Mục lục

Chương 3

Véctơ ngẫu nhiên

3.1 Khái niệm

3.1.1 Định nghĩa

Cho X, Y là các đại lượng ngẫu nhiên. Cặp (X, Y) gọi là véctơ ngẫu nhiên 2 chiều. Tùy theo X, Y cùng rời rạc hay liên tục ta có loại véctơ tương ứng.

3.1.2 Véctơ ngẫu nhiên rời rạc

Luật phân bố của véctơ ngẫu nhiên rời rạc được cho bởi bảng phân bố xác suất đồng thời:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1*}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2*}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\sum$	p_{*1}	p_{*2}	$\dots$	

(A)

hay

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = p_{ij}\ \forall i, j. \tag{3.1}$$

Tính chất:

a)

$$p_{ij} \geq 0, \sum_{i,j} p_{ij} = 1. \tag{3.2}$$

b) $\forall A \subset \mathbb{R}^2$:

$$P\left[(X, Y) \in A\right] = \sum_{(x_i, y_j) \in A} p_{ij}. \tag{3.3}$$

3.1.3 Véctơ ngẫu nhiên liên tục

Luật phân bố của véctơ ngẫu nhiên liên tục được cho bởi hàm mật độ xác suất đồng thời $f(x, y)$:

a) $f(x, y) \geq 0$.

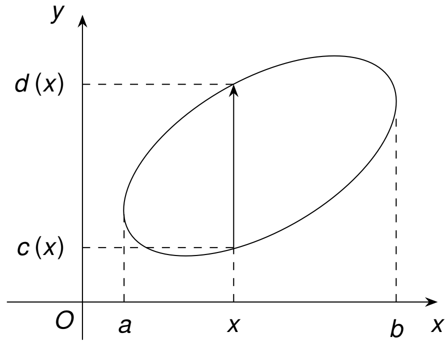
b)

$$P\left[(X, Y) \in A\right] = \iint_A f(x, y)\, dxdy. \tag{3.4}$$

Hệ quả:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = 1. \tag{3.5}$$

Chú ý: Với miền lồi A



$$(3.4) = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy. \tag{3.6}$$

(X, Y) có phân bố đều trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$ nếu có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \notin D \end{cases}$$

trong đó c là hằng số. Ta có

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = 1 \Rightarrow \iint_D c dxdy + \iint_{\overline{D}} 0 dxdy = 1$$

$$\Rightarrow c \iint_D dxdy = 1 \Rightarrow cS(D) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{S(D)}.$$

Ví dụ 3.1. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có bảng phân bố xác suất:

$X \backslash Y$	-1	0	2	3	$\sum$
0	0.08	0.16	p_1	0.04	0.4
1	0.05	p_2	0.08	0.02	
4	0.07	0.14	0.1	p_3	
$\sum$				0.1	

1) Xác định các giá trị chưa biết hoặc còn thiếu trong bảng.

2) Tính $P\left(X \geq Y^2\right)$.

3) Tính $P\left(Y > 1 \mid X^2 + Y^2 < 10\right)$.

Giải. 1) Hàng $X = 0$: $0.08 + 0.16 + p_1 + 0.04 = 0.4 \Rightarrow p_1 = 0.12$.

Cột $Y = 3$: $0.04 + 0.02 + p_3 = 0.1 \Rightarrow p_3 = 0.04$.

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1 \Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 = 1 - 0.08 - 0.16 - \cdots - 0.1 = 0.26 \Rightarrow p_2 = 0.1.$$ Ta có:

X \ Y	−1	0	2	3	$\sum$
0	0.08	0.16	0.12	0.04	0.4
1	0.05	0.1	0.08	0.02	0.25
4	0.07	0.14	0.1	0.04	0.35
$\sum$	0.2	0.4	0.3	0.1	

(B)

Nhập các thành phần chính của bảng (B):

```
X = [0, 1, 4]
Y = [-1, 0, 2, 3]
M = [[0.08, 0.16, 0.12, 0.04],
     [0.05, 0.1,  0.08, 0.02],
     [0.07, 0.14, 0.1,  0.04]]

Pairs = [(x, y) for x in X for y in Y]
P = {}
for (x, y) in Pairs:
  i = X.index(x)
  j = Y.index(y)
  P[(x, y)] = M[i][j]
```

2) $P\left(X \geq Y^2\right) = p_{00} + p_{1,-1} + p_{10} + p_{4,-1} + p_{40} + p_{42} = 0.16 + (0.05 + 0.1) + (0.07 + 0.14 + 0.1) = 0.62.$

```
[(x, y) for (x, y) in Pairs if x >= y**2]
[P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if x >= y**2]
sum( [P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if x >= y**2] )
```

3) $$p = P\left(Y > 1 \mid X^2 + Y^2 < 10\right) = \frac{P\left(Y > 1, X^2 + Y^2 < 10\right)}{P\left(X^2 + Y^2 < 10\right)} = \frac{t}{m}.$$

$m = (0.08 + 0.16 + 0.12 + 0.04) + (0.05 + 0.1 + 0.08) = 0.63.$

$t = (0.12 + 0.04) + 0.08 = 0.24.$

$$\Rightarrow p = \frac{0.24}{0.63} = 0.381.$$

```
[P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if x**2 + y**2 < 10]
m = sum(_)   # _ → biến tạm, chỉ kết quả gần đây nhất

[P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if (y > 1) & (x**2 + y**2 <
    10)]
t = sum(_)
t / m
```

□

Ví dụ 3.2. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + ky & \text{nếu } 0 \leq y \leq 2x \leq 2 \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases} \tag{C}$$

1) Xác định hằng số k.

2) $P(X < Y)$.

3) $P\left(Y < 1 \mid X^2 < Y\right)$.

Chứng minh. a) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}(k + 1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

```python
from sympy import *
x, y, k = symbols('x y k')

f = lambda x, y: Piecewise( (x + k*y, (0 < y) & (y < 2*x) &
    (2*x < 2)), (0, True) )

f(x, y).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo)).factor()

solve(_ - 1, k)
k = Rational(1, 2)
```

b) $\displaystyle P(X < Y) = \iint_{x<y} f(x, y)\, dxdy = \frac{7}{12}$.

```python
g = Piecewise( (f(x, y), x < y), (0, True) )
g.integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))
```

c) $\displaystyle p = P\left(Y < 1 \mid X^2 < Y\right) = \frac{P\left(Y < 1, X^2 < Y\right)}{P\left(X^2 < Y\right)} = \frac{t}{m}$, trong đó

$$m = \iint_{x^2<y} f(x, y)\, dxdy = \frac{7}{10}, \text{ và } t = \iint_{y<1, x^2<y} f(x, y)\, dxdy = \frac{13}{40} \Rightarrow p = \frac{\frac{13}{40}}{\frac{7}{10}} = \frac{13}{28}.$$

```python
g = Piecewise( (f(x, y), x**2 < y), (0, True) )
m = g.integrate((y, -oo, oo), (x, -oo, oo))  # tính tích phân
    lặp theo biến y trước để dễ xác định cận lấy tích phân
g = Piecewise( (f(x, y), (y < 1) & (x**2 < y)), (0, True) )
t = g.integrate((y, -oo, oo), (x, -oo, oo))

t / m
```

$\square$

Trong ví dụ ở các phần sau, véctơ ngẫu nhiên (X, Y) nếu rời rạc thì có bảng phân bố (B), nếu liên tục sẽ có hàm mật độ (C) với $k = \frac{1}{2}$.

