Mục lục

I Cơ sở của Toán rời rạc 1

1 Nguyên lý đếm cơ bản 2

1.1 Quy tắc cộng, nhân . . . 2
1.2 Biểu đồ cây . . . 9
1.3 Hoán vị, chỉnh hợp . . . 10
1.4 Tổ hợp . . . 15
1.5 Hoán vị lặp . . . 22
1.6 Tổ hợp lặp . . . 27
1.7 Sinh các hoán vị và tổ hợp . . . 31
1.8 Số Catalan . . . 34
1.9 Tóm tắt . . . 34

2 Nguyên lý cơ bản của logic 47

2.1 Phép toán cơ bản và bảng chân lý . . . 47
2.2 Tương đương logic: luật logic . . . 52
2.3 Kéo theo logic: quy tắc suy luận . . . 58
2.4 Lượng từ: tình huống sử dụng . . . 64
2.5 Các lượng từ, định nghĩa, và chứng minh định lý . . . 71
2.6 Tóm tắt . . . 74

3 Lý thuyết tập hợp 76

3.1 Tập và tập con . . . 76
3.2 Phép toán tập hợp và quy luật . . . 85
3.3 Phép đếm và biểu đồ Venn . . . 94
3.4 Tóm tắt . . . 97

4 Tính chất của số nguyên: quy nạp toán học 100

4.1 Nguyên lý sắp tốt: quy nạp toán học . . . 100
4.2 Định nghĩa đệ quy . . . 112
4.3 Thuật toán chia: số nguyên tố . . . 119

4.4 Ước chung lớn nhất: thuật toán Euclid . . . 123
4.5 Định lý cơ bản của số học . . . 129
4.6 Biểu diễn số nguyên và thuật toán . . . 133
4.7 Tóm tắt . . . 139

5 Quan hệ: hàm 142
5.1 Tích Descartes và quan hệ . . . 142
5.2 Biểu diễn quan hệ . . . 148
5.3 Hàm: đơn ánh . . . 149
5.4 Toàn ánh: số Stirling loại II . . . 159
5.5 Hàm đặc biệt . . . 164
5.6 Nguyên lý chuồng bồ câu . . . 168
5.7 Hàm hợp và hàm ngược . . . 171
5.8 Độ phức tạp tính toán . . . 179
5.9 Phân tích thuật toán . . . 183

6 Quan hệ: hướng tiếp cận thứ hai 187
6.1 Quan hệ: thuộc tính và phép toán . . . 187
6.2 Kiểm tra thuộc tính của quan hệ . . . 195
6.3 Thứ tự bộ phận: biểu đồ Hasse . . . 199
6.4 Quan hệ tương đương và phân hoạch . . . 205
6.5 Bao đóng của quan hệ . . . 207

II Các phép đếm nâng cao 211

7 Nguyên lý bù trừ 212
7.1 Nguyên lý bù trừ . . . 212
7.2 Nguyên lý bù trừ tổng quát . . . 220
7.3 Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí . . . 221
7.4 Đa thức rook . . . 221
7.5 Sắp xếp có vị trí bị cấm . . . 221
7.6 Tóm tắt . . . 221
7.7 Bài tập bổ sung . . . 221

8 Hàm sinh 222
8.1 Ví dụ mở đầu . . . 223
8.2 Định nghĩa và ví dụ: kỹ thuật tính . . . 227
8.3 Phân hoạch số nguyên . . . 241
8.4 Hàm sinh mũ . . . 245

8.5 Toán tử tổng 250

9 Hệ thức đệ quy 246

9.1 Hệ thức đệ quy tuyến tính cấp một 247

9.2 Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất cấp cao hệ số hằng 256

9.3 Hệ thức đệ quy không thuần nhất 265

9.4 Phương pháp hàm sinh 266

9.5 Hệ thức đệ quy phi tuyến đặc biệt 270

9.6 Thuật toán chia để trị 271

III Lý thuyết đồ thị và ứng dụng 278

10 Mở đầu về lý thuyết đồ thị 279

10.1 Định nghĩa và ví dụ 279

10.2 Đồ thị con, phần bù và đẳng cấu đồ thị 280

10.3 Bậc của đỉnh: đường và chu trình Euler 281

10.4 Đồ thị phẳng 284

10.5 Đường và chu trình Hamilton 285

10.6 Tô màu đồ thị và đa thức sắc độ 286

11 Cây 287

11.1 Định nghĩa, tính chất, và ví dụ 287

11.2 Cây có gốc 288

11.3 Cây và sắp xếp 293

11.4 Cây có trọng số và mã tiền tố 293

11.5 Các thành phần liên thông và điểm nối 298

12 Tối ưu và tìm kiếm 299

12.1 Thuật toán đường đi ngắn nhất Dijkstra 299

12.2 Cây bao trùm nhỏ nhất: thuật toán Kruskal, Prim 299

12.3 Mạng vận tải: định lý Max-Flow Min-Cut 299

12.4 Lý thuyết tìm kiếm 299

IV Đại số hiện đại ứng dụng 300

13 Vành và số học đồng dư 301

13.1 Cấu trúc vành: định nghĩa và ví dụ 301

13.2 Tính chất vành và vành con 307

13.3 Vành các số nguyên modulo n 309

13.4 Đồng cấu và đẳng cấu nhóm, vành 315

13.5 Định lý phần dư Trung Quốc 316
13.6 Mã hóa khóa công khai: Giới thiệu 319
13.7 Mã hóa khóa công khai: Phương pháp Rabin 321
13.8 Mã hóa khóa công khai: RSA 326

13 Nhóm, lý thuyết mã, và phương pháp liệt kê Polya **300**
13.1 Định nghĩa, ví dụ, và tính chất cơ bản 300
13.2 Đồng cấu, đẳng cấu, và nhóm cyclic 301
13.3 Lớp kề và định lý Lagrange 302
13.4 Sơ lược về lý thuyết mã 302
13.5 Khoảng cách Hamming 302
13.6 Ma trận sinh và kiểm tra chẵn lẻ 302
13.7 Nhóm các mã: giải mã với coset leaders 303
13.8 Ma trận Hamming 303
13.9 Phép đếm và sự tương đương: định lý Burnside 303
13.10Chỉ số chu trình 306
13.11Định lý liệt kê Polya 306

14 Trường hữu hạn và thiết kế tổ hợp **308**

Chương 8

Hàm sinh

8.1 Ví dụ mở đầu 223
8.2 Định nghĩa và ví dụ: kỹ thuật tính 227
8.3 Phân hoạch số nguyên 241
8.4 Hàm sinh mũ 245
8.5 Toán tử tổng 250

Trong chương này và chương sau, ta tiếp tục nghiên cứu phép liệt kê. Cùng với đó, ta cũng sẽ tính toán với các biểu thức chứa biến bất định, còn gọi là biểu thức symbolic. Trong Python, ta dùng thư viện `sympy`, với khai báo:

```
from sympy import *
```

trong đó dấu $*$ ngụ ý nạp toàn bộ lệnh, hàm có trong thư viện này.

Các cú pháp khai báo biến và hàm:

Lệnh	**Ý nghĩa**
`x = symbols('x')`	khai báo biến bất định x
`x = symbols('x', integer=True)`	x là biến nguyên. Thay `integer` thành `real` để chỉ biến thực
`x = symbols('x', positive=True)`	$x > 0$
`x, y = symbols('x y')`	khai báo nhiều biến
`f = symbols('f', cls=Function)`	khai báo hàm f

Tiếp theo, ta cần nắm được quy cách dùng phương thức `method` cho một đối tượng `object`:

```
object.method(parameter 1, parameter 2)
```

trong đó `parameter 1`, `parameter 2`,... là các tham số. Đối với biểu thức `expr`, có một số phương thức sau:

Lệnh	**Kết quả, ý nghĩa**
`expr.doit()`	thực hiện tính toán biểu thức
`expr.simplify()`	rút gọn biểu thức
`expr.cancel()`	rút gọn biểu thức (thường với phân thức)
`expr.expand()`	khai triển biểu thức (thường với đa thức)
`expr.factor()`	phân tích biểu thức thành thừa số
`expr.subs(X, Y)`	thay biểu thức con X xuất hiện trong `expr` thành Y
`expr.diff()`	đạo hàm cấp một theo biến duy nhất trong `expr`
`expr.diff(x)`	đạo hàm cấp một của biểu thức theo biến x
`expr.diff(x, 5)`	đạo hàm cấp 5
`expr.series(x, X, 5)`	khai trên Taylor của biểu thức theo biến x, tâm tại X, tới cấp 4
`Sum( expr, (i, a, b) )`	$\sum_{i=a}^{b} expr$
`expr.apart()`	phân tích phân thức `expr` thành tổng các phân thức đơn giản
`expr.coeff(X)`	hệ số của biểu thức con `X` trong `expr`
`expr.args`	các tham số, thành phần `expr`. Trong chương này, chỉ dùng với `expr` là biểu thức rẽ nhánh.

