

**Bài tập môn : Toán học tính toán, Toán kinh tế**

**Đối tượng : Lớp TH, IT, LGT**

**Công cụ tính : MATLAB, Mathematica, Python, Máy tính bỏ túi**

**Thời gian : 30 giờ**

① Giải các phương trình sau bằng **phương pháp Newton**: tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp:

1.  $x^3 + 2x = 4, x \in [1, 3]$
2.  $x^3 + \sin x = 2, x \in [0, 2]$
3.  $xe^x = 5, x \in [1, 3]$
4.  $x(e^x + x) = 6, x \in [1, 2]$
5.  $2^x + \sqrt[3]{x^2 + 1} = 5, x \in [1, 5]$
6.  $x^2 = e^x + 2, x \in [-5, 0]$
7.  $x \ln x + 2^x = 5, x \in [1, 4]$
8.  $x^3 + \ln x = 3, x \in [1, 4]$

② Giải các phương trình sau bằng **phương pháp điểm bất động (lặp đơn)** với xấp xỉ ban đầu cho trước: tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau 3 bước lặp:

9.  $x = \sqrt[5]{32 - x}, x \in [0, 10]$
10.  $x = \sqrt{2 - \sin x}, x \in [0, 2]$
11.  $x = \frac{x \sin x + \cos x}{2}, x \in [-1, 1]$
12.  $x = \frac{x^4 + \sin x - 1}{10}, x \in [-1, 1]$
13.  $x + \lg x = 2, x \in [1, 4]$
14.  $x^5 - x - 1 = 0, x \in [1, 3]$
15.  $x^2 - 10 \lg x - 3 = 0, x \in [2, 5]$
16.  $2x = e^{\sin x}, x \in [0, 3]$

③ Trình bày các phương pháp tìm đa thức nội suy của hàm số có giá trị cho trong bảng:

17. 

|     |    |    |
|-----|----|----|
| $x$ | -2 | 1  |
| $y$ | 8  | -1 |

19. 

|     |     |    |   |     |
|-----|-----|----|---|-----|
| $x$ | -3  | -1 | 1 | 3   |
| $y$ | -16 | 2  | 4 | -10 |

18. 

|     |    |    |   |
|-----|----|----|---|
| $x$ | -1 | 1  | 2 |
| $y$ | 7  | -1 | 1 |

20. 

|     |    |       |   |       |   |
|-----|----|-------|---|-------|---|
| $x$ | 0  | 0.5   | 1 | 1.5   | 2 |
| $y$ | -1 | 0.125 | 1 | 2.375 | 5 |

④ Trình bày các phương pháp tìm đa thức nội suy của hàm số tại các mốc nội suy cho trước:

21.  $y = 2^x$  tại  $-1, 1, 3$
22.  $y = \sin x$  tại  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$
23.  $y = \ln(x^2 + 1)$  tại  $0, 0.5, 1, 2$
24.  $y = \arctan x$  tại  $-1, 0, 1, 2, 3$

⑤ Cho hàm số  $f(x)$  dưới dạng bảng. Bằng công thức sai phân tiến, tính gần đúng  $f'(x)$  tại các giá trị  $x$  trong bảng:

25. 

|        |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|
| $x$    | 0.5   | 0.6   | 0.7   |
| $f(x)$ | 0.479 | 0.565 | 0.644 |

26. 

|        |      |       |       |       |
|--------|------|-------|-------|-------|
| $x$    | 1.1  | 1.2   | 1.3   | 1.4   |
| $f(x)$ | 9.03 | 11.02 | 13.46 | 16.44 |

27. 

|        |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$    | 2.1   | 2.2   | 2.3   | 2.4   | 2.5   | 2.6   |
| $f(x)$ | -1.71 | -1.37 | -1.12 | -0.92 | -0.75 | -0.60 |

⑥ Cho hàm số  $f(x)$  dưới dạng bảng. Bằng công thức ba điểm, tính gần đúng  $f'(x)$  tại các giá trị  $x$  trong bảng:

28. 

|        |      |      |      |
|--------|------|------|------|
| $x$    | 0.0  | 0.2  | 0.4  |
| $f(x)$ | 0.00 | 0.74 | 1.37 |

29. 

|        |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| $x$    | 8.1   | 8.3   | 8.5   | 8.7   |
| $f(x)$ | 16.94 | 17.56 | 18.19 | 18.82 |

30. 

|        |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|
| $x$    | -3.0 | -2.8 | -2.6 | -2.4 | -2.2 | -2.0 |
| $f(x)$ | 9.37 | 8.23 | 7.18 | 6.21 | 5.32 | 4.51 |

⑦ Cho hàm số  $f(x)$  dưới dạng bảng. Bằng công thức ba điểm, tính gần đúng  $f''(x)$  tại các giá trị  $x$  trong bảng.

