Mục lục

Chương 5

Bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân thường

Xét phương trình vi phân cấp một, bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \text{ với } x_0 \leq x \leq \overline{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

trong đó $y, f \in \mathbb{R}^m$, hay

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ \ldots \\ y_m' = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$$

với $y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \; i = \overline{1, m}$.

Phương trình vi phân cấp cao

$$\begin{cases} y^{(m)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}\right) \\ y^{(i)}(x_0) = y_i^{(0)}, \; i = \overline{0, m-1} \end{cases}$$

có thể đưa được về hệ phương trình vi phân cấp một. Đặt hàm phụ $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \ldots, y_m = y^{(m-1)}$, ta được

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_{m-1}' = y_m \\ y_m' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{cases}$$

với $y_i(x_0) = y_{i-1}^{(0)},\ i = \overline{1, m}$.

Xét các ví dụ:

Ví dụ 5.1. $y' = y - x, y(0) = 2$ (nghiệm $y = 1 + x + e^x$).

Ví dụ 5.2. $\begin{cases} y' = xy - z \\ z' = y + z - 1 \end{cases}, \begin{cases} y(1) = -1 \\ z(1) = 2. \end{cases}$

Ví dụ 5.3. $y''' - xy'' + y = 0; y(-1) = 1, y'(-1) = 0, y''(-1) = -2.$

Đặt $y' = z$, $u = y''$ $(= z')$ thì $u' = y''' = xy'' - y = xu - y$. Ta có hệ

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = u \\ u' = xu - y \end{cases}, \quad \begin{cases} y(-1) = 1 \\ z(-1) = 0 \\ u(-1) = -2. \end{cases}$$

5.1 Lý thuyết cơ bản về bài toán giá trị ban đầu

Định nghĩa 5.1. *Hàm $f(x, y)$ gọi là thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến y trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu $\exists L > 0,\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D$,*

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|.$$

L gọi là hằng số Lipschitz của f.

Định nghĩa 5.2. *Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ khác rỗng gọi là lồi nếu*

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D,\ \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \left(\left(1 - \lambda\right) x_1 + \lambda x_2, \left(1 - \lambda\right) y_1 + \lambda y_2\right) \in D.$$

Định lý 5.1. *Giả sử $f(x, y)$ xác định trên tập lồi $D \subset \mathbb{R}^2$. Nếu*

$$\exists L > 0,\ \left|\partial_y f(x, y)\right| \le L,\ \forall (x, y) \in D,$$

thì f thỏa mãn điều kiện Lipschitz trên D theo biến y với hằng số Lipschitz L.

Định lý 5.2. *Giả sử $D = \left\{(x, y) \mid x_0 \le x \le \overline{x},\ -\infty < y < \infty\right\}$, và $f(x, y)$ liên tục trên D theo biến y, thì bài toán giá trị ban đầu*

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ x_0 \le x \le \overline{x};\ y(x_0) = y_0$$

có nghiệm duy nhất $y(x)$ với $x_0 \leq x \leq \overline{x}$.

Trong hai phần tiếp theo, ta xét các phương pháp giải tích để giải gần đúng bài toán giá trị ban đầu, gồm phương pháp Picard và phương pháp chuỗi Taylor. Trong các phương pháp này, ta tìm dãy hàm $y_n(x)$ hội tụ tới nghiệm $y(x)$.

5.2 Phương pháp Picard

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \ \forall x \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left[t, y_{n-1}(t)\right] dt, \ \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.1}$$

và với hệ phương trình, các vế của (5.1) đều là các véctơ, được thực hiện theo từng thành phần, trong đó phép tính tích phân của véctơ được hiểu là lấy tích phân của mọi thành phần.

$$\begin{aligned} y_i^{(0)}(x_0) &= y_i^{(0)}, \ \ i = \overline{1, m} \\ y_i^{(n)}(x) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i\left[t, y_1^{(n-1)}(t), y_2^{(n-1)}(t), \ldots, y_m^{(n-1)}(t)\right] dt, \ \ i = \overline{1, m}, \ \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Ví dụ 5.4. Trong Ví dụ 5.1, tính tới $y_3(x)$.