Bài tập 3.1

3.1.

3.2.

3.2 Hàm phân bố xác suất đồng thời

Hàm phân bố xác suất đồng thời của (X, Y)

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \begin{cases} \sum\limits_{x_i < x, y_j < y} p_{ij} \\ \iint\limits_{u < x, v < y} f(u, v)\, dudv. \end{cases} \tag{3.7}$$

Nếu f liên tục tại (x, y) thì

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = f(x, y). \tag{3.8}$$

Ví dụ 3.3. (B) 4) $F(2, 2) = P(X < 2, Y < 2) = (0.08 + 0.16) + (0.05 + 0.1) = 0.39.$

```
[P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if (x < 2) & (y < 2)]
[0.08, 0.16, 0.05, 0.1]
```

Ví dụ 3.4. (C) 4)

Giải.

$$F(x, y) = \iint\limits_{u < x, v < y} f(u, v)\, dudv$$

$$= \begin{cases} -\frac{\max(0, \min(2, y))^3}{8} + \frac{\max(0, \min(2, y))^2}{4} + \frac{\max(0, \min(2, y))}{2} & \text{nếu } x \geq 1 \\ \frac{x^2 \max(0, \min(2x, y))}{2} + \frac{x \max(0, \min(2x, y))^2}{4} - \frac{\max(0, \min(2x, y))^3}{8} & \text{nếu } x < 1 \\ \frac{x^2 \max(0, \min(y, \max(2, 2x)))}{2} + \frac{x \max(0, \min(y, \max(2, 2x)))^2}{4} - \frac{\max(0, \min(y, \max(2, 2x)))^3}{8}, & \text{trường hợp khác!} \end{cases}$$

Các trường hợp cụ thể

Trường hợp			$F(x, y)$
$x \geq 1$	$y > 2$		1
	$0 < y \leq 2$		$-\frac{y^3}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2}$
	$y \leq 0$		0
$x < 1$	$y > 2x$	$x > 0$	x^3
		$x \leq 0$	0
	$y \leq 2x$	$y > 0$	$\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{4} - \frac{y^3}{8}$
		$y \leq 0$	0

```
u, v = symbols('u v')
g = Piecewise( (f(u, v), (u < x) & (v < y)), (0, True) )
cdf = g.integrate((u, -oo, oo), (v, -oo, oo))

cdf.subs(Min(2, y), y).subs(Max(0, y), y)  # trường hợp 2

print(cdf)  # xem kết quả ở dạng ký tự
```

□

Trong ví dụ trên, lệnh

```
g.integrate((v, -oo, oo), (u, -oo, oo))
```

cho kết quả của $F(x, y)$ là

$$\begin{cases} -\min(0, x)^3 - \min(1, x)^3 + \min\left(x, \max\left(0, \min\left(1, \frac{y}{2}\right)\right)\right)^3 + \min\left(1, x, \frac{y}{2}\right)^3 & \text{nếu } y \leq 0 \\ -\min\left(0, x, \frac{y}{2}\right)^3 + \min\left(1, x, \frac{y}{2}\right)^3 & \text{nếu } y > 0 \end{cases}$$

Ngoài ra, hai lệnh

```
f(u, v).integrate((u, -oo, x), (v, -oo, y))
f(u, v).integrate((v, -oo, y), (u, -oo, x))
```

đều cho kết quả khá dài.

Bài tập 3.2

3.3. Các tọa độ X, Y của điểm ngẫu nhiên phân bố đều trong hình chữ nhận giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = c, y = d$ ($a < b, c < d$). Tìm mật độ phân bố và hàm phân bố của hệ thống (X, Y).

3.4. Véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có mật độ xác suất $f(x, y) = \dfrac{A}{\pi^2\left(16 + x^2\right)\left(25 + y^2\right)}$.

a) Xác định hệ số A. b) Tìm hàm phân bố $F(x, y)$.

3.3 Xác định luật phân bố thành phần

3.3.1 Trường hợp (X, Y) rời rạc

a) $\mathrm{Im}X = \{x_1, x_2, ...\}$ và

$$P(X = x_i) = \sum_j P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \sum_j p_{ij} =: p_{i*}. \tag{3.9}$$

tức là tổng các xác suất ở cùng hàng với $X = x_i$.

b) $\mathrm{Im}\,Y = \{y_1, y_2, ...\}$ và

$$P\left(Y = y_j\right) = \sum_i P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \sum_i p_{ij} =: p_{*j}.$$

3.3.2 Trường hợp (X, Y) liên tục

X, Y có hàm mật độ xác suất lần lượt là

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \;\; f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx. \tag{3.10}$$

Ví dụ 3.5. (B) 5) Bảng phân bố xác suất của X, Y

X	0	1	4
P	0.4	0.25	0.35

Y	-1	0	2	3
P	0.2	0.4	0.3	0.1

```
Px = lambda a: sum([P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if x==a])

Px(0)
[Px(x) for x in X]

Py = lambda b: sum([P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if y==b])
[Py(y) for y in Y]
```

Ví dụ 3.6. (C) 5)

Giải.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \begin{cases} x \max(0, 2x) + \dfrac{\max(0, 2x)^2}{4} & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x^2, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} -\dfrac{3y^2}{8} + \dfrac{y\max\left(1, \frac{y}{2}\right)}{2} + \dfrac{\max\left(1, \frac{y}{2}\right)^2}{2} & \text{nếu } y > 0 \\ 0 & \text{nếu } y \leq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} -\dfrac{3y^2}{8} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2}, & y \in [0, 2) \\ 0, & y \notin [0, 2)\,. \end{cases}$$

```python
f1 = lambda x: f(x, y).integrate((y, -oo, oo))
f1(x)
f1(x).subs(Max(0, 2*x), 2*x)

f2 = lambda y: f(x, y).integrate((x, -oo, oo))
f2(y)
f2(y).subs(Max(1, y/2), 1)
```

□

Bài tập 3.3

3.5.

3.6.

