Mục lục

Chương 2

Đại lượng ngẫu nhiên

2.1 Khái niệm

2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Đại lượng ngẫu nhiên là đại lượng nhận các giá trị nào đó với xác suất tương ứng.*

Ký hiệu: $X, Y, Z, \ldots$

$\mathrm{Im}X$ = tập tất cả giá trị mà X có thể nhận.

Ví dụ 2.1. Xét phép thử: tung xúc sắc. Đặt X là số chấm xuất hiện. Ta có

$$\mathrm{Im}X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Biến cố ngẫu nhiên

$$\{\text{xuất hiện mặt 2 chấm}\} = \{\text{số chấm xuất hiện là 2}\} = \{X = 2\}$$

có xác suất

$$P(X = 2) = \frac{1}{6}.$$

2.1.2 Đại lượng ngẫu nhiên rời rạc

Định nghĩa 2.2. *X gọi là rời rạc* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}X$ *hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.*

Luật phân bố của đại lượng ngẫu nhiên rời rạc được cho bởi bảng phân bố xác suất

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

hay

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,X &= \{x_1, x_2, \ldots\} \\ P(X = x_i) &= p_i \ \forall i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Tính chất:

a)

$$p_i \geq 0 \ \forall i, \ \text{và} \ \sum_i p_i = 1. \tag{2.2}$$

b) $\forall A \subset \mathbb{R}$:

$$P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p_i. \tag{2.3}$$

Ví dụ 2.2. Trong hộp có 3 bi đen và 2 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi.

a) Lập bảng phân bố xác suất của số bi đen lấy được.

b) Vẽ biểu đồ cột mô tả bảng phân bố trên.

Giải. a) X = số bi đen lấy được.

$\mathrm{Im}X = \{0, 1, 2\}$.

$P(X = 0) = P\left(\text{lấy được 2 bi trắng}\right) = \dfrac{1}{C_5^2} = \dfrac{1}{10}$.

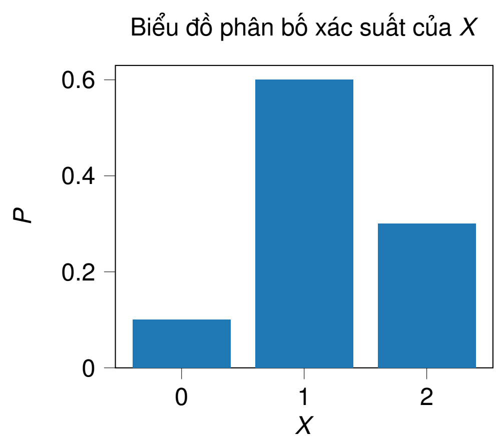
$P(X = 1) = P\left(\text{lấy được 1 bi đen, 1 bi trắng}\right) = \dfrac{3 \cdot 2}{C_5^2} = \dfrac{6}{10}$.

$P(X = 2) = P\left(\text{lấy được 2 bi đen}\right) = \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = \dfrac{3}{10}$.

Kết luận:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

b)




```python
import matplotlib.pyplot as plt  # plt là tên thay thế

X = [0, 1, 2]
P = [1/10, 6/10, 3/10]

X_pos = range(len(X)) # hoành độ đặt các cột

plt.figure(figsize=(5, 4))
plt.bar(X_pos, P)
plt.xticks(X_pos, X)
```

```
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('P')
plt.title('Biểu đồ phân bố xác suất của X')
```

□

2.1.3 Đại lượng ngẫu nhiên liên tục

X liên tục $\Leftrightarrow$ ImX chứa khoảng số thực.
Luật phân bố của X được cho bởi hàm mật độ xác suất $f(x)$:

a) $f(x) \geq 0 \ \forall x$.

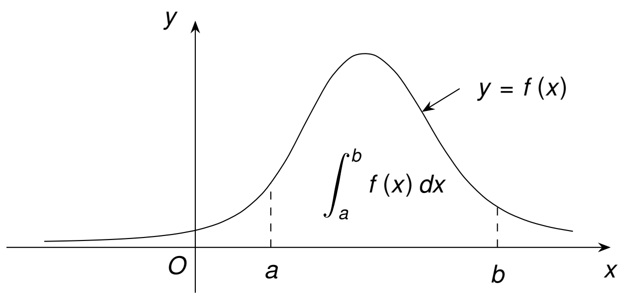
b) $\forall -\infty \leq a < b \leq \infty$: $P(a < X < b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Hệ quả:

a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{2.4}$$

b) $P(X = x_0) = 0 \ \forall x_0$. Do đó

$$P(a \underset{\leq}{<} X \underset{\leq}{<} b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.5}$$



Chú ý: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ không đổi khi đổi giá trị của $f(x)$ tại một số đếm được các giá trị của x.

Ví dụ 2.3. Cho X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} kx^2(1-x) & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1]. \end{cases}$

a) Tìm k.

b) Tính $P\left(X \geq \dfrac{1}{2}\right)$.

Giải. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{k}{12} = 1 \Rightarrow k = 12.$

b) $P\left(X \geq \dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,dx = \dfrac{11}{16}.$

```
from sympy import *
x, k = symbols('x k')
# Khai báo hàm số f(x)
f = lambda x: Piecewise( (k * x**2 * (1-x), (0 <= x) & (x <= 1)),
    (0, True) )

f(x).integrate((x, -oo, oo))  # -oo → ∞

k = 12
f(x).integrate((x, Rational(1, 2), oo))
```

□

Bài tập 2.1

2.1. Trong hộp có 8 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên 5 bi. Hãy viết phân bố xác suất của X = số bi đỏ trong 5 bi lấy ra.

