Mục lục

Chương 8

Lý thuyết xấp xỉ

8.1 Xấp xỉ bình phương nhỏ nhất

8.1.1 Bài toán tổng quát

Xét $(V, <\cdot,\cdot>)$ là không gian Euclide có tích vô hướng $< f, g >$ và chuẩn $\|f\| = \sqrt{<f, f>}$. Trong V cho không gian con W có cơ sở $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ và $f \notin W$. Tìm $P \in W$ sao cho $\|f - P\| = \min\limits_{Q \in W} \|f - Q\|$.

P gọi là xấp xỉ tốt nhất của f bởi không gian W, giá trị nhỏ nhất ở trên gọi là sai số của xấp xỉ.

Ta có

$$P = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i.$$

Xét

$$\begin{aligned} G(c) = \|f - P\|^2 &= <f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i, f - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i> \\ &= \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} <f, f_i> c_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} <f_i, f_j> c_i c_j \end{aligned}$$

Đặt

$$a_{ij} = <f_i, f_j>, \ b_i = <f, f_i> \tag{8.1}$$

ta có $a_{ij} = a_{ji}$ và

$$\frac{\partial G}{\partial c_i} = -2b_i + 2a_{ii}c_i + 2\sum_{j \neq i} a_{ij}c_j = -2b_i + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j.$$

$G(c)$ đạt cực tiểu thì c là điểm dừng

$$\frac{\partial G}{\partial c_i} = 0, \ \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Đặt $A = \left(a_{ij}\right)_n$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ thì

$$Ac = b \tag{8.2}$$

Hệ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ độc lập tuyến tính nên A là ma trận đối xứng xác định dương. Khi đó $\det A \neq 0$, suy ra hệ trên có nghiệm duy nhất.

Hơn nữa, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial c_i \partial c_j} = 2a_{ij}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$, nên ma trận $\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial c_i \partial c_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = 2A$ xác định dương. Vậy nghiệm duy nhất trên là cực tiểu của $G(c)$.

8.1.2 Xấp xỉ hàm rời rạc

V là không gian hàm xác định tại các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_N$ có tích vô hướng và chuẩn:

$$<f, g> = \sum_{k=1}^{N} f(x_k) g(x_k), \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} f^2(x_k)}.$$

Khi đó

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{N} f_i(x_k) f_j(x_k), \; b_i = \sum_{k=1}^{N} y_k f_i(x_k), \; i, j = \overline{1, n} \tag{8.3}$$

và sai số $\|f - P\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left[y_k - P(x_k)\right]^2}$.

Ví dụ 8.1. Tìm xấp xỉ bình phương nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ có giá trị trong bảng

x	1	1.3	1.7	2
y	3.5	4	4.6	5.2

bởi không gian hàm có cơ sở $\{1, x, \ln x\}$ và đánh giá sai số của xấp xỉ.

Giải. Lập bảng tính

1	1	1	1	1
x	1	1.3	1.7	2
$\ln x$	0	0.262364	0.530628	0.693147
P	3.51173	3.96557	4.64125	5.18146
$f - P$	−0.01173	0.03443	−0.04125	0.01854

Gọi xấp xỉ cần tìm $P(x) = a \cdot 1 + bx + c \ln x$. Ta có hệ

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1.48614 \\ 6 & 9.58 & \boxed{2.62944} \\ 1.48614 & 2.62944 & 0.830854 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.3 \\ 26.92 \\ \boxed{7.09471} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1.24243 \\ b = 2.2693 \\ c = -0.864993 \end{cases}$$

trong đó, ta tính chi tiết vài giá trị:

$$a_{23} = <x, \ln x> = 1 \cdot 0 + 1.3 \cdot 0.262364 + 1.7 \cdot 0.530628 + 2 \cdot 0.693147 = 2.62944$$

$$b_3 = <f, \ln x> = 3.5 \cdot 0 + 4 \cdot 0.262364 + 4.6 \cdot 0.530628 + 5.2 \cdot 0.693147$$
$$= 7.09471.$$

Ta được $P(x) = 1.24243 + 2.2693x - 0.864993 \ln x$. Quay lại bảng trên để hoàn tất hai hàng cuối.

Sai số của xấp xỉ

$$\sqrt{(-0.01173)^2 + 0.03443^2 + (-0.04125)^2 + 0.01854^2} = 0.0580325.$$

```
X = [1, 1.3, 1.7, 2.]
Y = [3.5, 4., 4.6, 5.2]

from sympy import *
x = symbols('x')
cs = [1 + 0*x, x, log(x)]  # biểu thức xuất hiện biến thì mới
    thế biến được

V = [ [cs_i.subs(x, X_k) for X_k in X] for cs_i in cs ]

import numpy as np
A = [ [np.dot(V_i, V_j) for V_j in V] for V_i in V ]
b = [np.dot(Y, V_i) for V_i in V]

hs = np.linalg.solve(
    np.array(A).astype(float),
    np.array(b).astype(float) )

P = hs.dot(cs)

[P.subs(x, X_k) for X_k in X]
errors = [Y_k - P.subs(x, X_k) for X_k, Y_k in zip(X, Y)]
np.linalg.norm(np.array(errors).astype(float))
```

□

Ví dụ 8.2. Tìm xấp xỉ bình phương nhỏ nhất của hàm số $z = f(x, y)$ có giá trị trong bảng

(x, y)	$(-0.7, -2.9)$	$(1.7, -1.1)$	$(-4.9, -2.9)$	$(3.1, 1.5)$	$(-1.3, 0.8)$
z	7.1	5.8	-3.1	-1	-8.7

bởi đa thức bậc nhất (hai biến) và đánh giá sai số của xấp xỉ.