Các ký hiệu, lệnh, hàm hay dùng

Lệnh	**Kết quả, ý nghĩa**
`factorial(n)`	$n!$
`binomial(n, r)`	$\binom{n}{r}$
`oo`	$+\infty$
`_`	(dấu gạch chân) biến lưu kết quả gần đây nhất
quit	thoát tất cả phiên làm việc trước đó

8.1 Ví dụ mở đầu

Xét bài toán tổ hợp lặp sau. Chia 12 vật giống nhau cho ba người A, B, C. Gọi c_1, c_2, c_3 là số vật mỗi người A, B, C nhận được. Khi đó, mỗi cách chia tương ứng 1–1 với một nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$c_1 + c_2 + c_3 = 12.$$

Trong Phần 1.6, ta biết số nghiệm đó là $\binom{3+12-1}{12} = 91.$

Nếu ta ràng buộc số vật nhận được của từng người, chẳng hạn

Tình huống 1) A được ít nhất 4 vật, B và C có ít nhất 2 vật, nhưng C không quá 5 vật?

Khi đó $c_1 \geq 4$, $c_2 \geq 2$, $2 \leq c_3 \leq 5$, và ta sử dụng kiến thức đếm ở **??**.

Ta tìm được 14 các cách chia, cụ thể như sau

A	B	C	A	B	C
4	3	5	6	2	4
4	4	4	6	3	3
4	5	3	6	4	2
4	6	2	7	2	3
5	2	5	7	3	2
5	3	4	8	2	2
5	4	3			
5	5	2			

Tình huống 2) Nếu mỗi người đều nhận được ít nhất 2 vật, và không quá 5 vật, tức là $2 \leq c_i \leq 5$, tức là $2 \leq c_1, c_2, c_3 \leq 5$, thì ta có thể đếm bằng nguyên lý bù trừ.

Tình huống 3) A nhận được một số chẵn vật, tức là c_1 chẵn, hay $c_1 \in \{0, 2, 4, \ldots, 12\}$. Khi đó ta chia thành nhiều trường hợp, và áp dụng nguyên lý cộng.

Như vậy, các tình huống lại yêu cầu sử dụng các loại kiến thức đếm khác nhau. Một trong các ứng dụng của hàm sinh là giải bài toán này một cách linh hoạt, với các ràng buộc khá phong phú.

Với bài toán ban đầu, chia 12 vật cho ba người, xét hàm

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{12})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{12})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{12})$$

trong đó

- mỗi nhân tử $1 + x + x^2 + \cdots + x^{12}$ mô tả các cách nhận vật của từng người;
- trong mỗi nhân tử, số hạng có dạng $1 \cdot x^k$ nói rằng có 1 cách cho hành vi riêng lẻ, là người A (hoặc B, C) nhận k vật.

Ta thấy, theo tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng trong $f(x)$, mỗi cách chia 12 vật cho ba người tương ứng với một số hạng $x^{c_1}c^{c_2}x^{c_3}$, trong đó mỗi thừa số lần lượt là một số hạng nào đó trong mỗi nhân tử của $f(x)$, và $c_1 + c_2 + c_3 = 12$. Vì hệ số của mỗi số hạng này đều là 1, nên số cách chia 12 vật cho ba người chính là số các số hạng như vậy, và bằng hệ số của x^{12} trong khai triển rút gọn của $f(x)$.

Mặt khác, trong mỗi nhân tử của $f(x)$, nếu thêm các số hạng x^{13}, x^{14}, ..., thì cũng không ảnh hưởng đến việc tìm hệ số của x^{12}. Do đó, hệ số của x^{12} trong $f(x)$ cũng bằng hệ số của x^{12} trong

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)$$

Rõ ràng, việc tìm hệ số của x^{12} trong $g(x)$ dễ hơn là tìm trong $f(x)$. Thật vậy

$$g(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = [1 + (-1)x]^{-3},$$

và trong phần lý thuyết dưới đây, ta chỉ ra rằng hệ số của x^{12} trong khai triển của $g(x)$ là

$$(-1)^{12}\binom{-3}{12} = \binom{3+12-1}{12}.$$

Ở đây, $f(x)$, hay $g(x)$ đều gọi là hàm sinh của các cách chia 12 vật cho ba người.

Trong ba tình huống tiếp theo, ta cũng quy về bài toán tìm hệ số của x^{12} trong hàm sinh $f(x)$ tương ứng.

Tình huống 1)

$$f(x) = (x^4 + x^5 + \cdots + x^{12})(x^2 + x^3 + \cdots + x^{12})(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$

hoặc

$$f(x) = (x^4 + x^5 + \cdots)(x^2 + x^3 + \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5).$$

Tình huống 2) $f(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$.

Tình huống 3) Với bài toán ban đầu, chia 12 vật cho ba người, xét hàm

$$f(x) = (x^0 + x^2 + x^4 \cdots + x^{12})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{12})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{12})$$

hoặc

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots).$$

Ví dụ 8.1. Cho bốn loại bi với các màu đen, trắng, xanh, đỏ; mỗi loại ít nhất 24 viên. Lập hàm sinh các cách chọn 24 viên từ chúng sao cho có một số chẵn bi trắng và ít nhất sáu bi đen.

Giải. Nhân tử mô tả cho việc chọn mỗi loại bi như sau

1) trắng: $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{24}$, trong đó số hạng đầu 1 ngụ ý $1x^0$, vì 0 là số chẵn, và vì vậy có một khả năng để ta không chọn bi trắng.

2) đen: $x^6 + x^7 + x^8 + \cdots + x^{24}$.

3) xanh (và đỏ): $1 + x + x^2 + \cdots + x^{24}$.

Do đó, hàm sinh của các cách lấy 24 bi thỏa mãn các ràng buộc như vậy là

$$f(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{24})(x^6 + x^7 + \cdots + x^{24})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{24})^2.$$

Và như vậy, để tìm số cách lấy 24 bi theo điều kiện đã cho, ta tìm hệ số của x^{24} trong khai triển của $f(x)$, hoặc trong

$$g(x) = (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(x^6 + x^7 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)^2.$$

□

Bài tập 8.1

8.1. Lập hàm sinh, dạng đa thức và cả chuỗi lũy thừa nếu có thể, của bài toán đếm số nghiệm nguyên

a) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20,\ 1 \leq c_i \leq 7,\ \forall(1 \leq i \leq 4)$

b) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20,\ c_i \geq 0,\ \forall(1 \leq i \leq 4)$, c_2 và c_3 chẵn

c) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 30,\ 3 \leq c_i \leq 8,\ \forall(2 \leq i \leq 5),\ 2 \leq c_1 \leq 4$

d) $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 30,\ c_i \geq 0,\ \forall(1 \leq i \leq 5)$, c_2 chẵn và c_3 lẻ

8.2. Lập hàm sinh các cách chia 35 đồng xu cho 5 người trong các trường hợp

a) không có ràng buộc.

b) mỗi người nhận ít nhất một đồng xu.

c) mỗi người được ít nhất hai đồng xu.

d) một người lớn tuổi nhất nhận ít nhất 10 đồng xu.

e) hai người trẻ nhất được đều được ít nhất 10 đồng xu.

8.3. a) Tìm hàm sinh các cách lấy 10 chiếc kẹo từ 6 loại kẹo khác nhau, nhiều tùy ý.

b) Tìm hàm sinh các cách chọn r vật, có lặp, từ n vật khác nhau.

8.4. Cho ba xấp tiền, nhiều tùy ý, mệnh giá 1, 2, 5 ngàn đồng. Tìm hàm sinh các cách chọn n ngàn đồng, $n = 0, 1, 2, ...,$ từ các loại tiền này.

8.5. Tìm hàm sinh số nghiệm nguyên của phương trình $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ trong đó $c_1, c_2 \geq -3$, $-5 \leq c_3 \leq 5$, và $c_4 \geq 0$.

8.2 Định nghĩa và ví dụ: kỹ thuật tính

Định nghĩa 8.1. *Hàm sinh dãy số thực $a_0, a_1, a_2, \ldots$ là*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i. \tag{8.1}$$

Hàm sinh chính là khai triển Maclaurin của $f(x)$, và $a_i = \dfrac{f^{(i)}(0)}{i!}$. Ở đây ta không đề cập đến tính hội tụ của chuỗi.

Trong các bài toán đếm, a_i là số cách chọn i vật thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Trong chương này, ta hay gặp khai triển sau.

Với $n \in \mathbb{R}$, hàm $(1+x)^n$ có khai triển Maclaurin

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r = 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r \\ &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots\end{aligned} \tag{8.2}$$

là hàm sinh dãy $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$

Để khai triển vế trái

```
f = (1 + x)**n
f.series(x, 0, 4)   # 1 + nx + nx^2(n-1)/2 + nx^3(n-2)(n-1)/6 + O(x^4)
```

Để tính vế phải thành hàm sơ cấp

```
f = Sum( binomial(n, i) * x**i, (i, 0 ,oo) )
f                   # xem biểu thức của f
f.doit()            # tính f, chọn kết quả ‘‘phù hợp’’, tức là nhánh
    hội tụ:
```

$$\begin{cases}(x+1)^n & \text{for } \left(\operatorname{re}(n) \leq -1 \wedge |x| < 1\right) \vee \left(|x| \leq 1 \wedge \operatorname{re}(n) > 0\right) \vee \left(\operatorname{re}(n) \leq 0 \wedge |x| \leq 1 \wedge \ldots\right) \\ \sum_{i=0}^{n} x^i\binom{n}{i} & \text{otherwise}\end{cases}$$

Trong các hệ số $\binom{n}{r}$, ta để ý trường hợp $n \in \mathbb{Z}^-$. Với $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned}\binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} = \frac{(-1)^r n(n+1)\dots(n+r-1)}{r!} \\ &= (-1)^r\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Đặc biệt $\binom{-1}{r} = (-1)^r$.