2.2 Hàm phân bố xác suất

2.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.3. *Hàm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X:*

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i < x} p_i \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \end{cases} \tag{2.6}$$

Nếu f liên tục tại x thì

$$F'(x) = f(x). \tag{2.7}$$

2.2.2 Tính chất

a) $0 \leq F(x) \leq 1\ \forall x$.

b) $F(x) \leq F(y)\ \ \forall x < y$.

c) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

d) $F(x)$ liên tục trái trên $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a^-} F(x) = F(a),\ \forall a$.

e)

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{2.8}$$

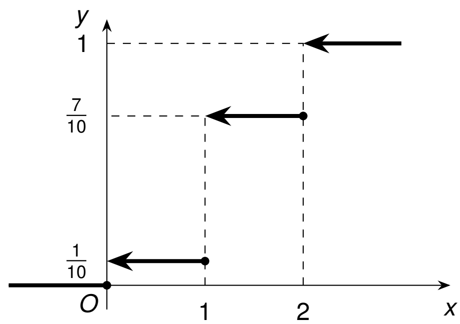
Ví dụ 2.4. Cho X có bảng phân bố

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

. Tìm hàm phân bố của X và vẽ đồ thị.

Giải.

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \le 0 \\ \frac{1}{10}, & \text{nếu } 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{6}{10}, & \text{nếu } 1 < x \le 2 \\ 1, & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$




```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 101

x = np.linspace(-1, 0, num=n)  # 101 điểm chia đều đoạn [−1,0] thành 100 đoạn
y = 0*x
plt.plot(x, y)

x = np.linspace(0, 1, num=n)
y = 1/10 + 0*x
plt.plot(x, y)

x = np.linspace(1, 2, num=n)
y = 7/10 + 0*x
plt.plot(x, y)

x = np.linspace(2, 3, num=n)
y = 1 + 0*x
plt.plot(x, y);
```

□

Ví dụ 2.5. Cho X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{nếu } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,2] \end{cases}$. Tìm hàm phân bố của X

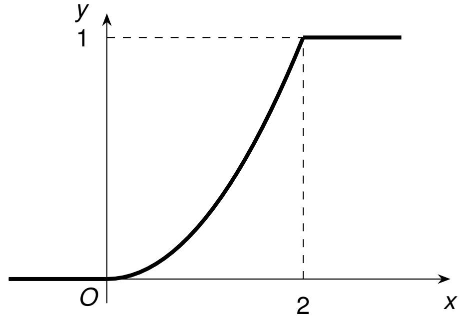
và vẽ đồ thị.

Giải. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = -\dfrac{\min(0,x)^2}{4} + \dfrac{\min(2,x)^2}{4}$. Xét ba trường hợp:

a) $x \leq 0 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} = 0.$

b) $0 < x \leq 2 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{0^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{4}.$

c) $x > 2 \Rightarrow F(x) = -\dfrac{0^2}{4} + \dfrac{2^2}{4} = 1.$




```
from sympy import *
x, t = symbols('x t')

f = lambda x: Piecewise((x/2, (0 <= x) & (x <=2)), (0, True))

F = f(t).integrate((t, -oo, x))

X = np.linspace(-1, 3, num=101)
Y = [F.subs(x, a) for a in X]  # F.subs(x, a) → F(a)

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(X, Y);
```

□

Bài tập 2.2

2.2.

2.3.

2.3 Hàm phụ thuộc đại lượng ngẫu nhiên

Cho X là đại lượng ngẫu nhiên, $y = \varphi(x)$ là hàm số. Tìm luật phân bố của $Y = \varphi(X)$.

2.3.1 Trường hợp X rời rạc

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} Y &= \varphi(\operatorname{Im} X) = \{y = \varphi(x_i) \mid x_i \in \operatorname{Im} X\} \\ P(Y = y) &= P\left[\varphi(X) = y\right] = \sum_{\varphi(x_i)=y} p_i. \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.3.2 Trường hợp X liên tục

$Y = \varphi(X)$ có hàm phân bố

$$G(y) = P(Y < y) = P\left[\varphi(X) < y\right] = \int\limits_{\varphi(x)<y} f(x)\,dx.$$

Giả sử

$$\varphi(x) < y \Leftrightarrow a(y) < x < b(y). \tag{2.10}$$

Nhắc lại công thức đạo hàm của tích phân phụ thuộc tham số. Nếu $G(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx$ thì

$$G'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\,dx + b'(y) f\left[b(y), y\right] - a'(y) f\left[a(y), y\right].$$

Vì $G(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x)\,dx$, nên Y có hàm mật độ

$$\begin{aligned} g(y) = G'(y) &= \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(x)\,dx + b'(y) f\left[b(y)\right] - a'(y) f\left[a(y)\right] \\ &= b'(y) f\left[b(y)\right] - a'(y) f\left[a(y)\right]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

trong đó quy ước $(\pm\infty)' = 0$.

```python
from sympy import *
a, b, f = symbols('a b f', cls=Function)  # khai báo các ký hiệu hàm số
x, y = symbols('x y')

f(x, y).integrate((x, a(y), b(y))).diff()

f(x).integrate((x, a(y), b(y))).diff()
```

Ví dụ 2.6. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có bảng phân bố xác suất

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.2	0.4

Lập bảng phân bố của $Y = X^3 - 3X + 1$.

Giải.

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.2	0.4
$Y = X^3 - 3X + 1$	3	1	-1	3

$\Rightarrow$

Y	P
-1	0.2
1	0.3
3	0.1 + 0.4.

□

Ví dụ 2.7. Cho X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{nếu } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,2] \end{cases}$. Tìm hàm mật độ của $Y = X^3$.

