非线性方程求根

非线性方程求根

求函数 $f(x) = x^2 - 5$ 的正根

1 搜索法

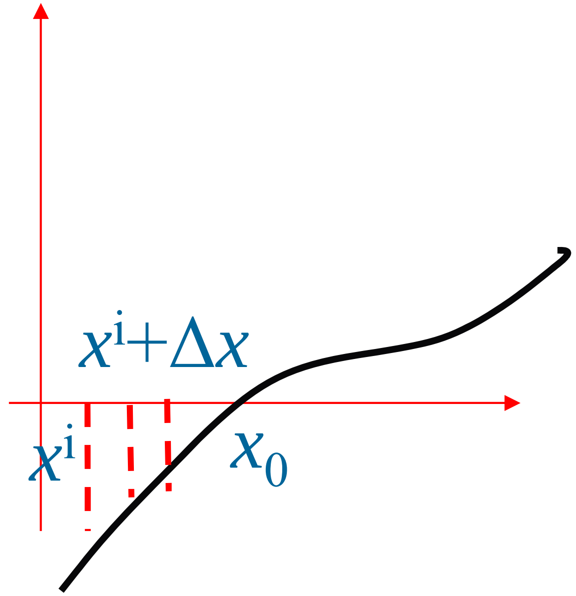
2 二分法

3 Newton-Raphson

4 弦割法

搜索法

$$f(x)=x^2-5$$



一般步骤：

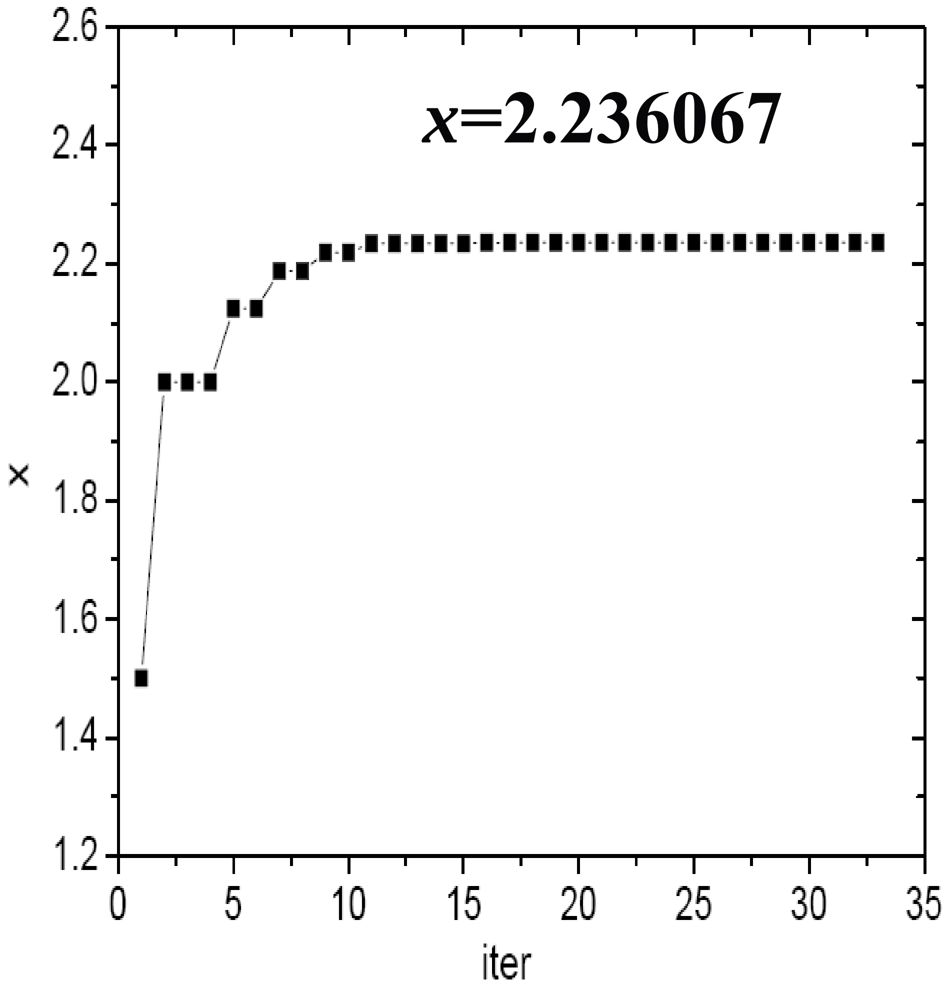
1. 随便猜一个**x**试验值（**x**比根小）

2. 以小的**x**正步长增加**x**之值

3. 当f之值改变符号时，将**x**倒退一步，并将步长减半

4. 当步长小于容许的误差时终止搜索

容许误差：0.000001；初值：x=1; 初始步长：dx=0.5



exam-2-2-1.py

二分法(bisection method)

