Mục lục

Chương 13

Các phương pháp tối ưu

13.1 Tối ưu không ràng buộc một biến

13.1.1 Phương pháp Newton

$$\min f(x)$$

$$f'(x) = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Ví dụ 13.1. Dùng phương pháp Newton tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2\sin x - \dfrac{x^2}{10}$ trên đoạn $[0, 4]$.

Giải. $\min\limits_{0 \le x \le 4} f = -(-1.7757) = 1.7757$ tại $x = 1.4275$ □

```
f = @(x) -(2*sin(x) - x^2/10)
[x, fval] = fminbnd(f, 0, 4)
```

13.2 Tối ưu không ràng buộc nhiều biến

13.2.1 Phương pháp Newton

$$\min f(x)$$

$$\nabla f(x) = 0$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[\nabla^2 f\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} \nabla f\left(x^{(k)}\right)$$

Ví dụ 13.2. Dùng phương pháp Newton tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + x - y$, biết xấp xỉ ban đầu $x_0 = -0.5$, $y_0 = 0.5$.

Giải. $\min f = -1.25$ tại $x = -1$, $y = 1.5$ □

```
f = @(x) 2 * x(1)^2 + 2*x(1)*x(2) + x(2)^2 + x(1) - x(2)

[x, fval] = fminsearch(f, [-0.5, 0.5])
```

13.3 Quy hoạch tuyến tính

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn: tìm

$$\min f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{13.1}$$

sao cho

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ & & \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\ \multicolumn{9}{c}{x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n} \end{array} \tag{13.2}$$

Ở đây f là hàm mục tiêu, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các biến hay phương án, (13.2) là các ràng buộc. Phương án $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thỏa mãn (13.2) gọi là chấp nhận được, hay nghiệm khả thi. Nghiệm khả thi làm cực tiểu hàm mục tiêu gọi là nghiệm tối ưu. Giá trị của hàm mục tiêu tại nghiệm tối ưu gọi là giá trị mục tiêu tối ưu.

Đặt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$, $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, dạng ma trận của bài toán: tìm

$$\min f = c^T x \tag{13.3}$$

sao cho

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0 \tag{13.4}$$

Nếu thay điều kiện trên bởi

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \tag{13.5}$$

ta có dạng chính tắc của bài toán quy hoạch tuyến tính.

Thông thường bài toán quy hoạch tuyến tính có điều kiện hỗn hợp

$$Ax \leq b, \quad A_e x = b_e, \quad l \leq x \leq u \tag{13.6}$$

trong đó $A_e \in \mathbb{R}^{m' \times n}$, $b_e \in \mathbb{R}^{m'}$, và $l, u \in \mathbb{R}^n$, lần lượt gọi là điều kiện (1) bất đẳng thức, (2) đẳng thức, (3) chặn dưới, và (4) chặn trên.

Bài toán cực đại hóa được đưa về dạng cực tiểu

$$\max f = -\min(-f)\,. \tag{13.7}$$

Lệnh giải

Cách 1: nhập thông tin bài toán thông qua ma trận lấy từ (13.3) và (13.6)

```
[x, fval] = linprog(c, A, b, Ae, be, l, u)
```

trong đó

- Ràng buộc phía cuối không có thì có thể bỏ tham số tương ứng khỏi lệnh, chẳng hạn

```
[x, fval] = linprog(c, A, b)
[x, fval] = linprog(c, A, b, Ae, be)
[x, fval] = linprog(c, A, b, Ae, be, l)
```

- Nếu có ràng buộc sau mà không có ràng buộc trước (trống), các tham số tương ứng của ràng buộc trống được đặt là `[]`, cụ thể

```
[x, fval] = linprog(c, [], [], Ae, be,  l, u)

[x, fval] = linprog(c, [], [], Ae, be,  l, u)
[x, fval] = linprog(c,  A,  b, [], [],  l, u)
[x, fval] = linprog(c, [], [], [], [],  l, u)

[x, fval] = linprog(c,  A,  b, Ae, be, [], u)
```

Cách 2: nhập trực tiếp các thông tin (13.1) và (13.2) của bài toán. Cách này sẽ được mô tả cụ thể trong ví dụ ở dưới.

