Mục lục

Chương 1

Biến cố ngẫu nhiên và xác suất

1.1 Khái niệm

1.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1. *Phép thử ngẫu nhiên là tổ hợp các hành động (có thể lặp lại nhiều lần trong cùng điều kiện) để quan sát một hiện tượng ngẫu nhiên nào đó có xảy ra hay không.*

Định nghĩa 1.2. *Biến cố ngẫu nhiên là kết quả không lường trước được của phép thử.*

Ký hiệu: A = {kết quả của phép thử}.

Định nghĩa 1.3. *Biến cố sơ cấp là kết quả nhỏ nhất của phép thử (không thể chia thành các trường hợp nhỏ hơn).*

Nhận xét: mỗi biến cố ngẫu nhiên A có thể chia nhỏ thành tổ hợp các biến cố sơ cấp, gọi là các trường hợp thuận lợi cho A. Như vậy mỗi biến cố ngẫu nhiên có thể xem như một tập hợp.

Quy ước:

1) *Biến cố chắc chắn* Ω*:* biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử. Ω = tập tất cả biến cố sơ cấp, gọi là *không gian biến cố cơ bản*.

2) *Biến cố không thể* $\varnothing$*:* biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử.

Ví dụ 1.1. Phép thử: tung đồng xu.
A = {xuất hiện mặt sấp}. A là biến cố ngẫu nhiên, cũng là biến cố sơ cấp.

Ví dụ 1.2. Phép thử: tung xúc sắc.
ω_i = {xuất hiện mặt i chấm}; $i = \overline{1,6}$.
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_6\}$.
A = {xuất hiện mặt chẵn} $= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

1.1.2 Quan hệ giữa các biến cố

Ta nói

a) A kéo theo B, ký hiệu $A \subset B$, nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra.

b) A tương đương B, ký hiệu $A = B$, nếu A xảy ra khi và chỉ khi B xảy ra.

1.1.3 Phép toán giữa các biến cố

a) $A + B$ là biến cố xảy ra nếu ít nhất A hoặc B xảy ra.

b) AB là biến cố xảy ra nếu A, B đồng thời xảy ra. Nếu $AB = \varnothing$ thì A và B gọi là xung khắc, tức là không đồng thời xảy ra.

c) $A - B$ là biến cố xảy ra nếu A xảy ra và B không xảy ra.

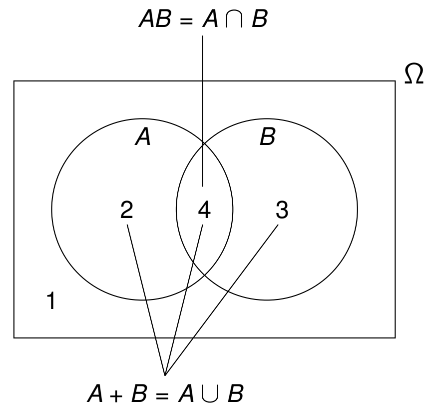
Đặc biệt, $\overline{A} \stackrel{\text{đn}}{=\!=} \Omega - A$, còn ký hiệu là A^c là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra, gọi là biến cố đối của A. Ta thấy

$$A - B = A\overline{B}.$$

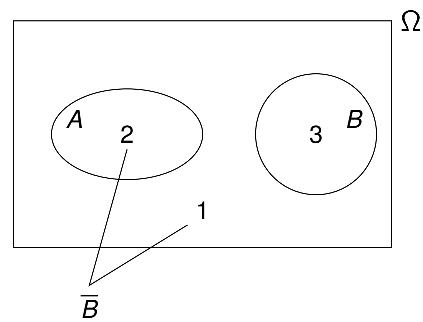
Thứ tự ưu tiên các phép toán: $\overline{A}$, ($\cdot$ và $-$), $+$.

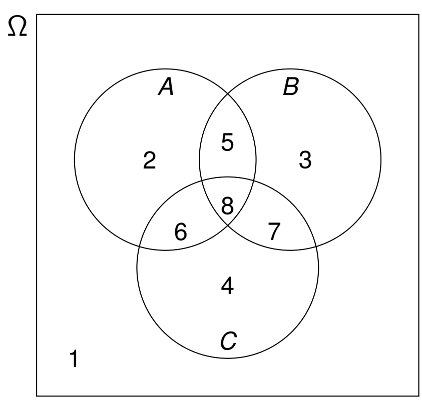
Sơ đồ Venn:

$$\begin{aligned} A + B &= (A - B) + AB + (B - A) \\ &= A + (B - A) \\ &= B + (A - B)\,. \end{aligned}$$



$$AB = \varnothing \Rightarrow A \subset \overline{B}.$$





Miền	Tập biểu diễn	Tập	Miền biểu diễn

1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A+B+C}$	A	2, 5, 6, 8
2	$A-(B+C) = A\overline{B}\,\overline{C}$	B	3, 5, 7, 8
3	$B-(A+C) = B\overline{A}\,\overline{C}$	C	4, 6, 7, 8
4	$C-(A+B) = C\overline{A}\,\overline{B}$	$A+B$	2, 3, 5, 6, 7, 8
5	$AB-C = AB\overline{C}$	AB	5, 8
6	$AC-B = AC\overline{B}$	$A-B$	2, 6
7	$BC-A = BC\overline{A}$	$\overline{A}$	1, 3, 4, 7
8	ABC		

Tính chất của phép toán: Với các biến cố A, B, C bất kỳ

1) $\overline{\overline{A}} = A$ — Luật *phần bù kép*
2) $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$ — Luật *DeMorgan*
   $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B}$
3) $A+B = B+A$ — Luật *giao hoán*
   $AB = BA$
4) $(A+B)+C = A+(B+C)$ — Luật *kết hợp*
   $(AB)\,C = A\,(BC)$
5) $A+BC = (A+B)\,(A+C)$ — Luật *phân phối*
   $A\,(B+C) = AB+AC$
6) $A+A = A$ — Luật *lũy đẳng*
   $AA = A$
7) $A+\varnothing = A$ — Luật *đồng nhất*
   $A\Omega = A$
8) $A+\overline{A} = \Omega$ — Luật *ngược*
   $A\overline{A} = \varnothing$
9) $A+\Omega = \Omega$ — Luật *thống trị*
   $A\varnothing = \varnothing$
10) $A+AB = A$ — Luật *hút*
   $A\,(A+B) = A$

1.1.4 Định nghĩa xác suất

Xác suất của biến cố A, ký hiệu $P\,(A)$ là số thực không âm đặc trưng cho khả năng xảy ra của A.

