

Mục lục

I	Cơ sở của Toán rời rạc	1
1	Nguyên lý đếm cơ bản	2
1.1	Quy tắc cộng, nhân	2
1.2	Biểu đồ cây	13
1.3	Hoán vị, chỉnh hợp	14
1.4	Tổ hợp	23
1.5	Hoán vị lặp	31
1.6	Tổ hợp lặp	39
1.7	Sinh các hoán vị và tổ hợp	47
1.8	Số Catalan (đang cập nhật)	52
1.9	Tóm tắt	56
2	Nguyên lý cơ bản của logic	63
2.1	Phép toán cơ bản và bảng chân lý	63
2.2	Tương đương logic: luật logic	69
2.3	Kéo theo logic: quy tắc suy luận	77
2.4	Lượng từ: tình huống sử dụng	83
2.5	Lượng từ: chứng minh định lý	92
2.6	Tóm tắt	95
3	Lý thuyết tập hợp	97
3.1	Tập và tập con	97
3.2	Phép toán tập hợp và quy luật	108
3.3	Phép đếm và biểu đồ Venn	119
3.4	Tóm tắt	122
4	Tính chất của số nguyên: quy nạp toán học	125
4.1	Nguyên lý sắp tốt: quy nạp toán học	125

4.2	Định nghĩa đệ quy	138
4.3	Thuật toán chia: số nguyên tố	146
4.4	Ước chung lớn nhất: thuật toán Euclid	150
4.5	Định lý cơ bản của số học	159
4.6	Biểu diễn số nguyên và thuật toán	164
4.7	Tóm tắt Python	169
5	Quan hệ: hàm	173
5.1	Tích Descartes và quan hệ	173
5.2	Biểu diễn quan hệ	180
5.3	Hàm: đơn ánh	182
5.4	Toàn ánh: số Stirling loại II	193
5.5	Hàm đặc biệt	199
5.6	Nguyên lý chuồng bồ câu	204
5.7	Hàm hợp và hàm ngược	208
5.8	Độ phức tạp tính toán	216
5.9	Phân tích thuật toán	220
6	Quan hệ: hướng tiếp cận thứ hai	225
6.1	Quan hệ: thuộc tính và phép toán	225
6.2	Kiểm tra thuộc tính của quan hệ	234
6.3	Thứ tự bộ phận: biểu đồ Hasse	238
6.4	Quan hệ tương đương và phân hoạch	245
6.5	Bao đóng của quan hệ	247
II	Các phép đếm nâng cao	251
7	Nguyên lý bù trừ	252
7.1	Nguyên lý bù trừ	252
7.2	Nguyên lý bù trừ tổng quát	261
7.3	Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí	261
7.4	Đa thức rook	261
7.5	Sắp xếp có vị trí bị cấm	261
7.6	Tóm tắt	261
7.7	Bài tập bổ sung	262

8 Hàm sinh	262
8.1 Ví dụ mở đầu	264
8.2 Định nghĩa và ví dụ: kỹ thuật tính	267
8.3 Phân hoạch số nguyên	282
8.4 Hàm sinh mũ	287
8.5 Toán tử tổng	292
9 Hệ thức đệ quy	298
9.1 Định nghĩa	299
9.2 Python	300
9.3 Hệ thức đệ quy tuyến tính cấp một	302
9.4 Hệ thức đệ quy tuyến tính thuần nhất hệ số hằng	317
9.5 Hệ thức đệ quy tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng	334
9.6 Phương pháp tính tổng	338
9.7 Phương pháp hàm sinh	338
9.8 Hệ thức đệ quy phi tuyến đặc biệt	345
9.9 Thuật toán chia để trị	347
III Lý thuyết đồ thị và ứng dụng	354
10 Mở đầu về lý thuyết đồ thị	355
10.1 Định nghĩa và ví dụ	355
10.2 Đồ thị con, phần bù và đẳng cấu đồ thị	357
10.3 Bậc của đỉnh: đường và chu trình Euler	358
10.4 Đồ thị phẳng	361
10.5 Đường và chu trình Hamilton	362
10.6 Tô màu đồ thị và đa thức sắc độ	363
11 Cây	364
11.1 Định nghĩa, tính chất, và ví dụ	364
11.2 Cây có gốc	365
11.3 Cây và sắp xếp	371
11.4 Cây có trọng số và mã tiền tố	371
11.5 Các thành phần liên thông và điểm nối	376

