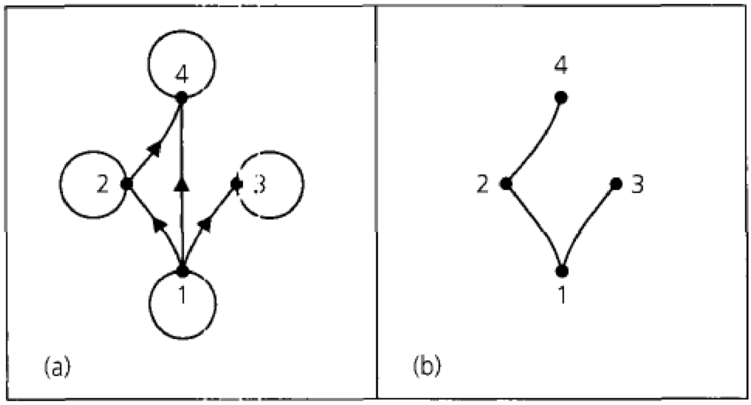
Ví dụ 6.30. Định nghĩa $\mathcal{R}$ trên $A = \{1, 2, 3, 4\}$ bởi $a \mathcal{R} b$ nếu $a \mid b$. Khi đó, tương tự Ví dụ 6.16, $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4)\}$ là quan hệ thứ tự, và $(A, \mathcal{R})$ là tập được sắp.

Cho quan hệ thứ tự $\mathcal{R}$ trên tập hữu hạn A. Ta xây dựng biểu đồ Hasse[*]cho $\mathcal{R}$ bằng cách vẽ các đoạn thẳng từ a hướng lên b, nếu $a \mathcal{R} b$ và, quan trọng nhất, không có phần tử $c \in A$ sao cho $a \mathcal{R} c$ và $c \mathcal{R} b$. (Vì vậy không có gì "ở giữa" a và b.) Nếu áp dụng quy tắc trên để xây dựng biểu đồ từ dưới lên, thì không cần vẽ hướng cho các cạnh.

Ví dụ 6.31. Vẽ một biểu đồ Hasse quan hệ thứ tự trong Ví dụ 6.30.

Giải.

[*]Helmut Hasse, 1898–1979, nhà toán học Đức



□

Ví dụ 6.32. Vẽ biểu đồ Hasse các tập tập được sắp

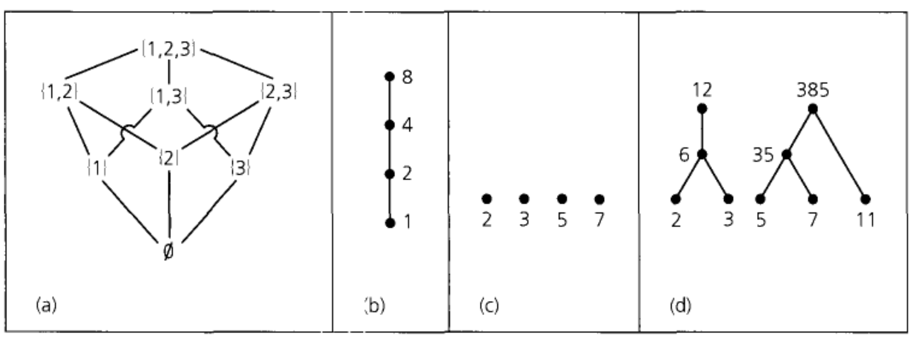
a) Với $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ và $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, $\mathcal{R}$ là quan hệ tập con trên A.

b) $\mathcal{R}$ là quan hệ "chia hết" trên $A = \{1, 2, 4, 8\}$.

c) Quan hệ chia hết trên $\{2, 3, 5, 7\}$.

d) Quan hệ chia hết trên $\{2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 35, 385\}$.

Giải.



□

Theo các hình trên, biểu đồ Hasse có thể có mọi các đỉnh đều cô lập, như ý (b), cũng có thể gồm hai (hoặc nhiều) phần, như ý (d).

Ví dụ 6.33.

