

http://bhxb.buaa.edu.cn jbuua@buaa.edu.cn

DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2022.0326

# 基于波动控制的直升机吊挂鲁棒减摆技术

李红宏, 韩艳铎\*

(南京航空航天大学 航天学院, 南京 211106)

**摘 要:** 直升机在运输重型货物从平飞到悬停的机动过程中, 会产生许多稳定性问题, 减小吊挂摆角幅度具有重要意义。基于波动控制的方法为直升机吊挂系统设计一种减摆控制器; 采用拉格朗日分析力学法, 建立直升机吊挂耦合系统四自由度非线性纵向运动模型, 采用小扰动的方法在平衡点处对所建模型进行线性化; 在此基础上, 基于特征值配置法设计状态反馈控制器; 设计波动控制器来减小摆角控制具有良好的动态性能和稳态性能。在仿真中对吊挂载荷质量进行拉偏, 证明所设计波动控制器具有较强的鲁棒性, 结果表明: 所设计波动控制器有效。

**关 键 词:** 直升机吊挂系统; 动力学模型; 状态反馈; 波动控制; 减摆控制器

**中图分类号:** V249.1

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-5965(2024)05-1629-10

直升机吊挂系统以其能够快速机动、对吊挂载荷外形限制较小、对地形要求较小等优势, 在军用、民用等领域均有广泛的应用。直升机吊挂系统在平飞到精确悬停的过程中, 由于其欠驱动的特性, 会导致吊挂载荷振荡幅度过大、系统调节时间过长等问题, 严重时甚至会威胁到直升机的飞行安全, 并且直升机吊挂系统的强非线性和强耦合性提高了对稳定控制器的设计要求。

国内外已有学者针对直升机吊挂系统建模和飞行稳定性进行了相关研究<sup>[1-7]</sup>, 有关直升机吊挂系统的减摆问题依旧是研究的热点之一。何荣荣等<sup>[8]</sup>基于反步法和滑模变结构控制理论设计了控制器, 解决了直升机平飞时吊挂载荷的摆动问题。张松等<sup>[9]</sup>和 Potter 等<sup>[10]</sup>均采用了输入整形控制来解决吊挂载荷摆动问题, 但当系统模型参数变化时, 输入整形控制的减摆效果较差。Omar<sup>[11]</sup>和 El-Ferik 等<sup>[12]</sup>均是将直升机控制和吊挂载荷减摆控制独立研究, 为直升机设计轨迹跟踪控制器, 在此基础上设计吊挂减摆控制器对直升机参考轨迹进行修正, 从而达到抑制吊挂摆动的目的, 但将直升机系统和吊挂子系统分离研究无法进一步提升直升机吊挂飞行的总体性能。Ren 等<sup>[13]</sup>将吊挂载荷消除摆振的问题

转化为直升机的轨迹跟踪问题, 通过设计轨迹跟踪控制器使直升机沿着理想的轨迹运动, 从而达到吊挂减摆的目的。此外, Enciu 和 Rosen 等<sup>[14]</sup>采用受控挂钩和在吊挂载荷上加装翼片的方法, 通过风洞实验数据证明了该方法能够解决高速情况下的吊挂载荷不稳定问题。尽管直升机吊挂系统的减摆控制已有不少的研究成果, 能够达到有效的减摆目的, 但大多数的控制效果需要以直升机吊挂模型参数精确已知为前提, 关于吊挂系统模型不精准情况下的鲁棒减摆控制仍需要进一步研究。

波动控制的方法出现于 20 世纪 90 年代, 主要应用在柔性结构的振荡抑制上, 该方法优点在于控制器设计对模型要求不敏感, 具有较强的鲁棒性。O'Connor 等<sup>[15-19]</sup>以弹簧滑块模型为出发点在十几年内对波动控制进行了深入的研究, 分别对龙门吊、块状柔性机器人等结构进行了控制研究, 提出了一个较为通用的波动控制器设计方法, 但 O'Connor 等<sup>[15-19]</sup>得到的仅仅是执行机构需要满足的位置(或速度)控制规律, 并没有对执行机构内部的控制律进行研究。

本文在 O'Connor 等<sup>[15-19]</sup>的研究基础上, 将波动控制的方法运用在直升机吊挂的减摆控制技术

收稿日期: 2022-05-07; 录用日期: 2022-05-29; 网络出版时间: 2022-10-09 13:55

网络出版地址: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20221008.1451.004

\*通信作者. E-mail: hanyanhua@nuaa.edu.cn

**引用格式:** 李红宏, 韩艳铎. 基于波动控制的直升机吊挂鲁棒减摆技术 [J]. 北京航空航天大学学报, 2024, 50 (5): 1629-1638.

LI H H, HAN Y H. Robust anti-swing technology for helicopter slung load based on wave control [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024, 50 (5): 1629-1638 (in Chinese).

上。围绕直升机吊挂系统耦合动力学模型和稳定减摆控制器设计 2 个问题展开研究。基于拉格朗日分析力学法建立了直升机吊挂耦合系统四自由度非线性纵向运动模型。设计了以波动控制为外环、状态反馈特征值配置控制为内环的波动控制器,通过求解闭环系统系数矩阵的特征值,证明了本文波动控制器的稳定性。仿真结果表明,本文波动控制器具有较好的减摆性能的同时,具有较强鲁棒性。

## 1 本文模型

本文模型示意图如图 1 所示,其中,  $O_x y_i$  为惯性坐标系,  $O_b x_b y_b$  为机体坐标系,  $\eta$  为直升机的姿态俯仰角,  $P$  为主旋翼拉力,  $l$  为吊索长度,  $\phi$  为吊索与当地铅垂线夹角,  $a$  为拉力作用点与质心的距离,  $b$  为吊挂点与质心的距离,  $\lambda$  为拉力与轴  $O_b y_b$  的夹角。该模型总共 4 个自由度,分别为直升机两平动自由度、直升机俯仰运动自由度和吊挂载荷摆动自由度。

