

Bài tập môn : TOÁN HỌC TÍNH TOÁN

Đối tượng : Lớp TH, PM, Logistics

Công cụ tính : MATLAB, Mathematica, Python, Máy tính bỏ túi

Thời gian : 30 giờ

Giải các phương trình sau bằng **phương pháp Newton**:

- Kiểm tra điều kiện thực hiện được phương pháp.
- Xác định xấp xỉ ban đầu x_0 và tìm nghiệm gần đúng tới x_3 .
- Tìm nghiệm với sai số cho trước 10^{-6} và cho biết số bước lặp đã thực hiện.
- Áp dụng **công thức Newton cải biên** để tính nghiệm gần đúng tới x_5 .

1. $x^3 + 2x = 4, x \in [1, 3]$
2. $x^3 + \sin x = 2, x \in [0, 2]$
3. $xe^x = 5, x \in [1, 3]$
4. $x(e^x + x) = 6, x \in [1, 2]$
5. $2^x + \sqrt[3]{x^2 + 1} = 5, x \in [1, 5]$
6. $x^2 = e^x + 2, x \in [-5, 0]$
7. $x \ln x + 2^x = 5, x \in [1, 4]$
8. $x^3 + \ln x = 3, x \in [1, 4]$

Giải các phương trình sau bằng **phương pháp điểm bất động (lặp đơn)**:

- Kiểm tra điều kiện thực hiện được phương pháp.
- Tự chọn xấp xỉ ban đầu, tìm nghiệm gần đúng và sai số sau 3 bước lặp.
- Tìm nghiệm với sai số cho trước 10^{-4} và cho biết số bước lặp đã thực hiện.
- Tìm số bước lặp cần thực hiện để thu được nghiệm gần đúng có sai số 10^{-8} .

9. $x = \sqrt[5]{32 - x}, x \in [0, 10]$
10. $x = \sqrt{2 - \sin x}, x \in [0, 2]$
11. $x = \frac{x \sin x + \cos x}{2}, x \in [-1, 1]$
12. $x = \frac{x^4 + \sin x - 1}{10}, x \in [-1, 1]$
13. $x + \lg x = 2, x \in [1, 4]$
14. $x^5 - x - 1 = 0, x \in [1, 3]$
15. $x^2 - 10 \lg x - 3 = 0, x \in [2, 5]$
16. $2x = e^{\sin x}, x \in [0, 3]$

Tìm nội suy $P(x)$ sinh bởi hệ hàm và thỏa mãn điều kiện cho trước:

17. $\{1, x\}: P(1) = -2, \int_0^\pi P(x) \sin x dx = 7$
18. $\{x, \cos x, e^x\}: P(0) = -1, P'(0) = 2, \int_{-1}^1 P(x) dx = 5$

Trình bày các phương pháp tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng:

19.

x	-2	1
y	8	-1
20.

x	-1	1	2
y	7	-1	1
21.

x	-3	-1	1	3
y	-16	2	4	-10
22.

x	0	0.5	1	1.5	2
y	-1	0.125	1	2.375	5

Trình bày các phương pháp tìm đa thức nội suy của hàm số tại các mốc nội suy cho trước:

23. $y = 2^x$ tại $-1, 1, 3$
24. $y = \sin x$ tại $0, \frac{\pi}{2}, \pi$
25. $y = \ln(x^2 + 1)$ tại $0, 0.5, 1, 2$
26. $y = \arctan x$ tại $-1, 0, 1, 2, 3$

27. Cho các mốc nội suy cách đều x_0, x_1, \dots, x_n . Tìm đa thức nội suy $P(x)$ biết $P(x_i) = y_i \quad \forall i = \overline{0, n}$ trong các trường hợp $n = 3, 4$.

Từ bảng giá trị của $f(x)$ tại các điểm chia $a = x_0, x_1, \dots, x_N = b$:

- Bằng cách xây dựng đa thức nội suy bậc hai, tính gần đúng đạo hàm, đạo hàm cấp hai của f tại các điểm đó.

- Tính gần đúng $I = \int_a^b f(x) dx$ theo các **phương pháp hình thang** và **parabol**.

28.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1	0.98	0.92	0.83	0.7

29.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	0.69	0.87	1.07	1.29	1.52	1.77	2.03	2.31	2.6

30.

x	-0.5	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7
$f(x)$	0.56	0.23	0.03	0.03	0.28	0.78	1.45
	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9	
	2.24	3.09	3.92	4.71	5.42	6.03	

Bằng các phương pháp hình thang và parabol:

- Tính gần đúng tích phân với số khoảng chia N và đánh giá sai số.
- Cần chia khoảng tính tích phân thành bao nhiêu khoảng độ dài bằng nhau để đạt được tích phân gần đúng với sai số 10^{-3} (với phương pháp hình thang) hoặc 10^{-5} (phương pháp parabol). Tính gần đúng tích phân với số khoảng chia đó.

