Mục lục

I Cơ sở của Toán rời rạc 1

1 Nguyên lý đếm cơ bản 2

1.1 Quy tắc cộng, nhân . . . 2
1.2 Biểu đồ cây . . . 9
1.3 Hoán vị, chỉnh hợp . . . 10
1.4 Tổ hợp . . . 15
1.5 Hoán vị lặp . . . 22
1.6 Tổ hợp lặp . . . 27
1.7 Sinh các hoán vị và tổ hợp . . . 31
1.8 Số Catalan . . . 34
1.9 Tóm tắt . . . 34

2 Nguyên lý cơ bản của logic 47

2.1 Phép toán cơ bản và bảng chân lý . . . 47
2.2 Tương đương logic: luật logic . . . 52
2.3 Kéo theo logic: quy tắc suy luận . . . 58
2.4 Lượng từ: tình huống sử dụng . . . 64
2.5 Các lượng từ, định nghĩa, và chứng minh định lý . . . 71
2.6 Tóm tắt . . . 74

3 Lý thuyết tập hợp 76

3.1 Tập và tập con . . . 76
3.2 Phép toán tập hợp và quy luật . . . 85
3.3 Phép đếm và biểu đồ Venn . . . 94
3.4 Tóm tắt . . . 97

4 Tính chất của số nguyên: quy nạp toán học 100

4.1 Nguyên lý sắp tốt: quy nạp toán học . . . 100
4.2 Định nghĩa đệ quy . . . 112
4.3 Thuật toán chia: số nguyên tố . . . 119

4.4 Ước chung lớn nhất: thuật toán Euclid . . . 123
4.5 Định lý cơ bản của số học . . . 129
4.6 Biểu diễn số nguyên và thuật toán . . . 133
4.7 Tóm tắt . . . 139

5 Quan hệ: hàm **142**
5.1 Tích Descartes và quan hệ . . . 142
5.2 Biểu diễn quan hệ . . . 148
5.3 Hàm: đơn ánh . . . 149
5.4 Toàn ánh: số Stirling loại II . . . 159
5.5 Hàm đặc biệt . . . 164
5.6 Nguyên lý chuồng bồ câu . . . 168
5.7 Hàm hợp và hàm ngược . . . 171
5.8 Độ phức tạp tính toán . . . 179
5.9 Phân tích thuật toán . . . 183

6 Quan hệ: hướng tiếp cận thứ hai **187**
6.1 Quan hệ: thuộc tính và phép toán . . . 187
6.2 Kiểm tra thuộc tính của quan hệ . . . 195
6.3 Thứ tự bộ phận: biểu đồ Hasse . . . 199
6.4 Quan hệ tương đương và phân hoạch . . . 205
6.5 Bao đóng của quan hệ . . . 207

II Các phép đếm nâng cao **211**

7 Nguyên lý bù trừ **212**
7.1 Nguyên lý bù trừ . . . 212
7.2 Nguyên lý bù trừ tổng quát . . . 220
7.3 Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí . . . 221
7.4 Đa thức rook . . . 221
7.5 Sắp xếp có vị trí bị cấm . . . 221
7.6 Tóm tắt . . . 221
7.7 Bài tập bổ sung . . . 221

8 Hàm sinh **213**
8.1 Ví dụ mở đầu . . . 214
8.2 Định nghĩa và ví dụ: kỹ thuật tính . . . 218
8.3 Phân hoạch số nguyên . . . 231
8.4 Hàm sinh mũ . . . 236