Một dạng đặc biệt của quan hệ thứ tự:

Định nghĩa 6.17. *Nếu $(A, \mathcal{R})$ là tập được sắp, ta nói A được sắp toàn phần (hay, được sắp tuyến tính) nếu $\forall a, b \in A$, $a \mathcal{R} b$ hoặc $b \mathcal{R} a$. Ta cũng nói $\mathcal{R}$ là quan hệ thứ tự toàn phần (hay, thứ tự tuyến tính).*

Ví dụ 6.34. a) Trên tập $\mathbb{N}$, quan hệ $\mathcal{R}$ xác định bởi $a \mathcal{R} b$ nếu $a \leq b$ là thứ tự toàn phần.

b) Quan hệ tập con trên $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, trong đó $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$, là quan hệ thứ tự, nhưng không toàn phần, vì $\{1, 2\}, \{1, 3\} \in A$ nhưng đều không có $\{1, 2\} \subseteq \{1, 3\}$ cũng như $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2\}$.

Thuật toán sắp xếp tôpô

Cho quan hệ thứ tự $\mathcal{R}$ trên tập A cỡ n.

Bước 1: Đặt $k = 1$. H_1 là biểu đồ Hasse của $\mathcal{R}$.

Bước 2: Chọn một đỉnh v_k trong H_k sao cho không có cạnh nào trong H_k ra khỏi v_k (hướng của cạnh đã bị ẩn).

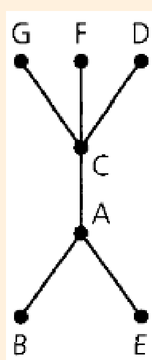
Bước 3: Nếu $k = n$, quá trình kết thúc và ta có thứ tự toàn phần

$$\mathcal{T} : v_n < v_{n-1} < ... < v_2 < v_1$$

chứa $\mathcal{R}$.

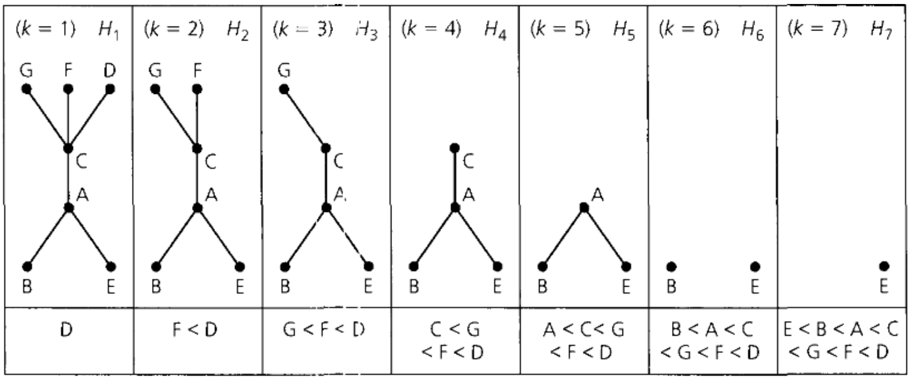
Nếu $k < n$ thì xóa khỏi H_k đỉnh v_k và các cạnh của H_k có đỉnh cuối là v_k. Gọi kết quả thu được là H_{k+1}. Tăng k lên 1 đơn vị và quay lại bước (2).

Ví dụ 6.35. Cho quan hệ thứ tự trên tập $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ có biểu đồ Hasse sau



Tìm một sắp xếp tôpô của tập $\mathcal{A}$.

Giải.



□

Định nghĩa 6.18. *Cho $(A, \mathcal{R})$ là tập được sắp. Phần tử $x \in A$ gọi là*

a) tối đại của A nếu $\forall a \in A,\ a \neq x \Rightarrow x \not\mathcal{R} a$.

b) tối tiểu của A nếu $\forall a \in A,\ a \neq x \Rightarrow a \not\mathcal{R} x$.

Định lý 6.4. *Nếu $(A, \mathcal{R})$ là tập được sắp và A hữu hạn, thì A có cả tối đại và tối tiểu.*

Trên biểu đồ Hasse, các tối đại của A ứng với các đỉnh không có cạnh đi ra, và các tối tiểu của A ứng với các đỉnh không có cạnh đi vào.

Ví dụ 6.36. Cho $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ và $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

a) Xét $\mathcal{R}$ là quan hệ tập con trên $\mathcal{A}$. Khi đó $\mathcal{U}$ là tối đại và $\varnothing$ là tối tiểu của tập được sắp $(A, \mathcal{R})$.

b) Gọi B là tập các tập con thực sự của $\{1, 2, 3\}$, và $\mathcal{R}$ là quan hệ tập con trên B. Trong tập được sắp $(B, \mathcal{R})$, các tập $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, và $\{2, 3\}$ là các tối đại của A; $\varnothing$ vẫn là tối tiểu duy nhất.