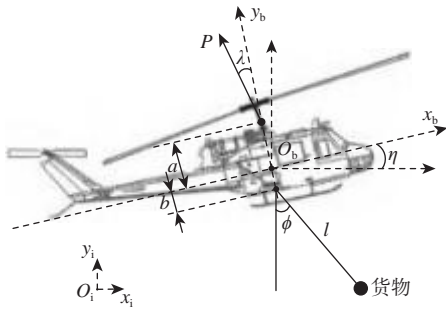


图 1 本文模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the developed model

### 1.1 坐标系定义

#### 1) 惯性坐标系 $O_i x_i y_i$

原点  $O_i$  选择为直升机飞行纵平面内,地面上指定的一点,  $O_i x_i$  轴为飞行纵平面与地面的交线,且顺着直升机前进方向为正,  $O_i y_i$  轴与  $O_i x_i$  轴垂直,向上为正。定义惯性系的基组为

$$\mathbf{I} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \quad (1)$$

式中:基矢量  $\mathbf{a}_1$  沿着惯性系的  $O_i x_i$  轴,  $\mathbf{a}_2$  沿着惯性系的  $O_i y_i$  轴。

#### 2) 机体坐标系 $O_b x_b y_b$

原点固定于直升机质心,  $O_b x_b$  沿着直升机的设计轴线指向机头,  $O_b y_b$  轴位于直升机对称平面内,垂直于  $O_b x_b$  轴指向机身上方。定义机体坐标系基组为

$$\mathbf{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \quad (2)$$

式中:基矢量  $\mathbf{c}_1$  沿着机体系的  $O_b x_b$  轴,  $\mathbf{c}_2$  沿着机体

系的  $O_b y_b$  轴。

机体系基组与惯性系基组之间的转换关系如下:

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} \mathbf{T}_{IC} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{T}_{IC}$  为转换矩阵,其表达式为

$$\mathbf{T}_{IC} = \begin{bmatrix} \cos \eta & -\sin \eta \\ \sin \eta & \cos \eta \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 1.2 本文模型建立

忽略直升机外形所带来的气动影响,将直升机看作一个矩形方块,其质心等效为方块的几何中心,直升机的俯仰转动惯量和方块的俯仰转动惯量相等,将图 1 的模型进行简化,简化后的模型如图 2 所示。

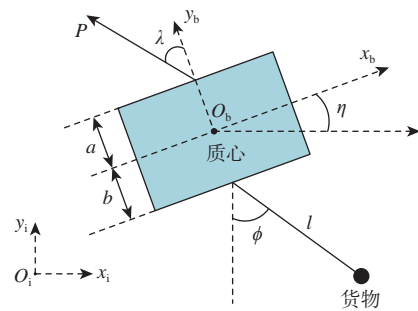


图 2 本文模型简化示意图

Fig. 2 Simplified schematic diagram of the developed model

直升机的质量为  $m_1$ , 俯仰转动惯量为  $J$ , 吊挂载荷的质量为  $m_2$ 。直升机受到主旋翼的拉力,其大小为  $P$ , 方向用其与轴  $O_b y_b$  的夹角  $\lambda$  表示。在机体系下,拉力的作用点位于直升机质心的正上方,与质心距离为  $a$ , 吊挂点位于直升机质心的正下方,与质心距离为  $b$ 。

为建立本文模型,做出以下假设<sup>[3]</sup>。

假设 1 载荷采用单点吊挂的方式。

假设 2 忽略吊索质量,且吊索处于紧绷状态。

假设 3 吊挂载荷可看作是质点。

假设直升机质心相对于惯性系原点的位矢为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{I}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (5)$$

则吊挂载荷质心相对惯性系原点的位矢为

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{I}(x + b \sin \eta + l \sin \phi, y - b \cos \eta - l \cos \phi) \quad (6)$$

式(5)对时间求导,可得直升机质心相对惯性系原点的速矢为

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{I}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}) \quad (7)$$

式(6)对时间求导,可得吊挂载荷质心相对惯性系原点的速矢为

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{I}(\dot{x} + b \dot{\eta} \cos \eta + l \dot{\phi} \cos \phi, \dot{y} + b \dot{\eta} \sin \eta + l \dot{\phi} \sin \phi) \quad (8)$$

采用拉格朗日分析力学建模方法,定义广义坐标为

$$\begin{cases} q_1 \triangleq x \\ q_2 \triangleq y \\ q_3 \triangleq \eta \\ q_4 \triangleq \phi \end{cases} \quad (9)$$

则相应于这4个广义坐标的广义力为

$$\begin{cases} Q_1 = -P \sin(\eta + \lambda) \\ Q_2 = P \cos(\eta + \lambda) \\ Q_3 = M_p = aP \sin \lambda \\ Q_4 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

系统的总动能  $T$  可分为直升机平动动能、直升机转动动能和吊挂载荷动能3部分,表达式为

$$T = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} J \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \quad (11)$$

将式(7)和式(8)代入式(11)中可得

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} J \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + b^2 \dot{\eta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2b\dot{\eta}(\dot{x} \cos \eta + \dot{y} \sin \eta) + 2l\dot{\phi}(\dot{x} \cos \phi + \dot{y} \sin \phi) + 2bl\dot{\eta}\dot{\phi} \cos(\eta - \phi)] \quad (12)$$

若以惯性系原点所在的水平面为零重力势能参考平面,直升机吊挂系统的总势能  $V$  可写为

$$V = m_1 g y + m_2 g(y - b \cos \eta - l \cos \phi) \quad (13)$$

系统的拉格朗日函数  $L$  为

$$L \triangleq T - V \quad (14)$$

拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (15)$$

将式(9)和式(10)、式(12)~式(14)代入到式(15)可得系统的动力学模型为

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 b \ddot{\eta} \cos \eta + m_2 l \ddot{\phi} \cos \phi - m_2 b \dot{\eta}^2 \sin \eta - m_2 l \dot{\phi}^2 \sin \phi = -P \sin(\eta + \lambda) \\ (m_1 + m_2) \ddot{y} + m_2 b \ddot{\eta} \sin \eta + m_2 l \ddot{\phi} \sin \phi + m_2 b \dot{\eta}^2 \cos \eta + m_2 l \dot{\phi}^2 \cos \phi + (m_2 + m_2) g = P \cos(\eta + \lambda) \\ m_2 b \ddot{x} \cos \eta + m_2 b \ddot{y} \sin \eta + (J + m_2 b^2) \ddot{\eta} + m_2 g b \sin \eta + m_2 b l \dot{\phi}^2 \sin(\eta - \phi) + m_2 b l \ddot{\phi} \cos(\eta - \phi) = aP \sin \lambda \\ m_2 l \ddot{x} \cos \phi + m_2 l \ddot{y} \sin \phi + m_2 b \ddot{\eta} \cos(\eta - \phi) + m_2 l \ddot{\phi} \cos(\eta - \phi) + m_2 g l \sin \phi = 0 \end{cases} \quad (16)$$