Ví dụ 13.3. Tìm min $\left(-x_1 - \dfrac{x_2}{3}\right)$, biết

a) $x_1 + x_2 \leq 2$ $\qquad x_1 - x_2 \leq 2$ $\qquad -x_1 - x_2 \leq -1$

$x_1 + \dfrac{x_2}{4} \leq 1$ $\qquad -\dfrac{x_1}{4} - x_2 \leq 1$ $\qquad -x_1 + x_2 \leq 2$

b) Điều kiện (a) và $x_1 + \dfrac{x_2}{4} = \dfrac{1}{2}$

c) Điều kiện (a) và $-1 \leq x_1 \leq 1.5$, $-0.5 \leq x_2 \leq 1.25$.

Giải. a) Lệnh

```
c = [-1; -1/3]
A = [1, 1; 1, 1/4; 1, -1; -1/4, -1; -1, -1; -1, 1]
b = [2; 1; 2; 1; -1; 2]

[x, f] = linprog(c, A, b)
```

cho kết quả

```
Optimal solution found.
x = 2x1
      0.6667
      1.3333

f = -1.1111
```

Ta có $\min\left(-x_1 - \dfrac{x_2}{3}\right) = -1.1111$ tại $x_1 = 0.6667$, $x_2 = 1.3333$.

b) $\min f = -0.6667$ tại $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

```
Ae = [1, 1/4]
be = [1/2]

[x, f] = linprog(c, A, b, Ae, be)
```

c) $\min f = -1.1042$ tại $x_1 = 0.6875$, $x_2 = 1.25$.

```
l = [-1; -0.5]
u = [1.5; 1.25]

[x, f] = linprog(c, A, b, [], [], l, u)
```

□

Ví dụ 13.4. Tìm max $f = x_1 + 3x_2 + 2x_3$, biết

$$\begin{array}{rcrcrcl} 7x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 20 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & \leq & 30 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \end{array}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Giải. Đổi hàm mục tiêu để đưa về dạng min $(-f) = -x_1 - 3x_2 - 2x_3$

Cách 1:

```
c = [-1; -3; -2]
A = [7, 2, 3; 1, 5, 4]
b = [20; 30]
Ae = [1, 1, 1]
be = [1]
l = [0; 0; 0]

[x, f] = linprog(c, A, b, Ae, be, l)
```

Cách 2:

```
x = optimvar('x', 3, 'LowerBound', 0)

prob = optimproblem('Objective', x(1) + 3*x(2) + 2*x
    (3), 'ObjectiveSense', 'max')

prob.Constraints.c1 = 7*x(1) + 2*x(2) + 3*x(3) <= 20
prob.Constraints.c2 =   x(1) + 5*x(2) + 4*x(3) <= 30
prob.Constraints.c3 =   x(1) +   x(2) +   x(3) ==  1

problem = prob2struct(prob)
[x, f] = linprog(problem)
```

Hai cách đều cho kết quả

```
Optimal solution found.
x = 3x1
          0
     1.0000
          0

f = -3.0000
```

Ta được min $(-f) = -3 \Rightarrow$ max $f = 3$ tại $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0$. □

Ví dụ 13.5 (Bài toán kế hoạch sản xuất)**.** Công ty Reddy Mikks sản xuất sơn nội thất và sơn ngoài trời. Nguyên liệu gồm 2 loại A và B với trữ lượng là 6 tấn và 8 tấn tương ứng. Để sản xuất một tấn sơn nội thất cần 2 tấn nguyên liệu A và 1 tấn nguyên liệu B. Hai số tương ứng của sơn ngoài trời là 1 tấn và 2 tấn. Qua tiếp thị được biết nhu cầu thị trường như sau (cho một ngày):

- Nhu cầu sơn nội thất không hơn nhu cầu sơn ngoài trời quá 1 tấn;
- Nhu cầu cự đại của sơn nội thất là 2 tấn.

Giá bán sỉ là 2000 USD một tấn sơn nội thất và 3000 USD một tấn sơn ngoài trời. Cần sản xuất mỗi ngày như thế nào để doanh thu là lớn nhất?

