

# Mục lục

<b>1 Chuẩn bị</b>	<b>1</b>
1.1 Kiến thức về giải tích	1
1.2 Sai số làm tròn và số học máy tính	3
1.3 Thuật toán và sự hội tụ	3
1.4 Python: ngôn ngữ tính toán và lập trình	3
1.5 Python + VS Code: giải tích và đại số	11
<b>2 Giải phương trình một biến</b>	<b>22</b>
2.1 Phương pháp chia đôi	22
2.2 Phương pháp Newton và mở rộng	24
2.3 Lập điểm bất động	30
2.4 Phân tích sai số của các phương pháp lặp	34
2.5 Tăng tốc độ hội tụ	34
2.6 Nghiệm của đa thức và phương pháp Müller	35
<b>3 Nội suy và xấp xỉ bằng đa thức</b>	<b>36</b>
3.1 Nội suy tổng quát	36
3.2 Đa thức nội suy	37
3.3 Xấp xỉ số liệu và phương pháp Neville	41
3.4 Sai phân chia	41
3.5 Nội suy Hermite	42
3.6 Nội suy Newton	42
3.7 Nội suy spline bậc ba	45
3.8 Đường cong tham số	45
<b>4 Đạo hàm và tích phân bằng số</b>	<b>46</b>
4.1 Đạo hàm bằng số	47
4.2 Ngoại suy Richardson	51
4.3 Tích phân bằng số	51
4.4 Tích phân Romberg	56

4.5	Phương pháp cầu phương thích ứng	56
4.6	Cầu phương Gauss	56
4.7	Tích phân bội	57
4.8	Tích phân suy rộng	57
<b>5</b>	<b>Bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân thường</b>	<b>51</b>
5.1	Lý thuyết cơ bản về bài toán giá trị ban đầu	52
5.2	Phương pháp Picard	53
5.3	Phương pháp chuỗi Taylor	57
5.4	Phương pháp Euler	59
5.5	Phương pháp Taylor bậc cao	62
5.6	Phương pháp Runge–Kutta	63
5.7	Điều khiển sai số và phương pháp Runge–Kutta–Fehlberg	67
5.8	Phương pháp đa bước	67
5.9	Phương pháp đa bước với bước nhảy biến thiên	67
5.10	Phương pháp ngoại suy	67
5.11	Phương trình cấp cao và hệ phương trình vi phân	67
5.12	Sự ổn định	67
5.13	Phương trình vi phân cứng	67
<b>6</b>	<b>Phương pháp trực tiếp giải hệ phương trình tuyến tính</b>	<b>68</b>
6.1	Hệ phương trình tuyến tính	68
6.2	Chiến thuật chốt	69
6.3	Đại số tuyến tính và ma trận nghịch đảo	69
6.4	Định thức của ma trận	69
6.5	Phân tích ma trận	69
6.6	Các dạng ma trận đặc biệt	69
<b>7</b>	<b>Kỹ thuật lặp trong đại số tuyến tính</b>	<b>70</b>
7.1	Chuẩn của vectơ và ma trận	70
7.2	Giá trị riêng và vectơ riêng	72
7.3	Lặp điểm bất động	72
7.4	Kỹ thuật lặp Jacobi và Gauss–Seidel	76
7.5	Ma trận nghịch đảo	79
7.6	Kỹ thuật giảm dư giải hệ tuyến tính	80
7.7	Giới hạn sai số và tinh chỉnh phép lặp	80
7.8	Phương pháp gradient liên hợp	80