## 2 直升机吊挂系统减摆控制器设计

本文先设计了状态反馈特征值配置控制器,并在此基础上,基于波动控制的原理,设计了波动控制器,整个系统的控制结构图如图3所示。

由图3可知,直升机吊挂系统减摆控制的控制流程如下:首先,给出期望指令,通过指令变换,叠加上本文波动控制器的反馈量后,得到新的指令,将新的指令与系统状态量比较,求得误差量;然后,通过状态反馈特征值配置控制器,反解出直升机吊挂系统的控制输入量:拉力大小  $P$  和拉力方向  $\lambda$ ;最

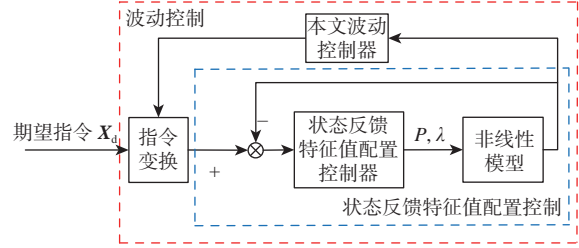


图3 控制系统结构图

Fig. 3 Structure diagram of control system

后,将求得的  $P$  和  $\lambda$  用于非线性系统仿真。

### 2.1 状态反馈特征值配置控制器设计

由图2可知,直升机吊挂系统在稳定悬停时,吊挂负载不存在摆动,直升机主旋翼拉力等于直升机吊挂系统的重力,此时系统是稳定平衡的,因此,将直升机悬停时的状态选取为平衡状态,对式(16)进行小扰动线性化,故平衡点处各配平值为

$$\begin{cases} x^* = x_d, \dot{x}^* = 0 \\ y^* = y_d, \dot{y}^* = 0 \\ \eta^* = 0, \dot{\eta}^* = 0 \\ \phi^* = 0, \dot{\phi}^* = 0 \\ P^* = (m_1 + m_2)g \\ \lambda^* = 0 \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $x_d$ 、 $y_d$  表示期望的悬停位置。

将状态量和控制量表示成配平值和小扰动量的叠加,即

$$\begin{cases} x = x^* + \Delta x \\ y = y^* + \Delta y \\ \eta = \eta^* + \Delta \eta \\ \phi = \phi^* + \Delta \phi \\ P = P^* + \Delta P \\ \lambda = \lambda^* + \Delta \lambda \end{cases} \quad (18)$$

将式(17)和式(18)代入式(16),并进行泰勒展开,忽略高阶项,得到小扰动近似线性模型如下:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \Delta \ddot{x} + m_2 b \Delta \ddot{\eta} + m_2 l \Delta \ddot{\phi} = -(m_1 + m_2) g \Delta \eta - (m_1 + m_2) g \Delta \lambda \\ (m_1 + m_2) \Delta \ddot{y} = \Delta P \\ m_2 b \Delta \ddot{x} + (J + m_2 b^2) \Delta \ddot{\eta} + m_2 b l \Delta \ddot{\phi} = -m_2 g b \Delta \eta + a(m_1 + m_2) g \Delta \lambda \\ \Delta \ddot{x} + b \Delta \ddot{\eta} + l \Delta \ddot{\phi} = -g \Delta \phi \end{cases} \quad (19)$$

选取系统的状态变量为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \eta \\ \Delta \phi \\ \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \\ \Delta \dot{\eta} \\ \Delta \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (20)$$

因此,式(19)可写为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{u}$  为控制输入矩阵;  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$  均为常数矩阵, 表达

式分别为

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1} & \frac{m_2 g}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_2 g b}{J} & \frac{m_2 g b}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l} + \frac{m_2 g b^2}{Jl} & -\frac{m_2 g}{m_1 l} - \frac{m_2 g b^2}{Jl} - \frac{g}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(m_1 + m_2)g}{m_1} \\ \frac{1}{m_1 + m_2} & 0 \\ 0 & \frac{a(m_1 + m_2)g}{J} \\ 0 & \frac{(m_1 + m_2)g}{m_1 l} - \frac{ab(m_1 + m_2)g}{Jl} \end{bmatrix} \quad (24)$$

设计控制律

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{X} \quad (25)$$

式中:  $\mathbf{K}$  为一个  $2 \times 8$  的系数矩阵, 表达式为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{28} \end{bmatrix} \quad (26)$$

将式(25)代入式(21)得

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{u} \quad (27)$$

由于闭环系统的李氏稳定性取决于矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  的特征值, 当特征值的实部全部严格为负时, 系统是稳定可控的。

采用状态反馈特征值配置控制的结构图如图4所示。

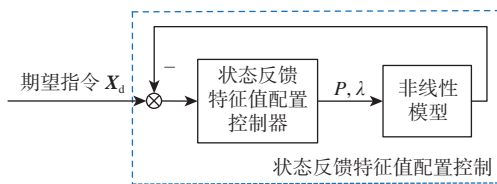


图4 状态反馈特征值配置控制结构图

Fig. 4 Structure diagram of state-feedback eigenvalue configuration control

## 2.2 本文波动控制器设计

波动控制的原理是将系统间的相互作用视为

“波”的发射和反射。以直升机吊挂系统为例, 将直升机的运动作为波的入射端, 吊挂载荷作为反射端, 吊索上每一点的运动将由入射波和反射波叠加而成, 通过调节直升机的运动, 吸收吊挂系统中的反射回波, 从而抑制吊挂系统在运动过程中的振动, 以达到有效减摆的目的。

O'Connor 等<sup>[15]</sup> 给出了波动控制计算的3种形式, 分别为传递函数形式、积分形式及直接力的形式<sup>[14]</sup>。其中, 以传递函数表示的波动控制结构图如图5所示。