Ví dụ 6.37. Với $\mathcal{R}$ là quan hệ “bé hơn hoặc bằng” trên tập $\mathbb{Z}$, ta thấy $(\mathbb{Z}, \leq)$ là tập được sắp, đều không có tối đại và tối tiểu. Tuy nhiên, tập được sắp $(\mathbb{N}, \leq)$ có tối tiểu 0 nhưng không có tối đại.

Ta nghiên cứu thêm các khái niệm về tập được sắp.

Định nghĩa 6.19. *Nếu $(A, \mathcal{R})$ là tập được sắp, thì phần tử $x \in A$ gọi là*

a) *phần tử nhỏ nhất nếu $x \,\mathcal{R}\, a, \ \forall a \in A$.*

b) *phần tử lớn nhất nếu $a \,\mathcal{R}\, x, \ \forall a \in A$.*

Ví dụ 6.38. Cho $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$, và $\mathcal{R}$ là quan hệ tập con.

a) Với $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, tập được sắp $(A, \subseteq)$ có $\varnothing$ là phần tử nhỏ nhất và $\mathcal{U}$ là phần tử lớn nhất.

b) Xét B là tập các tập con khác rỗng của $\mathcal{U}$, tập được sắp $(B, \subseteq)$ có $\mathcal{U}$ là phần tử lớn nhất; không có phần tử nhỏ nhất, nhưng có ba tối tiểu.

Ví dụ 6.39. Với các quan hệ thứ tự tương ứng trong các ý của Ví dụ 6.32, ta thấy

a) Phần tử lớn nhất là $\{1, 2, 3\}$ và nhỏ nhất là $\varnothing$.

b) Phần tử lớn nhất là 8 và nhỏ nhất là 1.

c, d) Không có phần tử lớn nhất cũng như nhỏ nhất.

Ta thấy một tập được sắp có thể có nhiều tối đại và tối tiểu. Tuy nhiên

Định lý 6.5. *Nếu tập được sắp $(A, \mathcal{R})$ có phần tử lớn nhất (nhỏ nhất), thì phần tử đó là duy nhất.*

Định nghĩa 6.20. *Cho tập được sắp $(A, \mathcal{R})$ và $B \subseteq A$. Phần tử $x \in A$ gọi là một*

a) *cận dưới của B nếu $x \,\mathcal{R}\, b, \ \forall b \in B$.*

b) *cận trên của B nếu $b \,\mathcal{R}\, x, \ \forall b \in B$.*

c) *cận dưới lớn nhất (glb) của B nếu nó là cận dưới của B, và với mọi cận dưới x' của B, ta có $x' \,\mathcal{R}\, x$.*

d) *cận trên nhỏ nhất (lub) của B nếu nó là cận trên của B, và với mọi cận trên x' của B, ta có $x \,\mathcal{R}\, x'$.*

Ví dụ 6.40. Cho $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, và $\mathcal{R}$ là quan hệ tập con trên A. Nếu $B = \{\ \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\ \}$, thì $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, và $\{1, 2, 3, 4\}$ là tất cả cận trên của B (thuộc $(A, \mathcal{R})$), trong đó $\{1, 2\}$ là cận trên nhỏ nhất (và thuộc B). Trong khi đó, cận dưới lớn nhất của B là $\varnothing$, không thuộc B.

Ví dụ 6.41. Cho $\mathcal{R}$ là quan hệ "bé hơn hoặc bằng" trên tập A.

a) Nếu $A = \mathbb{R}$ và $B = [0, 1]$, thì B có cận dưới lớn nhất 0 và cận trên nhỏ nhất 1. Ở đây $0, 1 \in B$. Với $C = (0, 1]$, C có cận dưới lớn nhất 0 và cận trên cận trên nhỏ nhất 1, và $1 \in C$ nhưng $0 \notin C$.

b) Vẫn $A = \mathbb{R}$, đặt $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Khi đó B có $\sqrt{2}$ là cận trên nhỏ nhất và $-\sqrt{2}$ là cận dưới lớn nhất, và cả hai số thực này đều thuộc B.

c) Với $A = \mathbb{Q}$, và B như ý (b). Ở đây B không có cận trên nhỏ nhất cũng như cận dưới lớn nhất.

Các ví dụ này dẫn ta đến kết luận sau.

Định lý 6.6. *Nếu $(A, \mathcal{R})$ là tập được sắp và $B \subseteq A$, thì B có không quá một cận trên nhỏ nhất (cận dưới lớn nhất).*

Ta kết thúc phần này với một cấu trúc thứ tự nữa.