8.5 Toán tử tổng 241

9 Hệ thức đệ quy **246**

9.1 Hệ thức đệ quy tuyến tính cấp một 247

9.2 Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp cao hệ số hằng 256

9.3 Hệ thức đệ quy không thuần nhất 265

9.4 Phương pháp hàm sinh 266

9.5 Hệ thức đệ quy phi tuyến đặc biệt 270

9.6 Thuật toán chia để trị 271

III Lý thuyết đồ thị và ứng dụng **278**

10 Mở đầu về lý thuyết đồ thị **279**

10.1 Định nghĩa và ví dụ 279

10.2 Đồ thị con, phần bù và đẳng cấu đồ thị 280

10.3 Bậc của đỉnh: đường và chu trình Euler 281

10.4 Đồ thị phẳng 284

10.5 Đường và chu trình Hamilton 285

10.6 Tô màu đồ thị và đa thức sắc độ 286

11 Cây **287**

11.1 Định nghĩa, tính chất, và ví dụ 287

11.2 Cây có gốc 288

11.3 Cây và sắp xếp 293

11.4 Cây có trọng số và mã tiền tố 293

11.5 Các thành phần liên thông và điểm nối 298

12 Tối ưu và tìm kiếm **299**

12.1 Thuật toán đường đi ngắn nhất Dijkstra 299

12.2 Cây bao trùm nhỏ nhất: thuật toán Kruskal, Prim 299

12.3 Mạng vận tải: định lý Max-Flow Min-Cut 299

12.4 Lý thuyết tìm kiếm 299

IV Đại số hiện đại ứng dụng **300**

13 Vành và số học đồng dư **301**

13.1 Cấu trúc vành: định nghĩa và ví dụ 301

13.2 Tính chất vành và vành con 307

13.3 Vành các số nguyên modulo n 309

13.4 Đồng cấu và đẳng cấu nhóm, vành 315

13.5 Định lý phần dư Trung Quốc 316
13.6 Mã hóa khóa công khai: Giới thiệu 319
13.7 Mã hóa khóa công khai: Phương pháp Rabin 321
13.8 Mã hóa khóa công khai: RSA 326

13 Nhóm, lý thuyết mã, và phương pháp liệt kê Polya 300

13.1 Định nghĩa, ví dụ, và tính chất cơ bản 300
13.2 Đồng cấu, đẳng cấu, và nhóm cyclic 301
13.3 Lớp kề và định lý Lagrange 302
13.4 Sơ lược về lý thuyết mã 302
13.5 Khoảng cách Hamming 302
13.6 Ma trận sinh và kiểm tra chẵn lẻ 302
13.7 Nhóm các mã: giải mã với coset leaders 303
13.8 Ma trận Hamming 303
13.9 Phép đếm và sự tương đương: định lý Burnside 303
13.10 Chỉ số chu trình 306
13.11 Định lý liệt kê Polya 306

14 Trường hữu hạn và thiết kế tổ hợp 308

Phần II

Các phép đếm nâng cao

Chương 7

Nguyên lý bù trừ

7.1 Nguyên lý bù trừ 212
7.2 Nguyên lý bù trừ tổng quát 220
7.3 Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí 221
7.4 Đa thức rook 221
7.5 Sắp xếp có vị trí bị cấm 221
7.6 Tóm tắt 221
7.7 Bài tập bổ sung 221

7.1 Nguyên lý bù trừ

Trong Chương 3, ta đã nêu hai công thức

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

và gọi là nguyên lý bù trừ cho hai và ba tập.

Định lý 7.1 (Nguyên lý bù trừ). *Với các tập hữu hạn $A_1, A_2, \ldots, A_n$,*

$$\begin{aligned}&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ =& \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + \\ &+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

Chứng minh. content... □

Một dạng khác của nguyên lý bù trừ, được phát biểu dưới dạng bài toán đếm. Trong tập N phần tử đang xét, giả sử A_i là tập con các phần tử có tính chất p_i, $1 \leq i \leq n$. Ký hiệu số phần tử thỏa mãn các điều kiện $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_r}$

$$N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}) = \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right|.$$

Khi đó, số phần tử thỏa mãn ít nhất một tính chất c_i nào đó là

$$\begin{aligned}\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| &= \sum_{1 \leq i \leq n} N(c_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N\left(c_i c_j\right) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N\left(c_i c_j c_k\right) - \cdots + \\ &+ (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} N\left(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}\right) + \cdots + (-1)^{n-1} N(c_1 c_2 \cdots c_n)\end{aligned}$$

và do đó, số phần tử không thỏa mãn tính chất nào là

$$\begin{aligned}N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| = \\ &N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N\left(c_i c_j\right) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N\left(c_i c_j c_k\right) + \cdots + \\ &+ (-1)^{r} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} N\left(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}\right) + \cdots + (-1)^{n} N(c_1 c_2 \cdots c_n)\end{aligned}$$