Giải. Công thức lặp

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 2 \\ y_n(x) &= 2 + \int_0^x \left[y_{n-1}(t) - t\right] dt. \end{aligned}$$

Quá trình tính cụ thể:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2 + \int_0^x (2 - t) dt = 2 + 2x - \frac{x^2}{2} \\ y_2(x) &= 2 + \int_0^x \left[\left(2 + 2t - \frac{t^2}{2}\right) - t\right] dt = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \\ y_3(x) &= 2 + \int_0^x \left[\left(2 + 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) - t\right] dt = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}. \end{aligned}$$

□

```
f = @(x, y) y - x   % VD2: f = @(x, y) [x*y(1) - y(2); y(1) + y(2) - 1]
                    % VD3: f = @(x, y) [y(2); y(3); x*y(3) - y(1)]
f(1, 2)             % VD2: f(1, [2; 3])
```

```
                    % VD3: f(0, [1; 2; 3])

x0 = 0              % VD2: x0 = 1
                    % VD3: x0 = -1

y0 = 2              % VD2: y0 = [-1; 2]
                    % VD3: y0 = [1; 0; -2]

syms x t

y = y0
for n = 1:3
    y = expand(y0 + int(f(t, subs(y, t)), x0, x))
end
```

Bằng phương pháp quy nạp, ta có thể chứng minh

$$
\begin{aligned}
y_n(x) &= 2 + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) + 1 + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} e^x + 1 + x = y(x).
\end{aligned}
$$

Ví dụ 5.5. Trong Ví dụ 5.2, tính tới $y_2(x)$, $z_2(x)$.

Giải. Công thức lặp

$$
\begin{aligned}
&y_0(x) = -1,\ z_0(x) = 2, \\
&y_n(x) = -1 + \int_1^x \left[t y_{n-1}(t) - z_{n-1}(t)\right] dt, \quad z_n(x) = 2 + \int_1^x \left[y_{n-1}(t) + z_{n-1}(t) - 1\right] dt.
\end{aligned}
$$

Ta có

$$
\begin{aligned}
* \quad & y_1(x) = -1 + \int_1^x [t(-1) - 2]\, dt = \frac{3}{2} - 2x - \frac{x^2}{2} \\
& z_1(x) = 2 + \int_1^x [-1 + 2 - 1]\, dt = 2 \\
* \quad & y_2(x) = -1 + \int_1^x \left[t\left(\frac{3}{2} - 2t - \frac{t^2}{2}\right) - 2\right] dt = \frac{25}{24} - 2x + \frac{3x^2}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{8} \\
& z_2(x) = 2 + \int_1^x \left[\frac{3}{2} - 2t - \frac{t^2}{2} + 2 - 1\right] dt = \frac{2}{3} + \frac{5x}{2} - x^2 - \frac{x^3}{6}.
\end{aligned}
$$

□

```
f = @(x, y) [x*y(1) - y(2); y(1) + y(2) - 1]
f(1, [2; 3])

x0 = 1
y0 = [-1; 2]

syms x t

y = y0
for n = 1:3
    y = expand(y0 + int(f(t, subs(y, t)), x0, x))
end
```

Ví dụ 5.6. Trong Ví dụ 5.3, tính tới $y_3(x)$.

Giải. Công thức lặp

$$y_0(x) = 1, z_0(x) = 0, u_0(x) = -2$$

$$y_n(x) = 1 + \int_{-1}^{x} z_{n-1}(t)\,dt, \quad z_n(x) = 0 + \int_{-1}^{x} u_{n-1}(t)\,dt,$$

$$u_n(x) = -2 + \int_{-1}^{x} \left[t u_{n-1}(t) - y_{n-1}(t)\right] dt.$$

Ta có

$$* \; y_1(x) = 1 + \int_{-1}^{x} 0 dt = 1$$

$$z_1(x) = 0 + \int_{-1}^{x} -2dt = -2 - 2x$$

$$u_1(x) = -2 + \int_{-1}^{x} [t(-2) - 1]\,dt = -2 - x - x^2.$$

$$* \; y_2(x) = 1 + \int_{-1}^{x} (-2 - 2t)\,dt = -2x - x^2$$

$$z_2(x) = 0 + \int_{-1}^{x} \left(-2 - t - t^2\right) dt = -\frac{11}{6} - 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

