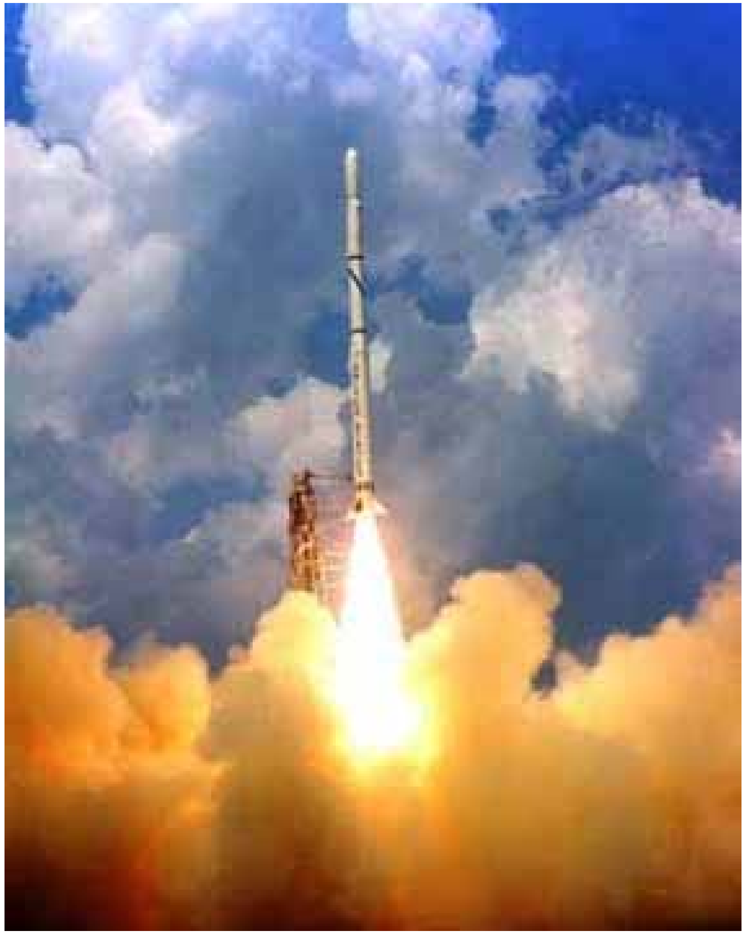
线性方程组数值解法及矩阵求逆

The upward velocity of a rocket is given at three different times

Time, t	Velocity, v
s	m/s
5	106.8
8	177.2
12	279.2



$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 , \qquad 5 \le t \le 12.$$

方程为：

$$\begin{cases} a_1 t_1^2 + a_2 t_1 + a_3 = v_1 \\ a_1 t_2^2 + a_2 t_2 + a_3 = v_2 \\ a_1 t_3^2 + a_2 t_3 + a_3 = v_3 \end{cases}$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

数值求解方法：

1. 直接解法

a) 高斯消元法

b) 主元素消元法

2. 迭代解法

a) 简单迭代法(雅克比)

b) 赛德尔迭代法

高斯消去法

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = e$$
$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = f$$

增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & d \\ b_1 & b_2 & b_3 & e \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \end{array}\right]$$

矩阵初等行变换

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_2 & a'_3 & d' \\ 0 & 1 & b'_3 & e' \\ 0 & 0 & 1 & f' \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \ldots$$
$$x_2 = \ldots$$
$$X_3=\ldots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a'_2 & a'_3 & d' \\ 0 & 1 & b'_3 & e' \\ 0 & 0 & 1 & f' \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + a'_2\, x_2 + a'_3\, x_3 &= d' \\ x_2 + b'_3\, x_3 &= e' \\ x_3 &= f' \end{aligned}$$

矩阵初等行变换

- 互换矩阵两行位置
- 用非零数乘(除)矩阵某行
- 将矩阵某行的倍数加到矩阵的另一行上

注：只要 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，则可通过逐次消元及初等行变换，将方程组化为三角形方程组，求出唯一解。