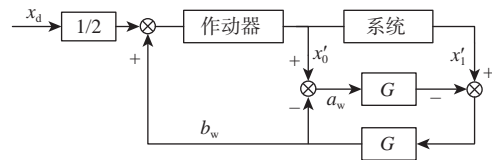


图5 波动控制结构图

Fig. 5 Structure diagram of wave-based control

图5中,  $x_0$ 、 $x_1$  为该系选取的状态反馈量,  $a_w$  为发射波,  $b_w$  为反射波。  $G$  为波动控制的传递函数形式。将反射波  $b_w$  反馈到输入端, 与期望指令的一半进行叠加, 通过改变指令的方式, 控制作动器向系统施加控制力, 从而达到使整个系统镇定的目的。

本文设计的波动控制结构如图6所示, 其中,  $x, y$  分别为选取的2个通道的状态反馈量, 其物理意义表示为直升机横向位置状态量和纵向位置状态量,  $b_x$  和  $b_y$  分别为2个通道的反射波。  $G_x$ 、 $G_y$  为设计波动控制中的传递函数,  $\mathbf{M}_1$ 、 $\mathbf{M}_2$  为2个  $1 \times 8$  常数矩阵, 其表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (28)$$

将系统状态  $\mathbf{X}$  左乘  $\mathbf{M}_1$  和  $\mathbf{M}_2$  得到选取的状态反

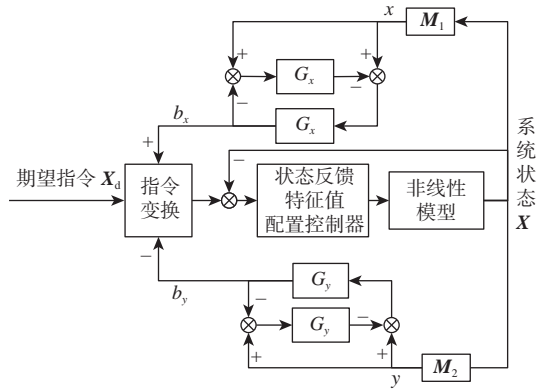


图6 本文波动控制结构图

Fig. 6 Structure diagram of the designed wave-based control

馈量  $x, y$ , 将状态反馈量通过波动控制器计算得到的反射波  $b_x, b_y$  作用到指令端, 对初始的期望指令进行变换, 得到新的指令, 将新的指令作为内环状态反馈特征值配置控制器的输入, 以此将外环的波动控制器与内环的反馈控制器结合。

O'Connor 等<sup>[19-20]</sup>将波动控制应用在  $N$  个串联的弹簧滑块模型中, 计算出了传递函数的近似表达式为

$$G = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega s + \omega^2} \quad (29)$$

式中:  $\omega$  为阻抗项。

此外, 万绍峰等<sup>[3]</sup>对直升机吊挂系统进行建模时, 将吊索当作多质点弹簧模型进行建模, 并验证了其有效性。因此, 本文将式 (29) 为基础, 认为弹簧质点模型中阻抗项较小, 令  $\omega$  为 1, 并在此基础上进行了改进。通过在传递函数分子上引入一个  $s$  项, 可以等效地认为增加了一个开环零点。在系统中增加一个开环零点, 能够改变根轨迹在实轴上的分布, 从而改善系统的动态性能。因此, 本文所设计的传递函数表达式为

$$\begin{cases} G_x = \frac{4.5s+1}{s^2+s+1} \\ G_y = \frac{2.5s+1}{s^2+s+1} \end{cases} \quad (30)$$

整个指令变换过程如下:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{1}{2}x_d + b_x, \tilde{\dot{x}} = \dot{x}_d \\ \tilde{y} = \frac{1}{2}y_d - b_y, \tilde{\dot{y}} = \dot{y}_d \\ \tilde{\eta} = \eta_d, \tilde{\dot{\eta}} = \dot{\eta}_d \\ \tilde{\varphi} = \varphi_d, \tilde{\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}_d \end{cases} \quad (31)$$

### 2.3 增广系统稳定性证明

选取图 6 中  $x$  通道上的波动控制器进行分析, 可得

$$G_x[x - G_x(x - b_x)] = b_x \quad (32)$$

整理得

$$\frac{b_x}{x} = \frac{G_x}{1 + G_x} \quad (33)$$

同理可得

$$\frac{b_y}{y} = \frac{G_y}{1 + G_y} \quad (34)$$

将式 (30) 代入式 (33) 和式 (34) 得

$$\begin{cases} H_1(s) = \frac{b_x}{x} = \frac{4.5s+1}{s^2+5.5s+2} \\ H_2(s) = \frac{b_y}{y} = \frac{2.5s+1}{s^2+3.5s+2} \end{cases} \quad (35)$$

因此, 加入波动控制后的增广系统信号流程如图 7 所示。

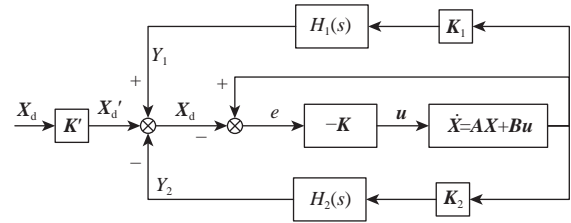


图7 增广系统信号流程图

Fig. 7 Signal flow chart of augmented matrix

图中矩阵  $K_1$ 、 $K_2$  是将矩阵  $M_1$ 、 $M_2$  扩维到  $8 \times 8$  的矩阵,  $K$  为系统指令的变换矩阵, 根据式 (31) 可得其表达式为

$$K = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

根据图 7 可得

$$\dot{X} = [A - BK + BKH_1(s)K_1 - BKH_2(s)K_2]X + BKK'X_d \quad (37)$$

将式 (35) 代入式 (37), 并将其转换成微分方程的形式可得

$$X^{(5)} = N_4X^{(4)} + N_3X^{(3)} + N_2X^{(2)} + N_1X^{(1)} + N_0X + U \quad (38)$$

