Mục lục

Chương 4

Đạo hàm và tích phân bằng số

Trong Chương 3, giả sử với các cách chọn mốc nội suy thích hợp, ta xây dựng được các đa thức nội suy tương ứng $P(x)$ của $f(x)$. Vì nói chung, $f(x)$ chưa biết, nên trong các tính toán, ta thường thay $f(x)$ bởi $P(x)$:

$$f^{(k)}(x) \approx P^{(k)}(x), \ k = 0, 1, 2, \dots, \text{ và}$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx.$$

Xét hàm số $f(x)$, mà tại các mốc x_i, $i = \overline{0, n}$, ta đã xác định được $f(x_i) = y_i$. Ta có

$$f(x) = P(x) + r(x)$$

trong đó

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x),$$
$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Để việc đánh giá sai số sau này được thuận lợi, ta thường xét các mốc nội suy cách đều, với $x_i - x_{i-1} = h,\ \forall i = \overline{1, n}$. Khi đó

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k y_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (t - i), \\ r(x) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} t(t-1)\cdots(t-n) f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right) \end{aligned}$$

với $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

4.1 Đạo hàm bằng số

Giả sử $g(x) = f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)$ khả vi tới cấp cần thiết*. Ta có

$$f^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) + r^{(k)}(x)$$

Ở đây $P'(x) = \partial_t P \cdot \partial_x t$, với $\partial_x t = \dfrac{1}{h}$, và tổng quát $P^{(k)}(x) = \dfrac{1}{h^k} \partial_{t^k} P$. Ngoài ra

$$\begin{aligned} r^{(k)}(x) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \partial_{x^i} \left[t(t-1)\cdots(t-n)\right] \times g^{(k-i)}(x) \right\} \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \partial_{t^i} \left[t(t-1)\cdots(t-n)\right] \frac{1}{h^i} \times g^{(k-i)}(x) \right\} \\ &= O\left(h^{n-k+1}\right). \end{aligned}$$

Trong tính toán, có thể n rất lớn. Khi đó, ta không nội suy $f(x)$ tại tất cả các mốc $x_i,\ i = \overline{0, n}$. Với mỗi x, để xấp xỉ $f^{(k)}(x)$, ta chọn một số lượng mốc liên liếp nhất định sao cho bên trái và bên phải x có số mốc bằng nhau, hoặc cùng lắm là chênh nhau một mốc. Sau đó mới xây dựng đa thức nội suy của $f(x)$ tại các mốc đó.

4.1.1 Công thức hai điểm

Với hai mốc nội suy x_0, x_1:

$$P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\, t.$$

Ta được

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} f''\left(\xi(x_0)\right) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$$

*Giả thiết này khó có thể kiểm tra được, vì ngoài f ra, bản thân $\xi(x)$ cũng chưa biết gọi là công thức sai phân tiến. Tương tự, ta cũng có công thức sai phân lùi

$$f'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{h}{2} f''\left(\xi(x_1)\right) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h).$$

Nếu chủ yếu sử dụng công thức sai phân tiến để xấp xỉ $f'(x_i)$, thì

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{2} f''\left(\xi(x_i)\right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \ i = \overline{0, n-1}, \text{ và} \\ f'(x_n) &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2} f''\left(\xi(x_n)\right) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h). \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1.2 Công thức ba điểm

Với ba mốc nội suy x_0, x_1, x_2:

$$P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)t + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2} t(t-1)$$

Ta được các công thức tính gần đúng đạo hàm cấp một

$$f'(x_0) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''\left(\xi(x_0)\right) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + O\left(h^2\right), \tag{4.2a}$$

$$f'(x_1) = \frac{y_2 - y_0}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''\left(\xi(x_1)\right)$$

$$\Rightarrow f'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''\left(\xi(x_i)\right) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O\left(h^2\right), \ i = \overline{1, n-1}, \tag{4.2b}$$

$$f'(x_2) = \frac{3y_2 - 4y_1 + y_0}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''\left(\xi(x_2)\right)$$

$$\Rightarrow f'(x_n) = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''\left(\xi(x_n)\right) = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} + O\left(h^2\right). \tag{4.2c}$$

và xấp xỉ đạo hàm cấp hai

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - hg(x_0) + \frac{2h^2}{3} g'(x_0) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + O(h) \\ f''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{3} g'(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O\left(h^2\right), \ i = \overline{1, n-1} \\ f''(x_n) &= \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} + \frac{2h^2}{3} g'(x_n) + hg(x_n) = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} + O(h). \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1.3 Công thức bốn điểm