Ví dụ 8.2. Với $n, m \in \mathbb{Z}^+$, tìm dãy sinh bởi

a) $(1+x)^n$

b) $(1+ax)^n$

c) $(1+x^m)^n$

d) $\dfrac{1}{1-x}$

e) $\dfrac{1}{1-ax}$

f) $\dfrac{1}{1-x^m}$

Giải. a) Nếu $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $\binom{n}{r} = 0,\ \forall r > n$. Khi đó

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{k}x^r = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

là hàm sinh dãy $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0, \dots$

Thay vai trò x bởi ax hoặc x^m, ta có

b) $(1+ax)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}ax + \binom{n}{2}a^2x^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^nx^n$, và

c) $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + \binom{n}{n}x^{mn}$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= [1+(-x)]^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-1}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r(-x)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}x^r = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\end{aligned}$$

Thay vai trò x bởi ax hoặc x^m, được

e) $\dfrac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots$, và

f) $\dfrac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \cdots$

□

Ví dụ 8.3. Với $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

là hàm sinh của dãy $\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{n+1}, 0, 0, 0, \ldots$

```
Sum(x**i, (i, 0, n)).doit()   #
```

$$\begin{cases} n + 1 & \text{for } x = 1 \\ \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ví dụ 8.4. Hàm

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 3x}} = (1 + 3x)^{-1/3} &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1/3)(-1/3 - 1)(-1/3 - 2) \ldots (-1/3 - r + 1)}{r!}(3x)^r \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3r - 2)}{r!} x^r \end{aligned}$$

sinh dãy $1, -1, \frac{1 \cdot 4}{2!}, -\frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3!}, \ldots, (-1)^r \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3r - 2)}{r!}, \ldots$

Ví dụ 8.5. Tìm hệ số của x^5 trong hàm sinh $(1 - 2x)^{-7}$.

Giải. Ta có $(1 - 2x)^{-7} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-7}{r} (-2x)^r$. Suy ra hệ số của x^5 là $\binom{-7}{5}(-2)^5 = 14\,784$. □

Mỗi dòng lệnh sau đều cho ta kết quả này

```
binomial(-7, 5) * (-2)**5
((1 - 2*x)**-7).series(x, 0, 6)
((1 - 2*x)**-7).series(x, 0, 6).coeff(x**5)
((1 - 2*x)**-7).diff(x, 5).subs(x, 0) / factorial(5)   #
```

$$a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}$$

Ví dụ 8.6. Xác định hệ số của x^8 trong $f(x) = \dfrac{1}{(x - 3)(x - 2)^2}$.

Giải. Ta có

$$f(x) = -\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{4}(1 - \frac{x}{2})^{-2} - \frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{x}{3}},$$

nên hệ số của x^8 trong $f(x)$ là

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^8-\frac{1}{4}\binom{-2}{8}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^8-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{3}\Big)^8=-\frac{7}{2^{10}}-\frac{1}{3^9}.$$

□

```
f = 1 / (x - 3) / (x - 2)**2
f.apart()
Rational(1, 2) * Rational(1, 2)**8 - Rational(1, 4) *
    binomial(-2, 8) * Rational(-1, 2)**8 - Rational(1, 3) *
     Rational(1, 3)**8
```

hoặc có thể chỉ cần dùng lệnh

```
f.series(x, 0, 9)
```

Ví dụ 8.7. Xác định hệ số của x^{15} trong $f(x)=(x^2+x^3+x^4+\cdots)^4$.

Giải. Ta có

$$f(x)=[x^2(1+x+x^2+\cdots)]^4=\Big(x^2\frac{1}{1-x}\Big)^4=x^8(1-x)^{-4},$$

nên hệ số của x^{15} trong $f(x)$ là hệ số của x^7 trong $(1-x)^{-4}$, và bằng $\binom{-4}{7}(-1)^7=120$. □

```
f = Sum(x**i, (i, 2, oo))**4
f.doit()             # \begin{cases} \frac{x^8}{(1-x)^4} & \text{for } |x| < 1 \\ \left(\sum_{i=2}^{\infty} x^i\right)^4 & \text{otherwise} \end{cases}
f = _.args[0][0]     # lấy nhánh hội tụ: nhánh thứ nhất, phần giá trị
f.series(x, 0, 16)
```

Tổng quát, với $n\in\mathbb{N}$, hệ số của x^n trong $f(x)$: (a) là 0, khi $0\le n\le 7$, và (b) khi $n\ge 8$, là hệ số của x^{n-8} trong $(1-x)^{-4}$

$$\binom{-4}{n-8}(-1)^{n-8}=(-1)^{n-8}\binom{4+(n-8)-1}{n-8}(-1)^{n-8}=\binom{n-5}{n-8}.$$

Tính toán như vậy là khá đầy đủ. Giờ ta xét các ví dụ ứng dụng, bắt đầu với các bài toán về tổ hợp lặp.

Ví dụ 8.8. Có bao nhiêu cách chọn r vật, có lặp, từ n vật?

Giải. Việc chọn mỗi vật được mô tả bằng nhân tử $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Do đó, các cách chọn r vật có lặp từ n vật, $r = 0, 1, 2, ...$, có hàm sinh

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^n.$$

Ta cần tìm hệ số của x^r trong $f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$, đó là

$$\binom{-n}{r}(-1)^r = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}(-1)^r = \binom{n+r-1}{r}.$$

□

Ví dụ 8.9. Có bao nhiêu cách chia 24 vật cho bốn người sao cho mỗi người nhận được ít nhất ba vật, nhưng không quá tám vật?

Giải. Số vật chia cho mỗi người được mô tả bằng nhân tử $x^3 + x^4 + \cdots + x^8$, nên các cách chia n vật cho bốn người, $n = 0, 1, 2, ...$, có hàm sinh

$$f(x) = (x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4.$$

Ta cần tìm hệ số của x^{24} trong $f(x)$, với

$$\begin{aligned} f(x) &= [x^3(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)]^4 = x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^{-4} \\ &= x^{12}\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-x^6)^i \times \sum_{i=0}^{\infty}\binom{-4}{i}(-x)^i, \end{aligned}$$

tức là hệ số của x^{12} trong tích hai biểu thức tổng của $f(x)$, và bằng

$$\sum_{i,j\geq 0,\ 6i+j=12}\binom{4}{i}(-1)^i \times \binom{-4}{j}(-1)^j = \sum_{0\leq i\leq 2,\ j=12-6i}\binom{4}{i}(-1)^i \times \binom{4+j-1}{j} = 125.$$

□

```
f = Sum(x**i, (i, 3, 8))**4
# Cách 1: cần đổi tổ hợp sang tham tham số dương để tính không lỗi
Sum( binomial(4, i) * (-1)**i * binomial(4+j-1, j).subs(j,
    12-6*i) , (i, 0, 2) ).doit()
# Cách 2
f.doit().series(x, 0, 25)
# Cách 3
f.doit().expand().coeff(x**24)
```

Ví dụ 8.10. Có bao nhiêu tập con bốn phần tử của tập $S = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ không có hai số nguyên liên tiếp.

Giải.

$$1 \underbrace{\quad \le \quad}_{c_1} a_1 \underbrace{\quad < \quad}_{c_2} a_2 \underbrace{\quad < \quad}_{c_3} a_3 \underbrace{\quad < \quad}_{c_4} a_4 \underbrace{\quad \le \quad}_{c_5} 15$$

Ký hiệu bốn số chọn được $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \le 15$. Đặt $c_1 = a_1 - 1, c_2 = a_2 - a_1, c_3 = a_3 - a_2, c_4 = a_4 - a_3$ và $c_5 = 15 - a_4$, ta có điều kiện tương đương $c_1, c_5 \ge 0$, $c_2, c_3, c_3 \ge 2$, và $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 14$.

Hàm sinh khi chọn mỗi c_1, c_5 là $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, và khi chọn mỗi c_2, c_3, c_4 là $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$. Do đó hàm sinh của tổng năm số này là

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2 (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = \frac{x^6}{(1-x)^5},$$

và ta cần tìm hệ số của x^{14} trong $f(x)$, hay hệ số của x^8 trong $(1-x)^{-5}$. Đó là $\binom{-5}{8}(-1)^8 = 495$. □

```
f = Sum(x**i, (i, 0, oo))**2 * Sum(x**i, (i, 2, oo))**3
f.doit().simplify()
f = _.args[0][0]
binomial(-5, 8) * (-1)**8   # cách 1
f.series(x, 0, 15)          # cách 2
```

Tiếp theo là hai ví dụ về tổng riêng. Nhắc lại, một tổng riêng của số nguyên dương n là một cách viết n thành tổng của một dãy số nguyên dương –có tính đến thứ tự các số trong dãy.

Ví dụ 8.11. Có bao nhiêu tổng riêng của số nguyên dương n?