12 Tối ưu và tìm kiếm	377
12.1 Thuật toán đường đi ngắn nhất Dijkstra	377
12.2 Cây bao trùm nhỏ nhất: thuật toán Kruskal, Prim	377
12.3 Mạng vận tải: định lý Max-Flow Min-Cut	377
12.4 Lý thuyết tìm kiếm	377
 IV Đại số hiện đại ứng dụng	 378
13 Vành và số học đồng dư	379
13.1 Cấu trúc vành: định nghĩa và ví dụ	379
13.2 Tính chất vành và vành con	385
13.3 Vành các số nguyên modulo n	388
13.4 Đồng cấu và đẳng cấu nhóm, vành	394
13.5 Định lý phần dư Trung Quốc	395
13.6 Mã hóa khóa công khai: Giới thiệu	398
13.7 Mã hóa khóa công khai: Phương pháp Rabin	401
13.8 Mã hóa khóa công khai: RSA	406
 14 Nhóm, lý thuyết mã, và phương pháp liệt kê Polya	 413
14.1 Định nghĩa, ví dụ, và tính chất cơ bản	413
14.2 Đồng cấu, đẳng cấu, và nhóm cyclic	414
14.3 Lớp kề và định lý Lagrange	415
14.4 Sơ lược về lý thuyết mã	416
14.5 Khoảng cách Hamming	416
14.6 Ma trận sinh và kiểm tra chẵn lẻ	416
14.7 Nhóm các mã: giải mã với coset leaders	416
14.8 Ma trận Hamming	416
14.9 Phép đếm và sự tương đương: định lý Burnside	416
14.10 Chỉ số chu trình	420
14.11 Định lý liệt kê Polya	420
 15 Trường hữu hạn và thiết kế tổ hợp	 421

Phần II

Các phép đếm nâng cao

Chương 7

Nguyên lý bù trừ

7.1	Nguyên lý bù trừ	252
7.2	Nguyên lý bù trừ tổng quát	261
7.3	Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí	261
7.4	Đa thức rook	261
7.5	Sắp xếp có vị trí bị cấm	261
7.6	Tóm tắt	261
7.7	Bài tập bổ sung	262

7.1 Nguyên lý bù trừ

Trong [Chương 3](#), ta đã nêu hai công thức

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

và gọi là nguyên lý bù trừ cho hai và ba tập.

Định lý 7.1 (Nguyên lý bù trừ). Với các tập hữu hạn A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots +$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

Chứng minh. content...

□

Một dạng khác của nguyên lý bù trừ, được phát biểu dưới dạng bài toán đếm. Trong tập N phần tử đang xét, giả sử A_i là tập con các phần tử có tính chất p_i , $1 \leq i \leq n$. Ký hiệu số phần tử thỏa mãn các điều kiện $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_r}$

$$N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_r}) = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}|.$$

Khi đó, số phần tử thỏa mãn ít nhất một tính chất c_i nào đó là

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} N(c_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(c_i c_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(c_i c_j c_k) - \dots + \\ &+ (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_r}) + \dots + (-1)^{n-1} N(c_1 c_2 \dots c_n) \end{aligned}$$

và do đó, số phần tử không thỏa mãn tính chất nào là

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1} \overline{c_2} \dots \overline{c_n}) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \\ &= N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(c_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(c_i c_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(c_i c_j c_k) + \dots + \\ &+ (-1)^r \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_r}) + \dots + (-1)^n N(c_1 c_2 \dots c_n) \end{aligned}$$

Ký hiệu

$$N_0 = N$$

$$N_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} N(c_i)$$

$$N_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(c_i c_j)$$

$$N_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(c_i c_j c_k), \dots$$

$$N_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n} N(c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_r}), \dots$$

$$N_n = N(c_1 c_2 \dots c_n)$$

với N_r là tổng của $\binom{n}{r}$ số hạng. Ta có

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \dots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \dots + (-1)^n N_n.$$

Trong phần [tổ hợp lặp](#), [trang 42](#), ta đã đếm các nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$ với điều kiện chặn dưới của các biến. Nếu có một biến bị chặn trên, chẳng hạn $x_1 \leq a_1$, thì theo [Phần 3.3](#) ở [trang 119](#), ta đếm gián tiếp các nghiệm này thông qua tập bù của nó, tức là tập nghiệm thỏa mãn $x_1 > a_1$. Trường hợp nhiều biến bị chặn trên, ta dùng nguyên lý bù trừ để đếm các nghiệm này.