Giải. Đặt x_1, x_2 lần lượt là số tấn sơn nội thất và ngoài trời cần sản xuất trong ngày. Doanh thu trong ngày là

$$f = 2x_1 + 3x_2$$

Nguyên liệu sử dụng không được quá trữ lượng

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 \quad \text{(nguyên liệu A)} \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \quad \text{(nguyên liệu B)} \end{aligned}$$

Sản xuất không nhiều hơn nhu cầu thị trường

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 \qquad &\leq 2 \end{aligned}$$

Sản lượng phải không âm

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Ta có bài toán

$$\max f = 2x_1 + 3x_2$$

hay

$$\min(-f) = -2x_1 - 3x_2$$

với

$$\begin{array}{rcrl} 2x_1 & + & x_2 & \leq 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq 8 \\ x_1 & - & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & & \leq 2 \\ \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0} \end{array}$$

Lệnh

```
c = [-2; -3]
A = [2, 1; 1, 2; 1, -1; 1, 0]
b = [6; 8; 1; 2]
```

```
l = [0; 0]
[x, f] = linprog(c, A, b, [], [], l)
```

cho kết quả

```
Optimal solution found.
x = 2x1
      1.3333
      3.3333

f = -12.6667
```

Vậy $\min(-f) = -12.6667$ hay $\max f = 12.6667$ tại $x_1 = 1.3333$, $x_2 = 3.3333$. □

Ví dụ 13.6 (Bài toán khẩu phần ăn)**.** Giả sử món ăn có n thành phần thực phẩm, với giá một đơn vị (khối lượng) thành phần j là c_j, $j = 1, \dots, n$. Đồng thời có m chất (như chất đạm, chất béo, đường,. . .). Biết rằng một đơn vị thành phần j chứa a_{ij} đơn vị chất i, $i = 1, \dots, m$, và mức chấp nhận được số đơn vị chất i trong một đơn vị khối lượng của món ăn là nằm giữa $l_i \geq 0$ và $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$.
Lập phương án chế biến món ăn từ các thành phần thực phẩm sao cho đủ các chất, mà giá thành rẻ nhất.

Giải. Gọi x_j là số đơn vị khối lượng của thành phần j trong một đơn vị khối lượng của món ăn. Ta có bài toán

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{13.8}$$

với

$$\begin{aligned} & l_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{13.9}$$

□

Ví dụ 13.7 (Bài toán vận tải)**.** Hàng hóa được vận chuyển từ m kho đến n cửa hiệu bán lẻ. Lượng hàng ở kho i là $s_i \geq 0$ (tấn), $i = 1, \dots, m$, và cửa hiệu j có nhu cầu $d_j \geq 0$ (tấn), $j = 1, \dots, n$. Cước vận chuyển một tấn hàng từ kho i đến cửa hiệu j là c_{ij} đồng. Giả sử tổng hàng ở các kho và tổng nhu cầu bằng nhau:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \tag{13.10}$$

Lập kế hoạch vận chuyển để tiền cước là nhỏ nhất, với điều kiện là mỗi cửa hàng đều nhận đủ và mỗi kho đều trao hết hàng.

Giải. Gọi lượng hàng vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j là x_{ij}, thì kế hoạch vận chuyển là ma trận $\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$. Bài toán

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{13.11}$$

với

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i,\ \ i = 1, \dots, m \tag{13.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j,\ \ j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, n$$

□

Mô hình trong ví dụ trên gọi là *mô hình vận tải đóng*. Nếu không có giả thiết (13.10) và ràng buộc (13.12) đổi lại là $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i$, tức là các kho có thể không trao hết, thì mô hình được gọi là *mô hình vận tải mở*.

Bài tập 13.3

13.1. Một máy cán thép có thể sản xuất hai sản phẩm thép tấm và thép cuộn với công suất cho mỗi loại là (nếu chỉ sản xuất một sản phẩm): 200 tấn/giờ, thép cuộn: 140 tấn/giờ. Lợi nhuận bán sản phẩm là: thép tấm 25 USD/tấn, thép cuộn: 30 USD/tấn. Theo tiếp thị, một tuần chỉ tiêu thụ được tối đa 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn. Biết rằng máy làm việc 40 giờ một tuần.
Cần sản xuất mỗi loại bao nhiêu trong một tuần để có lợi nhuận cao nhất?
x_1, x_2 là số tấn thép tấm, thép cuộn sản xuất trong 1 tuần. Bài toán

$$\max f = 25x_1 + 30x_2 \Leftrightarrow \min(-f) = -25x_1 - 30x_2$$

với

$$\begin{array}{rcrcr} \dfrac{x_1}{200} & + & \dfrac{x_2}{140} & \leq & 40 \\ x_1 & & & \leq & 6000 \\ & & x_2 & \leq & 4000 \\ & & x_1,\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lệnh

```
c = [-25; -30]
A = [1/200, 1/140]
b = [40]
l = [0; 0]
u = [6000; 4000]

[x, f] = linprog(c, A, b, [], [], l, u)
```

cho kết quả

```
Optimal solution found.
x = 2x1
10^3 ×
      6.0000
      1.4000

f = -192000
```

Vậy $\max f = -(-192000) = 192000$ tại $x_1 = 10^3 \times 6.0000 = 6000$, $x_2 = 10^3 \times 1.4000 = 1400$.

