Mục lục

Chương 2

Nguyên lý cơ bản của logic

2.1 Phép toán cơ bản và bảng chân lý

Định nghĩa 2.1. *Mệnh đề p là một khẳng định chỉ đúng (*$p = 1$*,* TRUE*,* T*), hoặc chỉ sai (*$p = 0$*,* FALSE*,* F*).*

Ví dụ 2.1. a) Các câu sau là mệnh đề

p: Toán rời rạc là một môn học của ngành khoa học máy tính.
q: Văn Cao là người soạn bài hát Tiến Quân Ca.
r: $2 + 3 = 5$.

b) Các câu sau *không* là mệnh đề

"Trời đẹp quá!"
"Dậy và làm bài tập đi."

Với hai mệnh đề p, q, các phép toán cơ bản gồm:

1) Phép phủ định: *phủ định* của p, ký hiệu $\neg p$ hoặc $\overline{p}$, và đọc là "*not* p", có *bảng chân lý*

$$\begin{array}{c|c} p & \neg p \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \tag{2.1}$$

2) Các *phép toán hai ngôi*, hay *liên từ logic*.

Ký hiệu	**Đọc, hiểu**
$p \wedge q$	*p hội q*, *p và q*
$p \vee q$	*p tuyển q*, *p hoặc q*
$p \veebar q$, $p \oplus q$	*p xor q*, *p tuyển loại q*, *p loại trừ q*
$p \to q$	*p kéo theo q*, nếu p thì q
$p \leftrightarrow q$	*p tương đương q*

có bảng chân lý

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1

(2.2)

Trong bảng chân lý trên, p, q là các *biến mệnh đề*, các xâu 00, 01, 10, 11 của cặp biến pq gọi là các *bộ phân bố giá trị* của các biến.

Ví dụ 2.2. Cho p, q, r là các khẳng định

p: An đi dạo.
q: Có trăng.
r: Trời mưa.

a) Dịch công thức mệnh đề thành các khẳng định

1) $(q \wedge \neg r) \rightarrow p$ 2) $q \rightarrow (\neg r \rightarrow p)$ 3) $\neg[p \leftrightarrow (r \vee q)]$

b) Viết các khẳng định dưới dạng công thức mệnh đề

4) "An đi dạo *nếu và chỉ nếu* có trăng."

5) "*Nếu* trời mưa *và* không có trăng, *thì* An sẽ không đi dạo."

6) "Trời mưa *nhưng* An vẫn đi dạo."

Giải. 1) Nếu có trăng và trời không mưa thì An sẽ đi dạo.

2) Nếu có trăng, thì nếu trời không mưa, An sẽ đi dạo.

3) Không phải An đi dạo nếu và chỉ nếu trời mưa hoặc có trăng.

4) $p \leftrightarrow q$ 5) $r \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ 6) $r \wedge p$

□

Ví dụ 2.3. Trong ngôn ngữ lập trình, xét hai cú pháp điều khiển `if-then` và `if-then-else`.

a) "`if` p `then` c": chương trình thực thi lệnh c khi và chỉ khi p đúng.

b) "`if` p `then` c_1 `else` c_2": thực hiện c_1 nếu p đúng, hoặc c_2 nếu p sai.

Xem c, c_1, c_2 là các mệnh đề. Hãy mô tả các cú pháp trên bằng công thức.

Giải. a) $p \leftrightarrow c$ b) $(p \rightarrow c_1) \wedge (\neg p \rightarrow c_2)$

□

Mặc định, Python không hỗ trợ các phép toán $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Chúng được bổ sung trong thư viện `sympy`, hoặc `truth-table-generator` (nạp vào bằng tên `ttg`). Gói `sympy` cung cấp các lệnh xử lý về logic khá phong phú, trong khi mục đích chính của gói `ttg` chỉ là lập bảng chân lý.

Biểu thức	**Python**	**sympy**[*]		**ttg**
1	`1, True`	`True, true`	`1, True, true`	`True`
0	`0, False`	`False, false`	`1, False, false`	`False`
$\neg p$	`not p`	`~p`	`Not(p)`	`~p, not p`
$p \wedge q$	`p and q, p & q`	`p & q`	`And(p, q)`	`p and q`
$p \vee q$	`p or q, p | q`	`p | q`	`Or(p, q)`	`p or q`
$p \to q$		`p >> q, q << p`	`Implies(p, q)`	`p => q`
$p \veebar q$	`p ^ q`	`p ^ q`	`Xor(p, q)`	`p != q`
$p \leftrightarrow q$			`Equivalent(p, q)`	`p = q`

Mệnh đề gọi là *nguyên thủy* nếu nó không chứa từ phủ định và các liên từ logic. Ngược lại, nó là mệnh đề phức hợp, hay công thức mệnh đề.

Định nghĩa 2.2. *Công thức mệnh đề P gồm*

1) *hằng mệnh đề 0, 1;*

2) *biến mệnh đề nhận giá trị 0 hoặc 1;*

3) *các phép toán mệnh đề, với thứ tự ưu tiên là $\neg \ \wedge \ \veebar \ \vee \ \to \ \leftrightarrow$;*

4) *dấu ngoặc ( ), [ ], { } để nhóm biểu thức.*

Bảng chân lý của công thức mệnh đề P là bảng liệt kê các giá trị của P tại mọi bộ phân bố giá trị của các biến mệnh đề trong P.

Ví dụ 2.4. Cho công thức mệnh đề $P = p \to (\neg q \wedge r) \vee 0$.

a) Đánh dấu thứ tự thực hiện các phép toán.

b) Tính $P(0, 0, 1)$, với thứ tự các biến là p, q, r.

c) Lập bảng chân lý của P.

Giải. a) $p \underset{4}{\to} (\underset{1}{\neg} q \underset{2}{\wedge} r) \underset{3}{\vee} 0$

b)

$$\begin{aligned} P(0,0,1) &= 0 \to (\neg 0 \wedge 1) \vee 0 \\ &= 0 \to (1 \wedge 1) \vee 0 \end{aligned}$$

[*]hằng 1, 0 không dùng được trong phép toán ~ và >>

$$= 0 \to 1 \vee 0$$

$$= 0 \to 1$$

$$= 1.$$

c)

p	q	r	P
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Cách 1: lập trình với thư viện sympy

```
def binary_arrays(n):   # các bộ phân bố giá trị của n biến
    if n == 1:
        return [[True], [False]]
    A = []
    for a in binary_arrays(n-1):
        a = [True] + a
        A.append(a)
    for a in binary_arrays(n-1):
        a = [False] + a
        A.append(a)
    return A

binary_arrays(2)   # → [[True, True], [True, False], [False,
    True], [False, False]]
```

```
from sympy import *

p, q, r = symbols('p q r')
P = p >> (~q & r) | False
```

```python
for p_, q_, r_ in binary_strs(3):
    print(p_, q_, r_, P.subs({p: p_, q: q_, r
    : r_}))
```

Cách 2: thư viện `truth-table-generator`

```python
import ttg

ttg.Truths(
    ['p', 'q', 'r'],
    ['p => (~q and r) or False']
).as_pandas()
```

□

Lệnh `ttg.Truths` có hai tham số chính: (1) dãy các xâu ứng với các biến mệnh đề, và (2) dãy các xâu ứng với các công thức mệnh đề cần lập bảng chân lý. Lưu ý, riêng trong gói `ttg`, phép toán $\vee$ lại ưu tiên trước phép $\veebar$.

Bài tập 2.1

2.1. Chỉ ra các câu sau có phải mệnh đề không. Nếu có, hãy xác định các mệnh đề nguyên thủy trong nó.

a) Năm 2021, thủ tướng của Việt Nam là Phạm Minh Chính.

b) $x + 3$ là số nguyên dương.

c) 15 là số chẵn.

d) Nếu An đi học muộn thì sẽ bị cô giáo phạt.

e) Mấy giờ rồi?

f) Năm 2020, Rafael Nadal vô địch giải Pháp Mở rộng lần thứ 13.