Ví dụ 7.1. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn

a) $x_i \leq 7, 1 \leq i \leq 4.$

b) $x_1 < 4, x_2 < 6, x_3 \leq 10, x_4 > 2.$

Giải. a) Ngoài tính không âm của các nghiệm, xét điều kiện c_i là $x_i > 7, 1 \leq i \leq 4$, hay $x_i \geq 8$. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \overline{c_4}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4$$

trong đó

i) $N_0 = N$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$, bằng

$$\binom{4 + 25 - 1}{25} = 3276.$$

ii) $N(c_i)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ sao cho $x_i \geq 8$, bằng $\binom{4 + (25 - 8) - 1}{25 - 8} = 1140$, với $1 \leq i \leq 4$. Vì

$N_1 = \sum_{1 \leq i \leq 4} N(c_i)$ gồm $\binom{4}{1}$ số hạng bằng nhau nên

$$N_1 = \binom{4}{1} \times 1140 = 4560.$$

iii) $N(c_i c_j)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ thỏa mãn $x_i \geq 8$ và $x_j \geq 8$, với $1 \leq i < j \leq 4$, bằng $\binom{4 + (25 - 8 - 8) - 1}{25 - 8 - 8} = 220$. Suy ra

$$N_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} N(c_i c_j) = \binom{4}{2} \times 220 = 1320.$$

và tiếp theo tương tự

iv) $N(c_i c_j c_k) = \binom{4 + (25 - 8 - 8 - 8) - 1}{25 - 8 - 8 - 8} = 4$, suy ra

$$N_3 = \binom{4}{3} \times 4 = 16.$$

v) $N_4 = 0$.

$$\text{Do đó } N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \overline{c_4}) = 3276 - 4560 + 1320 - 16 + 0 = 20.$$

- b) Trong các nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ với $x_4 > 2$, hay $x_4 \geq 3$, xét các điều kiện c_1, c_2, c_3 lần lượt là $x_1 \geq 4, x_2 \geq 6, x_3 \geq 11$. Cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

trong đó

- i) $N_0 = N$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ với $x_4 \geq 3$, bằng $\binom{4 + (25 - 3) - 1}{25 - 3} = 2300$.

- ii) $N(c_1)$ là số nghiệm nguyên không âm của $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25, x_4 \geq 3$ sao cho $x_1 \geq 4$, bằng $\binom{4 + (25 - 3 - 4) - 1}{25 - 3 - 4} = 1330$. Tương tự

$$N(c_2) = \binom{4 + (25 - 3 - 6) - 1}{25 - 3 - 6} = 969, N(c_3) = \binom{14}{11} = 364. \text{ Ta có}$$

$$N_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) = 2663.$$

$$\text{iii) } N_2 = N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + N(c_2 c_3) = \binom{15}{12} + \binom{10}{7} + \binom{8}{5} = 631.$$

$$\text{iv) } N_3 = N(c_1 c_2 c_3) = \binom{4}{1} = 4.$$

$$\text{Nhu vậy, } N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3}) = 2300 - 2663 + 631 - 4 = 264.$$

□

Định nghĩa 7.1. Cho số nguyên dương n . Hàm Euler phi, ký hiệu $\Phi(n)$, là số các số nguyên từ 1 tới n và nguyên tố cùng nhau với n .

Chẳng hạn, $\Phi(2) = 1, \Phi(3) = 2, \Phi(4) = 2, \Phi(5) = 4, \Phi(6) = 2$.

```
1 from sympy import *
2 totient(6) # → 2
```

Nếu p nguyên tố, thì $\Phi(p) = p - 1$. Tổng quát

Cho số nguyên dương $n \geq 2$. Theo [định lý cơ bản của số học](#), n có phân tích $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ trong đó p_i là số nguyên tố, $e_i \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq i \leq k$. Khi đó

$$\Phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Chứng minh. Với phân tích nguyên tố này của n , một số nguyên dương m nguyên tố cùng nhau với n nếu p_i không là ước m , $1 \leq i \leq k$.