<b>8 Lý thuyết xấp xỉ</b>	<b>81</b>
8.1 Xấp xỉ bình phương nhỏ nhất	81
8.2 Đa thức trực giao và xấp xỉ bình phương nhỏ nhất	85
8.3 Đa thức Chebyshev và [Economization] chuỗi lũy thừa	86
8.4 Xấp xỉ hàm hữu tỷ	86
8.5 Xấp xỉ đa thức lượng giác	86
8.6 Biến đổi Fourier nhanh	86
<b>9 Xấp xỉ giá trị riêng</b>	<b>84</b>
9.1 Đại số tuyến tính và giá trị riêng	84
9.2 Ma trận trực giao và biến đổi đồng dạng	84
9.3 Phương pháp lũy thừa	84
9.4 Phương pháp Householder	84
9.5 Thuật toán QR	84
9.6 Phân tích giá trị kỳ dị	84
<b>10 Nghiệm số của hệ phương trình phi tuyến</b>	<b>85</b>
10.1 Điểm bất động của hàm nhiều biến	85
10.2 Phương pháp Newton	85
10.3 Phương pháp tựa Newton	85
10.4 Phương pháp độ dốc nhất	85
10.5 Đồng luân và các phương pháp mở rộng	85
<b>11 Bài toán giá trị biên của phương trình vi phân thường</b>	<b>86</b>
11.1 Phương pháp bắn tuyến tính	86
11.2 Phương pháp bắn cho bài toán phi tuyến	86
11.3 Phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán tuyến tính	86
11.4 Phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán phi tuyến	87
11.5 Phương pháp Rayleigh–Ritz	87
<b>12 Nghiệm số của phương trình đạo hàm riêng</b>	<b>88</b>
12.1 Phương trình đạo hàm riêng Elliptic	88
12.2 Phương trình đạo hàm riêng Parabolic	89
12.3 Phương trình đạo hàm riêng Hyperbolic	89
12.4 Giới thiệu về phương pháp phần tử hữu hạn	89

# Chương 4

## Đạo hàm và tích phân bằng số

---

4.1	Đạo hàm bằng số . . . . .	47
4.2	Ngoại suy Richardson . . . . .	51
4.3	Tích phân bằng số . . . . .	51
4.4	Tích phân Romberg . . . . .	56
4.5	Phương pháp cầu phương thích ứng . . . . .	56
4.6	Cầu phương Gauss . . . . .	56
4.7	Tích phân bội . . . . .	57
4.8	Tích phân suy rộng . . . . .	57

---

Trong [Chương 3](#), giả sử với các cách chọn mốc nội suy thích hợp, ta xây dựng được các đa thức nội suy tương ứng  $P(x)$  của  $f(x)$ . Vì nói chung,  $f(x)$  chưa biết, nên trong các tính toán, ta thường thay  $f(x)$  bởi  $P(x)$ :

$$f^{(k)}(x) \approx P^{(k)}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \text{ và}$$
$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx.$$

Xét hàm số  $f(x)$ , mà tại các mốc  $x_i, i = \overline{0, n}$ , ta đã xác định được  $f(x_i) = y_i$ . Ta có

$$f(x) = P(x) + r(x)$$

trong đó

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x),$$
$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Để việc đánh giá sai số sau này được thuận lợi, ta thường xét các mốc nội suy cách đều, với  $x_i - x_{i-1} = h$ ,  $\forall i = \overline{1, n}$ . Khi đó

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k y_0}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (t - i),$$

$$r(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} t(t-1) \cdots (t-n) f^{(n+1)}(\xi(x))$$

với  $t = \frac{x - x_0}{h}$ .

## 4.1 Đạo hàm bằng số

Giả sử  $g(x) = f^{(n+1)}(\xi(x))$  khả vi tới cấp cần thiết\*. Ta có

$$f^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) + r^{(k)}(x)$$

Ở đây  $P'(x) = \partial_t P \cdot \partial_x t$ , với  $\partial_x t = \frac{1}{h}$ , và tổng quát  $P^{(k)}(x) = \frac{1}{h^k} \partial_{t^k} P$ . Ngoài ra

$$\begin{aligned} r^{(k)}(x) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \partial_{x^i} [t(t-1) \cdots (t-n)] \times g^{(k-i)}(x) \right\} \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \partial_{t^i} [t(t-1) \cdots (t-n)] \frac{1}{h^i} \times g^{(k-i)}(x) \right\} \\ &= O(h^{n-k+1}). \end{aligned}$$

Trong tính toán, có thể  $n$  rất lớn. Khi đó, ta không nội suy  $f(x)$  tại tất cả các mốc  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Với mỗi  $x$ , để xấp xỉ  $f^{(k)}(x)$ , ta chọn một số lượng mốc liên tiếp nhất định sao cho bên trái và bên phải  $x$  có số mốc bằng nhau, hoặc cùng lắm là chênh nhau một mốc. Sau đó mới xây dựng đa thức nội suy của  $f(x)$  tại các mốc đó.

