

面向人工重力技术的绳系自旋航天器动力学建模与分析^{*}

韩艳铎[†]

(南京航空航天大学 航天学院, 南京 210016)

摘要 面向人工重力技术,对哑铃型绳系自旋航天器系统进行了动力学建模、近似解析分析和数值仿真。首先,基于凯恩方法建立了二维平面上系统动力学方程组,然后,适当选取空间和时间标尺,将系统方程无量纲化,引入系绳长度与空间标尺之比作为小参数,利用小参数摄动方法,对无量纲系统方程作了合理简化。基于椭圆积分和椭圆函数理论,对绳系系统自旋周期进行了近似解析估算,给出乘员舱内人工重力和科氏力的计算公式。数值仿真表明,合理选择系绳长度和自旋角速度,可以在乘员舱内产生适合航天员居住的人工重力,其波动幅值甚微,波动频率远离人体敏感频带,且科氏力与人工重力相比其值甚微。

关键词 人工重力, 绳系自旋航天器, 凯恩方法, 参数摄动

DOI: 10.6052/1672-6553-2018-066

引言

随着载人航天工程的发展,长期失重环境对航天员健康的影响日益引人关注。目前采用的一些措施^[1-3],比如饮食调理、水盐补充、药物治疗、体育锻炼、下体负压等,虽能在一定程度上减缓失重对航天员健康的损害,但实践表明其效果远没有预想的那么好。当航天员返回地面后,仍有定向障碍、眩晕、肌肉萎缩、骨质疏松、运动耐力下降等情况发生,而且有些变化比如骨质疏松难以逆转。人工重力技术,即在载人航天器上重建类似地面 1g 载荷环境,有望成为解决此问题的根本途径^[4]。通过航天器自旋,利用向心加速度来等效惯性离心力即人工重力,被认为是比较合理可行的技术手段^[5]。航天器自旋半径越小,为实现额定人工重力水平(1g),所需的自旋角速度就越大。这将带来两方面的问题:一是较小的自旋半径使得舱内人工重力在径向上梯度较大,二是较大的自旋角速度与舱内航天员正常运动将耦合产生较明显的科氏力。这两者均将对航天员的体感和正常工作生活产生不利影响^[5,6]。所以在工程允许的条件下,大的自旋半径是

有利的。考虑到航天器质量等的限制,建造一个超大半径的航天器结构是不现实的,而系绳的长度可达数公里甚至更长,因此,绳系自旋航天器是最有发展前景的技术方案^[7,8]。

本文针对哑铃对称型绳系自旋航天器,将运用凯恩方法建立系统动力学模型。该方法兼具分析力学无须考虑理想约束以及矢量力学比较形象直观的优点^[9],非常适用于此类多体动力学问题。考虑到系绳长度相比于航天器轨道半径是小量,可以合理简化模型,进行近似解析分析。人工重力的大小和方向的变化规律,以及航天员在舱内正常行走与航天器自旋运动耦合出的科氏力,也将是本文研究内容。最后是数值仿真验证。

1 动力学建模

1.1 基于凯恩方法的建模

绳系自旋航天器人工重力技术如图 1 所示。两个质量相当的舱段通过系绳连接在一起,形成哑铃构型。绳系航天器绕其质心(系绳中点)自旋,相应的向心加速度在乘员舱内产生惯性离心力。在航天员看来,该力的方向由舱顶指向舱内地板,酷似我

2018-03-24 收到第 1 稿,2018-06-13 收到修改稿。

^{*} 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(NS2016082)

[†] 通讯作者 E-mail: hanyanhua@nuaa.edu.cn

们在地表活动时所受到的重力,从而称为人工重力.

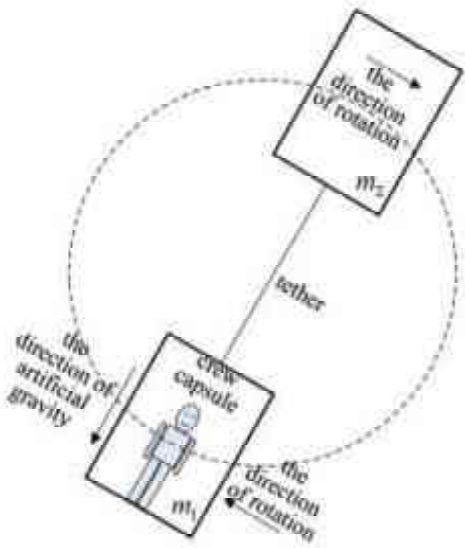


图1 绳系自旋航天器人工重力示意图

Fig.1 Illustration of artificial gravity oriented tethered spinning spacecraft system

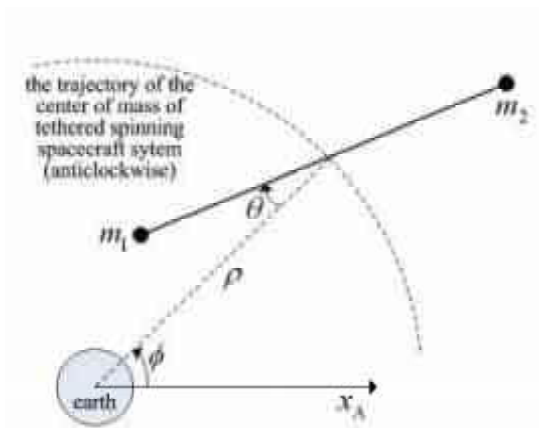


图2 哑铃型绳系自旋系统在轨运动示意图

Fig.2 Illustration of the kinematics of dumbbell-shaped tethered spinning system on earth orbit

哑铃型绳系自旋航天器系统在轨运行如图2所示.图中 x_A 轴的原点在地心,并且指向惯性空间某点保持方向不变.绳系航天器系统质心绕地心逆时针运动,轨迹如图中虚线所示.系统质心的地心距为 ρ ,相位角为 φ .假设 m_1 表示乘员舱与舱内航天员总质量,并且其对称舱段的质量与之相等,即 $m_1 = m_2 = m$.绳系航天器系统围绕其质心顺时针自旋,且自旋面就在轨道面内,自旋角 θ 如图所示.为了建立系统动力学模型,需要定义如下坐标系.