3.4 Các đại lượng ngẫu nhiên độc lập

3.4.1 Định nghĩa

Cho (X, Y) có hàm phân bố xác suất đồng thời $F(x, y)$; X, Y có hàm phân bố xác suất lần lượt là $F_1(x)$, $F_2(y)$. X và Y gọi là độc lập nếu

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y) \;\; \forall x, y. \tag{3.11}$$

3.4.2 Trường hợp (X, Y) rời rạc

$$\begin{aligned} (3.11) \Leftrightarrow P\left(X = x_i, Y = y_j\right) &= P(X = x_i) \cdot P\left(Y = y_j\right) \;\; \forall i, j \\ \Leftrightarrow p_{ij} &= p_{i*} \cdot p_{*j} \;\forall i, j. \end{aligned} \tag{3.12}$$

tức là giá trị xác suất tại mọi ô bằng tích của tổng hàng và tổng cột tương ứng.

3.4.3 Trường hợp (X, Y) liên tục

$$(3.11) \Leftrightarrow f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \ \forall x, y. \tag{3.13}$$

Ví dụ 3.7. (B) 6) $0.08 \neq 0.25 \cdot 0.3$ hay $P(X=1, Y=2) \neq P(X=1) \cdot P(Y=2) \Rightarrow X$ và Y không độc lập.

```
[Px(x) * Py(y) for (x, y) in Pairs]
[P[(x, y)] for (x, y) in Pairs]
```

Ví dụ 3.8. (C) 6)

Giải. Chọn $\left(x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}\right) \in (0,1) \times (0,2)$ ta có $f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0$.

Mặt khác $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, $f_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{13}{32}$, nên

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \neq f_1\left(\frac{1}{2}\right) f_2\left(\frac{3}{2}\right).$$

Vậy X và Y không độc lập.

```
f1(Rational(1, 2)), f2(Rational(3, 2))
f(1/2, 3/2)
```

□

Có thể kiểm tra (3.13) với x, y bất kỳ với lệnh

```
(f1(x) * f2(y)).simplify()
```

ta được

$$f_1(x) f_2(y)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(4x + \max(0, 2x))\left(-3y^2 + 4y\max\left(1, \frac{y}{2}\right) + 4\max\left(1, \frac{y}{2}\right)^2\right)\max(0, 2x)}{32} & \text{nếu } y > 0, x < 1 \\ 0 & \text{trường hợp khác} \end{cases}$$
$$\neq f(x,y).$$

Bài tập 3.4

3.7. Có hai hộp đựng bi: hộp I có 7 bi và hộp II có 8 bi. Người ta ghi số của các viên bi ở hai hộp như sau: ở hộp I có 3 bi ghi số 0, 4 bi ghi số 1; ở hộp II có 3 bi ghi số 1, 5 bi ghi số 2.

Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một bi. Gọi Z là tổng của các số ghi trên 2 bi lấy ra. Tìm phân bố xác suất của Z.

3.8. Hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{135}(xy+4x+3y+12) & \text{khi } (x,y)\in[0,3]\times[0,2]\\ 0 & \text{khi } (x,y)\notin[0,3]\times[0,2].\end{cases}$$

X và Y có độc lập với nhau không? Vì sao?

3.5 Phân bố có điều kiện

Cho (X,Y). Biết $X=x$ cho trước, tìm luật phân bố của Y, tức là tìm luật phân bố của $\left(Y \mid X=x\right)$.

3.5.1 Trường hợp (X,Y) rời rạc

a) $Z=\left(X \mid Y=y_j\right)$

$\text{Im}Z=\text{Im}X=\{x_1,x_2,...\}$ và

$$P(Z=x_i)=P\left(X=x_i \mid Y=y_j\right)=\frac{P\left(X=x_i,Y=y_j\right)}{P\left(Y=y_j\right)}=\frac{p_{ij}}{p_{*j}}. \tag{3.14}$$

tức là chia các xác suất ở cùng cột $Y=y_j$ cho tổng của chúng.

b) $W=\left(Y \mid X=x_i\right)$

$\text{Im}W=\text{Im}Y=\{y_1,y_2,...\}$ và

$$P\left(W=y_j\right)=P\left(Y=y_j \mid X=x_i\right)=\frac{P\left(X=x_i,Y=y_j\right)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i*}}.$$

3.5.2 Trường hợp (X,Y) liên tục

a) Nếu $f_2(y)\neq 0$ thì $Z=\left(X \mid Y=y\right)$ có hàm mật độ

$$\varphi\left(x \mid y\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}\ \forall x. \tag{3.15}$$

b) Nếu $f_1(x)\neq 0$ thì $W=\left(Y \mid X=x\right)$ có hàm mật độ

$$\psi\left(y \mid x\right)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}\ \forall y.$$

Nếu $Y\in A\subset\mathbb{R}$ cho trước thì luật phân bố của $Z=\left(X \mid Y\in A\right)$ xác định bởi

$$P(Z = x_i) = P\left(X = x_i \mid Y \in A\right), \ \forall i \qquad \text{nếu } (X, Y) \text{ rời rạc, hoặc}$$

$$\text{hàm mật độ } \varphi\left(x \mid Y \in A\right) = \frac{\int\limits_A f(x, y)\, dy}{\int\limits_A f_2(y)\, dy} \qquad \text{nếu } (X, Y) \text{ liên tục.}$$

Tổng quát, hàm phân bố của $\varphi(X, Y)$ với điều kiện $(X, Y) \in A \subset \mathbb{R}^2$ là

$$P\left[\varphi(X, Y) < z \mid (X, Y) \in A\right].$$

Ví dụ 3.9. (B)

7) Biết $X = 1$, lập bảng phân bố xác suất của Y.

8*) Biết $-1 \leq Y \leq 1$, lập bảng phân bố xác suất của X.

Giải. 7) Khi đã biết $X = 1$ thì Y có bảng phân bố:

$Y \mid X = 1$	-1	0	2	3
P	$\frac{0.05}{0.25}$	$\frac{0.1}{0.25}$	$\frac{0.08}{0.25}$	$\frac{0.02}{0.25}$
Rút gọn P	0.2	0.4	0.32	0.08

```
[P[(1, y)] / Px(1) for y in Y]
```

8) Đặt $Z = \left(X \mid -1 \leq Y \leq 1\right)$.

$\text{Im}\, Z = \text{Im}\, X = \{0, 1, 4\}$.

$P(Z = 0) = P\left(X = 0 \mid -1 \leq Y \leq 1\right) = \dfrac{P(X = 0, -1 \leq Y \leq 1)}{P(-1 \leq Y \leq 1)} = \dfrac{0.08 + 0.16}{0.2 + 0.4} = 0.4$.

$P(Z = 1) = \dfrac{0.05 + 0.1}{0.2 + 0.4} = 0.25$.

$P(Z = 4) = 1 - 0.4 - 0.25 = 0.35$.