基本思路：

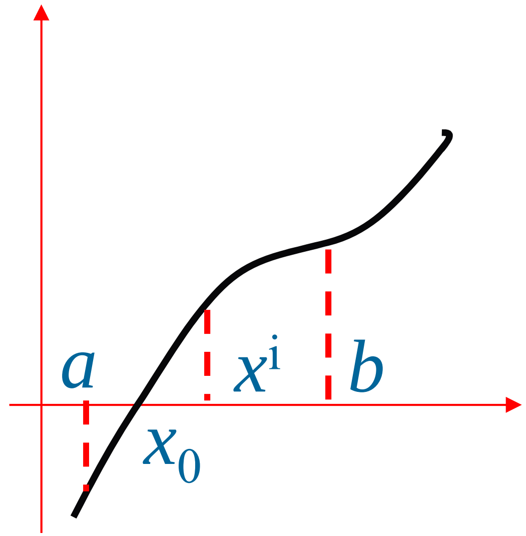
逐次缩短包含方程根的区间，直至区间宽度满足精度要求

$$f(\mathrm{a})\cdot f(\mathrm{b})<0$$

则：**[a,b]**至少存在一个根

分割区间： $x_i=(a+b)/2$

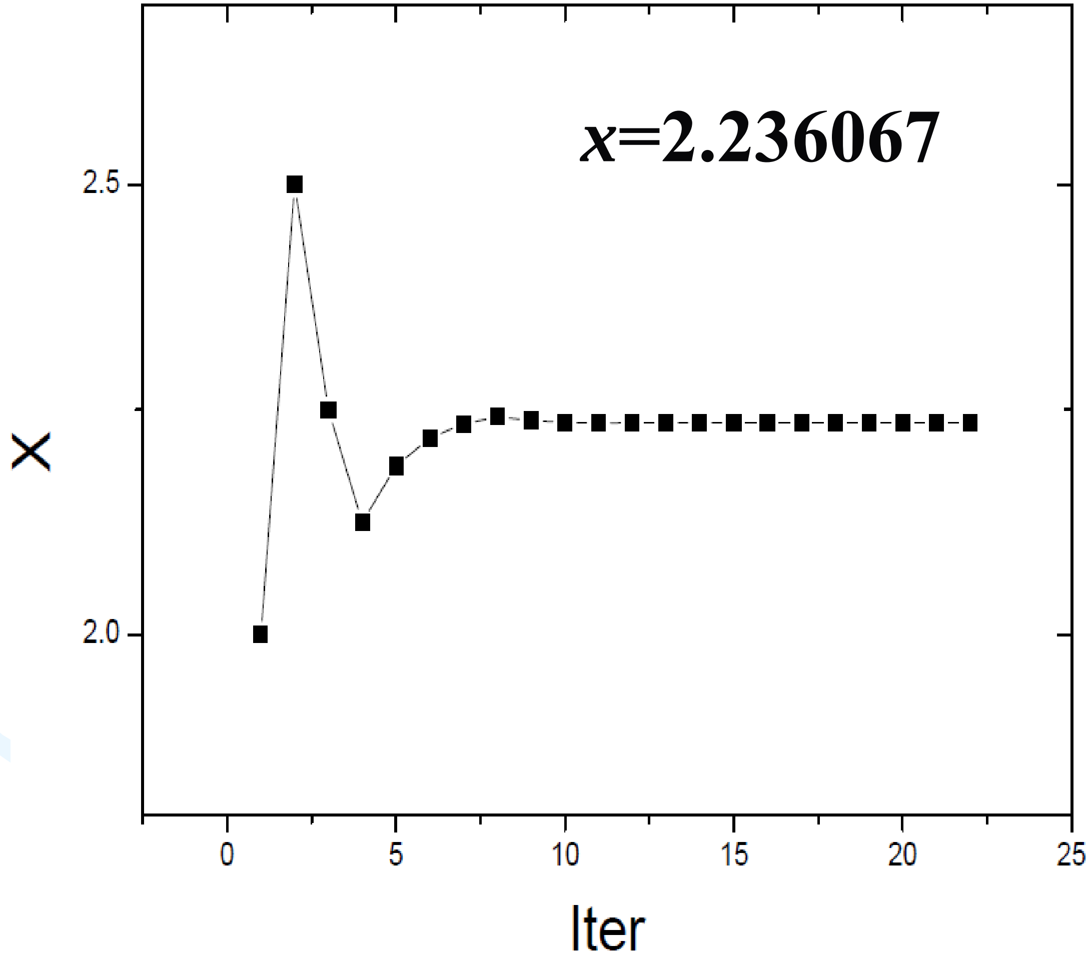
$$f(a)f(x_i)\begin{cases}<0 & [a,x_i]\text{有根; 令}b=x_i\\ >0 & [x_i,b]\text{有根;令}a=x_i\\ =0 & c\text{是方程根}\end{cases}$$



计算步骤：

1. 设定精度要求δ，或者ε
2. 选定包含方程根的初始区间边界$[a,b]$,即$f(a)f(b)<0$
3. 计算$x_i=(a+b)/2$,
4. 判断：$|b-a|<\delta$或$|f(xi)|<\varepsilon$，则x_i为方程根迭代停止；
   否则，若$f(a)f(x_i)<0$,则$b=x_i$;若$f(b)f(x_i)<0$,则$a=x_i$
5. 重复3,4步