式中:  $N_0 \sim N_4$  均为系数矩阵;  $U$  为增广系统的输入, 表达式为

$$\begin{cases} N_4 = A - BK - 9I_{8 \times 8} \\ N_3 = 9(A - BK) + 4.5BKK_1 - 2.5BKK_2 - 23.25I_{8 \times 8} \\ N_2 = 23.25(A - BK) + 16.75BKK_1 - 14.75BKK_2 - 18I_{8 \times 8} \\ N_1 = 18(A - BK) + 12.5BKK_1 - 10.5BKK_2 - 4I_{8 \times 8} \\ N_0 = 4(A - BK) + 2BKK_1 - 2BKK_2 \\ U = BKK'X_d^{(4)} + 9BKK'X_d^{(3)} + 23.25BKK'X_d^{(2)} + 18BKK'X_d^{(1)} + 4BKK'X_d \end{cases} \quad (39)$$



令

$$\xi = [\xi_1 = \mathbf{X}, \xi_2 = \mathbf{X}^{(1)}, \xi_3 = \mathbf{X}^{(2)}, \xi_4 = \mathbf{X}^{(3)}, \xi_5 = \mathbf{X}^{(4)}] \quad (40)$$

将式 (38) 写成矩阵的形式可得

$$\dot{\xi} = \bar{\mathbf{A}}\xi + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{U} \quad (41)$$

其中

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{8 \times 8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{8 \times 8} \\ \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \quad (42)$$

计算出增广矩阵  $\bar{\mathbf{A}}$  特征值分布如图 8 所示, 图中线表示复平面坐标轴, 由图 8 可知, 增广系统系数矩阵的特征值均具有负实部, 故加入波动控制后的增广系统稳定。根据李雅普诺夫稳定性定理可知, 若非线性系统在平衡点处线性化后的线性系统稳定, 那么该非线性系统在平衡点的某个邻域内稳定。

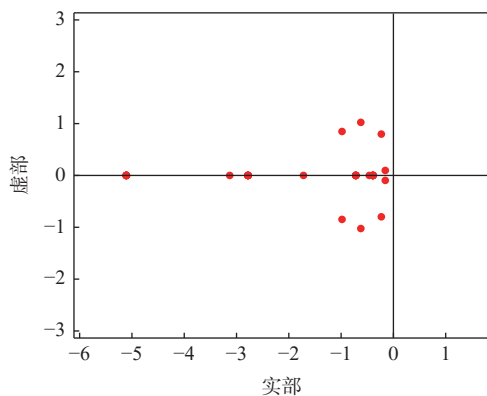


图 8 增广系统特征值

Fig. 8 Characteristic values of augmented matrix

### 3 数值仿真及分析

对本文波动控制器进行数值仿真, 对比了加入波动控制前后直升机吊挂系统的控制性能, 并对加入波动控制后的系统鲁棒性进行了验证。

仿真中主旋翼拉力大小限制在 4 000~6 500 N

之间, 拉力角限制在  $-20^\circ \sim 20^\circ$  之间, 仿真入口参数如表 1 所示。

#### 3.1 加入波动控制前后的仿真分析

由 2.1 节可知, 需要设计矩阵  $\mathbf{K}$  使矩阵  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  的特征值实部严格为负。通过特征值配置的方法, 即可反解矩阵  $\mathbf{K}$ 。给定的特征值如表 2 所示。

采用上述参数对状态极点控制器进行仿真, 在此基础上, 对加入波动控制后的系统再次仿真, 2 次仿真的入口参数设置、控制器参数均完全相同, 仿真对比结果如图 9 所示。

由图 9 可知, 采用状态反馈特征值配置控制器时, 姿态俯仰角和吊挂载荷摆角的变化较为剧烈, 存在俯仰角或摆角过大的问题, 且纵向位移上出现了负值。

加入波动控制后, 俯仰角和摆角逐渐收敛, 均未超过初始值, 且控制在较小的范围内, 纵向位移在整个机动过程中未出现负值情况。

图 9 中各个状态量的具体调节参数如表 3 和表 4 所示, 调节时间的误差带选取为 5%, 最大振幅选取除初值以外的最大峰值。

由表 3 和表 4 可知, 加入波动控制后调节时间略有增加, 但能有效控制姿态角和摆角的振荡幅度, 摆角振荡的最大幅值均减小了一半以上。对于直升机吊挂系统而言, 控制摆角逐渐收敛能够确保直升机吊挂运输的安全性, 更具有现实意义。

针对 2.2 节中, 在传递函数引入  $s$  项进行了相关仿真, 引入  $s$  项前后的波动控制结果对比如图 10 所示。选取调节时间的误差带为 5% 的情况下, 各个状态量的调节时间如表 5 所示。

从图 10 中可以看出, 在波动控制的传递函数中引入  $s$  项后, 系统各个状态量的振荡幅度略有加大, 但由表 4 可知, 引入  $s$  项后, 在横向位移、纵向位移上的调节时间减小幅度均在 35% 左右, 在俯仰角上的调节时间略微缩短。但在摆角上的调节时间略有延长。分析其原因是, 摆角状态量在系统中属于间接控制, 因此, 控制的作用效果在时间上有一定的滞后性, 引入  $s$  项后振荡幅度略有加大, 导致最终的调节时间略有延长。相比于其余状态量

表 1 仿真入口参数

Table 1 Simulation entry parameters

$m_1/\text{kg}$	$m_2/\text{kg}$	$l/\text{m}$	$g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	$a/\text{m}$	$b/\text{m}$	$J/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$x/\text{m}$	$y/\text{m}$	$v_x/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_y/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$\phi/(\circ)$	$\eta/(\circ)$
400	200	10	9.8	2	0.5	210	0	5	5	0	10	5

表 2 特征值参数

Table 2 Eigenvalue parameters

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$
$-0.4+0.798i$	$-0.4+0.798i$	$-0.5+0.455i$	$-0.5-0.455i$	$-0.6+0.3i$	$-0.6-0.3i$	$-1.2$	$-1.2$