Ta có bảng phân bố của X khi đã biết $-1 \leq Y \leq 1$:

$X \mid -1 \leq Y \leq 1$	0	1	4
P	0.4	0.25	0.35

```
[ P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if (-1 <= y) & (y <= 1) ]
m = sum(_)

t = lambda a: sum([ P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if (x == a
    ) & (-1 <= y) & (y <= 1) ])

t(0)
[t(x) / m for x in X]
```

□

Ví dụ 3.10. (C)

7) Biết $X = \frac{1}{2}$, tìm hàm mật độ xác suất của Y.

8*) Biết $Y < 1$, tìm hàm mật độ xác suất của X.

Giải. 7) $$\psi\left(y \mid \frac{1}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2}, y\right)}{f_1\left(\frac{1}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2(y+1)}{3} & y \in [0,1] \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

```
(f(Rational(1, 2), y) / f1(Rational(1, 2))).simplify()
```

8) Hàm mật độ xác suất của X khi đã biết $Y < 1$:

$$\varphi\left(x \mid Y < 1\right) = \frac{\int_{-\infty}^{1} f(x,y)\,dy}{\int_{-\infty}^{1} f_2(y)\,dy} = \frac{t}{m}.$$

$$m = \frac{5}{8}$$

$$t = \begin{cases} x\min(1, \max(0, 2x)) + \frac{\min(1, \max(0, 2x))^2}{4} & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi\left(x \mid Y < 1\right) = \begin{cases} \frac{2(4x + \min(1, \max(0, 2x)))\min(1, \max(0, 2x))}{5} & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{24x^2}{5} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2(4x+1)}{5} & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & x \notin (0,1). \end{cases}$$

```
m = f2(y).integrate((y, -oo, 1))
t = f(x, y).integrate((y, -oo, 1))
phi = (t / m).simplify()
```

```
phi.subs(Max(0, 2*x), 2*x).subs(Min(1, 2*x), 2*x)  # 24x^2/5
```

□

Ví dụ 3.11. Bẻ gãy một thanh thẳng thành ba đoạn theo cách sau: bẻ thanh đó làm hai đoạn, rồi bẻ đôi đoạn bên trái. Tính xác suất để ba đoạn đó ghép được tam giác.

Giải. Đặt l là độ dài thanh, X là độ dài đoạn bên trái. $X \sim U(a, b)$, tức là có hàm mật độ

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & x \in [0, l] \\ 0, & x \notin [0, l]. \end{cases}$$

Khi $X = x$ cho trước, $Y \sim U(0, x)$, nên

$$\psi(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & y \in [0, x] \\ 0, & y \notin [0, x]. \end{cases}$$

Suy ra

$$f(x, y) = f_1(x)\,\psi(y \mid x) = \begin{cases} \frac{1}{lx} & \text{nếu } 0 \le y \le x \le l \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Miền biểu diễn biến cố "ba đoạn ghép được tam giác", tức là mỗi cạnh nhỏ hơn nửa chu vi:

$$A = \left\{(x, y) \mid 0 \le y \le x \le l, y < \frac{l}{2}, x - y < \frac{l}{2}, l - x < \frac{l}{2}\right\}.$$

Xác suất cần tìm là

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_{(x,y)\in A} f(x, y)\,dxdy = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

```python
from sympy import *
x, y = symbols('x y')
l = symbols('l', positive=True)

f1 = Piecewise( (1/l, (0 <= x) & (x <= l)), (0, True) )
psi = Piecewise( (1/x, (0 <= y) & (y <= x)), (0, True) )

f = (f1 * psi).simplify()

g = Piecewise( (f, (y < l/2) & (x-y < l/2) & (l-x < l/2)), (0,
    True) )
g.integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo)).simplify()
```

□

Bài tập 3.5

3.9. Đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có phân bố đều trong hình ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \le 1$.

a) Tìm hàm mật độ phân bố của từng thành phần.

b) Tính mật độ xác suất có điều kiện của X khi $Y = y$.

c) X và Y có phải là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập không? Vì sao?

3.10. Vị trí của điểm ngẫu nhiên (X, Y) phân bố đều trong hình tròn bán kính R, tâm trùng với gốc tọa độ.

a) Xác định mật độ xác suất và hàm phân bố của mỗi tọa độ.

b) Tìm hàm mật độ có điều kiện $\psi\left(y \mid x\right)$.

3.11. Cho X và Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố với hàm mật độ có dạng sau:

$$f(u) = \begin{cases} 2e^{-2u} & \text{khi } u > 0 \\ 0 & \text{khi } u \le 0. \end{cases}$$

a) Tìm hàm phân bố đồng thời của X và $Z = X + Y$.

b) Tìm hàm mật độ đồng thời của X và Z.

c) Tìm phân bố có điều kiện của Z khi $X = x$.

3.6 Tổng các đại lượng ngẫu nhiên

Cho (X, Y) có luật phân bố cho trước. Tìm luật phân bố của $Z = X + Y$.

3.6.1 Trường hợp (X, Y) rời rạc

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}Z &= \mathrm{Im}(X+Y) = \left\{z = x_i + y_j \mid x_i \in \mathrm{Im}X, y_j \in \mathrm{Im}Y\right\} \\ P(Z=z) &= P(X+Y=z) = \sum_{x_i+y_j=z} p_{ij}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

3.6.2 Trường hợp (X, Y) liên tục

$Z = X + Y$ có hàm mật độ

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y, y)\,dy. \tag{3.17}$$

Tổng quát, luật phân bố của $Z = \varphi(X, Y)$ xác định bởi

$P(Z=z) = P\left[\varphi(X,Y) = z\right] = \sum_{\varphi(x_i,y_j)=z} p_{ij}$ nếu (X, Y) rời rạc, hoặc

hàm mật độ $g(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x,b)\dfrac{\partial b}{\partial z} - f(x,a)\dfrac{\partial a}{\partial z}\right]dx$ nếu (X, Y) liên tục trong đó $\forall z, x, \varphi(x, y) < z \Leftrightarrow a(x, z) < y < b(x, z)$.

Ví dụ 3.12. (B)

9) Lập bảng phân bố xác suất của $Z = X + Y$.

10*) Lập bảng phân bố xác suất của $Z = (X + Y) \bmod 3$ (phần dư của phép chia cho 3).