地心惯性系 A: 坐标原点在地球球心 x_A 轴如

图2所示,在惯性空间保持方向不变, y_A 轴垂直于 x_A 且在图中为竖直向上(为突出要素,避免繁冗,图2中未画出).

当地地理系 B: 坐标原点在绳系系统质心 x_B 轴在地心与系统质心的连线的延长线上,且背离地心方向为正, y_B 轴垂直于 x_B 轴且顺着航天器质心运行方向为正.

绳系本体固连系 C: 坐标原点在绳系系统质心 x_C 轴与系绳重合,且指向 m_2 为正, y_C 轴垂直于 x_C 轴且其正方向相对于有向线段 $m_1 m_2$ 为逆时针转过 90° .

从 A 到 B,以及从 B 到 C 的坐标变换关系分别如下:

$$\begin{cases} T_{AB} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ T_{BC} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

另外,坐标系 B 相对于 A 的角速度张量为

$$\vec{\omega} \times = T_{AB} \dot{T}_{AB}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

下面用凯恩方法建立系统动力学模型.

系统质心位矢:

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}_B \quad (3)$$

式中右下角标 B 表示该矢量是用其在坐标系 B 的坐标轴上的投影分量表示的.下文类同,不再解释.

m_1 和 m_2 的位矢分别为:

$$\vec{r}_1 = \vec{\rho} - \frac{1}{2} \vec{l} \quad (4a)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{\rho} + \frac{1}{2} \vec{l} \quad (4b)$$

式中,

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}_C \quad (5)$$

l 是系绳长度.

将式(3)(5)分别代入(4a)(4b)并利用式(1)的第二式可得:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \rho - \frac{1}{2} l \cos\theta \\ \frac{1}{2} l \sin\theta \end{pmatrix}_B \quad (6a)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \rho + \frac{1}{2}l\cos\theta \\ -\frac{1}{2}l\sin\theta \end{pmatrix}_B \quad (6b)$$

利用式(2)(6a)得 m_1 的速矢为:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &\triangleq \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \dot{\vec{r}}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\rho} - \frac{1}{2}l(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\sin\theta \\ \rho\dot{\varphi} - \frac{1}{2}l(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\cos\theta \end{pmatrix}_B \end{aligned} \quad (7a)$$

同理得 m_2 的速矢:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\rho} + \frac{1}{2}l(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\sin\theta \\ \rho\dot{\varphi} + \frac{1}{2}l(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\cos\theta \end{pmatrix}_B \quad (7b)$$

进而得加速度分别为:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &\triangleq \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_1 + \dot{\vec{v}}_1 \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \frac{1}{2}l\ddot{\varphi}\sin\theta + \frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta + \\ \frac{1}{2}l(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)\cos\theta - \rho\dot{\varphi}^2 - l\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ (\rho - \frac{1}{2}l\cos\theta)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos\theta - \\ \frac{1}{2}l(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + l\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_B \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &\triangleq \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}_2 + \dot{\vec{v}}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \ddot{\rho} + \frac{1}{2}l\ddot{\varphi}\sin\theta - \frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta \\ -\frac{1}{2}l(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)\cos\theta - \rho\dot{\varphi}^2 + l\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta \\ (\rho + \frac{1}{2}l\cos\theta)\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}l\ddot{\theta}\cos\theta + \\ \frac{1}{2}l(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)\sin\theta + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} - l\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix}_B \end{aligned} \quad (8b)$$

m_1 和 m_2 受到的惯性力分别为:

$$\vec{F}_{11} = -m\vec{a}_1 \quad (9a)$$

$$\vec{F}_{21} = -m\vec{a}_2 \quad (9b)$$

m_1 和 m_2 受到的地心引力分别为:

$$\vec{F}_{1G} = -\frac{\mu m}{r_1^3} \vec{r}_1 \quad (10a)$$

$$\vec{F}_{2G} = -\frac{\mu m}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (10b)$$

式中 $\mu \triangleq GM_e$ 是地球引力常数, G 是万有引力恒量, M_e 是地球质量.

$$\begin{cases} r_1 \triangleq \|\vec{r}_1\| = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1} \\ r_2 \triangleq \|\vec{r}_2\| = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2} \end{cases} \quad (11)$$

分别是 m_1 和 m_2 的地心距.

将式(6)代入(11)得:

$$r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 4\rho^2 - 4l\rho\cos\theta} \quad (12a)$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 4\rho^2 + 4l\rho\cos\theta} \quad (12b)$$

忽略系绳弹性,则其对 m_1 和 m_2 的张力属于理想约束,对于凯恩方法来说无需考虑.

取广义坐标^[10]为 (ρ, φ, θ) , 则投影向量组(凯恩

方法中称为偏速度)为 $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \rho}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta}$ (其中 $i=1, 2$).

式(1)第一式代入式(6)得 \vec{r}_1, \vec{r}_2 在坐标系 A 的轴上的投影分量如下:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \mathbf{T}_{AB}^T \cdot \begin{pmatrix} \rho - \frac{1}{2}l\cos\theta \\ \frac{1}{2}l\sin\theta \end{pmatrix}_B \\ &= \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi - \frac{1}{2}l\cos(\varphi - \theta) \\ \rho\sin\varphi - \frac{1}{2}l\sin(\varphi - \theta) \end{pmatrix}_A \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \mathbf{T}_{AB}^T \cdot \begin{pmatrix} \rho + \frac{1}{2}l\cos\theta \\ -\frac{1}{2}l\sin\theta \end{pmatrix}_B \\ &= \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi + \frac{1}{2}l\cos(\varphi - \theta) \\ \rho\sin\varphi + \frac{1}{2}l\sin(\varphi - \theta) \end{pmatrix}_A \end{aligned} \quad (13b)$$

式(13)分别对广义坐标 ρ, φ, θ 求偏导,得其

在坐标系 A 下的投影表达式 $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \rho} \Big|_A, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} \Big|_A, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} \Big|_A$

(其中 $i=1, 2$) 然后再变换到坐标系 B 下,即:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \rho} \right|_B = \mathbf{T}_{AB} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \rho} \right|_A \\ \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} \right|_B = \mathbf{T}_{AB} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \varphi} \right|_A \\ \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} \right|_B = \mathbf{T}_{AB} \cdot \left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \theta} \right|_A \end{cases} \quad (\text{其中 } i=1, 2) \quad (14)$$