Giải. Xét mỗi trường hợp cụ thể, tổng riêng của n gồm i số, với $i = 1, 2, \ldots$ Ta chọn i số nguyên dương, mà mỗi lần chọn được mô tả bằng nhân tử $x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{x}{1-x}$, nên sau i lần chọn, số cách để được tổng bằng n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, có hàm sinh

$$f_i(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)^i.$$

Trong mỗi trường hợp này, ta cần tìm hệ số của x^n trong $f_i(x)$. Theo quy tắc cộng, ta cần tìm tổng các hệ số của x^n trong các hàm $f_i(x)$ với $i = 1, 2, \ldots$, tức là hệ số của x^n trong hàm

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i = \frac{x}{1-2x} = x\frac{1}{1-2x}$$
$$= x[1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots] = 2^0x + 2^1x^2 + 2^2x^3 + 2^3x^4 + \cdots$$

và đó là 2^{n-1}.

Chẳng hạn, các tổng riêng của $n = 4$ được trình bày trong bảng sau

i	Hàm sinh $f_i(x)$	Số hạng chứa x^4	Tổng riêng
1	$x + x^2 + x^3 + \cdots$	x^4	4
2	$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^2$	x^1x^3, x^2x^2, x^3x^1	$1 + 3, 2 + 2, 3 + 1$
3	$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$	$x^1x^1x^2, x^1x^2x^1, x^2x^1x^1$	$1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1$
4	$(x + x^2 + x^3 + \cdots)^4$	$x^1x^1x^1x^1$	$1 + 1 + 1 + 1$

□

```
fi = Sum(x**k, (k, 1, oo))**i
fi.doit()                                  #
```

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i & \text{for } |x| < 1 \\ \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)^i & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
fi = _.args[0][0]
Sum(fi, (i, 1, oo)).doit().simplify()   #
```

$$\begin{cases} -\frac{x}{2x-1} & \text{for } \left|\frac{x}{x-1}\right| < 1 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^i & \text{otherwise} \end{cases}$$

Một tổng riêng của gọi là đối xứng, nếu đọc từ trái sang phải hay từ phải sang trái đều như nhau.

Ví dụ 8.12. a) Liệt kê các tổng riêng đối xứng cho $n = 6$ và $n = 7$.

b) Có bao nhiêu tổng riêng đối xứng của $n \in \mathbb{Z}^+$?

Giải. a)

	$n = 6$	$n = 7$
1)	6	7
2)	$1 + 4 + 1$	$1 + 5 + 1$
3)	$2 + 2 + 2$	$2 + 3 + 2$
4)	$1 + 1 + 2 + 1 + 1$	$1 + 1 + 3 + 1 + 1$
5)	$3 + 3$	$3 + 1 + 3$
6)	$1 + 2 + 2 + 1$	$1 + 2 + 1 + 2 + 1$
7)	$2 + 1 + 1 + 2$	$2 + 1 + 1 + 1 + 2$
8)	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

b) Với tổng riêng có một số lẻ các số, ta gọi số chính giữa là *tâm*.

1) Nếu $n = 2k + 1$, với $k \in \mathbb{Z}^+$, tổng riêng đối xứng phải có một số lẻ các số, và tâm cũng là số lẻ, đặt là $2i + 1$, với $i = \overline{0, k}$. Nếu tâm là n, ứng với $i = k$, ta có một tổng riêng là n. Nếu $0 \leq i \leq k - 1$, thì mỗi bên của tâm là các tổng riêng của $\dfrac{n-(2i+1)}{2} = \dfrac{(2k+1)-(2i+1)}{2} = k - i$. Theo Ví dụ 8.11, số tổng riêng này là $2^{(k-i)-1}$. Theo quy tắc cộng, số tổng riêng đối xứng của n là

$$1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{k-i-1} = 2^k.$$

2) Nếu $n = 2k$, với $k \in \mathbb{Z}^+$. Xét hai khả năng:

i) Nếu tổng riêng có tâm, thì tâm là số chẵn, ký hiệu $2i$, với $i = \overline{1, k}$. Nếu tâm là n, ứng với $i = k$, ta có một tổng riêng. Nếu $1 \leq i \leq k - 1$, thì mỗi bên của tâm là các tổng riêng của $\dfrac{n-2i}{2} = \dfrac{2k-2i}{2} = k - i$, với $2^{(k-i)-1}$ tổng riêng. Số tổng riêng có tâm của n là

$$1 + \sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-i-1} = 2^{k-1}.$$

ii) Nếu tổng riêng không có tâm, thì mỗi bên là các tổng riêng của k, với 2^{k-1} tổng riêng.

Do đó số tổng riêng của $n = 2k$ là $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$.

Tổng quát, n có $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ tổng riêng đối xứng.

□

```
( 1 + Sum(2**(k-i-1), (i, 0, k-1)) ).doit().simplify()   #
```
2^k

```
( 1 + Sum(2**(k-i-1), (i, 1, k-1)) ).doit().simplify()   #
```
2^{k-1}

Cho $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$, và hằng số k. Khi đó

a) $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$.

b) $kf(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (ka_i) x^i$.

c) $f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$, trong đó $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots +$

$a_i b_0$, với $i \in \mathbb{N}$. Dãy (c_i) gọi tích chập của hai dãy (a_i) và (b_i).

Ví dụ 8.13. Tìm hàm sinh dãy

a) 1, 1, 0, 1, 1,...

b) 1, 1, 1, 3, 1, 1,...

Giải. a) Hàm sinh dãy 1, 1, 0, 1, 1,... là

$$f(x) = 1 + x + 0x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots) - x^2.$$

Trong Ví dụ 8.2, ta đã biết $1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, nên

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - x^2.$$

b) Hàm sinh dãy 1, 1, 1, 3, 1, 1,... là

$$f(x) = 1+x+x^2+3x^3+x^4+x^5+\cdots = (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots)+2x^3 = \frac{1}{1-x}+2x^3.$$

□

Tính toán bằng Python cho ý (a):

```
f = 1+x+0*x**2 + Sum(x**i, (i,3,oo))
f.doit().simplify()   #
```

$$\begin{cases} \frac{-x^3+(x-1)(x+1)}{x-1} & \text{for } |x| < 1 \\ x + \sum_{i=3}^{\infty} x^i + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
f = _.args[0][0]
f.apart()
```

Một số phép toán tuyến tính đối với $f(x)$, chẳng hạn đạo hàm và tích phân, được tính bằng cách thực hiện phép toán đó cho mọi số hạng của tổng.

Ví dụ 8.14. Với $n \in \mathbb{N}$, tìm hàm sinh của dãy $0^n, 1^n, 2^n, \ldots$ Ở đây quy ước $0^0 = 1$.

Giải. Cần tính

$$f_n(x) = 0^n + 1^n x + 2^n x^2 + 3^n x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} i^n x^i.$$

Ta có $f_n'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^{n+1} x^{i-1}$, suy ra

$$x f_n'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i^{n+1} x^i = f_{n+1}(x),$$

trong đó $f_0(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.

```
s = Sum(i**k * x**i, (i, 0, oo) )
diff(s, x)                              # $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i\, i^k x^i}{x}$
(x * diff(s, x)).simplify()             # $\sum_{i=0}^{\infty} i^{n+1} x^i$
```

Một số hàm đầu tiên của dãy hàm này

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= xf_0'(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = 0 + 1x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots \\
f_2(x) &= xf_1'(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} = 0^2 + 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \cdots \\
f_3(x) &= xf_2'(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4} = 0^3 + 1^3x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + \cdots \\
f_4(x) &= xf_3'(x) = \frac{x^4 + 11x^3 + 11x^2 + x}{(1-x)^5} = 0^4 + 1^4x + 2^4x^2 + 3^4x^3 + \cdots \\
f_5(x) &= xf_4'(x) = \frac{x^5 + 26x^4 + 66x^3 + 26x^2 + x}{(1-x)^6} = 0^4 + 1^4x + 2^4x^2 + 3^4x^3 + \cdots \\
f_6(x) &= xf_5'(x) = \frac{x^6 + 57x^5 + 302x^4 + 302x^3 + 57x^2 + x}{(1-x)^7} = 0^5 + 1^5x + 2^5x^2 + 3^5x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

```
f = 1 / (1-x)
for k in range(1, 7):                         # tránh dùng biến bất định n hay i
    f = x * diff(f).cancel().factor()
    display(f, ((1-x)**(k+1) * f).expand())   # mẫu số của $f_k(x)$ là $(1-x)^{k+1}$
```

□

Sử dụng kỹ thuật đạo hàm của chuỗi giúp ta tính được dãy hàm $f_n(x)$ với tốc độ nhanh hơn nhiều so với việc dùng lệnh tính trực tiếp. Chẳng hạn, để tính $f_{10}(x)$, lệnh sau chạy mất 2 phút.

```
s.subs(k,10).doit()
```

Các hệ số của trong tử số của $f_n(x)$ gọi là các số Euler.

Ví dụ 8.15. Sử dụng kết quả của Ví dụ 8.14, hàm sinh của dãy $a_i = i^2 + i$, với $i \geq 0$, cụ thể, dãy 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42,... là

$$f_2(x) + f_1(x) = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

```
( (x**2+x)/(1-x)**3 + x/(1-x)**2 ).simplify()      # hoặc tính trực tiếp:
Sum( (i**2+i)* x**i, (i,0,oo) ).doit().simplify()  #
```

$$\begin{cases} -\frac{2x}{(x-1)^3} & \text{for } |x| < 1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} ix^i(i+1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ví dụ 8.16. Với $f(x) = \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots$ và $g(x) = \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$, ta có

$$f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

Do đó, dãy 1, 0, 1, 0, 1, 0, . . . là tích chập của hai dãy 1, 1, 1,. . . và 1, −1, 1, −1, ...