Giải. 9) Bảng giá trị và phân bố của $Z = X + Y$:

X \ Y	−1	0	2	3
0	−1	0	2	3
1	0	1	3	4
4	3	4	6	7

$\Rightarrow$

Z	P
−1	0.08
0	0.16 + 0.05 = 0.21
1	0.1
2	0.12
3	0.04 + 0.08 + 0.07 = 0.19
4	0.02 + 0.14 = 0.16
6	0.1
7	0.04

```python
Z = {x + y for (x, y) in Pairs}

Pz = lambda z: sum([ P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if x + y
    == z ])

Pz(0)
[Pz(z) for z in Z]
```

10) Bảng giá trị và phân bố của $Z = (X + Y) \bmod 3$:

X \ Y	−1	0	2	3
0	2	0	2	0
1	0	1	0	1
4	0	1	0	1

$\Rightarrow$

Z	P
0	1 − 0.2 − 0.3 = 0.5 (tính gián tiếp)
1	(0.1 + 0.02) + (0.14 + 0.04) = 0.3
2	0.08 + 0.12 = 0.2

```python
Z = {(x + y) % 3 for (x, y) in Pairs}
Pz = lambda z: sum([ P[(x, y)] for (x, y) in Pairs if (x + y
    ) % 3 == z ])
[Pz(z) for z in Z]
```

□

Ví dụ 3.13. (C)

9) Tìm hàm mật độ xác suất của $Z = X + Y$.

10*) Tìm hàm mật độ xác suất của $Z = X - \frac{Y}{2}$.

Giải. 9) $Z = X + Y$ có hàm mật độ xác suất

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x)\, dx = -\frac{7z^2}{36} + \frac{z \max\left(\frac{z}{3}, \min(1, z)\right)}{2} + \frac{\max\left(\frac{z}{3}, \min(1, z)\right)^2}{4}$$
$$= \begin{cases} \frac{5z^2}{9}, & 0 < z \le 1 \\ -\frac{7z^2}{36} + \frac{z}{2} + \frac{1}{4}, & 1 < z < 3 \\ 0, & z \notin (0, 3). \end{cases}$$

```python
z = symbols('z')
g = f(x, z - x).integrate((x, -oo, oo))
```

```python
g.subs(Min(1, z), z).subs(Max(z/3, z), z)  # 5z^2/9
```

10) $x - \frac{y}{2} < z \Leftrightarrow 2(x - z) < y < \infty$. Ta có $a = 2x - 2z$, $b = \infty$.

$Z = X - \frac{Y}{2}$ có hàm mật độ xác suất

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x, b)\frac{\partial b}{\partial z} - f(x, a)\frac{\partial a}{\partial z} \right] dx$$
$$= \begin{cases} 2(-z + \max(1, z))\max(1, z) & \text{nếu } z > 0 \\ 0 & \text{nếu } z \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 - 2z, & z \in (0, 1) \\ 0, & z \notin (0, 1). \end{cases}$$

```python
from sympy.solvers import reduce_inequalities
reduce_inequalities(x - y / 2 < z, y)  # y > 2x - 2z

a = 2*x - 2*z
b = oo

(f(x, b) * b.diff(z) - f(x, a) * a.diff(z)).simplify()

g = _.integrate((x, -oo, oo)).simplify()
g.subs(Max(1, z), 1)  # 2 - 2z
```

□

Bài tập 3.6

3.12. Cho phân bố đồng thời của hai đại lượng ngẫu nhiên rời rạc (X, Y)

Y \ X	1	2	3	4
1	0.1	0.15	0.06	0.09
2	0.1	0.1	0.05	0.05
3	0.05	0.125	0.05	0.075

Hãy xác định:

a) Các phân bố của từng thành phần.

b) $P\left(Y < 2 \mid X < 3\right)$.

c) Phân bố X với điều kiện $Y = 2$.

d) Phân bố của tổng.

e) Kiểm tra xem X và Y có phải là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập hay không?

3.13. Cho X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập. Tìm luật phân bố, kỳ vọng của tổng $Z = X + Y$ trong mỗi trường hợp sau:

a) X, Y tuân theo luật phân bố mũ với tham số λ_1, λ_2.

b) X, Y tuân theo luật Poisson với tham số λ_1, λ_2.

3.14. Cho X và Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập có phân bố mũ với kỳ vọng tương ứng là $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2}$.

a) Tìm hàm mật độ của $Z = X + Y$.

b) Tính $P\left(X < 0.5 \mid Y < 0.5\right)$.

c) Tính $P(X < 3, Y < 2)$.

3.15. Cho X, Y là hai đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-a(x+y)} & \text{khi } (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ 0 & \text{khi } (x, y) \notin (0, \infty) \times (0, \infty)\,. \end{cases}$$

a) Tìm hằng số a.

b) Tìm hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên $Z = X + Y$.

3.16. Hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y độc lập với nhau và có hàm mật độ xác suất tương ứng là

$$f_1(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{khi } x \geq 0 \\ 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad \text{và } f_2(y) = \begin{cases} 3^{-y}\ln 3 & \text{khi } y \geq 0 \\ 0 & \text{khi } y < 0. \end{cases}$$

Tìm hàm mật độ xác suất của $Z = X + Y$.

3.17. X và Y là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập, có phân bố đều tương ứng trên đoạn $[1, 2]$ và $[3, 4]$.
Tìm hàm mật độ của $Z = X + Y$.

3.18. Một sản phẩm trung bình cân nặng 8 gam với độ lệch chuẩn là 5 gam, người ta đóng gói 144 sản phẩm loại đó vào trong một cái hộp. Vỏ hộp có khối lượng trung bình là 200 gam với độ lệch chuẩn 10 gam. Giả sử rằng các đại lượng ngẫu nhiên được xét ở đây có phân bố chuẩn và các sản phẩm được xếp vào hộp đã được lấy ngẫu nhiên từ kho hàng. Hãy xác định xác suất để một hộp chứa 144 sản phẩm nặng hơn 1400 gam.

3.19. Cân nặng trung bình của một người là 58 kg với độ lệch chuẩn là 5 kg. 9 người, lấy ngẫu nhiên và độc lập, vào một thang máy. Thang máy đó bị ngừng hoạt động nếu như tổng khối lượng của 9 người vượt quá 550 kg. Tìm xác suất để thang máy ngừng hoạt động khi có 9 người ngẫu nhiên vào cùng lúc. Cho biết cân nặng của một người lấy ngẫu nhiên là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn.

3.7 Momen tương quan và Hệ số tương quan

$$E\left[\varphi(X, Y)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{i,j} \varphi\left(x_i, y_j\right) \cdot p_{ij} \\ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) \cdot f(x, y)\, dxdy. \end{cases} \tag{3.18}$$

Đặc biệt

$$E(XY) = \begin{cases} \sum\limits_{i,j} x_i y_j p_{ij} \\ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y)\, dxdy. \end{cases} \tag{3.19}$$

3.7.1 Momen tương quan

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E\left[(X-EX)(Y-EY)\right] \\ &= E(XY) - EX\cdot EY. \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.7.2 Hệ số tương quan

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{E(XY) - EX\cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}. \tag{3.21}$$

Ví dụ 3.14. (B)

11) Tính $E\left(\dfrac{Y}{X+1}\right)$.

12) Tìm momen tương quan và hệ số tương quan giữa X và Y.

