

DOI:10.16356/j.1005-2615.2022.06.008

## 空间平台发射拦截器动力学与最优脉冲拦截

韩艳铎<sup>1</sup>, 王磊<sup>1</sup>, 张勇<sup>2</sup>

(1. 南京航空航天大学航天学院, 南京 211106; 2. 南京航空航天大学无人机研究院, 南京 210016)

**摘要:** 研究了空间平台发射拦截器的两体耦合动力学, 以及拦截器拦截目标星的最优脉冲控制问题。平台首先与目标星形成绕飞关系, 保持其发射筒轴线始终瞄准目标星。接到发射指令后, 拦截器从发射筒中射出, 本文采用拉格朗日第二类方程建立了发射过程平台-拦截器两体动力学模型。因为两体耦合影响, 平台姿态偏转, 拦截器出筒时的速度已经不能瞄准目标星。通过小型火箭发动机给其施加速度脉冲, 使其进入拦截轨道, 保证拦截的同时, 将脉冲速度最小化以节省燃料, 本文将其归结为一个非线性规划问题, 采用三级优化的策略来求解。在拦截飞行时间相较于平台绕飞目标星的周期是小量的条件下, 可以视绕飞平均角速度为小参数, 采用正则摄动方法求出非线性规划的一阶近似解, 然后以此为迭代初值, 寻找最优真解。最后进行了数值仿真验证。

**关键词:** 多体动力学; 拉格朗日分析力学; C-W 方程; 交会拦截; 小参数摄动法; 最优脉冲制导

中图分类号: V212

文献标志码: A

文章编号: 1005-2615(2022)06-1065-09

## Dynamics of Space Platform Launching Interceptor and Optimal Impulse Interception

HAN Yanhua<sup>1</sup>, WANG Lei<sup>1</sup>, ZHANG Yong<sup>2</sup>

(1. College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 211106, China; 2. UAV Research Institute, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** The paper studies the two-body coupling dynamics between the space platform and interceptor during launching process, as well as optimization of the impulse control of the interceptor. The space platform forms an orbiting relationship with the target satellite, keeping its launch tube axis aiming at the target satellite. After receiving the launch command, the interceptor shoots out from the launch tube. The Lagrange equation of the second type is used to establish the platform-interceptor two-body dynamics model. Due to the effect of the coupling of the two bodies, the attitude of the platform is perturbed, causing the interceptor unable to accurately aim at the target satellite while separating the tube. At the moment, a velocity impulse is applied to the interceptor through its small rocket engine to make the interceptor enter the intercepting orbit. While the interception is ensured, the impulse velocity is minimized to save fuel. The paper summarizes it as a nonlinear programming problem. A three-level optimization strategy is presented to solve it. Under the condition that the interception flight time is small compared with the period of the platform orbiting the target satellite, the average angular velocity of the orbiting flight can be regarded as a small parameter, and the canonical perturbation method can be used to obtain the first-order approximate solution of the nonlinear programming. Then the optimizing iteration process is started from the approximate solution as its initial guess value. Finally, a numerical simulation verification is carried out.

**基金项目:** 中央高校基本科研业务费青年科技创新基金(NT2020025)。

**收稿日期:** 2021-05-14; **修订日期:** 2021-06-03

**通信作者:** 韩艳铎, 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: hanyanhua@nuaa.edu.cn。

**引用格式:** 韩艳铎, 王磊, 张勇. 空间平台发射拦截器动力学与最优脉冲拦截[J]. 南京航空航天大学学报, 2022, 54(6): 1065-1073. HAN Yanhua, WANG Lei, ZHANG Yong. Dynamics of space platform launching interceptor and optimal impulse interception[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2022, 54(6): 1065-1073.

**Key words:** multi-body dynamics; Lagrange analytical mechanics; C-W equation; rendezvous and interception; small parameter perturbation method; optimal impulse guidance

空间拦截在空天防御、在轨服务、太空碎片清除等领域意义重大,是空间技术领域持续热门课题。脉冲法制导,因其原理和算法相对简单,易于工程实现,当轨控推力作用时间远小于惯性滑行时间时,制导误差很小,因此在空间拦截领域颇受重视<sup>[1-6]</sup>。空间拦截任务中,燃料和时间均是宝贵资源,因此文献[1-2]采用非线性规划方法对脉冲控制进行优化,文献[3]基于轨道力学中的普适变量描述法,采用内外双循环的穷举搜索,对脉冲拦截控制进行优化。文献[4]为了减少拦截造成的空间污染,降低能量消耗,提高拦截概率,提出了停泊轨道转移逆轨网捕拦截的方式。Lawden<sup>[7]</sup>提出的主矢量方法是航天最优控制领域的经典方法。通过对主矢量特性的分析,可以快速找到最优脉冲的作用时机和方向<sup>[8-10]</sup>。其中文献[8]采用主矢量方法,研究了从地球(行星)或月球表面发射火箭拦截圆形环绕轨道上目标星的脉冲最优控制问题,拦截时间固定,能耗为性能指标,但是未考虑大气影响。文献[9]考虑追踪星和目标星近距离相对运动,满足C-W方程,追踪星采用脉冲制导,用主矢量法确定最优脉冲施加时机、大小和方向。文献[11]针对目标星处于椭圆轨道且追踪星与目标星近距离相对飞行的情况,研究了时间最省切向脉冲拦截问题,采用遗传-序列二次规划相结合的方法克服了优化解对迭代初值的敏感性。考虑到若发动机推力较小,采用脉冲法计算的制导律在实际应用中会产生较大误差,文献[12]受脉冲法启发,将拦截途中每个控制采样时刻当作初始时刻,用最优脉冲制导算法给出当前时刻应施加在拦截器上的发动机推力方向,如此不断迭代,直至拦截到目标,该方法的拦截精度可以保证,但总体上已不具有最优性。无论是脉冲制导还是连续推力制导,凡涉及最优策略往往计算量较大,难以在线实现,基于小参数摄动的近似优化拦截在航天领域应用而生<sup>[13-14]</sup>,以较小的性能牺牲为代价,大大减轻计算负担,可用于在线拦截制导。

