Mục lục

Phần II

Các phép đếm nâng cao

Chương 7

Nguyên lý bù trừ

7.1 Nguyên lý bù trừ

Trong Chương 3, ta đã nêu hai công thức

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B|, \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

và gọi là nguyên lý bù trừ cho hai và ba tập.

Định lý 7.1 (Nguyên lý bù trừ). *Với các tập hữu hạn $A_1, A_2, \ldots, A_n$,*

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right| + \cdots + (-1)^{n-1}\left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

Chứng minh. content... □

Một dạng khác của nguyên lý bù trừ, được phát biểu dưới dạng bài toán đếm. Trong tập N phần tử đang xét, giả sử A_i là tập con các phần tử có tính chất p_i, $1 \le i \le n$. Ký hiệu số phần tử thỏa mãn các điều kiện $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_r}$

$$N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}) = \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}\right|.$$

Khi đó, số phần tử thỏa mãn ít nhất một tính chất c_i nào đó là

$$\begin{aligned}\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| &= \sum_{1\le i\le n} N(c_i) - \sum_{1\le i<j\le n} N\left(c_i c_j\right) + \sum_{1\le i<j<k\le n} N\left(c_i c_j c_k\right) - \cdots + \\ &+ (-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} N\left(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}\right) + \cdots + (-1)^{n-1} N(c_1 c_2 \cdots c_n)\end{aligned}$$

và do đó, số phần tử không thỏa mãn tính chất nào là

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1}\, \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) &= \left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}\right| = N - \left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right| = \\ & N - \sum_{1\le i\le n} N(c_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N\left(c_i c_j\right) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N\left(c_i c_j c_k\right) + \cdots + \\ &\quad + (-1)^r \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} N\left(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}\right) + \cdots + (-1)^n N(c_1 c_2 \cdots c_n)\end{aligned}$$

Ký hiệu

$$N_0 = N \qquad N_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n} N(c_i c_j c_k), \ldots$$
$$N_1 = \sum_{1\le i\le n} N(c_i) \qquad N_r = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le n} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}), \ldots$$
$$N_2 = \sum_{1\le i<j\le n} N(c_i c_j) \qquad N_n = N(c_1 c_2 \cdots c_n)$$

với N_r là tổng của $\binom{n}{r}$ số hạng. Ta có

$$N(\overline{c_1}\, \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n.$$

Trong phần tổ hợp lặp, trang 42, ta đã đếm các nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ với điều kiện chặn dưới của các biến. Nếu có một biến bị chặn trên, chẳng hạn $x_1 \le a_1$, thì theo Phần 3.3 ở trang 119, ta đếm gián tiếp các nghiệm này thông qua tập bù của nó, tức là tập nghiệm thỏa mãn $x_1 > a_1$. Trường hợp nhiều biến bị chặn trên, ta dùng nguyên lý bù trừ để đếm các nghiệm này.

Ví dụ 7.1. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn

a) $x_i \le 7, 1 \le i \le 4$.

b) $x_1 < 4, x_2 < 6, x_3 \le 10, x_4 > 2$.

Giải. a) Ngoài tính không âm của các nghiệm, xét điều kiện c_i là $x_i > 7$, $1 \le i \le 4$, hay $x_i \ge 8$. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4$$

trong đó

i) $N_0 = N$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, bằng

$$\binom{4+25-1}{25} = 3276.$$

ii) $N(c_i)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ sao cho $x_i \ge 8$, bằng $\binom{4+(25-8)-1}{25-8} = 1140$, với $1 \le i \le 4$. Vì $N_1 = \sum_{1 \le i \le 4} N(c_i)$ gồm $\binom{4}{1}$ số hạng bằng nhau nên

$$N_1 = \binom{4}{1} \times 1140 = .4560.$$

iii) $N(c_ic_j)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1+x_2+x_3+x_4 = 25$ thỏa mãn $x_i \ge 8$ và $x_j \ge 8$, với $1 \le i < j \le 4$, bằng $\binom{4+(25-8-8)-1}{25-8-8} = 220$. Suy ra

$$N_2 = \sum_{1 \le i < j \le 4} N(c_ic_j) = \binom{4}{2} \times 220 = 1320.$$

và tiếp theo tương tự

iv) $N(c_ic_jc_k) = \binom{4+(25-8-8-8)-1}{25-8-8-8} = 4$, suy ra

$$N_3 = \binom{4}{3} \times 4 = 16.$$

v) $N_4 = 0$.