Tính chất cơ bản:

1) $0 \leq P(A) \leq 1,\ \forall A.$

2) $P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0.$

3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$

1.2 Mô hình xác suất cổ điển

Trong mô hình này các biến cố sơ cấp đồng khả năng.

$$P(A) = \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho } A}{\text{Số trường hợp có thể của phép thử}}. \tag{1.1}$$

Quy tắc đếm:

1) Nếu có hai bước thực hiện công việc: bước 1 có m cách, bước 2 có n cách, thì có $m \times n$ cách thực hiện công việc.

2) Nếu có hai phương án thực hiện công việc: phương án 1 có m cách, phương án 2 có n cách và hai phương án không thể thực hiện đồng thời, thì có $m + n$ cách thực hiện công việc.

3) Số cách chọn k vật (không quan tâm thứ tự) từ n vật là C_n^k.

Ví dụ 1.3. Phép thử: tung xúc sắc. Số trường hợp có thể: 6.
A = {xuất hiện mặt chẵn}. Số trường hợp thuận lợi: 3.
$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5.$

Ví dụ 1.4. Tung đồng thời 2 xúc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện bằng 8.

Giải. Phép thử: tung 2 xúc sắc. Kết quả là một cặp chấm xuất hiện (a, b): a có 6 cách chọn, b cũng có 6 cách chọn $\Rightarrow$ số trường hợp có thể của phép thử: $6 \times 6 = 36$.

A = {tổng số chấm xuất hiện bằng 8}.

Có 5 trường hợp thuận lợi cho A: $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$.

$P(A) = \frac{5}{36} = 0.1389.$ □

Ví dụ 1.5. Có 6 người chờ thang máy ở tầng trệt của tòa nhà 10 tầng. Tính xác suất để:

a) Mỗi người một tầng.

b) Hai người xác định lên cùng tầng.

Giải. Phép thử: 6 người lên 10 tầng. Mỗi người có 10 cách chọn tầng $\Rightarrow$ số trường hợp có thể của phép thử: $\underbrace{10 \cdot 10 \cdots 10}_{6} = 10^6$.

a) A = {mỗi người một tầng}. Người 1 có 10 cách chọn tầng, người 2 có 9 cách,... ⇒ số trường hợp thuận lợi cho A: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$.
$P(A) = \dfrac{151\,200}{10^6} = 0.1512.$

b) B = {2 người I, II lên cùng tầng}. Người I có 10 cách chọn tầng, người II có 1 cách, mỗi người còn lại có 10 cách ⇒ số trường hợp thuận lợi cho B: $10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.
$P(B) = \dfrac{10^5}{10^6} = 0.1.$

```
10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5
151200 / 10**6
10**5 / 10**6
```

□

Qua ví dụ trên, ta quan tâm tới các phép toán số học trong Python

Phép toán	Ký hiệu
$a+b$	`a + b`
$a-b$	`a - b`
ab	`a * b`
$\dfrac{a}{b}$	`a / b`
a^b	`a**b`

với lưu ý, phép lũy thừa được ưu tiên thực hiện trước.

Ví dụ 1.6. Chọn ngẫu nhiên số tự nhiên có ba chữ số. Tính xác suất chọn được số chẵn và ba chữ số khác nhau.

Giải. Phép thử: chọn số $\overline{abc}$, $a \neq 0$.

Số trường hợp có thể: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

A = {c chẵn; a, b, c khác nhau}. Ưu tiên chọn theo thứ tự c, a, b. Xét hai phương án:

1) $c = 0$. Số cách chọn $9 \cdot 8 = 72$.

2) $c \neq 0$. Số cách chọn $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$.

Số trường hợp thuận lợi cho A: $72 + 256 = 328$.
$P(A) = \dfrac{328}{900} = 0.3644.$ □

Ví dụ 1.7. Rút ngẫu nhiên 5 cây từ bộ bài 52 cây. Tính xác suất rút được 2 cây cơ.

Giải. Phép thử: rút 5 cây. Số trường hợp có thể: $C_{52}^5 = 2\,598\,960$.

A = {rút được 2 cây cơ} (và 3 cây khác cơ).

Số trường hợp thuận lợi: $C_{13}^2 \cdot C_{39}^3 = 712\,842$.

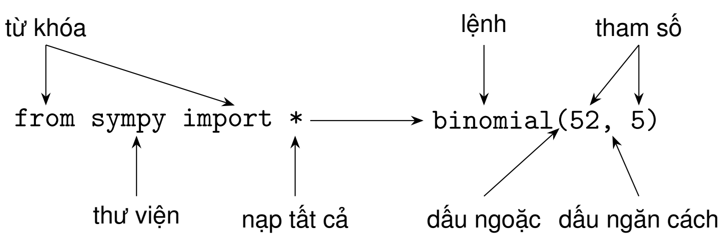
$$P(A) = \frac{712\,842}{2\,598\,960} = 0.2743.$$

```python
from sympy import *

binomial(52, 5)   # → $C_{52}^5$
binomial(13, 2) * binomial(39, 3)
```

□

Khai báo toàn bộ một thư viện để sử dụng trực tiếp các lệnh của nó



hoặc bằng lệnh `import sympy`. Ngoài ra, phần sau dấu # không tham gia vào quá trình dịch, gọi là phần chú thích.