### 4.1.1 Công thức hai điểm

Với hai mốc nội suy  $x_0, x_1$ :

$$P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)t.$$

Ta được

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi(x_0)) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$$

\*Giả thiết này khó có thể kiểm tra được, vì ngoài  $f$  ra, bản thân  $\xi(x)$  cũng chưa biết

gọi là công thức sai phân tiến. Tương tự, ta cũng có công thức sai phân lùi

$$f'(x_1) = \frac{y_1 - y_0}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi(x_1)) = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h).$$

Nếu chủ yếu sử dụng công thức sai phân tiến để xấp xỉ  $f'(x_i)$ , thì

$$\begin{aligned} f'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi(x_i)) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h), \quad i = \overline{0, n-1}, \text{ và} \\ f'(x_n) &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi(x_n)) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} + O(h). \end{aligned} \quad (4.1)$$

#### 4.1.2 Công thức ba điểm

Với ba mốc nội suy  $x_0, x_1, x_2$ :

$$P(x) = y_0 + (y_1 - y_0)t + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2}t(t-1)$$

Ta được các công thức tính gần đúng đạo hàm cấp một

$$f'(x_0) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi(x_0)) = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} + O(h^2), \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \frac{y_2 - y_0}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi(x_1)) \\ \Rightarrow f'(x_i) &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi(x_i)) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (4.2b)$$

$$\begin{aligned} f'(x_2) &= \frac{3y_2 - 4y_1 + y_0}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi(x_2)) \\ \Rightarrow f'(x_n) &= \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} + \frac{h^2}{3} f'''(\xi(x_n)) = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.2c)$$

và xấp xỉ đạo hàm cấp hai

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} - hg(x_0) + \frac{2h^2}{3} g'(x_0) = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + O(h) \\ f''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{3} g'(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = \overline{1, n-1} \\ f''(x_n) &= \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} + \frac{2h^2}{3} g'(x_n) + hg(x_n) = \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} + O(h). \end{aligned} \quad (4.3)$$

#### 4.1.3 Công thức bốn điểm

Với bốn mốc nội suy  $x_0, x_1, x_2, x_3$ :

$$\begin{aligned} P(x) &= y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!} t(t-1)(t-2) \\ &= y_0 + (y_1 - y_0)t + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2} t(t-1) + \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{6} t(t-1)(t-2). \end{aligned}$$

Công thức xấp xỉ  $f'(x_i)$ :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{2y_3 - 9y_2 + 18y_1 - 11y_0}{6h} - \underbrace{\frac{h^3}{4}g(x_0)}_{O(h^3)} \\ f'(x_i) &= \frac{-y_{i+2} + 6y_{i+1} - 3y_i - 2y_{i-1}}{6h} + \underbrace{\frac{h^3}{12}g(x_i)}_{\text{cũng là } O(h^3)}, \quad i = \overline{1, n-2} \\ f'(x_{n-1}) &= \frac{2y_n + 3y_{n-1} - 6y_{n-2} + y_{n-3}}{6h} - \frac{h^3}{12}g(x_{n-1}) \\ f'(x_n) &= \frac{11y_n - 18y_{n-1} + 9y_{n-2} - 2y_{n-3}}{6h} + \frac{h^3}{4}g(x_n). \end{aligned}$$

Công thức xấp xỉ  $f''(x_i)$ :

