Mục lục

Chương 3

Lý thuyết tập hợp

3.1 Tập và tập con

Một tập hợp là một nhóm các vật, thường có thuộc tính chung nào đó. Các vật này gọi là phần tử của tập.

Ký hiệu tập hợp bởi chữ hoa $A, B, C, \ldots$, và phần tử của tập bởi chữ thường $a, b, c, \ldots$

Với tập A, ta viết $a \in A$ nếu a là một phần tử của A; còn $b \notin A$ để chỉ b không là phần tử của A.

Nếu tập A hữu hạn, số phần tử của A gọi là lực lượng, hay cỡ của A, ký hiệu $|A|$.

Trong mỗi tình huống cụ thể, phần tử của các tập thường lấy trong một loại tập nào đó, gọi là tập phổ dụng, ký hiệu $\mathcal{U}$.

Có hai cách xác định một tập hợp:

a) Liệt kê các phần tử của nó trong dấu ngoặc nhọn { }

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}. \tag{3.1}$$

Ở đây, $2 \in A$, $6 \notin A$, và $|A| = 5$.

```
A = {1, 2, 3, 4, 5}
2 in A   # → True
6 in A   # → False
len(A)   # → 5
```

b) Mô tả thuộc tính của các phần tử. Chẳng hạn, với tập phổ dụng là tập các số nguyên thì tập A ở trên cũng được viết là

$$A = \{a \mid 1 \leq a \leq 5\}. \tag{3.2}$$

```
A = {a for a in range(1, 6)}
```

Tuy nhiên, nếu xét tập phổ dụng các số nguyên chẵn, tập $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$ chỉ gồm 2 và 4.

```
B = {a for a in range(1, 6) if x % 2 == 0}
```

Trong Python, cũng có thể tạo tập từ các bộ đếm, điển hình như từ miền, dãy,. . .

```
A = set(range(1, 6))
A = set([1, 2, 3, 4, 5, 1, 1, 2])
```

Để thêm một hoặc nhiều phần tử vào tập

```
A = {1}
A.add('a')                         # → {1, 'a'}
A.update([2, 3], {2, 'a', 'b'})    # → {1, 2, 3, 'a', 'b'}
```

Để loại một phần tử ra khỏi tập

```
A = {1, 2, 3}
A.discard(1)      # → {2, 3}
A.discard('a')    # vẫn là {2, 3}, vì 'a' ∉ A
```

Ví dụ 3.1. Trên tập phổ dụng các số nguyên dương $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$, một số cách mô tả cùng một tập

a) $A = \{1, 4, 9, 16\} = \{x^2 \mid x^2 < 20\}$
$= \{x^2 \mid x \in \mathcal{U}, x^2 < 23\} = \{x^2 \mid x \in \mathcal{U} \land x^2 \leq 16\}$

b) $B = \{1, 4, 9, ..., 64, 81\} = \{x^2 \mid x^2 < 100\}$
$= \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}^+, x^2 < 100\} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}^+ \land x^2 < 100\}$

c) $C = \{2, 4, 6, 8, ...\} = \{2k \mid k \in \mathcal{U}\}$.

Trong ví dụ trên, $|A| = 9$, $|B| = 4$, còn C là tập vô hạn.

Định nghĩa 3.1. *Cho hai tập A, B. Ta nói A là tập con của B (hay B chứa A), ký hiệu $A \subseteq B$ hoặc $B \supseteq A$, nếu mọi phần tử của A thì cũng là phần tử của B.*

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B. \tag{3.3}$$

Ngoài ra, nếu B chứa phần tử không thuộc A thì A gọi là tập con thực sự của B, ký *hiệu $A \subset B$ hoặc $B \supset A$.*

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge \exists x,\ x \in B \wedge x \notin A. \tag{3.4}$$

Nếu A không là tập con của B, ta viết $A \not\subseteq B$. Theo quy tắc phủ định lượng từ

$$\begin{aligned} A \not\subseteq B &\Leftrightarrow \neg\forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ \neg(x \notin A \vee x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ \neg(x \notin A) \wedge \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ x \in A \wedge x \notin B \end{aligned} \tag{3.5}$$

tức là có A có phần tử không thuộc B.

Nếu A, B hữu hạn, thì

$$A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|, \quad \text{và} \quad A \subset B \Rightarrow |A| < |B|.$$

Định nghĩa 3.2. *Hai tập A và B gọi là bằng nhau, ký hiệu $A = B$, nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.*

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \\ &\Leftrightarrow (\forall x,\ x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x,\ x \in B \rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow \forall x,\ x \in A \leftrightarrow x \in B \end{aligned} \tag{3.6}$$

tức là phần tử thuộc tập này thì cũng thuộc tập kia và ngược lại.

Theo định nghĩa trên, thứ tự các phần tử và sự lặp lại của một phần tử không ảnh hưởng đến sự xác định của tập hợp. Chẳng hạn

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 1, 3, 1\}.$$

Hai tập khác nhau

$$\begin{aligned} A \neq B &\Leftrightarrow \neg\forall x,\ (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A) \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ \neg[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)] \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ \neg(x \notin A \vee x \in B) \vee \neg(x \notin B \vee x \in A) \\ &\Leftrightarrow \exists x,\ (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \end{aligned} \tag{3.7}$$

tức là có phần tử thuộc tập này mà không thuộc tập kia, hoặc ngược lại.