Định nghĩa 6.21. *Tập được sắp $(A, \mathcal{R})$ gọi là dàn nếu $\forall a, b \in A$, luôn tồn tại cả* $\mathrm{lub}\{a, b\}$ *và* $\mathrm{glb}\{a, b\}$.

Ví dụ 6.42. Với $A = \mathbb{N}$ và $x, y \in \mathbb{N}$, định nghĩa $a \mathcal{R} b$ bởi $a \leq b$. Khi đó $\mathrm{lub}\{a, b\} = \max\{a, b\}$ và $\mathrm{glb}\{a, b\} = \min\{a, b\}$. Vì vậy $(\mathbb{N}, \leq)$ là một dàn.

Ví dụ 6.43. Với tập được sắp trong Ví dụ 6.38(a), nếu $S, T \subseteq \mathcal{U}$ thì $\mathrm{lub}\{S, T\} = S \cup T$ và $\mathrm{glb}\{S, T\} = S \cap T$, nên $\mathcal{P}(\mathcal{U}, \subseteq)$ là một dàn.

Ví dụ 6.44. Xét tập được sắp trong Ví dụ 6.32(d). Ta thấy

$$\mathrm{lub}\{2, 3\} = 6,\ \mathrm{lub}\{3, 6\} = 6,\ \mathrm{lub}\{5, 7\} = 35,\ \mathrm{lub}\{7, 11\} = 385,\ \mathrm{lub}\{11, 35\} = 385,$$

và

$$\mathrm{glb}\{3, 6\} = 3,\ \mathrm{glb}\{2, 12\} = 2,\ \mathrm{glb}\{35, 385\} = 35.$$

Tuy nhiên, mặc dù $\mathrm{lub}\{2, 3\}$ tồn tại, không có cận dưới lớn nhất của 2 và 3. Ngoài ra ra, ta cũng có thể kiểm tra thêm rằng, $\mathrm{glb}\{5, 7\}$, $\mathrm{glb}\{11, 35\}$, $\mathrm{glb}\{3, 35\}$ và $\mathrm{lub}\{3, 35\}$ đều không tồn tại. Do đó, quan hệ thứ tự này không phải dàn.

6.4 Quan hệ tương đương và phân hoạch

Định nghĩa 6.22. *Cho tập A và tập chỉ số I, xét* $\varnothing \neq A_i \subseteq A$, $\forall i \in I$. *Khi đó* $\{A_i\}_{i \in I}$ *là một phân hoạch của A nếu:*

a) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, *và*

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i, j \in I, i \neq j$.

Mỗi tập con A_i *gọi là một ô, hay khối, của phân hoạch.*

Như vậy, mỗi phần tử của A thuộc đúng một ô của phân hoạch.

Ví dụ 6.45. Với $A = \{1, 2, \dots, 10\}$, một trong số các phân hoạch của A:

a) $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$;

b) $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 6, 7, 9\}$, $A_3 = \{5, 8, 10\}$;

c) $A_i = \{i, i + 5\}$, $1 \leq i \leq 5$.

Ví dụ 6.46. Cho $A = \mathbb{R}$ và với mỗi $i \in \mathbb{Z}$, đặt $A_i = [i, i + 1)$. Khi đó $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ l à một phân hoạch của $\mathbb{R}$.

Ta tìm cách xây dựng mối liên hệ giữa phân hoạch với quan hệ tương tương.

Định nghĩa 6.23. *Cho* $\mathcal{R}$ *là quan hệ tương đương trên tập A. Với mỗi* $a \in A$, *định nghĩa lớp tương đương của a:*

$$[a] = \{b \in A \mid b \,\mathcal{R}\, a\}.$$

Ví dụ 6.47. Định nghĩa quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ bởi $a \,\mathcal{R}\, b$ nếu $4 \mid (a - b)$. Vì $\mathcal{R}$ phản xạ, đối xứng, và bắc cầu, nên nó là quan hệ tương đương và ta có

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
[1] &= \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} = \{4k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
[2] &= \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} = \{4k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
[3] &= \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\} = \{4k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Thế còn $[n]$, trong đó n là số nguyên khác ngoài 0, 1, 2 và 3? Chẳng hạn, [6]? Ta cảm thấy $[6] = [2]$, và để chứng minh điều này, ta dùng Định nghĩa 3.2 (về hai tập bằng nhau) như sau.

1) Nếu $a \in [6]$, thì theo Định nghĩa 6.23, ta có $a \mathcal{R} 6$, tức là $4 \mid (a-6)$, hay $a - 6 = 4k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a - 2 = 4(k+1) \Rightarrow 4 \mid (a-2) \Rightarrow a \mathcal{R} 2 \Rightarrow a \in [2]$, nên $[6] \subseteq [2]$.