$$u_2(x) = -2 + \int_{-1}^{x} \left[t\left(-2 - t - t^2\right) - 1\right] dt = -\frac{25}{12} - x - x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$* \; y_3(x) = 1 + \int_{-1}^{x} \left(-\frac{11}{6} - 2t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right) dt = \frac{1}{12} - \frac{11x}{6} - x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}.$$

□

```
f = @(x, y) [y(2); y(3); x*y(3) - y(1)]
f(0, [1; 2; 3])

x0 = -1
y0 = [1; 0; -2]

syms x t

y = y0
for n = 1:3
    y = expand(y0 + int(f(t, subs(y, t)), x0, x))
end
```

5.3 Phương pháp chuỗi Taylor

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{5.2}$$

và với hệ phương trình:

$$y_{in}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_i^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad i = \overline{1, m}.$$

Ví dụ 5.7. Trong Ví dụ 5.1, tính $y_3(x)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} & y(0) = 2 \\ & y' = y - x && \Rightarrow y'(0) = y(0) - 0 = 2 \\ & y'' = y' - 1 && \Rightarrow y''(0) = 2 - 1 = 1 \\ & y''' = y'' && \Rightarrow y'''(0) = 1. \end{aligned}$$

Suy ra

$$y_3(x) = 2 + \frac{2}{1!}(x - 0) + \frac{1}{2!}(x - 0)^2 + \frac{1}{3!}(x - 0)^3 = 2 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

□

```
f = @(x, y) y - x
x0 = 0
y0 = 2
```

```
syms x y(x)
n = 3

d = y(x)
P = y0
for k = 1:n
    d = subs(diff(d), diff(y), f(x, y))
    d0 = subs(d, [x, y(x)], [x0, y0])
    P = P + d0 / factorial(k) * (x - x0)^k
end
```

Dễ thấy $y^{(k)} = y'' \ \forall k \geq 2 \Rightarrow y^{(k)}(0) = y''(0) = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 2 + 2x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) + 1 + x \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} e^x + 1 + x = y(x). \end{aligned}$$

Ví dụ 5.8. Trong Ví dụ 5.2, tính $y_3(x)$, $z_3(x)$.

Giải. Ta có

$$\begin{array}{lll} & y(1) = -1,\ z(1) = 2 & \\ * & y' = xy - z & \Rightarrow y'(1) = 1y(1) - z(1) = 1(-1) - 2 = -3 \\ & z' = y + z - 1 & \Rightarrow z'(1) = y(1) + z(1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0 \\ * & y'' = y + xy' - z' & \Rightarrow y''(1) = -1 + 1(-3) - 0 = -4 \\ & z'' = y' + z' & \Rightarrow z''(1) = -3 + 0 = -3 \\ * & y''' = 2y' + xy'' - z'' & \Rightarrow y'''(1) = 2(-3) + 1(-4) - (-3) = -7 \\ & z''' = y'' + z'' & \Rightarrow z'''(1) = -4 + (-3) = -7. \end{array}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} y_3(x) &= -1 + (-3)(x-1) + \frac{-4}{2!}(x-1)^2 + \frac{-7}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 - 3(x-1) - 2(x-1)^2 - \frac{7}{6}(x-1)^3 \\ z_3(x) &= 2 + 0(x-1) + \frac{-3}{2!}(x-1)^2 + \frac{-7}{3!}(x-1)^3 = 2 - \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{7}{6}(x-1)^3. \end{aligned}$$

□

```
f = @(x, y, z) [x*y - z, y + z - 1]
x0 = 1
y0 = -1
z0 = 2

syms y(x) z(x)
n = 3

d = y(x)   % z(x)
P = y0     % z0
for k = 1:n
    d = subs(diff(d), [diff(y), diff(z)], f(x, y, z))
    d = expand(d)
    d0 = subs(d, [x, y(x), z(x)], [x0, y0, z0])
    P = P + d0 / factorial(k) * (x - x0)^k
end
```