2.2. Cho p, q là các mệnh đề nguyên thủy sao cho $p \to q$ sai. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề

a) $p \wedge q$

b) $\neg p \vee q$

c) $q \to p$

d) $\neg q \to \neg p$

2.3. Cho p, q, r là các khẳng định về tam giác ABC:

p: ΔABC cân.
q: ΔABC có ba cạnh bằng nhau.
r: ΔABC có ba góc bằng nhau.

Chuyển các công thức sau thành khẳng định:

a) $q \to p$

b) $\neg p \to \neg q$

c) $q \leftrightarrow r$

d) $p \wedge \neg q$

e) $r \to p$

2.4. Xác định giá trị chân lý của các phép kéo theo sau:

a) Nếu 3 + 4 = 12, thì 3 + 2 = 6.

b) Nếu 3 + 3 = 6, thì 3 + 4 = 9.

2.5. Lập bảng chân lý của các công thức mệnh đề sau:

a) $\neg(p \vee \neg q) \to \neg p$

b) $p \to (q \to r)$

c) $(p \to q) \to r$

d) $(p \to q) \to (q \to p)$

e) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

f) $(p \wedge q) \to p$

g) $q \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

h) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

2.2 Tương đương logic: luật logic

Định nghĩa 2.3. *Một công thức mệnh đề P gọi là đồng nhất đúng (tương ứng, sai) nếu nó đúng (tương ứng, sai) tại mọi bộ giá trị của các biến mệnh đề, ký hiệu $P \Leftrightarrow 1$, (tương ứng, $P \Leftrightarrow 0$).*

Định nghĩa 2.4. *Hai công thức mệnh đề P, Q gọi là tương đương logic, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$, nếu*

a) P đúng (tương ứng, sai) khi và chỉ khi Q đúng (tương ứng, sai); ***hoặc***

b) P và Q có cùng bảng chân lý; ***hoặc***

c) Công thức mệnh đề $P \leftrightarrow Q$ là đồng nhất đúng.

Khi đó ta nói P tương đương (logic) với Q, hoặc P khi và chỉ khi Q, hoặc P nếu và chỉ nếu Q.

Tương đương logic có tính “bắc cầu”, tức là hai công thức mệnh đề cùng tương đương với công thức mệnh đề thứ ba, thì chúng tương đương với nhau.

Hệ đầy đủ các phép toán: các phép toán $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\veebar$ biểu diễn theo hệ các phép toán $\{\neg, \wedge, \vee\}$:

$$\begin{array}{llcl}
\text{a)} & p \rightarrow q & \Leftrightarrow & \neg p \vee q \\
\text{b)} & p \leftrightarrow q & \Leftrightarrow & (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\
 & & \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\
 & & \Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
\text{c)} & p \veebar q & \Leftrightarrow & (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \\
 & & \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)
\end{array}$$

Chứng minh. a) Lập bảng chân lý của hai công thức mệnh đề

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

và nhận thấy chúng có cùng giá trị tại mọi bộ phân bố giá trị của các biến p, q. Vậy $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$.

```
import ttg

ttg.Truths(
    ['p', 'q'],
    ['p => q', '~p or q']
).as_pandas()
```

b) Ta có $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

```
from sympy import *

p, q = symbols('p q')
Equivalent(p, q).simplify()
```

Mặt khác, $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$, nên theo tính chất bắc cầu của tương đương logic, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

```
((p >> q) & (q >> p)).simplify()
```

Các ý còn lại được chứngm minh tương tự. □

Theo ý (b), ở tương đương logic thứ nhất, để chứng minh hai mệnh đề p và q là tương đương, ta chứng minh p kéo theo q, và ngược lại, q cũng kéo theo p.

Luật logic: Với các biến mệnh đề p, q, r:

1)	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Luật *phủ định kép*
2)	$p \vee p \Leftrightarrow p$	Luật *lũy đẳng*
	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	
3)	$p \vee 0 \Leftrightarrow p$	Luật *đồng nhất*
	$p \wedge 1 \Leftrightarrow p$	
4)	$p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$	Luật *đối*
	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow 0$	
5)	$p \vee 1 \Leftrightarrow 1$	Luật *thống trị*
	$p \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	
6)	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Luật *giao hoán*
	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	
7)	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Luật *kết hợp*
	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	
8)	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Luật *phân phối*
	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
9)	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Luật *DeMorgan*[*]
	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	
10)	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Luật *hút*
	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	

Theo luật kết hợp, ta có thể viết $p \vee q \vee r$, $p \wedge q \wedge r$ mà không gây nhầm lẫn.

Luật logic cho ta một công cụ lý thuyết để rút gọn công thức mệnh đề, và chứng minh các các công thức mệnh đề là tương đương logic.

Ví dụ 2.5 (Luật hút)**.**

a) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

b) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Giải. Ta chứng minh ý (a), ý (b) dành cho bạn đọc.

[*] Augustus De Morgan, 1806 – 1871, nhà toán học, logic học Anh

	$p \vee (p \wedge q)$	**Lý do**
$\Leftrightarrow$	$(p \wedge 1) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	Luật đồng nhất
$\Leftrightarrow$	$p \wedge (1 \vee q)$	Luật phân phối
$\Leftrightarrow$	$p \wedge 1$	Luật thống trị
$\Leftrightarrow$	p	Luật đồng nhất

□

Ví dụ 2.6. Chứng minh $(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Giải.

	$(p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	**Lý do**
$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$	Luật DeMorgan
$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$	Luật phủ định kép
$\Leftrightarrow$	$p \vee (q \wedge \neg q)$	Luật phân phối
$\Leftrightarrow$	$p \vee 0$	Luật ngược
$\Leftrightarrow$	p	Luật đồng nhất

□

Ví dụ 2.7. Chứng minh $\neg\{\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q\} \Leftrightarrow q \wedge r$.

Giải.

	$\neg\{\neg[(p \vee q) \wedge r] \vee \neg q\}$	**Lý do**
$\Leftrightarrow$	$\neg\neg[(p \vee q) \wedge r] \wedge \neg\neg q$	Luật DeMorgan
$\Leftrightarrow$	$[(p \vee q) \wedge r] \wedge q$	Luật phủ định kép
$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (r \wedge q)$	Luật kết hợp của $\wedge$
$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (q \wedge r)$	Luật giao hoán của $\wedge$
$\Leftrightarrow$	$[(p \vee q) \wedge q] \wedge r$	Luật kết hợp của $\wedge$
$\Leftrightarrow$	$[q \wedge (q \vee p)] \wedge r$	Luật giao hoán của $\vee$ và $\wedge$
$\Leftrightarrow$	$q \wedge r$	Luật hút

□

Mệnh đề kéo theo dạng $p \to q$ có vai trò quan trọng trong lập luận toán học. Ta thường nói p là giả thiết, q là kết luận, hay p là điều kiện đủ cho q, và q là điều kiện cần cho p. Mệnh đề $p \to q$ có dạng

a) đảo là : $q \to p$
b) phản là : $\neg p \to \neg q$
c) phản đảo là : $\neg q \to \neg p$

Mệnh đề kéo theo tương đương với phản đảo của nó.

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p. \tag{2.3}$$

Chứng minh.

	$\neg q \to \neg p$	**Lý do**
$\Leftrightarrow$	$\neg\neg q \vee \neg p$	biểu diễn $\to$ theo $\neg, \wedge, \vee$
$\Leftrightarrow$	$q \vee \neg p$	luật lũy đẳng
$\Leftrightarrow$	$\neg p \vee q$	luật giao hoán
$\Leftrightarrow$	$p \to q$	biểu diễn $\to$ hệ phép toán $\neg, \wedge, \vee$

□

Quy tắc thay thế:

1) Cho P là công thức đồng nhất đúng, chứa biến mệnh đề p. Trong P, thay tất cả p bởi công thức mệnh đề Q, thu được công thức mệnh đề P'. Khi đó P' cũng là đồng nhất đúng.