高斯消去法

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid b] = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & | & 3 \\ -2 & 10 & -1 & | & 15 \\ -1 & -2 & 5 & | & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_1/10 \quad r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 & | & 0.3 \\ 0 & 9.6 & -1.2 & | & 15.6 \\ 0 & -2.2 & 4.9 & | & 10.3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+2.2r_2]{r_2/9.6} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 & | & 0.3 \\ 0 & 1 & -0.125 & | & 1.625 \\ 0 & 0 & 4.625 & | & 13.875 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3/4.625} \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 & | & 0.3 \\ 0 & 1 & -0.125 & | & 1.625 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 1 & -0.125 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1.625 \\ 3 \end{bmatrix}$$

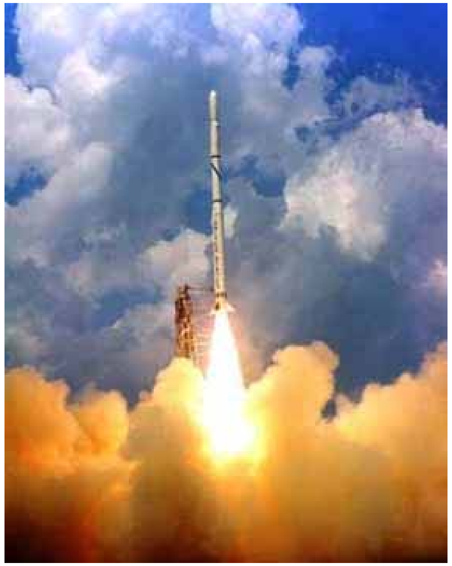
回代：

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = 1.625 - (-0.125) \times 3 = 2$$

$$x_1 = 0.3 - [(-0.2) \times 2 + (-0.1) \times 3] = 1$$

Time, t	Velocity, v
s	m/s
5	106.8
8	177.2
12	279.2



$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 , \qquad 5 \le t \le 12.$$

$$\begin{cases} 25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8 \\ 64a_1 + 8a_2 + a_3 = 177.2 \\ 144a_1 + 12a_2 + a_3 = 279.2 \end{cases}$$

高斯消去法局限性：

如果 $A_{kk}^{(k-1)} = 0$，消去过程会失败

如果 $|A_{kk}^{(k-1)}| << 1$，会使计算精度降低

解决方法：主元素消去法

例：
$$\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

精确解为：$x_1 = \dfrac{1}{1-10^{-9}} = 1.\overbrace{00\ldots0}^{8个}100\ldots$　$x_2 = 2 - x_1 = 0.\overbrace{99\ldots9}^{8个}899\ldots$

用高斯消去法计算：

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 1$$

问题在哪里？

主元素消去法

思路：对调方程的次序或变量的排列，使得除数最大

方法：

列主元消去法

行主元消去法

全主元消去法

例:

$$\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-9} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-10^{-9} & 1-2\times 10^{-9} \end{pmatrix}$$

解为:

$$x_1 = \frac{1}{1-10^{-9}} = 1.\overbrace{00\ldots0}^{8个}100\ldots \qquad x_2 = 2 - x_1 = 0.\overbrace{99\ldots9}^{8个}899\ldots$$

例：

$$\begin{cases} 9x_1+53x_2+381x_3=76 \\ 53x_1+381x_2+3017x_3=489 \\ 381x_1+3017x_2+25317x_3=3547 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 53 & 381 & 76 \\ 53 & 381 & 3017 & 489 \\ 381 & 3017 & 25317 & 3547 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 381 & 3017 & 25317 & 3547 \\ 53 & 381 & 3017 & 489 \\ 9 & 53 & 381 & 76 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3017}{381} & \frac{25317}{381} & \frac{3547}{381} \\ 53 & 381 & 3017 & 489 \\ 9 & 53 & 381 & 76 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{3017}{381} & \frac{25317}{381} & \frac{3547}{381} \\ 0 & 381-\frac{3017}{381}\times 53 & 3017-\frac{25317}{381}\times 53 & 489-\frac{3547}{381}\times 53 \\ 0 & 53-\frac{3017}{381}\times 9 & 381-\frac{25317}{381}\times 9 & 76--\frac{3547}{381}\times 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 & 9.31 \\ 0 & -38.7 & -505 & -4.42 \\ 0 & -18.3 & -217 & -7.79 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 & 9.31 \\ 0 & -38.7 & -505 & -4.42 \\ 0 & -18.3 & -217 & -7.79 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 & 9.31 \\ 0 & 1 & \dfrac{-505}{-38.7} & \dfrac{-4.42}{-38.7} \\ 0 & -18.3 & -217 & -7.79 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 & 9.31 \\ 0 & 1 & \dfrac{-505}{-38.7} & \dfrac{-4.42}{-38.7} \\ 0 & 0 & -217+\dfrac{-505}{-38.7}\times 18.3 & -7.79+\dfrac{-4.42}{-38.7}\times 18.3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 & 9.31 \\ 0 & 1 & 13.0 & 0.114 \\ 0 & 0 & 20.9 & -5.70 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 & 9.31 \\ 0 & 1 & 13.0 & 0.114 \\ 0 & 0 & 1 & -0.273 \end{pmatrix}$$