Ví dụ 5.9. Trong Ví dụ 5.3, tính $y_5(x)$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&y(-1) = 1, y'(-1) = 0, y''(-1) = -2 \\
&y''' = xy'' - y && \Rightarrow y'''(-1) = (-1)(-2) - 1 = 1 \\
&y^{(4)} = y'' + xy''' - y' && \Rightarrow y^{(4)}(-1) = -2 + (-1)1 - 0 = -3 \\
&y^{(5)} = 2y''' + xy^{(4)} - y'' && \Rightarrow y^{(5)}(-1) = 2 \cdot 1 + (-1)(-3) - (-2) = 7
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
y_5(x) &= 1 + 0(x+1) + \frac{-2}{2!}(x+1)^2 + \frac{1}{3!}(x+1)^3 + \frac{-3}{4!}(x+1)^4 + \frac{7}{5!}(x+1)^5 \\
&= 1 - (x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1)^3 - \frac{1}{8}(x+1)^4 + \frac{7}{120}(x+1)^5.
\end{aligned}$$

□

```
x0 = -1
y0 = 1
y1 = 0
y2 = -2

syms y(x)
n = 5
```

```
d = y(x)
P = y0
for k = 1:n
    d = subs(diff(d), diff(y, 3), x * diff(y, 2) - y);
    d = expand(d)
    d0 = subs(d, [x, y(x), diff(y(x)), diff(y(x), 2)], [x0
    , y0, y1, y2])
    P = P + d0 / factorial(k) * (x - x0)^k
end
```

Các phương pháp giải bài toán giá trị ban đầu trong chương này chủ yếu là các phương pháp số, ở đó ta xấp xỉ $y(x_n)$ bởi y_n tại các điểm $x_0 < x_1 < ... < x_N \leqslant \overline{x}$.

Ký hiệu $h_n = x_{n+1} - x_n$, $n = \overline{0, N-1}$. Trong hầu hết trường hợp, các bước nhảy bằng nhau, tức là $x_{n+1} - x_n = h$, $\forall n$.

5.4 Phương pháp Euler

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, ... \tag{5.3}$$

và với hệ phương trình:

$$y_i^{(n+1)} = y_i^{(n)} + h_n f_i\left(x_n, y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}\right), \quad i = \overline{1, m}.$$

Các phép tính được ghi trong bảng

n	x_n	y_n	$h_n f(x_n, y_n)$
...			
n	x_n	y_n	$d = h_n f(x_n, y_n)$
$n+1$	$x_{n+1} = x_n + h_n$	$y_{n+1} = y_n + d$	
...			

và trong trường hợp hệ phương trình vi phân, các cột ứng với các véctơ y_n và $h_f(x_n, y_n)$ được tách thành nhiều cột, tương ứng với $y_i^{(n)}$ và $h_n f_i\left(x_n, y_1^n, y_2^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}\right)$, $i = \overline{1, m}$.

Ví dụ 5.10. Trong Ví dụ 5.1, tính nghiệm gần đúng tại các điểm 0.2, 0.3, 0.5. So sánh với nghiệm đúng $y(x_n) = e^{x_n} + 1 + x_n$.

Giải. Công thức lặp

$$y_{n+1} = y_n + h_n(y_n - x_n).$$

Ta có bảng tính

n	x_n	y_n	$y(x_n)$		
0	0	2	0.4		
1	0.2	2.4	$\boxed{0.22}$	2.4214	$= 0.1(2.4 - 0.2)$
2	0.3	$\boxed{2.62}$	0.464	2.64986	$= 2.4 + 0.22$
3	0.5	3.084		3.14872	

□

```
1 f = @(x, y) y - x
2 X = [0, 0.2, 0.3, 0.5]

3 y = 2
4 for n = 1:3
5     h = X(n+1) - X(n);
6     y = y + h * f(X(n), y)
7 end
```

Dòng 4–7 là đoạn mã chính, được giữ nguyên cho hai ví dụ sau về giải hệ phương trình vi phân cấp một, trong đó phương trình vi phân cấp ba được đưa về hệ ba phương trình vi phân cấp một.