2) Cho công thức mệnh đề P, và Q là công thức mệnh đề con của P. Giả sử Q' là công thức mệnh đề tương đương với Q. Trong P, thay một hoặc nhiều vị trí của Q bởi Q', thu được công thức mệnh đề P'. Khi đó $P \Leftrightarrow P'$.

Ví dụ 2.8. a) Trong $p \vee \neg p \Leftrightarrow 1$, thay p bởi $p \wedge q$, được

$$(p \wedge q) \vee \neg (p \wedge q) \Leftrightarrow 1.$$

b) Vì $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, nên nếu thay p bởi $p \wedge r$, thì $(p \wedge r) \to q \Leftrightarrow \neg(p \wedge r) \vee q$.

Định nghĩa 2.5. *Cho công thức mệnh đề P không có phép toán hai ngôi nào khác ngoài $\wedge$ và $\vee$. Đối ngẫu của P, ký hiệu P^d, là công thức thu được từ P bằng cách*

1) *thay 1 bởi 0, thay 0 bởi 1;*

2) *thay $\wedge$ bởi $\vee$, thay $\vee$ bởi $\wedge$;* ***nhưng***

3) *giữ nguyên thứ tự thực hiện phép toán, bằng cách bổ sung dấu ngoặc nếu cần.*

Ví dụ 2.9. a) $(p)^d = p$, $(\neg p)^d = \neg p$.

b) $(p \vee \neg p)^d = p \wedge \neg p$.

c) Với $P = p \wedge \neg q \ \vee \ r \wedge 1$, ta có $P^d = (p \vee \neg q) \wedge (r \vee 0)$.

Định lý 2.1 (Nguyên lý đối ngẫu)**.** *Cho P và Q là hai công thức mệnh đề không có phép toán hai ngôi nào khác ngoài $\wedge$ và $\vee$. Khi đó, nếu $P \Leftrightarrow Q$, thì $P^d \Leftrightarrow Q^d$.*

Mỗi luật logic ở trang 71 gồm hai tương đương logic là đối ngẫu của nhau, nên ta chỉ cần nhớ một tương đương logic, rồi áp dụng nguyên lý đối ngẫu để sinh ra tương đương logic kia.

Bài tập 2.2

2.6. Dùng bảng chân lý để chứng minh các luật logic.

2.7. a) Dùng bảng chân lý để kiểm tra tính tương đương logic của các công thức mệnh đề

i) $p \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$

ii) $p \vee q \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

iii) $p \to q \vee r \Leftrightarrow \neg r \to (p \to q)$

b) Dùng quy tắc thay thế để chứng minh $p \to q \vee r \Leftrightarrow p \wedge \neg q \to r$.

2.8. Dùng quy tắc thay thế để chứng minh các công thức mệnh đề là đồng nhất đúng.

a) $p \vee q \wedge r \vee \neg(p \vee q \wedge r)$

b) $p \vee q \to r \leftrightarrow \neg r \to \neg(p \vee q)$

2.9. Rút gọn công thức mệnh đề $p \wedge q \wedge r \ \vee \ p \wedge q \wedge \neg r \ \vee \ \neg q \to s$.

2.10. Phủ định các khẳng định sau và phát biểu nó một cách mạch lạc.

a) An sẽ đạt được kết quả học tập tốt nếu cô ấy dành có đủ thời gian tự học.

b) An đang làm bài tập, và Bình đang chơi đàn.

c) Nếu An thi qua môn C++, và hoàn thành đồ án Cấu trúc dữ liệu, thì cô ấy sẽ tốt nghiệp.

2.11. Phủ định các công thức mệnh đề và rút gọn chúng.

a) $p \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

b) $p \wedge q \to r$

c) $p \to \neg q \wedge r$

d) $p \vee q \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r$

2.12. a) Chứng minh $(\neg p \vee q) \wedge [p \wedge (p \wedge q)] \Leftrightarrow p \wedge q$.

b) Lập đối ngẫu của tương đương logic ở ý (a).

2.13. Lập đối ngẫu cho

a) $q \to p$

b) $p \to q \wedge r$

c) $p \leftrightarrow q$

d) $p \veebar q$

2.14. Xác định giá trị chân lý của các phép kéo theo

a) Nếu $0 + 0 = 0$, thì $1 + 1 = 1$.

b) Nếu $-1 < 3$ và $3 + 7 = 10$, thì $\sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$.

Viết mệnh đề đảo, phản, phản đảo của chúng và tìm giá trị chân lý của mệnh đề thu được.

2.15. Chỉ ra các phát biểu sau là đúng hay sai.

a) Đảo của "p là điều kiện đủ cho q" là "p là điều kiện cần cho q".

b) Phản của "p là điều kiện cần cho q" là "$\neg q$ là điều kiện đủ cho $\neg p$".

c) Phản đảo của "p là điều kiện cần cho q" là "$\neg q$ là điều kiện cần cho $\neg p$".

2.16. Tìm phản đảo của $p \to (q \to r)$ sao cho

a) chỉ có một phép toán $\to$

b) không có phép toán $\to$.

2.17. Chứng minh $p \veebar q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \;\vee\; \neg p \wedge q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$.

2.18. Chứng minh $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (r \to p)$.

2.19. a) Chứng minh $p \to (q \to p \wedge q)$ là đồng nhất đúng.

b) Chứng minh $p \vee q \to (q \to q)$ bằng cách sử dụng kết quả của ý (a) cùng với quy tắc thay thế và luật logic.

c) $p \vee q \to (q \to p \wedge q)$ có là đồng nhất đúng không?

2.20. Định nghĩa phép toán "Nand" hay "Không phải ... và ..." bởi $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$. Biểu diễn các phép toán sau chỉ theo phép toán này.

a) $\neg p$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $p \to q$ e) $p \leftrightarrow q$

2.21. Phép toán "Nor" hay "Không phải ... hoặc ..." xác định bởi $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$. Biểu diễn các mệnh đề từ ý (a) tới (c) ở Bài tập 2.20 chỉ theo mỗi phép toán này.

2.22. Chứng minh

a) $\neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q$ b) $\neg(p \uparrow q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$

2.23. Chỉ ra lý do của mỗi bước biến đổi tương đương của công thức mệnh đề.

a)	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \vee q$	**Lý do**
$\Leftrightarrow$	$p \vee q \wedge \neg q \vee q$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee 0 \vee q$	
$\Leftrightarrow$	$p \vee q$	
b)	$(p \to q) \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg q)$	**Lý do**
$\Leftrightarrow$	$(p \to q) \wedge \neg q$	
$\Leftrightarrow$	$(\neg p \vee q) \wedge \neg q$	
$\Leftrightarrow$	$\neg q \wedge (\neg p \vee q)$	
$\Leftrightarrow$	$\neg q \wedge \neg p \;\vee\; \neg q \wedge q$	
$\Leftrightarrow$	$\neg q \wedge \neg p \;\vee\; 0$	
$\Leftrightarrow$	$\neg q \wedge \neg p$	
$\Leftrightarrow$	$\neg(q \vee p)$	

2.24. Trình bày các bước và lý do, như Bài tập 2.23 để chứng minh các tương đương logic.

a) $p \vee p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

b) $p \vee q \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r \Leftrightarrow p \vee q \vee r$

c) $\neg p \vee \neg q \to p \wedge q \wedge r \Leftrightarrow p \wedge q$

2.3 Kéo theo logic: quy tắc suy luận

Định nghĩa 2.6. *Nếu P, Q là hai công thức mệnh đề sao cho $P \to Q$ là đồng nhất đúng, thì ta nói P kéo theo logic Q, hay P suy ra Q, và ký hiệu $P \Rightarrow Q$.*

Trong định nghĩa trên, P gọi là *giả thiết*, Q là *kết luận*. Ta viết $P \Rightarrow Q$ dưới dạng sơ đồ suy luận

$$\begin{array}{ll} & P \\ \hline \therefore & Q \end{array} \tag{2.4}$$

Khi P là tổ hợp của nhiều giả thiết, $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$, ta có sơ đồ

$$\begin{array}{ll} & P_1, P_2, \dots, P_n \\ \hline \therefore & Q \end{array} \quad \text{hay} \quad \begin{array}{ll} & P_1 \\ & P_2 \\ & \dots \\ & P_n \\ \hline \therefore & Q \end{array} \tag{2.5}$$

trong đó $P_1, P_2, \dots, P_n$ cũng gọi là các giả thiết.