Trong các số m từ 1 tới n xét điều kiện

$$c_i : p_i \text{ là ước của } m.$$

và cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \cdots \overline{c_k}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^k N_k$$

trong

$$\text{i) } N_0 = n$$

$$\text{ii) } N_1 = \sum_{1 \leq i \leq k} N(c_i) = \sum_{1 \leq i \leq k} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{n}{p_i}$$

iii) $N(c_i c_j)$, $1 \leq i < j \leq k$, là số các số từ 1 tới n là bội của p_i và p_j , tức là bội của $\text{lcm}(p_i, p_j)$. Mặt khác, p_i, p_j là các số nguyên tố khác nhau, nên $\text{lcm}(p_i, p_j) = p_i p_j$. Suy ra $N(c_i c_j) = \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor = \frac{n}{p_i p_j}$. Ta có

$$N_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} N(c_i c_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{n}{p_i p_j}$$

iv) Tương tự

$$N_3 = \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} N(c_i c_j c_l) = \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} \frac{n}{p_i p_j p_l}, \dots$$

$$N_r = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k} N(c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_r}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}}, \dots$$

$$N_k = N(c_1 c_2 \cdots c_k) = 1 = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

Các số hạng này có thừa số chung là n , nên

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1} \overline{c_2} \cdots \overline{c_k}) &= n \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{1 \leq i < j < l \leq k} \frac{1}{p_i p_j p_l} + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq k} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_r}} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k} \right) \\ &= n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i} \right) \end{aligned}$$

□

Trong [Phần 5.4](#), ta thừa nhận trước công thức đếm số toàn ánh. Bây giờ ta sẽ chứng minh công thức đó.

Số toàn ánh từ tập A cỡ m vào B cỡ n là

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{n-k} (n-k)^m \\ &= \binom{n}{n} n^m - \binom{n}{n-1} (n-1)^m + \binom{n}{n-2} (n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} 2^m + \\ &\quad + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 1^m. \end{aligned}$$

Chứng minh. Nhắc lại định nghĩa, một toàn ánh từ A vào B là một hàm sao cho mỗi phần tử của B đều có tạo ảnh. Giả sử $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, xét điều kiện

$$c_i : \quad b_i \text{ không có tạo ảnh}$$

thì ta cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n,$$

trong đó

- i) N_0 là số hàm từ tập A cỡ m vào tập B cỡ n , bằng n^m .
- ii) $N(c_i)$, $1 \leq i \leq n$, là số hàm từ A vào B , sao cho b_i không có tạo ảnh. Mỗi hàm như vậy tương ứng với hàm từ A cỡ m vào $B - \{b_i\}$ cỡ $n-1$, nên $N(c_i) = (n-1)^m$. Suy ra $N_1 = \binom{n}{1} (n-1)^m$.

$$\text{Tương tự } N_2 = \binom{n}{2} (n-2)^m, \dots, N_k = \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

Thay các kết quả vào công thức của $N(\overline{c_1} \overline{c_2} \cdots \overline{c_n})$, ta được biểu thức cần chứng minh. \square

Ví dụ về bài toán ghép cặp:

Ví dụ 7.2. Cho n hộp đánh số từ 1 đến n , và n vật cũng đánh số từ 1 đến n . Có bao nhiêu cách xếp n vật vào n hộp sao cho mỗi hộp một vật, và không có vật nào vào đúng hộp cùng số với nó.