Bài tập 1.2

1.1. Đoàn tàu điện gồm 3 toa tiến vào sân ga, ở đó đang có 12 hành khách chờ lên tàu. Giả sử các hành khách lên tàu một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau và mỗi toa còn ít nhất 12 chỗ trống. Tìm xác suất:

a) Toa I có 4 người lên, toa II có 5 người lên, số còn lại lên toa III.

b) Mỗi toa có 4 người lên.

c) Hai hành khách X và Y lên cùng toa.

1.2. Trong hộp có 6 bi trắng và 7 bi đen. Lấy ngẫu nhiên 5 bi. Tìm xác suất để được ít nhất 2 bi trắng.

1.3. Có n người ngồi một cách ngẫu nhiên quanh chiếc bàn tròn n chỗ.

a) Tính xác suất để hai người xác định ngồi cạnh nhau.

b) Tính xác suất của biến cố trên trong trường hợp n người đó ngồi theo một dãy dài.

1.4. Một lớp có 28 sinh viên trong đó có 5 sinh viên giỏi, 13 sinh viên khá, 10 sinh viên trung bình. Chọn ngẫu nhiên 4 sinh viên đi dự đại hội đoàn trường. Tính xác suất chọn được ít nhất 2 sinh viên giỏi.

1.5. Gieo một đồng tiền kim loại cân đối và đồng chất 10 lần. Nếu mặt có quốc huy xuất hiện, ta viết 1 chữ S, còn mặt kia xuất hiện ta viết 1 chữ N. Tìm xác suất của biến cố: trong dãy 10 chữ S và N trên, có 2 chữ giống nhau kề nhau.

1.6. Một người nuôi một đàn thỏ có n con, trong đó có k con màu nâu, $n-k$ con màu trắng và làm n cái lồng với k lồng màu nâu và $n-k$ lồng màu trắng. Xếp ngẫu nhiên mỗi thỏ vào một lồng. Tính xác suất sao cho xếp mỗi con thỏ vào đúng lồng giống với màu lông của nó.

1.7. Một trạm y tế có 8 bác sỹ, 12 y tá và 6 hộ lý. Chọn ngẫu nhiên một nhóm 5 cán bộ y tế của trạm. Tính xác suất sao cho trong nhóm 5 người ấy:

a) Có ít nhất một bác sỹ.

b) Có một bác sỹ, một hộ lý và 3 y tá.

1.3 Mô hình xác suất hình học

Chọn ngẫu nhiên một điểm trong miền Ω. Giả sử khả năng chọn được các điểm là như nhau. Xác suất để chọn được điểm thuộc miền con $A \subset \Omega$:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.2}$$

trong đó m có nghĩa:

a) độ dài l nếu $\Omega \subset \mathbb{R}$.

b) diện tích S nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

c) thể tích V nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Ví dụ 1.8. Lấy ngẫu nhiên một điểm thuộc (O, r). Tính xác suất để điểm thuộc miền trong tam giác đều ABC nội tiếp hình tròn.

Giải. Xác suất cần tìm

$$\begin{aligned} p &= \frac{S(ABC)}{S(O)} = \frac{3S(OAB)}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB}}{\pi r^2} \\ &= \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi r^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0.4135. \end{aligned}$$

```python
from sympy import *
r = symbols('r')

p = 3 * Rational(1, 2) * r * r * sin(2*pi/3) / pi / r**2
    # Rational(1, 2) → 1/2 dạng ký kiệu, trong khi 1/2 → 0.5
p  # gọi p vì phép gán không hiển thị kết quả

N(p, 4)  # làm tròn p với 4 chữ số tính từ chữ số khác 0 đầu tiên (4 chữ số có nghĩa)
```

□

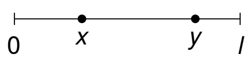
Giải tích lệnh

`r = symbols('r')`

tên biến — tạo ký hiệu — chữ hiển thị ở phần kết quả

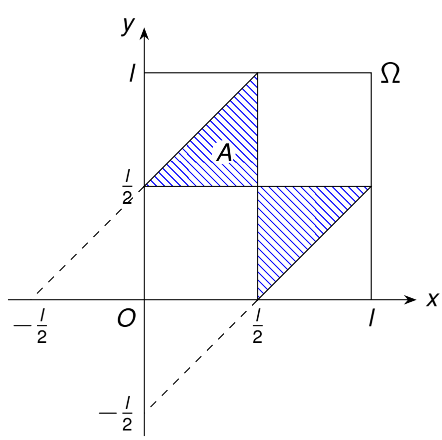
Ví dụ 1.9. Một thanh thẳng bị gãy thành ba đoạn tại hai điểm ngẫu nhiên. Tính xác suất để ba đoạn đó ghép thành tam giác.

Giải. Gọi l là độ dài thanh; x, y là vị trí hai điểm gãy.



Tất cả các trường hợp thanh bị gãy tương ứng với

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x, y < l\}.$$



Ba đoạn ghép được tam giác nếu mỗi cạnh nhỏ hơn tổng hai cạnh kia, tức là nhỏ hơn nửa chu vi, mà trong ví dụ này là $\frac{l}{2}$. Xét hai trường hợp:

* $x < y$: $x, y - x, l - y < \frac{l}{2} \Leftrightarrow x < \frac{l}{2} < y < x + \frac{l}{2}$.
* $x > y$: $y, x - y, l - x < \frac{l}{2} \Leftrightarrow x - \frac{l}{2} < y < \frac{l}{2} < x$.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ba đoạn lập thành tam giác}\} \\ &= \left\{(x, y) \mid x < \frac{l}{2} < y < x + \frac{l}{2} \text{ hoặc } x - \frac{l}{2} < y < \frac{l}{2} < x\right\}. \end{aligned}$$

Dễ thấy $P(A) = \dfrac{S(A)}{S(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$. □

Bài tập 1.3

1.8. Hai người hẹn gặp nhau ở một địa điểm trong khoảng thời gian một giờ và quy ước: mỗi người đến điểm hẹn sẽ chờ người kia trong 20 phút, nếu không thấy người kia đến thì sẽ bỏ đi. Tìm xác suất để hai người đó gặp nhau.

