Mục lục

Chương 4

Các định lý giới hạn

Bất đẳng thức Chebyshev: Cho X là đại lượng ngẫu nhiên có kỳ vọng và phương sai hữu hạn. Khi đó $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(|X - EX| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}. \tag{4.1}$$

Định lý 4.1 (Luật số lớn Chebyshev)**.** *Cho $X_1, X_2, \ldots$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn: $EX_n = a$ $\forall n$. Khi đó* $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Định nghĩa 4.1. *Dãy đại lượng ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots$ gọi là hội tụ theo xác suất tới đại lượng ngẫu nhiên X, ký hiệu $X_n \xrightarrow{p} X$ nếu:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1 \ \forall \varepsilon > 0.$$

Ký hiệu $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$, ta có

$$(4.1) \Leftrightarrow \overline{X} \xrightarrow{p} a. \tag{4.2}$$

Áp dụng: Đặt m = số lần A xảy ra trong n lần thử. Ký hiệu

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{nếu } A \text{ xảy ra ở lần thử thứ } i \\ 0, & \text{ngược lại} \end{cases}$$

thì $m = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \Rightarrow \overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \dfrac{m}{n}$.

Mặt khác, $X_1, X_2, \ldots$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập, cùng bảng phân bố

$$\begin{array}{c|cc} X_n & 0 & 1 \\ \hline P & 1-p & p \end{array} \Rightarrow EX_n = p, \ DX_n = p(1-p).$$

Do đó

$$(4.2) \Leftrightarrow \frac{m}{n} \xrightarrow{p} p. \tag{4.3}$$

Ví dụ 4.1. Xét $I = \int_0^1 \varphi(x)dx$. Đặt $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$, là hàm mật độ của $X \sim U[0,1]$.

Khi đó $I = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx = E\left[\varphi(X)\right]$.

Hãy tính gần đúng $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$ bởi $\overline{\varphi(X)} = \frac{\varphi(X_1) + \varphi(X_2) + \cdots + \varphi(X_n)}{n}$ (thực nghiệm 10 lần với số lần thử $n = 1\,000, 10\,000, 100\,000, 1\,000\,000$).

Giải.

Lần thực nghiệm \ Số lần thử	1000	10 000	100 000	1 000 000
1	0.337149	0.334444	0.333024	0.332932
2	0.337935	0.33325	0.332922	0.333245
3	0.342481	0.333367	0.33257	0.333229
4	0.339492	0.334291	0.333543	0.333357
5	0.347686	0.336503	0.332915	0.333079
6	0.323709	0.333164	0.332536	0.33376
7	0.328597	0.335589	0.332178	0.333416
8	0.339541	0.32789	0.333202	0.33374
9	0.317256	0.332914	0.334396	0.332986
10	0.327741	0.331344	0.335878	0.333006

□

Ví dụ 4.2. Chọn ngẫu nhiên một điểm trong hình vuông cho trước.

a) Tìm xác xuất để chọn được điểm ở miền trong hình tròn nội tiếp hình vuông.

b) Xấp xỉ π thông qua tần suất $\frac{m}{n}$ của xác suất trên (thực nghiệm 10 lần với mỗi số lần thử $n = 1000, 10\,000, 100\,000, 1\,000\,000$).

Giải. a) Đặt a là độ dài cạnh hình vuông. Khi đó bán kính hình tròn nội tiếp hình vuông là $r = \frac{a}{2}$. Xác suất để chọn được điểm ở miền trong hình tròn nội tiếp hình vuông

$$p = \frac{S(\text{hình tròn})}{S(\text{hình vuông})} = \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

b) $p = \dfrac{\pi}{4} \approx \dfrac{m}{n} \Rightarrow \pi \approx 4\dfrac{m}{n}$.

Trong mặt phẳng Oxy, xét hình vuông $\Omega = \{(x, y) \mid -1 < x, y < 1\}$. Hình tròn nội tiếp hình vuông $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Một số giá trị gần đúng của π theo số lần thử n:

Lần thực nghiệm \ Số lần thử	1000	10 000	100 000	1 000 000
1	3.164	3.1008	3.1388	3.14194
2	3.216	3.1616	3.14	3.1421
3	3.188	3.136	3.14496	3.13982
4	3.164	3.1248	3.13648	3.14131
5	3.132	3.1356	3.14908	3.14457
6	3.132	3.1404	3.1348	3.14414
7	3.136	3.1268	3.14708	3.14431
8	3.108	3.1036	3.14056	3.14123
9	3.168	3.1436	3.1424	3.1404
10	3.2	3.1636	3.13768	3.13891

□

Định lý 4.2 (Định lý giới hạn trung tâm)**.** *Cho $X_1, X_2, \ldots$ là dãy đại lượng ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố, có kỳ vọng và phương sai hữu hạn: $EX_n = a, DX_n = \sigma^2\ \forall n$. Khi đó $\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}$ có phân bố tiệm cận chuẩn $N(0,1)$, tức là*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} < x\right) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,\ \forall x. \tag{4.4}$$