Giải. $P(x, y) = a + bx + cy$ (cơ sở $\{1, x, y\}$).

$$\begin{bmatrix} 5 & -2.1 & -4.6 \\ -2.1 & 38.69 & 17.98 \\ -4.6 & 17.98 & 20.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 28.29 \\ -26.44 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -2.54722 \\ b = 2.39859 \\ c = -3.88546 \end{cases}$$

P	7.04161	5.80439	−3.03247	−0.939779	−8.77375
$f - P$	0.0583935	−0.0043924	−0.067531	−0.0602206	0.0737505

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{0.0583935^2 + 0.0043924^2 + \cdots + 0.0737505^2} = 0.130596.$

```
X = [-0.7, 1.7, -4.9, 3.1, -1.3]
Y = [-2.9, -1.1, -2.9, 1.5, 0.8]
Z = [7.1, 5.8, -3.1, -1, -8.7]

from sympy import *
x, y = symbols('x y')
cs = [1 + 0*x, x, y]

V = [ [cs_i.subs({x: X_k, y: Y_k}) for X_k, Y_k in zip(X, Y)] for cs_i in cs ]

import numpy as np
A = [ [np.dot(V_i, V_j) for V_j in V] for V_i in V ]
b = [np.dot(Z, V_i) for V_i in V]

hs = np.linalg.solve(
    np.array(A, dtype=float),
    np.array(b, dtype=float) )

P = hs.dot(cs)

[P.subs({x: X_k, y: Y_k}) for X_k, Y_k in zip(X, Y)]
errors = [Z_k - P.subs({x: X_k, y: Y_k}) for X_k, Y_k, Z_k in zip(X, Y, Z)]
np.linalg.norm( np.array(errors, dtype=float) )
```

□

8.1.3 Xấp xỉ hàm khả tích

Cho $V = \left\{f \mid \int_a^b f^2(x)\,dx < \infty\right\}$. Trên V xét tích vô hướng và chuẩn:

$$<f, g>= \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx, \; \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \tag{8.4}$$

Ví dụ 8.3. Tìm xấp xỉ bình phương nhỏ nhất của $f(x) = \sin x$ trên $[0, 1]$ bởi không gian hàm có cơ sở $\{1, x, e^x\}$. Đánh giá sai số của xấp xỉ.

Giải. Gọi xấp xỉ cần tìm $P(x) = a \cdot 1 + bx + ce^x$. Ta có hệ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.71828 \\ 0.5 & 0.333333 & \boxed{1} \\ 1.71828 & 1 & 3.19453 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.459698 \\ 0.301169 \\ \boxed{0.909331} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0.278208 \\ b = 1.33291 \\ c = -0.282237. \end{cases}$$

trong đó, chẳng hạn

$$a_{23} =<x, e^x>= \int_0^1 xe^x\,dx = 1$$
$$b_3 =<\sin x, e^x>= \int_0^1 e^x \sin x dx = 0.909331.$$

$\Rightarrow P(x) = 0.278208 \cdot 1 + 1.33291x - 0.282237e^x$.

Sai số $\|f - P\| = \sqrt{\int_0^1 [f(x) - P(x)]^2 dx} = 0.00125824$.

```python
from sympy import *
x = symbols('x')
f = sin(x)
cs = [1 + 0*x, x, E**x]  # biểu thức xuất hiện biến thì mới lấy được tích phân

A = [ [N( (cs_i * cs_j).integrate((x, 0, 1)) , 6 ) for cs_j in cs] for cs_i in cs ]
b = [N( (f * cs_i).integrate((x, 0, 1)) , 6 ) for cs_i in cs]

import numpy as np
hs = np.linalg.solve(
    np.array(A, dtype=float),
```

```
    np.array(b, dtype=float) )

P = hs.dot(cs)
sqrt( N( ((f - P)**2 ).integrate((x, 0, 1)) , 6 ) )
```

□

8.2 Đa thức trực giao và xấp xỉ bình phương nhỏ nhất

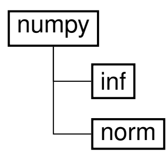
8.3 Đa thức Chebyshev và [Economization] chuỗi lũy thừa

8.4 Xấp xỉ hàm hữu tỷ

8.5 Xấp xỉ đa thức lượng giác

8.6 Biến đổi Fourier nhanh

Tóm tắt Python



Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.

[2] Richard L. Burden, Douglas J. Faires **and** Annette M. Burden. *Numerical Analysis*. phiên bản 10. Cengage Learning, 2016. 918 trang.

[3] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.0. 531 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[4] SciPy community. *SciPy Reference Guide*. phiên bản 1.8.1. 3584 trang. URL: https://docs.scipy.org/doc.

[5] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.

[6] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.

[7] Matplotlib development team. *Matplotlib documentation*. phiên bản 3.5.1. URL: https://matplotlib.org/3.5.1/tutorials/index.html.

[8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.