Do đó $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = 3276 - 4560 + 1320 - 16 + 0 = 20$.

b) Trong các nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ với $x_4 > 2$, hay $x_4 \geq 3$, xét các điều kiện c_1, c_2, c_3 lần lượt là $x_1 \geq 4$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 11$. Cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

trong đó

i) $N_0 = N$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ với $x_4 \geq 3$, bằng $\binom{4 + (25-3) - 1}{25-3} = 2300$.

ii) $N(c_1)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, $x_4 \geq 3$ sao cho $x_1 \geq 4$, bằng $\binom{4 + (25-3-4) - 1}{25-3-4} = 1330$. Tương tự $N(c_2) = \binom{4 + (25-3-6) - 1}{25-3-6} = 969$, $N(c_3) = \binom{14}{11} = 364$. Ta có

$$N_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) = 2663.$$

iii) $N_2 = N(c_1c_2) + N(c_1c_3) + N(c_2c_3) = \binom{15}{12} + \binom{10}{7} + \binom{8}{5} = 631.$

iv) $N_3 = N(c_1c_2c_3) = \binom{4}{1} = 4.$

Như vậy, $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = 2300 - 2663 + 631 - 4 = 264$.

□

Định nghĩa 7.1. *Cho số nguyên dương n. Hàm Euler phi, ký hiệu $\Phi(n)$, là số các số nguyên từ 1 tới n và nguyên tố cùng nhau với n.*

Chẳng hạn, $\Phi(2) = 1$, $\Phi(3) = 2$, $\Phi(4) = 2$, $\Phi(5) = 4$, $\Phi(6) = 2$.

```python
from sympy import *
totient(6)   # → 2
```

Nếu p nguyên tố, thì $\Phi(p) = p - 1$. Tổng quát

Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Theo định lý cơ bản của số học, n có phân tích $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ trong đó p_i là số nguyên tố, $e_i \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq i \leq k$. Khi đó

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Chứng minh. Với phân tích nguyên tố này của n, một số nguyên dương m nguyên tố cùng nhau với n nếu p_i không là ước m, $1 \le i \le k$.

Trong các số m từ 1 tới n xét điều kiện

$$c_i: \quad p_i \text{ là ước của } m.$$

và cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\cdots\overline{c_k}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^k N_k$$

trong

i) $N_0 = n$

ii) $N_1 = \sum_{1\le i\le k} N(c_i) = \sum_{1\le i\le k} \lfloor \frac{n}{p_i} \rfloor = \sum_{1\le i\le k} \frac{n}{p_i}$

iii) $N(c_ic_j)$, $1 \le i < j \le k$, là số các số từ 1 tới n là bội của p_i và p_j, tức là bội của $\operatorname{lcm}(p_i, p_j)$. Mặt khác, p_i, p_j là các số nguyên tố khác nhau, nên $\operatorname{lcm}(p_i, p_j) = p_ip_j$. Suy ra $N(c_ic_j) = \lfloor \frac{n}{p_ip_j} \rfloor = \frac{n}{p_ip_j}$. Ta có

$$N_2 = \sum_{1\le i<j\le k} N(c_ic_j) = \sum_{1\le i<j<k} \frac{n}{p_ip_j}$$

iv) Tương tự

$$\begin{aligned}
N_3 &= \sum_{1\le i<j<l\le k} N(c_ic_jc_l) = \sum_{1\le i<j<l<k} \frac{n}{p_ip_jp_l}, \ldots \\
N_r &= \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le k} N(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_r}) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le k} \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_r}}, \ldots \\
N_k &= N(c_1c_2\cdots c_k) = 1 = \frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}
\end{aligned}$$

Các số hạng này có thừa số chung là n, nên

$$\begin{aligned}
N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\cdots\overline{c_k}) &= n\Big(1 - \sum_{1\le i\le k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k} \frac{1}{p_ip_j} - \sum_{1\le i<j<l\le k} \frac{1}{p_ip_jp_l} + \cdots + \\
&\quad + (-1)^{r-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r\le k} \frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_r}} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\Big) \\
&= n\prod_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)
\end{aligned}$$

□

Trong Phần 5.4, ta thừa nhận trước công thức đếm số toàn ánh. Bây giờ ta sẽ chứng minh công thức đó.