Ngoài ra

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B. \tag{3.8}$$

```
A = {1, 2}
B = {1, 2, 3}
A.issubset(B)  # → True
A == B         # → False
A != B         # → True
```

Ví dụ 3.2. Cho $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$, trong đó x, y là các chữ cái. Ta có $|\mathcal{U}| = 11$.

a) Nếu $A = \{1, 2, 3, 4\}$, thì $|A| = 4$, và

i) $A \subseteq \mathcal{U}$

ii) $A \subset \mathcal{U}$

iii) $A \in \mathcal{U}$

iv) $\{A\} \subseteq \mathcal{U}$

v) $\{A\} \subset \mathcal{U}$

vi) $\{A\} \notin \mathcal{U}$

b) Đặt $B = \{5, 6, x, y, A\} = \{5, 6, x, y, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Ta có $|B| = 5$, và

i) $A \in B$

ii) $\{A\} \subseteq B$

iii) $\{A\} \subset B$

nhưng

iv) $\{A\} \notin B$

v) $A \nsubseteq B$

vi) $A \not\subset B$

Định lý 3.1.

a) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

b) $A \subseteq B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

c) $A \subset B, B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$

d) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Định nghĩa 3.3. *Tập không có phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu $\varnothing$ hoặc { }.*

$|\varnothing| = 0$, $\{0\} \neq \varnothing$, $\{\varnothing\} \neq \varnothing$.

```
A = set()
```

Định lý 3.2. *Với mọi tập A, $\varnothing \subseteq A$, và nếu $A \neq \varnothing$ thì $\varnothing \subset A$.*

Định nghĩa 3.4. *Cho tập A. Tập lũy thừa của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$ hoặc 2^A, là tập tất cả tập con của A.*

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}. \tag{3.9}$$

Ví dụ 3.3. a) Với $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) = \{&\varnothing,\\ &\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\},\\ &\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},\\ &\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\},\\ &A\}.\end{aligned}$$

b) $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathcal{P}\left[\mathcal{P}(\varnothing)\right] = \mathcal{P}\left(\{\varnothing\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

Định lý 3.3. *Tập A cỡ n có 2^n tập con, tức là $\left|\mathcal{P}(A)\right| = 2^n$.*

Chứng minh. **Cách 1:** Mỗi tập con cỡ r của A là một tổ hợp chập r của n phần tử của A. Do đó, số tập con cỡ r của A là $\binom{n}{r}$, với $0 \le r \le n$. Theo quy tắc cộng, áp dụng Hệ quả 1.1

$$\left|\mathcal{P}(A)\right| = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Cách 2: Cố định thứ tự các phần tử của A:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Mỗi tập con $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}\}$ của A tương ứng 1–1 với một xâu nhị phân độ dài n

$$s_1 s_2 \dots s_n$$

trong đó $s_{i_1} = s_{i_2} = \dots = s_{i_r} = 1$, và các vị trí còn lại bằng 0. Do đó, số tập con của A bằng số xâu nhị phân độ dài n, và theo Ví dụ 1.5(a), số xâu đó là 2^n.

□

Trong Ví dụ 1.28(b), ta đã chứng minh số tổng riêng của số nguyên dương n là 2^{n-1}. Ví dụ dưới đây trình bày cách tiếp cận khác để đạt được kết quả này.

Ví dụ 3.4. Xét tổng riêng "đơn vị" của n, gồm toàn số hạng 1, với $n - 1$ phép cộng:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 1 & + & 1 & + & \cdots & + & 1 & + & 1 & + & 1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 1 & & 2 & & 3 & & & & n-2 & & n-1 & \end{array}$$

Biết rằng mỗi tổng riêng của n tương ứng 1–1 với việc thực hiện một một số phép cộng trong $n - 1$ phép cộng trên.

a) Tìm tập các phép cộng thực hiện ứng với tổng riêng của 7

i) $2 + 4 + 1$ ii) $4 + 3$ iii) 7

b) Tìm tổng riêng của 7 ứng với tập các phép cộng được thực hiện

i) $\varnothing$ ii) $\{1, 3, 4, 6\}$ iii) $\{2, 4, 5\}$

c) Theo cách trên, có bao nhiêu tổng riêng của n?

Giải. a) i) $2 + 4 + 1 = (1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) + 1$ ứng với tập phép cộng $\{1, 3, 4, 5\}$.

ii) $4 + 3 = (1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1)$ ứng với tập $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.

iii) $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ứng với $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) i) Tập phép cộng là $\varnothing$ cho biết không có phép cộng nào trong tổng riêng đơn vị được thực hiện, nên tổng riêng tương ứng là $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

ii) Tập phép cộng thực hiện $\{1, 3, 4, 6\}$ cho tổng riêng

$$(1 + 1) + (1 + 1 + 1) + (1 + 1) = 2 + 3 + 2.$$

iii) Tập phép cộng $\{2, 4, 5\}$ ứng với tổng riêng

$$1 + (1 + 1) + (1 + 1 + 1) + 1 = 1 + 2 + 3 + 1.$$

c) Số tổng riêng của n là số tập con các phép cộng được thực hiện của $n - 1$ phép cộng trong tổng riêng đơn vị của n, và bằng 2^{n-1}.

□

Các tập số thường gặp:

a) $\mathbb{Z}$ = tập số nguyên = $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

b) $\mathbb{N}$ = tập số nguyên không âm, hay số tự nhiên = $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

c) $\mathbb{Z}^+$ = tập số nguyên dương = $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$

d) $\mathbb{Q}$ = tập số hữu tỷ = $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

e) $\mathbb{Q}^+$ = tập số hữu tỷ dương = $\{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0\}$

f) $\mathbb{Q}^*$ = tập số hữu tỷ khác 0

g) $\mathbb{R}$ = tập số thực

h) $\mathbb{R}^+$ = tập số thực dương

i) $\mathbb{R}^*$ = tập số thực khác 0

j) $\mathbb{C}$ = tập số phức = $\{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

k) $\mathbb{C}^*$ = tập số phức khác 0

l) Với $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}_n$ = tập thương modulo = $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

m) Với $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, ta có các khoảng đóng, mở, nửa mở phải, và nửa mở trái:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}.$$

Bài tập 3.1

3.1. Các tập nào trong các tập sau bằng nhau?

a) {1, 2, 3} b) {3, 2, 1, 3} c) {3, 1, 2, 3} d) {1, 2, 2, 3}

3.2. Cho $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $1 \in A$
b) $\{1\} \in A$
c) $\{1\} \subseteq A$
d) $\{\{1\}\} \subseteq A$
e) $\{2\} \in A$
f) $\{2\} \subseteq A$
g) $\{\{2\}\} \subseteq A$
h) $\{\{2\}\} \subset A$