Ví dụ 5.11. Trong Ví dụ 5.2, tìm nghiệm gần đúng tại các điểm 1.1, 1.3, 1.5.

Giải. Công thức lặp

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + h_n\left(x_n y_n - z_n\right) \\
z_{n+1} &= z_n + h_n\left(y_n + z_n - 1\right).
\end{aligned}
$$

Bảng tính

n	x_n	y_n	z_n	$h_n f_y(x_n, y_n, z_n)$	$h_n f_z(x_n, y_n, z_n)$
0	1	-1	2	-0.3	0
1	1.1	-1.3	2	-0.686	-0.06
2	1.3	-1.986	1.94	-0.90436	-0.2092
3	1.5	-2.89036	1.7308		

□

```
1 f = @(x, y) [x*y(1) - y(2), y(1) + y(2) - 1]
2 X = [1, 1.1, 1.3, 1.5]

3 y = [-1, 2]
4 for n = 1:3
```

```
    h = X(n+1) - X(n);
    y = y + h * f(X(n), y)
end
```

Ví dụ 5.12. Trong Ví dụ 5.3, tìm nghiệm gần đúng tại $-0.8, -0.6, -0.5$.

Giải. Công thức lặp

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n z_n \\ z_{n+1} &= z_n + h_n u_n \\ u_{n+1} &= u_n + h_n \left(x_n u_n - y_n\right). \end{aligned}$$

Bảng tính

n	x_n	y_n	z_n	u_n	$h_n f_y$	$h_n f_z$	$h_n f_u$
0	-1	1	0	-2	0	-0.4	0.2
1	-0.8	1	-0.4	-1.8	-0.08	-0.36	0.088
2	-0.6	0.92	-0.76	-1.712	-0.076	-0.1712	0.01072
3	-0.5	0.844					

□

```
f = @(x, y) [y(2), y(3), x*y(3) - y(1)]
X = [-1, -0.8, -0.6, -0.5]

y = [1, 0, -2]
for n = 1:3
    h = X(n+1) - X(n);
    y = y + h * f(X(n), y)
end
```

Định lý 5.3. *Giả sử f liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hằng số L trên*

$$D = \left\{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq \overline{x},\ -\infty < y < \infty\right\},$$

và

$$\exists M,\ \left|y''(x)\right| \leq M,\ \forall x \in [x_0, \overline{x}],$$

trong đó $y''(x)$ là nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu

$$y' = f(x, y),\ x_0 \leq x \leq \overline{x};\ y(x_0) = y_0.$$

Đặt $y_0, y_1, \ldots, y_N$ là các xấp xỉ sinh bởi phương pháp Euler. Khi đó $\forall n = \overline{0, N}$,

$$\left| y(x_n) - y_n \right| \le \frac{hM}{2L}\left[e^{L(x_n - a)} - 1 \right].$$

5.5 Phương pháp Taylor bậc cao

$$y_{n+1} = y_n + h_n T^{(r)}(x_n, y_n), \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{5.4}$$

trong đó

$$T^{(r)}(t_n, y_n) = f(x_n, y_n) + \frac{h}{2} f'(x_n, y_n) + \cdots + \frac{h^{r-1}}{r!} f^{(r-1)}(x_n, y_n).$$

Phương pháp Euler là phương pháp Taylor bậc một.

Định lý 5.4. *Nếu dùng phương pháp Taylor bậc k để xấp xỉ nghiệm của bài toán*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x_0 \le x \le \overline{x}; \quad y(x_0) = y_0,$$

với bước chia h, và nếu $y \in C^{r+1}[a, b]$, thì sai số cụt địa phương là $O\left(h^r\right)$.