31.

|        |      |      |      |
|--------|------|------|------|
| $x$    | -0.3 | -0.1 | 0.1  |
| $f(x)$ | 1.95 | 2.04 | 2.06 |

32.

|        |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| $x$    | 2.9   | 3.0   | 3.1   | 3.2   |
| $f(x)$ | -4.83 | -4.24 | -3.50 | -2.60 |

33.

|        |       |       |       |       |       |       |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$    | 1.05  | 1.10  | 1.15  | 1.20  | 1.25  | 1.30  |
| $f(x)$ | -1.71 | -1.37 | -1.12 | -0.92 | -0.75 | -0.60 |

8) Cho hàm số  $f(x)$  dưới dạng bảng. Dùng công thức hình thang và công thức Simpson, tính gần đúng  $\int_a^b f(x) dx$ :

34.

|        |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|
| $x$    | 0.0  | 0.2  | 0.4  | 0.6  | 0.8  |
| $f(x)$ | 1.00 | 0.98 | 0.92 | 0.83 | 0.70 |

,  $\int_0^{0.8} f(x) dx$ 

35.

|        |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $x$    | 0.0  | 0.1  | 0.2  | 0.3  | 0.4  | 0.5  | 0.6  | 0.7  | 0.8  |
| $f(x)$ | 0.69 | 0.87 | 1.07 | 1.29 | 1.52 | 1.77 | 2.03 | 2.31 | 2.60 |

,  $\int_0^{0.8} f(x) dx$ 

36.

|        |            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |           |
|--------|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----------|
| $x$    | $a = -0.5$ | -0.3 | -0.1 | 0.1  | 0.3  | 0.5  | 0.7  | 0.9  | 1.1  | 1.3  | 1.5  | 1.7  | $1.9 = b$ |
| $f(x)$ | 0.56       | 0.23 | 0.03 | 0.03 | 0.28 | 0.78 | 1.45 | 2.24 | 3.09 | 3.92 | 4.71 | 5.42 | 6.03      |

9) Bằng phương pháp hình thang, với số khoảng chia đều  $n$ , tính gần đúng các tích phân và đánh giá sai số:

37.  $\int_1^2 x \ln x dx, \quad n = 4$

38.  $\int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} dx, \quad n = 6$

39.  $\int_0^2 e^{2x} \sin 3x dx, \quad n = 8$

10) Bằng phương pháp Simpson, với số khoảng chia đều  $2n$ , tính gần đúng các tích phân và đánh giá sai số:

40.  $\int_{-0.5}^{0.5} \cos^2 x dx, \quad 2n = 4$

41.  $\int_{-0.5}^{0.5} x \ln(x + 1) dx, \quad 2n = 6$

42.  $\int_{0.75}^{1.75} (\sin^2 x - 2x \sin x + 1) dx, \quad 2n = 8$

11) Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân bằng phương pháp Euler hiện:

43.  $y' = xe^{3x} - 2y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad h = 0.5$

44.  $y' = 1 + (x - y)^2, \quad 2 \leq x \leq 3, \quad y(2) = 1, \quad h = 0.25$

45.  $y' = 1 + \frac{y}{t}, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.2$

12) Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của hệ phương trình vi phân cấp một bằng phương pháp Euler hiện:

46.  $\begin{cases} y' = 3y + 2z - (2x^2 + 1)e^{2x} \\ z' = 4y + z + (x^2 + 2x - 4)e^{2x} \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad h = 0.2$

47.  $\begin{cases} y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \cos x + 4 \sin x \\ y_2' = 3y_1 + y_2 - 3 \sin x \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = -1 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad h = 0.5$

48.  $\begin{cases} y' = z \\ z' = -y - 2e^t + 1 \\ u' = -y - e^t + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \\ u(0) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad h = 0.4$

13) Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân cấp cao bằng phương pháp Euler hiện:

49.  $y'' - 2y' + y = xe^x - x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad h = 0.5$