本文研究平台携带拦截器,与目标星形成绕飞关系。绕飞过程中平台的姿控系统维持其发射筒轴线始终瞄准目标星。拦截器从发射筒分离后,自身的小型火箭发动机给其施加一个速度脉冲,修正其飞行方向,然后拦截器凭惯性飞向目标星,如图1所示。

图2给出了拦截器在平台中的装载几何关系,拦截器在其中形成一个矩阵。为了直观表示拦截

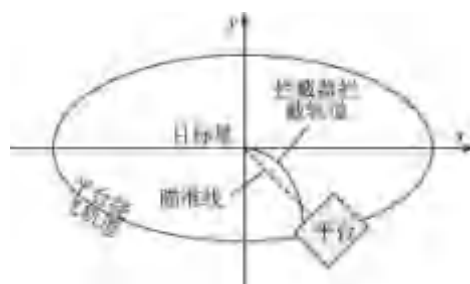


图1 平台绕飞并瞄准目标星示意图

Fig.1 Sketch of the platform flying around and aiming at the target satellite

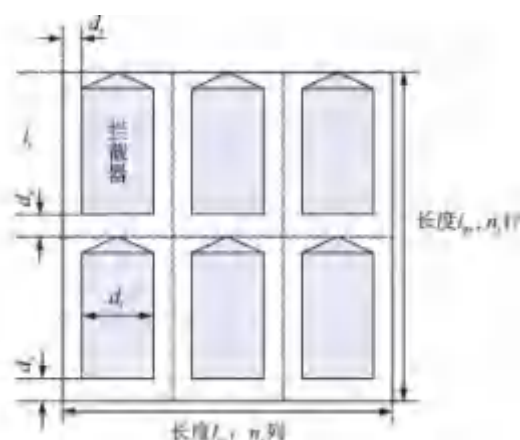


图2 平台携带拦截器示意图

Fig.2 Sketch of platform carrying interceptor

器的发射方向,图中的拦截器头部用锥头表示。拦截器只能被依次发射,即平台不能同时发射两枚以上拦截器。拦截器可通过平台中的电磁或气压装置发射。

文本采用小参数正则摄动方法,快速求解出能耗最省最优脉冲的一阶近似解,该值接近最优解,以此为迭代初值,用非线性规划方法可以快速可靠地收敛到最优真解。

## 1 发射过程平台-拦截器两体动力学

首先建立目标星轨道坐标系  $o_A x_A y_A$ ,该坐标系的原点固定于目标星, $x_A$ 轴正方向沿着目标星绕地速度方向, $y_A$ 轴垂直于 $x_A$ 轴且背离地心方向为正。再建立平台本体系  $o_B x_B y_B$ ,其原点在平台质心, $y_B$ 轴沿平台上的发射筒轴线方向,且以发射方向为正, $x_B$ 轴垂直于 $y_B$ 轴,且在图2中向右为正。以上两坐标系在下文中分别简称为A系和B系。

以目标星轨道坐标系的  $y_A$  轴表示平台姿态偏航角的参考方向,且以右手规则定义偏航角的正

负,在图1和2中即逆时针偏航为正。

设任何一个矢量 $\boldsymbol{v}$ 在两坐标系的投影列阵分别为 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ ,则两者之间的坐标变换关系为

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{T}_{AB} \boldsymbol{v}_B \quad (1)$$

其中坐标变换矩阵

$$\boldsymbol{T}_{AB} = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中 $\eta$ 为平台的姿态偏航角。

A系以角速度 $n$ 旋转,其中 $n$ 是目标星绕地圆轨道的角速度(也是平台绕飞目标星的平均角速度),故其严格来说是非惯性系。但是在建立平台发射拦截器的动力学方程时,因为拦截器发射过程耗时与A系的旋转周期 $T=2\pi/n$ 相比是很小的数,或等价地说,该非惯性系的旋转角速度 $n$ 很小,可视A系为惯性系,由此引起的建模误差极小。

设平台质心相对于A系原点的位矢为

$$\boldsymbol{r}_p = (x, y)_A^T \quad (3)$$

式中:右下角标p表示“平台”,右下角标A表示“投影到A系下”,右上角标T表示“矩阵转置”。

显然,平台左下角相对于平台质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{ld}^p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}n_x(d_r + 2d_x) \\ -\frac{1}{2}n_y(l_r + d_y) \end{bmatrix}_B \quad (4)$$

式中:右下角标ld表示“左下”,右上角标p表示“相对于平台质心”,右下角标B表示“投影到B系下”。后文采用类似的表达,不再逐一解释。

本文定义处于平台左下位置的拦截器为第1列1行,拦截器所在列数的递增方向是从左向右,行数的递增方向是从下向上。

设第 $i$ 列 $j$ 行的拦截器固定在平台上,由图2所示几何关系,知其质心相对于平台左下角的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{ij}^{ld} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}d_r + d_x + (i-1)(d_r + 2d_x) \\ l_{cg} + d_y + (j-1)(l_r + d_y) \end{bmatrix}_B \quad (5)$$

其相对于平台质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{ij}^p = \boldsymbol{r}_{ij}^{ld} + \boldsymbol{r}_{ld}^p \quad (6)$$

将式(4,5)代入式(6)得

$$\boldsymbol{r}_{ij}^p = (x_{ij,B}^p, y_{ij,B}^p)_B^T \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} x_{ij,B}^p = \frac{1}{2}d_r + d_x + (i-1)(d_r + 2d_x) - \frac{1}{2}n_x(d_r + 2d_x) \\ y_{ij,B}^p = l_{cg} + d_y + (j-1)(l_r + d_y) - \frac{1}{2}n_y(l_r + d_y) \end{cases} \quad (8)$$

第 $i$ 列 $j$ 行的拦截器质心相对于A系原点的位矢

$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{ij}^p \quad (9)$$

将式(3,7,8)代入式(9)并利用坐标变换关系式(1,2)得

$$\boldsymbol{r}_{ij} = (x_{ij,A}, y_{ij,A})_A^T \quad (10)$$

式中

$$\begin{cases} x_{ij,A} = x + x_{ij,B}^p \cos \eta - y_{ij,B}^p \sin \eta \\ y_{ij,A} = y + x_{ij,B}^p \sin \eta + y_{ij,B}^p \cos \eta \end{cases} \quad (11)$$