Ví dụ 8.17. Chứng minh $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Giải. Ta có

$$(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2 = \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right]^2,$$

nên hệ số của x^n ở hai vế bằng nhau, tức là

$$\binom{2n}{n} = \sum_{0\le i\le n,\ i+j=n}\binom{n}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2.$$

□

Số Catalan* c_n là số cách tính tích các ma trận $A = A_0A_1A_2\cdots A_n$.
Ta có các cách đặt dấu ngoặc sau A_k, với $k = \overline{0, n-1}$:

$$A = \underbrace{(A_0A_1A_2\ldots A_k)}_{c_k \text{ cách}}\underbrace{(A_{k+1}A_{k+2}\ldots A_n)}_{c_{n-k-1}\text{ cách}} \Rightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n-1}c_kc_{n-k-1},$$

với $c_1 = 1 = c_0^2 \Rightarrow c_0 = 1$.

Ví dụ 8.18 (∗)**.** Dùng hàm sinh và phép tính tích chập để tính số Catalan c_n.

Giải. Xét $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, ta có $[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ với $a_n = \sum_{k=0}^{n}c_kc_{n-k} = c_{n+1}$. Suy ra

$$[f(x)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n = \frac{1}{x}[f(x)-1]$$

*Engène Charles Catalan, 1814-1894, nhà toán học Bỉ

$$\Rightarrow x[f(x)]^2 - f(x) + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Hệ số của x^n trong $f(x)$, tương ứng với mỗi nghiệm, là

$$c_n = \pm\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} = \pm\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}(-4)^{n+1}$$

Ta chọn nghiệm $f(x)$ ứng với dấu $-$ để hệ số này dương. Cuối cùng,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!}2^n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{2^n}{n!(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

□

Bài tập 8.2

8.6. Lập và tính hàm sinh cho dãy sau

a) $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \ldots, \binom{8}{8}$

b) $\binom{8}{1}, 2\binom{8}{2}, 3\binom{8}{3}, \ldots, 8\binom{8}{8}$

c) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

d) $0, 0, 0, 6, -6, 6, -6, \ldots$

e) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$

f) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, \ldots, a \neq 0$

8.7. Xác định dãy sinh bởi các hàm

a) $f(x) = (2x-3)^3$

b) $f(x) = \dfrac{x^4}{1-x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{1+3x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + 3x^7 - 11$

8.8. Cho $f(x)$ là hàm sinh dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$, $g(x)$ là hàm sinh dãy $b_0, b_1, b_2, \ldots$ Biểu diễn $g(x)$ theo $f(x)$ nếu

a) $b_3 = 3; b_n = a_n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 3$

b) $b_3 = 3,\ b_7 = 7; b_n = a_n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 3, 7$

c) $b_1 = 1,\ b_3 = 3; b_n = 2a_n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1, 3$

d) $b_1 = 1,\ b_3 = 3,\ b_7 = 7; b_n = 2a_n + 5,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1, 3, 7$

8.9. Tìm hệ số tự do, hay số hạng là hằng số, trong $\left(3x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15}$.

8.10. Tìm hệ số của x^7 trong

a) $(1 + x + x^2 + \cdots)^{15}$

b) $(1 + x + x^2 + \cdots)^n$

8.11. Tìm hệ số của x^{50} trong $(x^7 + x^8 + x^9 + \cdots)^6$.

8.12. Tìm hệ số của x^{20} trong $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$.

8.13. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm trong $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ hệ số của

a) x^7

b) x^8

c) x^r với $0 \leq r \leq n+2, r \in \mathbb{Z}$

8.14. Tìm hệ số của x^{15} trong

a) $x^3(1 - 2x)^{10}$

b) $\dfrac{x^3 - 5x}{(1 - x)^3}$

c) $\dfrac{(1 + x)^4}{(1 - x)^4}$

8.15. Có bao nhiêu cách phân 24 robot giống nhau cho 4 dây chuyền lắp ráp sao cho

a) mỗi dây chuyền có ít nhất 3 robot.

b) mỗi dây chuyền có từ 3 đến 9 robot.

8.16. Phân đều 3000 phong bì vào các gói, mỗi gói 25 phong bì. Có bao nhiêu cách chia các gói này cho 4 người, để mỗi người được ít nhất 150, nhưng không quá 1000 phong bì?

8.17. Có hai hộp nước ngọt, chứa 24 chai loại I và 24 chai loại II. Có bao nhiêu cách chia 48 chai này cho 5 người để mỗi người nhận

a) ít nhất 2 chai mỗi loại?

b) ít nhất 2 chai loại I và ít nhất 3 chai loại II?

8.18. Có bao nhiêu cách lấy n viên bi từ 3 loại bi xanh, đỏ, và vàng, nhiều tùy ý, biết số bi xanh chọn được là chẵn?

8.19. Tung súc sắc 12 lần. Tìm xác suất để tổng số chấm xuất hiện bằng 30.

8.20. Có mười người góp tiền để tổ chức liên hoan, trong đó có tám người định góp 2, 3, 4, hoặc 5$, và hai người kia định góp 5 hoặc 10$. Tính xác suất để gom được 40$.

8.21. Có bao nhiêu cách chia 2 chiếc bánh mì và 16 xúc xích cho bốn người, sao cho người thứ nhất được ít nhất 1 bánh mì và 3 xúc xích, mỗi người kia nhận ít nhất 2 bánh mì nhiều nhất 5 xúc xích?

8.22. Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ sinh dãy $\binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

8.23. Có bao nhiêu cách chọn 7 số trong tập $\{1, 2, \ldots, 50\}$ không có hai số liên tiếp.

8.24. a) Nếu máy tính sinh ngẫu nhiên một tổng riêng của 8, thì xác suất để tổng riêng đó đối xứng là bao nhiêu?

b) Trả lời ý (a) nếu thay 8 bởi $n \in \mathbb{Z}^+$.

8.25. a) Có bao nhiêu tổng riêng đối xứng của 11 có số đầu là 1? là 2? là 3? là 4?

b) Có bao nhiêu tổng riêng đối xứng của 12 có số đầu là 1? là 2? là 3? là 4?

8.26. Cho $n, a \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$, $a \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Có bao nhiêu tổng riêng đối xứng của n có số hạng đầu là a?

8.27. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$, lẻ. Một tổng riêng đối xứng của n có thể có một số chẵn các số hạng được không?

8.28. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$, chẵn. Có bao nhiêu tổng riêng đối xứng của n có

a) một số chẵn các số hạng?

b) một số lẻ các số hạng?

8.29. Tìm số tổng riêng đối xứng của n, với

a) $n = 10$

b) $n = 12$

c) $n \in \mathbb{Z}^+$, chẵn

8.30. Tung súc sắc. Đặt X là số lần tung đến khi xuất hiện mặt lục. Xác định

a) luật phân bố xác suất của X

b) EX

c) σ_X

8.31. Trong bài trên, tìm xác suất phải tung một số chẵn lần.

8.32. Gọi dãy (c_n) là tích chập của hai dãy (a_n) và (b_n). Tính c_i, $0 \leq i \leq 3$, và công thức tổng quát của c_n nếu

a) $a_n = b_n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = 1, b_n = 2^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

c) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_n = 0, \ \forall n \geq 4$ và $b_n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$

8.33. Tìm tích chập của hai dãy

a) $a_n = 1, 0 \leq n \leq 4; a_n = 0, \ \forall n \geq 5$ và $b_n = n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = b_n = (-1)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

8.3 Phân hoạch số nguyên

Xét bài toán phân hoạch số nguyên dương n thành tổng các số nguyên dương, không quan tâm thứ tự các số hạng. Ký hiệu $p(n)$ là số các phân hoạch như vậy. Chẳng hạn

$p(1) = 1$: 1
$p(2) = 2$: $2 = 1 + 1$
$p(3) = 3$: $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$
$p(4) = 5$: $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$
$p(5) = 7$: $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Ta muốn tính $p(n)$ mà không phải liệt kê mọi phân hoạch. Mỗi số nguyên $1, 2, 3, \dots$ có thể có mặt một hoặc nhiều lần, hoặc không có mặt trong phân hoạch. Giá trị thu được khi chọn chúng được mô tả bằng đa thức $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, $1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$, $1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots, \dots$ Do đó, $p(n)$ là hệ số của x^n trong

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)\cdots \\ &\qquad \cdots(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \cdots) \\ &= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\cdots\frac{1}{1-x^n} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x^i}, \end{aligned}$$

hoặc trong

$$g(x) = \sum_{0\le i\le n} x^i \times \sum_{0\le 2i\le n} x^{2i} \times \sum_{0\le 3i\le n} x^{3i} \times \cdots \times \sum_{0\le ni\le n} x^{ni}.$$

Tổng quát, (1) hệ số của x^r trong $f(x)$ là số phân hoạch, không quan tâm thứ tự, của r mà mỗi số hạng không quá n, và (2) với $0 \le r \le n$, hệ số này là $p(r)$.