Áp dụng: m = số lần A xảy ra trong n lần thử. $\dfrac{\overline{X} - a}{\sigma}\sqrt{n} = \dfrac{\dfrac{m}{n} - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} = \dfrac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Ta có

$$\begin{aligned} P(k_1 \le m \le k_2) &= \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= P\left[\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \\ &\approx P\left[\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le N(0,1) \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \\ &= \Phi\left[\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] - \Phi\left[\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ví dụ 4.3. Khi giải Bài tập 1.29, ta cần tính xác suất có biểu thức $\sum_{k=51}^{400} C_{400}^{k} 0.1^{k} 0.9^{400-k} = 0.04364$. Tính gần đúng tổng trên.

Giải. $n = 400, p = 0.1$. Ta có

$$\sum_{k=51}^{400} C_{400}^{k} 0.1^{k} 0.9^{400-k} \approx P\left[\frac{51 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq N(0,1) \leq \frac{400 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$$
$$= P[1.8333 \leq N(0,1) \leq 60] = 0.0334.$$

□

Bài tập Chương 4

4.1. Gieo một xúc sắc cân đối và đồng chất 12 000 lần. Tìm xác suất để số lần xuất hiện mặt một chấm từ 1 900 tới 2 150.

4.2. Một cuộc thi trắc nghiệm gồm 100 câu hỏi. Mỗi câu có 5 lựa chọn để trả lời trong đó chỉ có 1 lựa chọn đúng. Tìm xác suất để một thí sinh hoàn toàn không biết gì về môn học đó trả lời đúng từ 20 câu đến 30 câu.

4.3. Biết rằng khối lượng của một sản phẩm lấy ngẫu nhiên là đại lượng ngẫu nhiên có phân bố chuẩn với kỳ vọng bằng 10g, độ lệch chuẩn 1g. Tìm xác suất để trong 200 sản phẩm lấy ngẫu nhiên có:

a) Ít nhất một sản phẩm có khối lượng lớn hơn 11g.

b) từ 60 đến 100 sản phẩm có khối lượng lớn hơn 11g.

4.4. Đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố mũ với kỳ vọng bằng 2. Quan sát X 1000 lần. Tìm xác suất để có từ 210 đến 240 lần X nhận giá trị nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

4.5. Một phân xưởng may có 185 máy hoạt động. Giả sử xác suất để trong ca mỗi máy bị hỏng là 0.05.

a) Tính xác suất trong ca có 6 máy bị hỏng, số máy bị hỏng có khả năng nhất và xác suất trong trường hợp đó.

b) Tính xác suất để có từ 5 đến 20 máy hỏng trong ca.

Chương 4

Các định lý giới hạn

4.1 $n = 12\,000$, $p = \dfrac{1}{6}$, m = số lần xuất hiện mặt một chấm.

$$P(1900 \leq m \leq 2150) = P\left[-2.4495 \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 3.6742\right]$$
$$\approx P[-2.4495 \leq N(0,1) \leq 3.6742] = 0.9927.$$

4.2 $n = 100$, $p = \dfrac{1}{5}$, m = số câu trả lời đúng.

$$P(20 \leq m \leq 30) = P\left[0 \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 2.5\right] \approx P[0 \leq N(0,1) \leq 2.5] = 0.4938.$$

4.3 X = khối lượng một sản phẩm. $X \in N\left(\mu, \sigma^2\right)$: $\mu = 10, \sigma = 1$.

$p = P(X > 11) = 0.1587$, $n = 200$, m = số sản phẩm có khối lượng lớn hơn 11g.

a)

$$P(m \geq 1) = P\left[-5.9477 \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 32.5668\right]$$
$$\approx P[-5.9477 \leq N(0,1) \leq 32.5668] = 1.$$

b)

$$P(60 \leq m \leq 100) = P\left[5.4712 \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 13.2128\right]$$
$$\approx P[5.4712 \leq N(0,1) \leq 13.2128] = 0.$$

4.4 $p = P\left(X < \dfrac{1}{2}\right) = 0.2212$, $n = 1000$, m = số lần thấy $X > \dfrac{1}{2}$.

$$P(210 \leq m \leq 240) = P\left[-0.8533 \leq \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1.4324\right]$$

$$\approx P[-0.8533 \leq N(0,1) \leq 1.4324] = 0.7272.$$

4.5 a) $n = 185, p = 0.05$.

* $P(m = 6) = C_n^6 p^6 (1-p)^{n-6} = 0.08250$.

* $(n+1)p = 9.3 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ số máy bị hỏng có khả năng nhất $k_0 = \lfloor 9.3 \rfloor = 9$.

$p_0 = C_n^9 p^9 (1-p)^{n-9} = 0.1346$.

b)

$$P(5 \leq m \leq 20) = P\left[-1.4337 \leq \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 3.6264\right]$$
$$\approx P[-1.4337 \leq N(0,1) \leq 3.6264] = 0.9240.$$