3.3. Với $A = \{1, 2, 2\}$, khẳng định nào trong 3.2 đúng?

3.4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\varnothing \in \varnothing$
b) $\varnothing \subset \varnothing$
c) $\varnothing \subseteq \varnothing$
d) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
e) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$
f) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

3.5. Xác định tất cả phần tử của tập sau.

a) $\{1 + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
b) $\{n + \frac{1}{n} \mid n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$
c) $\{n^3 + n^2 \mid n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$

3.6. Cho sáu tập con của Z

$A = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ $C = \{2p-3 \mid p \in \mathbb{Z}\}$ $E = \{3s+2 \mid s \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{2n+3 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $D = \{3r+1 \mid r \in \mathbb{Z}\}$ $F = \{3t-2 \mid t \in \mathbb{Z}\}$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $A = B$
b) $A = C$
c) $B = C$
d) $D = E$
e) $D = F$
f) $E = F$

3.7. Cho hai tập A, B.

a) Biểu diễn quan hệ tập con thực sự $A \subset B$ bằng lượng từ.
b) Phủ định kết quả ở ý (a) để được $A \not\subset B$.

3.8. Với $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, tìm số

a) tập con của A
b) tập con khác rỗng của A
c) tập con thực sự của A
d) tập con khác rỗng thực sự của A
e) tập con của A có ba phần tử
f) tập con của A chứa 1, 2
g) tập con của A chứa năm phần tử, bao gồm 1, 2
h) tập con của A có một số chẵn phần tử
i) tập con của A có một số lẻ phần tử

3.9. a) Nếu tập A có 63 tập con thực sự, thì $|A| =$?
b) Nếu tập B có 64 tập con cỡ lẻ, thì $|B| =$?
c) Nêu kết luận tổng quát cho ý (b)

3.10. Tập nào sau đây khác rỗng?

a) $\{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 7 = 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 3x + 5 = 9\}$
c) $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 + 4 = 6\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4 = 6\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 3 = 0\}$
f) $\{x \mid x \in \mathbb{C}, x^2 + 3x + 3 = 0\}$

3.11. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 17, 18\}$. Có bao nhiêu tập con của A mà

a) có sáu phần tử?
b) có bốn số chẵn và hai số lẻ?
c) chỉ chứa số lẻ?

3.12. Cho $S = \{1, 2, 3, \ldots, 29, 30\}$. Có bao nhiêu tập con A của S thỏa mãn

a) $|A| = 5$?
b) $|A| = 5$ và số nhỏ nhất của A là 5?
c) $|A| = 5$ và số nhỏ nhất của A không quá 5?

3.13. a) Có bao nhiêu tập con của {1, 2, 3,. . . , 11} chứa số chẵn?

b) Có bao nhiêu tập con của {1, 2, 3,. . . , 12} chứa số chẵn?

c) Nêu kết luận tổng quát cho ý (a) và (b).

3.14. Cho một ví dụ về ba tập W, X, Y sao cho $W \in X$ và $X \in Y$ nhưng $W \notin Y$.

3.15. Với các tập A, B, C, hãy chứng minh hoặc bác bỏ (cho phản ví dụ) khẳng định: Nếu $A \subseteq B$, $B \nsubseteq C$ thì $A \nsubseteq C$.

3.16. a) Dưới đây là một vài dãy số nguyên tăng thực sự bắt đầu là 1 và kết thúc là 7.

i) 1, 7 ii) 1, 3, 4, 7 iii) 1, 2, 4, 5, 6, 7

Có bao nhiêu dãy số nguyên tăng thực sự có số đầu là 1 và số cuối là 7.

b) Có bao nhiêu dãy số nguyên tăng thực sự bắt đầu là 3 và kết thúc là 9.

c) Có bao nhiêu dãy số nguyên tăng thực sự bắt đầu là 1 và kết thúc là 37? bắt đầu là 62 và kết thúc là 98?

d) Tổng quát kết quả của các ý trên.

3.17. Với $n, r \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh

$$\begin{aligned}\binom{n+r+1}{r} &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \cdots + \binom{n+2}{2} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}\\ &= \binom{n+r}{n} + \binom{n+r-1}{n} + \cdots + \binom{n+2}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n}{n}.\end{aligned}$$

3.18. Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, 39, 40\}$.

a) Viết chương trình máy tính (hoặc thuậtt toán) cho một tập con gồm sáu phần tử ngẫu nhiên của A.

b) Với $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 37\}$, viết chương trình máy tính (hoặc thuật toán) cho một tập con gồm sáu phần tử ngẫu nhiên của A và kiểm tra nó có phải tập con của B không?

3.19. Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$. Viết chương trình máy tính (hoặc thuật toán) liệt kê các tập con B của A, trong đó $|B| = 4$.

3.20. Viết chương trình máy tính (hoặc thuật toán) liệt kê các tập con của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, trong đó $n \in \mathbb{Z}^+$.

3.2 Phép toán tập hợp và quy luật

Định nghĩa 3.5. *Cho hai tập A, B. Tập*

a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ *gọi là hợp của A và B.*

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ *gọi là giao của A và B.*

c) $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ *gọi là phần bù (tương đối) của B trong A.*

d) $\overline{A} = \mathcal{U} - A$, *còn ký hiệu là* A^c, *gọi là phần bù của A.*

e) $A \,\Delta\, B = \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B)$ *gọi là hiệu đối xứng của A và B.*

Nhận xét: $A - A = \varnothing$, $A - B = A \cap \overline{B}$, $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Phép toán	**Python** (cách 1)	**Python** (cách 2)
$A \cup B$	`A	B`	`A.union(B)`
$A \cap B$	`A & B`	`A.intersection(B)`
$A - B$	`A - B`	`A.difference(B)`
$A \,\Delta\, B$	`A ^ B`	`A.symmetric_difference(B)`