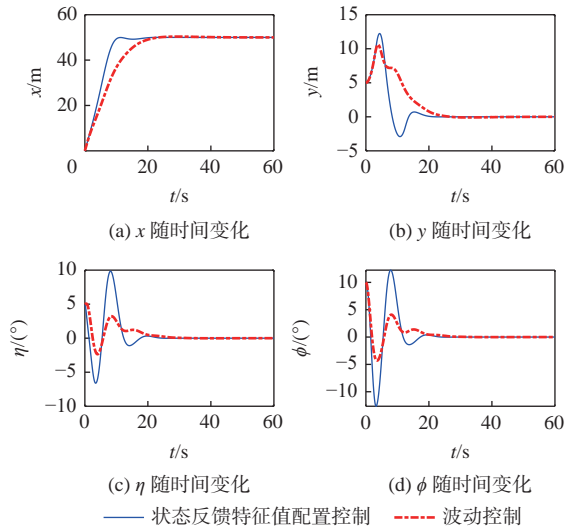


图 9 状态量随时间变化曲线  
Fig. 9 Curves of state changes over time

表 3 各状态量最大幅值				
Table 3 Maximum amplitude of each state variable				
控制方法	$x/\text{m}$	$y/\text{m}$	$\eta/(\text{°})$	$\phi/(\text{°})$
状态反馈特征值配置控制	50.02	12.23	9.84	12.65
波动控制	50.35	10.57	2.32	4.28

表 4 各状态量调节时间		
Table 4 Adjustment time for each state variable $s$		
状态量	状态反馈特征值配置控制	波动控制
$x$	8.98	17.26
$y$	18.40	23.26
$\eta$	21.12	24.69
$\phi$	16.22	19.36

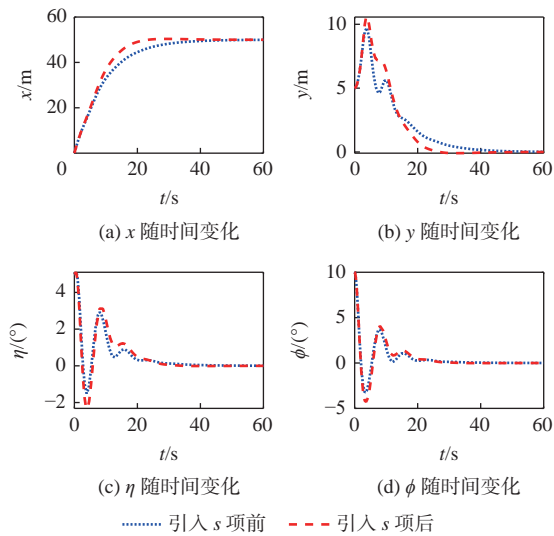


图 10 引入  $s$  项前后, 状态量随时间变化曲线  
Fig. 10 Curves of state changes over time before and after introducing term  $s$

表 5 引入 $s$ 项前后各状态量调节时间表			
Table 5 Adjustment time table for each state variable before and after introducing term $s$			
状态量	调节时间/s		减小幅度/%
	引入 $s$ 项前	引入 $s$ 项后	
$x$	26.82	17.26	35.65
$y$	36.16	23.26	35.67
$\eta$	25.36	24.69	2.64
$\phi$	18.10	19.36	-6.96

的减小而言, 可以认为引入  $s$  项后能够缩短系统的调节时间, 改善系统的动态调节性能。

综上所述, 状态反馈特征值配置控制器虽然能够使得直升机吊挂系统受控, 但姿态角和摆角的变化剧烈, 振荡幅度较大, 加入波动控制后, 俯仰角和摆角逐渐收敛, 能够达到有效减摆的目的, 但代价是各个状态量上的调节时间有了一定的延长, 通过在波动控制的传递函数中引入开环零点, 可以改善系统的调节性能。因此, 可认为改进后的波动控制, 能够在保证吊挂载荷有效减摆的同时, 使得调节时间上牺牲的代价较小。

3.2 波动控制的鲁棒性验证

为进一步验证本文波动控制器的鲁棒性, 本文考虑了本文模型的参数干扰和外部气动阻力干扰, 并分别进行了相关仿真。

先对本文模型加入干扰项, 考虑到直升机吊挂载荷实际飞行时, 可能出现吊挂载荷设计质量与实际质量不匹配的情况。在仿真时对吊挂载荷质量进行了拉偏(当吊挂载荷质量拉偏为+30 kg 时, 表示设计控制器时吊挂载荷质量为 200 kg, 仿真时吊挂载荷质量为 230 kg), 其余参数均不改变。仿真对比结果如图 11 和图 12 所示。

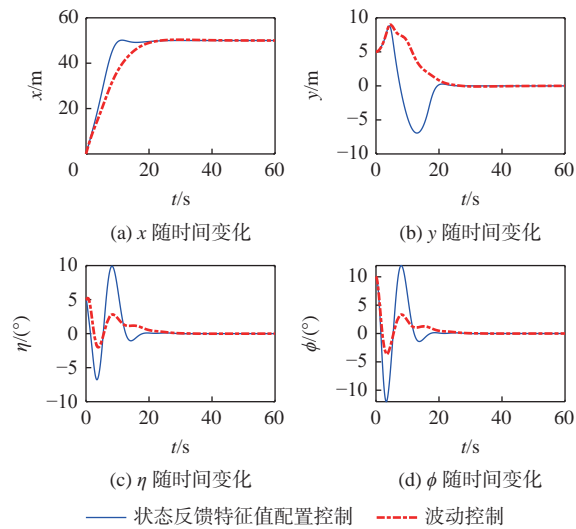


图 11 质量偏差为+30 kg 时, 状态量随时间变化曲线  
Fig. 11 Curves of state changes over time with mass bias of +30 kg