Với bốn mốc nội suy x_0, x_1, x_2, x_3:

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) \\ &= y_0 + (y_1 - y_0)t + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2} t(t-1) + \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6} t(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Công thức xấp xỉ $f'(x_i)$:

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{2y_3 - 9y_2 + 18y_1 - 11y_0}{6h} \underbrace{-\frac{h^3}{4} g(x_0)}_{O(h^3)} \\
f'(x_i) &= \frac{-y_{i+2} + 6y_{i+1} - 3y_i - 2y_{i-1}}{6h} + \underbrace{\frac{h^3}{12} g(x_i)}_{\text{cũng là } O(h^3)}, \quad i = \overline{1, n-2} \\
f'(x_{n-1}) &= \frac{2y_n + 3y_{n-1} - 6y_{n-2} + y_{n-3}}{6h} - \frac{h^3}{12} g(x_{n-1}) \\
f'(x_n) &= \frac{11y_n - 18y_{n-1} + 9y_{n-2} - 2y_{n-3}}{6h} + \frac{h^3}{4} g(x_n).
\end{aligned}
$$

Công thức xấp xỉ $f''(x_i)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x_0) &= \frac{-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0}{h^2} + \underbrace{\frac{11h^2}{12} g(x_0) - \frac{h^3}{2} g'(x_0)}_{O(h^2)} \\
f''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \underbrace{-\frac{h^2}{12} g(x_i) + \frac{h^3}{6} g'(x_i)}_{O(h^2)}, \quad i = \overline{1, n-2} \\
f''(x_{n-1}) &= \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} - \frac{h^2}{12} g(x_{n-1}) - \frac{h^3}{6} g'(x_{n-1}) \\
f''(x_n) &= \frac{2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}}{h^2} + \frac{11h^2}{12} g(x_3) + \frac{h^3}{2} g'(x_3).
\end{aligned}
$$

Tương tự

$$
\begin{aligned}
f'''(x_i) &= \frac{y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}}{h^3} + O(h), \quad i = \overline{1, n-2} \\
f'''(x_0) &= \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3} + O(h); \\
f'''(x_{n-1}),\ f'''(x_n) &= \frac{y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}}{h^3} + O(h).
\end{aligned}
$$

Để rút gọn quá trình xây dựng công thức, ta dùng mã sau

```
from sympy import *
x, t, h, x0 = symbols('x t h x0')
g = symbols('g', cls=Function)  # khai báo hàm bất định

n = 2                           # n mốc nội suy x_0, x_1, ..., x_{n-1}, ứng
    với công thức n-điểm
```

```
Y = MatrixSymbol('Y', n, 1)
D = [Y[i] for i in range(n)]              # sai phân

P = D[0]                                  # đa thức nội suy
for k in range(1, n):
    for i in range(n - k):
        D[i] = D[i + 1] - D[i]            # Δ^k y_i
    N = D[0]
    for i in range(k):
        N *= (t - i) / (i + 1)            # (Δ^k y_0 / k!) t(t − 1)···(t − k + 1)
    P += N
P                                         # t(−Y_{0,0} + Y_{1,0}) + Y_{0,0}

k = 1                                     # cấp đạo hàm
r = 1 / factorial(n) * g(x)
for i in range(n):
    r *= x - x0 - i * h

for i in range(n):
    display((P.diff(t, k) / h**k).subs(t, i))   # P^k(x_i)
    display(r.diff(x, k).subs(x, x0 + i * h))   # r^(k)(x_i)
```

Ta thấy việc xác định phần dư khi xấp xỉ đạo hàm cấp hai trở lên khá phức tạp. Riêng với xấp xỉ đạo hàm cấp hai, ta có một cách khá đẹp, bằng khai triển Taylor.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{1}{2}f''(x_0)\,h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)\,h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}\left(\xi_1\right)h^4, \text{ và}$$
$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)\,h + \frac{1}{2}f''(x_0)\,h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)\,h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}\left(\xi_{-1}\right)h^4$$

trong đó $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$. Cộng hai phương trình, được

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)\,h^2 + \frac{1}{24}\left[f^{(4)}\left(\xi_1\right) + f^{(4)}\left(\xi_{-1}\right)\right].$$