1.4 Công thức cộng và nhân xác suất

1.4.1 Công thức cộng xác suất

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Tổng quát

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right) - \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.3}$$

Nhận xét: $\sum$ thứ k có C_n^k số hạng.
Hệ quả:

a) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ đôi một xung khắc, tức là $A_iA_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, thì

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1.4}$$

b)

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1. \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.10. Có 6 người ngồi vào 4 bàn. Giả sử mỗi bàn có ít nhất 6 chỗ trống. Tính xác suất để *ít nhất một* bàn không có người.

Giải. Đặt $A = \{\geq 1$ bàn không có người$\}$, $A_i = \{$bàn i không có người$\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Ta có

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$\Rightarrow P(A) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right) - P(A_1A_2A_3A_4).$$

Để tính các xác suất trong công thức trên, xét phép thử: 6 người ngồi vào 4 bàn. Số trường có thể: $\underbrace{4 \cdot 4 \cdots 4}_{6} = 4^6$.

Số trường hợp thuận lợi cho A_i: $3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^6 \Rightarrow P(A_i) = \dfrac{3^6}{4^6}$. Tương tự $P\left(A_iA_j\right) = \dfrac{2^6}{4^6}$, $P\left(A_iA_jA_k\right) = \dfrac{1}{4^6}$, $P(A_1A_2A_3A_4) = 0$.

$$P(A) = 4 \cdot \frac{3^6}{4^6} - C_4^2 \cdot \frac{2^6}{4^6} + C_4^3 \cdot \frac{1}{4^6} - 0 = 0.6191.$$

```python
from sympy import *
4 * 3**6 / 4**6 - binomial(4, 2) * 2**6 / 4**6 + binomial(4, 3) *
    1 / 4**6 - 0
```

□

Ví dụ 1.11. Cho n vật đánh số từ 1 đến n, và n hộp cũng đánh số từ 1 đến n. Xếp n vật vào n hộp. Tính xác suất để có *ít nhất một* vật được xếp vào hộp có cùng số thứ tự.

Giải. Đặt $A_i = \{$vật thứ i được xếp ở hộp tứ $i\}$, $i = \overline{1, n}$; $A = \{$có ít nhất một vật được xếp vào hộp có cùng số thứ tự$\}$. Ta có

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n.$$

Công thức cộng xác suất

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P\left(A_iA_j\right) + \sum_{i<j<k} P\left(A_iA_jA_k\right) - \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n),$$

trong đó

$$P(A_i) = \frac{1 \cdot (n-1)!}{n!}$$
$$P\left(A_iA_j\right) = \frac{1 \cdot (n-2)!}{n!}, \quad i < j$$

$$P\left(A_iA_jA_k\right) = \frac{1\cdot(n-3)!}{n!},\ i<j<k$$

...

$$P\left(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\right) = \frac{1\cdot(n-k)!}{n!},\ i_1<i_2<...<i_k$$

$$P\left(A_1A_2\cdots A_n\right) = \frac{1}{n!}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}P(A) &= C_n^1\frac{(n-1)!}{n!} - C_n^2\frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3\frac{(n-3)!}{n!} - \cdots + (-1)^{k-1}C_n^k\frac{(n-k)!}{n!} + \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{1}{n!}\\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

```python
from sympy import *
n, k = symbols('n k', integer=True)  # n,k là ký hiệu biến nguyên

(binomial(n, k) * (-1)**(k-1) * factorial(n-k) / factorial(n)).simplify()
  # factorial(n) → n!, expr.simplify() → rút gọn biểu thức expr
```

□

Ví dụ 1.12. Trong hộp có 15 thẻ đánh số từ 1 tới 15. Rút ngẫu nhiên 3 thẻ. Tính xác suất để tích ba số ghi trên các thẻ là số chẵn.

Giải. Phép thử: rút 3 thẻ. Số trường hợp có thể: $C_{15}^3 = 455$.

A = {tích ba số ghi trên các thẻ là số chẵn} $\Rightarrow \overline{A}$ = {tích ba số ghi trên các thẻ là số lẻ}.

Số trường hợp thuận lợi cho $\overline{A}$: $C_8^3 = 56$.

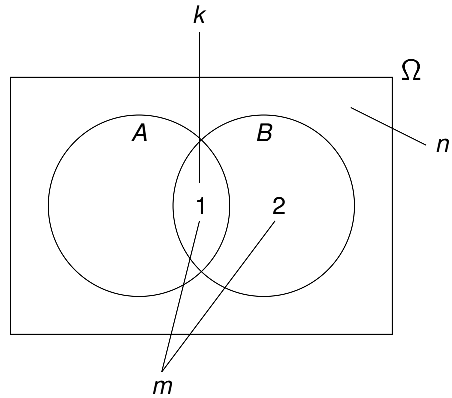
$P\left(\overline{A}\right) = \frac{56}{455} = \frac{8}{65} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{8}{65} = \frac{57}{65}.$ □

1.4.2 Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 1.4. *Cho A, B là các biến cố ngẫu nhiên. Khi B đã xảy ra thì khả năng xảy ra của A là*

$$P\left(A \mid B\right) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.6}$$

Áp dụng trong mô hình xác suất cổ điển:



Giả sử phép thử có n trường hợp có thể, B có m trường hợp thuận lợi, AB có k trường hợp thuận lợi. Ta có $P(B) = \frac{m}{n}$, $P(AB) = \frac{k}{n}$.

$$\begin{aligned} P\left(A \mid B\right) &= \frac{k/n}{m/n} = \frac{k}{m} \\ &= \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho } A \text{ khi } B \text{ đã xảy ra}}{\text{Số trường hợp có thể của phép thử (tạo ra } A\text{) khi } B \text{ đã xảy ra}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ví dụ 1.13. Hai người lần lượt rút mỗi người một cây từ bộ bài 52 cây.
Đặt A = {người II rút được cây đỏ}, B = {người I rút được cây cơ}. Xác định $P\left(A \mid B\right)$.