其相对于惯性系原点的速矢为

$$\boldsymbol{v}_{ij} = \frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt} = (v_{xij,A}, v_{yij,A})_A^T \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} v_{xij,A} = \dot{x} - \omega(x_{ij,B}^p \sin \eta + y_{ij,B}^p \cos \eta) \\ v_{yij,A} = \dot{y} + \omega(x_{ij,B}^p \cos \eta - y_{ij,B}^p \sin \eta) \end{cases} \quad (13)$$

$$\omega \triangleq \dot{\eta} \quad (14)$$

是平台姿态偏航角速率。

第 $u$ 列 $w$ 行的拦截器正在发射筒里处于发射滑行状态,设其滑行位移为 $s$ ,则其质心相对于平台左下角的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{uw}^{ld} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}d_r + d_x + (u-1)(d_r + 2d_x) \\ l_{cg} + d_y + (w-1)(l_r + d_y) + s \end{bmatrix}_B \quad (15)$$

其相对于平台质心的位矢为

$$\boldsymbol{r}_{uw}^p = \boldsymbol{r}_{uw}^{ld} + \boldsymbol{r}_{ld}^p \quad (16)$$

将式(4,15)代入式(16)得

$$\boldsymbol{r}_{uw}^p = (x_{uw,B}^p, y_{uw,B}^p)_B^T \quad (17)$$

式中

$$\begin{cases} x_{uw,B}^p = \frac{1}{2}d_r + d_x + (u-1)(d_r + 2d_x) - \frac{1}{2}n_x(d_r + 2d_x) \\ y_{uw,B}^p = l_{cg} + d_y + (w-1)(l_r + d_y) + s - \frac{1}{2}n_y(l_r + d_y) \end{cases} \quad (18)$$

其相对于惯性系原点的位矢

$$\boldsymbol{r}_{uw} = \boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{r}_{uw}^p \quad (19)$$

将式(3,17,18)代入式(19)并利用坐标变换关系式(1,2)得

$$\boldsymbol{r}_{uw} = (x_{uw,A}, y_{uw,A})_A^T \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} x_{uw,A} = x + x_{uw,B}^p \cos \eta - y_{uw,B}^p \sin \eta \\ y_{uw,A} = y + x_{uw,B}^p \sin \eta + y_{uw,B}^p \cos \eta \end{cases} \quad (21)$$

其相对于惯性系原点的速矢为

$$\boldsymbol{v}_{uw} = \frac{d\boldsymbol{r}_{uw}}{dt} = (v_{xuw,A}, v_{yuw,A})_A^T \quad (22)$$

式中

$$\begin{cases} v_{xuw, A} = \dot{x} - \omega(x_{uw, B}^p \sin \eta + y_{uw, B}^p \cos \eta) - \dot{s} \sin \eta \\ v_{yuw, A} = \dot{y} + \omega(x_{uw, B}^p \cos \eta - y_{uw, B}^p \sin \eta) + \dot{s} \cos \eta \end{cases} \quad (23)$$

拉格朗日分析力学特别适合多体复杂航天器的力学建模<sup>[15]</sup>, 本文拦截器在发射出筒过程中与平台形成两体耦合系统, 拟采用拉格朗日第二类方程建模。

平台动能

$$E_p = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J_p \omega^2 \quad (24)$$

第*i*列*j*行处于固定状态的拦截器动能

$$E_{ij} = \frac{1}{2} m_r (v_{xij, A}^2 + v_{yij, A}^2) + \frac{1}{2} J_r \omega^2 \quad (25)$$

第*u*列*w*行处于滑行状态的拦截器动能

$$E_{uw} = \frac{1}{2} m_r (v_{xuw, A}^2 + v_{yuw, A}^2) + \frac{1}{2} J_r \omega^2 \quad (26)$$

系统总动能

$$E = E_p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} E_{ij} + E_{uw} \quad (27)$$

式中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果第 } i \text{ 列 } j \text{ 行的拦截器尚在} \\ 0 & \text{如果第 } i \text{ 列 } j \text{ 行的拦截器已发射} \end{cases} \quad (28)$$

定义广义坐标

$$\mathbf{q} \triangleq (q_1, q_2, q_3, q_4)^T = (x, y, \eta, s)^T \quad (29)$$

拉格朗日第二类方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (30)$$

$$\mathbf{Q} \triangleq (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)^T \triangleq (F_x, F_y, M, f)^T \quad (31)$$

式中:  $Q_1 \sim Q_4$  为相应于四个广义坐标的广义力,  $F_x, F_y$  表示平台受到的轨控推力在 A 系  $x, y$  两轴上的分量,  $M$  表示平台的姿态偏航控制力矩,  $f$  表示拦截器在平台发射筒内受到的发射推力。

将相关各式代入式(27)可得系统总动能

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} [m_p + (k+1)m_r] (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\ & \frac{1}{2} [J_p + (k+1)J_r] \omega^2 + \\ & \frac{1}{2} m_r [\omega^2 ((x_{uw, B}^p)^2 + (y_{uw, B}^p)^2) + \dot{s}^2 - \\ & 2\omega \dot{x} (x_{uw, B}^p \sin \eta + y_{uw, B}^p \cos \eta) + \\ & 2\omega \dot{y} (x_{uw, B}^p \cos \eta - y_{uw, B}^p \sin \eta) - \\ & 2\dot{s} (\dot{x} \sin \eta - \dot{y} \cos \eta - \omega x_{uw, B}^p)] + \\ & \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \frac{1}{2} m_r [\omega^2 \delta_{ij} ((x_{ij, B}^p)^2 + (y_{ij, B}^p)^2) - \end{aligned}$$

$$2\omega \dot{x} \delta_{ij} (x_{ij, B}^p \sin \eta + y_{ij, B}^p \cos \eta) + 2\omega \dot{y} \delta_{ij} (x_{ij, B}^p \cos \eta - y_{ij, B}^p \sin \eta)] \quad (32)$$