	Quy tắc suy luận	**Đồng nhất đúng tương ứng**
1)	$\begin{array}{ll} & P \\ & P \to Q \\ \hline \therefore & Q \end{array}$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$ Tách (Modus Ponens)
2)	$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & Q \to R \\ \hline \therefore & P \to R \end{array}$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ Tam đoạn luận
3)	$\begin{array}{ll} & P \to Q \\ & \neg Q \\ \hline \therefore & \neg P \end{array}$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ Phản chứng (Modus Tollens)
4)	$\begin{array}{ll} & P \\ & Q \\ \hline \therefore & P \wedge Q \end{array}$	Hội
5)	$\begin{array}{ll} & P \wedge Q \\ \hline \therefore & P \end{array}$	$(p \wedge q) \to p$ Rút gọn hội

6)	$P \vee Q$ $\neg P$ $\therefore\ Q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$ Loại trừ
7)	$P \to 0$ $\therefore\ \neg P$	$(p \to 0) \to \neg p$ Mẫu thuẫn
8)	P $\therefore\ P \vee Q$	$p \to p \vee q$ Nhập tuyển
9)	$P \wedge Q$ $P \to (Q \to R)$ $\therefore\ R$	$p \wedge q \wedge [p \to (q \to r)] \to r$ Chứng minh có điều kiện
10)	$P_1 \to Q$ $P_2 \to Q$ $\therefore\ P_1 \vee P_2 \to Q$	$[(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q)] \to [(p_1 \vee p_2) \to q]$ Chứng minh theo trường hợp
11)	$P_1 \to Q_1$ $P_2 \to Q_2$ $P_1 \vee P_2$ $\therefore\ Q_1 \vee Q_2$	$[(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge (p_1 \vee p_2)] \to q_1 \vee q_2$ Song luận
12)	$P_1 \to Q_1$ $P_2 \to Q_2$ $\neg Q_1 \vee \neg Q_2$ $\therefore\ \neg P_1 \vee \neg P_2$	$[(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge (\neg q_1 \vee \neg q_2)] \to \neg p_1 \vee \neg p_2$ Tiến thoái lưỡng nan

Ví dụ 2.10. Cho p, q, r, s, t, u là các mệnh đề, và các giả thiết $p \to q$, $\quad q \to r \wedge s$, $\neg r \vee \neg t \vee u$, $\quad p \wedge t$.

a) Dự đoán các kết luận bằng Python.

b) Chứng minh có kết luận u.

Giải. a) Kết luận dự đoán được là $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge t \wedge u$, tức là có thể đạt được các kết luận q, r, s, và u (p và t dễ dàng đạt được từ giả thiết $p \wedge t$).

```
from sympy import *

p, q, r, s, t, u = symbols('p q r s t u')
P = (p >> q) & (q >> r & s) & (~r | ~t | u) & (p
    & t)
```

```
P.simplify()
```

b) Trong suy luận dưới đây, các dòng 1 – 4 là giả thiết, các dòng 5 – 11 chỉ các kết luận trung gian cần thiết.

	Suy luận	**Lý do**
1)	$p \to q$	
2)	$q \to r \wedge s$	
3)	$\neg r \vee \neg t \vee u$	
4)	$p \wedge t$	
5)	p	4, rút gọn hội
6)	q	1, 5, tách
7)	$r \wedge s$	2, 6, tách
8)	r	7, rút gọn hội
9)	t	4, rút gọn hội
10)	$r \wedge t$	$\Leftrightarrow$ (8, 9)
11)	$\neg(r \wedge t) \vee u$	$\Leftrightarrow$ (3)
$\therefore$	u	10, 11, loại trừ

□

Từ tương đương logic $p \to q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \to 0$, nên để chứng minh lập luận $P \Rightarrow Q$, ta có thể dùng lập luận sau, là một dạng của phương pháp mâu thuẫn.

$$\begin{array}{rl} & P \\ & \neg Q \\ \hline \therefore & 0 \end{array} \tag{2.6}$$

Ví dụ 2.11. Cho p, q, r là các mệnh đề, và các giả thiết $\neg p \leftrightarrow q, \quad q \to r, \quad \neg r$.

a) Dự đoán các kết luận bằng Python.

b) Chứng minh p.

Giải. a) Kết luận dự đoán được là $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, tức là có thể đạt được các kết luận p và $\neg q$ ($\neg r$ đã có trong giả thiết).

b)

	Suy luận	Lý do
1)	$\neg p \leftrightarrow q$	
2)	$q \rightarrow r$	
3)	$\neg r$	
4)	$\neg p$	phương pháp mâu thuẫn
5)	$(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$	$\Leftrightarrow$ (1)
6)	$\neg p \rightarrow q$	5, rút gọn hội
7)	$\neg p \rightarrow r$	6, 2, tam đoạn luận
8)	r	7, 4, tách
$\therefore$	$r \wedge \neg r \Leftrightarrow 0$	hội

□

Từ tương đương logic $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r$, ta có hai lập luận tương đương

$$\begin{array}{ll} & P \\ \hline \therefore & Q \rightarrow R \end{array} \quad \text{và} \quad \begin{array}{ll} & P \\ & Q \\ \hline \therefore & R \end{array} \tag{2.7}$$

ở đây lập luận thứ hai gọi là gộp giả thiết của lập luận thứ nhất.

Bài tập 2.3

2.25. Chứng minh các lập luận sau là đúng bằng bảng chân lý. Xác định hàng nào của bảng là quan trọng, hàng nào có thể bỏ qua.

a) $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge r \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

b) $(p \wedge q \rightarrow r) \wedge \neg q \wedge (p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p \vee \neg q$

c) $(p \vee q \vee r) \wedge \neg q \rightarrow p \vee r$

2.26. Dùng bảng chân lý để chứng minh các suy luận logic trong **??**.

2.27. Chứng minh mỗi công thức mệnh đề sau là suy luận logic.

a) $p \wedge q \rightarrow p$

b) $p \rightarrow p \vee q$

c) $(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$

d) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \rightarrow q \vee s$

e) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \rightarrow \neg p \vee \neg r$

2.28. Đặt $P = [p \wedge (q \wedge r)] \vee \neg[p \vee (q \wedge r)]$, và $Q = [p \wedge (q \vee r)] \vee \neg[p \vee (q \vee r)]$.

a) Dùng quy tắc thay thế, chứng minh $q \wedge r \Rightarrow q \vee r$.

b) Khẳng định $P \Rightarrow Q$ có đúng không?

