

# Mục lục

<b>1 Chuẩn bị</b>	<b>1</b>
1.1 Kiến thức giải tích	1
1.2 Sai số làm tròn và số học máy tính	3
1.3 Thuật toán và sự hội tụ	3
1.4 MATLAB: ngôn ngữ tính toán và lập trình	3
1.5 MATLAB: giải tích và đại số	5
<b>2 Giải gần đúng phương trình một biến</b>	<b>19</b>
2.1 Phương pháp chia đôi	19
2.2 Phương pháp Newton và mở rộng	22
2.3 Lập điểm bất động	27
2.4 Phân tích sai số của các phương pháp lặp	31
2.5 Tăng tốc độ hội tụ	31
2.6 Nghiệm của đa thức và phương pháp Müller	32
<b>3 Nội suy và xấp xỉ bằng đa thức</b>	<b>33</b>
3.1 Nội suy tổng quát	33
3.2 Đa thức nội suy	34
3.3 Xấp xỉ số liệu và phương pháp Neville	38
3.4 Sai phân chia	39
3.5 Nội suy Hermite	42
3.6 Nội suy spline bậc ba	42
3.7 Đường cong tham số	42
<b>4 Tính gần đúng đạo hàm và tích phân</b>	<b>43</b>
4.1 Đạo hàm bằng số	44
4.2 Ngoại suy Richardson	48
4.3 Tích phân bằng số	48
4.4 Tích phân Romberg	54
4.5 Phương pháp cầu phương thích ứng	54

4.6	Cầu phương Gauss	54
4.7	Tích phân bội	54
4.8	Tích phân suy rộng	54
<b>5</b>	<b>Bài toán giá trị ban đầu của phương trình vi phân thường</b>	<b>55</b>
5.1	Lý thuyết cơ bản về bài toán giá trị ban đầu	56
5.2	Phương pháp Picard	57
5.3	Phương pháp chuỗi Taylor	60
5.4	Phương pháp Euler	63
5.5	Phương pháp Taylor bậc cao	66
5.6	Phương pháp Runge–Kutta	66
5.7	Điều khiển sai số và phương pháp Runge–Kutta–Fehlberg	70
5.8	Phương pháp đa bước	70
5.9	Phương pháp đa bước với bước nhảy biến thiên	70
5.10	Phương pháp ngoại suy	70
5.11	Phương trình cấp cao và hệ phương trình vi phân	70
5.12	Sự ổn định	70
5.13	Phương trình vi phân cứng	70
<b>6</b>	<b>Phương pháp trực tiếp giải hệ phương trình tuyến tính</b>	<b>71</b>
6.1	Hệ phương trình tuyến tính	71
6.2	Chiến thuật chốt	72
6.3	Đại số tuyến tính và ma trận nghịch đảo	72
6.4	Định thức của ma trận	72
6.5	Phân tích ma trận	72
6.6	Các dạng ma trận đặc biệt	72
<b>7</b>	<b>Kỹ thuật lặp trong đại số tuyến tính</b>	<b>73</b>
7.1	Chuẩn của vectơ và ma trận	73
7.2	Giá trị riêng và vectơ riêng	75
7.3	Lặp điểm bất động	75
7.4	Kỹ thuật lặp Jacobi và Gauss–Seidel	79
7.5	Ma trận nghịch đảo	81
7.6	Kỹ thuật giảm dư giải hệ tuyến tính	82
7.7	Giới hạn sai số và tinh chỉnh phép lặp	82
7.8	Phương pháp gradient liên hợp	82
<b>8</b>	<b>Lý thuyết xấp xỉ</b>	<b>83</b>
8.1	Xấp xỉ bình phương nhỏ nhất	83
8.2	Đa thức trực giao và xấp xỉ bình phương nhỏ nhất	88