Giải phương trình này theo biến $f''(x_0)$, ta có

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}\left[f^{(4)}\left(\xi_1\right) + f^{(4)}\left(\xi_{-1}\right)\right].$$

Giả sử $f \in C^4[x_0 - h, x_0 + h]$. Vì $\frac{1}{2}\left[f^{(4)}\left(\xi_1\right) + f^{(4)}\left(\xi_{-1}\right)\right]$ ở giữa $f^{(4)}\left(\xi_1\right)$ và $f^{(4)}\left(\xi_{-1}\right)$, theo định lý giá trị trung gian, tồn tại ξ ở giữa ξ_1 và ξ_{-1}, và vì thế $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$, sao cho

$$f^{(4)}\left(\xi\right) = \frac{1}{2}\left[f^{(4)}\left(\xi_1\right) + f^{(4)}\left(\xi_{-1}\right)\right].$$

Do đó

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \underbrace{-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)}_{O(h^2)}.$$

Tổng quát

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f(\xi), \quad i = \overline{1, n-1} \tag{4.4}$$

trong đó $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$.

4.2 Ngoại suy Richardson

4.3 Tích phân bằng số

Giả sử ta cần đánh giá tích phân xác định

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

của hàm $f(x)$ không có nguyên hàm hoặc khó tính được nguyên hàm. Ta thường thực hiện hai bước:

1) Chia đoạn $[a, b]$ thành N đoạn, bởi các điểm $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_N = b$. Theo tính chất của cận lấy tích phân

$$I = \sum_{i=1}^{N} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)\,dx,$$

trong đó mỗi tích phân $I_i = \displaystyle\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)\,dx$ được xấp xỉ bởi cùng một quy tắc nào đó.

2) Để đơn giản về mặt ký hiệu, ta trình bày quy tắc xấp xỉ này cho chính $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Một phương pháp cơ bản là xấp xỉ I bằng $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i y_i$, với $y_i = f(x_i)$, $x_i \in [a, b]$, gọi là phương pháp cầu phương số.

Các phương pháp cầu phương trong phần này dựa vào đa thức nội suy được xây dựng trong Chương 3. Giả sử $P(x)$ là đa thức nội suy của $f(x)$ tại các mốc nội suy x_i, $i = \overline{0, n}$. Nhắc lại

$$f(x) = P(x) + r(x)$$

trong đó

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x),$$

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b P(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_i(x)dx + \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)dx\end{aligned}$$

Do đó, công thức cầu phương là

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i y_i$$

trong đó $a_i = \displaystyle\int_a^b L_i(x)\,dx$, với độ lệch

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)dx.$$

Bằng cách sử dụng sử dụng đa thức nội Lagrange bậc một và bậc hai với các mốc cách đều, ta được quy tắc hình thang và quy tắc Simpson.

4.3.1 Quy tắc hình thang

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{h^3}{12}f''\left(\xi\right)$$

trong đó $h = x_1 - x_0$, $\xi \in (x_0, x_1)$.

Nếu chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, thì

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_{i-1}\right)\frac{y_{i-1} + y_i}{2} \tag{4.5}$$

với sai số

$$\varepsilon_2 = \frac{M_2(b-a)\,d^2}{12} \tag{4.6}$$

trong đó $d = \max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i - x_{i-1}\right|$, $\left|f''(x)\right| \le M_2\ \forall x \in [a, b]$. Ở đây chỉ số 2 trong ký hiệu ε_2 để chỉ số mốc nội suy trong phương pháp.

Trường hợp đặc biệt, khi các điểm mốc cách đều $x_i - x_{i-1} = h,\ \forall i = \overline{1,n}$, thì $d = h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n}$, và

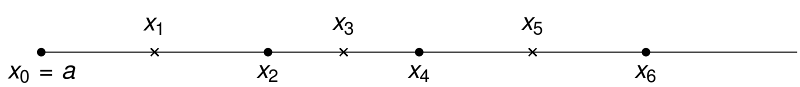
$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i-1} + y_i\right) \\ &= h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{M_2\,(b-a)\,h^2}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3.2 Quy tắc Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = h\frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3} - \frac{h^5}{90}f^{(4)}\left(\xi\right)$$

trong đó $h = \dfrac{x_2 - x_0}{2}$, các mốc x_0, x_1, x_2 cách đều, tức là $x_1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2}$, và $\xi \in (x_0, x_2)$.