13.2 (Bài toán xe đạp)**.** Có n người cùng phải đi quãng đường 10 dặm mà chỉ có một xe đạp một chỗ ngồi. Tốc độ đi bộ của người j là w_j và đi xe đạp là b_j, $j = 1, \dots, n$. Giả sử người đạp xe chậm nhất cũng nhanh hơn người đi bộ nhanh nhất.
Làm sao để thời gian người cuối cùng đến đích là ngắn nhất? Giải bài toán với $n = 3$, $w_1 = 4$, $w_2 = w_3 = 2$, $b_1 = 16$, $b_2 = b_3 = 12$.
Đặt x_j là quãng đường đạp xe của người j, $j = 1, \dots, n$ (sau đó để xe lại cho người kế tiếp đi, người cuối cùng đạp xe một mạch về đích). Khi đó $\sum_{j=1}^{n} x_j = 10$, và thời gian hoàn thành quãng đường của người j là $\dfrac{x_j}{b_j} + \dfrac{10 - x_j}{w_j}$.
Thời gian để cả n ba hoàn thành là $t = \max\left(\dfrac{x_j}{b_j} + \dfrac{10 - x_j}{w_j}\right)$. Bài toán tìm min t có dạng

$$\min f = t$$

trong đó

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_j = 10 \\ &\frac{x_j}{b_j} + \frac{10 - x_j}{w_j} \le t, \ j = 1, \dots, n \\ &x_j \ge 0, \ j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Với $n = 3$, $w_1 = 4$, $w_2 = w_3 = 2$, $b_1 = 16$, $b_2 = b_3 = 12$:

Cách 1:

```
x = optimvar('x', 'LowerBound', 0)
y = optimvar('y', 'LowerBound', 0)
z = optimvar('z', 'LowerBound', 0)
t = optimvar('t')

prob = optimproblem('Objective', t, 'ObjectiveSense', 'min')
```

```
prob.Constraints.c0 = x + y + z == 10
prob.Constraints.c1 = x/16 + (10-x)/4 <= t
prob.Constraints.c2 = y/12 + (10-y)/2 <= t
prob.Constraints.c3 = z/12 + (10-z)/2 <= t

problem = prob2struct(prob)
[sol, f] = linprog(problem)
```

cho kết quả

```
Optimal solution found.
sol = 4x1      4 biến theo thứ tự chữ cái
     2.9167    → t
          0    → x
     5.0000    → y
     5.0000    → z

f = 2.9167
```

Cách 2: lập trình cho cách 1

```
w = [ 4,  2,  2]
b = [16, 12, 12]

x = optimvar('x', 3, 'LowerBound', 0)
t = optimvar('t')

prob = optimproblem('Objective', t, 'ObjectiveSense', 'min')

prob.Constraints.c0 = sum(x) == 10

for i = 1:3
    field = sprintf('c%d', i)
    prob.Constraints.(field) = x(i) / b(i) + (10 - x(i)) / w(i) <= t
end

problem = prob2struct(prob)

[sol, fval] = linprog(problem)
```

cho kết quả

```
Optimal solution found.
sol = 4x1      4 biến theo thứ tự chữ cái
     2.9167    → t
          0    → x1
     5.0000    → x2
     5.0000    → x3

f = 2.9167
```

Vậy quãng đường đạp xe của từng người là 0, 5, và 5 dặm.