Giải. **Cách 1:** theo (1.6)

$$P(AB) = \frac{13 \cdot 25}{52 \cdot 51}, \quad P(B) = \frac{13}{52} \Rightarrow P\left(A \mid B\right) = \frac{\frac{13 \cdot 25}{52 \cdot 51}}{\frac{13}{52}} = \frac{25}{51}.$$

Cách 2: theo (1.7)

k = số cách để người II rút được cây đỏ nếu người I đã rút được cây cơ = 25.

m = số cách để người II rút 1 cây nếu người I đã rút được cây cơ = 51.

$P\left(A \mid B\right) = \frac{25}{51}$.

□

Từ (1.6) ta có công thức nhân xác suất

$$P(AB) = P(B) \cdot P\left(A \mid B\right) = P(A) \cdot P\left(B \mid A\right).$$

Tổng quát

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 A_2\right) \cdots P\left(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}\right). \tag{1.8}$$

Ví dụ 1.14. Dùng chùm có 10 chìa khóa để mở một ổ khóa bằng cách thử từng chìa. Biết có 4 chìa mở được ổ khóa. Tính xác suất để:

a) Mở được khóa ở lần thử thứ ba.

b) Mở được khóa bằng không quá ba lần thử.

Giải. a) Nhận xét: mở được khóa ở lần thử thứ 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{chìa thứ 1 không mở được} \\ \text{chìa thứ 2 không mở được} \\ \text{chìa thứ 3 mở được} \end{cases}$

Đặt A_i = {chìa thứ i mở được}.

A = {mở được khóa ở lần thử thứ ba} $= \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

$\Rightarrow P(A) = P\left(\overline{A}_1\right) P\left(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1\right) P\left(A_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2\right) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}.$

b) B = {mở được khóa bằng không quá ba lần thử} $= A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

$\Rightarrow P(B) = P(A_1) + P\left(\overline{A}_1A_2\right) + P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right) = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{6}.$

□

1.4.3 Các biến cố độc lập

Định nghĩa 1.5. *Hai biến cố A, B gọi là độc lập nếu biến cố này xảy ra hay không xảy ra không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra của biến cố kia.*

Nhận xét: A, B độc lập thì các cặp biến cố sau cũng độc lập $\overline{A}, B$; $A, \overline{B}$; $\overline{A}, \overline{B}$.

Công thức:

$$\begin{aligned} A, B \text{ độc lập } &\Leftrightarrow P\left(A \mid B\right) = P(A) \\ &\Leftrightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ví dụ 1.15. Ba xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi người tương ứng là 0.6, 0.7, 0.8. Tìm xác suất:

a) Chỉ người thứ 2 bắn trúng.

b) Có đúng một người bắn trúng.

c) Cả ba ngươi đều bắn trúng.

d) Có ít nhất một người bắn trúng.

Giải. a) Nhận xét: chỉ người 2 bắn trúng $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{người 1 trượt} \\ \text{người 2 trúng} \\ \text{người 3 trượt} \end{cases}$

Đặt A_i = {người i bắn trúng}. A_1, A_2, A_3 độc lập và $P(A_1) = 0.6$, $P(A_2) = 0.7$, $P(A_3) = 0.8$.

A = {chỉ người 2 bắn trúng} $= \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3$.

$\Rightarrow P(A) = P\left(\overline{A}_1\right) P(A_2) P\left(\overline{A}_3\right) = (1 - 0.6)\, 0.7\, (1 - 0.8) = 0.056$.

b) Nhận xét: đúng 1 người bắn trúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{chỉ người 1 trúng} \\ \text{chỉ người 2 trúng} \\ \text{chỉ người 3 trúng} \end{array}\right.$

B = {đúng 1 người bắn trúng} $= A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$.

$P(B) = P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\right) + P\left(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3\right) + P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right) = 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.188$.

c) 0.336.

d) $D = \{\geq 1$ người bắn trúng$\}$.

Cách 1: $D = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$.

Cách 2: $D = A_1 + A_2 + A_3$.

Cách 3: $\overline{D}$ = {cả 3 bắn trượt} $= \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \Rightarrow P\left(\overline{D}\right) = 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.2 = 0.024 \Rightarrow P(D) = 1 - 0.024 = 0.976$.

□

Bài tập 1.4

1.9. Bốn sinh viên mang 4 áo mưa giống hệt nhau. Khi vào phòng họ để 4 áo mưa đó vào cùng một chỗ. Khi ra mỗi người lấy ngẫu nhiên 1 áo. Tìm xác suất để ít nhất 1 người lấy đúng áo của mình.

1.10. Sáu sinh viên có 6 chiếc mũ giống hệt nhau. Khi vào phòng họ để 6 mũ đó vào cùng một chỗ. Khi ra mỗi người lấy ngẫu nhiên 1 mũ. Tìm xác suất để có ít nhất 2 người lấy đúng mũ của mình.

1.11. Chứng minh rằng nếu A và B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau đều là các biến cố độc lập:

a) $\overline{A}, B$. b) $\overline{A}, \overline{B}$.