容许误差：**0.000001**；初值：***xa*=2; *xb*=3**



exam-2-2-2.py

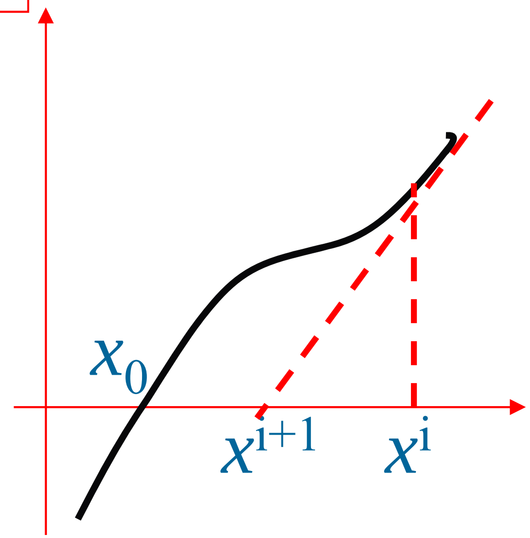
Newton-Raphson方法

基本思路：

用直线代替原函数，直线的零点代替方程的根

$$f'(x^i) = \frac{f(x^i) - f(x_{i+1})}{x^i - x_{i+1}}$$

等于零

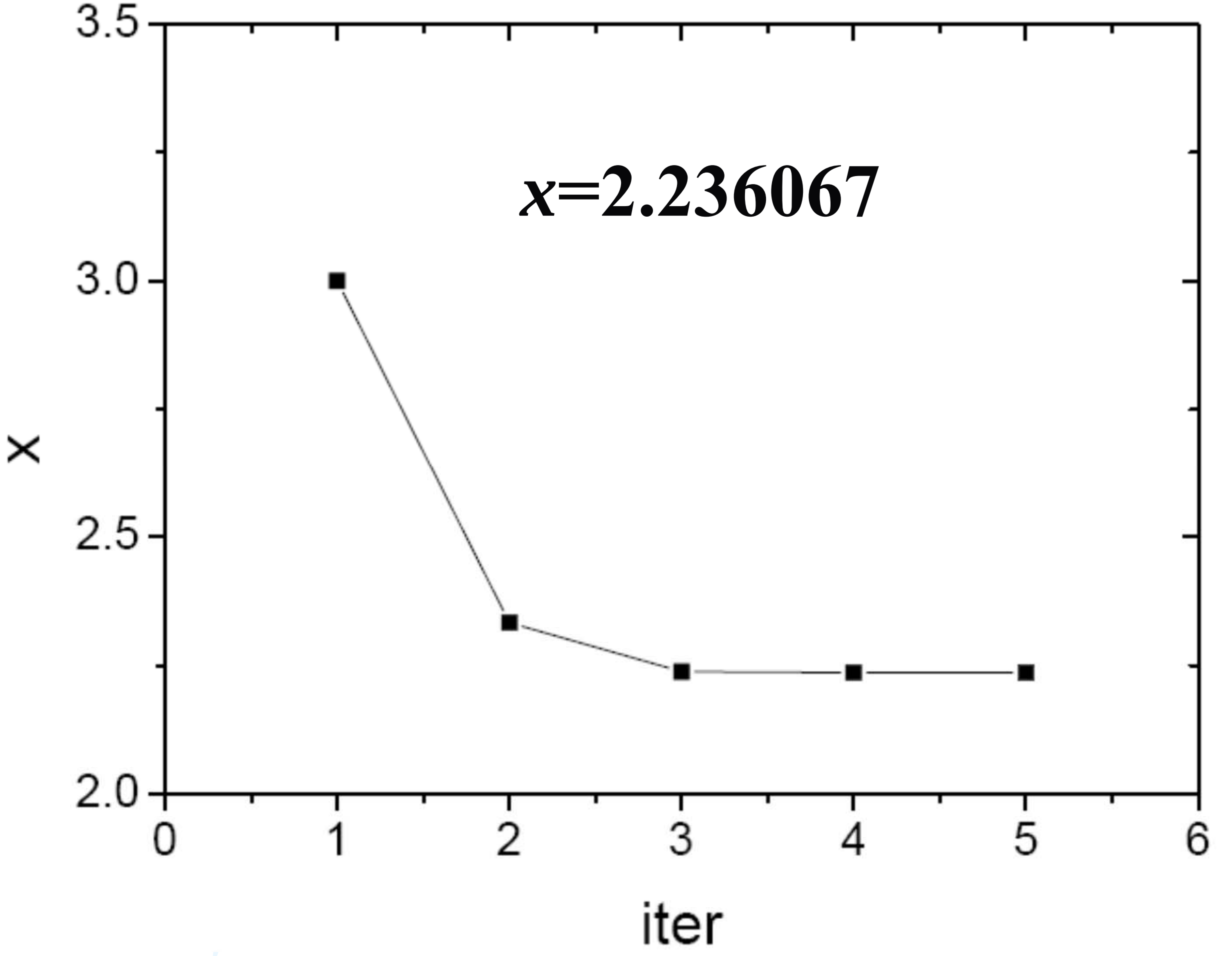


$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$

当导数可以解析计算时很方便

计算步骤：

1. 选定初始值x_1,
2. 计算$f(x_1)$和$f'(x_1)$,
3. 按迭代公式计算x_2,再求$f(x_2)$和$f'(x_2)$
4. 判别：如果$|f(x_2)|\approx 0$则迭代停止；
   否则，用x_2代替x_1,.
5. 重复2,3,4步