Giải. 11) Bảng giá trị của $Z = \dfrac{Y}{X+1}$:

X \ Y	-1	0	2	3
0	-1	0	2	3
1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$
4	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

$$E\left(\frac{Y}{X+1}\right) = \sum_{i,j} \frac{y_j}{x_i+1} p_{ij} = (-1)\cdot 0.08 + 0\cdot 0.16 + \cdots + \frac{3}{5}\cdot 0.04 = 0.415.$$

```
[ y / (x+1) for (x, y) in Pairs ]
sum([ y / (x+1) * P[(x, y)] for (x, y) in Pairs ])
```

12)

$$E(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 0\cdot(-1)\cdot 0.08 + 0\cdot 0\cdot 0.16 + \cdots + 4\cdot 3\cdot 0.04 = 1.17$$

$$EX = \sum_i x_i p_{i*} = 0\cdot 0.4 + 1\cdot 0.25 + 4\cdot 0.35 = 1.65$$

$$EY = \sum_j y_j p_{*j} = (-1)\cdot 0.2 + 0\cdot 0.4 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.1 = 0.7$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY = 1.17 - 1.65\cdot 0.7 = 0.015$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_i x_i^2 p_{i*} = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.25 + 4^2 \cdot 0.35 = 5.85$$

$$\Rightarrow DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = 5.85 - 1.65^2 = 3.1275$$

$$E\left(Y^2\right) = \sum_j y_j p_{*j} = (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 = 2.3$$

$$\Rightarrow DY = 2.3 - 0.7^2 = 1.81$$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{0.015}{\sqrt{3.1275}\sqrt{1.81}} = 0.006305.$$

```
exy = sum([ x*y * P[(x, y)] for (x, y) in Pairs ])
ex = sum([ x * P[(x, y)] for (x, y) in Pairs ])
ey = sum([ y * P[(x, y)] for (x, y) in Pairs ])
cov = exy - ex * ey

ex2 = sum([ x**2 * P[(x, y)] for (x, y) in Pairs ])
dx = ex2 - ex**2

ey2 = sum([ y**2 * P[(x, y)] for (x, y) in Pairs ])
dy = ey2 - ey**2

cov / sqrt(dx * dy)
```

□

Ví dụ 3.15. VD(C).

11) Tính $E\left(\dfrac{X}{2X+Y}\right)$.

12) Tìm momen tương quan và hệ số tương quan giữa X và Y.

Giải. 11) $E\left(\dfrac{X}{2X+Y}\right) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \dfrac{x}{2x+y} f(x, y)\, dxdy = \dfrac{1}{3}$.

```
(x/(2*x+y) * f(x, y)).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))
```

12)

$$E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y)\, dxdy = \frac{2}{3}$$

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\, dx = \frac{3}{4}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)\, dy = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{24}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\, dx = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}$$

$$E\left(Y^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)\, dy = \frac{14}{15}$$

$$\Rightarrow DY = E\left(Y^2\right) - (EY)^2 = \frac{14}{15} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{43}{180}$$

$$\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{3}{80}}\sqrt{\frac{43}{180}}} = \frac{5}{\sqrt{129}} = 0.4402.$$

```
exy = (x*y * f(x, y)).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))
ex = (x * f(x, y)).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))
ey = (y * f(x, y)).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))

cov = exy - ex * ey

ex2 = (x**2 * f(x,y)).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))
dx = ex2 - ex**2

ey2 = (y**2 * f(x,y)).integrate((x, -oo, oo), (y, -oo, oo))
dy = ey2 - ey**2

cov / sqrt(dx * dy)
```

□

Bài tập 3.7

3.20. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có bảng phân bố xác suất

$X \backslash Y$	1	2	3
-1	0.1	0.05	0.05
0	0.2	0.1	0.1
1	0.2	0.1	0.1

a) Tìm phân bố của X, Y và tính kỳ vọng của X, Y.

b) Tìm phân bố của Y với điều kiện $X = 0$.

c) Tìm phân bố của tổng $X + Y$.

d) Tìm phân bố của đại lượng ngẫu nhiên $Z = X^2$.

3.21. Cho đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} A\left(2x^2 + xy + y^2\right), & (x,y) \in [0,1] \times [0,1] \\ 0, & (x,y) \notin [0,1] \times [0,1]. \end{cases}$$

Hãy tìm:

a) A.

b) EX.

c) $P\left(X < 0.5 \mid Y > 0.5\right)$.

3.22. Hai đại lượng ngẫu nhiên X và Y có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} A\left(4x^2 + 2xy + y^2\right) & \text{khi } (x,y) \in [0,2] \times [0,2] \\ 0 & \text{khi } (x,y) \notin [0,2] \times [0,2]. \end{cases}$$

a) Xác định hằng số A.

b) Tìm hàm mật độ của X và tính EX.

c) X và Y có độc lập với nhau không?

3.23. Đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} C\sin(x+y) & \text{khi } (x,y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{khi } (x,y) \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

a) Xác định C.

b) Tính $P\left(X < \frac{\pi}{4}\right)$.

c) Tính $\psi\left(y \mid x\right)$ với $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

d) Tính $EX, DX, \sigma(X)$.

3.24. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & (x,y) \in D = (0,4) \times (1,5) \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

a) Xác định hằng số c.

b) Tính $P(1 < X < 2, 1 < Y < 2)$.

c) Tìm luật phân bố của X, Y.

d) Tính $P(X + Y < 3)$ và tính $E(X + Y)$.

e) Tìm luật phân bố của tổng $X + Y$.

3.25. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) phân bố đều trong miền

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}.$$

a) Tìm luật phân bố của X, Y.

b) Tính mômen tương quan, hệ số tương quan giữa X và Y.

3.26. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right), & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0, & (x, y) \notin (0, 1) \times (0, 1). \end{cases}$$

a) Tính $P\left(X < \dfrac{1}{2}, Y > \dfrac{1}{2}\right)$.

b) Tìm luật phân bố của $X, Y, X + Y$ và tính $E(X + Y)$.

c) Tính hệ số tương quan giữa X và Y.

3.27. Hàm mật độ xác suất của véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có dạng

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{9x^2y^2}{8000} & \text{khi } (x, y) \in [0, 4] \times [0, 5] \\ 0 & \text{khi } (x, y) \notin [0, 4] \times [0, 5]. \end{cases}$$

Tính $E(X - 3Y)$.

3.28. Cho véctơ ngẫu nhiên (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & \text{khi } (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \\ 0 & \text{khi } (x, y) \notin (0, \infty) \times (0, \infty). \end{cases}$$

Tính độ lệch chuẩn $\sigma(X)$.

3.29. Xét một hành tròn D bán kính R.

a) Lấy ngẫu nhiên một điểm thuộc D (vị trí của điểm lấy tuân theo phân bố đều). Tính khoảng cách trung bình từ điểm lấy đến tâm hình tròn.

b) Chọn ngẫu nhiên hai điểm (hai lần chọn độc lập, vị trí tuân theo phân bố đều) trong miền D. Gọi X, Y là khoảng cách từ hai điểm chọn tới tâm hình tròn. Tìm luật phân bố của đại lượng $Z = X + Y$.