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \frac{-y_3 + 4y_2 - 5y_1 + 2y_0}{h^2} + \underbrace{\frac{11h^2}{12}g(x_0) - \frac{h^3}{2}g'(x_0)}_{O(h^2)} \\ f''(x_i) &= \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12}g(x_i) + \frac{h^3}{6}g'(x_i)}_{O(h^2)}, \quad i = \overline{1, n-2} \\ f''(x_{n-1}) &= \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{h^2} - \frac{h^2}{12}g(x_{n-1}) - \frac{h^3}{6}g'(x_{n-1}) \\ f''(x_n) &= \frac{2y_n - 5y_{n-1} + 4y_{n-2} - y_{n-3}}{h^2} + \frac{11h^2}{12}g(x_3) + \frac{h^3}{2}g'(x_3). \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} f'''(x_i) &= \frac{y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}}{h^3} + O(h), \quad i = \overline{1, n-2} \\ f'''(x_0) &= \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{h^3} + O(h); \\ f'''(x_{n-1}), f'''(x_n) &= \frac{y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3}}{h^3} + O(h). \end{aligned}$$

Để rút gọn quá trình xây dựng công thức, ta dùng mã sau

```
1 from sympy import *
2 x, t, h, x0 = symbols('x t h x0')
3 g = symbols('g', cls=Function) # khai báo hàm bất định
4 n = 2                               # n mốc nội suy x0, x1, ..., xn-1, ứng
    với công thức n-điểm
```

```

5 Y = MatrixSymbol('Y', n, 1)
6 D = [Y[i] for i in range(n)]          # sai phân

7 P = D[0]                             # đa thức nội suy
8 for k in range(1, n):
9     for i in range(n - k):
10         D[i] = D[i + 1] - D[i]        #  $\Delta^k y_i$ 
11     N = D[0]
12     for i in range(k):
13         N *= (t - i) / (i + 1)        #  $\frac{\Delta^k y_0}{k!} t(t-1)\cdots(t-k+1)$ 
14     P += N
15 P                                     #  $t(-Y_{0,0} + Y_{1,0}) + Y_{0,0}$ 

16 k = 1                                # cấp đạo hàm
17 r = 1 / factorial(n) * g(x)
18 for i in range(n):
19     r *= x - x0 - i * h

20 for i in range(n):
21     display((P.diff(t, k) / h**k).subs(t, i)) #  $P^k(x_i)$ 
22     display(r.diff(x, k).subs(x, x0 + i * h)) #  $r^{(k)}(x_i)$ 

```

Ta thấy việc xác định phần dư khi xấp xỉ đạo hàm cấp hai trở lên khá phức tạp. Riêng với xấp xỉ đạo hàm cấp hai, ta có một cách khá đẹp, bằng khai triển Taylor.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4, \text{ và}$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_0)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_{-1})h^4$$

trong đó  $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ . Cộng hai phương trình, được

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})].$$

Giải phương trình này theo biến  $f''(x_0)$ , ta có

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})].$$

Giả sử  $f \in C^4[x_0 - h, x_0 + h]$ . Vì  $\frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})]$  ở giữa  $f^{(4)}(\xi_1)$  và  $f^{(4)}(\xi_{-1})$ , theo định lý giá trị trung gian, tồn tại  $\xi$  ở giữa  $\xi_1$  và  $\xi_{-1}$ , và vì thế  $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$ , sao cho

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2}[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})].$$



Do đó

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h))}{h^2} - \underbrace{\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)}_{O(h^2)}.$$

Tổng quát

$$f''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \quad i = \overline{1, n-1} \quad (4.4)$$

trong đó  $\xi \in (x_{i-1}, x_{i+1})$ .

## 4.2 Ngoại suy Richardson

## 4.3 Tích phân bằng số

Giả sử ta cần đánh giá tích phân xác định

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

của hàm  $f(x)$  không có nguyên hàm hoặc khó tính được nguyên hàm. Ta thường thực hiện hai bước:

- 1) Chia đoạn  $[a, b]$  thành  $N$  đoạn, bởi các điểm  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N = b$ .