2) Đối với bao hàm ngược lại, xét $a \in [2]$. Khi đó $a \mathcal{R} 2 \Rightarrow 4 \mid (a-2) \Rightarrow a - 2 = 4k$ với $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - 6 = 4(k-1)$, trong đó $k - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \mathcal{R} 6 \Rightarrow a \in [6]$, nên $[2] \subseteq [6]$.

Từ hai bao hàm trên, suy ra $[6] = [2]$.

Thêm nữa, ta cũng có, chẳng hạn, $[2] = [-2] = [-6]$, $[51] = [3]$, và $[17] = [1]$. Quan trọng nhất, $\{[0], [1], [2], [3]\}$ là một phân hoạch của $\mathbb{Z}$.

Ví dụ 6.48. Xét quan hệ $\mathcal{R}$ trên $\mathbb{Z}$ cho bởi $a \mathcal{R} b$ nếu $a^2 = b^2$ (hay, $a = \pm b$).

1) Với mỗi $a \in \mathbb{Z}$, ta có $a^2 = a^2$, hay $a \mathcal{R} a$, nên $\mathcal{R}$ phản xạ.

2) Với $a, b \in \mathbb{Z}$ mà $a \mathcal{R} b$, ta có $a^2 = b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b \mathcal{R} a$, nên $\mathcal{R}$ đối xứng.

3) Cuối cùng, giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}$ với $a \mathcal{R} b$ và $b \mathcal{R} c$. Khi đó $a^2 = b^2$ và $b^2 = c^2$, suy ra $a^2 = c^2$, hay $a \mathcal{R} b$. Do đó $\mathcal{R}$ bắc cầu.

$\mathcal{R}$, thỏa mãn ba tính chất trên, là quan hệ tương đương.

Có phân hoạch nào của $\mathbb{Z}$ dựa vào quan hệ này?

Ta thấy $[0] = \{0\}$, $[1] = [-1] = \{-1, 1\}$, $[2] = [-2] = \{-2, 2\}$, và tổng quát, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $[n] = [-n] = \{-n, n\}$. Hơn nữa, ta có phân hoạch

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [n] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{-n, n\}.$$

Các ví dụ này minh chứng cho kết luận sau.

Định lý 6.7. *Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên tập A, và $a, b \in A$, thì*

a) $a \in [a]$;

b) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow [a] = [b]$; và

c) $[a] = [b]$ hoặc $[a] \cap [b] = \varnothing$.

Nếu $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên A, thì theo ý (a) và (c) của Định lý 6.7, các lớp tương đương rời nhau theo quan hệ $\mathcal{R}$ cho ta một phân hoạch của A.

Định lý 6.8. *a) Mỗi quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên tập A cho ta một phân hoạch của A; và* *b) Mỗi phân hoạch của tập A lại cho ta một quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ trên A.*

Định lý 6.9. *Với tập A bất kỳ, có tương ứng 1-1 giữa tập các quan hệ tương đương trên A và tập các phân hoạch của A.*

6.5 Bao đóng của quan hệ

Định nghĩa 6.24. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập A, và một thuộc tính P nào đó, chẳng hạn phản xạ, đối xứng, bắc cầu. P–bao đóng của R, nếu tồn tại, là quan hệ "nhỏ nhất" trên A chứa $\mathcal{R}$ có tính chất P, theo nghĩa $S \supseteq \mathcal{R}$, và $\mathcal{S}$ là tập con của mọi quan hệ trên A chứa $\mathcal{R}$ có tính chất P.*

$\mathcal{R}$ có bao đóng phản xạ là

$$\mathcal{R} \cup \{(a, a) \mid a \in A\},$$

và bao đóng đối xứng là

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^c = \mathcal{R} \cup \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}.$$

6.5.1 Bao đóng bắc cầu

Định lý 6.10. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Khi đó, với số nguyên dương n, có đường đi độ dài n từ a đến b khi và chỉ khi $(a, b) \in \mathcal{R}$.*

Định nghĩa 6.25. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Quan hệ liên thông $\mathcal{R}^*$ chứa các cặp (a, b) sao cho có đường đi từ a đến b trong $\mathcal{R}$.*

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.$$

Định lý 6.11. *Bao đóng bắc cầu của quan hệ $\mathcal{R}$ là quan hệ liên thông $\mathcal{R}^*$.*