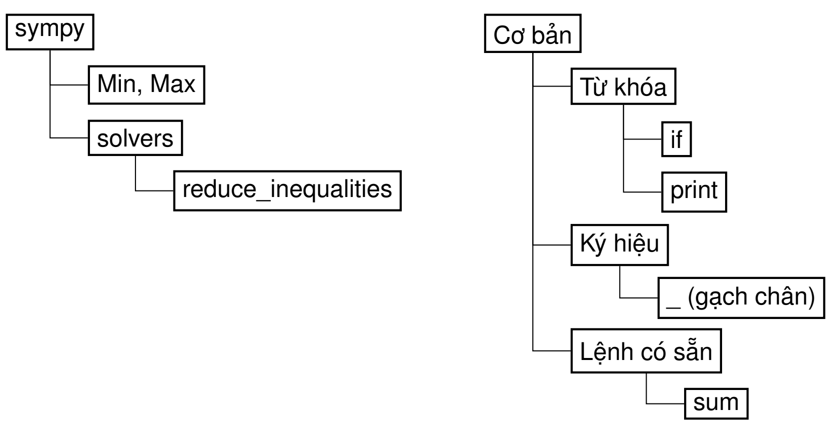
3.30. Một người hẹn chờ hai người bạn tại một địa điểm trong khoảng thời gian từ 0 giờ đến 1 giờ. Giả sử mỗi người trong số hai người bạn nói trên sẽ đến điểm hẹn độc lập với nhau vào một thời điểm bất kỳ trong khoảng thời gian đã hẹn.

a) Tìm hàm phân bố xác suất của thời gian tối thiểu để người hẹn gặp được một trong những người bạn của mình.

b) Tính giá trị trung bình của thời gian đợi nói trên.

3.31. Cho hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập X có phân bố đều trên đoạn $[0, 5]$ và Y có phân bố đều trên đoạn $[-1, 4]$.
Tính độ lệch chuẩn của $Z = X - Y$.

Tóm tắt về Python



Bài tập bổ sung

3.32.

3.33.

Chương 3

Véctơ ngẫu nhiên

3.3 $F(x,y) = \begin{cases} 1 & x > b, y > d \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b, y > d \\ \frac{y-c}{d-c} & x > b, c < y \leq d \\ \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)} & a < x \leq b, c < y \leq d \\ 0 & x \leq a \text{ hoặc } x \leq b \text{ (miền còn lại).} \end{cases}$

3.4 a) $A = 20$.

b) $F(x,y) = \dfrac{1}{4\pi^2}\left(\pi + 2\arctan\dfrac{x}{4}\right)\left(\pi + 2\arctan\dfrac{y}{5}\right)$.

3.7 Gọi X = số ghi trên bi lấy ra ở hộp I, Y = số ghi trên bi lấy ra ở hộp II.

X, Y độc lập và $Z = X + Y$.

X	0	1
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

Y	1	2
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

$X+Y$	1	2	3
P	$\frac{9}{56}$	$\frac{27}{56}$	$\frac{5}{14}$

3.8 $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+3)}{27}, & x \in [0,3] \\ 0, & x \notin [0,3] \end{cases}$. $f_1(x)\, f_2(y) = f(x,y)$, $\forall x, y \Rightarrow X$ và Y độc lập.

3.9 a) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{25-x^2}}{25}, & -5 < x < 5 \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$

b) Khi $-4 < y < 4$, $\varphi(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{2}{5\sqrt{16-y^2}}, & |x| \leq \frac{5}{4}\sqrt{16-y^2} \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$

c) X và Y không độc lập.

3.10 a) $f_1(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| < R \\ 0, & |x| \geq R. \end{cases}$

b) Khi $-R < x < R$, $\psi\left(y \mid x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & |y| < \sqrt{R^2-x^2} \\ 0, & |y| \geq \sqrt{R^2-x^2}. \end{cases}$

3.11 a) (X, Y) có hàm mật độ xác suất đồng thời $f_{XY}(x, y) = f(x) f(y)$.

Hàm phân bố đồng thời của (X, Z):

$$G(x,z) = P(X < x, Z < z) = P(X < x, X + Y < z)$$

$$= \iint\limits_{u<x, u+v<z} f_{XY}(u,v)\, dudv = \begin{cases} 1 - e^{-2z}(1+2z), & x \geq z > 0 \\ 1 - e^{-2x} - 2e^{-2z}x, & 0 < x < z \\ 0, & \text{miền còn lại,} \end{cases}$$

b) $g(x,z) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}(x,z) = \begin{cases} 4e^{-2z}, & 0 < x < z \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$

c) Khi $x > 0$, $\varphi\left(z \mid X = x\right) = \dfrac{g(x,z)}{f(x)} = \begin{cases} 2e^{2x-2z}, & z > x \\ 0, & z \leq x. \end{cases}$

3.12 a)

X	1	2	3	4
P	0.25	0.375	0.16	0.215

Y	1	2	3
P	0.4	0.3	0.3

b) $\dfrac{0.1 + 0.15}{0.25 + 0.375}$

c)

$X \mid Y = 2$	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

d)

$X + Y$	2	3	4	5	6	7
P	0.1	0.25	0.21	0.265	0.1	0.075

e) Tại ô $Y = 1, X = 3$: $0.06 \neq 0.4 \cdot 0.16 \Rightarrow X, Y$ không độc lập.

3.13 a) $f_1(x) = \begin{cases} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$.

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow g(z) = \begin{cases} -\lambda_1\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}}{\lambda_1 - \lambda_2}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$

ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow g(z) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z}\lambda, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$

b) $P(X=k)=e^{-\lambda_1}\dfrac{\lambda_1^k}{k!}$, $P(Y=k)=e^{-\lambda_2}\dfrac{\lambda_2^k}{k!}$, $\forall k=0,1,2\ldots$

$\operatorname{Im} Z=\operatorname{Im}(X+Y)=\{0,1,2,\ldots\}$.

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$
$$=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)\cdot P(Y=k-i)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

tức là $Z\in P_{\lambda_1+\lambda_2}$.

3.14 a) $f_1(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

$$g(z)=\begin{cases}6e^{-3z}(e^z-1), & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

b) $P\left(X<0.5\mid Y<0.5\right)=P(X<0.5)=0.7769$.

c) $P(X<3,Y<2)=P(X<3)\cdot P(Y<2)=0.9816$.

