# Mục lục

# Chương 12

# Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng

## 12.1 Phương trình đạo hàm riêng Elliptic

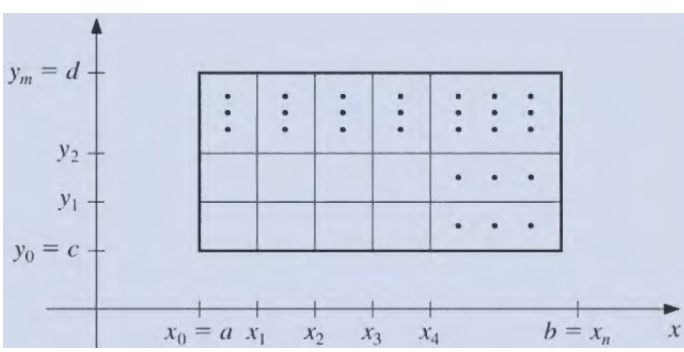
Xét phương trình Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = f(x,y) \tag{12.1}$$

trên $R = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$, với $u(x,y) = g(x,y)$ khi $(x,y) \in S$, trong đó $S$ là biên của $R$. Nếu $f$ và $g$ liên tục trên miền xác định của chúng, thì phương trình có nghiệm duy nhất.

### Chọn lưới

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, tương tự cho bài toán giá trị biên trong Phần 11.3, nhưng mở rộng cho trường hợp hai chiều. Chia đều đoạn $[a,b]$ thành $n$ đoạn, với cỡ bước $h = \dfrac{b-a}{n}$, bởi các điểm chia $x_i = a + ih,\ i = \overline{0,n}$; và chia $[c,d]$ thành $m$ đoạn, bởi $y_j = c + jk,\ j = \overline{0,m}$ với $k = \dfrac{d-c}{m}$.



Các đường $x = x_i$ và $y = y_j$ gọi là đường lưới, các điểm $\left(x_i, y_j\right)$ gọi là điểm lưới.

Tại điểm lưới $\left(x_i, y_j\right)$ bên trong lưới, $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$, xấp xỉ các đạo hàm cấp hai

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x_i, y_j\right) &= \frac{u\left(x_{i+1}, y_j\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_{i-1}, y_j\right)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\xi_i, y_j\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(x_i, y_j\right) &= \frac{u\left(x_i, y_{j+1}\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_i, y_{j-1}\right)}{k^2} - \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(x_i, \eta_j\right)
\end{aligned} \tag{12.2}$$

trong đó $\xi_i \in \left(x_{i-1}, x_{i+1}\right), \eta_j \in \left(y_{j-1}, y_{j+1}\right)$.

Thay vào (12.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{u\left(x_{i+1}, y_j\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_{i-1}, y_j\right)}{h^2} + \frac{u\left(x_i, y_{j+1}\right) - 2u\left(x_i, y_j\right) + u\left(x_i, y_{j-1}\right)}{k^2} \\
&= f\left(x_i, y_j\right) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\left(\xi_i, y_j\right) + \frac{k^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\left(x_i, \eta_j\right)
\end{aligned}$$

Điều kiện biên là

$$\begin{aligned}
&u\left(x_0, y_j\right) = g\left(x_0, y_j\right) \text{ và } u\left(x_n, y_j\right) = g\left(x_n, y_j\right), \ j = \overline{0, m}; \\
&u\left(x_i, y_0\right) = g\left(x_i, y_0\right) \text{ và } u\left(x_i, y_m\right) = g\left(x_i, y_m\right), \ i = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

## Phương pháp sai phân hữu hạn

Thay các $u\left(x_i, y_j\right)$ bởi xấp xỉ $u_{ij}$, ta được phương trình gần đúng với sai số cụt cấp $O\left(h^2 + k^2\right)$:

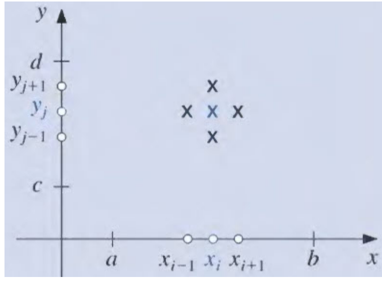
$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} = f\left(x_i, y_j\right) \\
\Leftrightarrow\ & -2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2 + 1\right]u_{ij} + \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right) + \left(\frac{h}{k}\right)^2\left(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) = h^2 f\left(x_i, y_j\right)
\end{aligned} \tag{12.3}$$