exam-2-2-3.py

弦割法

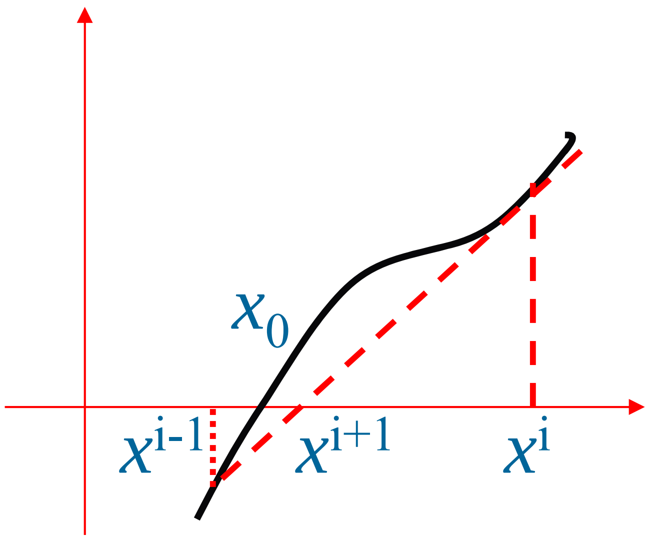
基本思路：

Newton-Raphson法中的微分用差分代替

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$

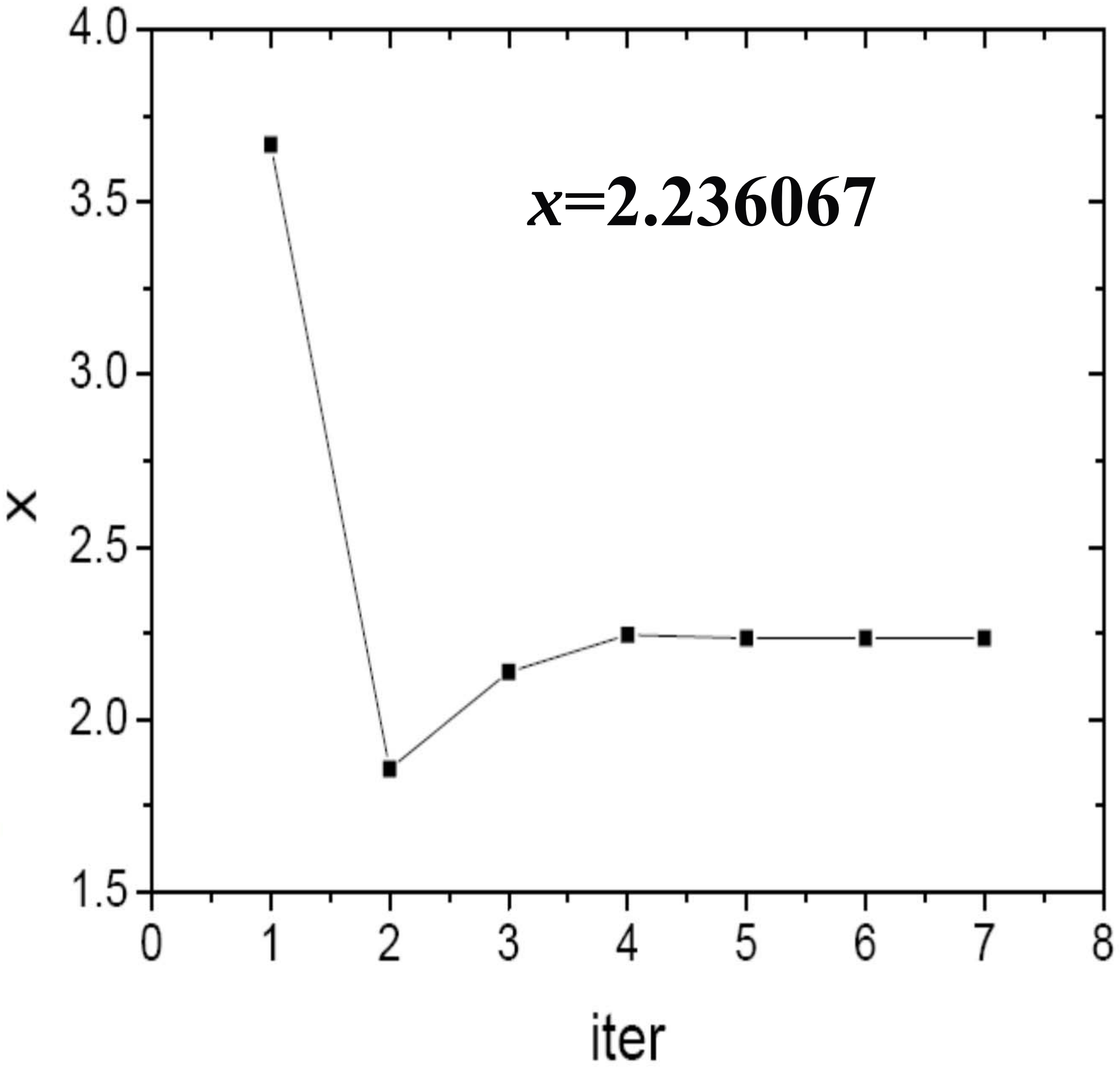
$$f'(x^i) = \frac{f(x^i) - f(x^{i-1})}{x^i - x^{i-1}}$$