5.6 Phương pháp Runge–Kutta

5.6.1 Phương pháp Runge–Kutta bậc hai

5.6.2 Phương pháp trung điểm

5.6.3 Phương pháp Euler cải biên

5.6.4 Phương pháp Runge–Kutta bậc cao

5.6.5 Runge–Kutta bậc bốn

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad n = 1, 2 \ldots \tag{5.5}$$

trong đó k_1, k_2, k_3, k_4 là các giá trị tạm thời tính tại mỗi bước n:

$$\begin{cases} k_1 = h_n f(x_n, y_n) \\ k_2 = h_n f\left(x_n + \dfrac{h_n}{2}, y_n + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h_n f\left(x_n + \dfrac{h_n}{2}, y_n + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3) \end{cases}$$

và với hệ phương trình

$$y_i^{(n+1)} = y_i^{(n)} + \frac{k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}}{6}, \quad i = \overline{1, m}.$$

trong đó, với $i = \overline{1, m}$:

$$\begin{aligned}
k_{1i} &= h_n f_i\left(x_n, y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}\right)\\
k_{2i} &= h_n f_i\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_1^{(n)} + \frac{k_{11}}{2}, \dots, y_m^{(n)} + \frac{k_{1m}}{2}\right)\\
k_{3i} &= h_n f_i\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_1^{(n)} + \frac{k_{21}}{2}, \dots, y_m^{(n)} + \frac{k_{2m}}{2}\right)\\
k_{4i} &= h_n f_i\left(x_n, y_1^{(n)} + k_{31}, \dots, y_m^{(n)} + k_{3m}\right).
\end{aligned}$$

Trong bảng tính của phương pháp, cột x và y được tính toán để làm đối số "phù hợp" cho cột $k = hf(x, y)$. Đối với hệ phương trình, tương tự bảng tính của phương pháp Euler, ba cột này cũng tách thành nhiều cột, ứng với các thành phần của véctơ tương ứng.

n	x	y	$k = h_n f(x, y)$
...			
n	x_n	y_n	$k_1 = h_n f(x_n, y_n)$
	$x_n + \frac{h_n}{2}$	$y_n + \frac{k_1}{2}$	$k_2 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$
	$x_n + \frac{h_n}{2}$	$y_n + \frac{k_2}{2}$	$k_3 = h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$
	$x_n + h_n$	$y_n + k_3$	$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3)$
			$d = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$
$n + 1$	$x_{n+1} = x_n + h_n$	$y_{n+1} = y_n + d$	...

Ví dụ 5.13. Trong Ví dụ 5.1, tính nghiệm gần đúng tại 0.2, 0.3. So sánh với nghiệm đúng.

Giải. Công thức lặp

$$\begin{aligned}
k_1 &= h_n(y_n - x_n)\\
k_2 &= h_n\left[\left(y_n + \frac{k_1}{2}\right) - \left(x_n + \frac{h_n}{2}\right)\right]\\
k_3 &= h_n\left[\left(y_n + \frac{k_2}{2}\right) - \left(x_n + \frac{h_n}{2}\right)\right]\\
k_4 &= h_n\left[(y_n + k_3) - (x_n + h_n)\right]\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.
\end{aligned}$$

Bảng tính

n	x	y	$h_n f(x, y)$	$y(x_n)$
0	0	2	0.4	
	0.1	2.2	0.42	
	0.1	2.21	0.422	
	0.2	2.422	0.4444	
			0.4214	
1	0.2	2.4214	0.22214	2.4214
	0.25	2.53247	0.228247	
	0.25	2.53552	0.228552	
	0.3	2.64995	0.234995	
			0.228456	
2	0.3	2.64986		2.64986

□

```
1  f = @(x, y) y - x
2  X = [0, 0.2, 0.3, 0.5]

3  y = 2
4  for n = 1:2
5      h = X(n+1) - X(n);
6      k1 = h * f(X(n), y);
7      k2 = h * f(X(n) + h/2, y + k1/2);
8      k3 = h * f(X(n) + h/2, y + k2/2);
9      k4 = h * f(X(n) + h, y + k3);
10     y = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6
11 end
```

Dòng 1–3 giống dòng 1–3 ở Ví dụ 5.10, còn dòng 4–11 là đoạn chương trình chính, cũng được giữ nguyên cho hai ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5.14. Trong Ví dụ 5.2, tìm nghiệm gần đúng tại 1.1, 1.3.