8.3 Đa thức Chebyshev và [Economization] chuỗi lũy thừa . . . . .	88
8.4 Xấp xỉ hàm hữu tỷ . . . . .	88
8.5 Xấp xỉ đa thức lượng giác . . . . .	88
8.6 Biến đổi Fourier nhanh . . . . .	88
<b>9 Xấp xỉ giá trị riêng</b> . . . . .	<b>89</b>
9.1 Đại số tuyến tính và giá trị riêng . . . . .	89
9.2 Ma trận trực giao và biến đổi đồng dạng . . . . .	89
9.3 Phương pháp lũy thừa . . . . .	89
9.4 Phương pháp Householder . . . . .	89
9.5 Thuật toán QR . . . . .	89
9.6 Phân tích giá trị kỳ dị . . . . .	89
<b>10 Giải gần đúng hệ phương trình phi tuyến</b> . . . . .	<b>90</b>
10.1 Phương pháp lặp điểm bất động . . . . .	92
10.2 Phương pháp Newton . . . . .	96
10.3 Phương pháp độ dốc nhất . . . . .	98
10.4 Đồng luân và các phương pháp mở rộng . . . . .	98
<b>11 Bài toán giá trị biên của phương trình vi phân thường</b> . . . . .	<b>99</b>
11.1 Phương pháp bắn tuyến tính . . . . .	99
11.2 Phương pháp bắn cho bài toán phi tuyến . . . . .	99
11.3 Phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán tuyến tính . . . . .	99
11.4 Phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán phi tuyến . . . . .	100
11.5 Phương pháp Rayleigh–Ritz . . . . .	100
<b>12 Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng</b> . . . . .	<b>101</b>
12.1 Phương trình đạo hàm riêng Elliptic . . . . .	101
12.2 Phương trình đạo hàm riêng Parabolic . . . . .	107
12.3 Phương trình đạo hàm riêng Hyperbolic . . . . .	107
12.4 Giới thiệu về phương pháp phần tử hữu hạn . . . . .	107
<b>13 Các phương pháp tối ưu</b> . . . . .	<b>108</b>
13.1 Tối ưu không ràng buộc một biến . . . . .	108
13.2 Tối ưu không ràng buộc nhiều biến . . . . .	110
13.3 Quy hoạch tuyến tính . . . . .	111
13.4 Tối ưu có ràng buộc . . . . .	132

## Chương 12

# Giải gần đúng phương trình đạo hàm riêng

### 12.1 Phương trình đạo hàm riêng Elliptic

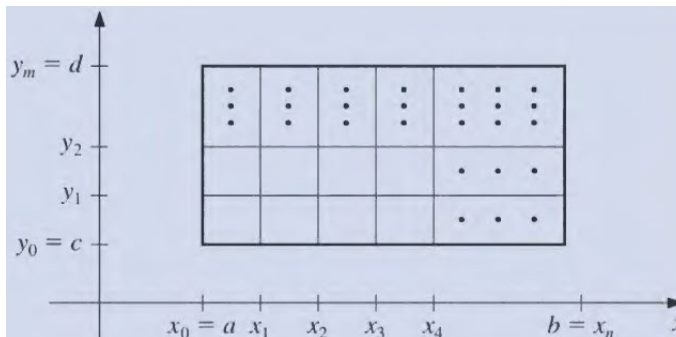
Xét phương trình Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = f(x, y) \quad (12.1)$$

trên  $R = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ , với  $u(x, y) = g(x, y)$  khi  $(x, y) \in S$ , trong đó  $S$  là biên của  $R$ . Nếu  $f$  và  $g$  liên tục trên miền xác định của chúng, thì phương trình có nghiệm duy nhất.

#### Chọn lưới

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn, tương tự cho bài toán giá trị biên trong [Phần 11.3](#), nhưng mở rộng cho trường hợp hai chiều. Chia đều đoạn  $[a, b]$  thành  $n$  đoạn, với cỡ bước  $h = \frac{b-a}{n}$ , bởi các điểm chia  $x_i = a + ih$ ,  $i = \overline{0, n}$ ; và chia  $[c, d]$  thành  $m$  đoạn, bởi  $y_j = c + jk$ ,  $j = \overline{0, m}$  với  $k = \frac{d-c}{m}$ .



Các đường  $x = x_i$  và  $y = y_j$  gọi là đường lưới, các điểm  $(x_i, y_j)$  gọi là điểm lưới.

Tại điểm lưới  $(x_i, y_j)$  bên trong lưới,  $i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1$ , xấp xỉ các đạo hàm cấp hai

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)\end{aligned}\quad (12.2)$$

trong đó  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \eta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$ .

Thay vào (12.1)

$$\begin{aligned}& \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \\ &= f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \eta_j)\end{aligned}$$

Điều kiện biên là

$$\begin{aligned}u(x_0, y_j) &= g(x_0, y_j) \text{ và } u(x_n, y_j) = g(x_n, y_j), \quad j = \overline{0, m}; \\ u(x_i, y_0) &= g(x_i, y_0) \text{ và } u(x_i, y_m) = g(x_i, y_m), \quad i = \overline{1, n-1}.\end{aligned}$$

### Phương pháp sai phân hữu hạn

Thay các  $u(x_i, y_j)$  bởi xấp xỉ  $u_{ij}$ , ta được phương trình gần đúng với sai số cắt cấp  $O(h^2 + k^2)$ :

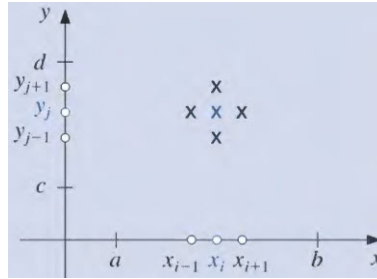
$$\begin{aligned}& \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j) \\ \Leftrightarrow & -2 \left[ \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{ij} + (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left( \frac{h}{k} \right)^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f(x_i, y_j) \quad (12.3)\end{aligned}$$