Giải. $x^3 < y \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{y}$. Ta có

$$g(y) = \left(\sqrt[3]{y}\right)' f\left(\sqrt[3]{y}\right) - (-\infty)' f(-\infty) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{y^2}} f\left(\sqrt[3]{y}\right).$$

Xét hai trường hợp:

a) $0 \le \sqrt[3]{y} \le 2 \Rightarrow 0 \le y \le 8$, ta có $f\left(\sqrt[3]{y}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{y}}{2}$. Khi đó

$$g(y) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{y^2}} \frac{\sqrt[3]{y}}{2} = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{y}}.$$

b) $\sqrt[3]{y} \notin [0,2] \Rightarrow y \notin [0,8]$ ta có $f\left(\sqrt[3]{y}\right) = 0 \Rightarrow g(y) = 0$.

Cách 1: hỗ trợ quá trình tính toán thông thường.

```
from sympy import *
y = symbols('y')

( y**Rational(1, 3) ).diff()

_ * y**Rational(1, 3) / 2
```

Cách 2: triển khai theo (2.11).

```
from sympy import *
x, y = symbols('x y')

sol = solve(x**3 - y, x)   # giải phương trình x^3 = y, biến x

a = -oo
b = sol[0]

f = lambda x: Piecewise( (x/2, (0 <= x) & (x <= 2)), (0, True) )

( b.diff() * f(b) - a.diff() * f(a) ).simplify()
```

□

Bài tập 2.3

2.4.

2.5.

2.4 Các đặc trưng số của đại lượng ngẫu nhiên

2.4.1 Kỳ vọng

$$EX = \begin{cases} \sum\limits_i x_i p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx. \end{cases} \tag{2.12}$$

$$E\left[\varphi(X)\right] = \begin{cases} \sum\limits_i \varphi(x_i) p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\,dx. \end{cases} \tag{2.13}$$

Đặc biệt

$$E\left(X^2\right) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^2 p_i \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx. \end{cases} \tag{2.14}$$

Tính chất:

a) $\operatorname{Im} X = \{C\} \Rightarrow \begin{array}{c|c} X & C \\ \hline P & 1 \end{array} \Rightarrow EX \equiv EC = C.$

b) $E(X+Y) = EX + EY.$

c) $E(kX) = k \cdot EX.$

d) X và Y độc lập (đại lượng này nhận giá trị bao nhiêu không ảnh hưởng đến khả năng nhận giá trị của đại lượng kia – xem Chương 3) $\Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY.$

Chú ý: nếu X có phân bố đều trên $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tức là nhận các giá trị với khả năng như nhau:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow EX &= x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + x_n \cdot \frac{1}{n}\\ &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.\end{aligned}$$

Vì vậy trong thực tế, kỳ vọng còn được hiểu là *trung bình* của đại lượng ngẫu nhiên.

2.4.2 Phương sai

$$\begin{aligned}DX &= E\left[(X - EX)^2\right]\\ &= E\left(X^2\right) - (EX)^2.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Tính chất:

a) $DX \geq 0\ \forall X;\ DX = 0 \Leftrightarrow P(X = C) = 1$.

b) $D(kX) = k^2 DX$.

c) X, Y độc lập $\Rightarrow D(X + Y) = DX + DY$.

2.4.3 Độ lệch chuẩn

$$\sigma(X) = \sqrt{DX}. \tag{2.16}$$

Nhận xét: $\sigma(X)$ cùng đơn vị với X, $\sigma(X)$ càng nhỏ thì mật độ các giá trị của X quanh giá trị trung bình EX càng cao.

Ví dụ 2.8.

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

. Tính $EX, DX, \sigma(X)$.

Giải.

- $EX = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$.

- $E\left(X^2\right) = \sum_i x_i^2 p_i = 0^2 \cdot \frac{1}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$

$$\Rightarrow D(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}.$$

- $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Cách 1:

```
from sympy import *
import numpy as np

x = np.array([0, 1, 2])
p = np.array([Rational(1, 10), Rational(6, 10), Rational(3, 10)])

e = x.dot(p)  # tích vô hướng
e2 = (x**2).dot(p)

d = e2 - e**2
e, e2, d

sqrt(d)
```

Cách 2:

```
from sympy import Rational
pmf = {0: Rational(1, 10), 1: Rational(6, 10), 2: Rational(3, 10)
    }

from sympy.stats import FiniteRV, E, variance, std, P
X = FiniteRV('X', pmf)

E(X), variance(X), std(X)

P(X > 1/2)
```

$\square$

Ví dụ 2.9. Cho X có hàm mật độ $f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{nếu } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0,1] \end{cases}$. Tính độ lệch chuẩn của X.

Giải.

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \frac{3}{5}.$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = \frac{2}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}.$$

Cách 1:

```python
from sympy import *
x = symbols('x')

f = lambda x: Piecewise( (12 * x**2 * (1-x), (0 <= x) & (x <= 1))
    , (0, True) )

e = (x * f(x)).integrate((x, -oo, oo))
e2 = (x**2 * f(x)).integrate((x, -oo, oo))
d = e2 - e**2

e, e2, d
sqrt(d)
```

Cách 2:

```python
from sympy import symbols, Piecewise
x = symbols('x')
pdf = Piecewise( (12 * x**2 * (1-x), (0 <= x) & (x <= 1)), (0,
    True) )

from sympy.stats import ContinuousRV, E, variance, std
X = ContinuousRV(x, pdf)
E(X), variance(X), std(X)
```

□

Ví dụ 2.10. Một người chơi trò chơi như sau: tung đồng thời 2 xúc sắc. Nếu đồng thời xuất hiện 2 mặt lục thì được thưởng 14000, chỉ xuất hiện 1 mặt lục được thưởng 4000, còn lại không được thưởng. Mỗi lượt chơi mất 2000. Hỏi trung bình mỗi lượt chơi người đó lãi hay lỗ? bao nhiêu?