Ký hiệu

$$\begin{aligned} N_0 &= N \\ N_1 &= \sum_{1 \leq i \leq n} N(c_i) \\ N_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(c_i c_j) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(c_i c_j c_k), \ldots \\ N_r &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}), \ldots \\ N_n &= N(c_1 c_2 \cdots c_n) \end{aligned}$$

với N_r là tổng của $\binom{n}{r}$ số hạng. Ta có

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n.$$

Trong phần tổ hợp lặp, trang 28, ta đã đếm các nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ với điều kiện chặn dưới của các biến. Nếu có một biến bị chặn trên, chẳng hạn $x_1 \leq a_1$, thì theo Phần 3.3 ở trang 94, ta đếm gián tiếp các nghiệm này thông qua tập bù của nó, tức là tập nghiệm thỏa mãn $x_1 > a_1$. Trường hợp nhiều biến bị chặn trên, ta dùng nguyên lý bù trừ để đếm các nghiệm này.

Ví dụ 7.1. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn

a) $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4$.

b) $x_1 < 4, x_2 < 6, x_3 \leq 10, x_4 > 2$.

Giải. a) Ngoài tính không âm của các nghiệm, xét điều kiện c_i là $x_i > 7$, $1 \leq i \leq 4$, hay $x_i \geq 8$. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4$$

trong đó

i) $N_0 = N$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, bằng

$$\binom{4 + 25 - 1}{25} = 3276.$$

ii) $N(c_i)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ sao cho $x_i \geq 8$, bằng $\binom{4 + (25 - 8) - 1}{25 - 8} = 1140$, với $1 \leq i \leq 4$. Vì $N_1 = \sum_{1 \leq i \leq 4} N(c_i)$ gồm $\binom{4}{1}$ số hạng bằng nhau nên

$$N_1 = \binom{4}{1} \times 1140 = .4560.$$

iii) $N(c_i c_j)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ thỏa mãn $x_i \geq 8$ và $x_j \geq 8$, với $1 \leq i < j \leq 4$, bằng $\binom{4 + (25 - 8 - 8) - 1}{25 - 8 - 8} = 220$. Suy ra

$$N_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} N(c_i c_j) = \binom{4}{2} \times 220 = 1320.$$

và tiếp theo tương tự

iv) $N(c_i c_j c_k) = \binom{4 + (25 - 8 - 8 - 8) - 1}{25 - 8 - 8 - 8} = 4$, suy ra

$$N_3 = \binom{4}{3} \times 4 = 16.$$

v) $N_4 = 0$.

Do đó $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = 3276 - 4560 + 1320 - 16 + 0 = 20$.

b) Trong các nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ với $x_4 > 2$, hay $x_4 \geq 3$, xét các điều kiện c_1, c_2, c_3 lần lượt là $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 11$. Cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

trong đó

i) $N_0 = N$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ với $x_4 \geq 3$, bằng $\binom{4 + (25 - 3) - 1}{25 - 3} = 2300$.

ii) $N(c_1)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, $x_4 \geq 3$ sao cho $x_1 \geq 4$, bằng $\binom{4 + (25-3-4) - 1}{25-3-4} = 1330$. Tương tự $N(c_2) = \binom{4 + (25-3-6) - 1}{25-3-6} = 969$, $N(c_3) = \binom{14}{11} = 364$. Ta có

$$N_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) = 2663.$$

iii) $N_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) = \binom{15}{12} + \binom{10}{7} + \binom{8}{5} = 631.$

iv) $N_3 = N(c_1c_2c_3) = \binom{4}{1} = 4.$

Như vậy, $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = 2300 - 2663 + 631 - 4 = 264$.