Điều kiện biên là

$$\begin{aligned}
&u_{0j} = g\left(x_0, y_j\right) \text{ và } u_{nj} = g\left(x_n, y_j\right), \ j = \overline{0, m}; \\
&u_{i0} = g\left(x_i, y_0\right) \text{ và } u_{im} = g\left(x_i, y_m\right), \ i = \overline{1, n-1}.
\end{aligned}$$

Phương trình trên cho mối liên hệ của các xấp xỉ của $u(x, y)$ tại các điểm

$$\left(x_{i-1}, y_j\right), \quad \left(x_i, y_j\right), \quad \left(x_{i+1}, y_j\right), \quad \left(x_i, y_{j-1}\right), \quad \text{và} \quad \left(x_i, y_{j+1}\right)$$

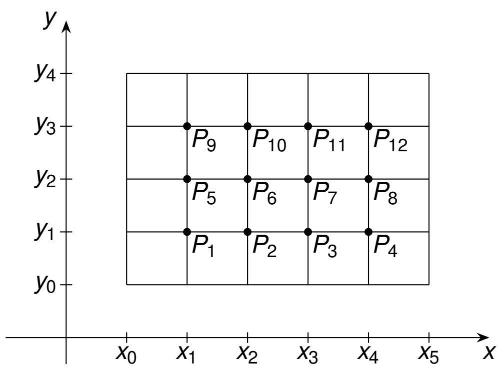



Với $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, ta có hệ $(n-1)(m-1)$ phương trình tuyến tính $(n-1)(m-1)$ ẩn $u_{ij}$.

Đánh số lại các điểm lưới và các biến, với $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$

$$P_l = \left(x_i, y_j\right) \quad \text{và} \quad u_l = u_{ij} \quad \text{trong đó} \quad l = (j-1)(n-1) + i$$

chẳng hạn với $n = 5$ và $m = 4$




Khi đó ma trận của hệ có dạng ba đường chéo khối đối xứng

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & A_2 & C_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & C_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{m-2} \\ 0 & \cdots & 0 & C_{m-2} & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

trong đó $A_i$ là ma trận ba đường chéo, và $C_i$ là ma trận đường chéo, đều có cấp $n-1$.

**Ví dụ 12.1.** Giải gần đúng phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 1, \quad 1 < y < 1.4$$

với điều kiện biên

$$u(0,y)=0,\quad u(1,y)=e^y,\quad 0\le y\le 1.4$$
$$u(x,1)=ex,\quad u(x,1.4)=e^{1.4}x,\quad 0\le x\le 2$$

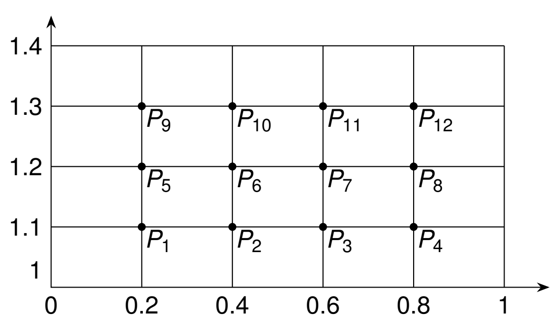
trên lưới chia đều đoạn [0, 1] thành 5 đoạn, và [1, 1.4] thành 4 đoạn.

*Giải.* $f(x,y)=xe^y,\ g(x,y)=\begin{cases}0 & \text{nếu } x=0\\ e^y & \text{nếu } x=1\\ ex & \text{nếu } y=1\\ e^{1.4}x & \text{nếu } y=1.5\end{cases}$

```
f = @(x, y) x * exp(y)
```

```
function val = g(x, y)  % khai báo ở ô cuối cùng của sổ tay
if x == 0
    val = 0;
end
if x == 1
    val = exp(y);
end
if y == 1
    val = exp(1) * x;
end
if y == 1.4
    val = exp(1.4) * x;
end
end
```

$$a=0, b=1, c=1, d=1.4, n=5, n=4, h=\frac{b-a}{n}=0.2, k=\frac{d-c}{m}=0.1$$




```
a = 0; b = 1; c = 1; d = 1.4;
n = 5; m = 4;
h = (b-a)/n, k = (d-c)/m
```

