进位计数制

战德臣

哈尔滨工业大学　教授.博士生导师

教育部大学计算机课程教学指导委员会委员

Research Center on Intelligent Computing for Enterprises & Services, Harbin Institute of Technology

进位计数制与十进制

◆进位制：用数码和带有权值的数位来表示有大小关系的数值性信息的表示方法。

◆十进制

$$
\begin{array}{ccccccc}
(2 & 4 & 5 & . & 2 & 5)_{十} \\
| & | & | & & | & | \\
2 & 1 & 0 & & -1 & -2 \\
10^2 & 10^1 & 10^0 & & 10^{-1} & 10^{-2}
\end{array}
$$

$$(245.25)_{十} = 2\times10^2 + 4\times10^1 + 5\times10^0 + 2\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$$

- 有0,1,2,3,4,5,6,7,8,9共十个数码
- 数码的位置规定了数码的等级“权/数位”：10^i
- 逢十进一、借一当十、高数位的1相当于低数位的10
- “十”----基值，十进制

二进制

- 有**0,1**共两个数码
- 数码的位置规定了数码的等级“权/数位”：**2^i**
- 逢二进一、借一当二、高数位的**1**相当于低数位的**2**
- “二”----基值，二进制

$2^7\ 2^6\ 2^5\ 2^4\ 2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0\ .\ 2^{-1}\ 2^{-2}$ ———— *数位的权值*

7 6 5 4 3 2 1 0 .-1 -2 ———— *数位*

例如： $(1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ .\ 0\ 1)_{二}$ ———— *二进制数*

$$=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2} = (245.25)_{十}$$

r 进制

$r^{n-1}\ r^{n-2}\ \ldots\ \ldots\ r^{2}\ r^{1}\ r^{0}\ .\ r^{-1}\ r^{-2}\ldots\ldots\ r^{-m}$ —— *数位的权值*

$n\text{-}1\ n\text{-}2\ \ldots\ 2\ 1\ 0\ .\ \text{-}1\ \text{-}2\ \ldots\ \text{-}m$ —— *数位*

$(d_{n-1}d_{n-2}\ldots\ldots d_2d_1d_0\ .\ d_{-1}d_{-2}\ldots\ldots d_{-m})_r$ —— *r进制数*

$$=d_{n-1}r^{n-1}+d_{n-2}r^{n-2}+\cdots+d_2r^2+d_1r^1+d_0r^0+d_{-1}r^{-1}+d_{-2}r^{-2}+\cdots+d_{-m}r^{-m}$$

$$=\sum_{i=-m}^{n-1}d_ir^i$$

- 十六进制：0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A(10), B(11), C(12), D(13), E(14), F(15)
- 八进制：0,1,2,3,4,5,6,7
- 十进制：0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$(365.2)_{10}$,（$11011.01)_2$,（$3460.32)_{八}$, $(596.12)_{十六}$

进位计数制

(4)不同进制表示的数码，大小是不同的?

战德臣 教授

$(7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7)_{八} = 7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7\ \ O$

$=7\times8^{2}+5\times8^{1}+3\times8^{0}+3\times8^{-1}+7\times8^{-2}$

$=(491.484375)_{十}$

$(7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7)_{十六} = 7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7\ \ H = 0x\ 7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7$

$=7\times16^{2}+5\times16^{1}+3\times16^{0}+3\times16^{-1}+7\times16^{-2}$

$=(1875.2148)_{十}$

$(7\ 5\ 3\ .\ 3\ 7)_{十二}$

$=7\times12^{2}+5\times12^{1}+3\times12^{0}+3\times12^{-1}+7\times12^{-2}$

$=(1071.2986)_{十}$

同一个数串，由于进位制不同其所表达的数值大小也是不同的

245的十进制表示记为：

245

245的二进制表示记为：

11110101

245的八进制表示记为：

365

245的十六进制表示记为：

F5

同一个数值，用不同进位制表达，结果也是不同的

进位计数制之间的转换

战德臣
哈尔滨工业大学　教授.博士生导师
教育部大学计算机课程教学指导委员会委员

Research Center on Intelligent
Computing for Enterprises & Services,
Harbin Institute of Technology