□

Định nghĩa 7.1. *Cho số nguyên dương n. Hàm Euler phi, ký hiệu $\Phi(n)$, là số các số nguyên từ 1 tới n và nguyên tố cùng nhau với n.*

Chẳng hạn, $\Phi(2) = 1$, $\Phi(3) = 2$, $\Phi(4) = 2$, $\Phi(5) = 4$, $\Phi(6) = 2$.

```python
from sympy import *
totient(6)  # → 2
```

Nếu p nguyên tố, thì $\Phi(p) = p - 1$. Tổng quát

Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Theo định lý cơ bản của số học, n có phân tích $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ trong đó p_i là số nguyên tố, $e_i \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq i \leq k$. Khi đó

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Chứng minh. Với phân tích nguyên tố này của n, một số nguyên dương m nguyên tố cùng nhau với n nếu p_i không là ước m, $1 \leq i \leq k$.

Trong các số m từ 1 tới n xét điều kiện

$$c_i : \quad p_i \text{ là ước của } m.$$

và cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_k}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^k N_k$$

trong

i) $N_0 = n$

ii) $N_1 = \sum_{1\le i\le k} N(c_i) = \sum_{1\le i\le k} \lfloor \frac{n}{p_i} \rfloor = \sum_{1\le i\le k} \frac{n}{p_i}$

iii) $N(c_i c_j)$, $1 \le i < j \le k$, là số các số từ 1 tới n là bội của p_i và p_j, tức là bội của $\operatorname{lcm}(p_i, p_j)$. Mặt khác, p_i, p_j là các số nguyên tố khác nhau, nên $\operatorname{lcm}(p_i, p_j) = p_i p_j$. Suy ra $N(c_i c_j) = \lfloor \frac{n}{p_i p_j} \rfloor = \frac{n}{p_i p_j}$. Ta có

$$N_2 = \sum_{1\le i<j\le k} N(c_i c_j) = \sum_{1\le i<j<k} \frac{n}{p_i p_j}$$

iv) Tương tự

$$\begin{aligned}
N_3 &= \sum_{1\le i<j<l\le k} N(c_i c_j c_l) = \sum_{1\le i<j<l<k} \frac{n}{p_i p_j p_l}, \dots \\
N_r &= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le k} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}}, \dots \\
N_k &= N(c_1 c_2 \cdots c_k) = 1 = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}
\end{aligned}$$

Các số hạng này có thừa số chung là n, nên

$$\begin{aligned}
N(\overline{c_1}\,\overline{c_2}\cdots\overline{c_k}) &= n\Big(1 - \sum_{1\le i\le k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{1\le i<j<l\le k} \frac{1}{p_i p_j p_l} + \cdots + \\
&\quad + (-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k}\Big) \\
&= n \sum_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)
\end{aligned}$$

□

Trong Phần 5.4, ta thừa nhận trước công thức đếm số toàn ánh. Bây giờ ta sẽ chứng minh công thức đó.

Số toàn ánh từ tập A cỡ m vào B cỡ n là

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \\
&= \binom{n}{n} n^m - \binom{n}{n-1} (n-1)^m + \binom{n}{n-2} (n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} 2^m + \\
&\quad + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 1^m.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Nhắc lại định nghĩa, một toàn ánh từ A vào B là một hàm sao cho mỗi phần tử của B đều có tạo ảnh. Giả sử $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, xét điều kiện

$$c_i : \quad b_i \text{ không có tạo ảnh}$$

thì ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n,$$

trong đó

i) N_0 là số hàm từ tập A cỡ m vào tập B cỡ n, bằng n^m.

ii) $N(c_i)$, $1 \leq i \leq n$, là số hàm từ A vào B, sao cho b_i không có tạo ảnh. Mỗi hàm như vậy tương ứng với hàm từ A cỡ m vào $B - \{b_i\}$ cỡ $n - 1$, nên $N(c_i) = (n-1)^m$. Suy ra $N_1 = \binom{n}{1}(n-1)^m$.