式中

$$k = \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} \quad (33)$$

表示发射第*u*列*w*行拦截器时, 尚且固定在平台发射筒中的拦截器(不含正在发射的拦截器)的总数目。

将式(29, 31, 32)代入式(30)得两体系统动力学方程组如下

$$\begin{cases} [m_p + (k+1)m_r] \ddot{x} - m_r \dot{\omega} [\sin \eta (x_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} x_{ij, B}^p) + \cos \eta (y_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} y_{ij, B}^p)] - \\ m_r \ddot{s} \sin \eta - 2m_r \omega \dot{s} \cos \eta - \\ m_r \omega^2 [\cos \eta (x_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} x_{ij, B}^p) - \\ \sin \eta (y_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} y_{ij, B}^p)] = F_x \\ [m_p + (k+1)m_r] \ddot{y} + m_r \dot{\omega} [\cos \eta (x_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} x_{ij, B}^p) - \sin \eta (y_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} y_{ij, B}^p)] + \\ m_r \ddot{s} \cos \eta - 2m_r \omega \dot{s} \sin \eta - \\ m_r \omega^2 [\sin \eta (x_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} x_{ij, B}^p) + \\ \cos \eta (y_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} y_{ij, B}^p)] = F_y \\ -m_r \ddot{x} [\sin \eta (x_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} x_{ij, B}^p) + \\ \cos \eta (y_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} y_{ij, B}^p)] + \\ m_r \ddot{y} [\cos \eta (x_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} x_{ij, B}^p) - \\ \sin \eta (y_{uw, B}^p + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} y_{ij, B}^p)] + \\ \dot{\omega} [m_r ((x_{uw, B}^p)^2 + (y_{uw, B}^p)^2 + \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} (x_{ij, B}^p)^2 + \\ \sum_{\substack{i \neq u \\ j \neq w}} \delta_{ij} (y_{ij, B}^p)^2) + J_p + (k+1)J_r] + \\ m_r \ddot{s} x_{uw, B}^p + 2m_r \omega \dot{s} y_{uw, B}^p = M \\ -m_r \ddot{x} \sin \eta + m_r \ddot{y} \cos \eta + m_r \dot{\omega} x_{uw, B}^p + \\ m_r \ddot{s} - m_r \omega^2 y_{uw, B}^p = f \end{cases} \quad (34)$$



## 2 拦截器拦截目标星最优脉冲控制

当目标星在绕地圆轨道上且追踪星与其距离较近时,追踪星相对于目标星的运动满足C-W方程

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2n\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} - 3n^2y - 2n\dot{x} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

该方程是在目标星轨道系即A系建立的,其中 $n$ 是目标星绕地圆轨道的角速度,如果追踪星与目标星形成绕飞关系, $n$ 也是追踪星环绕目标星的平均角速度。

式(35)的解析解为

$$\begin{cases} x = \left( \frac{4}{n} v_{x0} + 6y_0 \right) \sin(nt) + \frac{2v_{y0}}{n} \cos(nt) - (3v_{x0} + 6ny_0)t + x_0 - \frac{2v_{y0}}{n} \\ y = \left( -\frac{2}{n} v_{x0} - 3y_0 \right) \cos(nt) + \frac{v_{y0}}{n} \sin(nt) + \frac{2}{n} v_{x0} + 4y_0 \end{cases} \quad (36)$$

式中: $(x_0, y_0)$ 表示追踪星初始相对位置坐标, $(v_{x0}, v_{y0})$ 表示其初始相对速度。

若初始状态满足

$$\begin{cases} v_{x0} = -2ny_0 \\ v_{y0} = \frac{n}{2} x_0 \end{cases} \quad (37)$$

则追踪星在以目标星为中心的相对椭圆轨道上绕飞。

当拦截器从正在绕飞目标星的平台中发射分离出来后,可视拦截器为追踪星,并且设此时其相对于目标星的位置坐标为 $(x_0, y_0)$ ,速度为 $(v_{x0}^*, v_{y0}^*)$ 。此时给拦截器施加一个速度脉冲 $(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0})$ ,使其速度瞬间变为

$$\begin{cases} v_{x0} = v_{x0}^* + \Delta v_{x0} \\ v_{y0} = v_{y0}^* + \Delta v_{y0} \end{cases} \quad (38)$$

将式(38)代入式(36),得拦截器相对于目标星的运动方程

$$\begin{cases} x = \left( \frac{4}{n} \sin(nt) - 3t \right) \Delta v_{x0} + \frac{2}{n} (\cos(nt) - 1) \Delta v_{y0} + \left( \frac{4}{n} v_{x0}^* + 6y_0 \right) \sin(nt) + \frac{2}{n} v_{y0}^* \cos(nt) - (3v_{x0}^* + 6ny_0)t + x_0 - \frac{2}{n} v_{y0}^* \\ y = \frac{2}{n} (1 - \cos(nt)) \Delta v_{x0} + \left( \frac{1}{n} \sin(nt) \right) \Delta v_{y0} + \frac{1}{n} v_{y0}^* \sin(nt) - \left( \frac{2}{n} v_{x0}^* + 3y_0 \right) \cos(nt) + \frac{2}{n} v_{x0}^* + 4y_0 \end{cases} \quad (39)$$

本文的任务是,寻求施加给拦截器的速度脉冲 $(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0})$ ,使在某时刻 $t_f$ 拦截器能够拦截到目标星,且所需施加的速度脉冲幅值最小,即能耗最省。

用最优控制语言描述,即

$$\begin{cases} \min J(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) = \Delta v_{x0}^2 + \Delta v_{y0}^2 \\ \text{s.t.} \begin{cases} \phi_1(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) = 0 \\ \phi_2(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (40)$$

式中

$$\begin{cases} \phi_1(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) \triangleq \left( \frac{4}{n} \sin(nt_f) - 3t_f \right) \Delta v_{x0} + \frac{2}{n} (\cos(nt_f) - 1) \Delta v_{y0} + \left( \frac{4}{n} v_{x0}^* + 6y_0 \right) \sin(nt_f) + \frac{2}{n} v_{y0}^* \cos(nt_f) - (3v_{x0}^* + 6ny_0)t_f + x_0 - \frac{2}{n} v_{y0}^* \\ \phi_2(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) \triangleq \frac{2}{n} (1 - \cos(nt_f)) \Delta v_{x0} + \left( \frac{1}{n} \sin(nt_f) \right) \Delta v_{y0} + \frac{1}{n} v_{y0}^* \sin(nt_f) - \left( \frac{2}{n} v_{x0}^* + 3y_0 \right) \cos(nt_f) + \frac{2}{n} v_{x0}^* + 4y_0 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