Điều kiện biên là

$$\begin{aligned}u_{0j} &= g(x_0, y_j) \text{ và } u_{nj} = g(x_n, y_j), \quad j = \overline{0, m}; \\ u_{i0} &= g(x_i, y_0) \text{ và } u_{im} = g(x_i, y_m), \quad i = \overline{1, n-1}.\end{aligned}$$

Phương trình trên cho mỗi liên hệ của các xấp xỉ của  $u(x, y)$  tại các điểm

$$(x_{i-1}, y_j), \quad (x_i, y_j), \quad (x_{i+1}, y_j), \quad (x_i, y_{j-1}), \quad \text{và} \quad (x_i, y_{j+1})$$

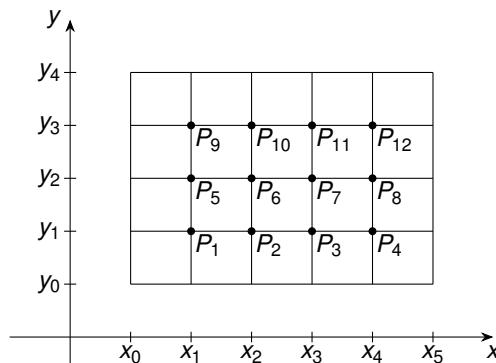


Với  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ta có hệ  $(n-1)(m-1)$  phương trình tuyến tính  $(n-1)(m-1)$  ẩn  $u_{ij}$ .

Đánh số lại các điểm lưới và các biến, với  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$

$$P_l = (x_i, y_j) \quad \text{và} \quad u_l = u_{ij} \quad \text{trong đó} \quad l = (j-1)(n-1) + i$$

chẳng hạn với  $n = 5$  và  $m = 4$



Khi đó ma trận của hệ có dạng ba đường chéo khối đối xứng

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ C_1 & A_2 & C_2 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & \dots & C_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & C_{m-2} & A_{m-1} \end{bmatrix}$$

trong đó  $A_i$  là ma trận ba đường chéo, và  $C_i$  là ma trận đường chéo, đều có cấp  $n-1$ .

**Ví dụ 12.1.** Giải gần đúng phương trình

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = xe^y, \quad 0 < x < 1, \quad 1 < y < 1.4$$

với điều kiện biên

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = e^y, \quad 0 \leq y \leq 1.4$$

$$u(x, 1) = ex, \quad u(x, 1.4) = e^{1.4}x, \quad 0 \leq x \leq 2$$

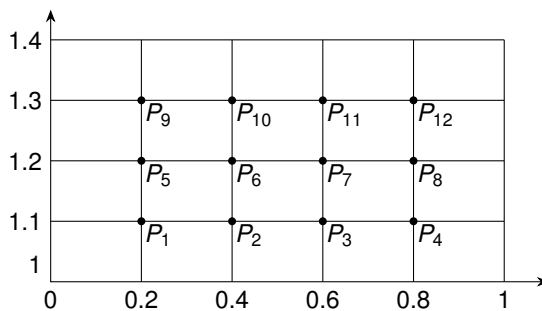
trên lưới chia đều đoạn  $[0, 1]$  thành 5 đoạn, và  $[1, 1.4]$  thành 4 đoạn.

Giải.  $f(x, y) = xe^y, g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x = 0 \\ e^y & \text{nếu } x = 1 \\ ex & \text{nếu } y = 1 \\ e^{1.4}x & \text{nếu } y = 1.5 \end{cases}$

```
1 f = @(x, y) x * exp(y)

63 function val = g(x, y) % khai báo ở ô cuối cùng của sổ tay
64 if x == 0
65     val = 0;
66 end
67 if x == 1
68     val = exp(y);
69 end
70 if y == 1
71     val = exp(1) * x;
72 end
73 if y == 1.4
74     val = exp(1.4) * x;
75 end
76 end
```

$$a = 0, b = 1, c = 1, d = 1.4, n = 5, m = 4, h = \frac{b-a}{n} = 0.2, k = \frac{d-c}{m} = 0.1$$



```
2 a = 0; b = 1; c = 1; d = 1.4;
3 n = 5; m = 4;
4 h = (b-a)/n, k = (d-c)/m
```