(1)r进制到十进制?

r进制 ➡ 十进制(已知$d_m \ldots d_{-n}$，求十进制的N)

$$N = (d_{n-1}d_{n-2}\ldots\ldots d_2d_1d_0.d_{-1}d_{-2}\ldots\ldots d_{-m})_r$$

$$= d_{n-1}r^{n-1} + d_{n-2}r^{n-2} + \cdots + d_2r^2 + d_1r^1 + d_0r^0 + d_{-1}r^{-1} + d_{-2}r^{-2} + \cdots + d_{-m}r^{-m}$$

$$= \sum_{i=-m}^{n-1} d_i r^i$$

例如

$$\begin{array}{l} \;\;7\;6\;5\;4\;3\;2\;1\;0\;.{-1}\;{-2} \\ \hline (1\;1\;1\;1\;0\;1\;0\;1\;.\;0\;1)_{二} \end{array}$$

$=1\times2^7+1\times2^6+1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2} = (245.25)_{十}$

再如 $(F5.4)_{十六} = F\times16^1+5\times16^0+4\times16^{-1} = (245.25)_{十}$

进位计数制之间的转换
(2)十进制到r进制?

战德臣 教授

十进制 ➡ r进制(已知十进制的N, 求d_i):整数部分

$$N = (d_{n-1}d_{n-2}\ldots\ldots d_2d_1d_0)_r$$

$$=d_{n-1}r^{n-1} + d_{n-2}\,r^{n-2}+\cdots+d_2\,r^2 + d_1\,r^1 + d_0\,r^0$$

(N/r)的余数为 d_0

((N/r)/r)的余数为 d_1

(((N/r)/r)/r)的余数为 d_2

… ...

(…(((N/r)/r)/r)…/r)的余数为 d_{n-1}

"除基取余"

16 | 245

16 | 15 ------ 5

0 ------ 15(F)

例如: $(245)_{十} = (F5)_{十六}$

十进制 → r进制(已知十进制的N, 求d_i):小数部分

$$N = (0.d_{-1}d_{-2}\ldots\ldots d_{-m})_r = d_{-1}r^{-1} + d_{-2}r^{-2} + \cdots + d_{-m}r^{-m}$$

(N×r)的整数部分为d_{-1}

((N×r)×r)的整数部分为d_{-2}

(((N×r)×r)×r)的整数部分为d_{-3}

…… …

(…(((N×r)×r)×r)…×r)的整数部分为d_{n-1}

注：每次相乘都是去掉整数后的小数部分相乘。

“乘基取整”

$$\begin{array}{rr} & 0.525 \\ & \times\ 16 \\ \hline 8 & .4 \\ & \times\ 16 \\ \hline 6 & .4 \\ & \times\ 16 \\ \hline 6 & .4 \\ & \times\ 16 \\ \hline 6 & .4 \end{array}$$

例如：$(0.525)_{十} = (0.8666)_{十六}$

进位计数制之间的转换
(3)二进制到十六进制?

战德臣 教授

二进制 → 十六进制

因为：$8=2^3, 16=2^4$,即3位二进制数相当于一位八进制数,4位二进制数相当于一位十六进制,从小数点开始向左右分组，3位一组或4位一组，每一组转换成相应的8进制或十六进制即可;

例如 $(7\quad 5\quad 3\ .\ 3\quad 7)_{\text{八}}$

$=(111\ 101\ 011\ .\ 011\ 111)_{\text{二}}$

再如 $(011, 101, 011\ .\ 011, 110)_{\text{二}}$

$=(3\quad 5\quad 3\ .\ 3\quad 6)_{\text{八}}$