Số toàn ánh từ tập A cỡ m vào B cỡ n là

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$
$$= \binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^m +$$
$$+ (-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m.$$

Chứng minh. Nhắc lại định nghĩa, một toàn ánh từ A vào B là một hàm sao cho mỗi phần tử của B đều có tạo ảnh. Giả sử $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, xét điều kiện

$$c_i: \quad b_i \text{ không có tạo ảnh}$$

thì ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\cdots\overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n,$$

trong đó

i) N_0 là số hàm từ tập A cỡ m vào tập B cỡ n, bằng n^m.

ii) $N(c_i)$, $1 \le i \le n$, là số hàm từ A vào B, sao cho b_i không có tạo ảnh. Mỗi hàm như vậy tương ứng với hàm từ A cỡ m vào $B - \{b_i\}$ cỡ $n-1$, nên $N(c_i) = (n-1)^m$. Suy ra $N_1 = \binom{n}{1}(n-1)^m$.

Tương tự $N_2 = \binom{n}{2}(n-2)^m, \ldots, N_k = \binom{n}{k}(n-k)^m$.

Thay các kết quả vào công thức của $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\cdots\overline{c_n})$, ta được biểu thức cần chứng minh. □

Ví dụ về bài toán ghép cặp:

Ví dụ 7.2. Cho n hộp đánh số từ 1 đến n, và n vật cũng đánh số từ 1 đến n. Có bao nhiêu cách xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp một vật, và không có vật nào vào đúng hộp cùng số với nó.

Giải. Xét điều kiện c_i: vật i xếp vào hộp i, $1 \le i \le n$. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\cdots\overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n,$$

trong đó

i) N_0 là số cách xếp n vật vào n hộp mà mỗi hộp một vật. Theo quy tắc nhân, $N_0 = n!$

ii) $N(c_i)$ là số cách xếp n vào n hộp sao cho mỗi hộp một vật, và hộp i chứa vật i, bằng $1 \times (n-1)! = (n-1)!$. Suy ra

$$N_1 = \binom{n}{1}(n-1)! = \frac{n!}{1!\,(n-1)!}(n-1)! = \frac{n!}{1!}$$

iii) Tương tự

$$N_2 = \binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n!}{2!} \qquad N_r = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!}, \ldots$$

$$N_3 = \binom{n}{3}(n-3)! = \frac{n!}{3!}, \ldots \qquad N_n = 1$$

Các số hạng có thừa số chung là $n!$ nên

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = n!\Big[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\Big]$$

□

Theo ví dụ trên, xác suất để không có vật nào xếp vào đúng hộp là

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

chính là khai triển Maclaurin tới cấp n của e^x tại $x = -1$, xem [**James-Stewart**]. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-1}.$$

Tương tự phương pháp tìm số Euler phi, xét ví dụ sau

Ví dụ 7.3. Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số không chia hết cho số nào trong ba số 4, 6, và 10.

Giải. Trong các số nguyên m từ 1 đến 100, xét điều kiện

1) c_1: m là bội của 4
2) c_2: m là bội của 6
3) c_3: m là bội của 10

thì ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

trong đó

i) $N_0 = 100$

ii) $N_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) = \lfloor \frac{100}{4} \rfloor + \lfloor \frac{100}{6} \rfloor + \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 51$

iii) $N(c_1 c_2)$ là số các số từ 1 đến 100 chia hết cho cả 4 và 6, tức là chia hết cho $\operatorname{lcm}(4, 6) = 12$. Vì thế

$$N_2 = \lfloor \frac{100}{12} \rfloor + \lfloor \frac{100}{20} \rfloor + \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 16$$

iv) $N_3 = N(c_1 c_2 c_3) = \lfloor \frac{100}{\operatorname{lcm}(4, 6, 10)} \rfloor = \lfloor \frac{100}{60} \rfloor = 1.$

Do đó $N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}) = 100 - 51 + 16 - 1 = 64.$ □

Ví dụ 7.4. Có bao nhiêu hoán vị của 26 chữ cái, sao cho trong đó không xuất hiện từ HUCE, IT, AM, và PS.

Giải. Ký hiệu c_1, c_2, c_3, c_4 lần lượt là điều kiện cho biết hoán vị chứa từ HUCE, IT, AM, và PS. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4,$$

trong đó

i) N_0 là số hoán vị của 26 chữ cái, bằng 26!