$$x^{i+1} = x^i - f(x^i)\frac{(x^i - x^{i-1})}{f(x^i) - f(x^{i-1})}$$

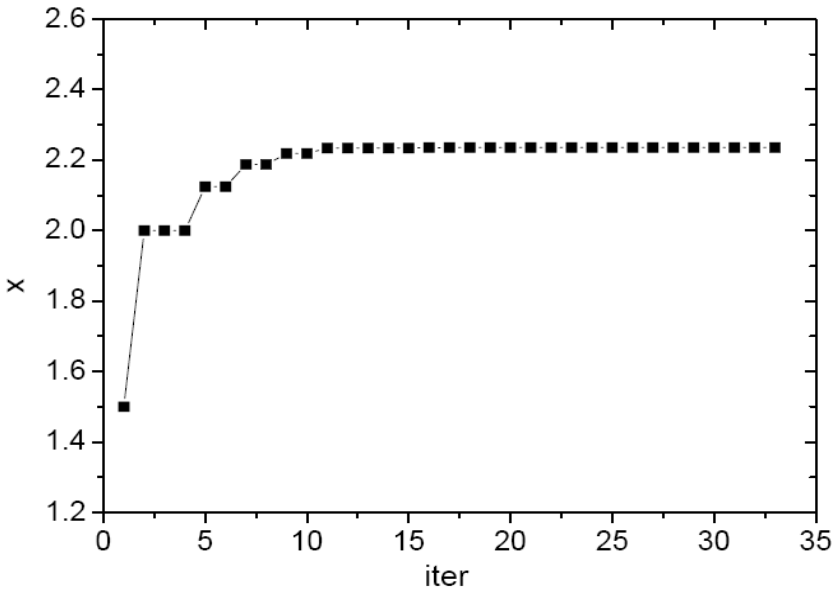
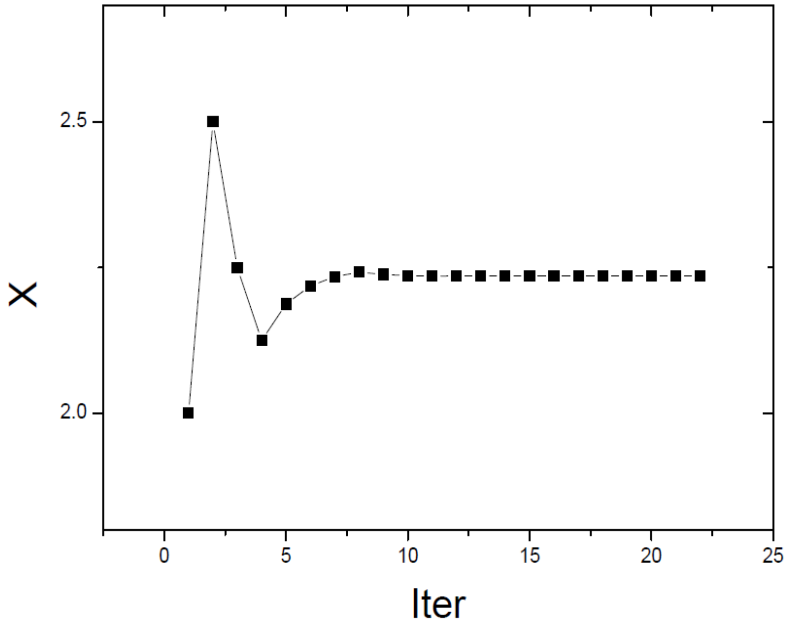
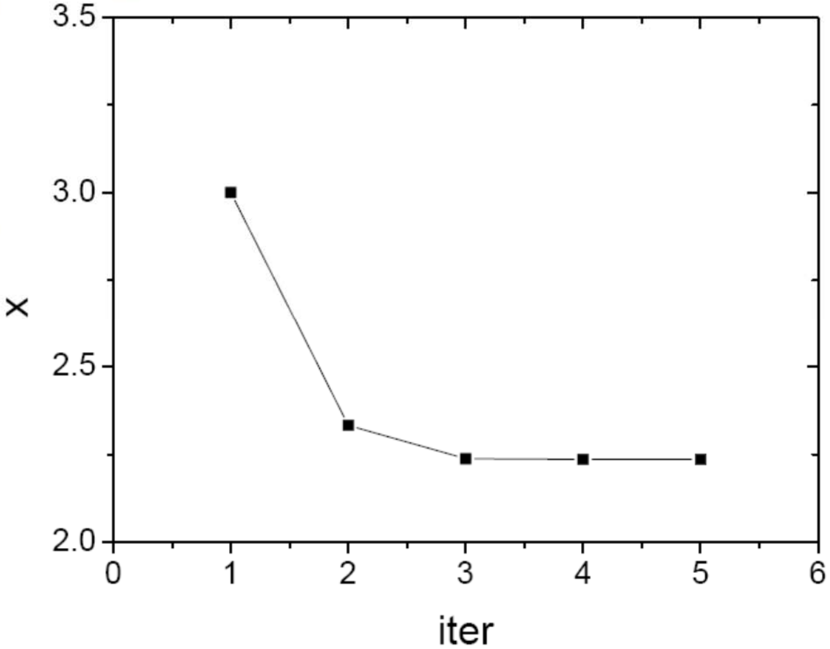
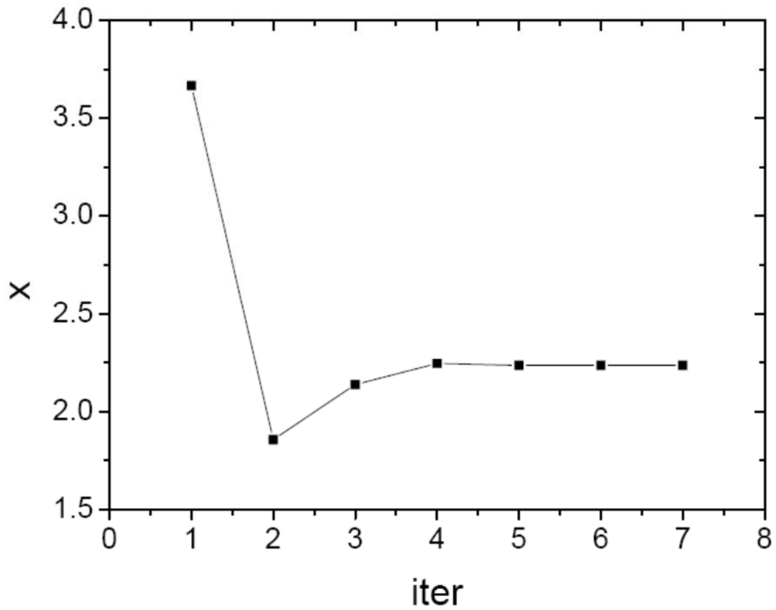


计算步骤：

1. 选定初始值x_0, x_1,并计算$f(x_0), f(x_1)$
2. 按迭代公式计算x_2,再求$f(x_2)$
3. 判别：如果$|f(x_2)| \approx 0$则迭代停止；
   否则，用$(x_2, f(x_2))$和$(x_1, f(x_1))$分别代替$(x_1, f(x_1))$和$(x_0, f(x_0))$.
4. 重复2,3步