2.29. Nêu lý do của mỗi bước khi chứng minh lập luận sau là đúng

$$p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \neg q) \to s \vee t.$$

Bước		**Lý do**
1)	p	
2)	$p \to q$	
3)	q	
4)	$r \to \neg q$	
5)	$q \to \neg r$	
6)	$\neg r$	
7)	$s \vee r$	
8)	s	
$\therefore$	$s \vee t$	

2.30. Nêu lý do của các bước khi chứng minh lập luận

$$\begin{array}{ll} & \neg p \vee q \to r \\ & r \to s \vee t \\ & \neg s \wedge \neg u \\ & \neg u \to \neg t \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Bước		**Lý do**
1)	$\neg s \wedge \neg u$	
2)	$\neg u$	
3)	$\neg u \to \neg t$	
4)	$\neg t$	
5)	$\neg s$	
6)	$\neg s \wedge \neg t$	
7)	$r \to s \vee t$	
8)	$\neg(s \vee t) \to \neg r$	
9)	$\neg s \wedge \neg t \to \neg r$	
10)	$\neg r$	
11)	$\neg p \vee q \to r$	
12)	$\neg r \to \neg(\neg p \vee q)$	
13)	$\neg r \to p \wedge \neg q$	

14)	$p \wedge \neg q$
$\therefore$	p

2.31. a) Nêu lý do cho các bước trong chứng minh lập luận

$$(p \to q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (p \vee r) \to (\neg q \to s).$$

Bước		**Lý do**
1)	$\neg(\neg q \to s)$	
2)	$\neg q \wedge \neg s$	
3)	$\neg s$	
4)	$\neg r \vee s$	
5)	$\neg r$	
6)	$p \to q$	
7)	$\neg q$	
8)	$\neg p$	
9)	$p \vee r$	
10)	r	
11)	$\neg r \wedge r$	
$\therefore$	$\neg q \to s$	

b) Chứng minh kéo theo logic ở ý (a) bằng phương pháp trực tiếp.

c) Chứng minh kéo theo logic ở Ví dụ 2.11 bằng phương pháp trực tiếp.

2.32. Chứng minh các lập luận sau là đúng.

a) $p \wedge \neg q \neg r \to p \wedge r \vee q$

b) $p \wedge (p \to q) \wedge (\neg q \vee r) \to r$

c)

	$p \to q$
	$\neg q$
$\therefore$	$\neg(p \vee r)$

d)

	$p \to q$
	$r \to \neg q$
	r
$\therefore$	$\neg p$

e)

	$p \to (q \to r)$
	$\neg q \to \neg p$
	p
$\therefore$	r

f)

	$p \wedge q$
	$p \to r \wedge q$
	$r \to s \vee t$
	$\neg s$
$\therefore$	t

g)

	$p \to (q \to r)$
	$p \vee s$
	$t \to q$
	$\neg s$
$\therefore$	$\neg r \to \neg t$

h)

	$p \vee q$
	$\neg p \vee r$
	$\neg r$
$\therefore$	q

2.33. Chứng minh các lập luận sau là sai bằng cách chỉ ra phản ví dụ, tức là một bộ phân bố giá trị của các biến mệnh đề sao cho các giả thiết đúng trong khi kết luận sai.

a) $p \wedge \neg q \wedge [p \to (q \to r)] \to \neg r$

b) $(p \wedge q \to r) \wedge (\neg q \vee r) \to p$

c)
$$\begin{array}{ll} & p \leftrightarrow q \\ & q \to r \\ & r \vee \neg s \\ & \neg s \to q \\ \hline \therefore & s \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{ll} & p \\ & p \to r \\ & p \to (q \vee \neg r) \\ & \neg p \vee \neg s \\ \hline \therefore & s \end{array}$$

2.4 Lượng từ: tình huống sử dụng

Định nghĩa 2.7. *Một hàm mệnh đề, còn gọi là khẳng định mở, có đặc điểm*

1) *chứa một hoặc nhiều biến, và*

2) *nó không phải mệnh đề, nhưng*

3) *nó trở thành mệnh đề khi các biến nhận giá trị cụ thể cho phép.*

Hàm mệnh đề thường có ký hiệu $p(x)$, $q(x, y)$,... với x, y là các biến.

Các giá trị được xét của biến x lập nên tập xác định của x, ký hiệu $\mathcal{U}$. Ta cũng viết $x \in \mathcal{U}$, và đọc là x thuộc $\mathcal{U}$.

Ví dụ 2.12. a) Xét hàm mệnh đề $p(x)$: "$x + 2$ là số chẵn", với tập xác định của biến x là các số nguyên. Chuyển công thức $\neg p(x)$ thành câu nói, và xác định giá trị chân lý của $p(5)$, $\neg p(7)$

b) Cho khẳng định mở $q(x, y)$: "x, $x - 2$ và $x + 2y$ là số chẵn". Xác định $q(4, 2)$.

Giải. a) $\neg p(x)$ đọc là "$x + 2$ không là số chẵn"

$p(5)$: "7 (= 5 + 2) là số chẵn", $p(5) = 0$

$\neg p(7)$: "9 không là số chẵn", $p(7) = 1$

b) $q(4, 2)$: "4, 2, và 8 là số chẵn", $q(4, 2) = 1$

□

Định nghĩa 2.8. *Cho hàm mệnh đề $p(x)$ với tập xác định $\mathcal{U}$ gồm $x_1, x_2, x_3, \ldots$*

a) *Lượng từ phổ dụng $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$, đọc là "với mọi x, $p(x)$", hoặc "với tất cả x, $p(x)$", là mệnh đề xác định bởi*

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{U}} p(x) = p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge p(x_3) \wedge \cdots \tag{2.8}$$

b) *Lượng từ tồn tại $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$, đọc là "tồn tại x, $p(x)$", hoặc "có x sao cho $p(x)$", là mệnh đề xác định bởi*

$$\bigvee_{x\in\mathcal{U}} p(x) = p(x_1) \vee p(x_2) \vee p(x_3) \vee \cdots \tag{2.9}$$

Nếu không sợ nhầm lẫn về tập xác định $\mathcal{U}$, ta chỉ cần viết $\forall x,\ p(x)$ và $\exists x,\ p(x)$. Ở đây $p(x)$ gọi là vị từ. Riêng đối với lượng từ phổ dụng, để nhấn mạnh vị từ, ta viết $p(x)\ \forall x$.

Ký hiệu lượng từ là phép toán một ngôi, nên được ưu tiên thực hiện trước các liên từ logic. Do đó, nếu $p(x)$ không chứa liên từ logic, ta có thể viết $\forall x\ p(x)$ (bỏ dấu phẩy trong ký hiệu ban đầu).

Khẳng định	**Khi nào đúng?**	**Khi nào sai?**
$\forall x\ p(x)$	Với x bất kỳ từ tập xác định, $p(x)$ đúng	Có ít nhất một giá trị x của tập xác định để $p(x)$ sai
$\exists x\ p(x)$	Có ít nhất một giá trị x của tập xác định để $p(x)$ đúng	Với x bất kỳ từ tập xác định, $p(x)$ sai
$\forall x\ \neg p(x)$	Với x bất kỳ từ tập xác định, $\neg p(x)$ đúng, tức là $p(x)$ sai	Có ít nhất một giá trị x của tập xác định để $\neg p(x)$ sai, tức là $p(x)$ đúng
$\exists x\ \neg p(x)$	Có ít nhất một giá trị x của tập xác định để $\neg p(x)$ đúng, tức là $p(x)$ sai	Với x bất kỳ từ tập xác định, $\neg p(x)$ sai, tức là $p(x)$ đúng

Ví dụ 2.13. Một lớp học gồm các sinh viên nam và sinh viên nữ. Xét hàm mệnh đề $p(x, y)$: "bạn nam x biết bạn nữ y".

a) Chuyển công thức sau thành câu nói

1) $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ 2) $\exists x\ \forall y\ p(x, y)$

b) Chuyển các câu sau sang công thức

3) Có bạn nữ mà bạn nam nào cũng biết.

4) Mọi bạn nam đều không biết tất cả các bạn nữ.

Giải. 1) Bạn nam nào cũng biết bạn nữ nào đó.

2) Có bạn nam biết tất cả các bạn nữ.

3) $\exists y\ \forall x\ p(x, y)$ 4) $\forall x\ \neg\forall y\ p(x, y)$

□

Căn cứ vào các công thức (2.8), (2.9), và luật đồng nhất, ta xây dựng kỹ thuật tính giá trị chân lý của các lượng từ $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$, và tương ứng $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$, được thay bằng mã trong phần chú thích.