$$-2\left[\left(\frac{h}{k}\right)^2+1\right]u_{ij}+\left(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}\right)+\left(\frac{h}{k}\right)^2\left(u_{i,j+1}+u_{i,j-1}\right)=h^2 f\left(x_i,y_j\right)$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
-10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
4 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ \hdashline u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ \hdashline u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
-2.1506 \\ -4.3012 \\ -6.4518 \\ -11.6065 \\ 0.0266 \\ 0.0531 \\ 0.0797 \\ -3.2139 \\ -3.2148 \\ -6.4296 \\ -9.6444 \\ -16.5285
\end{array}\right]$$

```
aL = "A(r, r-1) = 1;"                        % hệ số của u_{i-1,j}
aR = "A(r, r+1) = 1;"                        % . . . . . u_{i+1,j}
aD = "A(r, r-n+1) = (h/k)^2;"                % . . . . . u_{i,j-1}
aU = "A(r, r+n-1) = (h/k)^2;"                % . . . . . u_{i,j++1}
lh = "B(r) = h^2 * f(a+i*h, b+j*k)"          % h^2 f(x_i, y_j), chưa có
    dấu ; để còn nối phép tính
sL = "- g(a+(i-1)*h, b+j*k)"                 % -g(x_{i-1}, y_j)
sR = "- g(a+(i+1)*h, b+j*k)"                 % -g(x_{i+1}, y_j)
sD = "- (h/k)^2 * g(a+i*h, b+(j-1)*k)"       % -(h/k)^2 g(x_i, y_{j-1})
sU = "- (h/k)^2 * g(a+i*h, b+(j+1)*k)"       % -(h/k)^2 g(x_i, y_{j+1})

A = zeros((n-1)*(m-1));
B = zeros((n-1)*(m-1), 1);
for i = 1:n-1                              % duyệt từng cột trên hình
    for j = 1:m-1
        r = (j-1)*(n-1) + i;                 % phương trình thứ r
        A(r, r) = -2 * ((h/k)^2 + 1);        % hệ số của u_ij
        if i == 1 && j == 1                  % góc dưới trái
            eval(aR + aU + lh + sL + sD + ";")
        end
        if i == 1 && j == m-1                % góc trên trái
            eval(aR + aD + lh + sL + sU + ";")
        end
        if i == n-1 && j == 1                % góc dưới phải
            eval(aL + aU + lh + sR + sD + ";")
        end
        if i == n-1 && j == m-1              % góc trên phải
```

```
                eval(aL + aD + lh + sR + sU + ";")
            end
            if i == 1 && 1 < j && j < m-1               % cạnh trái
                eval(aR + aD + aU + lh + sL + ";")
            end
            if i == n-1 && 1 < j && j < m-1             % cạnh phải
                eval(aL + aD + aU + lh + sR + ";")
            end
            if j == 1 && 1 < i && i < n-1               % cạnh dưới
                eval(aL + aR + aU + lh + sD + ";")
            end
            if j == m-1 && 1 < i && i < n-1             % cạnh trên
                eval(aL + aR + aD + lh + sU + ";")
            end
            if 1 < i && i < n-1 && 1 < j && j < m-1   % giữa
                eval(aL + aR + aD + aU + lh + ";")
            end
        end
end
A
B
```

Nghiệm gần đúng tại các điểm trên lưới

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.7339 | 1.4677 | 2.2016 | 2.9355 |
| 0.6640 | 1.3281 | 1.9921 | 2.6561 |
| 0.6008 | 1.2017 | 1.8025 | 2.4034 |

```
u = linsolve(A, B)
sol = flipud(reshape(u, n-1, m-1)')
```

□

Nghiệm đúng của ví dụ trên là $u(x, y) = xe^y$, và giá trị đúng tại các điểm lưới

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.7339 | 1.4677 | 2.2016 | 2.9354 |
| 0.6640 | 1.3280 | 1.9921 | 2.6561 |
| 0.6008 | 1.2017 | 1.8025 | 2.4033 |

```
u = @(x, y) x * exp(y)

U = zeros(n-1, m-1)
for i = 1:n-1
    for j = 1:m-1
        x = a + i*h; y = b + j*k;
```

```
        U(i, j) = u(x, y);
    end
end
U
flip(U')
```

## 12.2 Phương trình đạo hàm riêng Parabolic

## 12.3 Phương trình đạo hàm riêng Hyperbolic

## 12.4 Giới thiệu về phương pháp phần tử hữu hạn

# Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.

[2] Steven C. Chapra **and** Raymond P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. phiên bản 8. Cengage Learning, 2020. 1006 trang.

[3] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.

[4] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.

[5] Trần Huệ Nương Phan Quốc Khánh. *Quy hoạch tuyến tính*. phiên bản 2. Nhà xuất bản Giáo dục, 2003. 457 trang.