1.12. Có 3 máy làm việc độc lập với nhau. Trong ca làm việc, xác suất bị hỏng của máy thứ 1, 2, 3 tương ứng là 0.3, 0.2, 0.1. Tìm xác suất để trong ca làm việc có ít nhất 2 máy không bị hỏng.

1.13. Áp dụng công thức cộng và nhân xác suất để giải Bài tập 1.5.

1.14. Có n con thỏ đánh số từ 1 đến n, và n cái lồng thỏ cũng đánh số từ 1 đến n. Xếp ngẫu nhiên mỗi con thỏ vào một lồng. Tính xác suất sao cho ít nhất một con thỏ vào đúng lồng có cùng số với nó.

1.15. Cho ba biến cố A, B, C độc lập tổng thể với nhau và $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$, $P(C) = 0.5$. Tính $P(A + B + C)$.

1.16. Bốn người bắn bia độc lập nhau, mỗi người một viên đạn vào cùng một bia. Xác suất trúng đích của người thứ 1, 2, 3, 4 tương ứng là 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Trên bia có ba vết đạn. Tìm xác suất của biến cố ba vết đạn đó là do người thứ 1, 2 và 3 bắn.

1.17. Trong hộp có 5 bi đỏ, 6 bi trắng. Lần lượt lấy ngẫu nhiên 3 lần, không hoàn lại, mỗi lần 1 bi. Giả sử viên thứ nhất và viên thứ hai cùng màu. Tính xác suất của biến cố "viên thứ ba màu đỏ".

1.5 Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

Định nghĩa 1.6. *Hệ biến cố $H_1, H_2, \ldots, H_n$ gọi là đầy đủ nếu*

a) $H_1 + H_2 + \cdots + H_n = \Omega$.

b) $H_i H_j = \varnothing \ \forall i \neq j$ *(đôi một xung khắc).*

Nhận xét: hệ đầy đủ là các trường hợp rời nhau của phép thử.

1.5.1 Công thức xác suất đầy đủ

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P\left(A \mid H_i\right). \tag{1.10}$$

1.5.2 Công thức Bayes

$$P\left(H_i \mid A\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(A \mid H_i\right)}{P(A)}, \tag{1.11}$$

trong đó $P(A)$ tính theo (1.10).

Ví dụ 1.16. Một hộp chứa 20 phiếu bốc thăm trong đó có 4 phiếu trúng thưởng. Hai người lần lượt rút mỗi người một phiếu. So sánh khả năng trúng thưởng của hai người.

Giải. • Nhận xét: khả năng trúng của người II phụ thuộc vào người I trúng hay không.

H_1 = {người I trúng thưởng}, H_2 = {người I không trúng thưởng}.

$P(H_1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $P(H_2) = \frac{4}{5}$.

- A = {người II trúng thưởng}.

  $P\left(A \mid H_1\right) = \frac{3}{19}$, $P\left(A \mid H_2\right) = \frac{4}{19}$.

- $P(A) = P(H_1) \cdot P\left(A \mid H_1\right) + P(H_2) \cdot P\left(A \mid H_2\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{19} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{19} = \frac{1}{5}$.

  $P(H_1) = P(A) \Rightarrow$ khả năng trúng thưởng của 2 người như nhau.

□

Ví dụ 1.17. Trong kho chứa sản phẩm do ba nhà máy 1, 2, 3 sản xuất với tỷ lệ chiếm 40%, 30% và 30%. Tỷ lệ chính phẩm của mỗi nhà máy tương ứng là 90%, 80% và 85%. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm trong kho thì được phế phẩm. Tính xác suất để sản phẩm đó do nhà máy 3 sản suất.

Giải. Cần tính

$$P\left(\text{sản phẩm lấy ra do nhà máy 3 sản xuất} \mid \text{sản phẩm lấy ra là phế phẩm}\right).$$

- Nhận xét: khả năng sản phẩm là phế phẩm phụ thuộc vào sản phẩm do nhà máy nào sản xuất.

  H_i = {sản phẩm lấy ra do nhà máy i sản xuất}; $i = 1, 2, 3$.

  $P(H_1) =$ tỷ lệ sản phẩm của nhà máy 1 $= 40\% = 0.4$, $P(H_2) = 0.3$, $P(H_3) = 0.3$.

- A = {sản phẩm lấy ra là phế phẩm}.

  $P\left(A \mid H_1\right) =$ tỷ lệ phế phẩm trong số sản phẩm của nhà máy 1 $= 1-90\% = 0.1$, $P\left(A \mid H_2\right)$ 0.2, $P\left(A \mid H_3\right) = 0.15$.

- $P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P\left(A \mid H_i\right) = 0.4 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.15 = 0.145.$

$$P\left(H_3 \mid A\right) = \frac{P(H_3) \cdot P\left(A \mid H_3\right)}{P(A)} = \frac{0.3 \cdot 0.15}{0.145} = 0.3103.$$

□

Bài tập 1.5

1.18. Trong hộp có 5 bi trắng, 4 bi đen. Rút ngẫu nhiên 3 lần, không hoàn lại, mỗi lần 1 bi. Tìm xác suất để lần 2 được bi đen và lần 3 được bi trắng.

1.19. Có hai hộp bi. Hộp I có 6 bi đen và 4 bi trắng, hộp II có 7 bi đen và 3 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ hộp I bỏ vào hộp II rồi từ hộp II lấy ngẫu nhiên ra 2 bi.

a) Tìm xác suất để 2 bi lấy ra cuối cùng cùng màu.

b) Biết rằng 2 bi lấy ra sau cùng là 2 bi đen, tìm xác suất để 2 bi lấy ra từ hộp I bỏ vào hộp II cũng là 2 bi đen.

c) Tìm xác suất để lần 1 lấy được hai bi khác màu và lần 2 lấy được hai bi cùng màu.