ii) $N(c_1)$ là số hoán vị của các 23 vật HUCE, A, B, D, F,. . . , Z, bằng 23!. Tương tự, $N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = 25!$. Suy ra $N_1 = 23! + 3 \cdot 25!$

iii) $N(c_1 c_2)$ là số hoán vị của các vật HUCE, IT, A, B, D,. . . , bằng 22!. Tương tự, $N(c_1 c_3) = N(c_1 c_4) = 22!$, $N(c_2 c_3) = N(c_2 c_4) = N(c_3 c_4) = 24!$. Suy ra $N_2 = 3 \cdot 22! + 3 \cdot 24!$

iv) $N(c_1 c_2 c_3) = N(c_1 c_2 c_4) = N(c_1 c_3 c_4) = 21!$, $N(c_2 c_3 c_4) = 23!$. Ta được $N_3 = 3 \cdot 21! + 23!$

v) $N_4 = N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 20!$

Do đó

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1}\ \overline{c_2}\ \overline{c_3}\ \overline{c_4}) &= 26! - (23! + 3 \cdot 25!) + (3 \cdot 22! + 3 \cdot 24!) - (3 \cdot 21! + 23!) + 20! \\ &= 147\,383\,944 \cdot 20! \end{aligned}$$

□

Bài tập 7.1

7.1. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 2022

a) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5.

b) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, 7.

c) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, nhưng chia hết cho 7.

7.2. Có bao nhiêu nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ thỏa mãn

a) $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

b) $0 \leq x_i < 8, 1 \leq i \leq 4$

c) $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 7, 0 \leq x_4 \leq 8$

d) $-5 \leq x_i \leq 10, 1 \leq i \leq 4$

7.3. Đếm các số nguyên dương $x \leq 9\,999\,999$ sao cho tổng các chữ số của x bằng 31.

7.4. Đếm các hoán vị của các chữ cái $a, b, c, \ldots, z$ không chứa mọi từ *spin*, *game*, *path*, *net*.

7.5. Tính $\Phi(n)$ với n bằng

a) 51

b) 420

c) 12300

d) 5186

e) 5187

f) 5188

7.6. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Xác định

a) $\Phi(2^n)$

b) $\Phi(2^n p$, với p là số nguyên tố lẻ

7.7. Với số nguyên dương n nào thì $\Phi(n)$ lẻ?

7.8. Với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $\Phi(n^m) = n^{m-1}\Phi(n)$.

7.9. Tìm ba số nguyên dương n để $\Phi(n) = 16$.

7.10. Với số nguyên dương nào của n thì $\Phi(n)$ là lũy thừa của 2?

7.11. Với số nguyên dương nào của n thì 4 là ước của $\Phi(n)$?

7.2 Nguyên lý bù trừ tổng quát

Định lý 7.2 (Nguyên lý bù trừ tổng quát). *Với* $0 \leq m \leq n$*, số phần tử thỏa mãn đúng m điều kiện trong* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *là*

$$E_m = N_m - \binom{m+1}{1} N_{m+1} + \binom{m+2}{2} N_{m+2} - \cdots + (-1)^r \binom{m+r}{r} N_{m+r} + \cdots + \\ + (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} N_n.$$

Trường hợp $m = 0$*, ta có Định lý 7.1.*

Chứng minh. □

Hệ quả 7.1. *Số phần tử thỏa mãn ít nhất m điều kiện trong n điều kiện*

$$L_m = N_m - \binom{m}{m-1} N_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} N_{m+2} + \cdots + (-1)^r \binom{m+r-1}{m-1} N_{m+r} + \cdots + \\ + (-1)^{n-m} \binom{n-1}{m-1} N_n.$$

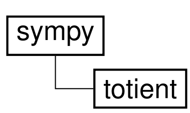
Chứng minh. content... □

7.3 Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí

7.4 Đa thức rook

7.5 Sắp xếp có vị trí bị cấm

7.6 Tóm tắt



7.7 Bài tập bổ sung

7.12. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 500 không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, 6, 8, 10?

7.13. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số không quá 37?

7.14. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh nếu $\Phi(n) = n - 1$ thì n nguyên tố.

7.15. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh

a) $\Phi(2n) = 2\Phi(n)$ nếu n chẵn

b) $\Phi(2n) = \Phi(n)$ nếu n lẻ

7.16. Cho $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $d = \gcd(m, n)$. Chứng minh $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)\dfrac{d}{\Phi(d)}$.

Tài liệu tham khảo

[1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: https://numpy.org/doc/stable.

[2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. phiên bản 6. Pearson, 2022. 755 trang.

[3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.

[4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. phiên bản 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.

[5] Thomas Koshy. *Catalan Numbers with Applications*. Oxford University Pres, 2009. 439 trang.

[6] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. phiên bản 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.

[7] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. phiên bản 3. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.

[8] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. phiên bản 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.

[9] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: https://github.com/sympy/sympy/releases.