Giải. Đặt $Y = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \end{bmatrix}$, $f(x, Y) = \begin{bmatrix} xy - z \\ y + z - 1 \end{bmatrix}$, ta có $Y' = f(x, Y)$, với $Y(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, và công thức lặp

$$k_1 = h_n f(x_n, Y_n)$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_1}{2}\right)\\
k_3 &= h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, Y_n + \frac{k_2}{2}\right)\\
k_4 &= h_n f\left(x_n + h_n, Y_n + k_3\right),\\
Y_{n+1} &= Y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.
\end{aligned}
$$

Bảng tính

n	x	y	z	$h_n f_y$	$h_n f_z$
0	1	-1	2	-0.3	0
	1.05	-1.15	2	-0.32075	-0.015
	1.05	-1.16038	1.9925	-0.321089	-0.0167875
	1.1	-1.32109	1.98321	-0.343641	-0.0337877
				-0.32122	-0.0162271
1	1.1	-1.32122	1.98377	-0.687423	-0.0674894
	1.2	-1.66493	1.95003	-0.789589	-0.142981
	1.2	-1.71601	1.91228	-0.7943	-0.160746
	1.3	-2.11552	1.82303	-0.91464	-0.258499
				-0.794974	-0.155574
2	1.3	-2.11619	1.8282		

□

Mã MATLAB của ví dụ trên gồm (1) khai báo: dòng 1–33 của Ví dụ 5.11, và (2) chương trình chính: dòng 4–11 của Ví dụ 5.13.

Ví dụ 5.15. Trong Ví dụ 5.3, tìm nghiệm gần đúng tại -0.8, -0.6.

Giải. Đặt $Y = \begin{bmatrix} y \\ z \\ u \end{bmatrix}$, $Y_n = \begin{bmatrix} y_n \\ z_n \\ u_n \end{bmatrix}$, $f(x, Y) = \begin{bmatrix} z \\ u \\ xu - y \end{bmatrix}$, ta có $Y' = f(x, Y)$, với $Y(-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Công thức lặp được trình bày như trong Ví dụ 5.14.

Bảng tính

n	x	y	z	u	$h_n f_y$	$h_n f_z$	$h_n f_u$
0	−1	1	0	−2	0	−0.4	0.2
	−0.9	1	−0.2	−1.9	−0.04	−0.38	0.142
	−0.9	0.98	−0.19	−1.929	−0.038	−0.3858	0.15122
	−0.8	0.962	−0.3858	−1.84878	−0.07716	−0.369756	0.103405
					−0.03886	−0.383559	0.148307
1	−0.8	0.96114	−0.383559	−1.85169	−0.0767119	−0.370339	0.104043
	−0.7	0.922784	−0.568729	−1.79967	−0.113746	−0.359934	0.0673971
	−0.7	0.904267	−0.563526	−1.81799	−0.112705	−0.363599	0.0736657
	−0.6	0.848435	−0.747158	−1.77803	−0.149432	−0.355605	0.0436763
					−0.113174	−0.362168	0.0716408
2	−0.6	0.847966					

□

Mã MATLAB của ví dụ trên gồm (1) khai báo: dòng 1–3 của Ví dụ 5.12 và (2) chương trình chính: dòng 4–11 của Ví dụ 5.13.

5.7 Điều khiển sai số và phương pháp Runge–Kutta–Fehlberg

5.8 Phương pháp đa bước

5.9 Phương pháp đa bước với bước nhảy biến thiên

5.10 Phương pháp ngoại suy

5.11 Phương trình cấp cao và hệ phương trình vi phân

5.12 Sự ổn định

5.13 Phương trình vi phân cứng

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.

[2] Richard L. Burden, Douglas J. Faires **and** Annette M. Burden. *Numerical Analysis*. phiên bản 10. Cengage Learning, 2016. 918 trang.

[3] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.

[4] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.