这是一个三自变量 $(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f)$ 两等式约束的非线性规划问题。

引入拉格朗日乘子 $\mu_1, \mu_2$ ,将指标函数改写为

$$J(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f, \mu_1, \mu_2) = \Delta v_{x0}^2 + \Delta v_{y0}^2 + \mu_1 \phi_1(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) + \mu_2 \phi_2(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f) \quad (42)$$

则最优必要条件

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \Delta v_{x0}} = 0, \frac{\partial J}{\partial \Delta v_{y0}} = 0, \frac{\partial J}{\partial t_f} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \mu_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial \mu_2} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

展开得

$$\begin{cases} 2\Delta v_{x0} + \mu_1 \left( \frac{4}{n} \sin(nt_f) - 3t_f \right) + \mu_2 \frac{2}{n} (1 - \cos(nt_f)) = 0 \\ 2\Delta v_{y0} + \mu_1 \frac{2}{n} (\cos(nt_f) - 1) + \mu_2 \frac{1}{n} \sin(nt_f) = 0 \\ \mu_1 [(4\cos(nt_f) - 3) \Delta v_{x0} - 2(v_{y0}^* + \Delta v_{y0}) \sin(nt_f) + (4v_{x0}^* + 6ny_0) \cos(nt_f) - (3v_{x0}^* + 6ny_0)] + \mu_2 [2\Delta v_{x0} \sin(nt_f) + (v_{y0}^* + \Delta v_{y0}) \cos(nt_f) + (2v_{x0}^* + 3ny_0) \sin(nt_f)] = 0 \\ \left( \frac{4}{n} \sin(nt_f) - 3t_f \right) \Delta v_{x0} + \frac{2}{n} (\cos(nt_f) - 1) \Delta v_{y0} + \left( \frac{4}{n} v_{x0}^* + 6y_0 \right) \sin(nt_f) + \frac{2}{n} v_{y0}^* \cos(nt_f) - (3v_{x0}^* + 6ny_0)t_f + x_0 - \frac{2}{n} v_{y0}^* = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{n}(1-\cos(nt_f))\Delta v_{x0} + \left(\frac{1}{n}\sin(nt_f)\right)\Delta v_{y0} + \\ \frac{1}{n}v_{y0}^*\sin(nt_f) - \left(\frac{2}{n}v_{x0}^* + 3y_0\right)\cos(nt_f) + \\ \frac{2}{n}v_{x0}^* + 4y_0 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

对于非线性规划问题,无论用直接法迭代寻优,还是用间接法,即求解表示最优必要条件的非线性方程组(44),均涉及迭代初值的选取,而初值选取是困难的,尤其是拉格朗日乘子 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 本身物理意义不明确,迭代初值的确定更困难。迭代收敛过程对迭代初值非常敏感,容易导致计算失败。

本文给出一种求解策略,可谓之“三级优化”,基本步骤如下:

**步骤1** 忽略小参数 $n$ 即令 $n=0$ ,得到优化问题的零阶近似描述,可容易地得到该问题的解,即原问题的零阶近似解 $(\Delta v_{x0}^0, \Delta v_{y0}^0, t_f^0)$ ,顺带解出 $(\mu_1^0, \mu_2^0)$ 。其中右上角标0表示零阶。

**步骤2** 将原问题最优必要条件在零阶解附近取一阶摄动,得到一组关于 $\delta\Delta v_{x0}$ 、 $\delta\Delta v_{y0}$ 、 $\delta t_f$ 、 $\delta\mu_1$ 、 $\delta\mu_2$ 的线性方程。将前述零阶近似解加上上述摄动量,得到原最优问题的一阶近似解,即

$$\begin{cases} \Delta v_{x0}^1 = \Delta v_{x0}^0 + \delta\Delta v_{x0} \\ \Delta v_{y0}^1 = \Delta v_{y0}^0 + \delta\Delta v_{y0} \\ t_f^1 = t_f^0 + \delta t_f \\ \mu_1^1 = \mu_1^0 + \delta\mu_1 \\ \mu_2^1 = \mu_2^0 + \delta\mu_2 \end{cases} \quad (45)$$

**步骤3** 在 $n$ 是小参数的条件下,上述一阶近似解已经比较接近真实最优解了,将其作为非线性规划的迭代初值,进行寻优,得到原最优问题的解。

注:将 $n$ 视作小参数的条件是 $t_f \ll T$ ,其中 $T = \frac{2\pi}{n}$ 是平台绕飞目标星的周期。这个条件在所想定的“绕飞-发射-拦截”场景中很容易满足,具体计算结果在后文仿真中给出。

下面实施三级优化。

当 $n=0$ 时,最优化问题(40)的零阶近似描述如下

$$\begin{cases} \min J = \Delta v_{x0}^2 + \Delta v_{y0}^2 \\ \text{s.t.} \begin{cases} (v_{x0}^* + \Delta v_{x0})t_f + x_0 = 0 \\ (v_{y0}^* + \Delta v_{y0})t_f + y_0 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (46)$$

从其中的等式约束条件反解得

$$\begin{cases} \Delta v_{x0} = -\left(v_{x0}^* + x_0 \frac{1}{t_f}\right) \\ \Delta v_{y0} = -\left(v_{y0}^* + y_0 \frac{1}{t_f}\right) \end{cases} \quad (47)$$

代入式(46)描述的性能指标得

$$J = v_{x0}^{*2} + v_{y0}^{*2} + 2(x_0 v_{x0}^* + y_0 v_{y0}^*) \frac{1}{t_f} + (x_0^2 + y_0^2) \frac{1}{t_f^2} \quad (48)$$