Giải. Cần so sánh số tiền thưởng trung bình với 2000.

Đặt X = số tiền thưởng.

* $\mathrm{Im}X = \{0, 4000, 14000\}$.

* $P(X = 14000) = P\left(\text{xuất hiện 2 mặt lục}\right) = \dfrac{1}{6 \cdot 6} = \dfrac{1}{36}$.

Có 10 trường hợp xuất hiện một mặt lục: $(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6)$ và ngược lại

$\Rightarrow P(X = 4000) = P\left(\text{xuất hiện 1 mặt lục}\right) = \dfrac{10}{36}$.

$P(X = 0) = 1 - \dfrac{1}{36} - \dfrac{10}{36} = \dfrac{25}{36}$.

Bảng phân bố của X:

X	0	4000	14000
P	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Số tiền thưởng trung bình:

$$EX = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot \frac{25}{36} + 4000 \cdot \frac{10}{36} + 14000 \cdot \frac{1}{36} = 1500 < 2000.$$

Như vậy, trung bình mỗi lượt chơi người đó lỗ $2000 - 1500 = 500$. □

Bài tập 2.4

2.6. Gieo đồng tiền 3 lần. Xác suất xuất hiện mặt sấp ở mỗi lần là 0.5. Gọi X là số lần xuất hiện mặt sấp trong 3 lần gieo.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tìm hàm phân bố $F(x)$.

c) Tìm kỳ vọng và phương sai của X.

2.7. Hai cầu thủ bóng rổ lần lượt ném bóng vào rổ đến khi một người ném lọt rổ thì thôi. Xác suất lọt rổ ở mỗi lần ném của người ném đầu là p_1, của người thứ hai là p_2.

a) Lập bảng phân bố xác suất của số lần ném của người ném đầu.

b) Tính kỳ vọng và phương sai của đại lượng ngẫu nhiên trên.

2.8. Từ một lô sản phẩm gồm 100 chiếc trong đó có 10 phế phẩm, người chọn ngẫu nhiên 5 chiếc để kiểm tra chất lượng.

a) Lập bảng phân bố của số phế phẩm trong mẫu chọn ra.

b) Tính kỳ vọng và phương sai của đại lượng ngẫu nhiên trên.

2.9. Một thiết bị gồm 3 bộ phận hoạt động độc lập với nhau. Xác suất trong khoảng thời gian t, các bộ phận hỏng tương ứng bằng 0.2, 0.3, 0.25. Gọi X là số bộ phận hỏng trong khoảng thời gian t.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tìm hàm phân bố của X.

c) Tính $EX, DX, \sigma(X)$.

2.10. Trong một hộp kín có N quả cầu, trong đó có Np quả đỏ (xác suất lấy được quả đỏ bằng p). Lấy lần lượt từng quả, có hoàn lại, đến khi được M lần quả đỏ. Gọi X là số lần lấy quả cầu.

a) Tìm luật phân bố của X.

b) Tìm EX trong trường hợp $M = 2$.

2.11. Trong một hộp kín có N tấm thẻ được đánh số từ 1 đến N. Rút ngẫu nhiên n thẻ ($1 \leq n < N$). Gọi X là số nhỏ nhất trong các số có mặt trên những thẻ lấy ra. Tìm luật phân bố của X và tính EX.

2.12. Một lớp có 20 sinh viên trong đó có 3 sinh viên giỏi, 8 sinh viên khá, 9 sinh viên trung bình. Chọn ngẫu nhiên 6 sinh viên đi dự đại hội đoàn trường. Hỏi trong 6 sinh viên chọn được trung bình có mấy sinh viên giỏi?

2.13. Một xạ thủ có 6 viên đạn. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ đó là 0.6. Xạ thủ bắn đến khi có 2 viên trúng bia liên tiếp thì dừng. Hỏi trung bình xạ thủ đó còn bao nhiêu viên đạn chưa dùng đến.

2.14. Có hai hộp bi: hộp I có 4 bi đen và 5 bi trắng, hộp II có 4 bi đen và 7 bi trắng. Gieo một xúc sắc đồng chất và đối xứng. Nếu xuất hiện mặt có số chấm lớn hơn 1 thì lấy ngẫu nhiên từ hộp I 2 viên bi, ngược lại thì lấy ngẫu nhiên từ hộp II 2 viên bi. Hỏi trong 2 bi lấy ra, trung bình có mấy bi đen?

2.15. Số khách hàng đến siêu thị trong một ngày là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật Poisson với tham số λ. Một khách hàng đến siêu thị chọn mua sản phẩm của hãng A với xác suất là p. Hỏi trung bình một ngày có bao nhiêu người mua sản phẩm của hãng A tại siêu thị nói trên?

2.16. Hàm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên X có dạng

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \geq a \\ A + B\arcsin\dfrac{x}{a} & \text{nếu } -a < x < a \\ 0 & \text{nếu } x \leq -a. \end{cases}$$

a) Xác định A, B sao cho F liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Tính $P\left(-\dfrac{a}{2} < X < \dfrac{a}{2}\right)$.

c) Tìm mật độ phân bố xác suất của X.

d) Tính $EX, DX, \sigma(X)$.

2.17. Cho đại lượng ngẫu nhiên X có tập giá trị là đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ và hàm mật độ có dạng $p(x) = C\cos x$.

a) Xác định hằng số C.

b) Nếu quan sát X năm lần thì bao nhiêu lần X nhận giá trị trong $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ là có khả năng nhất? Tính xác suất đó.

c) Tính $EX, DX, \sigma(X)$.