3.15 a) $a=1$

b) $g(z)=\begin{cases}e^{-z}z, & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

3.16 $g(z)=\begin{cases}\dfrac{4\ln 3}{4-\ln 3}\left(3^{-z}-e^{-4z}\right), & z>0\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

3.17 $f_1(x)=\begin{cases}1, & x\in[1,2]\\ 0, & x\notin[1,2]\end{cases}$, $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$, $g(z)=\begin{cases}6-z, & 5<z<6\\ z-4, & 4<z\le 5\\ 0, & z\notin(4,6).\end{cases}$

3.18 Gọi X_i = khối lượng sản phẩm thứ i, $(i=\overline{1,144})$ và Y = khối lượng vỏ hộp. $X_i\sim N\left(8,5^2\right)$, $Y\sim N\left(200,10^2\right)$, và độc lập.

Khối lượng hộp đã đóng gói

$$Z=(X_1+X_2+\cdots+X_{144})+Y$$
$$\sim N\left(\underbrace{8+8+\cdots+8}_{144}+200,\underbrace{5^2+5^2+\cdots+5^2}_{144}+10^2\right)=N(1352,3700).$$

$P(Z>1400)=0.2150$.

3.19 X_i = cân nặng của người i, $(i = \overline{1,9})$. $X_i \sim N\left(58, 5^2\right)$, và độc lập.

Tổng khối lượng của 9 người

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \sim N\left(\underbrace{58 + 58 + \cdots + 58}_{9}, \underbrace{5^2 + 5^2 + \cdots + 5^2}_{9}\right) = N(522, 225)$$

$P(Z > 550) = 0.5530.$

3.20 a)

X	-1	0	1
P	0.2	0.4	0.4

, $EX = 0.2$ b)

$Y \mid X = 0$	1	2	3
P	0.5	0.25	0.25

$X + Y$	0	1	2	3	4
P	0.1	0.25	0.35	0.2	0.1

d)

Z	0	1
P	0.4	0.6

3.21 a) $\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{0.1875}{0.65}$

3.22 a) $\dfrac{3}{104}$

b) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{6x^2 + 3x + 2}{26}, & x \in [0, 2] \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$ $EX = \dfrac{18}{13}.$

c) $f_2(y) = \begin{cases} \frac{3y^2+6y+16}{52}, & y \in [0, 2] \\ 0, & y \notin [0, 2] \end{cases}$ nên $f_1(x) f_2(y) \neq f(x, y)$.

3.23 a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$

$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x + \sin x}{2}, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$

Khi $f_1(x) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, ta có $\psi\left(y \mid x\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x + y)}{\cos x + \sin x}, & 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$

d) $EX = \dfrac{\pi}{4}$, $DX = 0.1876$, $\sigma(X) = 0.4332$.

3.24 a) $\dfrac{1}{96}$

b) $\dfrac{3}{128}$

c) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & x \in (0, 4) \\ 0, & x \notin (0, 4) \end{cases}$

d) $\dfrac{1}{48}, \dfrac{55}{9}$

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{576}(-378 + 123z - z^3), & 5 < z < 9 \\ \dfrac{1}{576}(2 - 3z + z^3), & 1 < z \leq 5 \\ 0, & z \notin (1,9). \end{cases}$$

e) **3.25** a) $f_1(x) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in [0,1) \\ 0, & x \notin [0,1). \end{cases}$

b) $E(XY) = \dfrac{1}{12}$, $EX = \dfrac{1}{3}$, $\operatorname{cov}(X,Y) = -\dfrac{1}{36}$; $DX = \dfrac{1}{18}$, $\rho_{XY} = -\dfrac{1}{2}$.

3.26 a) $\dfrac{1}{4}$

b) $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+1}{2}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$, $g(z) = \begin{cases} z^3, & 0 < z \leq 1 \\ 2 - 3z + 3z^2 - z^3, & 1 < z < 2 \\ 0, & z \notin (0,2) \end{cases}$, $E(X+Y) = \dfrac{5}{4}$.

c) $E(XY) = \dfrac{3}{8}$, $EX = \dfrac{5}{8}$, $\operatorname{cov}(X,Y) = -\dfrac{1}{64}$.

3.27 $-\dfrac{33}{4}$

3.28 $\dfrac{1}{2}$

3.29 a) Gọi (X_1, X_2) là vị trí (tọa độ) của điểm được chọn. (X_1, X_2) có phân bố đều trên D:

$$f(x,y) = \begin{cases} k, & x^2 + y^2 < R^2 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq R^2. \end{cases}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = 1 \Rightarrow k\pi R^2 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\pi R^2}.$$

X = khoảng cách từ (X_1, X_2) đến tâm hình tròn = $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$.

$$EX = E\sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \iint_{\mathbb{R}^2} \sqrt{x^2+y^2} f(x,y)\,dxdy = \frac{2R}{3}.$$

b) $X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ có hàm phân bố

$$F(z) = P(X < z) = P\left(\sqrt{X_1^2 + X_2^2} < z\right)$$

$$= \iint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}<z} f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 1, & z > R \\ \frac{z^2}{R^2}, & 0 < z \le R \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

X có hàm mật độ

$$f_X(z) = F'(z) = \begin{cases} \dfrac{2z}{R^2}, & 0 < z \le R \\ 0, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

X, Y độc lập, có cùng hàm mật độ f_X.

(X, Y) có hàm mật độ đồng thời $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_X(y)$.

$Z = X + Y$ có hàm mật độ

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_X(z-x)\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2z^3}{3R^4}, & 0 < z \le R \\ -\dfrac{2\left(4R^3 - 6R^2 z + z^3\right)}{3R^4}, & R < z < 2R \\ 0, & z \notin (0, 2R). \end{cases}$$

3.30 a) Gọi X, Y là thời điểm hai người bạn đến điểm hẹn. X, Y độc lập và có cùng phân bố $U(0,1)$, tức là, có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Thời gian tối thiểu để người hẹn gặp được một trong hai người bạn của mình

$$Z = \min\{X, Y\},$$

có hàm phân bố xác suất

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z < z) = 1 - P(Z \ge z) = 1 - P\left(\min\{X,Y\} \ge z\right) \\ &= 1 - P(X \ge z, Y \ge z) = 1 - P(X \ge z) \cdot P(Y \ge z) \\ &= 1 - \left[\int_z^{\infty} f(x)\,dx\right]^2 = \begin{cases} 1, & z \ge 1 \\ z(2-z), & 0 < z < 1 \\ 0, & z \le 0. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Z có hàm mật độ

$$f_Z(z) = F'(z) = \begin{cases} 2(1-x), & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1). \end{cases}$$

Thời gian đợi trung bình

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \frac{1}{3}.$$

3.31 $f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5-0} = \dfrac{1}{5}, & x \in [0,5] \\ 0, & x \notin [0,5] \end{cases}$, $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$.

$EZ = 1$, $E(Z^2) = \dfrac{31}{6}$, $DZ = \dfrac{25}{6}$, $\sigma(Z) = \dfrac{5}{\sqrt{6}}$.