Ví dụ 3.5. Với $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$, và $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{7, 8, 9\}$,

a) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $B \cap C = \{7\}$

d) $A \cap C = \varnothing$

e) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

f) $B - A = \{6, 7\}$

g) $A - B = \{1, 2\}$

h) $A - C = A$

i) $C - A = C$

j) $\overline{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

k) $\overline{B} = \{1, 2, 8, 9, 10\}$

l) $\overline{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

m) $A \,\Delta\, B = \{1, 2, 6, 7\}$

n) $A \,\Delta\, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

Ví dụ 3.6. Với $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, và $A = [1, 3]$, $B = [2, 4)$, ta có

a) $A \cup B = [1, 4)$

b) $A \cap B = [2, 3]$

c) $A - B = [1, 2)$

d) $B - A = (3, 4)$

e) $\overline{A} = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

f) $\overline{B} = (-\infty, 2) \cup [4, \infty)$

Định nghĩa 3.6. *Hai tập A, B gọi là rời nhau, nếu $A \cap B = \varnothing$.*

Định lý 3.4. *Hai tập A, B rời nhau $\Leftrightarrow A \cup B = A \,\Delta\, B$.*

Định lý 3.5. *Các khẳng định sau là tương đương:*

a) $A \subseteq B$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Quy luật của tập hợp: Với các tập A, B, C bất kỳ

1)	$\overline{\overline{A}} = A$	Luật *phần bù kép*
2)	$A \cup \varnothing = A$	Luật *đồng nhất*
	$A \cap \mathcal{U} = A$	
3)	$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$	Luật *thống trị (nuốt)*
	$A \cap \varnothing = \varnothing$	
4)	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	Luật *bù*
	$A \cap \overline{A} = \varnothing$	
5)	$A \cup A = A$	Luật *lũy đẳng*
	$A \cap A = A$	
6)	$A \cup B = B \cup A$	Luật *giao hoán*
	$A \cap B = B \cap A$	
7)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Luật *kết hợp*
	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
8)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Luật *phân phối*
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
9)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Luật *DeMorgan*
	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	
10)	$A \cup (A \cap B) = A$	Luật *hút*
	$A \cap (A \cup B) = A$	

Định nghĩa 3.7. *Cho $\mathcal{A}$ là biểu thức tập hợp chỉ gồm các phép toán trong các phép lấy phần bù, $\cup$, và $\cap$. Đối ngẫu của $\mathcal{A}$, ký hiệu $\mathcal{A}^d$, thu được bằng cách*

1) thay $\varnothing$ bởi $\mathcal{U}$, thay $\mathcal{U}$ bởi $\varnothing$; và

2) thay $\cup$ bởi $\cap$, thay $\cap$ bởi $\cup$, nhưng giữ nguyên thứ tự thực hiện phép toán bằng cách thêm dấu ngoặc nếu cần.

Định lý 3.6 (Nguyên lý đối ngẫu)**.** *Cho $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ là hai biểu thức tập hợp cấu thành từ các tập tùy ý bởi các phép toán chỉ trong các phép lấy phần bù, $\cup$, $\cap$. Khi đó, nếu $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, thì $\mathcal{A}^d = \mathcal{B}^d$.*

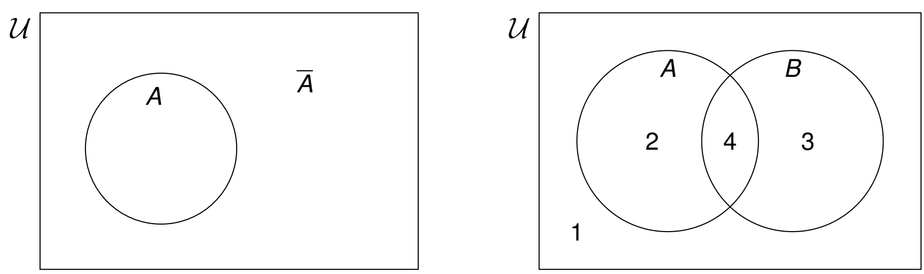
Nguyên lý đối ngẫu không đúng khi các tập cấu thành nên $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ là các tập cụ thể, hoặc chịu ràng buộc nào đó. Chẳng hạn, với $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 3\}$, thì

$$A \cap B = \{1, 2, 3\} = C \cup D$$

nhưng $(A \cap B)^d = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, trong khi $(C \cup D)^d = C \cap D = \{1\}$, nên $(A \cap B)^d \neq (C \cup D)^d$.

Một tình huống khác, theo Định lý 3.5, nếu $A \subseteq B$ thì $A \cup B = B$. Nhưng không thể khẳng định $(A \cup B)^d = B^d$, hay $A \cap B = B$, vì điều này kéo theo $B \subseteq A$!

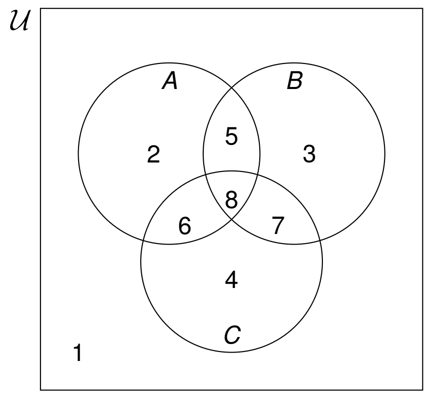
Một cách trực quan để mô tả tập hợp và mối quan hệ giữa chúng là thông qua biểu đồ Venn*.



Hình 3.1: Sơ đồ Venn cho một và hai tập

Miền	**Tập biểu diễn**	**Tập**	**Miền biểu diễn**
1	$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$	A	2, 4
2	$A - B$	B	3, 4
3	$B - A$	$A \cup B$	2, 3, 4
4	$A \cap B$	$A \mathbin{\Delta} B$	2, 3
		$\overline{A}$	1, 3
		$\overline{B}$	1, 2

*John Venn, 1834–1923, nhà logic học Anh



Hình 3.2: Sơ đồ Venn cho ba tập

Miền	**Tập biểu diễn**	**Tập**	**Miền biểu diễn**
1	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$	A	2, 5, 6, 8
2	$A - (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$	B	3, 5, 7, 8
3	$B - (A \cup C) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C}$	C	4, 6, 7, 8
4	$C - (A \cup B) = C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$	$A \cup B$	2, 3, 5, 6, 7, 8
5	$A \cap B - C = A \cap B \cap \overline{C}$	$A \cap B$	5, 8
6	$A \cap C - B = A \cap C \cap \overline{B}$	$A \,\Delta\, B$	2, 3, 6, 7
7	$B \cap C - A = B \cap C \cap \overline{A}$	$A - B$	2, 6
8	$A \cap B \cap C$	$\overline{A}$	1, 3, 4, 7