Ví dụ 8.19. Có bao nhiêu cách để một đại lý quảng cáo mua n phút ($n \in \mathbb{Z}^+$) phát sóng trên truyền hình, biết khoảng thời gian cho mỗi quảng cáo trên truyền hình là 30, 60, và 120 giây?

Giải. Ký hiệu a, b, c là số các khoảng thời gian 30, 60, 120 giây cần mua. Khi đó $a, b, c \in \mathbb{N}$, và $30a + 60b + 120c = 60n$ hay $a + 2b + 4c = 2n$. Hàm sinh tương ứng là

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + \cdots) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^4},$$

và hệ số của x^{2n}, tức là số phân hoạch của $2n$ thành tổng các số 1, 2, và 4, là số cách cần tìm. □

Xét 11 phân hoạch của 6:

1) $1+1+1+1+1+1$
2) $1+1+1+1+2$
3) $1+1+1+3$
4) $1+1+4$
5) $1+1+2+2$
6) $1+5$
7) $1+2+3$
8) $2+2+2$
9) $2+4$
10) $3+3$
11) 6

Trong các phân hoạch này, ta quan tâm tới các phân hoạch có các số hạng khác nhau, là (6), (7), (9), và (11); và các phân hoạch gồm toàn số lẻ, là (1), (3), (6), và (10).

Ví dụ 8.20. Tìm hàm sinh cho $p_d(n)$, là số phân hoạch của số nguyên dương n thành các số hạng khác nhau.

Giải. Khi tính $p_d(n)$, mỗi $i \in \mathbb{Z}^+$ ta có thể không chọn, hoặc chọn đúng một lần, tương ứng với đa thức $1 + x^i$. Do đó hàm sinh của các phân hoạch này là

$$P_d(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i),$$

và $p_d(n)$ là hệ số của x^n trong $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$. Ta có thể kiểm tra lại $p_d(6) = 4$. $\square$

Ví dụ 8.21. Tìm hàm sinh dãy $p_o(n)$ là số phân hoạch $n \in \mathbb{Z}^+$ thành các số lẻ (quy ước $p_o(0) = 1$).

Giải. Hàm sinh cần tìm

$$\begin{aligned}
P_o(x) &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\left(1+x^7+x^{14}+\cdots\right)\cdots \\
&= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}\cdots = \frac{1-x^2}{1-x}\frac{1-x^4}{1-x^2}\frac{1-x^6}{1-x^3}\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdots \\
&= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = P_d(x).
\end{aligned}$$

Do đó $p_o(n) = p_d(n)$. $\square$

Ví dụ 8.22. Lập hàm sinh cho số phân hoạch lẻ của số nguyên dương n, sao cho mỗi số lẻ hoặc không xuất hiện trong phân hoạch, hoặc có số lần xuất hiện là lẻ. Chẳng hạn

n	Phân hoạch
1	1
2	không có
3	3, $1+1+1$
4	$3+1$

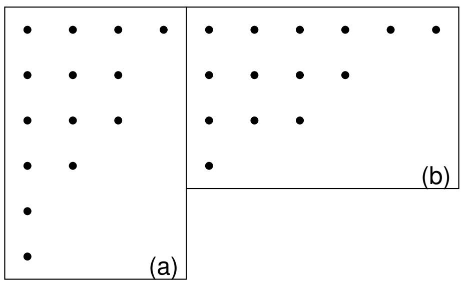
Giải. Việc chọn mỗi số lẻ $2i + 1$, $i \in \mathbb{N}$, được mô tả bằng đa thức $x^0 + x^{2i+1} + x^{3(2i+1)} + x^{5(2i+1)} + \cdots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} x^{(2k+1)(2i+1)}$. Hàm sinh cần tìm là

$$f(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} x^{(2k+1)(2i+1)}\right).$$

□

Một ý tưởng để biểu diễn phân hoạch số nguyên là *biểu đồ Ferrers*, gồm một số hàng, mỗi hàng có các dấu chấm, sao cho số chấm hàng dưới không quá hàng trên. Số chấm trên mỗi hàng ứng với một số hạng của phân hoạch.

Bên dưới hai biểu đồ Ferrers cho hai phân hoạch của 14: (a) 4 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 và (b) 6 + 4 + 3 + 1. Ở đây, hai biểu đồ này là *chuyển vị* của nhau.




```python
def NextPartition(a0):
  a = a0
  k = len(a)
  if a[k-1] > 1:
    a[k-1] -= 1
    a.append(1)
  else:
    i = k-1
    while a[i] == 1: # hết vòng này thì a_i > 1, dãy có dạng a_0 ≥ ... ≥ a_i, 1, 1, ... , 1
      i -= 1
    if a[i] == 2:
      a[i] = 1
      a.append(1)
    else:              # a_i ≥ 3
      a[i] -= 1        # lấy a_i làm cột mốc, dồn các điểm lên trên tới khi chạm mốc này
      a.append(1)      # điểm này mặc định dồn vào hàng i+1
      x = a[i]-1       # số điểm dồn lên tối đa cho mỗi hàng, x ≥ 1
```

```
      j = i+1          # dồn điểm vào hàng này
      r = len(a)-1 -(j+1) + 1  # số hàng dưới hàng j
      while r>=x:
        a[j] = a[i]  # dồn đầy hàng từ x hàng cuối
        del(a[-x:])  # x hàng cuối đã hết
        j += 1
        r = len(a)-1 -(j+1) + 1

      if r>0:          # và đã < x
        a[j] += r      # dồn nốt
        del(a[-r:])  # đã dồn hết
  return a

def Partitions(n):
  c = 1;
  a = [n]
  print(c, a)
  while a[0]>1:
    c += 1
    a = NextPartition(a)
    print(c, a)

Partitions(10)
```

Bài tập 8.3

8.34. Tìm tất cả phân hoạch của 7.

8.35. Tìm hàm sinh của dãy a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, là số phân hoạch n thành tổng

a) các số hạng chẵn

b) các số hạng chẵn khác nhau

c) các số hạng lẻ khác nhau

8.36. Trong $f(x) = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$, hệ số của x^6 là 7. Liệt kê các phân hoạch của 6 được đếm bởi hệ số này.

8.37. Tìm hàm sinh cho số nghiệm nguyên của phương trình

a) $2w + 3x + 5y + 7z = n$; $w, x, y, z \geq 0$

b) $2w + 3x + 5y + 7z = n$; $w \geq 0$, $x, y \geq 4$, $z \geq 5$

8.38. Tìm hàm sinh cho số phân hoạch của số không âm n thành các số hạng sao cho (a) mọi số hạng đều chẵn; và (b) mỗi số hạng xuất hiện một số chẵn lần.

8.39. Tìm hàm sinh số phân hoạch của $n \in \mathbb{N}$ thành các số hạng sao cho (a) mọi số hạng đều ≤ 12; và (b) mỗi số hạng xuất hiện không quá năm lần.

8.40. Chứng minh trong các phân hoạch của số nguyên dương n, số phân hoạch sao cho không có số hạng nào xuất hiện quá hai lần bằng số phân hoạch sao cho không có số hạng nào chia hết cho 3.

8.41. Chứng minh trong các phân hoạch của số nguyên dương n, số phân hoạch sao cho không có số hạng chia hết cho 4 bằng số phân hoạch sao cho không có số hạng chẵn nào lặp lại.

8.42. Dùng biểu đồ Ferrers, chứng minh số phân hoạch số nguyên dương n thành các số hạng không quá m bằng số phân hoạch n thành không quá m số hạng.

8.43. Dùng biểu đồ Ferrers, chứng minh số phân hoạch của n bằng số phân hoạch của $2n$ thành n số hạng.

8.4 Hàm sinh mũ

Định nghĩa 8.2. *Với dãy số thực $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \tag{8.4}$$

gọi là hàm sinh mũ của dãy.

Các hệ số a_i, $i \in \mathbb{N}$, là số cách xắp xếp, có lặp, i vật vào i vị trí.

Ví dụ 8.23. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ là hàm sinh mũ của dãy 1, 1, 1,... (e^x là hàm sinh của dãy $1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \ldots$)

Cho k vật. Hàm sinh mũ của số cách sắp xếp n vật lấy ra từ k vật, có lặp, trong đó vật thứ i lấy tối đa n_i lần, $n = 0, 1, 2, \ldots$, là

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
&= \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_i} \frac{x^j}{j!} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_1}}{n_1!}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_2}}{n_2!}\right) \cdots \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n_k}}{n_k!}\right).
\end{aligned}$$

Ví dụ 8.24. Có bao nhiêu từ có bốn chữ cái lấy ra từ từ ENGINE.