$$-2 \left[ \left( \frac{h}{k} \right)^2 + 1 \right] u_{ij} + (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left( \frac{h}{k} \right)^2 (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = h^2 f(x_i, y_j)$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \\ u_{41} \\ \hline u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \\ u_{42} \\ \hline u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \\ u_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.1506 \\ -4.3012 \\ -6.4518 \\ -11.6065 \\ \hline 0.0266 \\ 0.0531 \\ 0.0797 \\ -3.2139 \\ \hline -3.2148 \\ -6.4296 \\ -9.6444 \\ -16.5285 \end{bmatrix}$$

```

5 aL = "A(r, r-1) = 1;" % hệ số của ui-1,j
6 aR = "A(r, r+1) = 1;" % . . . . . ui+1,j
7 aD = "A(r, r-n+1) = (h/k)^2;" % . . . . . ui,j-1
8 aU = "A(r, r+n-1) = (h/k)^2;" % . . . . . ui,j+1
9 lh = "B(r) = h^2 * f(a+i*h, b+j*k)" % h2f(xi, yj), chưa có
    dấu ; để còn nối phép tính
10 sL = "- g(a+(i-1)*h, b+j*k)" % -g(xi-1, yj)
11 sR = "- g(a+(i+1)*h, b+j*k)" % -g(xi+1, yj)
12 sD = "- (h/k)^2 * g(a+i*h, b+(j-1)*k)" % -(h/k)2g(xi, yj-1)
13 sU = "- (h/k)^2 * g(a+i*h, b+(j+1)*k)" % -(h/k)2g(xi, yj+1)

14 A = zeros((n-1)*(m-1));
15 B = zeros((n-1)*(m-1), 1);
16 for i = 1:n-1 % duyệt từng cột trên hình
17     for j = 1:m-1
18         r = (j-1)*(n-1) + i; % phương trình thứ r
19         A(r, r) = -2 * ((h/k)^2 + 1); % hệ số của uij
20         if i == 1 && j == 1 % góc dưới trái
21             eval(aR + aU + lh + sL + sD + ";")
22         end
23         if i == 1 && j == m-1 % góc trên trái
24             eval(aR + aD + lh + sL + sU + ";")
25         end
26         if i == n-1 && j == 1 % góc dưới phải
27             eval(aL + aU + lh + sR + sD + ";")
28         end
29         if i == n-1 && j == m-1 % góc trên phải

```



```

30         eval(aL + aD + lh + sR + sU + ";")
31     end
32     if i == 1 && 1 < j && j < m-1           % cạnh trái
33         eval(aR + aD + aU + lh + sL + ";")
34     end
35     if i == n-1 && 1 < j && j < m-1         % cạnh phải
36         eval(aL + aD + aU + lh + sR + ";")
37     end
38     if j == 1 && 1 < i && i < n-1           % cạnh dưới
39         eval(aL + aR + aU + lh + sD + ";")
40     end
41     if j == m-1 && 1 < i && i < n-1         % cạnh trên
42         eval(aL + aR + aD + lh + sU + ";")
43     end
44     if 1 < i && i < n-1 && 1 < j && j < m-1 % giữa
45         eval(aL + aR + aD + aU + lh + ";")
46     end
47 end
48 end
49 A
50 B

```

Nghiệm gần đúng tại các điểm trên lưới

0.7339	1.4677	2.2016	2.9355
0.6640	1.3281	1.9921	2.6561
0.6008	1.2017	1.8025	2.4034

```

51 u = linsolve(A, B)
52 sol = flipud(reshape(u, n-1, m-1)')

```

□

Nghiệm đúng của ví dụ trên là  $u(x, y) = xe^y$ , và giá trị đúng tại các điểm lưới

0.7339	1.4677	2.2016	2.9354
0.6640	1.3280	1.9921	2.6561
0.6008	1.2017	1.8025	2.4033

```

53 u = @(x, y) x * exp(y)
54 U = zeros(n-1, m-1)
55 for i = 1:n-1
56     for j = 1:m-1
57         x = a + i*h; y = b + j*k;

```

```
58         U(i, j) = u(x, y);  
59     end  
60 end  
61 U  
62 flip(U')
```

## 12.2 Phương trình đạo hàm riêng Parabolic

---

## 12.3 Phương trình đạo hàm riêng Hyperbolic

---

## 12.4 Giới thiệu về phương pháp phần tử hữu hạn

---

# Tài liệu tham khảo

- [1] Phạm Kỳ Anh. *Giải tích số*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002. 284 trang.
- [2] Steven C. Chapra **and** Raymond P. Canale. *Numerical Methods for Engineers*. phiên bản 8. Cengage Learning, 2020. 1006 trang.
- [3] Phan Văn Hạp **and** Lê Đình Thịnh. *Phương pháp tính và các thuật toán*. Nhà xuất bản Giáo dục, 2000. 400 trang.
- [4] Doãn Tam Hòe. *Toán học tính toán*. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009. 240 trang.
- [5] Trần Huệ Nương Phan Quốc Khánh. *Quy hoạch tuyến tính*. phiên bản 2. Nhà xuất bản Giáo dục, 2003. 457 trang.