容易求得,当式(49)成立时,性能指标式(48)取极小值。

$$t_f = t_f^0 = -\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 v_{x0}^* + y_0 v_{y0}^*} \quad (49)$$

将式(49)代入式(47)并将它们集中列写在一起,为原优化问题的零阶近似解

$$\begin{cases} t_f^0 = -\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0 v_{x0}^* + y_0 v_{y0}^*} \\ \Delta v_{x0}^0 = -\left(v_{x0}^* + x_0 \frac{1}{t_f^0}\right) \\ \Delta v_{y0}^0 = -\left(v_{y0}^* + y_0 \frac{1}{t_f^0}\right) \end{cases} \quad (50)$$

式(46)描述的零阶近似优化问题的一阶必要条件形式上同式(43),不再重复列写,展开后得

$$\begin{cases} 2\Delta v_{x0} + \mu_1 t_f = 0 \\ 2\Delta v_{y0} + \mu_2 t_f = 0 \\ \mu_1(v_{x0}^* + \Delta v_{x0}) + \mu_2(v_{y0}^* + \Delta v_{y0}) = 0 \\ (v_{x0}^* + \Delta v_{x0})t_f + x_0 = 0 \\ (v_{y0}^* + \Delta v_{y0})t_f + y_0 = 0 \end{cases} \quad (51)$$

从式(51)的前两式可解出拉格朗日乘子的零阶近似值

$$\begin{cases} \mu_1^0 = -\frac{2\Delta v_{x0}^0}{t_f^0}, \mu_2^0 = -\frac{2\Delta v_{y0}^0}{t_f^0} \end{cases} \quad (52)$$

下面执行第二步骤,即对零阶近似解进行一阶修正。

将式(44)中的自变量 $(\Delta v_{x0}, \Delta v_{y0}, t_f, \mu_1, \mu_2)$ 在其零阶近似最优解上,以及 $n=0$ 点上做一阶摄动,得

$$\begin{cases} 2\delta\Delta v_{x0} + \mu_1^0 \delta t_f + t_f^0 \delta\mu_1 + \mu_2^0 t_f^{0^2} n = 0 \\ 2\delta\Delta v_{y0} + \mu_2^0 \delta t_f + t_f^0 \delta\mu_2 - \mu_1^0 t_f^{0^2} n = 0 \\ \mu_1^0 \delta\Delta v_{x0} + \mu_2^0 \delta\Delta v_{y0} + (v_{x0}^* + \Delta v_{x0}^0) \delta\mu_1 + \\ (v_{y0}^* + \Delta v_{y0}^0) \delta\mu_2 - 2t_f^0 [\mu_1^0 (v_{x0}^* + \Delta v_{x0}^0) - \\ \mu_2^0 (v_{y0}^* + \Delta v_{y0}^0)] n = 0 \\ t_f^0 \delta\Delta v_{x0} + (v_{x0}^* + \Delta v_{x0}^0) \delta t_f - \\ t_f^{0^2} (v_{y0}^* + \Delta v_{y0}^0) n = 0 \\ t_f^0 \delta\Delta v_{y0} + (v_{y0}^* + \Delta v_{y0}^0) \delta t_f + \\ t_f^{0^2} (v_{x0}^* + \Delta v_{x0}^0) n = 0 \end{cases} \quad (53)$$

式(53)是一组关于 $(\delta\Delta v_{x0}, \delta\Delta v_{y0}, \delta t_f, \delta\mu_1, \delta\mu_2)$ 的线性方程,很容易求解。解出摄动量后按照式(45)即可得到原最优问题的一阶近似解 $(\Delta v_{x0}^1, \Delta v_{y0}^1, t_f^1, \mu_1^1, \mu_2^1)$ 。

最后一步不详细阐述,以上述一阶近似解作为

原优化问题的迭代初值,此值接近真实最优解,故采用任何一种成熟的非线性规划算法均能可靠且快速地收敛到真解。

上述三级优化过程的流程图如图 3 所示。



图 3 三级优化流程图  
Fig.3 Flow chart of three-level optimization

3 数值仿真

仿真入口参数如表 1 所示。

表 1 仿真入口参数	
Table 1 Input parameters for simulation	
参数	数值
$n_x$	3
$n_y$	2
$l_t/\text{m}$	1.2
$l_{cg}/\text{m}$	0.6
$d_t/\text{m}$	0.3
$d_x/\text{m}$	0.05
$d_y/\text{m}$	0.1
$m_p/\text{kg}$	900
$J_p/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	615
$m_t/\text{kg}$	300
$J_t/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	36
$F_x/\text{N}$	0
$F_y/\text{N}$	0
$M/(\text{N}\cdot\text{m})$	0
$f/\text{N}$	500
$G/(\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{kg}^{-1})$	$6.67\times 10^{-11}$
$M_e/\text{kg}$	$5.965\times 10^{24}$
$R_e/\text{m}$	$6.371\times 10^6$
$h/\text{m}$	$4\times 10^5$
$\mu/(\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2})$	$3.979\times 10^{14}$
$n/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	$1.132\times 10^{-3}$

表 1 中: $G$  为万有引力恒量, $M_e$  为地球质量, $R_e$  为地球半径, $h$  为目标星绕地圆轨道对应的飞行高度, $\mu=GM_e$  为地球引力常数, $n=\sqrt{\mu/(R_e+h)^3}$ 。