Tương tự $N_2 = \binom{n}{2}(n-2)^m, \dots, N_k = \binom{n}{k}(n-k)^m$.

Thay các kết quả vào công thức của $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n})$, ta được biểu thức cần chứng minh. □

Ví dụ về bài toán ghép cặp:

Ví dụ 7.2. Cho n hộp đánh số từ 1 đến n, và n vật cũng đánh số từ 1 đến n. Có bao nhiêu cách xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp một vật, và không có vật nào vào đúng hộp cùng số với nó.

Giải. Xét điều kiện c_i: vật i xếp vào hộp i, $1 \leq i \leq n$. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n,$$

trong đó

i) N_0 là số cách xếp n vật vào n hộp mà mỗi hộp một vật. Theo quy tắc nhân, $N_0 = n!$

ii) $N(c_i)$ là số cách xếp n vào n hộp sao cho mỗi hộp một vật, và hộp i chứa vật i, bằng $1 \times (n-1)! = (n-1)!$. Suy ra

$$N_1 = \binom{n}{1}(n-1)! = \frac{n!}{1!\,(n-1)!}(n-1)! = \frac{n!}{1!}$$

iii) Tương tự

$$N_2 = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!} \qquad N_r = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!}, \ldots$$

$$N_3 = \binom{n}{3}(n-3)! = \frac{n!}{3!}, \ldots \qquad N_n = 1$$

Các số hạng có thừa số chung là $n!$ nên

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = n!\Big[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big]$$

□

Theo ví dụ trên, xác suất để không có vật nào xếp vào đúng hộp là

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

chính là khai triển Maclaurin tới cấp n của e^x tại $x = -1$, xem [**James-Stewart**]. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1}.$$

Tương tự phương pháp tìm số Euler phi, xét ví dụ sau

Ví dụ 7.3. Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số không chia hết cho số nào trong ba số 4, 6, và 10.

Giải. Trong các số nguyên m từ 1 đến 100, xét điều kiện

1) c_1: m là bội của 4 2) c_2: m là bội của 6 3) c_3: m là bội của 10

thì ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

trong đó

i) $N_0 = 100$

ii) $N_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) = \lfloor \frac{100}{4} \rfloor + \lfloor \frac{100}{6} \rfloor + \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 51$

iii) $N(c_1c_2)$ là số các số từ 1 đến 100 chia hết cho cả 4 và 6, tức là chia hết cho $\mathrm{lcm}(4, 6) = 12$. Vì thế
$$N_2 = \lfloor \frac{100}{12} \rfloor + \lfloor \frac{100}{20} \rfloor + \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 16$$

iv) $N_3 = N(c_1c_2c_3) = \lfloor \frac{100}{\mathrm{lcm}(4, 6, 10)} \rfloor = \lfloor \frac{100}{60} \rfloor = 1.$

Do đó $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = 100 - 51 + 16 - 1 = 64.$ □

Ví dụ 7.4. Có bao nhiêu hoán vị của 26 chữ cái, sao cho trong đó không xuất hiện từ HUCE, IT, AM, và PS.

Giải. Ký hiệu c_1, c_2, c_3, c_4 lần lượt là điều kiện cho biết hoán vị chứa từ HUCE, IT, AM, và PS. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4,$$

trong đó

i) N_0 là số hoán vị của 26 chữ cái, bằng 26!

ii) $N(c_1)$ là số hoán vị của các 23 vật HUCE, A, B, D, F,..., Z, bằng 23!. Tương tự, $N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = 25!$. Suy ra $N_1 = 23! + 3 \cdot 25!$

iii) $N(c_1c_2)$ là số hoán vị của các vật HUCE, IT, A, B, D,..., bằng 22!. Tương tự, $N(c_1c_3) = N(c_1c_4) = 22!$, $N(c_2c_3) = N(c_2c_4) = N(c_3c_4) = 24!$. Suy ra $N_2 = 3 \cdot 22! + 3 \cdot 24!$

iv) $N(c_1c_2c_3) = N(c_1c_2c_4) = N(c_1c_3c_4) = 21!$, $N(c_2c_3c_4) = 23!$. Ta được $N_3 = 3 \cdot 21! + 23!$

v) $N_4 = N(c_1c_2c_3c_4) = 20!$

Do đó

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) &= 26! - (23! + 3 \cdot 25!) + (3 \cdot 22! + 3 \cdot 24!) - (3 \cdot 21! + 23!) + 20! \\ &= 147\,383\,944 \cdot 20! \end{aligned}$$