式(1)第一式和式(13)(14)联立可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \rho} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}l\sin\theta \\ \rho - \frac{1}{2}l\cos\theta \end{pmatrix}_B \\ \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l\sin\theta \\ \frac{1}{2}l\cos\theta \end{pmatrix}_B \end{cases} \quad (15a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \rho} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}l\sin\theta \\ \rho + \frac{1}{2}l\cos\theta \end{pmatrix}_B \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} = \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}l\sin\theta \\ -\frac{1}{2}l\cos\theta \end{pmatrix}_B \end{cases} \quad (15b)$$

凯恩方法的实质是将主动力与惯性力均投影到广义坐标曲线的切向方向,并在该方向保持平衡.对于本文所研究的系统,平衡方程如下:

$$\begin{cases} (\vec{F}_{11} + \vec{F}_{1G}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \rho} + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{2G}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \rho} = 0 \\ (\vec{F}_{11} + \vec{F}_{1G}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{2G}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} = 0 \\ (\vec{F}_{11} + \vec{F}_{1G}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{2G}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

将式(9)~(12)(15)代入式(16)得系统动力

学方程如下:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 + \frac{2\mu(2\rho - l\cos\theta)}{(l^2 + 4\rho^2 - 4l\rho\cos\theta)^{3/2}} + \frac{2\mu(2\rho + l\cos\theta)}{(l^2 + 4\rho^2 + 4l\rho\cos\theta)^{3/2}} = 0 \\ (l^2 + 4\rho^2) \ddot{\varphi} - l^2 \ddot{\theta} + 8\rho\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0 \\ l\ddot{\varphi} - l\ddot{\theta} - \frac{8\mu\rho\sin\theta}{(l^2 + 4\rho^2 - 4l\rho\cos\theta)^{3/2}} + \frac{8\mu\rho\sin\theta}{(l^2 + 4\rho^2 + 4l\rho\cos\theta)^{3/2}} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

1.2 动力学方程无量纲化

接下来进行无量纲处理,为此选择绳系系统质心的初始地心距 ρ_0 为长度标尺 L ,并导出相应的时间尺度 T .

$$\begin{cases} L = \rho_0 \triangleq \rho(0) \\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \rho_0^{3/2} \end{cases} \quad (18)$$

式中 $\rho_0 = R_e + h_0$, R_e 是地球半径, h_0 是绳系系统质心初始地表距.

定义无量纲长度和时间变量如下:

$$\begin{cases} \rho^* \triangleq \frac{\rho}{L} \\ t^* \triangleq \frac{t}{T} \end{cases} \quad (19)$$

则不难推出

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{L}{T} \rho^{*'} , \ddot{\rho} = \frac{L}{T^2} \rho^{*''} \\ \dot{\varphi} = \frac{1}{T} \varphi' , \ddot{\varphi} = \frac{1}{T^2} \varphi'' \\ \dot{\theta} = \frac{1}{T} \theta' , \ddot{\theta} = \frac{1}{T^2} \theta'' \end{cases} \quad (20)$$

式中右上角标撇号表示对无量纲时间 t^* 的导数.

将式(18)~(20)代入式(17)并定义无量纲比值:

$$\varepsilon \triangleq \frac{l}{L} \quad (21)$$

得系统的无量纲动力学方程如下:

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho^{*2} \ddot{\rho}^* - \rho^* \dot{\varphi}^2 + \frac{8\pi^2(2\rho^* - \varepsilon \cos\theta)}{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4\rho^{*2} - 4\varepsilon\rho^* \cos\theta)^3}} + \\ & \frac{8\pi^2(2\rho^* + \varepsilon \cos\theta)}{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4\rho^{*2} + 4\varepsilon\rho^* \cos\theta)^3}} = 0 \\ & (\varepsilon^2 + 4\rho^{*2}) \ddot{\varphi}^* - \varepsilon^2 \ddot{\theta}'' + 8\rho^* \dot{\rho}^* \dot{\varphi}^* = 0 \\ & \varepsilon \ddot{\varphi}'' - \varepsilon \ddot{\theta}'' - \frac{32\pi^2 \rho^* \sin\theta}{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4\rho^{*2} - 4\varepsilon\rho^* \cos\theta)^3}} + \\ & \frac{32\pi^2 \rho^* \sin\theta}{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4\rho^{*2} + 4\varepsilon\rho^* \cos\theta)^3}} = 0 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

2 分析

2.1 近似解析分析

式(22)表明,绳系系统质心的无量纲地心距 ρ^* 、相位角 φ 、自旋角 θ 是耦合在一起的.但是考虑到实际工程中, ε 是小量,忽略掉它可以使变量解耦,方程得以很大简化,便于解析分析.式(22)的第一、二个方程忽略掉小参数 ε 可得:

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho^{*2} \ddot{\rho}^* - \rho^* \dot{\varphi}^2 + 4\pi^2 = 0 \\ & \rho^* \ddot{\varphi}'' + 2\rho^* \dot{\varphi}^* = 0 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

对于本文所研究的对象,上式的物理意义是:当系绳长度与前文我们定义的长度标尺之比 ε 趋于零时,绳系系统退化为质量全部集中于其质心处的质点,该质点在地球中心引力场中的无量纲轨道动力学方程.