exam-2-2-4.py


x
iter

X
Iter

x
iter

x
iter

注意：

某些情况下，如当函数有几个根时，**Newton-Raphson**法和弦割法有可能不收敛或收敛很慢。

因此，一个保险的做法是：先用搜索法近似确定根的位置，然后再用**Newton-Raphson**法或弦割法找精确的根。

课堂练习

用二分法和牛顿法计算非线性方程

$$e^x \ln(x) - x^2 = 0$$

在区间(1,2)内的根。

牛顿法递推公式：

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)}$$

答案：x=1.694599151611328

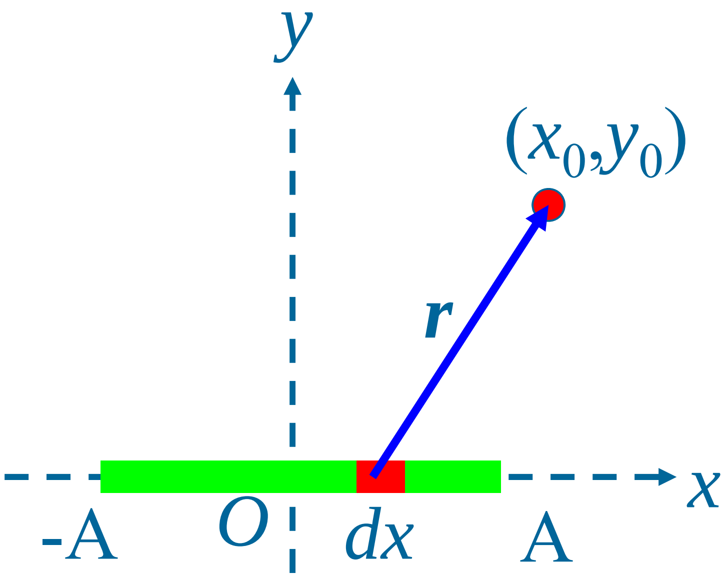
定积分的近似计算

带电细杆产生的静电势

物理问题：

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_l \frac{dq}{r} \qquad dq = \lambda(x)dx$$

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-A}^{A} \frac{\lambda(x)dx}{\left[(x-x_0)^2 + y_0^{\ 2}\right]^{1/2}}$$



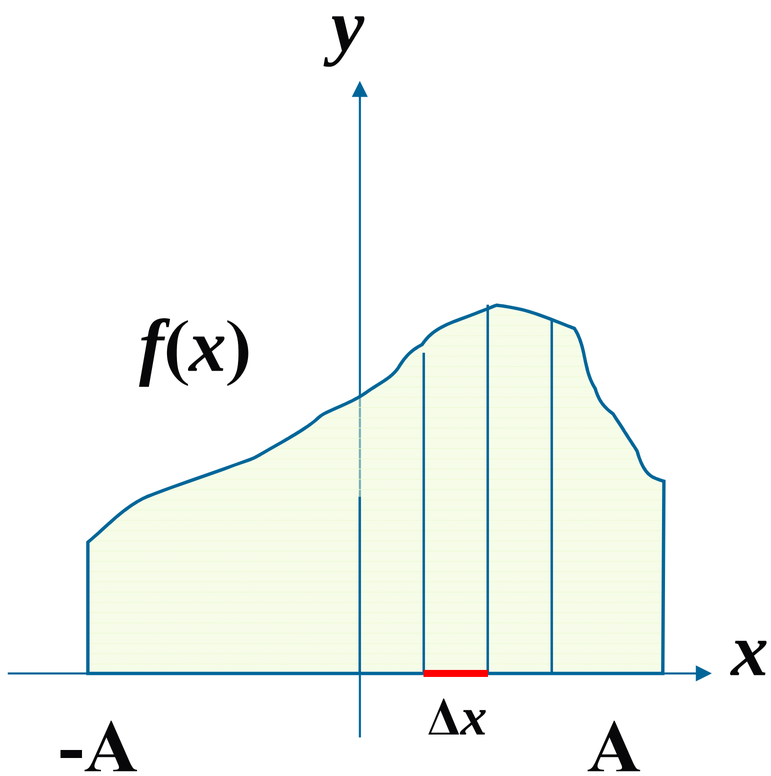
引入符号$f(x)$，令:

$$f(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda(x)}{\left[(x-x_0)^2+y_0{}^2\right]^{1/2}}$$

问题变为求解标准的定积分

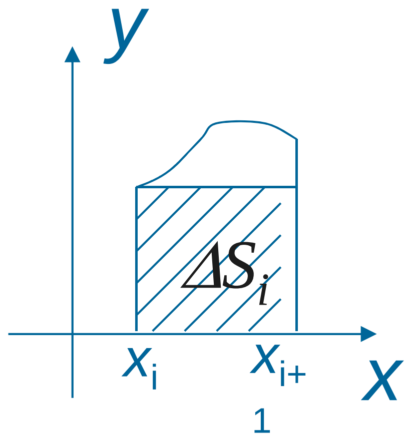
$$V=\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

物理意义:求曲线下的面积



对其中第 *i* 段，

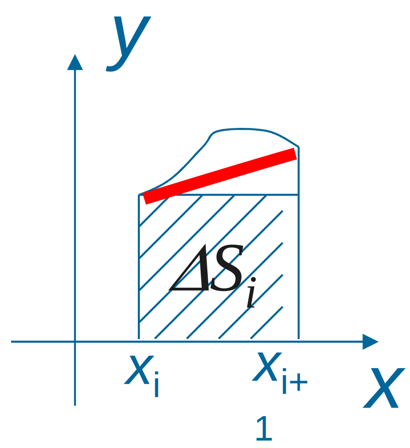
$$\Delta S_i = f(x_i)\Delta x \quad i = 0,1,2,\cdots,n-1$$



$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta S_i = (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}))\Delta x$$

矩形公式

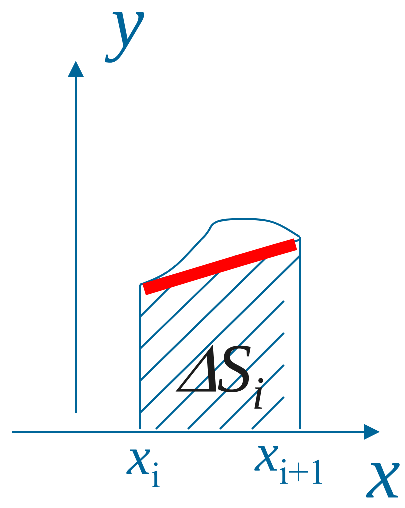
想法：用插值函数的积分代替原函数的积分



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b y(x)dx$$

其中：$y(x)$为插值多项式，可以解析积分

线性插值公式：



$$y(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1}$$

$$\Delta S_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx$$

$$\approx\frac{1}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\Delta x \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Delta S_i=\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]\frac{\Delta x}{2}$$

