EXERCÍCIO 2

(5,0) Considere o cruzamento de duas avenidas numa região plana de uma cidade. Uma delas correspondente ao eixo 0y e a outro ao eixo 0x. Um carro A trafega com velocidade constante $\vec{V}_A = 30\vec{i}$ (m/s) em relação a origem 0. Outro carro B, encontra-se em repouso no cruzamento, esperando o sinal verde. Assim que A passa pelo cruzamento o sinal fica verde e o carro B parte com velocidade dependente do tempo de tal forma que nos 5 primeiros segundos sua velocidade é dada por:

$$\vec{V}_{\frac{B}{0}} = (1,2)\,t + 2t^2\vec{j} \qquad (s; m/s)$$

Depois de 5 segundos o carro B mantém sua velocidade constante. O carro A mantém a sua velocidade constante durante todo o tempo. Quando carro B inicia o movimento o carro A está a 10 metros dele. Nesse instante, começamos a contar o tempo. Com esses dados, determine:

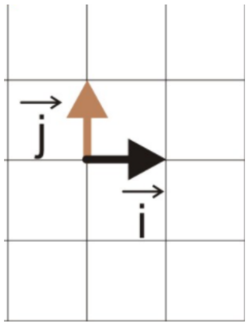
a. Os vetores posições dos dois carros como função do tempo.
b. A distância entre os carros A e B como função do tempo e sua distância decorridos 5 segundos.
c. A velocidade do carro B em relação ao carro A, após 5 segundos do evento descrito.

a) Nós vimos no exercício anterior que quando derivamos a equação horária dos espaços nós encontramos a equação da velocidade em função do tempo.
Neste exercício temos o inverso: sabemos a equação da velocidade em função do tempo e queremos achar a equação horária dos espaços dos carros A e B.
Aqui vai a primeira informação: a Integral, representada pelo símbolo $\int$, é a operação inversa da derivada. Ou seja, quando integramos uma função, nós voltamos à função original antes que ela fosse derivada.
Assim, se a derivada da equação horária dos espaços nos fornece a equação da velocidade, a **Integral** da equação da velocidade nos fornece a equação horária dos espaços, ou seja, os vetores posição em função do tempo que o exercício nos pede.
Desta forma, vamos integrar as funções:

(i) $\vec{v}_A = 30\vec{\imath}\, m/s$

(ii) $\vec{v}_B = (1{,}2)t + 2t^2\vec{\jmath}\, m/s$

Uma observação: os índice $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$significam somente a direção dos objetos. Nesse caso, que $\vec{\jmath}$ o carro B está indo para cima e que $\vec{\imath}$ o carro A está indo para a direita.



Então, vamos lá Integrar as duas funções:
Vamos chamar o vetor posição do carro B de $\overrightarrow{r_b}$

$$\overrightarrow{r_b} = \int (1{,}2)t + 2t^2\vec{\jmath}\,dt$$

$$\overrightarrow{r_b} = \int \frac{(1{,}2)t^{1+1}}{1+1} + \frac{2t^{2+1}}{2+1}\vec{\jmath}\,dt$$

$$\overrightarrow{r_b} = \frac{(1{,}2)t^2}{2} + \frac{2t^3}{3}\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r_b} = (0{,}6t^2 + \frac{2t^3}{3})\vec{\jmath}$$

O mesmo raciocínio utilizamos para o vetor posição do carro A.
Porém, devemos lembrar que no início da contagem o carro A já está na posição +10 (distância entre ele e o carro B no início do tempo).

$$\vec{r}_A = \int 30\vec{\imath}$$

$$\vec{r}_A = \int \frac{30t^{0+1}\vec{\imath}}{1}$$

$$\vec{r}_A = 30t\,\vec{\imath}$$

E agora somamos os 10 metros

$$\vec{r}_A = (30t + 10)\vec{\imath}$$

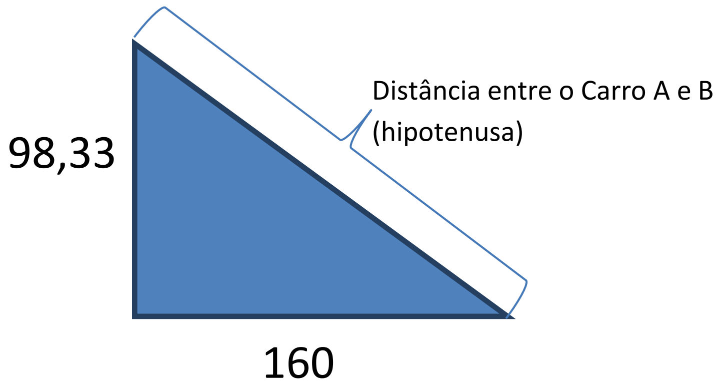
b) Para encontrar a distância entre A e B em função do tempo, basta subtrairmos as duas funções, ou seja, fazer $\vec{r}_a + \vec{r}_b$