Giải. Đặt a_n là số cách sắp xếp n chữ lấy trong từ ENGINE, $n = 0, 1, 2, ...$ Dãy (a_n) có hàm sinh mũ

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)}_{\text{E}} \underbrace{(1+x)}_{\text{G}} \underbrace{(1+x)}_{\text{I}} \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)}_{\text{N}} \\ &= \frac{x^6}{4} + \frac{3x^5}{2} + \frac{17x^4}{4} + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

Ta cần tìm a_4, thỏa mãn $\frac{a_4}{4!} = \frac{17}{4}$. Do đó $a_4 = 102$. □

```
f = (1 + x + x**2 / 2)**2 * (1 + x)**2
f.expand()
_.coeff(x**4) * factorial(4)
```

Các cách sắp xếp này được phân loại bởi số chữ được chọn mỗi loại, tương ứng với một số hạng khi khai triển $f(x)$ theo luật phân phối, mà hệ số của nó tỷ lệ với số hoán vị lặp của các chữ này, như bảng sau:

G	I	N	N	$1 \times x \times x \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$	E	I	N	N	$x \times 1 \times x \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$
E	G	N	N	$x \times x \times 1 \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!}$	E	G	I	N	$x \times x \times x \times x$	$4!$
E	E	N	N	$\frac{x^2}{2!} \times 1 \times 1 \times \frac{x^2}{2!}$	$\frac{4!}{2!\,2!}$	E	E	I	N	$\frac{x^2}{2!} \times 1 \times x \times x$	$\frac{4!}{2!}$
E	E	G	N	$\frac{x^2}{2!} \times x \times 1 \times x$	$\frac{4!}{2!}$	E	E	G	I	$\frac{x^2}{2!} \times x \times x \times 1$	$\frac{4!}{2!}$

Xét khai triển Maclaurin của e^x và e^{-x}:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad \text{và} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

Trong quá trình tính toán với hàm sinh mũ, đôi khi ta sử dụng các hàm hyperbol

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ví dụ 8.25. Để liên lạc trên biển, mỗi tàu mang theo 48 lá cờ, mỗi loại đen, trắng, xanh, đỏ có 12 chiếc. Mỗi tín hiệu quy ước tương ứng với một cách xếp 12 cờ trong 48 cờ đó dọc mạn thuyền.

a) Có bao nhiêu tín hiệu sử dụng một số chẵn cờ xanh và một số lẻ cờ đen?

b) Có bao nhiêu tín không dùng cờ trắng, hoặc ít nhất ba cờ trắng?

Giải. a) Hàm sinh mũ của số cách xếp a_n của n lá cờ, $n = 0, 1, 2, \dots, 12$:

$$f(x) = \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)}_{\text{xanh}} \underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)}_{\text{đen}} \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}_{\text{đỏ, trắng}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \sinh 2x.$$

Ta cần tìm a_{12}. Hệ số của x^{12} trong $f(x)$ là $\dfrac{a_{12}}{12!} = \dfrac{4\,096}{467\,775}$. Suy ra $a_{12} = 4\,194\,304$.

Tổng quát, vì $f(x) = \dfrac{1}{2} e^{2x} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \dfrac{1}{4}(e^{4x} - 1)$, nên $\dfrac{a_n}{n!} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4^n}{n!} \Rightarrow a_n = 4^{n-1}$, với $1 \leq n \leq 12$.

```
f = Sum(x ** (2*i) / factorial(2*i), (i, 0, oo)) * Sum
    (x ** (2*i+1) / factorial(2*i+1), (i, 0, oo)) * Sum
    (x**i / factorial(i), (i, 0, oo))**2
f.doit().simplify()
_.series(x, 0, 13)
_.coeff(x**12) * factorial(12)
```

b) Tương tự ý (a), hàm sinh mũ của số cách xếp b_n của n lá cờ, $n = 0, 1, \dots, 12$:

$$f(x) = \underbrace{\left(1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)}_{\text{trắng}} \underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3}_{\text{đen, xanh, đỏ}}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x + e^x\right) e^{3x}.$$

Ta cần tìm b_{12}. Hệ số của x^{12} trong $g(x)$ là $\dfrac{b_{12}}{12!} = \dfrac{5\,377\,109}{239\,500\,800} \Rightarrow b_{12} = 10\,754\,218$.

Tổng quát, biến đổi $g(x) = e^{4x} - \dfrac{x^2}{2} e^{3x} - x e^{3x}$ cho ta hệ số của x^n là $\dfrac{b_n}{n!} = \dfrac{4^n}{n!} - \dfrac{1}{2}\dfrac{3^{n-2}}{(n-2)!} - \dfrac{3^{n-1}}{(n-1)!}$, với $2 \leq n \leq 12$. Từ đó $b_n = 4^n - 3^n n \dfrac{n+5}{18}$.

Mã Python tương tự ý (a), với khai báo

```
f = ( 1 + Sum(x**i / factorial(i), (i, 3, oo)) ) * Sum
    (x**i / factorial(i), (i, 0, oo))**3
```

và để rút gọn b_n:

```
( factorial(n) * (4**n / factorial(n) - 3**(n-2) / 2 /
     factorial(n-2) - 3**(n-1) / factorial(n-1)) ).
    simplify()
```

□

Ví dụ 8.26. Có bao nhiêu toàn ánh từ tập A cỡ m vào tập B cỡ n?

Giải. Đặt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Mỗi toàn ánh $f : A \to B$ tương ứng 1–1 với dãy $f(a_1)$, $f(a_2), \dots, f(a_m)$ các phần tử của B, và mỗi phần tử của B xuất hiện ít nhất một lần trong dãy. Tức là, mỗi toàn ánh được xem như một cách xếp m phần tử của B trên n vị trí sao cho mỗi phần tử của B xuất hiện ít nhất một lần. Hàm sinh mũ của số cách xếp như vậy là

$$f(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^x)^{n-k}(-1)^k$$

trong đó

$$(e^x)^{n-k} = e^{(n-k)x} = 1 + [(n-k)x] + \frac{[(n-k)x]^2}{2!} + \frac{[(n-k)x]^3}{3!} + \cdots$$

nên hệ số của x^m trong $f(x)$ là $\dfrac{a_m}{m!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{m!}$, với a_m là số toàn ánh cần tìm. Ta có $a_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$. □

Như trong Phần 5.4, ta đa biết, số cách giao việc cho m người về n bộ phận, sao cho mỗi bộ phận nhận ít nhất một người, là số toàn ánh từ tập cỡ m vào tập cỡ n. Bằng hàm sinh mũ, ta còn có thể xác định được số cách phân công sao cho mỗi nhóm nhận một số lượng nhân viên cụ thể.

Bài tập 8.4

8.44. Tìm hàm sinh mũ cho các dãy sau

a) $1, -1, 1, -1, \dots$

b) $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

c) $1, -a, a^2, -a^3, a^4, \dots, a \in \mathbb{R}$

d) $1, a^2, a^4, a^6, \dots, a \in \mathbb{R}$

e) $a, a^3, a^5, a^7, \dots, a \in \mathbb{R}$

f) $0, 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, \dots$

8.45. Xác định dãy sinh bởi các hàm sinh mũ

a) $f(x) = 3e^{3x}$

b) $f(x) = 6e^{5x} - 3e^{2x}$

c) $f(x) = e^{x} + x^2$

d) $f(x) = e^{2x} - 3x^3 + 5x^2 + 7x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

f) $f(x) = \dfrac{3}{1-2x} + e^{x}$

8.46. Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hàm sinh mũ của dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ và $b_0, b_1, b_2, \ldots$ Biểu diễn $g(x)$ theo $f(x)$ nếu

a) $b_3 = 3, b_n = a_n, n \in \mathbb{N}, n \neq 3$

b) $a_n = 5^n, n \in \mathbb{N}; b_3 = -1, b_n = a_n, n \in \mathbb{N}, n \neq 3$

c) $b_1 = 2, b_2 = 4, b_n = 2a_n, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, 2$

d) $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, b_n = 2a_n + 3, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, 2, 3$

8.47. Trong Ví dụ 8.25

a) Có bao nhiêu tín hiệu sao cho mỗi loại cờ có ít nhất một chiếc?

b) Phát biểu lại ý (a) bằng cách sử dụng khái niệm toàn ánh.

c) Có bao nhiêu tín hiệu sao cho tổng số cờ xanh và đen là chẵn?

8.48. Tìm hàm sinh mũ cho dãy 0!, 1!, 2!, 3!, ...

8.49. a) Tìm hàm sinh mũ cho số cách xếp n chữ cái, $n \geq 0$, lấy ra trong từ

i) HAWAII

ii) MISSISSIPPI

iii) ISOMORPHISM

b) Trong ý (a) mục (ii), tìm hàm sinh mũ nếu việc sắp xếp phải có ít nhất hai chữ I.

8.50. Áp dụng Ví dụ 8.26, tìm hàm sinh mũ cho số cách giao việc cho 25 người về 4 bộ phận, sao cho mỗi bộ phận nhận từ 3 đến 10 người.

8.51. Cho hai dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ và $b_0, b_1, b_2 \ldots$ có các hàm sinh mũ là $f(x)$ và $g(x)$. Chứng minh $h(x) = f(x)g(x)$ là hàm sinh mũ của dãy $c_0, c_1, c_2, \ldots$ trong đó $c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$.

8.52. Lấy ngẫu nhiên một xâu tam phân độ dài 20. Tìm xác suất để

a) có một số chẵn số 1.

b) có một số chẵn số 1 và một số lẻ số 2.

c) có một số lẻ số 0.

d) tổng số các số 0 và 1 là lẻ.

e) tổng số các số 0 và 1 là chẵn.