1.20. Trong một kho sản phẩm của nhà máy có 7 hộp sản phẩm của phân xưởng 1, 5 hộp của phân xưởng 2 và 4 hộp của phân xưởng 3. Tỷ lệ phế phẩm trong mỗi hộp của các phân xưởng 1, 2, 3 tương ứng là 5%, 9% và 15%.

a) Lấy ngẫu nhiên 1 hộp sản phẩm từ kho, sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 1 sản phẩm. Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.

b) Giả sử sản phẩm lấy được là chính phẩm. Tính xác suất để lấy được sản phẩm của phân xưởng 1.

1.21. Một trường học có 4 xe ca và 3 xe con với xác suất làm việc tốt trong tháng của từng xe ca là 0.8 và của từng xe con là 0.75. Lấy ngẫu nhiên một xe thì gặp xe hoạt động tốt. Tính xác suất của biến cố "xe lấy được là xe ca".

1.22. Có n hộp kín, trong mỗi hộp có m quả cầu đỏ và k quả cầu xanh. Lấy ngẫu nhiên một quả từ hộp 1 bỏ vào hộp 2. Sau đó từ hộp 2 lấy ngẫu nhiên 1 quả và cho sang hộp 3. Cứ như thế, ở bước thứ $n-1$, ta lấy 1 quả từ hộp thứ $n-1$ cho sang hộp n. Cuối cùng lấy một quả từ hộp thứ n. Tính xác suất để quả cầu lấy ra cuối cùng có màu đỏ.

1.6 Dãy thử Bernoulli

Thực hiện phép thử n lần. Trong mỗi lần thử, quan sát sự xảy ra của biến cố A có $P(A) = p$.

Đặt $B_k = \{A \text{ xảy ra } k \text{ lần}\}$; $k = \overline{0, n}$. Ta có công thức Bernoulli

$$P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \tag{1.12}$$

Số k_0 thỏa mãn $P\left(B_{k_0}\right) = \max\limits_{0 \le k \le n} P(B_k)$ gọi là số có khả năng nhất, tức là số lần A xảy ra có khả năng cao nhất.

Cách tìm k_0:

a) $(n+1)p \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_0 = (n+1)p$ hoặc $k_0 = (n+1)p - 1$.

b) $(n+1)p \notin \mathbb{Z} \Rightarrow k_0 = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

Ví dụ 1.18. Tung xúc sắc 20 lần.

a) Tính xác suất để 5 lần xuất hiện mặt 6 chấm.

b) Tìm số lần xuất hiện mặt 6 chấm có khả năng cao nhất. Khả năng đó là bao nhiêu?

Giải. Dãy thử Bernoulli:

- Phép thử: tung xúc sắc.
- Số lần: $n = 20$.
- $A = \{\text{xuất hiện mặt 6 chấm}\}$.
- $p = P(A) = \frac{1}{6}$.

a) $B = \{5 \text{ lần xuất hiện mặt 6 chấm}\} = \{A \text{ xảy ra 5 lần}\} \Rightarrow P(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{20}^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^{15} = 0.1294$.

b) Số lần xuất hiện mặt 6 chấm có khả năng cao nhất = số lần A xảy ra có khả năng cao nhất = k_0.

$(n+1)p = (20+1)\frac{1}{6} = 3.5 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow k_0 = \lfloor 3.5 \rfloor = 3$.

Khả năng cần tìm $p_0 = C_{20}^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{17} = 0.2379$.

Cách 1:

```python
from sympy import *
p = 1/6
binomial(20, 5) * p**5 * (1-p)**15

p_arr = [binomial(20, k) * p**k * (1-p)**(20-k) for k in range
    (21)]
p_max = max(p_arr)  # số lớn nhất của dãy p_arr
p_arr.index(p_max)  # chỉ số của số p_max trong dãy p_arr
```

Cách 2:

```python
from sympy.stats import Binomial, density
X = Binomial('X', 20, 1/6)
dict = density(X).dict

dict[5]

index = max(dict, key=dict.get)  # chỉ số của số lớn nhất
index, dict[index]
```

□

Trong cách 1:

- `range(m, n)` $\rightarrow$ dãy $m, m+1, m+2, \ldots, n-1$, với các số nguyên $m < n$.

  `range(n)` $\rightarrow$ `range(0, n)` $\rightarrow 0, 1, \ldots, n$, với $n \in \mathbb{Z}^{+}$.
- `[ f(k) for k in range(m, n) ]` $\rightarrow$ dãy $f(m), f(m+1), \ldots, f(n-1)$.

Cách 2 có nhiều lệnh mới hơn, được sử dụng thường xuyên trong Chương 2.

```
from sympy.stats import Binomial, density
```

thư viện   môđun   hàm cần dùng

Ví dụ 1.19. Một bài thi trắc nghiệm có 20 câu hỏi, mỗi câu có 4 ý trả lời trong đó chỉ có 1 ý đúng: trả lời đúng mỗi câu được 5 điểm, sai trừ 1 điểm. Một thí sinh không học bài làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một ý trả lời cho mỗi câu. Tính xác suất để:

a) Thí sinh đạt 52 điểm. b) Thí sinh bị điểm âm.

Giải. Xét dãy thử Bernoulli:

- Phép thử: chọn 1 ý trả lời cho mỗi câu hỏi.
- Số lần: $n = 20$.

- A = {chọn được ý đúng}.
- $p = P(A) = \frac{1}{4} = 0.25$.

Đặt k = số câu trả lời đúng = số lần A xảy ra.
$\Rightarrow$ số câu sai = $20 - k$.
$\Rightarrow$ số điểm = $5k - (20 - k) = 6k - 20$.

a) $6k - 20 = 52 \Leftrightarrow k = 12$.

$\Rightarrow B$ = {thí sinh đạt 52 điểm} = {A xảy ra 12 lần}.