Cách 1: mã tối giản.

```
u = 1                   # e = 0
for x in 𝒰:
    u = u and p(x)      # e = e or p(x)
```

Cách 2: điều chỉnh cách (1) để chương trình chạy nhanh hơn.

```
u = 1                   # e = 0
for x in 𝒰:
    if p(x) == 0:       # p(x) == 1
        u = 0           # e = 1
        break
```

Cách 3: chương trình con.

```
def universal_quantifier(p, 𝒰):   # existential_quantifier
    for x in 𝒰:
        if p(x) == 0:   # p(x) == 1
            return 0    # 1
    return 1            # 0
```

Ví dụ 2.14. Cho số nguyên $n \geq 2$. Xét định nghĩa: "n gọi là số nguyên tố nếu nó chỉ có hai ước là 1 và n"

a) Viết định nghĩa trên dưới dạng lượng từ, và rút gọn nó (nếu có thể)

b) Viết chương trình con kiểm tra n là số nguyên tố.

Giải. a) $\forall k \in \{1, 2, \ldots\},\ k \mid n \to k = 1 \vee k = n$, trong đó $k \mid n$ ký hiệu cho k là ước của n. Xét các giá trị của k:

1) $k = 1$ hoặc $k = n$, thì

$$k \mid n \to k = 1 \vee k = n \quad \Leftrightarrow \quad k \mid n \to T \quad \Leftrightarrow \quad T.$$

2) $k > n$, thì

$$k \mid n \to k = 1 \vee k = n \quad \Leftrightarrow \quad F \to k = 1 \vee k = n \quad \Leftrightarrow \quad T.$$

3) $2 \leq k \leq n - 1$, thì

$$\begin{aligned} k \mid n \to k = 1 \vee k = n \quad &\Leftrightarrow \quad k \mid n \to F \quad \Leftrightarrow \quad \neg\left(k \mid n\right) \vee F \\ &\Leftrightarrow \quad k \nmid n. \end{aligned}$$

Khi đó, do tính đồng nhất của phép hội, và định nghĩa của lượng từ phổ dụng, lượng từ trên tương đương với

$$\forall k \in \{2, 3, \ldots, n - 1\},\ k \nmid n.$$

b)

```python
def is_prime(n):
    for k in range(2, n):
        if n % k == 0:
            return False
    return True

is_prime(7)  # → True
```

□

Định nghĩa 2.9. *Cho hai hàm mệnh đề $p(x), q(x)$ trên cùng tập xác định.*

a) *$p(x)$ và $q(x)$ gọi là tương đương logic, ký hiệu $\forall x,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$, nếu $\forall x,\ p(x) \leftrightarrow q(x)$ là mệnh đề đúng, tức là $p(x) \leftrightarrow q(x)$ đúng với x tùy ý.*

b) *$p(x)$ gọi là kéo theo logic $q(x)$, ký hiệu $\forall x,\ p(x) \Rightarrow q(x)$, nếu $\forall x,\ p(x) \rightarrow q(x)$ là mệnh đề đúng, tức là $p(x) \rightarrow q(x)$ đúng với x tùy ý.*

Định nghĩa 2.10. *Cho hai hàm mệnh đề trên cùng tập xác định. Lượng từ phổ dụng $\forall x,\ p(x) \rightarrow q(x)$ có dạng*

a)	đảo là	:	$\forall x,\ q(x) \rightarrow p(x)$;
b)	phản là	:	$\forall x,\ \neg p(x) \rightarrow \neg q(x)$;
c)	phản đảo là	:	$\forall x,\ \neg q(x) \rightarrow \neg p(x)$.

Tương đương logic và kéo theo logic cho lượng từ một biến: Cho hai hàm mệnh đề $p(x), q(x)$ có cùng tập xác định. Khi đó

$$\left[\exists x,\ p(x) \wedge q(x)\right] \Rightarrow \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$$
$$\left[\exists x,\ p(x) \vee q(x)\right] \Leftrightarrow \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$$
$$\left[\forall x,\ p(x) \wedge q(x)\right] \Leftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$$
$$\left[\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)\right] \Rightarrow \forall x,\ p(x) \vee q(x)$$

Quy tắc phủ định lượng từ:

$$\neg\forall x\ p(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$$
$$\neg\exists x\ p(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg p(x)$$

Ví dụ 2.15. Cho số nguyên $n \geq 2$, trong Ví dụ 2.14, n là số nguyên tố nếu $\forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\},\ k \not| n.$, và ngược lại, gọi là hợp số.

a) Viết lượng từ cho khái niệm hợp số.

b) Viết chương trình kiểm tra n là hợp số.

Giải. a)

$$\begin{aligned} &\neg\forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\},\ k \nmid n \\ \Leftrightarrow\ &\exists k \in \{2, 3, \dots, n-1\},\ \neg\left(k \nmid n\right) \\ \Leftrightarrow\ &\exists k \in \{2, 3, \dots, n-1\},\ k \mid n \end{aligned}$$

b)

```python
def is_composite(n):
    for k in range(2, n):
        if n % k == 0:
            return True
    return False

is_composite(7)   # → False
```

□

Ví dụ 2.16. Khử dấu phủ định đứng trước lượng từ trong biểu thức

$$\neg\left[\forall x\ \exists y,\ p(x, y) \wedge q(x, y) \rightarrow r(x, y)\right]. \tag{1}$$

Giải. Cần 2 bước biến đổi để đưa dấu phủ định vào phần vị từ

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \exists x\ \left[\neg\exists y,\ p(x, y) \wedge q(x, y) \rightarrow r(x, y)\right] \\ &\Leftrightarrow \exists x\ \forall y,\ \neg\left[p(x, y) \wedge q(x, y) \rightarrow r(x, y)\right] \end{aligned}$$

Cuối cùng, rút gọn vị từ

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \exists x\ \forall y,\ \neg\left\{\neg\left[p(x, y) \wedge q(x, y)\right] \vee r(x, y)\right\} \\ &\Leftrightarrow \exists x\ \forall y,\ \neg\neg\left[p(x, y) \wedge q(x, y)\right] \wedge \neg r(x, y) \\ &\Leftrightarrow \exists x\ \forall y,\ p(x, y) \wedge q(x, y) \wedge \neg r(x, y). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.17. Trong giải tích, định nghĩa giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, với a, L là các số thực:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Viết lượng từ cho khái niệm $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$.

Giải.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) \neq L &\Leftrightarrow \neg \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,\ 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x,\ \neg\big[0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon\big] \\
&\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x,\ \neg\big[\neg\big(0 < |x - a| < \delta\big) \vee |f(x) - L| < \varepsilon\big] \\
&\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x,\ \neg\neg\big(0 < |x - a| < \delta\big) \wedge \neg\big(|f(x) - L| < \varepsilon\big) \\
&\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x,\ 0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Lượng từ tồn tại duy nhất, ký hiệu $\exists! x\ p(x)$, là lượng từ

$$\exists x\ \forall y,\ p(x) \wedge [p(y) \to x = y]. \tag{2.10}$$

Bài tập 2.4

2.34. Cho $p(x)$, $q(x)$ là các khẳng định mở trên tập số nguyên

$$p(x):\quad x \leq 3 \qquad\qquad q(x):\quad x + 1 \text{ lẻ}$$

Tìm giá trị chân lý của

a) $q(1)$

b) $\neg p(3)$

c) $p(7) \vee q(7)$

d) $p(3) \wedge q(4)$

e) $\neg[p(-4) \vee q(-3)]$

f) $\neg p(-4) \wedge \neg q(-3)$

2.35. Với $p(x)$, $q(x)$ trong Bài tập 2.34, và $r(x)$ là khẳng định mở "$x > 0$" trên tập số nguyên.

a) Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề

i) $p(3) \vee [q(3) \vee \neg r(3)]$

ii) $p(2) \to [q(2) \to r(2)]$

iii) $p(2) \wedge q(2) \to r(2)$

iv) $p(0) \to [\neg q(-1) \leftrightarrow r(1)]$

b) Tìm x sao cho $p(x) \wedge q(x) \wedge r(x)$ là mệnh đề đúng.