式(23)的解析解 $\rho^* = \rho^*(t^*)$, $\varphi = \varphi(t^*)$ 不难求出,并且消去无量纲时间变量 t^* 后 $\rho^* = \rho^*(\varphi)$ 将表示一个椭圆的极坐标方程.不过本文仅考虑绳系系统质心轨道为偏心率较小,从而接近于标准圆的情形(工程上比较常见).此时,

$$\rho^*(t^*) \equiv 1, \varphi'(t^*) \equiv 2\pi \quad (24a)$$

$$\rho^{*'}(t^*) \equiv 0, \varphi''(t^*) \equiv 0 \quad (24b)$$

将式(24)代入(22)的第三个方程得:

$$\varepsilon \ddot{\theta}'' + 32\pi^2 \sin\theta \left[\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4 - 4\varepsilon \cos\theta)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon^2 + 4 + 4\varepsilon \cos\theta)^3}} \right] = 0$$

将上式中 ε 相关项在 $\varepsilon = 0$ 点泰勒展开,只保留线性部分,可得

$$\theta'' + 6\pi^2 \sin 2\theta = 0 \quad (25)$$

令 $\alpha \triangleq 2\theta$,代入式(25)得:

$$\alpha'' + 12\pi^2 \sin\alpha = 0 \quad (26)$$

根据椭圆函数相关理论^[11]知,在初始条件为

$$\begin{cases} \alpha|_{t^*=0} = 0 \\ \alpha'|_{t^*=0} = \alpha'_0 \end{cases} \quad (27)$$

时,式(26)的解析解为:

$$\alpha(t^*) = 2\arcsin[\operatorname{sn}(\frac{\alpha'_0 t^*}{2})] + 2N\pi \quad (N=1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

其中 sn 是椭圆函数.

利用关系式 $\alpha \triangleq 2\theta$ 知,式(27)等价于:

$$\begin{cases} \theta|_{t^*=0} = 0 \\ \theta'|_{t^*=0} = \theta'_0 \end{cases} \quad (29)$$

此时,式(28)等价于

$$\theta(t^*) = \arcsin[\operatorname{sn}(\theta'_0 t^*)] + N\pi \quad (N=1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

根据椭圆积分理论^[11],上式中 $\theta(t^*)$ 运行一个整周期 $[N\pi, (N+2)\pi]$ 的时间为:

$$\begin{aligned} T_p^* &= \frac{2}{\sqrt{3}\pi k^*} K\left(\frac{1}{k^*}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}\pi k^*} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^* d\xi}{\sqrt{k^{*2} - \sin^2\xi}} \end{aligned} \quad (31)$$

式中 $k^* \triangleq \frac{\theta'_0}{2\sqrt{3}\pi}$, K 表示第一类完全椭圆积分.

将式(31)的被积函数展开为 $\frac{1}{k^*}$ 的级数,然后

再逐项积分求和,可得其级数形式的近似计算公式:

$$\begin{aligned} T_p^* &= \frac{2\pi}{\theta'_0} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{k^{*2}} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{k^{*4}} + \right. \\ & \quad \left. \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{k^{*6}} + \dots \right] \end{aligned} \quad (32)$$

2.2 无量纲解还原为有量纲解

根据式(18)(19),式(24)还原为有量纲量如下:

$$\rho(t) \equiv \rho_0, \dot{\varphi}(t) \equiv \frac{\sqrt{\mu}}{\rho_0^{3/2}} \quad (33a)$$

$$\dot{\rho}(t) \equiv 0, \ddot{\varphi}(t) \equiv 0 \quad (33b)$$

式(32)中的无量纲周期还原为有量纲周期如下:

$$T_p = \frac{2\pi}{\dot{\theta}_0} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{k^4} + \dots \right]$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \right)^2 \frac{1}{k^6} + \dots] \quad (34)$$

$$\text{式中 } k \triangleq \frac{\rho_0^{3/2} \dot{\theta}_0}{\sqrt{3\mu}}.$$

无量纲方程式(22)的数值仿真结果还原为有量纲数值仿真结果的公式如下:

$$\begin{cases} \rho = \rho^* \rho_0 \\ \dot{\rho} = \rho^* \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi\sqrt{\rho_0}} \\ \dot{\varphi} = \varphi^* \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi\rho_0^{3/2}} \\ \dot{\theta} = \theta^* \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi\rho_0^{3/2}} \end{cases} \quad (35)$$

2.3 航天员过载(人工重力)和科氏力的分析计算

设航天员站立于舱内不动,如图1所示.此时航天员加速度等同于 m_1 的加速度 \vec{a}_1 .另外,航天员此时的引力加速度为:

$$\vec{a}_{1G} = -\frac{\mu}{r_1^3} \vec{r}_1 \quad (36)$$

航天员的过载加速度(舱内地板提供)为:

$$\vec{a}_{1N} = \vec{a}_1 - \vec{a}_{1G} \quad (37)$$

人工重力加速度为上述过载加速度的相反数,即:

$$\vec{g}_{ar} = -\vec{a}_{1N} \quad (38)$$

因为航天员在舱内活动,自然将舱作为参考系,人工重力加速度在绳系本体固连系 C (同时与乘员舱也是固连的) 下的投影分量表达式适合描述航天员对人工重力的感受.

式(1)(6a)(8a)(12a)(36)~(38)联立得人工重力加速度在绳系本体固连系下的投影分量表示:

$$\vec{g}_{ar} = \begin{pmatrix} g_{1ar} \\ g_{2ar} \end{pmatrix}_C \quad (39)$$

其大小为

$$g_{ar} = \|\vec{g}_{ar}\| = \sqrt{g_{1ar}^2 + g_{2ar}^2} \quad (40)$$

式中,

$$\begin{cases} g_{1ar} = -\ddot{\rho}\cos\theta + \rho\dot{\varphi}\sin\theta + \rho\dot{\varphi}^2\cos\theta + 2\rho\dot{\varphi}\sin\theta - \\ \quad \frac{1}{2}l(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}) - \frac{\mu}{r_1^3}(\rho\cos\theta - \frac{l}{2}) \\ g_{2ar} = -\ddot{\rho}\sin\theta - (\rho\cos\theta - \frac{l}{2})\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}l\ddot{\theta} + \rho\dot{\varphi}^2\sin\theta - \\ \quad 2\rho\dot{\varphi}\cos\theta - \frac{\mu}{r_1^3}\rho\sin\theta \end{cases} \quad (41)$$

\vec{g}_{ar} 与乘员舱内竖直线(即舱内地板的垂线)的夹角为:

$$\beta = \arcsin \frac{g_{2ar}}{g_{ar}} \quad (42)$$

式(41)(42)分别是舱内航天员所能感受到的人工重力大小和方向.理想情形是 g_{ar} 保持在 $9.8 \text{ (m/s}^2\text{)}$ 附近,而 β 保持在 0 附近.