Ví dụ 3.7. Chứng minh

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{(A \cup B) \cap C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}$

Giải. a) Theo Hình 3.1

Tập cấu thành		Vế trái		Vế phải	
A	2, 4	$A \cap B$	4	$\overline{A}$	1, 3
B	3, 4	$\overline{A \cap B}$	1, 2, 3	$\overline{B}$	1, 2
				$\overline{A} \cup \overline{B}$	1, 2, 3

b) Theo Hình 3.2

Tập cấu thành		Vế trái		Vế phải	
A	2, 5, 6, 8	$A \cup B$	2, 3, 5, 6, 7, 8	$\overline{A}$	1, 3, 4, 7
B	3, 5, 7, 8	$(A \cup B) \cap C$	6, 7, 8	$\overline{B}$	1, 2, 4, 6
C	4, 6, 7, 8	$\overline{(A \cup B) \cap C}$	1, 2, 3, 4, 5	$\overline{C}$	1, 2, 3, 5
				$\overline{A} \cap \overline{B}$	1, 4
				$(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}$	1, 2, 3, 4, 5

Một cách khác để chứng minh quan hệ tập con hay đẳng thức giữa các hợp là dùng bảng thành phần. Một biểu thức tập hợp $\mathcal{A}$ cấu thành từ các tập $A, B, C, \ldots$ và các phép toán tập hợp. Ứng với mỗi tập cấu thành A, xét tất cả các trường hợp có thể có của một phần tử x: nếu $x \in A$ ta ghi 1, $x \notin A$ ta ghi 0. Giá trị 1/0 (thuộc/không thuộc) của x đối với phép toán tập hợp được ghi tương tự.

Bảng thành phần được xây dựng rất giống bảng chân lý của công thức mệnh đề. Với mỗi tập cấu thành A, ta có biến mệnh đề $x \in A$. Biểu thức tập hợp $\mathcal{A}$ có giá trị chân lý 1, 0 tương ứng chỉ $x \in \mathcal{A}$ và $x \notin \mathcal{A}$. Khi đó với hai công thức tập hợp $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$

a) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ nếu hai cột thành phần tương ứng của chúng giống nhau.

b) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ nếu giá trị tại cột thành phần của $\mathcal{A}$ là 1 ($x \in \mathcal{A}$) thì giá trị tương ứng ở dòng đó tại cột thành phần của $\mathcal{B}$ cũng là 1 ($x \in \mathcal{B}$).

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$A \,\Delta\, B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Nhận xét: bảng thành phần của các biểu thức tập hợp $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, và $A \,\Delta\, B$ trùng với bảng chân lý phép toán logic $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, và $p \veebar q$, trong đó $p = (x \in A)$ và $q = (x \in B)$.

Ví dụ 3.8. Chứng minh $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Giải.

A	$\cup$	$(B$	$\cap$	$C)$	$(A$	$\cup$	$B)$	$\cap$	$(A$	$\cup$	$C)$
	2		1			1		3		2	
0	**0**	0	0	0		0		**0**		0	
0	**0**	0	0	1		0		**0**		1	
0	**0**	1	0	0		1		**0**		0	
0	**1**	1	1	1		1		**1**		1	
1	**1**	0	0	0		1		**1**		1	
1	**1**	0	0	1		1		**1**		1	
1	**1**	1	0	0		1		**1**		1	
1	**1**	1	1	1		1		**1**		1	

□

Sử dụng quy luật của tập hợp giúp ta biến đổi biểu thức tập hợp linh hoạt.

Ví dụ 3.9. Rút rọn biểu thức $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$.

$$
\begin{array}{lll}
 & \overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}} & \textbf{Lý do} \\
= & \overline{\overline{(A \cup B) \cap C}} \cap \overline{\overline{B}} & \text{Luật DeMorgan} \\
= & [(A \cup B) \cap C] \cap B & \text{Luật phần bù kép} \\
= & (A \cup B) \cap (C \cap B) & \text{Luật kết hợp của phép giao} \\
= & (A \cup B) \cap (B \cap C) & \text{Luật giao hoán của phép giao} \\
= & [(A \cup B) \cap B] \cap C & \text{Luật kết hợp của phép giao} \\
= & B \cap C & \text{Luật hút}
\end{array}
$$

Các phép biến đổi cùng với lý do trong Ví dụ 3.9 tương tự các bước kèm theo lý do khi chứng minh $\neg\{[\neg(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q\} \Leftrightarrow q \wedge r$ trong Ví dụ 2.7.

Ví dụ 3.10. Biểu diễn $\overline{A - B}$ theo các phép toán lấy phần bù, $\cup$, và $\cap$.

Chứng minh. Theo định nghĩa, $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$. Do đó

$$
\begin{array}{rll}
\overline{A - B} & = \overline{A \cap \overline{B}} & \textbf{Lý do} \\
 & = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} & \text{Luật DeMorgan} \\
 & = \overline{A} \cup B & \text{Luật phần bù kép}
\end{array}
$$

□

Ví dụ 3.11. Chứng minh

a) $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ b) $\overline{A \Delta B} = A \Delta \overline{B}$