13.3. Một nhà máy chế biến thịt sản xuất ba loại thịt bò, lợn và cừu, với tổng lượng mỗi ngày 480 tấn bò, 400 tấn lợn và 230 tấn cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt có thể nấu chín (để bán) trong giờ làm việc là 420 tấn. Ngoài ra, có thể nấu thêm ngoài giờ 250 tấn (với giá cao hơn). Lợi nhuận thu được trên một tấn được cho bằng bản sau, với đơn vị là triệu đồng.

	tươi	nấu chín	nấu chín ngoài giờ
bò	8	14	11
lợn	4	12	7
cừu	4	13	9

Ví dụ: phương án sản xuất sau cho lợi nhuận 9965 triệu đồng

	tươi	nấu chín	nấu chín ngoài giờ
bò	165 tấn	280 tấn	35 tấn
lợn	295 tấn	70 tấn	35 tấn
cừu	55 tấn	70 tấn	105 tấn

Tìm phương án sản xuất làm cực đại lợi nhuận.

Đặt $p = \begin{bmatrix} 8 & 14 & 11 \\ 4 & 12 & 7 \\ 3 & 13 & 9 \end{bmatrix}$, $m = (480, 400, 230)^T$, $x = \left(x_{ij}\right)_{3\times 3}$ với x_{ij} là số tấn loại thịt i chế biến theo kiểu j. Bài toán max $\sum_{i,j=1}^{3} p_{ij}x_{ij}$ biết

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = m_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 420$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} \leq 250$$

```
p = [8, 14, 11; 4, 12, 7; 4, 13, 9]
m = [480; 400; 230]

x = optimvar('x', 3, 3, 'LowerBound', 0)
prob = optimproblem('Objective', sum(p .* x, 'all'), 'ObjectiveSense', 'max')

x_r = sum(x, 2)  %lấy tổng các phần tử trên mỗi hàng của x
x_c = sum(x)     %.......................cột......

for i = 1:3
    field = sprintf('c%d', i)
    prob.Constraints.(field) = x_r(i) == m(i)
end

prob.Constraints.nau_chin = x_c(2) == 420
prob.Constraints.nau_ngoai_gio = x_c(3) <= 250

problem = prob2struct(prob)
[x, f] = linprog(problem)
```

cho kết quả

Optimal solution found.
x = 9x1
440 $\longrightarrow x_{11}$ cột 1
0 $\longrightarrow x_{21}$
0 $\longrightarrow x_{31}$
0 $\longrightarrow x_{12}$ cột 2
400 $\longrightarrow x_{22}$
20 $\longrightarrow x_{32}$
40 $\longrightarrow x_{13}$ cột 3
0 $\longrightarrow x_{23}$
210 $\longrightarrow x_{33}$. Để đưa x về dạng ma trận 3×3, dùng lệnh `reshape(x, 3, 3)`

f = −10910

Ta được $\max f = -(-10910) = 10910$ (triệu) tại $x = \begin{bmatrix} 440 & 0 & 40 \\ 0 & 400 & 0 \\ 0 & 20 & 210 \end{bmatrix}$ (tấn)

13.4. Một xưởng mộc làm bàn và ghế. Để một công nhân làm xong một bàn cần hai giờ còn một ghế thì cần 30 phút. Khách hàng thường mua nhiều lắm là bốn ghế kèm theo một bàn. Do đó, tỷ lệ sản xuất ghế và bàn nhiều nhất là 4:1. Giá bán một bàn là 135 USD và một ghế là 50 USD.
Hãy xác định xem số lượng sản xuất bàn và ghế hàng ngày là bao nhiêu để làm cực đại doanh thu. Biết rằng xưởng có bốn công nhân làm việc 8 giờ một ngày.
Gọi x_i, y_i là số bàn, ghế công nhân i được phân công làm trong ngày, $i = 1, \ldots, 4$. Bài toán

$$\max f = 135 \sum_{i=1}^{4} x_i + 50 \sum_{i=1}^{4} y_i$$

sao cho

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{4} y_i - 4 \sum_{i=1}^{4} x_i \leq 0 \\ &2x_i + 0.5y_i \leq 8, \quad i = 1, \ldots, 4 \\ &x_i, y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

```
x = optimvar('x', 4, 'LowerBound', 0)
y = optimvar('y', 4, 'LowerBound', 0)

prob = optimproblem('Objective', 135 * sum(x) + 50 * sum(y), 'ObjectiveSense', 'max')

prob.Constraints.ty_le = sum(y) <= 4 * sum(x)

for i = 1:4
    field = sprintf('c%d', i)
    prob.Constraints.(field) = 2*x(i) + 0.5*y(i) <= 8
end
```

```
problem = prob2struct(prob)
[xy, f] = linprog(problem)
```

```
Optimal solution found.
xy = 8x1   → biến sắp theo thứ tự
       0   → x1
       0   → x2
       4   → x3
       4   → x4
      16   → y1
      16   → y2
       0   → y3
       0   → y4

f = -2680
```