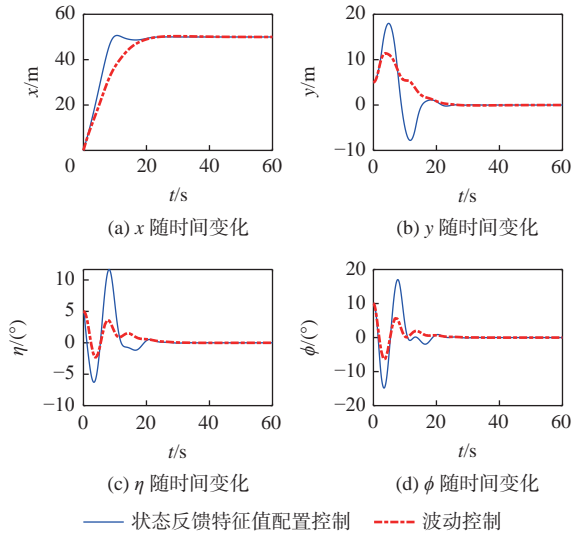


图 12 质量偏差为-50 kg 时,状态量随时间变化曲线

Fig. 12 Curves of state changes over time with mass bias of -50 kg

由图 11 和图 12 可知,当吊挂载荷质量存在偏差时,加入波动控制后的系统依然能够控制摆角收敛。

分别将不同质量偏差时,波动控制的控制效果进行横向比较,结果如图 13 所示。

由图可知,吊挂载荷质量偏差的引入,对控制效果的影响较小,系统的调节时间没有较大改变,具有较强的抗干扰性。

此外,考虑吊挂载荷受气动阻力的外部干扰,气动阻力的计算式为

$$f = \frac{1}{2} C_d \rho S v^2 \quad (43)$$

式中:  $C_d$  为空气阻力系数;  $\rho$  为当地的大气密度;

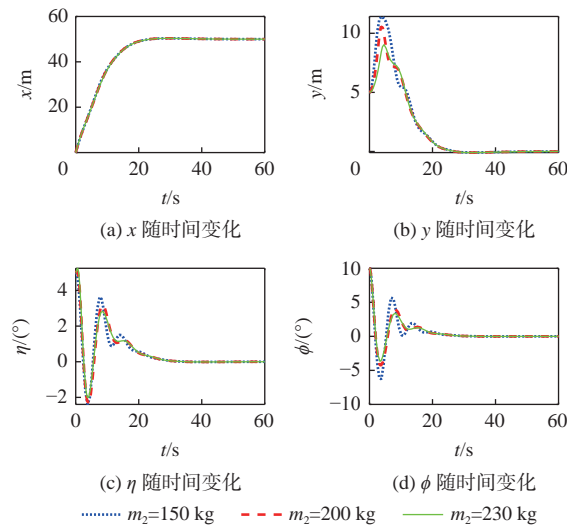


图 13 不同质量偏差下,状态量随时间变化曲线

Fig. 13 Curves of state changes over time with different mass biases

$S$  为等效的气动特征面积;  $v$  为物体与空气的相对速度。加入气动阻力干扰后,式 (10) 中摆角所对应的广义力  $Q_4$  变为

$$Q_4 = -fl \quad (44)$$

因此,式 (16) 中最后一个等式变为

$$m_2 \ddot{x} \cos \phi + m_2 \ddot{y} \sin \phi + m_2 b \dot{\eta} \cos(\eta - \phi) + m_2 \ddot{\phi} - m_2 b \dot{\eta}^2 \sin(\eta - \phi) + m_2 g l \sin \phi = -fl \quad (45)$$

假设无环境阵风的影响,选取空气阻力系数  $C_d$  为 0.5,大气密度  $\rho$  为 1.29 g/L,等效气动特征面积  $S$  为 2 m<sup>2</sup>,仿真结果如图 14 所示。

将引入气动阻力前后的波动控制效果图进行横向比较,结果如图 15 所示。

由图 14 和图 15 可知,在存在外部气动阻力干

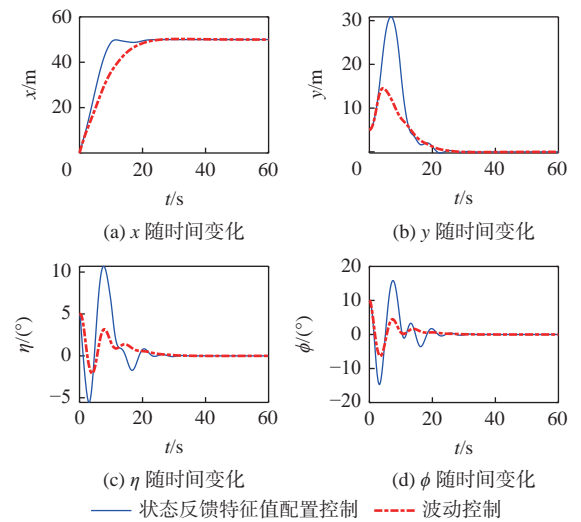


图 14 气动阻力下,状态量随时间变化曲线

Fig. 14 Curves of state changes over time in aerodynamic resistance

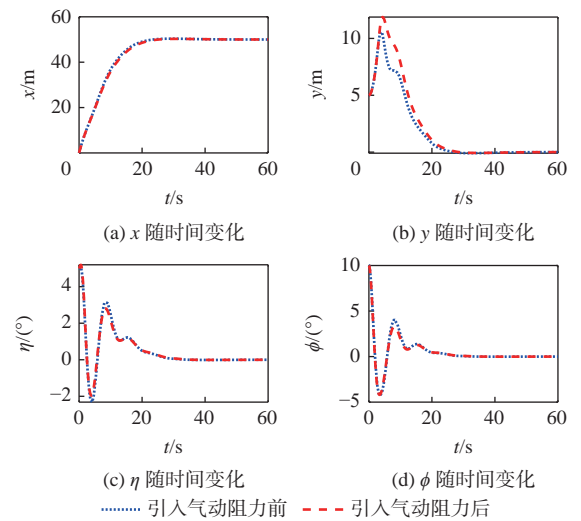


图 15 加入气动阻力前后,状态量随时间变化曲线

Fig. 15 Curves of state changes over time before and after introduction of aerodynamic resistance



扰的情况下,加入波动控制后的控制器依然能够完成有效减摆的目的,且气动阻力的干扰对波动控制器的控制效果影响较小。

综上所述,在直升机吊挂系统中分别引入系统模型干扰和外部气动干扰后,本文波动控制器均能控制摆角逐渐收敛,且干扰对控制效果影响程度较小,可以证明该控制器具有更强的鲁棒性能。