50.  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad h = 0.2$

51.  $y''' + 2y'' - y' - 2y = 2^t, \quad 0 \leq t \leq 3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0, \quad h = 0.3$

14) Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân bằng phương pháp Runge–Kutta bậc bốn:

52.  $y' = e^{x-y}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad h = 0.5$

53.  $y' = \frac{1+x}{1+y}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0.25$

54.  $y' = -y + t\sqrt{y}, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 2, \quad h = 0.2$

15) Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của hệ phương trình vi phân cấp một bằng phương pháp Runge–Kutta bậc bốn:

55.  $\begin{cases} y' = y - z + 2 \\ z' = -y + z + 4x \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = -1 \\ z(0) = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad h = 0.2$

56.  $\begin{cases} y_1' = \frac{1}{9}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3} \\ y_2' = y_2 + 3x - 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1(0) = -3 \\ y_2(0) = 5 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad h = 0.5$

57.  $\begin{cases} y' = y + 2z - 2u + e^{-t} \\ z' = z + u - 2e^{-t} \\ u' = y + 2z + e^{-t} \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) = 3 \\ z(0) = -1 \\ u(0) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad h = 0.1$

16) Giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân cấp cao bằng phương pháp Runge–Kutta bậc bốn:

58.  $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y'(0) = 2, \quad h = 0.25$

59.  $x^2 y'' + xy' - 4y = -3x, \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 3, \quad h = 0.4$

60.  $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 9, \quad h = 0.3$

17) Giải gần đúng hệ phương trình bằng phương pháp lặp điểm bất động (lặp đơn): tìm nghiệm gần đúng và sai số tương ứng sau  $k$  bước:

61.  $\begin{cases} x_1 = -0.04x_1 + 0.05x_2 + 3.17 \\ x_2 = -0.19x_1 + 0.14x_2 - 0.41 \end{cases}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = 5$

62.  $\begin{cases} x_1 = 0.15x_1 - 0.11x_2 - 0.01x_3 + 3.54 \\ x_2 = -0.265x_1 + 0.1x_2 + 0.215x_3 - 1.16 \\ x_3 = 0.075x_1 - 0.185x_2 - 0.29x_3 + 3.74 \end{cases}, \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k = 4$

$$63. \begin{cases} x = 0.15x - 0.205y - 0.155z + 0.155t - 0.63 \\ y = -0.01x + 0.08y + 0.18t + 0.68 \\ z = 0.055x + 0.05z - 0.115t - 2.27 \\ t = -0.045x - 0.21y - 0.01z - 0.08t - 2.11 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = -3 \\ t_0 = -1 \end{cases}, k = 3$$

(18) Giải gần đúng hệ phương trình theo công thức lặp Gauss–Seidel: tìm nghiệm gần đúng và đánh giá khoảng cách giữa hai nghiệm gần đúng liên tiếp sau  $k$  bước:

$$64. \begin{cases} x_1 = 0.28x_1 - 0.05x_2 - 1.7 \\ x_2 = 0.36x_1 - 0.26x_2 + 3.9 \end{cases}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, k = 4$$

$$65. \begin{cases} x = -0.295x - 0.215y + 0.21z + 4.76 \\ y = 0.255x + 0.13y - 0.01z + 3.16 \\ z = 0.055x + 0.1y - 0.095z + 3.52 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 4 \\ z_0 = 1 \end{cases}, k = 3$$

(19) Giải gần đúng hệ chéo trội bằng phương pháp lặp điểm bất động (lặp đơn): tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước:

$$66. \begin{cases} 2x + 0.7y = -1.2 \\ 1.9x - 3.1y = 2.5 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \end{cases}, k = 5$$

$$67. \begin{cases} 6x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k = 4$$

$$68. \begin{cases} 7.2x_1 - x_2 + 1.2x_3 = 2 \\ x_1 + 12x_2 - x_3 + 3.2x_4 = -1 \\ -1.4x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 2.1x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 17x_4 = 3 \end{cases}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, k = 2$$

(20) Giải gần đúng hệ chéo trội theo công thức lặp Gauss–Seidel: tìm nghiệm gần đúng sau 3 bước:

$$69. \begin{cases} 2.5x_1 + 0.9x_2 = 3.4 \\ x_1 + 2.8x_2 = -0.6 \end{cases}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, k = 5$$

$$70. \begin{cases} 4.1x + y - z = 0 \\ 2x - 10y + 3z = -2 \\ 1.3x - 3y + 7z = 1.5 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases}, k = 3$$