Doanh thu cực đại max $f = -(-2680) = 2680$ USD, khi số bàn, ghế mỗi công nhân làm mỗi ngày lần lượt là 0, 16; 0, 16; 4, 0; 4, 0. Số bàn, ghế tối ưu xưởng sản xuất mỗi ngày là $\sum_{i=1}^{4} x_i = 8$, $\sum_{i=1}^{4} y_i = 32$.

13.5. Một nhà máy sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian lao động để làm ra một mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần để làm xong một mũ kiểu hai. Nếu sản xuất toàn mũ kiểu thứ hai thì nhà máy làm được 400 mũ một ngày. Thị trường tiêu thụ được trong mỗi ngày nhiều nhất là 150 mũ kiểu một và 200 mũ kiểu hai. Tiền lãi một mũ kiểu một là 8 USD và kiểu hai là 5 USD.

Cần sản xuất bao nhiêu mũ mỗi kiểu trong ngày để tổng tiền lãi lớn nhất?

Đặt x_1, x_2 là số mũ kiểu một, kiểu hai sản xuất trong ngày. Bài toán max $f = 8x_1 + 5x_2$ hay min $(-f) = -8x_1 - 5x_2$ biết

1) $0 \leq x_1 \leq 150,\ 0 \leq x_2 \leq 200$

2) t là thời gian sản xuất một mũ kiểu hai $\Rightarrow 2tx_1 + tx_2 \leq 400t \Rightarrow 2x_1 + x_2 \leq 400$

```
c = [-8; -5]
A = [2, 1]
b = [400]
l = [0; 0]
u = [150; 200]

[x, f] = linprog(c, A, b, [], [], l, u)
```

```
Optimal solution found.
x = 2x1
     100
     200

f = -1800
```

max $f = -(-1800) = 1800$ USD tại $x_1 = 100$, $x_2 = 200$.

13.6 (Bài toán gà và trứng của Dantzig)**.** Trong hai tuần một con gà mái đẻ được 12 trứng để bán hoặc ấp được 4 trứng nở ra gà con. Sau 8 tuần thì bán tất cả gà và trứng với giá 0.6 USD một gà (lớn hoặc bé đều cùng giá) và 0.1 USD một trứng. Cần phải bố trí gà đẻ và ấp trứng như thế nào để doanh thu lớn nhất. Giải bài toán trong hai trường hợp

a) ban đầu có 100 gà mái và 100 trứng

b) ban đầu có 100 gà mái và kông có trứng

13.7. Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Công suất của dây chuyền một 60 radio/ngày và dây chuyền hai là 75 radio/ngày. Đê sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 10 linh kiện điện tử E, và một chiếc radio kiểu hai cần 8 linh kiện này. Số linh kiện này không quá 800. Tiền lãi khi bán một radio kiểu một là 30 USD và kiểu hai là 20 USD.
Xác định phương án sản xuất cho lãi nhiều nhất trong ngày.
Đặt x_1, x_2 số radio kiểu một, kiểu hai sản xuất trong ngày. Bài toán max $f = 30x_1 + 20x_2$ hay $\min(-f) = -30x_1 - 20x_2$ với

$$10x_1 + 8x_2 \leq 800$$
$$0 \leq x_1 \leq 60,\ 0 \leq x_2 \leq 75$$

```
c = [-30; -20]
A = [10, 8]
b = [800]
l = [0; 0]
u = [60; 75]

[x, f] = linprog(c, A, b, [], [], l, u)
```

```
Optimal solution found.
x = 2x1
      60
      25

f = -2300
```

max $f = -(-2300) = 2300$ USD tại $x_1 = 60, x_2 = 25$.

13.4 Tối ưu có ràng buộc

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.

[2] Steven C. Chapra **and** Raymond P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. phiên bản 8. Cengage Learning, 2020. 1006 trang.

[3] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.

[4] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.

[5] Trần Huệ Nương Phan Quốc Khánh. *Quy hoạch tuyến tính*. phiên bản 2. Nhà xuất bản Giáo dục, 2003. 457 trang.