□

Bài tập 7.1

7.1. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 2022

a) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5.

b) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, 7.

c) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, nhưng chia hết cho 7.

7.2. Có bao nhiêu nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ thỏa mãn

a) $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

b) $0 \leq x_i < 8, 1 \leq i \leq 4$

c) $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 7, 0 \leq x_4 \leq 8$

d) $-5 \leq x_i \leq 10, 1 \leq i \leq 4$

7.3. Đếm các số nguyên dương $x \leq 9\,999\,999$ sao cho tổng các chữ số của x bằng 31.

7.4. Đếm các hoán vị của các chữ cái $a, b, c, \ldots, z$ không chứa mọi từ *spin*, *game*, *path*, *net*.

7.5. Tính $\Phi(n)$ với n bằng

a) 51 b) 420 c) 12300 d) 5186 e) 5187 f) 5188

7.6. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Xác định

a) $\Phi(2^n)$ b) $\Phi(2^n p$, với p là số nguyên tố lẻ

7.7. Với số nguyên dương n nào thì $\Phi(n)$ lẻ?

7.8. Với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $\Phi(n^m) = n^{m-1}\Phi(n)$.

7.9. Tìm ba số nguyên dương n để $\Phi(n) = 16$.

7.10. Với số nguyên dương nào của n thì $\Phi(n)$ là lũy thừa của 2?

7.11. Với số nguyên dương nào của n thì 4 là ước của $\Phi(n)$?

7.2 Nguyên lý bù trừ tổng quát

Định lý 7.2 (Nguyên lý bù trừ tổng quát). *Với $0 \leq m \leq n$, số phần tử thỏa mãn đúng m điều kiện trong $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là*

$$E_m = N_m - \binom{m+1}{1}N_{m+1} + \binom{m+2}{2}N_{m+2} - \cdots + (-1)^r\binom{m+r}{r}N_{m+r} + \cdots + (-1)^{n-m}\binom{n}{n-m}N_n.$$

Trường hợp $m = 0$, ta có Định lý 7.1.

Chứng minh. □

Hệ quả 7.1. *Số phần tử thỏa mãn ít nhất m điều kiện trong n điều kiện*

$$L_m = N_m - \binom{m}{m-1}N_{m+1} + \binom{m+1}{m-1}N_{m+2} + \cdots + (-1)^r\binom{m+r-1}{m-1}N_{m+r} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-m}\binom{n-1}{m-1}N_n.$$

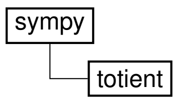
Chứng minh. content... □

7.3 Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí

7.4 Đa thức rook

7.5 Sắp xếp có vị trí bị cấm

7.6 Tóm tắt



7.7 Bài tập bổ sung

7.12. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 500 không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, 6, 8, 10?

7.13. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số không quá 37?

7.14. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh nếu $\Phi(n) = n - 1$ thì n nguyên tố.

7.15. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh

a) $\Phi(2n) = 2\Phi(n)$ nếu n chẵn

b) $\Phi(2n) = \Phi(n)$ nếu n lẻ

7.16. Cho $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $d = \gcd(m, n)$. Chứng minh $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)\dfrac{d}{\Phi(d)}$.

Tài liệu tham khảo

[1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. phiên bản 6. Pearson, 2022. 755 trang.

[3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.

[4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.

[5] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. phiên bản 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.

[6] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. phiên bản 3. Brooks/-Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.

[7] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. phiên bản 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.

[8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.