航天器自旋产生人工重力加速度的同时,会衍生出我们并不希望出现的一种惯性加速度,即科里奥利加速度(简称科氏加速度),其计算公式为:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{V} \quad (43)$$

其中 $\vec{\omega}$ 是航天器自旋角速度, \vec{V} 是航天员在舱内的相对运动速度.可见,科氏加速度与向心加速度(即人工重力加速度的相反数)的最大区别在于其依赖于航天员的相对运动,即假设航天员在舱内静止不动,则科氏加速度消失.但是航天员在舱内日常工作和生活,必然要发生相对于舱体的线运动,所以科氏加速度不可避免.科氏加速度会引起科氏力,该力是处于非惯性系中的观测者感受到的一种惯性力,其计算公式为:

$$\vec{F}_c = -m_{as} \vec{a}_c \quad (44)$$

其中 m_{as} 是航天员(或更一般地非惯性系中的观测者)的质量.

航天员在自旋航天器内行走时产生科氏力的示意图如图3所示.

图中自旋中心即为系绳几何中点,自旋半径为系绳长度之半.设自旋角速度是逆时针方向,当航天员在舱内“向前”行走,即行走速度 \vec{V} 的方向与自旋所引起的舱内当地牵连速度 \vec{v} 一致时,根据前述科氏力的计算公式(43)(44),可知航天员受到的科氏力在舱内是垂直向下的,即与人工重力方向一致,导致航天员感受到的重力更大一些.反之,当航天员在舱内“向后”行走,即行走速度 \vec{V} 的方向

与自旋引起的舱内当地牵连速度 \vec{v} 反向时(图中未画出)科氏力的方向在舱内是垂直向上的,即与人工重力方向相反,导致航天员感受到的重力稍小一些。

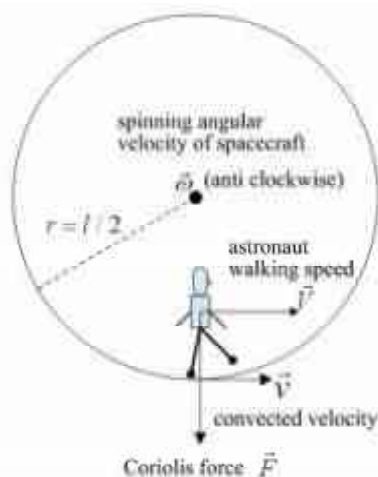


图3 航天员在自旋航天器内行走时的科氏力

Fig.3 Illustration of the Coriolis force induced by the astronaut's walking in crew capsule

根据类似的分析还可得出以下结论:当航天员在舱内作“上下方向”(即自旋系统径向)的运动,譬如“下蹲-起立”运动,或者航天员正常行走中伴随着自身质心的“上下”起伏,此时航天员将受到“前后方向”(即自旋切向)的科氏力。具体来说,当航天员质心向“上”(指向自旋中心)运动时,科氏力向“前”,反之,当航天员质心向“下”(背离自旋中心)运动时,科氏力向“后”。不过,由于“下蹲-起立”是非典型动作,而正常行走中重心起伏的幅度也不大,且限于文章篇幅,就不能详细分析了。在本文数值仿真部分,将对航天员在舱内“前向”行走所引发的“竖向”科氏力进行必要计算和分析。

航天员舱内活动对航天器的激励作用也是科学家关注的问题^[12-14]。研究发现,航天员舱内活动的频率是引发“航天员-航天器”耦合共振的关键因素。对于绳系自旋航天器的“员-器”耦合问题,尚未见公开报道的文献。根据式(32)(34)估算出来的绳系系统自旋的无量纲周期和有量纲周期分别是 $T_p^* = 0.0113$ 和 $T_p = 62.76$ (s),而一般情况下航天员在舱内的行走、跑步或其他健身活动的周期都是数以1秒计的,数量级上远离绳系自旋系统的运动周期,故很难发生耦合共振。

3 数值仿真验证

仿真入口参数如表1所示。

表1 仿真入口参数

Table 1 Inlet parameters for numerical simulation

Input parameters	values
G ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^2$)	6.67×10^{-11}
M_c (kg)	5.98×10^{24}
R_c (km)	6.378×10^3
h_0 (km)	4.00×10^2
ρ_0 (km)	6.778×10^3
l (m)	2.00×10^3
ε	2.95×10^{-4}
θ_0	$88.46 \times 2\pi$
V ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	1

仿真的无量纲时间区间为 $[0, 2]$,其物理意义是绳系系统绕地约2个轨道周期。仿真结果如图4~13所示。

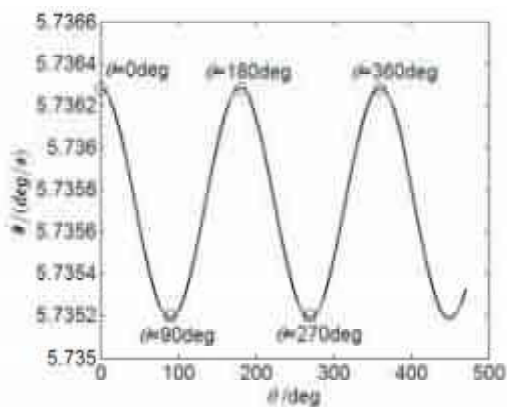


图4 绳系系统自旋角与角速率之间的关系

Fig.4 The spinning angular velocity vs the spinning angle of the tethered system

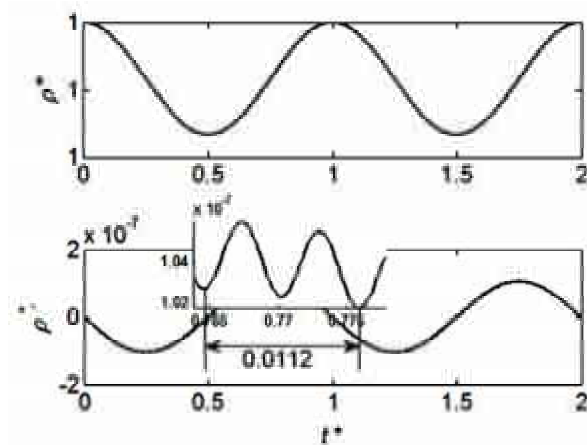


图5 绳系系统质心无量纲地心距和径向速度

Fig.5 The dimensionless distance and radial velocity of the tethered system's center relative to the earth's center