2.18. Hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ xác suất tương ứng là

$$f_1(x) = \begin{cases} 2\ln 3 \cdot 3^{-2x} & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{và}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 5e^{-5y} & \text{khi } y \geq 0 \\ 0 & \text{khi } y < 0. \end{cases}$$

Tìm $E(X+Y)$.

2.19. Đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất $f(x) = ae^{4x-x^2}$.

a) Tìm a.

b) Tìm EX, DX.

c) Tính $P(1 < X < 3.5)$.

2.5 Các phân bố xác suất thường gặp

2.5.1 Phân bố nhị thức $X \sim B(n,p)$

Thực hiện phép thử n lần. Trong mỗi lần thử, quan sát sự xảy ra của biến cố A có $P(A) = p$.

Đặt X = số lần A xảy ra. Ta nói X có phân bố nhị thức, ký hiệu $X \sim B(n,p)$:

$$\begin{aligned} &\text{Im}X = \{0, 1, \dots, n\} \\ &P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Để tìm các đặc trưng số của X, ký hiệu

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu } A \text{ xảy ra ở lần thử thứ } i \\ 0, & \text{ngược lại} \end{cases}$$

thì $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Mặt khác, $X_1, X_2, \dots$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập, cùng bảng phân bố

$$\begin{array}{c|cc} X_i & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array} \Rightarrow EX_i = p,\ DX_i = p\,(1-p).$$

Do đó, $EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = np$, $DX = \sum_{i=1}^{n} DX_i = np\,(1-p)$.

Áp dụng: quan sát đại lượng ngẫu nhiên X n lần. Trong mỗi lần, kiểm tra xem $X \in S$ không.

Đặt $A = \{X \in S\}$. Ta có

$$p = P(A) = P(X \in S) = \begin{cases} \sum_{x_i \in S} p_i \\ \int_S f(x)\,dx. \end{cases}$$

Khi đó

a) Xác suất để có k lần thấy $X \in S$ là $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

b) Đặt Y = số lần thấy $X \in S$ = số lần A xảy ra $\Rightarrow Y \sim B(n,p) \Rightarrow EY = np$ là số lần trung bình thấy $X \in S$.

2.5.2 Phân bố Poisson

Đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố Poisson với tham số $\lambda > 0$, ký hiệu $X \sim P_\lambda$, nếu

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}X &= \{0, 1, 2, ...\} \\ P(X = k) &= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Đặc trưng số: $EX = \lambda,\ DX = \lambda$.

Số thông tin thu được trong một đơn vị thời gian có phân bố Poisson.

Cách 1:

```
from sympy import *
l, k = symbols('lambda k')
p = E**(-l) * l**k / factorial(k)

e = Sum( k*p, (k, 0, oo) ).doit()
e2 = Sum( k**2 * p, (k, 0, oo) ).doit()
(e2 - e**2).simplify()
```

Cách 2:

```
from sympy import symbols
l = symbols('lambda')

from sympy.stats import Poisson, E, variance
X = Poisson('X', l)
```

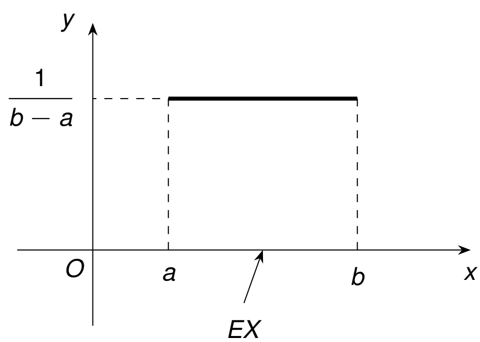
```
E(X)
variance(X)
```

2.5.3 Phân bố đều

Đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố đều trên $[a, b]$, ký hiệu $X \sim U(a, b)$, nếu có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{nếu } x \in [a, b] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{2.19}$$

Đặc trưng số: $EX = \dfrac{a+b}{2}$, $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.



Trong các phần mềm tính toán và lập trình, có hàm (lệnh) tạo số thực ngẫu nhiên trên $[a, b]$. Đó là các đại lượng ngẫu nhiên có phân bố đều.

Cách 1:

```
from sympy import *
x, a, b = symbols('x a b')
e = ( x * 1/(b-a)).integrate((x, a, b)).simplify()

e2 = ( x**2 * 1/(b-a)).integrate((x, a, b)).simplify()
(e2 - e**2).simplify().factor()
```

Cách 2:

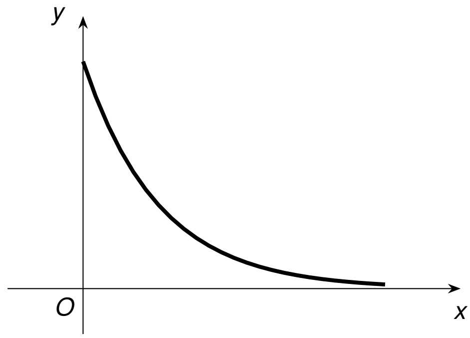
```
from sympy import symbols
x, a, b = symbols('x a b')

from sympy.stats import Uniform, E, variance
X = Uniform('x', a, b)

E(X).factor()
variance(X).factor()
```

2.5.4 Phân bố mũ

Đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố mũ với tham số $\lambda > 0$, ký hiệu $X \sim \varepsilon_\lambda$, nếu có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leq 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

Đặc trưng số: $EX = \dfrac{1}{\lambda}$, $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$.



Tuổi thọ của các thiết bị, các sinh vật được xem gần đúng là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố mũ.