Bổ đề 6.1. *Cho tập A cỡ n, và quan hệ $\mathcal{R}$ trên A. Khi đó, nếu trong $\mathcal{R}$, có đường đi từ a đến b, thì cũng có đường đi độ dài không quá n.*

Hệ quả của bổ đề

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \cup \cdots \cup \mathcal{R}^n.$$

Định lý 6.12. *Cho quan hệ $\mathcal{R}$ trên tập cỡ n, có ma trận biểu diễn $M_{\mathcal{R}}$. Khi đó, ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu $\mathcal{R}^*$ là*

$$M_{\mathcal{R}^*} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{R}}^2 + M_{\mathcal{R}}^3 + \cdots + M_{\mathcal{R}}^n.$$

Thuật toán tìm $M_{\mathcal{R}}^*$ theo công thức trên có phức tạp $O(n^4)$.

Ví dụ 6.49. Cho $A = \{a, b, c, d\}$, và quan hệ $\mathcal{R} = \{(a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (d, c)\}$ trên A. Tìm bao đóng bắc cầu $\mathcal{R}^*$ của $\mathcal{R}$.

Giải. Ta có

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow M_{\mathcal{R}}^2 = M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}}^3 = M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_{\mathcal{R}}^4 = M_{\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{R}^*} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{R}}^2 + M_{\mathcal{R}}^3 + M_{\mathcal{R}}^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}^* = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, c), (d, d)\}.$$

□

```
import numpy as np
M = np.array([[0, 1, 0, 1],
              [0, 1, 0, 0],
              [1, 0, 0, 0],
              [0, 0, 1, 0]], dtype=bool)
n = len(M)
A = M.copy()
L = M.copy()
for k in range(2, n+1):
    L = M.dot(L)   # lưu M^k
    A += L         # lưu M + M^2 + ··· + M^k
```

```
    print(k, np.array(L, dtype=int))
np.array(A, dtype=int)
```

6.5.2 Thuật toán Warshall

[*]Xét dãy ma trận $W_k = \left(w_{ij}^k\right)_n$ xác định bởi

1) $W_0 = M_{\mathcal{R}}$, và

2) với $k = 1, 2, \dots n$,

$$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} + w_{ik}^{(k-1)} w_{kj}^{(k-1)}$$

> **Bổ đề 6.2.** $w_{ij}^{(k)} = 1$ *khi và chỉ khi có đường đi từ a_i tới a_j đi qua các điểm thuộc* $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Bổ đề cho ta $W_n = M_{\mathcal{R}^*}$.
Thuật toán có độ phức tạp $O\left(n^3\right)$.
Trong tính toán, ta lưu ý một số tính chất sau

1) Trong W_{k-1}, w_{ik}^{k-1} và w_{kj}^{k-1} là hình chiếu của w_{ij}^{k-1} lên cột k, hàng k.

2) $w_{ik}^{(k)} = w_{ik}^{(k-1)}$, và $w_{kj}^{(k)} = w_{kj}^{(k-1)}$.

3) Nếu $w_{ij}^{k-1} = 1$ thì $w_{ij}^k = 1$.

4) Nếu $w_{ik}^{k-1} = 0$ hoặc $w_{kj}^{k-1} = 0$ thì $w_{ij}^k = w_{ij}^{k-1}$.

5) Nếu $w_{ik}^{k-1} = w_{kj}^{k-1} = 1$ thì $w_{ij}^k = 1$.

Ví dụ 6.50. Trong Ví dụ 6.49,

$$W_0 = M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[*]Thuật toán Warshall đôi khi còn gọi là thuật toán Roy–Warshall, được đưa ra vào năm 1959 bởi Bernard Roy (1934–2017, nhà toán học Pháp), và năm 1960 bởi Stephen Warshall (1935–2006, nhà khoa học máy tính Mỹ)

$$W_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{\mathcal{R}^*} = W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```python
import numpy as np
W = np.array([[0, 1, 0, 1],
              [0, 1, 0, 0],
              [1, 0, 0, 0],
              [0, 0, 1, 0]], dtype=bool)
n = len(W)
for k in range(n):
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            W[i, j] += W[i, k] * W[k, j]
    print(k+1, np.array(W, dtype=int))
```

Tài liệu tham khảo

[1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. phiên bản 6. Pearson, 2022. 755 trang.

[3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.

[4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.

[5] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. phiên bản 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.

[6] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. phiên bản 3. Brooks/-Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.

[7] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. phiên bản 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.

[8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.