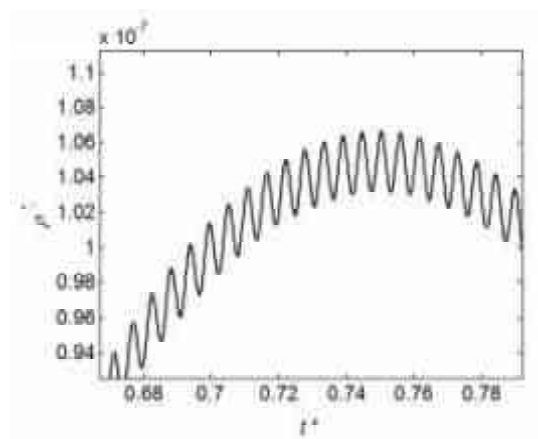
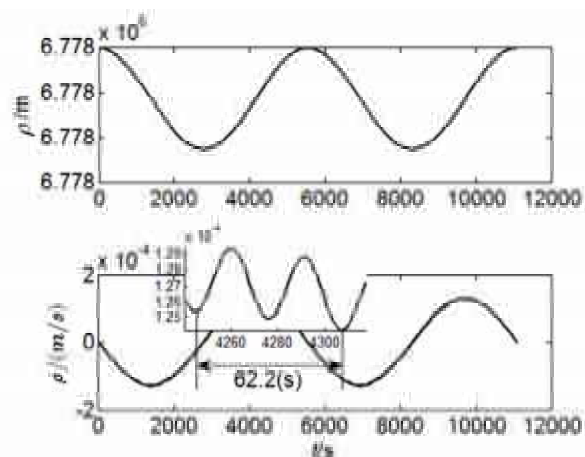
图6 ρ^* 的局部放大图Fig.6 The partial enlarged detail of curve of ρ^* 

图9 绳系系统质心的地心距和径向速度

Fig.9 The distance and radial velocity of the tethered system's center relative to the earth's center

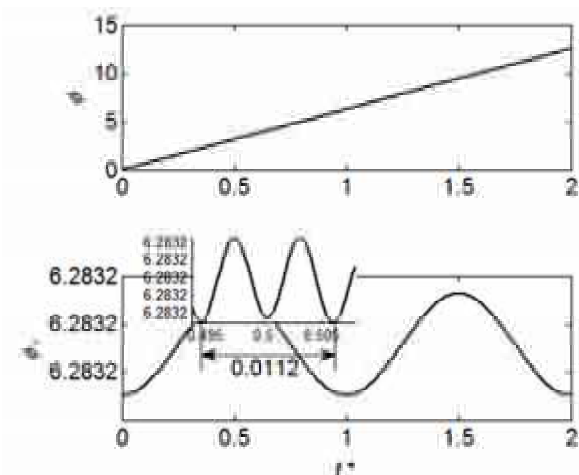


图7 绳系系统质心轨道相位角和无量纲相位角速度

Fig.7 The phase angle and the dimensionless angular velocity of the tethered system's center on orbit

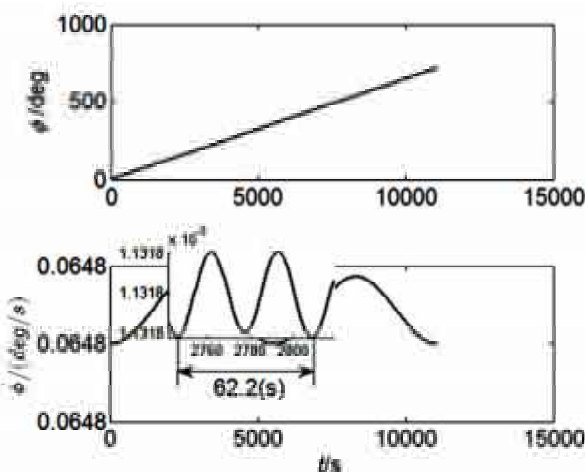


图10 绳系系统质心轨道相位角和相位角速度

Fig.10 The phase angle and angular velocity of the tethered system's center on orbit

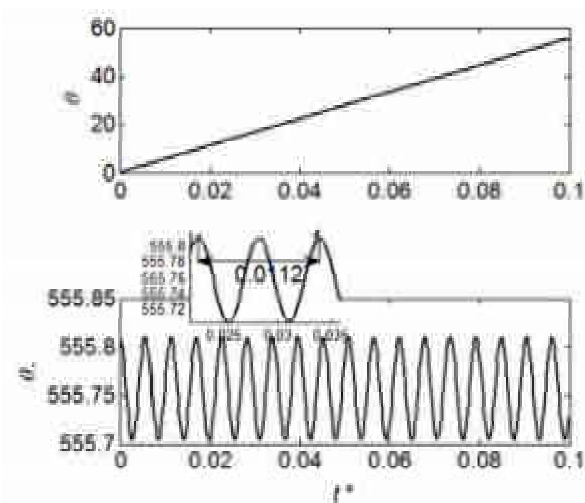


图8 绳系系统自旋角和无量纲自旋角速度

Fig.8 The spinning angle and dimensionless angular velocity of the tethered system