2.36. Cho mệnh đề mở $p(x)$: "$x^2 = 2x$" trên tập số nguyên. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $p(0)$

b) $p(1)$

c) $p(2)$

d) $p(-2)$

e) $\exists x\ p(x)$

f) $\forall x\ p(x)$

2.37. Trên tập các đa giác lồi có ba hoặc bốn cạnh, xét các khẳng định mở

$a(x)$:	x có các góc bằng nhau	$q(x)$:	x là tứ giác
$e(x)$:	x là tam giác đều	$r(x)$:	x là hình chữ nhật
$h(x)$:	x có các cạnh bằng nhau	$s(x)$:	x là hình vuông
$i(x)$:	x là tam giác cân	$t(x)$:	x là tam giác
$p(x)$:	x có góc lớn hơn 180°		

Dịch các mệnh đề sau thành câu khẳng định, và xác định xem nó đúng hai sai.

a) $\forall x,\ q(x) \veebar t(x)$

b) $\forall x,\ i(x) \to e(x)$

c) $\exists x,\ t(x) \wedge p(x)$

d) $\forall x,\ a(x) \wedge t(x) \leftrightarrow e(x)$

e) $\exists x,\ q(x) \wedge \neg r(x)$

f) $\exists x,\ r(x) \wedge \neg s(x)$

g) $\forall x,\ h(x) \to e(x)$

h) $\forall x,\ t(x) \to \neg p(x)$

i) $\forall x,\ s(x) \leftrightarrow a(x) \wedge h(x)$

j) $\forall x,\ t(x) \to (a(x) \leftrightarrow h(x))$

2.38. Trên tập số thực, xét các khẳng định mở

$$p(x, y):\quad x^2 \geq y, \qquad q(x, y):\quad x + 2 < y.$$

Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề

a) $p(2, 4)$

b) $q(1, \pi)$

c) $p(-3, 8) \wedge q(1, 3)$

d) $p\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \vee \neg q(-2, -3)$

e) $p(2, 2) \to q(1, 1)$

f) $p(1, 2) \leftrightarrow \neg q(1, 2)$

2.39. Trên tập số nguyên, xét các khẳng định mở

$p(x)$:	$x > 0$	$s(x)$:	x chia hết cho 4
$q(x)$:	x chẵn	$t(x)$:	x chia hết cho 5
$r(x)$:	x là số chính phương		

a) Viết các khẳng định sau dưới dạng ký hiệu

i) Có số nguyên chẵn.

ii) Có số nguyên dương chẵn

iii) Nếu x chẵn, thì x không chia hết cho 5.

iv) Không có số nguyên chẵn chia hết cho 5.

v) Có số nguyên chẵn chia hết cho 5.

vi) Nếu x chẵn và x là số chính phương, thì x chia hết cho 4.

b) Chỉ ra mỗi khẳng định trong ý (a) đúng hay sai. Với khẳng định sai, cho một phản ví dụ.

c) Biểu diễn các công thức sau thành câu khẳng định

i) $\forall x,\ r(x) \to p(x)$

ii) $\forall x,\ s(x) \to q(x)$

iii) $\forall x,\ s(x) \to \neg t(x)$

iv) $\exists x,\ s(x) \wedge \neg r(x)$

d) Lấy phản ví dụ cho khẳng định sai trong ý (c).

2.40. Trên tập số nguyên, cho các khẳng định mở

$$p(x):\quad x^2 - 8x + 15 = 0, \qquad q(x):\quad x \text{ chẵn}, \qquad r(x):\quad x > 0.$$

Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau. Nếu mệnh đề sai, hãy lấy phản ví dụ.

a) $\forall x,\ p(x) \to q(x)$

g) $\forall x,\ q(x) \to p(x)$

c) $\exists x,\ p(x) \to q(x)$

d) $\exists x,\ q(x) \to p(x)$

e) $\exists x,\ r(x) \to p(x)$

f) $\forall x,\ \neg q(x) \to \neg p(x)$

g) $\exists x,\ p(x) \to q(x) \wedge r(x)$

h) $\forall x,\ p(x) \vee q(x) \to r(x)$

2.41. Cho các khẳng định mở

$$p(x):\quad x^2 - 7x + 10 = 0, \qquad q(x):\quad x^2 - 2x - 3 = 0, \qquad r(x):\quad x < 0.$$

a) Trên tập xác định là các số nguyên, tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau. Nếu mệnh đề sai, hãy lấy phản ví dụ.

i) $\forall x,\ p(x) \to \neg r(x)$

ii) $\forall x,\ q(x) \to r(x)$

iii) $\exists x,\ q(x) \to r(x)$

iv) $\exists x,\ p(x) \to r(x)$

b) Trả lời ý (a) khi tập xác định là các số nguyên dương.

c) Trả lời ý (a) khi tập xác định chỉ gồm 2 và 5.

2.5 Lượng từ: chứng minh định lý

Quy tắc đặc biệt hóa phổ dụng: Nếu $\forall x\ p(x)$ đúng, thì $p(x)$ đúng với x tùy ý thuộc tập xác định.

$$\begin{array}{rl} & \forall x\ p(x) \\ \hline \therefore & p(a) \end{array}$$

Quy tắc tổng quát hóa phổ dụng: Nếu chứng minh được $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ đúng khi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nhận giá trị tùy ý từ tập xác định tương ứng, thì $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ \ p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [hay $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n,\ \ p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$] là mệnh đề đúng.

Ví dụ 2.18. Cho $p(x)$, $q(x)$, and $r(x)$ là khẳng định mở trên cùng tập phổ dụng. Chứng minh lập luận sau là đúng

$$\begin{array}{rl} & \forall x,\ p(x) \to q(x) \\ & \forall x,\ q(x) \to r(x) \\ \hline \therefore & \forall x,\ p(x) \to r(x) \end{array}$$

Giải.

$$\begin{array}{lll} 1) & \forall x,\ p(x) \to q(x) & \\ 2) & \forall x,\ q(x) \to r(x) & \\ \hdashline 3) & p(x) \to q(x) & \text{1, đặc biệt hóa} \\ 4) & q(x) \to r(x) & \text{2, đặc biệt hóa} \\ 5) & p(x) \to r(x) & \text{3, 4, tam đoạn luận} \\ \hline \therefore & \forall x,\ p(x) \to r(x) & \text{5, tổng quát hóa} \end{array}$$

□

Ví dụ 2.19. Chứng minh tính đúng đắn của lập luận

$$\begin{array}{rl} & \forall x,\ p(x) \vee q(x) \\ & \forall x,\ \neg p(x) \wedge q(x) \to r(x) \\ \hline \therefore & \forall x,\ \neg r(x) \to p(x) \end{array}$$

Giải.

1)	$\forall x,\ p(x) \vee q(x)$	
2)	$\forall x,\ \neg p(x) \wedge q(x) \to r(x)$	
3)	$p(x) \vee q(x)$	1, đặc biệt hóa
4)	$\neg p(x) \wedge q(x) \to r(x)$	2, đặc biệt hóa
5)	$\neg r(x)$	gộp giả thiết
6)	$\neg(\neg p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \neg\neg p(x) \vee \neg q(x) \Leftrightarrow p(x) \vee \neg q(x)$	4, 5, loại trừ
7)	$[p(x) \vee q(x)] \wedge [p(x) \vee \neg q(x)] \Leftrightarrow p(x) \vee [q(x) \wedge \neg q(x)]$ $\Leftrightarrow p(x) \vee 0 \Leftrightarrow p(x)$	$\Leftrightarrow$ (3, 6)
$\therefore$	$\forall x,\ \neg r(x) \to p(x)$	7, tổng quát hóa

□

Để chứng minh $\forall x,\ \ p(x) \Rightarrow q(x)$, ta cũng có thể dùng phương pháp phản chứng, hoặc tổng quát hơn, là phương pháp mâu thuẫn.

	Giả thiết	**Kết luận thu được**
Phản chứng	$\neg q(x)$	$\neg p(x)$
Mâu thuẫn	$p(x)$ và $\neg q(x)$	0

Ví dụ 2.20. Một người bán vũ khí thô sơ quảng cáo sản phẩm của mình như sau:

1) kiếm này bén lắm, có thể đâm thủng mọi cái khiên; và

2) cái khiên này chắc lắm, không kiếm nào đâm thủng được.