不失一般性,本仿真以图 2 中发射第 1 列第 2 行拦截器为例。仿真结果分别如图 4~12 所示。

图 4~7 中的红色点划线表示假设平台未发射拦截器,正常围绕目标星做相对椭圆运动,并且时刻保持发射筒轴线瞄准目标星时的运动情况,图

中称其为“原始未受扰”运动状态。蓝色实线表示平台发射拦截器,两体相互干扰下的实际运动状态。

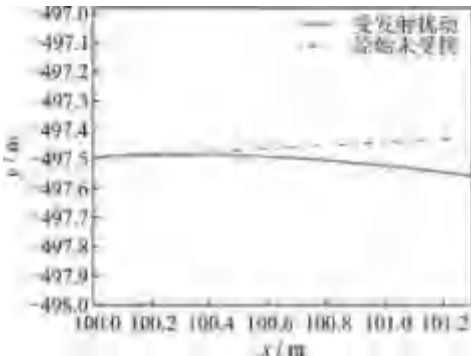


图 4 发射过程平台运动轨迹  
Fig.4 Platform movement trajectory during launch

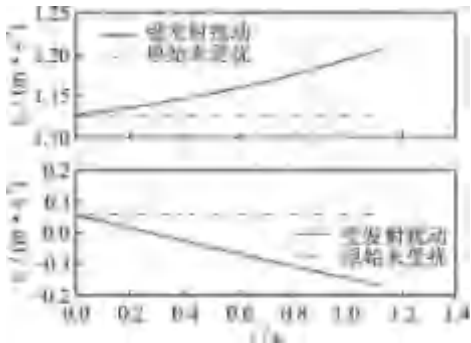


图 5 发射过程平台速度的变化  
Fig.5 Variation in platform velocity during launch

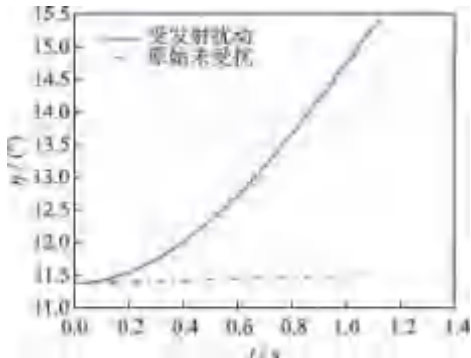


图 6 发射过程平台姿态偏航角  
Fig.6 Platform attitude yaw angle during launch

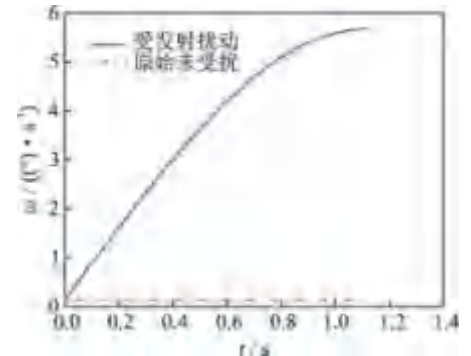


图 7 发射过程平台姿态偏航角速率  
Fig.7 Platform attitude yaw rate during launch

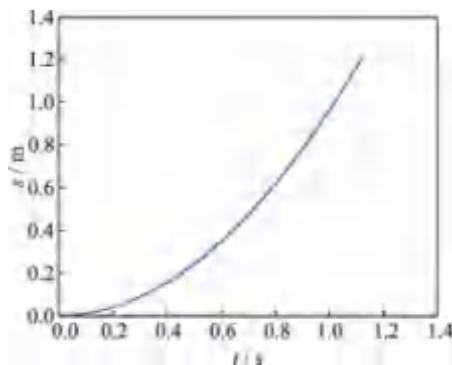


图8 拦截器在平台发射筒中的滑行位移

Fig.8 Sliding displacement of the interceptor in the platform launch tube

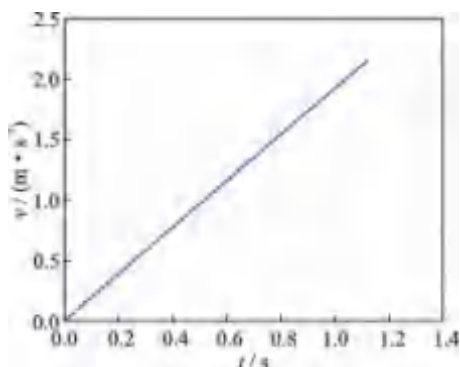


图9 拦截器在平台发射筒中的滑行速率

Fig.9 Sliding rate of the interceptor in the platform launch tube

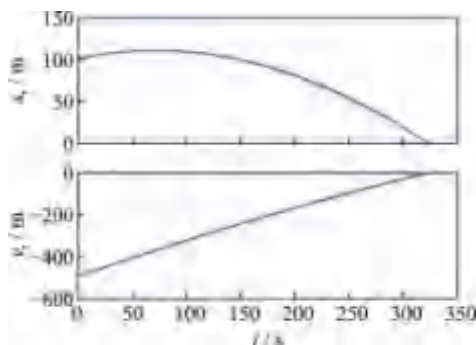


图10 拦截器分离后在拦截轨道上的位置坐标

Fig.10 Position coordinates of the interceptor on the intercepting orbit after separation

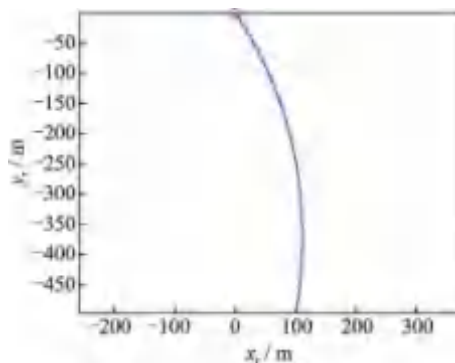


图11 拦截器分离后的拦截轨道

Fig.11 Intercepting orbit after interceptor separation

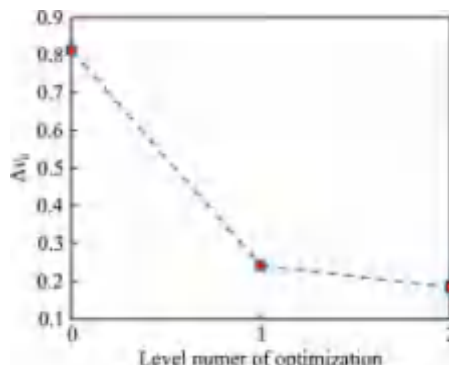


图12 三级优化结果变化

Fig.12 Three-level optimization results

图4~7显示,由于发射过程拦截器对平台的反作用力,在拦截器分离瞬间,平台的实际轨迹相对于未受扰的绕飞轨迹沿 $y$ 轴负方向偏离了约0.13 m,平台的 $x$ 轴向相对速度增加了0.08 m/s, $y$ 轴向相对速度减小了0.22 m/s,姿态偏航角增加了 $3.90^\circ$ ,姿态偏航角速率增加了 $5.55 (^\circ)/s$ 。考虑到平台相对于目标星的环绕椭圆的几何尺度和相对环绕速度,可以认为拦截器发射过程对平台的位置坐标影响甚微,但是对平台绕飞速度以及姿态的影响不容忽视。