Giải. a) Theo định nghĩa

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B},$$

nên

$$
\begin{array}{rll}
A \Delta B & = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) & \textbf{Lý do} \\
 & = [A \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \cup [B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] & \text{Luật phân phối} \\
 & = [(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})] \cup [(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B})] & \text{Luật phân phối} \\
 & = [\varnothing \cup (A \cap \overline{B})] \cup [(B \cap \overline{A}) \cup \varnothing] & \text{Luật ngược} \\
 & = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) & \text{Luật đồng nhất} \\
 & = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) & \text{Luật giao hoán}
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{lll}
\overline{A\,\Delta\,B} & = \overline{(A\cup B)\cap\overline{A\cap B}} & \textbf{Lý do} \\
 & = \overline{A\cup B}\cup\overline{\overline{A\cap B}} & \text{Luật DeMorgan} \\
 & = (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap B) & \text{Luật DeMorgan, phần bù kép} \\
 & = [(\overline{A}\cap\overline{B})\cup A]\cap[(\overline{A}\cap\overline{B})\cup B] & \text{Luật phân phối} \\
 & = [(\overline{A}\cup A)\cap(\overline{B}\cup A)]\cap[(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)] & \text{Luật phân phối} \\
 & = [\mathcal{U}\cap(\overline{B}\cup A)]\cap[(\overline{A}\cup B)\cap\mathcal{U}] & \text{Luật ngược} \\
 & = (\overline{B}\cup A)\cap(\overline{A}\cup B) & \text{Luật đồng nhất} \\
 & = (A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B) & \text{Luật giao hoán}
\end{array}
$$

Mặt khác

$$
\begin{array}{lll}
A\,\Delta\,\overline{B} & = (A\cup\overline{B})\cap\overline{A\cap\overline{B}} & \\
 & = (A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}) & \text{Luật DeMorgan} \\
 & = (A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B) & \text{Luật phần bù kép}
\end{array}
$$

nên $\overline{A\,\Delta\,B} = A\,\Delta\,\overline{B}$.

□

Định nghĩa 3.8. *Cho tập chỉ số $I \neq \varnothing$, mỗi $i \in I$ gọi là một chỉ số. Định nghĩa hợp và giao của họ các tập*

$$
\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}
$$
$$
\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}.
$$

Như vậy

$$
x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i, \quad \text{và} \quad x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.
$$

Suy ra

$$
x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \neg\exists i \in I,\ x \in A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\ x \notin A_i, \quad \text{và}
$$
$$
x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \neg\forall i \in I,\ x \in A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\ x \notin A_i.
$$

Khi $I = \mathbb{Z}^+$, ta viết

$$
\bigcup_{i\in\mathbb{Z}^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i
$$
$$
\bigcap_{i\in\mathbb{Z}^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.
$$

Ví dụ 3.12. Xét $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Với $i \in I$ đặt $A_i = \{1, 2, \dots, i\}$. Ta có

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=3}^{7} A_i = \{1, 2, \dots, 7\} = A_7$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{1, 2, 3\} = A_3.$$

Ví dụ 3.13. Với $r \in \mathbb{R}^+$ đặt $A_r = [-r, r]$. Khi đó

$$\bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} A_r = \mathbb{R} \quad \text{và} \quad \bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} A_r = \{0\}.$$

Định lý 3.7 (Luật DeMorgan tổng quát)**.**

a) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

b) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

Bài tập 3.2

3.21. Với $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$, cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, và $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm

a) $(A \cup B) \cap C$

b) $A \cup (B \cap C)$

c) $\overline{C} \cup \overline{D}$

d) $\overline{C \cap D}$

e) $(A \cup B) - C$

f) $A \cup (B - C)$

g) $(B - C) - D$

h) $B - (C - D)$

i) $(A \cup B) - (C \cap D)$

3.22. Cho $A = [0, 3]$, $B = [2, 7)$, với $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Tìm

a) $A \cap B$

b) $A \cup B$

c) $\overline{A}$

d) $A \,\Delta\, B$

e) $A - B$

f) $B - A$

3.23. a) Tìm các tập A, B nếu $A - B = \{1, 3, 7, 11\}$, $B - A = \{2, 6, 8\}$, và $A \cap B = \{4, 9\}$.

b) Tìm các tập C, D nếu $C - D = \{1, 2, 4\}$, $D - C = \{7, 8\}$, và $C \cup D = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

3.24. Cho $A, B, C, D, E \subseteq \mathbb{Z}$ xác định bởi
$A = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ –tức là, A là tập các số nguyên là bội của 2;

$B = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; $C = \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; $D = \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; $E = \{8n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Khẳng định nào dưới đây là đúng/sai?

i) $E \subseteq C \subseteq A$
ii) $A \subseteq C \subseteq E$
iii) $B \subseteq D$
iv) $D \subseteq B$
v) $D \subseteq A$
vi) $\overline{D} \subseteq \overline{A}$

b) Tìm các tập

i) $C \cap E$
ii) $B \cup D$
iii) $A \cap B$
iv) $B \cap D$
v) $\overline{A}$
vi) $A \cap E$

3.25. Chỉ ra khẳng định sau là đúng hay sai.

a) $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Q}^+$
b) $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Q}$
c) $\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{R}$
d) $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{Q}$
e) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{Q}^+$
f) $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$
g) $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}^+$
h) $\mathbb{C} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$
i) $\mathbb{Q}^* \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

3.26. Không sử dụng biểu đồ Venn và bảng thuộc tập, chứng minh

a) Nếu $A \subseteq B$ và $C \subseteq D$, thì $A \cap C \subseteq B \cap D$ và $A \cup C \subseteq B \cup D$.

b) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \varnothing$.
c) $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = \mathcal{U}$.

3.27. Cho các tập A, B, C bất kỳ. Chứng minh hoặc bác bỏ khẳng định sau

a) $A \cap B = B \cap C \Rightarrow A = B$.
b) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.
c) $A \cap C = B \cap C \ \wedge\ A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$.
d) $A \,\Delta\, C = B \,\Delta\, C \Rightarrow A = B$.

3.28. Dùng biểu đồ Venn, khảo sát tính đúng sai của

a) $A \,\Delta\, (B \cap C) = (A \,\Delta\, B) \cap (A \,\Delta\, C)$
b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
c) $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$

3.29. Nếu $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, x, y\}$, và $C = \{x, z\}$, có bao nhiêu tập con thực sự của tập $(A \cap B) \cup C$? của $A \cap (B \cup C)$?

3.30. Viết khẳng định đối ngẫu của các khẳng định sau

a) $\mathcal{U} = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
b) $A = A \cap (A \cup B)$
c) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
d) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \varnothing)$

3.31. Dùng tương đương $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ để chỉ ra đối ngẫu của khẳng định $A \subseteq B$ là khẳng định $B \subseteq A$.