Chia đoạn $[a, b]$ thành $2n$ đoạn bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{2n} = b$, trong đó trên mỗi đoạn $\left[x_{2i-2}, x_{2i}\right]$, $i = \overline{1,n}$, các mốc $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$ cách đều, tức là $x_{2i-1} = \dfrac{x_{2i} + x_{2i-2}}{2}$. Cách chia này được mô tả bởi hình dưới đây.



Khi đó

$$I \approx \sum_{i=1}^{n}\left(x_{2i} - x_{2i-2}\right)\frac{y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}}{6} \tag{4.8}$$

với sai số

$$\varepsilon_3 = \frac{M_4\,(b-a)\,d^4}{180} \tag{4.9}$$

trong đó $d = \max\limits_{1 \le i \le 2n}\left|x_i - x_{i-1}\right|$, và $\left|f^{(4)}(x)\right| \le M_4\ \forall x \in [a, b]$.

Trường hợp đặc biệt, khi các mốc cách đều, $x_i - x_{i-1} = h,\ i = \overline{1,2n}$, thì $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,2n}$, và

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{h}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{2i} + 4y_{2i-1} + y_{2i-2}\right) = \\ &= \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_{2n}}{2} + 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + \cdots + y_{2n-2} + 2y_{2n-1}\right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{M_4\,(b-a)\,h^4}{180} = \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ví dụ 4.1. Cho hàm số $f(x) = e^{\sin x}$, $x \in [0, 2]$. Chia đều $[0, 2]$ thành 10 khoảng.

a) Bằng cách xây dựng đa thức nội suy bậc hai, tính gần đúng f', f'' tại các điểm chia. Từ đó so sánh với giá trị đúng.

b) Tính gần đúng $I = \int_0^2 e^{\sin x} dx$ và đánh giá sai số (theo hai phương pháp).

c) Để tính được gần đúng I với sai số 10^{-4}, cần chia đều $[0, 2]$ thành bao nhiêu khoảng. Tính gần đúng I với các khoảng chia đó (theo hai phương pháp).

Giải. a) $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$, $f''(x) = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right)$.

Theo công thức (4.2) và (4.3):

x	$f(x)$	$P'(x)$	$f'(x)$	$P''(x)$	$f''(x)$
0	1	$\boxed{1.00748}$	1	0.914121	1
0.2	1.21978	1.1903	1.19546	0.914121	0.929302
0.4	1.47612	1.3476	1.3596	0.658838	0.677444
0.6	1.75882	$\boxed{1.43222}$	1.45162	0.187323	0.204966
0.8	2.04901	1.40239	1.42756	−0.485541	−0.47528
1	2.31978	1.22668	1.25338	$\boxed{-1.27156}$	−1.27482
1.2	2.53968	0.898099	0.920274	−2.01429	−2.03362
1.4	2.67902	0.443601	0.455345	−2.53068	−2.56264
1.6	2.71712	−0.0772565	−0.0793387	−2.67789	−2.71365
1.8	2.64811	−0.586363	−0.601657	−2.41317	−2.44216
2	2.48258	$\boxed{-1.069}$	−1.03312	−2.41317	−1.82747

chẳng hạn

$$P'(0) = \frac{-1.47612 + 4 \cdot 1.21978 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 0.2}$$

$$P'(0.6) = \frac{2.04901 - 1.47612}{2 \cdot 0.2}$$

$$P'(2) = \frac{3 \cdot 2.48258 - 4 \cdot 2.64811 + 2.71712}{2 \cdot 0.2} \text{ và}$$

$$P''(1) = \frac{2.53968 - 2 \cdot 2.31978 + 2.04901}{0.2^2}.$$

```
from sympy import *
f = lambda x: E ** sin(x)

import numpy as np
```

```
X = np.linspace(0, 2, 11)
Y = [ f(x) for x in X ]

h = (2 - 0) / 10

(-Y[2] + 4*Y[1] - 3*Y[0]) / 2 / h
[ (Y[i+1] - Y[i-1]) / 2 / h for i in range(1, 10) ]
(3*Y[10] - 4*Y[9] + Y[8]) / 2 / h

from sympy import *
x = symbols('x')
f(x).diff()
[ f(x).diff().subs(x, a) for a in X ]

(Y[2] - 2*Y[1] + Y[0]) / h**2
[ (Y[i+1] - 2*Y[i] + Y[i-1]) / h**2 for i in range(1,
    10) ]
(Y[10] - 2*Y[9] + Y[8]) / h**2

f(x).diff(x, 2)
[ f(x).diff(x, 2).subs(x, a) for a in X ]
```

b) i) Phương pháp hình thang:

$$I \simeq \frac{0.2}{2}\left(\frac{1+2.48258}{2} + 1.21978 + 1.47612 + \cdots + 2.64811\right) = 4.22975.$$