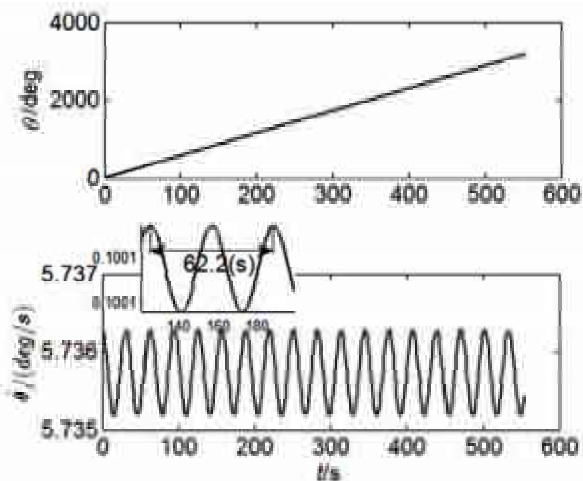


图11 绳系系统自旋角和角速度

Fig.11 The spinning angle and angular velocity of the tethered system

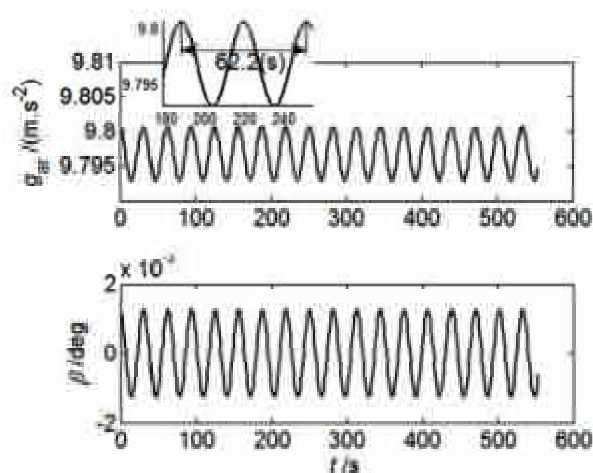


图12 乘员舱中人工重力的大小和方向角

Fig.12 The magnitude of artificial gravity and it's direction angle with respect to crew capsule

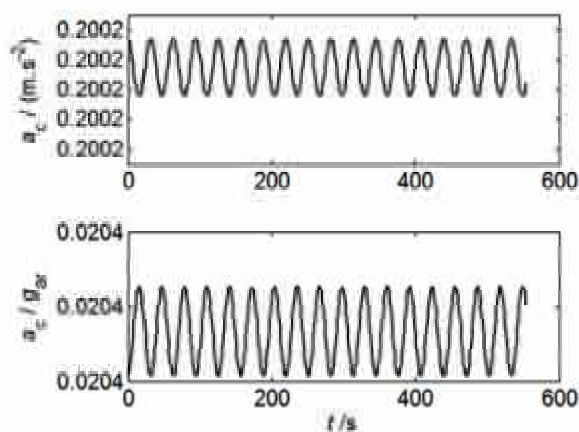


图13 科氏加速度及与人工重力加速度的比值

Fig.13 The Coriolis acceleration and the ratio of it to artificial gravity acceleration in crew capsule

图4显示,当绳系系统自旋角为 $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, \dots$ (图中用小圆圈“○”标注并有文字注释),即系绳沿着当地的地垂线时,绳系系统自旋角速度达到最大,而当绳系系统自旋角为 $90^\circ, 270^\circ, \dots$ (图中用小方框“□”标注并有文字注释)即系绳沿着当地的水平线时,绳系系统自旋角速度达到最小。其物理解释是,当系绳沿着当地的地垂线时,由于重力梯度的原因,系统重心和质心不重合,且重心达到最低值,故重力势能也达到最低值,由于保守力场中机械能守恒的缘故,系统的动能达到最大值,故此时绳系系统自旋角速度达到峰值;当系绳沿着当地水平线时,系统的重心和质心重合(为系绳几何中点),此时重心高度达到最大值,同样由于机械能守恒的缘故,系统自旋角速度降到谷值。

图4说明,绳系系统每转过 180° (半圈)其自

旋角速度即会达到一次峰值,则绳系系统自旋一周的过程中,其自旋角速度会两次达到峰值(等价地,也会两次达到谷值),因此,在后续图5~12所标识的自旋周期,均是自旋角速度隔一个峰值(或谷值),而非相邻的两个峰值(或谷值)间的时间间隔为一个自旋周期,这一点需要特别注意。

图5显示,绳系系统质心的地心距同时呈现出微幅的长周期(以轨道周期为标尺)和短周期(以绳系系统自旋周期为标尺)两种波动。长周期的波动表明绳系系统质心绕地作椭圆运动,但是因波动幅度如此之小,以至于图5纵坐标难以精确地反映出来,所以,轨道椭圆的偏心率极小。短周期的波动是由于绳系系统自旋运动对系统质心运动的耦合造成的。但是幅度也非常小,反映在图5上,就是仿真曲线上的“小毛刺”,为了看清楚这些“小毛刺”,在图5的第二幅子图中将曲线的片段进行局部放大,显示在一个小窗口中。从该小窗口可见,“毛刺”的无量纲周期为0.0112,这正是绳系系统自旋的无量纲周期,并且与其解析预测值 $T_p^* = 0.0113$ 非常接近。图6是为了清晰显示 ρ^* 曲线而截取的该曲线的片段,该曲线片段反映了 ρ^* 的长周期波动特性和短周期(毛刺)波动特性。图7是绳系系统质心绕地相位角和无量纲相位角速度,其变化规律与图5所示的无量纲地心距是一致的,并且我们也通过小窗口的方式对曲线的“高频”微幅振动进行了局部放大显示。图8是绳系系统自旋角和无量纲角速度。考虑到在绳系系统质心绕地运动两周过程中,系统自旋周数较多,为了避免图中 $\theta'(t^*)$ 曲线过于密集,我们在图8中只显示了无量纲时间变量范围 $[0, 0.1]$ 内的曲线。该曲线本身是短周期曲线,我们清晰地看到系统自旋周期的实际值0.0112非常接近于我们的解析预测值 $T_p^* = 0.0113$ 。

图9~11是将图5~8转换成有量纲变量的形式,不过多解释。仅需指出的是系统自旋的有量纲时间周期62.2(s)与前文解析预测值 $T_p = 62.76$ (s)也非常接近。

图12是乘员舱内人工重力的大小和方向角。其中第一幅子图显示,人工重力的大小维持在 $9.8(m/s^2)$ 附近,有微小波动(波动的相对幅度仅为约0.08%),且波动周期等于绳系系统自旋周期,相应的频率远离人体敏感频带 $0.1 \sim 0.63$ (Hz)以及 $1 \sim 8$ (Hz)^[12]。第二幅子图显示,舱内人工重力方向与舱内当地竖直线之间的夹角虽有波动,但夹角数值上

几乎为零,完全不可能被航天员察觉.另外,考虑到系统自旋半径为系绳长度之半,即1000(m),航天员身高如以1.75(m)计,其头部和脚步感受到的人工重力百分比梯度仅为 $1.75/1000 \times 100\% = 0.175\%$,也不容易被航天员感知.综上所述,舱内人工重力的大小及其时间和空间的变化规律(即时域周期和空间分布梯度)等均较理想.