Giải. Xét điều kiện c_i : vật i xếp vào hộp i , $1 \leq i \leq n$. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \cdots \overline{c_n}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + \cdots + (-1)^n N_n,$$

trong đó

i) N_0 là số cách xếp n vật vào n hộp mà mỗi hộp một vật. Theo quy tắc nhân, $N_0 = n!$

ii) $N(c_i)$ là số cách xếp n vào n hộp sao cho mỗi hộp một vật, và hộp i chứa vật i , bằng $1 \times (n-1)! = (n-1)!$. Suy ra

$$N_1 = \binom{n}{1} (n-1)! = \frac{n!}{1! (n-1)!} (n-1)! = \frac{n!}{1!}$$

iii) Tương tự

$$N_2 = \binom{n}{2} (n-2)! = \frac{n!}{2!} \quad N_r = \binom{n}{r} (n-r)! = \frac{n!}{r!}, \dots$$

$$N_3 = \binom{n}{3} (n-3)! = \frac{n!}{3!}, \dots \quad N_n = 1$$

Các số hạng có thừa số chung là $n!$ nên

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \dots \overline{c_n}) = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$

□

Theo ví dụ trên, xác suất để không có vật nào xếp vào đúng hộp là

$$p_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

chính là khai triển Maclaurin tới cấp n của e^x tại $x = -1$, xem [James-Stewart].

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = e^{-1}.$$

Tương tự phương pháp tìm số Euler phi, xét ví dụ sau

Ví dụ 7.3. Từ 1 đến 100 có bao nhiêu số không chia hết cho số nào trong ba số 4, 6, và 10.

Giải. Trong các số nguyên m từ 1 đến 100, xét điều kiện

- 1) c_1 : m là bội của 4 2) c_2 : m là bội của 6 3) c_3 : m là bội của 10

thì ta cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3$$

trong đó

i) $N_0 = 100$

ii) $N_1 = N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) = \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 51$

iii) $N(c_1 c_2)$ là số các số từ 1 đến 100 chia hết cho cả 4 và 6, tức là chia hết cho $\text{lcm}(4, 6) = 12$. Vì thế

$$N_2 = \left\lfloor \frac{100}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{20} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 16$$

iv) $N_3 = N(c_1 c_2 c_3) = \left\lfloor \frac{100}{\text{lcm}(4, 6, 10)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{60} \right\rfloor = 1.$

Do đó $N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3}) = 100 - 51 + 16 - 1 = 64.$ □

Ví dụ 7.4. Có bao nhiêu hoán vị của 26 chữ cái, sao cho trong đó không xuất hiện từ HUCE, IT, AM, và PS.

Giải. Ký hiệu c_1, c_2, c_3, c_4 lần lượt là điều kiện cho biết hoán vị chứa từ HUCE, IT, AM, và PS. Ta cần tính

$$N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \overline{c_4}) = N_0 - N_1 + N_2 - N_3 + N_4,$$

trong đó

i) N_0 là số hoán vị của 26 chữ cái, bằng $26!$

ii) $N(c_1)$ là số hoán vị của các 23 vật HUCE, A, B, D, F, ..., Z, bằng $23!$. Tương tự, $N(c_2) = N(c_3) = N(c_4) = 25!$. Suy ra $N_1 = 23! + 3 \cdot 25!$

iii) $N(c_1 c_2)$ là số hoán vị của các vật HUCE, IT, A, B, D, ..., bằng $22!$. Tương tự, $N(c_1 c_3) = N(c_1 c_4) = 22!$, $N(c_2 c_3) = N(c_2 c_4) = N(c_3 c_4) = 24!$. Suy ra $N_2 = 3 \cdot 22! + 3 \cdot 24!$

iv) $N(c_1 c_2 c_3) = N(c_1 c_2 c_4) = N(c_1 c_3 c_4) = 21!$, $N(c_2 c_3 c_4) = 23!$. Ta được $N_3 = 3 \cdot 21! + 23!$

v) $N_4 = N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 20!$

Do đó

$$\begin{aligned} N(\overline{c_1} \overline{c_2} \overline{c_3} \overline{c_4}) &= 26! - (23! + 3 \cdot 25!) + (3 \cdot 22! + 3 \cdot 24!) - (3 \cdot 21! + 23!) + 20! \\ &= 147\,383\,944 \cdot 20! \end{aligned}$$

□

Bài tập 7.1

7.1. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 2022

- a) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5. b) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, 7.
c) không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, nhưng chia hết cho 7.

7.2. Có bao nhiêu nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ thỏa mãn

- a) $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$ b) $0 \leq x_i < 8, 1 \leq i \leq 4$
c) $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 0 \leq x_3 \leq 7, 0 \leq x_4 \leq 8$
d) $-5 \leq x_i \leq 10, 1 \leq i \leq 4$

7.3. Đếm các số nguyên dương $x \leq 9\,999\,999$ sao cho tổng các chữ số của x bằng 31.