Cách 1:

```
from sympy import *
l = symbols('lambda', positive=True)
x = symbols('x')

e = (x * l * E**(-l*x)).integrate((x, 0, oo))

e2 = (x**2 * l * E**(-l*x)).integrate((x, 0, oo))
e2 - e**2
```

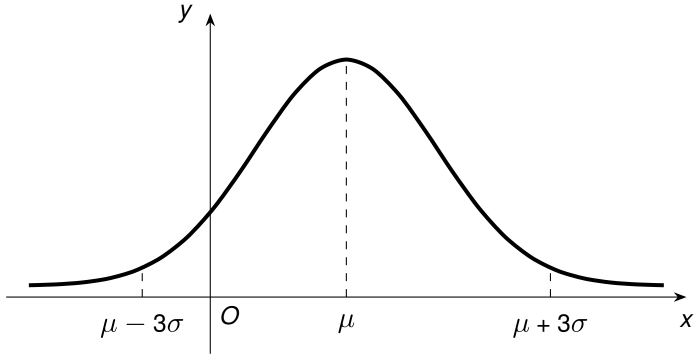
Cách 2:

```
from sympy import symbols
l = symbols('lambda', positive=True)

from sympy.stats import Exponential, P, E, variance, std
X = Exponential('x', l)

E(X)
variance(X)
std(X)
P(X > 1)
```

2.5.5 Phân bố chuẩn

Đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố chuẩn với tham số μ và σ^2, ký hiệu $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, nếu có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ \forall x. \tag{2.21}$$



Quy tắc 3σ: $P\left(|X-\mu| < 3\sigma\right) \approx 0.9973$.

Khi $\mu = 0, \sigma = 1$: $X \sim N(0,1)$ gọi là phân bố chuẩn tiêu chuẩn có:

a) hàm mật độ $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ \forall x.$

b) hàm phân bố $\Phi(x) = P(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

có tính chất

$$\varphi(x) = \varphi(-x), \ \Phi(x) + \Phi(-x) = 1.$$

Tính chất:

a) Nếu $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ thì

1) $EX = \mu, \ DX = \sigma^2 \Rightarrow \sigma(X) = \sigma.$
2) $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$
3) $aX + b \sim N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right).$

b) Nếu $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, và độc lập, thì $\sum X_i \sim N\left(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2\right)$.

```python
from sympy import symbols
m = symbols('mu')
s = symbols('sigma', positive=True)

from sympy.stats import Normal, E, variance, std
X = Normal('x', m, s)
```

```
E(X)          # μ
variance(X)   # σ^2
std(X)        # σ
```

Ví dụ 2.11. a) $\Phi(0.53) = P(X < 0.53) = 0.7019$, trong đó $X \sim N(0,1)$.

b) Nếu $Y \sim N\left(1, 3^2\right)$, thì $P(2 < Y \leq 5) = 0.2782$.

```
from sympy.stats import Normal, P

X = Normal('x', 0, 1)
P(X < 0.53)

Y = Normal('y', 1, 3)

from sympy import N
N( (P((Y > 2) & (Y <= 5)), 4 )
```

Bài tập 2.5

2.20. Trong ca làm việc, một máy tự động sản xuất được 100 sản phẩm. Xác suất để một sản phẩm là phế phẩm là 0.02. Giả sử quá trình sản xuất các sản phẩm là độc lập với nhau.

a) Tìm luật phân bố xác suất của số phế phẩm trong ca.

b) Trung bình trong ca có bao nhiêu phế phẩm.

c) Tính xác suất để số phế phẩm bé hơn 3.

2.21. Giả sử số tai nạn giao thông trong một ngày ở một thành phố B là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố Poisson và trung bình trong một ngày số tai nạn giao thông trong thành phố bằng 5.
Tìm xác suất để trong 4 ngày (lấy ngẫu nhiên) có 3 ngày mà số tai nạn xảy ra trong mỗi ngày lớn hơn 4.

2.22. Chiều cao của nam giới trưởng thành (tính bằng cm) ở một thành phố là đại lượng ngẫu nhiên $X \sim N(160, 36)$. Tìm xác suất để khi lấy ngẫu nhiên 4 nam thì có ít nhất một người có chiều cao trong khoảng $(158, 162)$.

2.23. Đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố Poisson với kỳ vọng bằng 3.

a) Tìm xác suất để trong 6 lần quan sát độc lập giá trị của X thì có ít nhất một lần thấy giá trị của X không bé hơn 1.

b) Trong 100 lần quan sát giá trị của X, trung bình có bao nhiêu lần thấy giá trị của X lớn hơn 3?

2.24. Cho hình tròn tâm O bán kính R và một lục giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp hình tròn. Lấy ngẫu nhiên và độc lập 6 lần, mỗi lần một điểm trong hình tròn.

a) Tìm xác suất để có ít nhất 2 lần lấy được điểm nằm trong lục giác đều.

b) Trong 6 lần lấy ngẫu nhiên và độc lập, trung bình có bao nhiêu lần lấy được điểm nằm trong lục giác đều.

2.25. Khối lượng của các tấm bê tông đúc sẵn cùng một loại là một đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ với $\mu = 75$kg và $\sigma^2 = 4$kg^2. Trong 300 tấm bê tông lấy ngẫu nhiên, trung bình có bao nhiêu tấm có khối lượng lớn hơn 73kg?

2.26. Giả sử thời gian, ký hiệu X, để một loại xe chạy từ A đến B là một đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với $EX = 180$ phút và $\sigma(X) = 10$ phút. Tìm xác suất để trong 12 chuyến xe chạy từ A đến B có ít nhất 3 chuyến có thời gian chạy lớn hơn 175 phút và bé hơn 200 phút.