$\Rightarrow P(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_{20}^{12} \cdot 0.25^{12} \cdot 0.75^8 = 0.000\,7517$.

b) $6k - 20 < 0 \Leftrightarrow k \leq 3$.

$\Rightarrow C$ = {thí sinh bị điểm âm} = {A xảy ra ≤ 3 lần}.

$\Rightarrow P(C) = C_{20}^0 \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^{20} + C_{20}^1 \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^{19} + C_{20}^2 \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^{18} + C_{20}^3 \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^{17} = 0.2252$.

```
from sympy.stats import Binomial, density, P
X = Binomial('X', 20, 1/4)
density(X)(12)    # P(B). Lệnh P(X == 12) cho kết quả sai là 0
                  # ⇒ dùng lệnh P((X <= 12) & (X >=12)) lại đúng!
P(X <= 3)         # → P(C)
```

□

Bài tập 1.6

1.23. Giả sử trong một chuyến bay của một máy bay, các động cơ có thể hỏng một cách độc lập với nhau. Xác suất để một động cơ nào đó hỏng là p. Máy bay vẫn bay được nếu ít nhất một nửa số động cơ của nó không hỏng. Với điều kiện nào của p thì bay với máy bay có 4 động cơ an toàn hơn bay với máy bay có 2 động cơ?

1.24. a) Chứng minh trong các gia đình có hai con thì tỷ lệ các gia đình sinh con một bề không bé hơn tỷ lệ các gia đình sinh con cả trai và gái.

b) Nếu xét trong các gia đình có 3 con thì nhận định trên còn đúng không?

1.25. Từ một kho có vô hạn viên bi ta lấy 12 lần, mỗi lần một bi rồi cho vào một chiếc hộp. Xác suất lấy được bi đỏ và xác suất lấy được bi xanh trong mỗi lần đều bằng 0.5. Tiếp theo, từ hộp ta rút ngẫu nhiên 7 lần, có hoàn lại, mỗi lần 1 bi. Tính xác suất sao cho trong hộp có 12 bi đỏ, nếu 7 lần lấy từ hộp đều được bi đỏ.

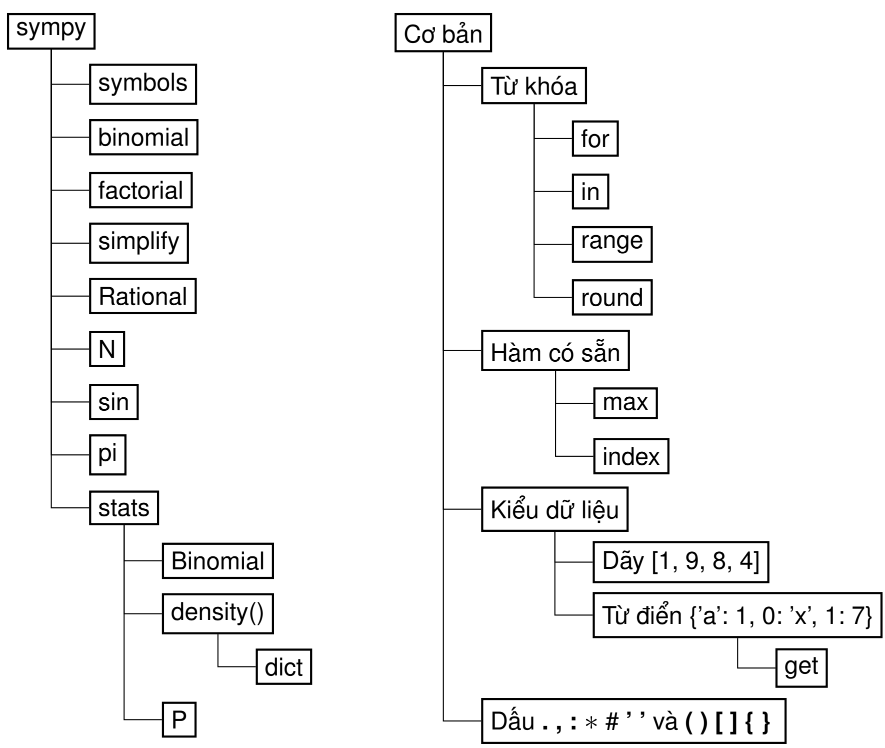
1.26. Tỷ lệ dân chúng ủng hộ dự luật là 75%. Phỏng vấn ngẫu nhiên 11 người. Tính xác suất để đa số trong 11 người đó ủng hộ dự luật.

1.27. Có ba hộp đựng bi: hộp I có 3 bi đen và 3 bi trắng, hộp II có 2 bi đen và 2 bi trắng, hộp III có 2 bi đen và 3 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ hộp đó lấy ngẫu nhiên 4 lần, mỗi lần 1 bi, có hoàn lại. Tìm xác suất để ít nhất 2 lần lấy được bi đen.

1.28. Cho hình tròn D bán kính R và một tam giác đều $A_1A_2A_3$ nội tiếp hình tròn. Lấy ngẫu nhiên và độc lập 5 lần, mỗi lần một điểm trong hình tròn D. Tìm xác suất để có ít nhất một lần lấy được điểm nằm trong $\Delta A_1A_2A_3$.

1.29. Một hãng bảo hiểm tai nạn có 400 khách hàng được bảo hiểm cùng một loại tai nạn. Mỗi khách hàng được bảo hiểm phải đóng 100 000 đồng mỗi năm. Trường hợp xảy ra tai nạn, hãng phải trả cho người bị nạn 800 000 đồng. Biết rằng xác suất để xảy ra tai nạn đối với bất cứ người được bảo hiểm nào cũng bằng 0.1, các chi phí khác của hãng không đáng kể. Tính xác suất để hãng bảo hiểm đó bị lỗ trong một năm nào đó.

Tóm tắt về Python



Bài tập bổ sung

1.30.

1.31.