8.53. Có bao nhiêu xâu tứ phân độ dài 20 sao cho

a) có ít nhất một số 2 và một số lẻ số 0?

b) không có số nào xuất hiện đúng hai lần?

c) không có số nào xuất hiện đúng ba lần?

d) có đúng hai số 3 hoặc không có số 3 nào?

8.5 Toán tử tổng

Cho hai hàm sinh $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ và $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$. Nhắc lại, hàm $f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ sinh tích chập $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + a_2 b_{i-2} + \cdots + a_i b_0$, với $i \in \mathbb{N}$. Nếu chọn $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$, tức là $b_i = 1,\ \forall i \in \mathbb{N}$, thì $c_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Hàm $\frac{f(x)}{1-x}$ sinh dãy các tổng a_0, $a_0 + a_1$, $a_0 + a_1 + a_2$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, ..., và $\frac{1}{1-x}$ gọi là *toán tử tổng*.

Ví dụ 8.27. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

Giải. Đặt $a_i = 2i - 1$, xét $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Ta có

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (2i-1)x^i = 2\sum_{i=0}^{\infty} ix^i - \sum_{i=0}^{\infty} x^i.$$

Trong Ví dụ 8.14, ta đã biết $\sum_{i=0}^{\infty} ix^i = f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$, nên

$$f(x) = 2\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{3x-1}{(x-1)^2}.$$

Suy ra

$$\frac{f(x)}{1-x} = \frac{1-3x}{(x-1)^3} = -\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} = -3(1-x)^{-2} + 2(1-x)^{-3}.$$

Tổng $\sum_{i=0}^{n} a_i = -1 + \sum_{i=1}^{n} (2i-1)$ bằng hệ số của x^n trong biểu thức trên

$$-3\binom{-2}{n}(-1)^n + 2\binom{-3}{n}(-1)^n = -3\binom{2+n-1}{n} + 2\binom{3+n-1}{n} = n^2 - 1.$$

Vậy $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. □

```
1 # Tính f(x): Cách 1
2 f = 2 * x / (1-x)**2 - 1 / (1-x)
3 f.simplify()
4 # Tính f(x): Cách 2 (tới dòng 7)
5 f = Sum((2*i - 1) * x**i, (i, 0, oo))
6 f.doit().simplify()  #
```

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{(x-1)^2} & \text{for } |x| < 1 \\ \sum_{i=0}^{\infty} x^i (2i-1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
7 f = _.args[0][0]

8 ( f / (1-x) ).apart()
9 (-3 * binomial(2+n-1, n) + 2 *  binomial(3+n-1, n)).
     simplify()
```

Ví dụ 8.28. Tính $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Giải. Đặt $a_i = i^2$, xét $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} i^2 x^i$. Trong Ví dụ 8.14, ta đa biết $f(x) = f_2(x) = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$. Suy ra

$$\frac{f(x)}{1-x} = \frac{x^2+x}{(1-x)^4} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^4} = (1-x)^{-2} - 3(1-x)^{-3} + 2(1-x)^{-4}.$$

Tổng $\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} i^2$ bằng hệ số của x^n trong biểu thức trên

$$\begin{aligned} &\binom{-2}{n}(-1)^n - 3\binom{-3}{n}(-1)^n + 2\binom{-4}{n}(-1)^n \\ &= \binom{2+n-1}{n} - 3\binom{3+n-1}{n} + 2\binom{4+n-1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Vậy $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. □

Bài tập 8.5

8.54. Tìm hàm sinh cho dãy

a) $1, 2, 3, 3, 3, \ldots$

b) $1, 2, 3, 4, 4, 4, \ldots$

c) $1, 4, 7, 10, 13, \ldots$

8.55. a) Tìm hàm sinh cho dãy

i) $0, 1, 0, 0, 0, \ldots$

ii) $0, 1, 1, 1, \ldots$

iii) $0, 1, 2, 3, \ldots$

iv) $0, 1, 3, 6, 10, \ldots$

b) Dùng kết quả ở mục (iv) ý (a) để tính $\sum_{k=1}^{n} k$.

8.56. Vận dụng ý tưởng trong Ví dụ 8.28, chỉ ra $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

8.57. Cho $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Tìm hàm sinh cho dãy

a) $a_0, a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$

b) $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, \ldots$

c) $\frac{a_0}{4}, \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{4}, \frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4}, \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4}, \ldots$

8.58. Cho $f(x)$ là hàm sinh dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Hàm $(1-x)f(x)$ sinh dãy nào?

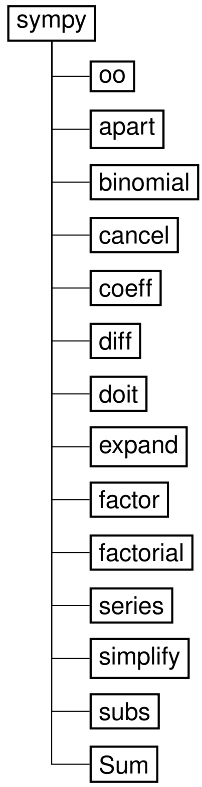
8.59. Cho $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ với $f(1) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ là số hữu hạn. Chứng minh $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ là hàm sinh dãy $s_0, s_1, s_2, \ldots$, trong đó $s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$, $n \in \mathbb{N}$.

8.60. Tìm hàm sinh cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots$, trong đó $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$, $n \in \mathbb{N}$.

8.61. a) Tìm hàm sinh cho dãy $0, 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ (trong đó $1, 3, 6, 10, 15 \ldots$ là các số tam giác trong Ví dụ 4.1)

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$, tìm công thức của tổng n số tam giác đầu tiên.

Tóm tắt lệnh Python



Bài tập bổ sung

8.62. Tìm hàm sinh cho dãy

a) $7, 8, 9, 10, \ldots$

b) $1, a, a^2, a^3, \ldots, a \in \mathbb{R}$

c) $1, 1 + a, (1 + a)^2, (1 + a)^3, \ldots, a \in \mathbb{R}$

d) $2, 1 + a, 1 + a^2, 1 + a^3, \ldots, a \in \mathbb{R}$

8.63. Tìm hệ số của x^{83} trong $f(x) = (x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17})^{10}$.

8.64. Có bao nhiêu cách phát 40 viên đạn (20 viên cho súng trường và 20 viên cho súng ngắn) cho bốn sĩ quan cảnh sát, để mỗi sĩ quan nhận được từ hai đến bảy viên mỗi loại?

8.65. Tìm một hàm sinh cho các cách phân hoạch số nguyên dương n sao cho mỗi số hạng xuất hiện một số lẻ lần, hoặc không xuất hiện.

8.66. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh trong các phân hoạch của n, số phân hoạch sao cho không có số hạng chẵn lặp lại bằng số phân hoạch sao cho không có số hạng xuất hiện quá ba lần.

8.67. Có bao nhiêu số điện thoại 10 chữ số chỉ có các số 1, 3, 5, hoặc 7, mà mỗi chữ số này xuất hiện ít nhất hai lần, hoặc không xuất hiện.

8.68. a) Hàm sinh mũ $g(x) = (1-2x)^{-\frac{5}{2}}$ sinh dãy nào?

b) Tìm a và b sao cho $(1-ax)^b$ là hàm sinh mũ của dãy$1, 7, 7\cdot 11, 7\cdot 11\cdot 15, \ldots$

8.69. Với $n, k \in \mathbb{N}$, đặt

- P_1 là số phân hoạch của n.
- P_2 là số phân hoạch của $2n+k$ có số hạng lớn nhất là $n+k$.
- P_3 là số phân hoạch của $2n+k$ thành đúng $n+k$ số hạng.

Dùng biểu đồ Ferrers, chứng minh $P_1 = P_2$ và $P_2 = P_3$, từ đó suy ra số phân hoạch của $2n+k$ thành đúng $n+k$ số hạng là như nhau với mọi k.

8.70. Tính tổng sau $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n}$, với $n \in \mathbb{Z}^+$. (*Gợi ý:* dùng định lý nhị thức)

8.71. Xác định hàm sinh cho số phân hoạch của $n \in \mathbb{N}$ trong đó số 1 xuất hiện không quá một lần, số 2 xuất hiện không quá hai lần, và tổng quát, số k xuất hiện không quá k lần, với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$.

8.72. Cho 12 hòm thư khác nhau, và 20 tời rơi giống nhau.

a) Có bao nhiêu cách chia 20 tờ rơi vào 12 hòm thư sao cho hòm nào cũng có tờ rơi?

b) Đặt các hòm thư thành hai hàng, mỗi hàng sáu hòm. Trong các cách chia ở ý (a), có bao nhiêu cách để mỗi hàng đều có 10 tờ.

8.73. a) Cho $a, d \in \mathbb{R}$. Tìm hàm sinh cho dãy $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$

b) Với $n \in \mathbb{Z}^+$, dùng kết quả ở ý (a) để tính tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$

8.74. Cho $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ là hàm sinh dãy a_0, a_1, a_2, $n \in \mathbb{Z}^+$ cố định.

a) Tìm hàm sinh dãy $\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, a_0, a_1, a_2, \ldots$

b) Tìm hàm sinh dãy $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$

Tài liệu tham khảo

[1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. phiên bản 6. Pearson, 2022. 755 trang.

[3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.

[4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.

[5] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. phiên bản 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.

[6] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. phiên bản 3. Brooks/-Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.

[7] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. phiên bản 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.

[8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.