梯形公式

$$V=\sum_{i=1}^{n-1}\Delta S_i=\frac{1}{2}f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\Delta x+\frac{1}{2}f(x_n)\Delta x$$

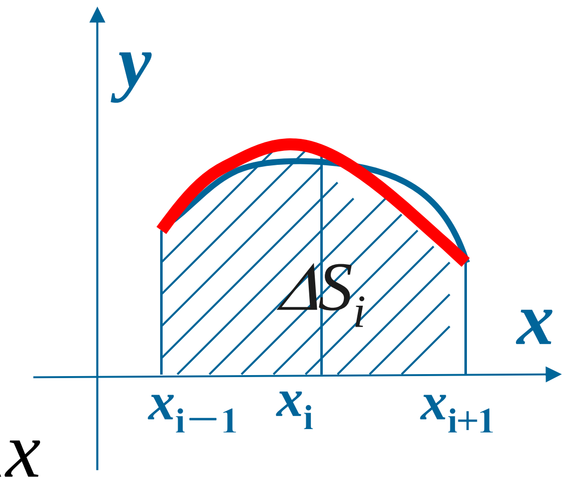
用二次插值函数

$$y(x)=\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}y_{i-1}+\frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i-1})}y_i+\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})}y_{i+1}$$

代替原来函数，积分得到

$$\Delta S=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y(x)dx=\frac{1}{3}[y_{i-1}+4y_i+y_{i+1}]\Delta x$$



$$V = \frac{1}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + 2f(x_5)$$

$$+ \cdots 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\Delta x$$

n必须为奇数，即把积分区间分成偶数段。

抛物线、辛普生积分，

或写为

$$V=\sum_{i=2,4,\ldots}^{n-1}\frac{1}{3}\left[f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})\right]\Delta x$$

(从1开始编号，n为奇数)

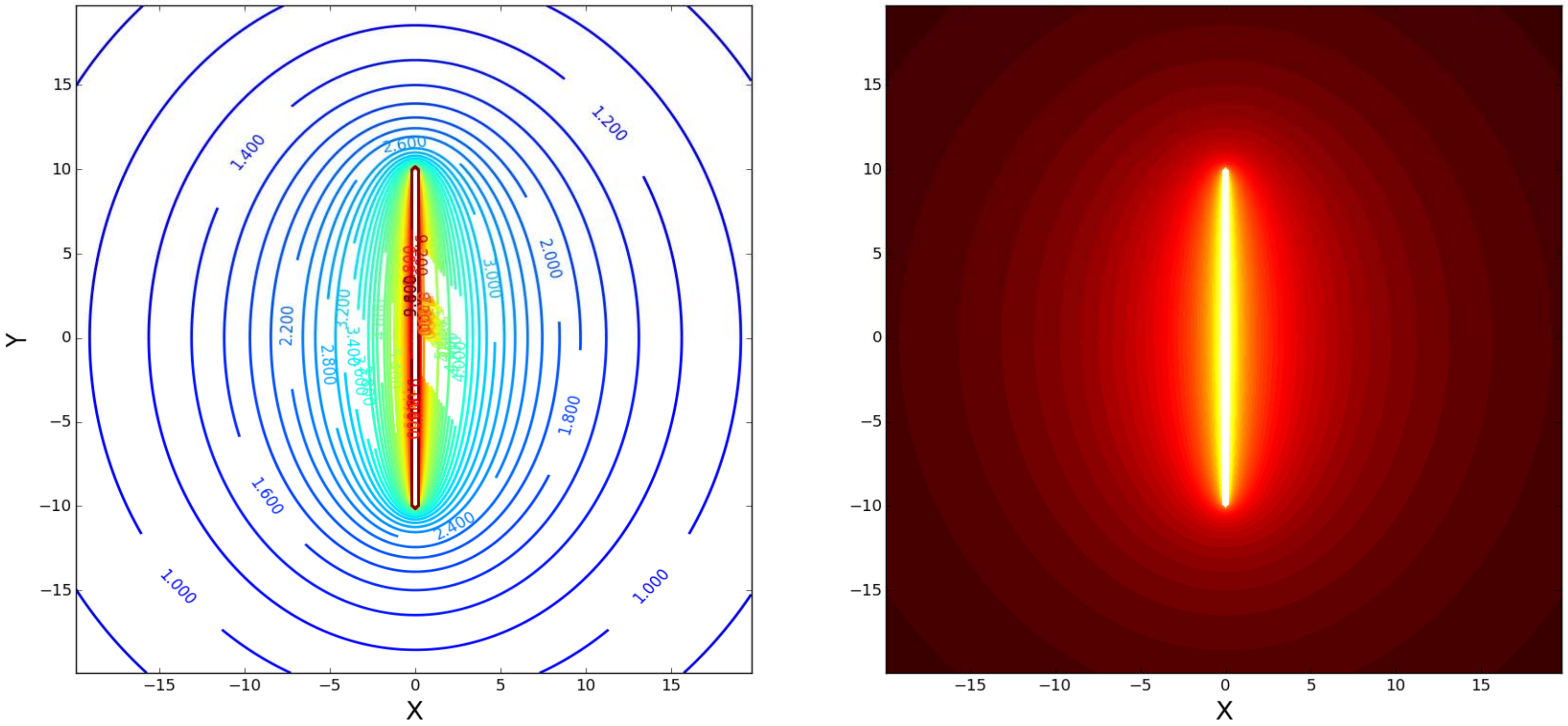
或写为

$$V=\sum_{i=1,3,\ldots}^{n-1}\frac{1}{3}\left[f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1})\right]\Delta x$$

(从零开始编号，n为偶数)