## 4 结 论

1) 本文波动控制器可实现较为优异的减摆性能,结果显示,摆角振荡的最大幅值均减小了一半以上。

2) 在原有波动控制方法的基础上,通过在传递函数中增加零点的方式,改善波动控制器的动态性能,减小波动控制器的调节时间。

3) 本文波动控制器具有一定的鲁棒性,在吊挂载荷实际质量与设计质量不匹配和外部存在气动阻力干扰的情况下,本文波动控制器均能够控制系统趋于一个较好的稳定值。

但本文波动控制器中,内环控制的性能很大程度上会影响到外环波动控制的性能,仍需对直升机吊挂系统的非线性控制器展开进一步的研究。

## 参考文献 (References)

- [1] BERGERON K, GRUBB A L, WILKS A L, et al. Quasi-static and prescribed motion simulations for helicopter sling loads[C]//Proceedings of the 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting. Reston: AIAA, 2018: AIAA2018-0779.
- [2] GURSOY G, TARIMCI O, YAVRUCUK I. Helicopter sling load simulations using heli-dyn+[C]//Proceedings of the AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference. Reston: AIAA, 2012: AIAA2012-4851.
- [3] 万绍峰, 曹义华, 黄磊. 基于 Kane 方法的直升机-柔性绳索-吊挂系统动力学建模[J]. 航空动力学报, 2016, 31(4): 934-940.  
WAN S F, CAO Y H, HUANG L. Dynamic modeling of helicopter-flexible rope-slung load system based on Kane's method[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(4): 934-940(in Chinese).
- [4] SANSAL K, CALISKAN A, KARGIN V. Investigation of the effects of sling load coupled dynamics on helicopter controllability and handling quality[C]//Proceedings of the AIAA Scitech 2021 Forum. Reston: AIAA, 2021: AIAA2021-0594.
- [5] 曹龙, 曹义华, 李春华. 直升机-吊挂耦合系统平衡特性和稳定性分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(9): 1219-1224.  
CAO L, CAO Y H, LI C H. Equilibrium characteristics and stability analysis of helicopter-slung-load coupling system[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 40(9): 1219-1224(in Chinese).
- [6] 王照瑞, 曹义华. 吊挂物为刚体模型的直升机外吊挂飞行平衡与稳定性分析[J]. 南京航空航天大学学报, 2015, 47(2): 296-303.  
WANG Z R, CAO Y H. Equilibrium characteristics and stability analysis of helicopter with rigid-body modeling slung-load[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2015, 47(2): 296-303(in Chinese).
- [7] 朱笑宇, 曹义华, 曹龙. 重型直升机-吊挂耦合系统闭环飞行品质分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2016, 42(7): 1550-1556.  
ZHU X Y, CAO Y H, CAO L. Heavy helicopter-slung-load coupling system flying qualities in closed-loop state[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2016, 42(7): 1550-1556(in Chinese).
- [8] 何荣荣, 陈谋, 吴庆宪, 等. 无人直升机吊挂系统滑模反步减摆控制[J]. 航空兵器, 2020, 27(5): 100-106.  
HE R R, CHEN M, WU Q X, et al. Sliding mode backstepping anti-swing control of unmanned helicopter slung-load system[J]. Aero Weaponry, 2020, 27(5): 100-106(in Chinese).
- [9] 张松, 马钊, 张辉. 直升机吊挂飞行中载荷摆动控制方法研究[J]. 航空工程进展, 2022(2): 57-63.  
ZHANG S, MA Z, ZHANG H. Research on slung-load swing control method in helicopter suspension flight[J]. Advances in Aeronautical Science and Engineering, 2022(2): 57-63(in Chinese).
- [10] POTTER J, SINGHOSE W, COSTELLO M. Reducing swing of model helicopter sling load using input shaping[C]//Proceedings of the 2011 9th IEEE International Conference on Control and Automation. Piscataway: IEEE Press, 2011: 348-353.
- [11] OMAR H M. Designing anti-swing fuzzy controller for helicopter slung-load system near hover by particle swarms[J]. Aerospace Science and Technology, 2013, 29(1): 223-234.
- [12] EL-FERIK S, SYED A H, OMAR H M, et al. Nonlinear forward path tracking controller for helicopter with slung load[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 69: 602-608.
- [13] REN Y, LI K, YE H. Modeling and anti-swing control for a helicopter slung-load system[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 372: 124990.
- [14] ENCIU K, ROSEN A. Nonlinear dynamical characteristics of fin-stabilized underslung loads[J]. AIAA Journal, 2015, 53(3): 723-738.
- [15] O'CONNOR W, LANG D. Position control of flexible robot arms using mechanical waves[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1998, 120(3): 334-339.
- [16] O'CONNOR W J. A gantry crane problem solved[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2003, 125(4): 569-576.
- [17] O'CONNOR W J. Wave-based analysis and control of lump-modeled flexible robots[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2007, 23(2): 342-352.
- [18] HABIBI H, O'CONNOR W. Wave-based motion and slewing control of a double-appendage, flexible system with ungrounded actuator through development of direct actuator force control[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 137: 106175.
- [19] O'CONNOR W J, RAMOS DE LA FLOR F, MCKEOWN D J, et al. Wave-based control of non-linear flexible mechanical systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 57(1): 113-123.
- [20] O'CONNOR W J, FUMAGALLI A. Refined wave-based control applied to nonlinear, bending, and slewing flexible systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 2009, 76(4): 041005.

## Robust anti-swing technology for helicopter slung load based on wave control

LI Honghong, HAN Yanhua<sup>\*</sup>

(School of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

**Abstract:** Application of helicopter to transport heavy and bulky loads creates various stability problems especially during maneuvering from level flight to hovering; thus, it is significant to reduce the swing amplitude of suspended loads. An anti-swing controller is designed for a helicopter with slung loads by using wave control method. A nonlinear mathematical model with four degrees of freedom for the helicopter is developed by applying Lagrangian analysis method. Then the developed model is linearized by little disturbance method in equilibrium operating points. On this basis, a state feedback controller is designed with eigenvalue configuration method. An anti-swing wave controller is then designed to reduce the pendulum angle. The simulation shows that the control of the pendulum angle and helicopter position has good dynamic performance and stability. Different biases of slung-load mass in the simulation verify that the designed wave controller has strong robustness, thus demonstrating the effectiveness of the designed wave controller.

**Keywords:** helicopter slung load system; dynamical model; state feedback; wave control; anti-swing controller