Theo tính chất của cận lấy tích phân

$$I = \sum_{i=1}^N \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx,$$

trong đó mỗi tích phân  $I_i = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx$  được xấp xỉ bởi cùng một quy tắc nào đó.

- 2) Để đơn giản về mặt ký hiệu, ta trình bày quy tắc xấp xỉ này cho chính  $I = \int_a^b f(x) dx$ .

Một phương pháp cơ bản là xấp xỉ  $I$  bằng  $\sum_{i=0}^n a_i y_i$ , với  $y_i = f(x_i)$ ,  $x_i \in [a, b]$ , gọi là phương pháp cầu phương số.

Các phương pháp cầu phương trong phần này dựa vào đa thức nội suy được xây dựng trong [Chương 3](#). Giả sử  $P(x)$  là đa thức nội suy của  $f(x)$  tại các mốc nội suy  $x_i$ ,  $i = \overline{0, n}$ . Nhắc lại

$$f(x) = P(x) + r(x)$$

trong đó

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x),$$

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b P(x) dx + \int_a^b r(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx \end{aligned}$$

Do đó, công thức cầu phương là

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i y_i$$

trong đó  $a_i = \int_a^b L_i(x) dx$ , với độ lệch

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b f^{(n+1)}(\xi(x)) \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.$$

Bằng cách sử dụng sử dụng đa thức nội Lagrange bậc một và bậc hai với các mốc cách đều, ta được quy tắc hình thang và quy tắc Simpson.

### 4.3.1 Quy tắc hình thang

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = h \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

trong đó  $h = x_1 - x_0$ ,  $\xi \in (x_0, x_1)$ .

Nếu chia đoạn  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn bởi các điểm  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , thì

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \quad (4.5)$$

với sai số

$$\varepsilon_2 = \frac{M_2 (b - a) d^2}{12} \quad (4.6)$$

trong đó  $d = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ ,  $|f''(x)| \leq M_2 \forall x \in [a, b]$ . Ở đây chỉ số 2 trong ký hiệu  $\varepsilon_2$  để chỉ số mốc nội suy trong phương pháp.

Trường hợp đặc biệt, khi các điểm mốc cách đều  $x_i - x_{i-1} = h, \forall i = \overline{1, n}$ , thì  $d = h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_i = a + ih, i = \overline{0, n}$ , và

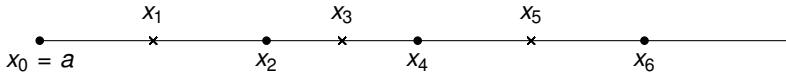
$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i) \\ &= h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} \right), \\ \varepsilon_2 &= \frac{M_2(b-a)h^2}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

### 4.3.2 Quy tắc Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = h \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3} - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

trong đó  $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$ , các mốc  $x_0, x_1, x_2$  cách đều, tức là  $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ , và  $\xi \in (x_0, x_2)$ .

Chia đoạn  $[a, b]$  thành  $2n$  đoạn bởi các điểm  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$ , trong đó trên mỗi đoạn  $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , các mốc  $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$  cách đều, tức là  $x_{2i-1} = \frac{x_{2i} + x_{2i-2}}{2}$ . Cách chia này được mô tả bởi hình dưới đây.



Khi đó

$$I \approx \sum_{i=1}^n (x_{2i} - x_{2i-2}) \frac{y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}}{6} \quad (4.8)$$

với sai số

$$\varepsilon_3 = \frac{M_4(b-a)d^4}{180} \quad (4.9)$$

trong đó  $d = \max_{1 \leq i \leq 2n} |x_i - x_{i-1}|$ , và  $|f^{(4)}(x)| \leq M_4 \forall x \in [a, b]$ .