Hãy chỉ ra tính mâu thuẫn của lời quảng cáo.

Giải. Ký kiệu $p(x, y)$: "kiếm x có thể đâm thủng khiên y". Gọi a, b là kiếm và khiên mà người đó đang quảng cáo. Khi đó

(1) kiếm a có thể đâm thủng mọi khiên: $\forall y\ p(a, y)$

(2) không kiếm nào đâm thủng được khiên b: $\neg\exists x\ p(x, b)$

Ta cần chứng minh

$$\begin{array}{rl} & \forall y\ p(a, y) \\ & \neg\exists x\ p(x, b) \\ \hline \therefore & 0 \end{array}$$

Thật vậy

1)	$\forall y\ p(a,y)$	
2)	$\neg\exists x\ p(x,b) \Leftrightarrow \forall x\ \neg p(x,b)$	
3)	$p(a,b)$	1, đặc biệt hóa
4)	$\neg p(a,b)$	2, đặc biệt hóa
$\therefore$	$p(a,b) \wedge \neg p(a,b) \Leftrightarrow 0$	3, 4

□

Ví dụ 2.21. Với mọi số thực dương x và y, nếu $xy > 25$ thì $x > 5$ hoặc $y > 5$.

Giải. Ta chứng minh mệnh đề bằng phương pháp phản chứng. Giả sử ngược lại, tức là $x \leq 5$ và $y \leq 5$. Nhưng $x, y > 0$, nên $xy \leq 5 \cdot 5 = 25$, mâu thuẫn với giả thiết $xy > 25$!

Vậy $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ xy > 25 \Rightarrow x > 5 \vee y > 5$. □

Bài tập 2.5

2.42. Trên cùng tập xác định, xét hai khẳng định mở $p(x)$, $q(x)$. Chứng minh

a) $\left[\exists x,\ p(x) \vee q(x)\right] \Leftrightarrow \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$

b) $\left[\forall x\ [p(x) \wedge q(x)]\right] \Leftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$

c) $\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \Rightarrow \forall x,\ p(x) \vee q(x)$. Cho phản ví dụ cho thấy đảo lại không đúng.

2.43. Nêu lý do của mỗi bước trong chứng minh lập luận

$$\begin{array}{rl} & \forall x,\ p(x) \to q(x) \wedge r(x) \\ & \forall x,\ p(x) \wedge s(x) \\ \hline \therefore & \forall x,\ r(x) \wedge s(x) \end{array}$$

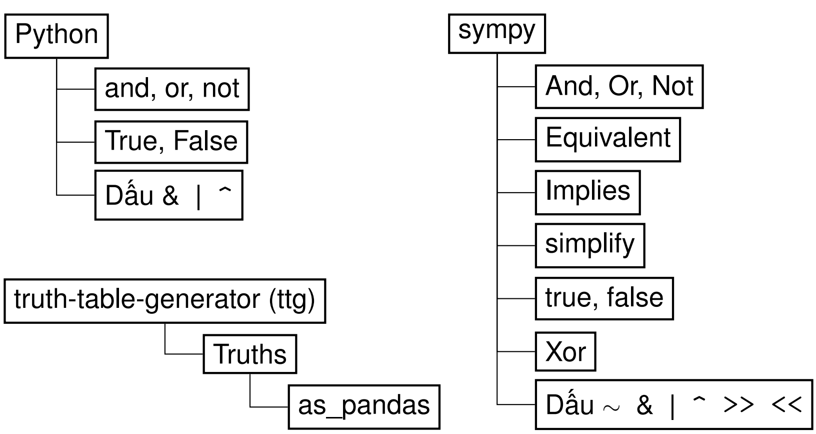
Bước		**Lý do**
1)	$\forall x,\ p(x) \to q(x) \wedge r(x)$	
2)	$\forall x,\ p(x) \wedge s(x)$	
3)	$p(x) \to q(x) \wedge r(x)$	
4)	$p(x) \wedge s(x)$	
5)	$p(x)$	
6)	$q(x) \wedge r(x)$	
7)	$r(x)$	
8)	$s(x)$	
9)	$r(x) \wedge s(x)$	
$\therefore$	$\forall x,\ r(x) \wedge s(x)$	

2.44. Nêu lý do của mỗi bước trong chứng minh lập luận

$$\begin{array}{ll} & \forall x,\ p(x) \vee q(x) \\ & \exists x\ \neg p(x) \\ & \forall x,\ \neg q(x) \vee r(x) \\ & \forall x,\ s(x) \rightarrow \neg r(x) \\ \hline \therefore & \exists x\ \neg s(x) \end{array}$$

Bước		Lý do
1)	$\forall x,\ p(x) \vee q(x)$	
2)	$\exists x\ \neg p(x)$	
3)	$\neg p(x)$	
4)	$p(x) \vee q(x)$	
5)	$q(x)$	
6)	$\forall x,\ \neg q(x) \vee r(x)$	
7)	$\neg q(x) \vee r(x)$	
8)	$q(x) \rightarrow r(x)$	
9)	$r(x)$	
10)	$\forall x,\ s(x) \rightarrow \neg r(x)$	
11)	$s(x) \rightarrow \neg r(x)$	
12)	$r(x) \rightarrow \neg s(x)$	
13)	$\neg s(x)$	
$\therefore$	$\exists x\ \neg s(x)$	

2.6 Tóm tắt



Bài tập bổ sung

2.45. Lập bảng chân lý cho $p \leftrightarrow q \wedge r \rightarrow \neg(s \vee r)$.

2.46.
a) Lập bảng chân lý cho $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$.
b) Dịch khẳng định ở ý (a) sang chữ sao cho không có từ "không".

2.47. Chứng minh, hoặc nếu không được thì lấy phản ví dụ:

a) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$
b) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

2.48. Lập mệnh đề đảo, phản, phản đảo của

a) $p \rightarrow q \wedge r$
b) $p \vee q \rightarrow r$

2.49.
a) Tìm đối ngẫu của công thức mệnh đề $\neg p \wedge \neg q \vee 0 \wedge p \vee p$.
b) Dùng luật logic để chứng minh đối ngẫu ở ý (a) tương đương logic với $p \wedge \neg q$.

2.50. Lập đối ngẫu cho công thức mệnh đề

a) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s)$
b) $p \rightarrow q \wedge \neg r \wedge s$
c) $[(p \vee 1) \wedge (q \vee 0)] \vee (r \wedge s \wedge 0)$

2.51. Chứng minh lập luận $(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge r \rightarrow s) \wedge r \rightarrow (p \rightarrow s)$.

2.52. Chứng minh hoặc nếu không, lấy phản ví dụ.

a) $(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$
b) $p \veebar (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \veebar q) \rightarrow (p \veebar r)$

2.53. Trên tập số nguyên, xét khẳng định mở $p(x, y)$: "$y - x = y + x^2$". Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề

a) $p(0, 0)$
b) $p(1, 1)$
c) $p(0, 1)$
d) $\forall y\ p(0, y)$
e) $\exists y\ p(1, y)$
f) $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$
g) $\exists x\ \forall x\ p(x, y)$
h) $\forall y\ \exists x\ p(x, y)$

2.54. Trên tập số nguyên, tìm giá trị chân lý của các mệnh đề. Nếu mệnh đề sai, hãy lấy phản ví dụ.

a) $\forall x\ \exists y\ \exists z,\ x = 7y + 5z$
b) $\forall x\ \exists y\ \exists z,\ x = 4y + 6z$

Tài liệu tham khảo

[1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. phiên bản 6. Pearson, 2022. 755 trang.

[3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.

[4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.

[5] Thomas Koshy. *Catalan Numbers with Applications*. Oxford University Pres, 2009. 439 trang.

[6] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. phiên bản 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.

[7] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. phiên bản 3. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.

[8] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. phiên bản 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.

[9] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.