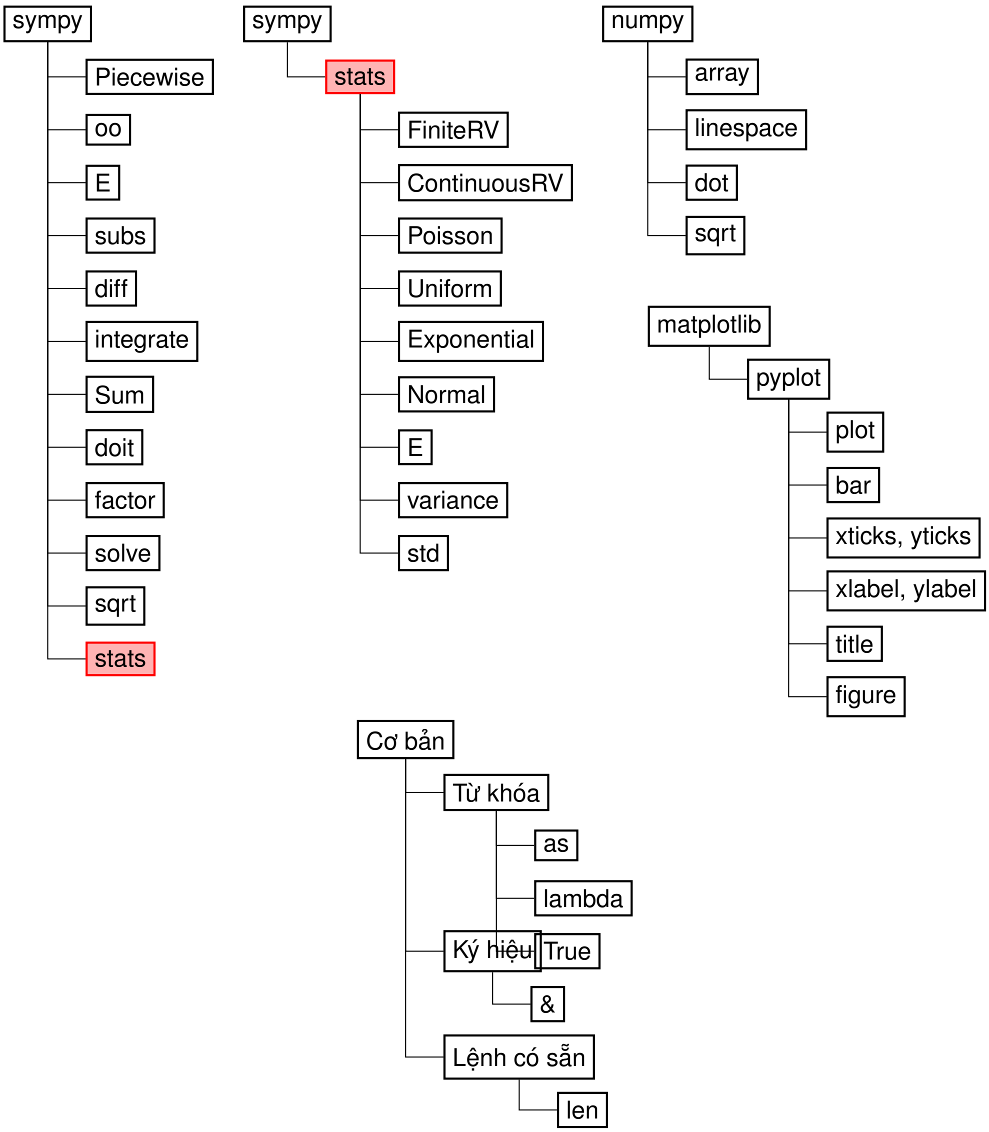
2.27. Cho X và Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập và X có phân bố đều trên đoạn $[0, 3]$, Y có phân bố đều trên đoạn $[1, 4]$. Tìm $\sigma(X + Y)$.

2.28. Cho hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập X có phân bố đều trên đoạn $[0, 5]$ và Y có phân bố đều trên đoạn $[-1, 4]$. Tính độ lệch chuẩn của $Z = X - Y$.

2.29. Giải Bài tập 2.6, 2.18, và 2.19 bằng cách chỉ ra dạng phân bố đặc biệt của đại lượng ngẫu nhiên X.

2.30. Cho $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ và $Y = X^3$. Tìm hàm mật độ của Y.

Tóm tắt về Python



Bài tập bổ sung

2.31.

2.32.

Chương 2

Đại lượng ngẫu nhiên

2.1 $P(X=k)=\dfrac{C_8^k\times C_5^{5-k}}{C_{13}^5}$, $k=\overline{0,5}$.

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{1287}$	$\frac{40}{1287}$	$\frac{280}{1287}$	$\frac{560}{1287}$	$\frac{350}{1287}$	$\frac{56}{1287}$

2.6 a)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

, hoặc $P(X=k)=C_3^k 0.5^3$, $k=\overline{0,3}$.

d) $$F(x)=\begin{cases}0, & \text{nếu } x\le 0\\ 0.125 & \text{nếu } 0<x\le 1\\ 0.125+0.375=0.5 & \text{nếu } 1<x\le 2\\ 0.125+0.375+0.375=0.875 & \text{nếu } 2<x\le 3\\ 1 & \text{nếu } x>3\end{cases}$$

c) $EX=\dfrac{3}{2}$, $DX=\dfrac{3}{4}$.

2.7 Đặt X = số lần ném của người ném đầu.

a) $P(X=k)=p^{k-1}(1-p)$, $k=1,2,...$, trong đó $p=(1-p_1)(1-p_2)$.

b) $EX=\dfrac{1}{1-p}$, $DX=\dfrac{p}{(1-p)^2}$.

2.8 Đặt X = số phấm phẩm chọn ra.

a)

X	0	1	2	3	4	5
P	0.5838	0.3394	0.07022	0.006384	0.00025104	$3.347\cdot 10^{-6}$

b) $EX=0.5$, $DX=0.4318$.