3.32. Cho hai tập A, B. Chứng minh hoặc bác bỏ

a) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
b) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

3.33. Dùng bảng thuộc tập để chứng minh

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cup A = A$

c) $A \cup (A \cap B) = A$

d) $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{C})$

3.34. a) Bảng thuộc tập của $A \cap (B \cup C) \cap (D \cup \overline{E} \cup \overline{F})$ có bao nhiêu hàng?

b) Bảng thuộc tập của biểu thức phụ thuộc n tập $A_1, A_2, \ldots, A_n$ với các phép toán $\cap, \cup$ và $\overline{}$?

c) Cho bảng thuộc tập của hai biểu thức tập hợp A, B, chỉ ra dấu hiệu nhận biết quan hệ $A \subseteq B$.

d) Dùng bảng thuộc tập để xác định có hay không $(A \cap B) \cup \overline{B \cap C} \supseteq A \cup \overline{B}$.

3.35. Cho biết lý do của mỗi bước biến đổi sau để rút gọn tập $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))]$.

Bước	**Lý do**
$(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))]$	
$= (A \cap B) \cup [B \cap (C \cap (D \cup \overline{D}))]$	
$= (A \cap B) \cup [B \cap (C \cap \mathcal{U})]$	
$= (A \cap B) \cup (B \cap C)$	
$= (B \cap B) \cup (B \cap C)$	
$= B \cap (A \cup C)$	

3.36. Dùng quy luật của tập hợp, rút gọn

a) $A \cap (B - A)$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C} \cap D) \cup (\overline{A} \cap B)$

c) $(A - B) \cup (A \cap B)$

d) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$

3.37. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$. Tìm $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{11} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{m} A_n$, và $\bigcap_{n=1}^{m} A_n$, trong đó $m \in \mathbb{Z}^+$.

3.38. Cho $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $A_n = [-2n, 3n]$. Tìm

a) A_3

b) A_4

c) $A_3 - A_4$

d) $A_3 \,\Delta\, A_4$

e) $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$

f) $\bigcap_{n=1}^{7} A_n$

g) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}^+} A_n$

h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

3.39. Chứng minh chi tiết Định lý 3.7(b).

3.3 Phép đếm và biểu đồ Venn

Cho ba tập hữu hạn A, B, C. Hình 3.1 cho thấy

a)

$$|A| + |\overline{A}| = |\mathcal{U}| \tag{3.10}$$

b) Nếu A và B rời nhau, ta có một dạng khác của quy tắc cộng

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{3.11}$$

c) Với hai tập A, B bất kỳ, vì $A \cap (B - A) = \varnothing$ nên

$$|A \cup B| = |A \cup (B - A)| = |A| + |B - A|$$

Mặt khác vì $(A \cap B) \cap (B - A) = \varnothing$ nên

$$|B| = |(A \cap B) \cup (B - A)| = |A \cap B| + |B - A| \Rightarrow |B - A| = |B| - |A \cap B|.$$

Do đó

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{3.12}$$

gọi là nguyên lý bù trừ cho hai tập.

d) Một dạng khác của nguyên lý bù trừ cho hai tập

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = |\mathcal{U}| - |A \cup B| = |\mathcal{U}| - |A| - |B| + |A \cap B|. \tag{3.13}$$

Hình 3.2, cho các phép đếm phức tạp hơn, chẳng hạn

d) các nguyên lý bù trừ cho ba tập

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{3.14}$$

e) và

$$\begin{aligned} |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| &= |\overline{A \cup B \cup C}| = |\mathcal{U}| - |A \cup B \cup C| \\ &= |\mathcal{U}| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Các công thức này được chứng minh chặt chẽ bằng cách áp dụng nguyên lý bù trừ cho hai tập và quy luật của tập hợp.

Ví dụ 3.14. Một lớp 50 sinh viên, trong đó có 30 người học C++, 25 người học Java, và 5 người chưa học ngôn ngữ nào. Có bao nhiêu người

a) học ít nhất một ngôn ngữ.

b) học cả hai ngôn ngữ.

Giải. Đặt $\mathcal{U}$ là tập sinh viên của lớp, A, B tương ứng là tập sinh viên học C++ và Java. Theo giả thiết

$$|\mathcal{U}| = 50, |A| = 30, |B| = 25, |\overline{A} \cap \overline{B}| = 5.$$

a) Số sinh viên học ít nhất một ngôn ngữ

$$|A \cup B| = |\mathcal{U}| - |\overline{A \cup B}| = |\mathcal{U}| - |\overline{A} \cap \overline{B}| = 50 - 5 = 45.$$

b) Từ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, suy ra số sinh viên học cả hai ngôn ngữ là

$$|A \cap B| = 30 + 25 - 45 = 10.$$

□

Ví dụ 3.15. Sau mỗi buổi học, từ thứ hai đến thứ sáu, một sinh viên giải trí bằng một trong ba trò chơi Minecraft, PUBG, hoặc PES. Có bao nhiêu cách để sinh viên chơi một trò chơi mỗi ngày sao cho trong năm ngày đó, mỗi trò chơi được chơi ít nhất một lần.

Giải. Đặt $\mathcal{U}$ là tập các cách để sinh viên chọn một trò chơi trong mỗi ngày, A, B, C là tập các cách như vậy sao cho trong năm ngày đó, trò Minecraft (tương ứng, PUBG, và PES) được chơi ít nhất một lần. Ta cần tính

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}}| = |\mathcal{U}| - |\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}| \\ &= |\mathcal{U}| - |\overline{A}| - |\overline{B}| - |\overline{C}| + |\overline{A} \cap \overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{C}| + |\overline{B} \cap \overline{C}| - |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|. \end{aligned}$$

Theo quy tắc nhân, $|\mathcal{U}| = 3^5$.