31. $\int_0^{1.5} \frac{dx}{(1+2x)^2}, N = 6$

33. $\int_0^1 e^{x^2} dx, N = 10$

35. $\int_1^4 \ln(3^x + 2) dx, N = 10$

32. $\int_0^{0.6} \frac{dx}{1+x}, N = 6$

34. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, N = 10$

36. $\int_1^3 \sin(x^2) dx, N = 20$

37. Bằng đa thức nội suy tìm được ở câu 27, xây dựng công thức tính gần đúng tích phân.

Trong các phương trình vi phân:

- Giải gần đúng bằng **phương pháp xấp xỉ liên tiếp Picard** (nếu có thể) và **chuỗi nguyên**: tính $y_3(x)$.

- Giải gần đúng bằng **phương pháp Euler** và **Runge – Kutta RK4** với lưới cho trước.

38. $y' = 3x - 2y + 1, y(0) = \frac{3}{4}; x_n = 0.1n, n = \overline{1, 5}$

42. $\begin{cases} y_1' = x + y_1 y_2 \\ y_2' = x^2 - y_1^2 \end{cases}, \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}; \text{ tại } 0.1, 0.3$

39. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0; \text{ tại } 0.2, 0.3, 0.5$

43. $\begin{cases} y' = \frac{z-y}{x} \\ z' = \frac{z}{x} \end{cases}, y(1) = 1, z(1) = 0; \text{ tại } 1.2, 1.4$

41. $y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}}, y(0) = 1; \text{ tại } x_n = 0.2n, n = \overline{1, 3}$

44. $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1; \text{ tại } 0.1, 0.2, 0.3$

Giải các hệ phương trình tuyến tính bằng **phương pháp lặp điểm bất động (lặp đơn)**:

- Câu hỏi như phần giải phương trình đại số bằng phương pháp lặp điểm bất động, với mục 3 thực hiện với sai số 10^{-3} .
- Bằng **phương pháp Seidel** tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước lặp.

$$45. \begin{cases} x = -0.04x + 0.05y + 3.17 \\ y = -0.19x + 0.14y - 0.41 \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} x = 0.28x - 0.05y - 1.7 \\ y = 0.36x - 0.26y + 3.9 \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} x = 0.15x - 0.11y - 0.01z + 3.54 \\ y = -0.265x + 0.1y + 0.215z - 1.16 \\ z = 0.075x - 0.185y - 0.29z + 3.74 \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} x = -0.295x - 0.215y + 0.21z + 4.76 \\ y = 0.255x + 0.13y - 0.01z + 3.16 \\ z = 0.055x + 0.1y - 0.095z + 3.52 \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} x = 0.15x - 0.205y - 0.155z + 0.155t - 0.63 \\ y = -0.01x + 0.08y + 0.18t + 0.68 \\ z = 0.055x + 0.05z - 0.115t - 2.27 \\ t = -0.045x - 0.21y - 0.01z - 0.08t - 2.11 \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} 2x_1 + 0.7x_2 = -1.2 \\ 1.9x_1 - 3.1x_2 = 2.5 \end{cases}$$

$$51. \begin{cases} 2.5x_1 + 0.9x_2 = 3.4 \\ x_1 + 2.8x_2 = -0.6 \end{cases}$$

$$52. \begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$53. \begin{cases} 4.1x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_3 = -2 \\ 1.3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1.5 \end{cases}$$

$$54. \begin{cases} 7.2x_1 - x_2 + 1.2x_3 = 2 \\ x_1 + 12x_2 - x_3 + 3.2x_4 = -1 \\ -1.4x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 2.1x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 17x_4 = 3 \end{cases}$$

Tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ có giá trị cho trong bảng bởi không gian hàm có cơ sở cho trước và đánh giá sai số:

$$55. \begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 3.85 & 6.5 & 9.35 & 12.05 \end{array}, \text{bởi đa thức bậc nhất}$$

$$56. \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 7.5 & 2 & 4.5 & 14 \end{array}, \text{bởi đa thức bậc 2}$$

$$57. \begin{array}{c|ccccc} x & 1.1 & 1.3 & 1.6 & 1.8 & 2 \\ \hline y & 0.74 & 1.57 & 2.8 & 3.6 & 4.35 \end{array}, \{1, \cos x, \ln x\}$$

$$58. \begin{array}{c|cccccc} x & -1.2 & -0.9 & -0.6 & -0.3 & 0 & 0.3 & 0.6 \\ \hline y & 7 & 6.32 & 5.8 & 5.34 & 5.04 & 4.9 & 5.02 \end{array}, \{1, x, e^x\}$$

Tìm xấp xỉ của hàm số $y = f(x)$ bởi không gian hàm có cơ sở cho trước và đánh giá sai số:

$$59. y = e^{\sin x}, x \in [-1, 1], \text{bởi đa thức bậc nhất}$$

$$61. y = \sin x, x \in [0, 1], \{1, x, e^x\}$$

$$60. y = e^x, x \in [0, 2], \text{bởi đa thức bậc 2}$$

$$62. y = |1 - x|, x \in [0, 2], \{1, \cos x, \sin x\}$$