带电杆电势的计算结果

exam-2-2-7.py



课堂练习

带电细杆产生的静电势

$$V(x_0,y_0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-A}^{A}\frac{\lambda(x)dx}{\left[(x-x_0)^2+y_0^{\ 2}\right]^{1/2}}$$

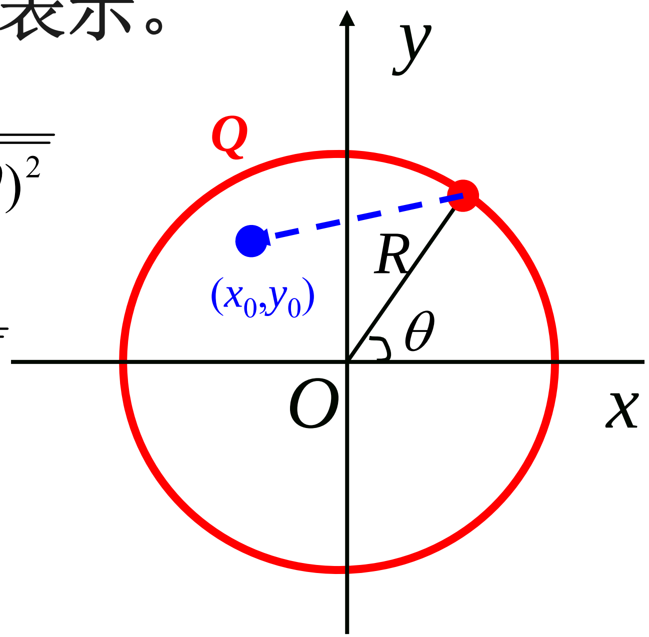
取 $\frac{1}{4\pi\varepsilon}=1,\quad \lambda(x)=1,\quad A=10$ 求空间各处(x_0,y_0)的V

```
afield = np.zeros((nx,ny)) #二维数组
extent=[x1,x2,y1,y2]
levels = np.arange(0,200,5)
#画等高图
pl.contour(afield, extent=extent, levels=levels)
```

作 业

计算带电圆环产生的空间电势，并画图表示。

$$V(x_0,y_0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi}\frac{Q}{2\pi R}\frac{Rd\theta}{\sqrt{(x_0-R\cos\theta)^2+(y_0-R\sin\theta)^2}}$$



令 $$f(\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{2\pi R}\frac{R}{\sqrt{(x_0-R\cos\theta)^2+(y_0-R\sin\theta)^2}}$$

$$V(x_0,y_0)=\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$$

辛普生积分公式: $$V=\sum_{i=2,4,...}^{N-1}\frac{1}{3}[f(\theta_{i-1})+4f(\theta_i)+f(\theta_{i+1})]\Delta\theta \qquad \Delta\theta=\frac{2\pi}{N-1}$$

要求：

1）写出计算用到的主要公式；
2）写出计算程序代码 (python)；
3）将计算结果用图形表示出来(物理常数、Q、R可设为1.0)。

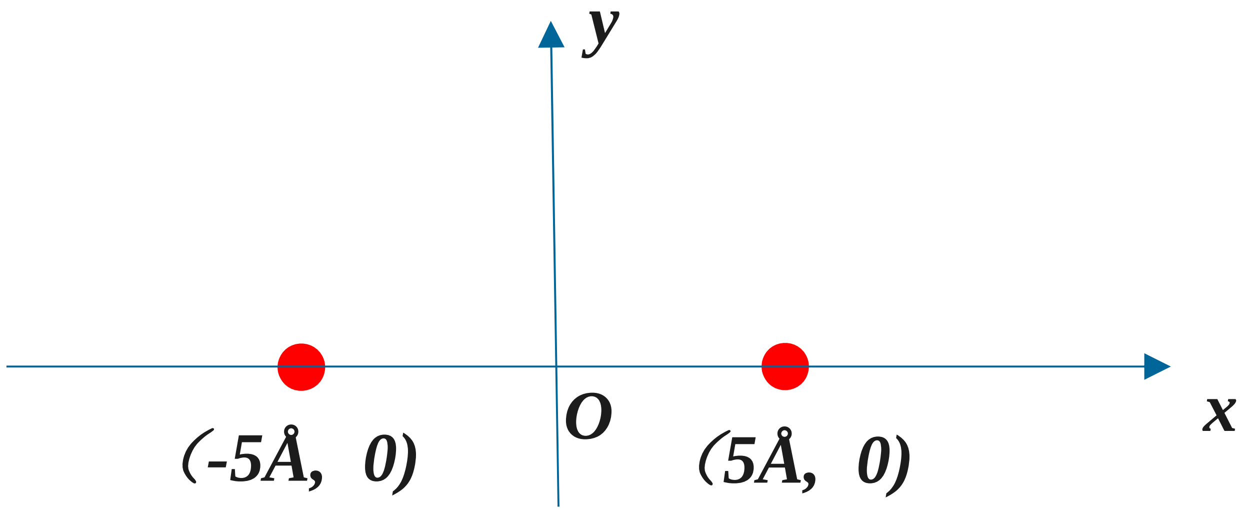
课后作业提交规则

下周上课前，发送至： njuphyhw@126.com

1) 规范邮件标题：作业1-姓名-学号
2) 涉及的公式可用word的equation/MathType输入，程序输出图形也贴到word文件里面，最后把word转换为 PDF 文件发送。
3) python程序作为附件发送。

选作练习

计算平面上的两个锌离子产生的静电势分布和静电场分布，其中，两个锌离子的坐标如下，所带电荷为**2e**, 极化率为**2.3Å³**，介质为真空。



要求：

1）写出计算用到的主要公式；
2）写出计算程序代码 **(python)**；
3）将计算结果用图形表示出来。其中电场分布为矢量场分布，请选取一种作图方法，使得能够直观体现电场的大小和方向。

END