图13第一幅子图是当航天员以 $V=1$ (m/s)速度在舱内“前向”(或“后向”)行走时所感应出的科氏加速度(方向与人工重力共线),第二幅子图是科氏加速度与人工重力加速度的比值.可见,科氏加速度的绝对值在 0.2002 (m/s^2)量级,其与人工重力加速度的比值仅为约2.04%.所以选择 $l=2000$ (m)的系绳,当产生约 9.8 (m/s^2)的人工重力加速度时,自旋角速度与航天员在舱内以典型的速度行走耦合产生的科氏力将使航天员增重(或减重)2.04%.以体重60(kg)航天员为例,其增重(或减重)绝对值约为1.224(kg),航天员可能有所察觉,但完全可以克服掉其不利影响.

4 结论

本文基于凯恩方法建立了哑铃对称型绳系自旋航天器系统动力学模型.通过引入恰当的空间和时间标尺,将方程组去量纲化.考虑到系绳长度相比于航天器绕地半径是小量,通过小参数摄动方法,将方程组合理简化,并基于椭圆函数和椭圆积分理论,给出了绳系系统自旋的近似解析解和级数形式的自旋周期估算公式.推导了乘员舱内人工重力的大小和方向的计算公式,给出了科氏加速度和科氏力的计算公式.最后对系统进行了数值仿真验证.仿真结果表明,合理选择系绳长度和自旋角速度,可以在乘员舱内产生适合航天员居住的人工重力,其波动的幅值甚微,波动频率远离人体敏感频段,并且科氏力也不明显.当然,本文为了简单起见,引入了一些假设条件,比如系统绕地轨道是近圆轨道,系统质量分布是哑铃型对称的,并且系绳弹性也被忽略.考虑更为一般条件下的系统动力学建模和分析,尚须进一步深入研究.

参考文献

- 1 张玉,杨长斌,孙喜庆.人工重力的生物医学问题、发展及应用前景.航天医学与医学工程,2011,24(6): 423~428 (Zhang Y, Yang C B, Sun X Q. Biomedical problems, developments and application prospect of artificial gravit. *Space Medicine and Medical Engineering*, 2011, 24(6): 423~428 (in Chinese))
- 2 Salvage R. A matter of some (artificial) gravity. AIAA, International Conference on Space Operations, 2014-1714
- 3 Hogenauer E, Wagner K R. Artificial gravity for long duration manned space flight. AIAA, 1994-4666
- 4 张立藩.人工重力的生物医学问题:以往工作回顾与面临的挑战.航天医学与医学工程,2001,14(1):70~74 (Zhang L F. Biomedical problems of artificial gravity: Overview and challenge. *Space Medicine and Medical Engineering*, 2001, 14(1): 70~74 (in Chinese))
- 5 Barbeau I Z, Fehrenbach I S, Jacob J D. Development and testing of an inflatable artificial gravity system. AIAA, Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2013-0730
- 6 Theodore W H. Artificial gravity visualization, empathy and design. AIAA, 2006-7321
- 7 Landau D F. Method to maintain artificial gravity during transfer maneuvers for tethered spacecraft. AIAA, 2008-7499
- 8 Hoffman J H, Mazzoleni A P. Investigation of a tethered satellite system for generating artificial gravity, In: 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Huntsville, Alabama, USA, July 2003
- 9 刘延柱.高等动力学.北京:高等教育出版社,2001 (Liu Y Z, Advanced dynamics. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese))
- 10 梅凤祥,李彦敏,吴惠彬.广义坐标的形成史.动力学与控制学报,2017,15(5):406~409 (Mei F X, Li Y M, Wu H B. On the history of formation of generalized coordinates. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(5): 406~409 (in Chinese))
- 11 埃伯哈德·蔡德勒等.数学指南——实用数学手册.李文林等译.北京:科学出版社,2012 (Zeidler E, Hackbusch W, Schwarz H R, et al, Teubner—Taschenbuch der mathematik. Li W L, et al (Translating). Beijing: Science Press, 2012 (in Chinese))
- 12 李东旭,陈善广.航天员-航天器耦合动力学分析.北京:中国宇航出版社,2007 (Li D X, Chen S G. Astronaut-Spacecraft coupling dynamics analysis. Beijing: China Aerospace Press, 2007 (in Chinese))
- 13 Conway B A. Mathematical crew motion disturbance models for spacecraft control system design. Virginia Poly-

- technic Institute, 1965
- 14 Newma D J, Amir A R, Beck S M. Astronaut-induced disturbances to the microgravity environment of the Mir space station. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2001, 38 (4): 578~583

STUDY ON MODELING AND ANALYSIS OF A TETHERED SPINNING ARTIFICIAL GRAVITY SPACECRAFT*

Han Yanhua[†]

(College of Astronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract The dynamic modeling, approximate analytical solutions, and numerical simulations were conducted for an dumbbell-shaped tethered spinning artificial gravity spacecraft. Firstly, the dynamic equations were derived in a 2-D plane by using Kane's method. Then the equations were nondimensionalized by introducing proper spatial and temporal scales. The ratio of the tethering length to the spatial scale was introduced as a small parameter, and then the dimensionless equations were simplified by using the small parameter perturbation method. The spin period of the tethered system was approximately estimated based on elliptic integrals and elliptic functions. Both formulas of the artificial gravity and the Coriolis force in the crew capsule were derived. Finally, Numerical simulations were carried out. The results indicate that, by properly designing the tethering length and spin angular velocity, the fluctuation amplitude of the artificial gravity is sight, the fluctuation frequency is far away from the sensitive band of the human body, and the Coriolis force can be neglected. Therefore, the dumbbell-shaped tethered spinning spacecraft can produce an artificial gravity environment for astronauts to live in.

Key words artificial gravity, tethered spinning spacecraft, Kane's method, parameter perturbation

Received 24 March 2018, revised 13 June 2018.

* The project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities) (NS2016082).

[†] Corresponding author E-mail: hanyanhua@nuaa.edu.cn