Trường hợp đặc biệt, khi các mốc cách đều,  $x_i - x_{i-1} = h, i = \overline{1, 2n}$ , thì  $h = \frac{b-a}{2n}$ ,  $x_i = a + ih, i = \overline{0, 2n}$ , và

$$\begin{aligned} I &\simeq \frac{h}{3} \sum_{i=1}^n (y_{2i} + 4y_{2i-1} + y_{2i-2}) = \\ &= \frac{2h}{3} \left( \frac{y_0 + y_{2n}}{2} + 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + \cdots + y_{2n-2} + 2y_{2n-1} \right), \\ \varepsilon_3 &= \frac{M_4(b-a)h^4}{180} = \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

**Ví dụ 4.1.** Cho hàm số  $f(x) = e^{\sin x}$ ,  $x \in [0, 2]$ . Chia đều  $[0, 2]$  thành 10 khoảng.

- a) Bằng cách xây dựng đa thức nội suy bậc hai, tính gần đúng  $f'$ ,  $f''$  tại các điểm chia. Từ đó so sánh với giá trị đúng.
- b) Tính gần đúng  $I = \int_0^2 e^{\sin x} dx$  và đánh giá sai số (theo hai phương pháp).
- c) Để tính được gần đúng  $I$  với sai số  $10^{-4}$ , cần chia đều  $[0, 2]$  thành bao nhiêu khoảng. Tính gần đúng  $I$  với các khoảng chia đó (theo hai phương pháp).

**Giải.** a)  $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$ ,  $f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x)$ .

Theo công thức (4.2) và (4.3):

	$x$	$f(x)$	$P'(x)$	$f'(x)$	$P''(x)$	$f''(x)$
0	1	1.00748		1	0.914121	1
0.2	1.21978	1.1903		1.19546	0.914121	0.929302
0.4	1.47612	1.3476		1.3596	0.658838	0.677444
0.6	1.75882	1.43222		1.45162	0.187323	0.204966
0.8	2.04901	1.40239		1.42756	-0.485541	-0.47528
1	2.31978	1.22668		1.25338	-1.27156	-1.27482
1.2	2.53968	0.898099		0.920274	-2.01429	-2.03362
1.4	2.67902	0.443601		0.455345	-2.53068	-2.56264
1.6	2.71712	-0.0772565		-0.0793387	-2.67789	-2.71365
1.8	2.64811	-0.586363		-0.601657	-2.41317	-2.44216
2	2.48258	-1.069		-1.03312	-2.41317	-1.82747

chẳng hạn

$$P'(0) = \frac{-1.47612 + 4 \cdot 1.21978 - 3 \cdot 1}{2 \cdot 0.2}$$

$$P'(0.6) = \frac{2.04901 - 1.47612}{2 \cdot 0.2}$$

$$P'(2) = \frac{3 \cdot 2.48258 - 4 \cdot 2.64811 + 2.71712}{2 \cdot 0.2} \text{ và}$$

$$P''(1) = \frac{2.53968 - 2 \cdot 2.31978 + 2.04901}{0.2^2}.$$

```

1 from sympy import *
2 f = lambda x: E ** sin(x)
3 import numpy as np

```

```

4 X = np.linspace(0, 2, 11)
5 Y = [ f(x) for x in X ]

6 h = (2 - 0) / 10

7 (-Y[2] + 4*Y[1] - 3*Y[0]) / 2 / h
8 [ (Y[i+1] - Y[i-1]) / 2 / h for i in range(1, 10) ]
9 (3*Y[10] - 4*Y[9] + Y[8]) / 2 / h

10 from sympy import *
11 x = symbols('x')
12 f(x).diff()
13 [ f(x).diff().subs(x, a) for a in X ]

14 (Y[2] - 2*Y[1] + Y[0]) / h**2
15 [ (Y[i+1] - 2*Y[i] + Y[i-1]) / h**2 for i in range(1,
    10) ]
16 (Y[10] - 2*Y[9] + Y[8]) / h**2

17 f(x).diff(x, 2)
18 [ f(x).diff(x, 2).subs(x, a) for a in X ]

```

b) i) Phương pháp hình thang:

$$I \simeq \frac{0.2}{2} \left( \frac{1 + 2.48258}{2} + 1.21978 + 1.47612 + \cdots + 2.64811 \right) = 4.22975.$$