$$\vec{r}_a + \vec{r}_b = (30t + 10)\vec{\imath} + \ (0{,}6t^2 + \frac{2t^3}{3})\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_a + \vec{r}_b = (30.5 + 10)\vec{\imath} + \ (0{,}6.5^2 + \frac{2.5^3}{3})\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_a + \vec{r}_b = 160\vec{\imath} + \ 98{,}33\vec{\jmath}$$

Agora, devemos pensar que o carro A está à distância de 160m no sentido para a direita e o carro B está à distância de 98,33m no sentido para cima. Assim, pensamos no seguinte triângulo retângulo de representa esse movimento:



Agora ficou fácil!

A distância entre os carros A e B é a Hipotenusa do triangulo retângulo da figura.

E como calculamos a hipotenusa?

$$Hipotenusa^2 = lado1^2 + lado2^2$$
$$H^2 = (160)^2 + (98{,}33)^2$$
$$H^2 = 25600 + 9668{,}78$$
$$H = \sqrt[2]{25600 + 9668{,}78}$$
$$H = \sqrt[2]{35268{,}78}$$
$$H = 187{,}79m$$

c) Após a ocorrência do evento, significa dizer qual a velocidade do carro B em relação ao carro A depois desse daquele ter atingido sua velocidade constante.

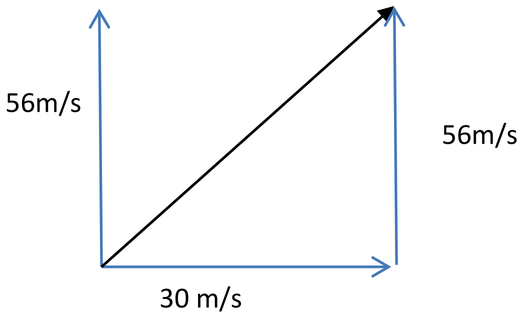
Assim, vejamos primeiro qual é a velocidade do carro A no segundo 5:

$$\vec{v}_B = (1{,}2)t + 2t^2\vec{J}m/s$$
$$\vec{v}_B = (1{,}2)5 + 2.5^2\vec{J}$$
$$\vec{v}_B = 6 + 50\vec{J}$$
$$\vec{v}_B = 56m/s\vec{J}$$

Ou seja, quando ele atinge a velocidade de 56m/s ele não vai mais variar a velocidade obedecendo a equação de $\vec{v}_B$ mas sim manterá essa velocidade constante.

Pois bem, o carro A já tem sua velocidade constante e igual a 30m/s.

Dessa forma, podemos dizer que os carros se deslocam da seguinte maneira:



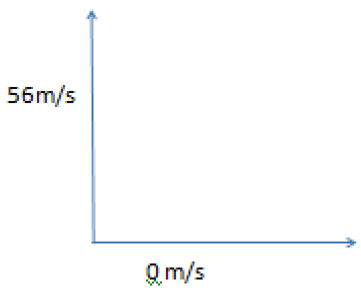
Mas nós sabemos que o resultado da composição desses dois vetores ($\vec{i}$ e $\vec{j}$) é dado pelo comprimento da linha tracejada.
E, novamente, o comprimento da linha tracejada é igual à hipotenusa do triangulo retângulo formado pelas duas componentes (56 e 30).
Assim, temos:

$$Hipotenusa^2 = lado1^2 + lado2^2$$
$$H^2 = 56^2 + 30^2$$
$$H^2 = 3136 + 900$$
$$H^2 = 4036$$
$$H = \sqrt[2]{4036}$$
$$H = 63{,}52$$

Assim, concluímos que a velocidade é de 63,52m/s

Vamos brincar um pouco com o conceito de referenciais.

Agora pensemos um pouco diferente. Imagine se o referencial adotado estiver no carro A (seria um referencial não inercial), para este referencial o único carro em movimento é simplesmente o carro B, seria como se o mesmo observa-se um movimento retilíneo uniforme do carro sendo assim, teríamos a seguinte configuração:



Assim teríamos simplesmente no sistema adotado, a velocidade do carro B, que já foi calculada e é de 56m/s.