即：

$$\begin{bmatrix} 1 & 7.92 & 66.4 \\ 0 & 1 & 13.0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.31 \\ 0.114 \\ -0.273 \end{bmatrix}$$

回代：

$$\begin{cases} x_3 = -0.273 \\ x_2 = 0.114 - 13.0 x_3 \\ x_1 = 9.31 - 7.92 x_2 - 66.4 x_3 \end{cases}$$

得：

$$\begin{cases} x_1 = -1.55 \\ x_2 = 3.66 \\ x_3 = -0.273 \end{cases}$$

简单迭代法(雅克比)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

算法:

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots\ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots\ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 \ldots\ldots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

即：

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1,2,\ldots,n.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

old **new**

当相对误差小于某预先设定值时，停止迭代

$$\left|\varepsilon_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

1. 简单迭代法

例：
$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

解：由以上三式可分别替换出

$$\begin{cases} x_1 = 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0.1x_3 + 1.5 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.4x_2 + 2 \end{cases}$$

则可得迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\cdots)$$

取初始向量$X^{(0)}=(0,0,0)^T$,可得迭代序列:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^{(k)}$	0	0.3000	0.8000	0.9180	0.9716	0.9804	0.9962	0.9986	0.9995
$x_2^{(k)}$	0	1.5000	1.7600	1.9260	1.9700	1.9897	1.9961	1.9986	1.9995
$x_3^{(k)}$	0	2.0000	2.6600	2.8640	2.9540	2.9823	2.9938	2.9977	2.9992

则可得解$X=(0.9995, 1.9995, 2.9992)^T$

塞德尔迭代法

例：

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 = 15 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

简单迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.4x_2^{(k)} + 2 \end{cases}$$

塞德尔采用迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.2x_2^{(k)} + 0.1x_3^{(k)} + 0.3 \\ x_2^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.1x_3^{(k)} + 1.5 \quad (k = 0,1,2,\cdots) \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.4x_2^{(k+1)} + 2 \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(k)}$	0	0.3000	0.8804	0.9840	0.9978	0.9997	1.0000
$x_2^{(k)}$	0	1.5600	1.9445	1.9922	1.9987	1.9999	2.0000
$x_3^{(k)}$	0	2.6840	2.9539	2.9938	2.9991	2.9999	3.0000

$$X^T = (1 \quad 2 \quad 3)$$

迭代格式的收敛性

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 20x_3 = 11 \\ -10x_1 + x_2 - 5x_3 = -14 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 10x_2 - 20x_3 + 11 \\ x_2 = +10x_1 + 5x_3 - 14 \\ x_3 = 5x_1 - x_2 - 3 \end{cases}$$

	x1	x2	x3
0	0	0	0
1	11	-14	-3
2	-69	81	66
3	-499	-374	-429

不可约：

若矩阵A不能通过行的次序调换和相应的列的次序调换成为：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

则A不可约

对角优势：

若矩阵A满足 $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1,2,3 \cdots n)$

且自少有一个i值，上式中严格的不等号成立，则A具有对角优势

定理：

若系数矩阵A不可约且具有对角优势，简单迭代法必收敛。