(21) Tìm xấp xỉ của hàm số  $y = f(x)$  có giá trị cho trong bảng bởi không gian hàm có cơ sở cho trước và đánh giá sai số:

$$71. \begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 3.85 & 6.5 & 9.35 & 12.05 \end{array}, \text{bởi đa thức bậc nhất}$$

$$72. \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 7.5 & 2 & 4.5 & 14 \end{array}, \text{bởi đa thức bậc 2}$$

$$73. \begin{array}{c|ccccc} x & 1.1 & 1.3 & 1.6 & 1.8 & 2 \\ \hline y & 0.74 & 1.57 & 2.8 & 3.6 & 4.35 \end{array}, \{1, \cos x, \ln x\}$$

$$74. \begin{array}{c|ccccccc} x & -1.2 & -0.9 & -0.6 & -0.3 & 0 & 0.3 & 0.6 \\ \hline y & 7 & 6.32 & 5.8 & 5.34 & 5.04 & 4.9 & 5.02 \end{array}, \{1, x, e^x\}$$

(22) Tìm xấp xỉ của hàm số  $y = f(x)$  bởi không gian hàm có cơ sở cho trước và đánh giá sai số:

75.  $y = e^{\sin x}$ ,  $x \in [-1, 1]$ , bởi đa thức bậc nhất      77.  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $\{1, x, e^x\}$

76.  $y = e^x$ ,  $x \in [0, 2]$ , bởi đa thức bậc 2

78.  $y = |1 - x|$ ,  $x \in [0, 2]$ ,  $\{1, \cos x, \sin x\}$

(23) Giải gần đúng hệ phương trình bằng phương pháp Newton–Raphson: tìm nghiệm gần đúng đánh giá  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$  sau 5 bước

79. 
$$\begin{cases} 4x_1^2 - 20x_1 + \frac{1}{4}x_2^2 + 8 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1x_2^2 + 2x_1 - 5x_2 + 8 = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}.$$

80. 
$$\begin{cases} 5x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - 0.25(\sin x_1 + \cos x_2) = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

81. 
$$\begin{cases} x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1x_3 + 6 = 0 \\ e^{x_1} + e^{x_2} - x_3 = 0 \\ x_2^2 - 2x_1x_3 = 4 \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(24) Giải gần đúng hệ phương trình bằng phương pháp lặp điểm bất động: tìm nghiệm gần đúng đánh giá  $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty$  sau 5 bước.

82. 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} \\ x_2 = \frac{2 \sin x_1 + \cos x_2}{4} \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

83. 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{13 - x_2^2 + 4x_3^3}{15} \\ x_2 = \frac{11 + x_3 - x_1^2}{22 + x_2^3} \\ x_3 = \frac{10}{25} \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

84. 
$$\begin{cases} x_1 = 1 - \cos(x_1x_2x_3) \\ x_2 = 1 - \sqrt[4]{1 - x_1} - 0.05x_3^2 + 0.15x_3 \\ x_3 = x_1^2 + 0.1x_2^2 - 0.01x_2 + 1 \end{cases}, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

(25) Giải bài toán tối ưu một biến bằng phương pháp Newton: tìm nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu sau 5 bước lặp.

85.  $\min_{x \in [0,3]} (1.6x^6 + 3x^4 - 10x), \quad x_0 = 2$

86.  $\min_{x \in [-1,3]} \left( \frac{(x^2 + 5)^2}{15} + e^x - 5 \right), \quad x_0 = 2$

87.  $\min_{x \in [-1, -0.1]} \left( 0.65 - \frac{0.75}{1 + x^2} - 0.5 \arctan \frac{1}{x} \right), \quad x_0 = -0.1$

(26) Giải bài toán tối ưu nhiều biến bằng phương pháp Newton: tìm nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu sau 5 bước lặp.

88.

89.

90.

(27) Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng trên miền  $G$  với điều kiện biên  $u(x, y)|_{\partial G}$  và lưới  $(x_i, y_j)$  cho trước:

91.  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad G = [0, 0.4] \times [0, 0.6], \quad u(x, y)|_{\partial G} = x^2y^2, \quad x_i = 0.1i, \quad y_j = 0.2j$