Đánh giá  $|f''(x)| = |e^{\sin x}| |\cos^2 x - \sin x| \leq e^1 (|\cos^2 x| + |\sin x|) \leq 2e = 5.43656 = M_2$ . Suy ra sai số của phương pháp hình thang:

$$\varepsilon_{ht} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} = \frac{5.43656(2-0)^3}{12 \cdot 10^2} = 0.0362438.$$

ii) Phương pháp Simpson:

$$I \simeq \frac{2 \cdot 0.2}{3} \left( \frac{1 + 2.48258}{2} + 2 \cdot 1.21978 + 1.47612 + 2 \cdot 1.75882 + \cdots + 2.71712 + 2 \cdot 2.64811 \right) = 4.23656.$$

Ta có  $f^{(4)}(x) = e^{\sin x} (-4\cos^2 x + \cos^4 x + \sin x - 6\cos^2 x \sin x + 3\sin^2 x)$ , suy ra  $|f^{(4)}(x)| \leq e^1 (4 + 1 + 1 + 6 + 3) = 40.7742 = M_4$ . Sai số của phương pháp Simpson:

$$\varepsilon_{pb} = \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} = \frac{40.7742(2-0)^5}{180 \cdot 10^4} = 0.000724875.$$

```

1 sum( [(X[i] - X[i-1]) * (Y[i] + Y[i-1]) / 2 for i in
    range(1, 11)] ) # công thức tổng
    quát

2 M2 = N(2 * E, 6)
3 M2 * (2-0)**3 / 12 / 10**2

4 sum( [(X[2*i] - X[2*i-2]) * (Y[2*i] + 4*Y[2*i-1] + Y
    [2*i-2]) / 6 for i in range(1, 6)] )

5 M4 = N(15 * E)
6 M4 * (2-0)**5 / 180 / 10**4

```

c) i) Phương pháp hình thang:

$$\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} < 10^{-4} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12 \cdot 10^{-4}}} = 190.378 \Rightarrow \text{Chọn } n = 191.$$

Khi đó  $I \simeq 4.23651$ .

ii) Phương pháp Simpson:

$$\frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4} < 10^{-4} \Rightarrow 2n > \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180 \cdot 10^{-4}}} = 16.4084 \Rightarrow \text{Chọn } 2n = 18.$$

Khi đó  $I \simeq 4.23653$ .

```

1 sqrt( M2 * (2-0)**3 / 12 / 10**-4 )
2 # Sửa thông số dòng 4, 6 ý (a) → thực thi dòng 5 ý (a) → sửa và
    chạy dòng 1 ý (b)

3 ( M4 * (2-0)**5 / 180 / 10**-4 ) ** (1/4)
4 # Dòng 4, 5, 6 ý (a), dòng 4 ý (b)

```

□

### 4.3.3 Công thức Newton–Cotes đóng

### 4.3.4 Công thức Newton–Cotes mở

## 4.4 Tích phân Romberg

---

## 4.5 Phương pháp cầu phương thích ứng

---

## 4.6 Cầu phương Gauss

---

## 4.7 Tích phân bội

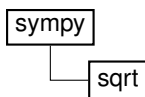
---

## 4.8 Tích phân suy rộng

---

## Tóm tắt Python

---



# Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.
- [2] Richard L. Burden, Douglas J. Faires **and** Annette M. Burden. *Numerical Analysis*. phiên bản 10. Cengage Learning, 2016. 918 trang.
- [3] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.0. 531 trang. URL: <https://numpy.org/doc/stable>.
- [4] SciPy community. *SciPy Reference Guide*. phiên bản 1.8.1. 3584 trang. URL: <https://docs.scipy.org/doc>.
- [5] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.
- [6] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.
- [7] Matplotlib development team. *Matplotlib documentation*. phiên bản 3.5.1. URL: <https://matplotlib.org/3.5.1/tutorials/index.html>.
- [8] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: <https://github.com/sympy/sympy/releases>.