Đánh giá $|f''(x)| = \left|e^{\sin x}\right| \left|\cos^2 x - \sin x\right| \leq e^1 \left(\left|\cos^2 x\right| + |\sin x|\right) \leq 2e = 5.43656 = M_2$. Suy ra sai số của phương pháp hình thang:

$$\varepsilon_{ht} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{5.43656(2-0)^3}{12 \cdot 10^2} = 0.0362438.$$

ii) Phương pháp Simpson:

$$I \simeq \frac{2 \cdot 0.2}{3}\left(\frac{1+2.48258}{2} + 2 \cdot 1.21978 + 1.47612 + 2 \cdot 1.75882 + \cdots + \right.$$
$$\left. + 2.71712 + 2 \cdot 2.64811\right) = 4.23656.$$

Ta có $f^{(4)}(x) = e^{\sin x}\left(-4\cos^2 x + \cos^4 x + \sin x - 6\cos^2 x \sin x + 3\sin^2 x\right)$, suy ra $\left|f^{(4)}(x)\right| \leq e^1(4+1+1+6+3) = 40.7742 = M_4$. Sai số của phương pháp Simpson:

$$\varepsilon_{pb} = \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} = \frac{40.7742(2-0)^5}{180 \cdot 10^4} = 0.000724875.$$

```
1 sum( [(X[i] - X[i-1]) * (Y[i] + Y[i-1]) / 2 for i in range(1, 11)] )   # công thức tổng quát

2 M2 = N(2 * E, 6)
3 M2 * (2-0)**3 / 12 / 10**2

4 sum( [(X[2*i] - X[2*i-2]) * (Y[2*i] + 4*Y[2*i-1] + Y[2*i-2]) / 6 for i in range(1, 6)] )

5 M4 = N(15 * E)
6 M4 * (2-0)**5 / 180 / 10**4
```

c) i) Phương pháp hình thang:

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} < 10^{-4} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12 \cdot 10^{-4}}} = 190.378 \Rightarrow \text{ Chọn } n = 191.$$

Khi đó $I \simeq 4.23651$.

ii) Phương pháp Simpson:

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} < 10^{-4} \Rightarrow 2n > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180 \cdot 10^{-4}}} = 16.4084 \Rightarrow \text{ Chọn } 2n = 18.$$

Khi đó $I \simeq 4.23653$.

```
1 sqrt( M2 * (2-0)**3 / 12 / 10**-4 )
2 # Sửa thông số dòng 4, 6 ý (a) → thực thi dòng 5 ý (a) → sửa và chạy dòng 1 ý (b)

3 ( M4 * (2-0)**5 / 180 / 10**-4 ) ** (1/4)
4 # Dòng 4, 5, 6 ý (a), dòng 4 ý (b)
```

□

4.3.3 Công thức Newton–Cotes đóng

4.3.4 Công thức Newton–Cotes mở

4.4 Tích phân Romberg

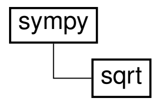
4.5 Phương pháp cầu phương thích ứng

4.6 Cầu phương Gauss

4.7 Tích phân bội

4.8 Tích phân suy rộng

Tóm tắt Python



Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.

[2] Richard L. Burden, Douglas J. Faires **and** Annette M. Burden. *Numerical Analysis*. phiên bản 10. Cengage Learning, 2016. 918 trang.

[3] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.0. 531 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[4] SciPy community. *SciPy Reference Guide*. phiên bản 1.8.1. 3584 trang. URL: https://docs.scipy.org/doc.

[5] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.

[6] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.

[7] Matplotlib development team. *Matplotlib documentation*. phiên bản 3.5.1. URL: https://matplotlib.org/3.5.1/tutorials/index.html.

[8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.