图9显示拦截器加速滑离平台,离开平台瞬间相对于平台的速度约为2.15 m/s。考虑到平台本身绕飞目标星的径向速度甚小,所以拦截器相对于平台的分离速度在很大程度上近似代表了其飞向目标星的速度,并且据此可以粗略估算拦截飞行时间。精确的拦截飞行时间在图10中给出,为 $t_i^{\text{optim}} = 324.42$  s,这是拦截器分离后经过一次最优速度脉冲修正其飞行方向后的结果。发射分离后施加的最优速度脉冲分量分别为 $\Delta v_{x0}^{\text{optim}} = -0.178$  m/s,  $\Delta v_{y0}^{\text{optim}} = -0.045$  m/s,幅值为 $\Delta v^{\text{optim}} = \sqrt{\Delta v_{x0}^{\text{optim}2} + \Delta v_{y0}^{\text{optim}2}} = 0.184$  m/s。图10显示拦截器相对于目标星的位置坐标在 $t_i^{\text{optim}}$ 时刻变为零,表示拦截成功。图11直观地显示了拦截器从分离点到拦截点之间的飞行轨迹,红色小圆圈表示目标星即拦截点。图12直观显示了三级优化过程中性能指标的变化过程,可见从零阶到一阶的修正量相对较大,而一阶近似优化结果已经比较接近真解。

最后补充说明,本文算出的 $t_i^{\text{optim}}/T = 0.059 \ll 1$ ,说明文中将 $n$ 视作小参数,采用小参数正则摄动的方法计算一阶近似最优解的前置条件是成立的。

## 4 结 论

本文针对空间平台绕飞目标星,并发射拦截



器来拦截目标星的动力学与脉冲最优控制问题开展研究。在平台与目标星已形成绕飞关系的条件下,拦截器从平台中射出,分离瞬间给其施加一个速度脉冲修正其飞行方向,然后拦截器在C-W方程支配下凭惯性飞行,直至拦截目标星。本文采用拉格朗日第二类方程建立了平台发射拦截器过程的两体耦合动力学,然后采用基于小参数正则摄动的方法给出了最优速度脉冲的一阶近似优化解,并以此为迭代初值,采用非线性规划方法算得最省能耗最优速度脉冲值,本文谓之“三级优化方法”。最后用数值仿真验证了本文所提方法的有效性。

#### 参考文献:

- [1] 王大彤, 谭飞, 吕连朋, 等. 基于非线性规划算法的空间机动拦截优化[J]. 四川兵工学报, 2013, 34(9): 44-46.  
WANG Datong, TAN Fei, LV Lianpeng, et al. Optimization of many pulses of maneuvering to intercept based on nonlinear programming[J]. Journal of Sichuan Military Engineering, 2013, 34(9): 44-46.
- [2] XIE Li, ZHANG Yiqun, XU Junyan. Optimal two-impulse space interception with multiple constraints[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2020, 21(7): 1085-1107.
- [3] 魏鹏涛, 雷刚, 王明海. 空间拦截轨道快速规划研究[J]. 上海航天, 2013, 30(1): 44-47.  
WEI Pengtao, LEI Gang, WANG Minghai. Study on quickly designing orbit for space interception[J]. Aerospace Shanghai, 2013, 30(1): 44-47.
- [4] 魏鹏涛. 空间目标逆轨网捕拦截停泊轨道的优化设计[J]. 飞行力学, 2017, 35(6): 61-64, 69.  
WEI Pengtao. Optimal design of berthing orbit for reverse rail interception of space target[J]. Flight Dynamics, 2017, 35(6): 61-64, 69.
- [5] 夏存言, 张刚, 耿云海. 共面单脉冲拦截多目标问题[J]. 航空学报, 2021, 43(3): 1-11.  
XIA Cunyan, ZHANG Gang, GENG Yunhai. Multi-target interception with a single impulse[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2021, 43(3): 1-11.
- [6] TAUR D R, CARROLL V C, PRUSSING J E. Optimal impulsive time-fixed orbital rendezvous and interception with path constraints[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(1): 54-60.
- [7] LAW DEN D F. Optimal trajectories for space navigation[M]. London: Butterworths, 1963.
- [8] PRUSSING J E, WELLNITZ L J, HECKATHORN W G. Optimal impulsive time-fixed direct-ascent interception[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1989, 12(4): 487-494.
- [9] 王国梁, 郑建华. 主矢量法在空间近距离拦截优化中的应用[J]. 空间科学学报, 2011, 31(3): 361-365.  
WANG Guoliang, ZHENG Jianhua. Application of primer-vector theory in close intercept optimization[J]. Journal of Space Science, 2011, 31(3): 361-365.
- [10] LEMBECK C A, PRUSSING J E. Optimal impulsive intercept with low-thrust rendezvous return[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1993, 16(3): 426-433.
- [11] DING Wenzhe, LI Xinhong, YANG Hong. Research on minimum time interception problem with a tangent impulse under relative motion models[J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2019, 3: 1-14.
- [12] OGHIM S Y, LEEGHIM H Z, KIM D H. Real-time spacecraft intercept strategy on J2-perturbed orbits[J]. Advance in Space Research, 2019, 63: 1007-1016.
- [13] DOUGHERTY J J, SPEYER J L. Improved approximations for near-optimal interceptor guidance AIAA-95-3324[R]. [S.l.]: AIAA, 1995: 1384-1394.
- [14] DOUGHERTY J J, SPEYER J L. Near-optimal guidance law for ballistic missile interception[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1997, 20(2): 355-361.
- [15] 葛东明, 史纪鑫, 邓润然, 等. 一种柔性多体动力学建模方法及其工程应用[J]. 航天器环境工程, 2019, 36(4): 323-329.  
GE Dongming, SHI Jixin, DENG Runran, et al. Flexible multi-body dynamics modeling and its engineering application[J]. Spacecraft Environmental Engineering, 2019, 36(4): 323-329.

(编辑:夏道家)