7.4. Đếm các hoán vị của các chữ cái a, b, c, \dots, z không chứa mọi từ *spin, game, path, net*.

7.5. Tính $\Phi(n)$ với n bằng

- a) 51 b) 420 c) d) 5186 e) 5187 f) 5188
12300

7.6. Cho $n \in \mathbb{Z}^+$. Xác định

- a) $\Phi(2^n)$ b) $\Phi(2^np)$, với p là số nguyên tố lẻ

7.7. Với số nguyên dương n nào thì $\Phi(n)$ lẻ?

7.8. Với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh $\Phi(n^m) = n^{m-1}\Phi(n)$.

7.9. Tìm ba số nguyên dương n để $\Phi(n) = 16$.

7.10. Với số nguyên dương nào của n thì $\Phi(n)$ là lũy thừa của 2?

7.11. Với số nguyên dương nào của n thì 4 là ước của $\Phi(n)$?

7.2 Nguyên lý bù trừ tổng quát

Định lý 7.2 (Nguyên lý bù trừ tổng quát). Với $0 \leq m \leq n$, số phần tử thỏa mãn đúng m điều kiện trong c_1, c_2, \dots, c_n là

$$E_m = N_m - \binom{m+1}{1} N_{m+1} + \binom{m+2}{2} N_{m+2} - \dots + (-1)^r \binom{m+r}{r} N_{m+r} + \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{n-m} N_n.$$

Trường hợp $m = 0$, ta có **Định lý 7.1**.

Chứng minh. □

Hệ quả 7.1. Số phần tử thỏa mãn ít nhất m điều kiện trong n điều kiện

$$L_m = N_m - \binom{m}{m-1} N_{m+1} + \binom{m+1}{m-1} N_{m+2} - \dots + (-1)^r \binom{m+r-1}{m-1} N_{m+r} + \dots + (-1)^{n-m} \binom{n-1}{m-1} N_n.$$

Chứng minh. content... □

7.3 Sắp xếp: không vật nào đúng vị trí

7.4 Đa thức rook

7.5 Sắp xếp có vị trí bị cấm

7.6 Tóm tắt

sympy

totient

7.7 Bài tập bổ sung

7.12. Có bao nhiêu số nguyên từ 1 đến 500 không chia hết cho mọi số 2, 3, 5, 6, 8, 10?

7.13. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số không quá 37?

7.14. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh nếu $\Phi(n) = n - 1$ thì n nguyên tố.

7.15. Với $n \in \mathbb{Z}^+$, chứng minh

a) $\Phi(2n) = 2\Phi(n)$ nếu n chẵn

b) $\Phi(2n) = \Phi(n)$ nếu n lẻ

7.16. Cho $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $d = \gcd(m, n)$. Chứng minh $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)\frac{d}{\Phi(d)}$.

Tài liệu tham khảo

- [1] NumPy community. *NumPy User Guide*. phiên bản 1.22.4. 535 trang. URL: <https://numpy.org/doc/stable>.
- [2] Judi J. McDonald David C. Lay Steven R. Lay. *Linear Algebra and Its Applications*. In lần thứ 6. Pearson, 2022. 755 trang.
- [3] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction*. In lần thứ 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 992 trang.
- [4] Ralph P. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics: Instructor's Solutions Manual*. In lần thứ 5. Pearson Addison-Wesley, 2004. 465 trang.
- [5] Thomas Koshy. *Catalan Numbers with Applications*. Oxford University Pres, 2009. 439 trang.
- [6] Kenneth H. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. In lần thứ 8. McGraw-Hill Education, 2019. 1118 trang.
- [7] Edward R. Scheinerman. *Mathematics: A Discrete Introduction*. In lần thứ 3. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013. 506 trang.
- [8] Watson S. Stewart J. Clegg D. *Calculus: Early Transcendentals*. In lần thứ 9. Cengage Learning, 2011. 1421 trang.
- [9] SymPy Development Team. *SymPy Documentation*. phiên bản 1.8. 2750 trang. URL: <https://github.com/sympy/sympy/releases>.