Vì $\overline{A}$ là tập các cách chơi một trò chơi trong mỗi ngày sao cho không có ngày nào chơi Minecraft, nên cũng theo quy tắc nhân, $|\overline{A}| = 2^5$. Tương tự

$$|\overline{B}| = |\overline{C}| = 2^5; |\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A} \cap \overline{C}| = |\overline{B} \cap \overline{C}| = 1; \text{ và } |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = 0.$$

Do đó

$$|A \cap B \cap C| = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1 - 0 = 150.$$

□

Bài tập 3.3

3.40. Có bao nhiêu xâu nhị phân bắt đầu bởi ba số 1 hoặc kết thúc bởi bốn số 0.

3.41. Tìm $|A \cup B \cup C$ biết $|A| = 50$, $|B| = 500$, $|C| = 5000$, và một điều kiện sau

a) $A \subseteq B \subseteq C$

b) $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing$

c) $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 3$ và $|A \cap B \cap C| = 1$

3.42. Có bao nhiêu hoán vị của các chữ số 0, 1, 2, . . . , 9 bắt đầu là 3 và kết thúc là 7.

3.43. Có bao nhiêu hoán vị của 26 chữ cái tiếng Anh

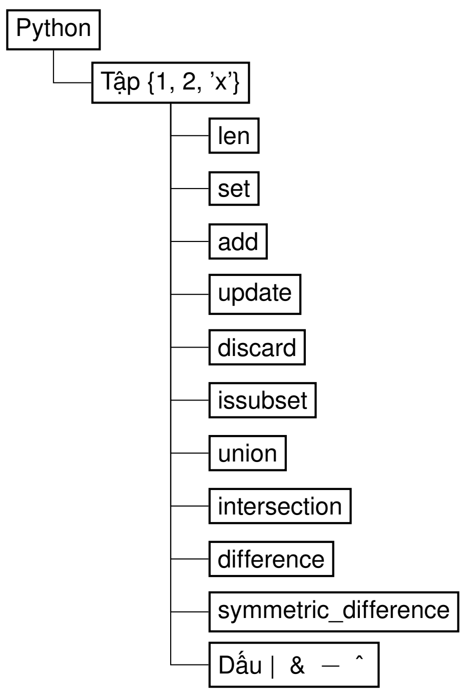
a) chứa từ “OUT” hoặc từ “DIG”?

b) không chứa từ “MAN” cũng không chứa từ “ANT”?

3.44. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ MISCELLANEOUS để không có hai chữ liên tiếp giống nhau?

3.45. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ CHEMIST để có H trước E, hoặc E trước T, hoặc T trước M? (Ở đây “trước” có nghĩa là ở vị trí bất kỳ đứng trước, không phải đứng ngay trước.)

3.4 Tóm tắt



Bài tập bổ sung

3.46. Chứng minh $A - B \subseteq C \Leftrightarrow A - C \subseteq B$.

3.47. Cho $n, r \in \mathbb{Z}$ với $n \geq r \geq 2$. Dùng tổ hợp để chứng minh

$$\binom{n+2}{r} = \binom{n}{r} + 2\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r-2}.$$

3.48. Chứng minh hoặc bác bỏ (bằng phản ví dụ)

a) $A - C = B - C \Rightarrow A = B$

b) $(A \cap C = B \cap C) \wedge (A - C = B - C) \Rightarrow A = B$

c) $(A \cup C = B \cup C) \wedge (A - C = B - C) \Rightarrow A = B$

3.49. a) Có bao nhiêu cách chia nhóm 7 sinh viên thành hai đội mà mỗi đội có ít nhất một người? hai người?

b) Trả lời ý (a) khi thay 7 bởi số nguyên $n \geq 4$.

3.50. Chỉ ra các khẳng định sau đúng hay sai. Nếu sai, hãy nêu phản ví dụ.

a) Nếu A và B vô hạn, thì $A \cap B$ vô hạn.

b) Nếu B vô hạn và $A \subseteq B$, thì A vô hạn.

c) Nếu $A \subseteq B$ và B vô hạn, thì A vô hạn.

d) Nếu $A \subseteq B$ và A vô hạn, thì B vô hạn.

3.51. Cho tập A có 128 tập con cỡ chẵn.

a) Có bao nhiêu tập con cỡ lẻ của A?

b) $|A| =?$

3.52. Cho $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$.

a) Có bao nhiêu tập con của A chứa tất cả số lẻ của A?

b) Có bao nhiêu tập con của A chứa đúng ba số lẻ?

c) Có bao nhiêu tập con tám phần tử của A có đúng ba số lẻ?

d) Viết chương trình máy tính (hoặc thuật toán) để tạo tập con tám phần tử ngẫu nhiên của A và đếm các số lẻ trong tập con đó.

3.53. Chứng minh $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

3.54. Cho tập nền $\mathcal{U}$ có $|\mathcal{U}| = 12$ và $|A \cap B| = 3$, $|A \cup B| = 8$.

a) Có bao nhiêu tập con $C \subseteq \mathcal{U}$ thỏa mãn $A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B$? Có bao nhiêu tập C như vậy có cỡ chẵn?

b) Có bao nhiêu tập con $D \subseteq \mathcal{U}$ thỏa mãn $\overline{A \cup B} \subseteq D \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$? Có bao nhiêu tập D như vậy có cỡ chẵn?

3.55. Cho $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, với $q \in \mathbb{Q}^+$, đặt $A_q = [0, 2q]$ và $B_q = (0, 3q]$. Tìm

a) $A_{7/3}$

b) $A_3 \Delta A_4$

c) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^+} A_q$

d) $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}^+} B_q$

3.56. Chứng minh

a) $A \Delta B = B \Delta A$

b) $A \Delta \overline{A} = \mathcal{U}$

c) $A \Delta \mathcal{U} = \overline{A}$

d) $A \Delta \varnothing = A$, nên A là đơn vị của Δ, cũng như của $\cup$.

3.57. a) Tìm số cách sắp xếp m số 1 và r số 0 không có số 1 kề nhau. Nêu điều kiện của m, r.

b) Nếu $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, có bao nhiêu tập $A \subseteq \mathcal{U}$ sao cho $|A| = k$ và A không chứa các số nguyên liên tiếp?

Tài liệu tham khảo

[1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. phiên bản 6. Pearson, 2022. 755 trang.

[3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.

[4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.

[5] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. phiên bản 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.

[6] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. phiên bản 3. Brooks/-Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.

[7] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. phiên bản 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.

[8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.