2.9 a)

X	0	1	2	3
P	0.42	0.425	0.14	0.015

b) $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } x \leq 0 \\ 42 & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ 0.42 + 0.425 = 0.845 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ 0.42 + 0.425 + 0.14 = 0.985 & \text{nếu } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

c) $EX = 0.75$, $DX = 0.5575$, $\sigma(X) = 0.7467$.

2.10 a) $$X = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{lần } k \text{ lấy được quả đỏ} \\ k - 1 \text{ lần đầu có } M - 1 \text{ lần lấy được quả đỏ} \end{cases}$$

$P(X = k) = C_{k-1}^{M-1} p^M (1-p)^{k-M}$, $k = M, M+1, \ldots$

b) $EX = \dfrac{M}{p}$.

2.11 • $$X = k \Leftrightarrow \begin{cases} \text{chọn thẻ } k \\ \text{chọn được } n-1 \text{ thẻ } > k \text{ trong } N-k \text{ thẻ } k+1, k+2, \ldots, N \end{cases}$$

$P(X = k) = \dfrac{C_{N-k}^{n-1}}{C_N^n}$, $k = \overline{1, N-n+1}$.

• $EX = \dfrac{N+1}{n+1}$.

2.12 Đặt X = số sinh viên giỏi chọn được.

X	0	1	2	3
P	$\frac{91}{285}$	$\frac{91}{190}$	$\frac{7}{38}$	$\frac{1}{57}$

Cần tính $EX = 0.9$.

2.13 Đặt X = số viên đạn chưa dùng đến.

X	0	1	2	3	4
Y		0.09216	0.144	0.144	0.36

Cần tính $EX = 2.2522$.

2.14 Đặt X = số bi đen lấy được. Bảng phân bố của X:

X	0	1	2
P	0.2951	0.5478	0.1571

trong đó các xác suất được tính theo công thức xác suất đầy đủ.

Giá trị cần tìm là $EX = 0.862$.

2.15 Đặt X = số người vào siêu thị, thì $X \sim P_\lambda$. Y = số người mua sản phẩm. $\operatorname{Im} Y = \{0, 1, 2, ...\}$, và

$$P(Y = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k, X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = n) \cdot P(Y = k|X = n)$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{k!} \cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

tức là $Y \sim P_{\lambda p}$. Giá trị cần tìm là $EY = \lambda p$.

2.16 a) $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{\pi}$ b) $\frac{1}{3}$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & \text{nếu } -a < x < a \\ 0 & \text{nếu } |x| \geq a \end{cases}$$

d) $0, \frac{a^2}{2}, \frac{a}{\sqrt{2}}$

2.17 a) $C = \frac{1}{2}$.

b) $p = P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Số lần $X \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ có khả năng cao nhất = $k_0 = 2$. Khả năng đó là $p_0 = C_5^2 p^2 (1-p)^3 = 0.3377$.

c) $EX = 0, DX = 0.4674, \sigma(X) = 0.6837$.

2.18 $EX = \frac{1}{2\ln 3}, EY = \frac{1}{5}, E(X+Y) = EX + EY$.

2.19 a) $a = \frac{1}{e^4\sqrt{\pi}}$ b) $EX = 2, DX = \frac{1}{2}$ c) 0.9044

2.20 a) Đặt X = số phế phẩm trong ca làm việc. $X \sim B(n, p)$ trong đó $n = 100, p = 0.02$.

b) $EX = np$ c) $P(X < 3) = 0.6767$

2.21 Đặt X = số tai nạn trong ngày. $p = P(X > 4) = \sum_{k=5}^{\infty} e^{-5}\frac{5^k}{k!}$. Xác suất cần tìm là $C_4^3 p^3 (1-p)$.

2.22 Đặt X = chiều cao nam giới. Tính $p = P(158 < X < 16)$, được $\sum_{k=1}^{4} C_4^k p^k (1-p)^{4-k} = 0.7019$.

2.23 a) $p = P(X \geq 1) = 0.9502$. Xác suất cần tìm ≈ 1.

b) $p = P(X > 3) = 0.3528$. Đặt Y = số lần thấy $X > 3$. Giá trị cần tìm là $EY = 100p$.

2.24 a) Đặt A = {điểm nằm trong lục giác đều}. $p = P(A) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. Xác suất cần tìm là $\sum_{k=2}^{6} C_6^k p^k (1-p)^{6-k} = 0.9992$.

b) Đặt Y = số lần lấy được điểm nằm trong lục giác đều. Số cần tìm là $EY = 6p$.

2.25 Đặt X = khối lượng tấm bê tông. $p = P(X > 73) = 0.8413$.
Y = số tấm có khối lượng trên 73kg. Số cần tìm là $EY = 300p$.

2.26 $p = P(175 < X < 200) = 0.6687$. Xác suất cần tìm là $\sum_{k=3}^{12} C_{12}^k p^k (1-p)^{12-k} = 0.9995$.

2.27 $DX = \frac{(3-0)^2}{12}$, $D(X+Y) = DX + DY$, $\sigma(X+Y) = \sqrt{D(X+Y)} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

2.28 $DX = \frac{(5-0)^2}{12}$, $DZ = DX + DY$, $\sigma(Z) = \frac{5}{\sqrt{6}}$.

2.29 (2.6) $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

(2.18) $X \sim \varepsilon_{2\ln 3}$, $Y \sim \varepsilon_5$.

(2.19) $f(x) = ae^{4x-x^2} = ae^{4-(x-2)^2} = ae^4 e^{-(x-2)^2} \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ hay $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Ta có $\mu = 2, 2\sigma^2 = 1, ae^4 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \sigma, a$.

2.30 $g(y) = \frac{1}{3\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt[3]{y^2}} e^{-\frac{\left(\sqrt[3]{y}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$.