

# 变质心控制高速滑翔弹动力学与控制律研究

韩艳铎, 陆宇平

(南京航空航天大学 航天学院, 南京 210016)

**摘要:**为研究变质心控制高速滑翔弹在下滑弹道上的动力学建模与弹道跟踪控制问题,基于 Lagrange 分析力学建立了滑翔弹在下滑纵向平面上的动力学方程,并将其转化为标准状态方程.在标准下滑弹道的某配平点上作小扰动线性化,然后根据 LQR 理论设计了飞行控制律.控制律通过沿弹头纵轴移动的滑块实现,可避免空气舵在高速飞行条件下的气动热烧蚀等问题.数值仿真表明,滑块具有强大的控制能力,只需在较小范围内移动即可有效控制弹头精准跟踪标准下滑弹道,验证了本文方法的有效性和可行性.

**关键词:**滑翔式导弹;导弹制导;多刚体系统;飞行力学;拉格朗日分析力学;变质心控制

**中图分类号:**TJ765;V448;O313 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-499X(2012)02-0010-05

## Study on Dynamics and Control Law for High-speed Glide Missile Controlled by Variable-centroid

HAN Yan-hua, LU Yu-ping

(College of Astronautics, NUA, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** To study the dynamic modeling and trajectory tracking controller of high-speed glide missile (HSGM) controlled by variable-centroid at glide stage, Lagrange analytical mechanics was used to establish the dynamic model of glide missile on longitudinal glide plane, and the model was converted to standard state equations. The small disturbance linearization was carried out aiming at a trim point on the glide trajectory, and the flight controller was designed based on linear quadratic regulator theory. The designed control law was implemented by a slider moving along the longitudinal axis of the warhead, and the problems such as aerothermal ablation caused by the aerodynamic rudder under high speed flight were avoided. Numerical simulation result shows the powerful control capability of slider. Glide missile can accurately track the standard trajectory by the control of slider, which moves within a small range. The variable-centroid control method is efficient and feasible.

**Key words:** glide missile; missile guidance; multi-rigid-body system; flight mechanics; Lagrange analytical mechanics; moving-mass control

助推-滑翔式导弹结合了传统弹道导弹和飞航导弹的优点,以其良好的弹道、机动和控制特性备受国内外研究者的关注,并可能成为下一代远程精确

打击的重要武器<sup>[1~3]</sup>.国内外对该种飞行器的研究成果多集中于滑翔弹道的设计和优化方面<sup>[4~7]</sup>.制导与控制也是影响该种武器飞行性能和打击精度的

收稿日期:2011-10-05

基金项目:南京航空航天大学基本科研业务费专项基金项目(W1013-HT)

作者简介:韩艳铎(1976-),男,副教授,博士,研究方向为飞行器动力学与控制. E-mail: hanyanhua@nuaa.edu.cn.

关键技术. 因为该武器需要在比较稠密的大气中作长距离、无动力高速飞行, 传统的操纵舵面不仅可能破坏良好的整体气动外形, 而且可能因严重的气动烧蚀而难于应用. 考虑到近年来同样发展迅速的飞行器变质心控制(亦称质量矩控制)技术<sup>[8~13]</sup>, 本文对高速滑翔弹下滑弹道上的变质心控制动力学和控制律设计问题进行了初步研究.

## 1 变质心控制滑翔弹动力学建模

变质心控制的再入滑翔弹头如图1所示.

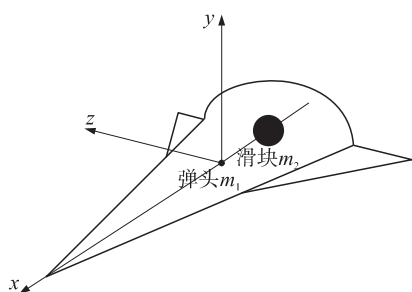


图1 变质心控制滑翔弹头示意图

在伺服机构驱动下, 滑块可沿弹头纵轴( $x$ 轴)移动, 改变系统整体质心在轴向的分布, 从而改变气动俯仰力矩, 控制弹头配平攻角和相应的气动升力, 达到影响飞行弹道的目的. 考虑到滑翔式再入弹头在纵向平面上的运动是主要的, 横侧向运动是小量, 对纵向的耦合影响较小, 同时也为处理上的简便, 本文仅研究变质心控制滑翔弹头在纵向平面上的动力学建模和控制问题.

对于弹头与滑块构成的两体系统, 可采用 Newton 矢量力学和 Lagrange 分析力学 2 种方法建模. 后者可避免理想约束内力的出现, 从而可简化建模过程, 特别适用于多体系统. 另外, Lagrange 分析力学建模过程也易于程式化, 符合计算机自动化建模的发展方向, 所以本文采用后者建模.

弹头-滑块两体系统的拉格朗日方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_j \quad j=1, 2, 3 \quad (1)$$

式中,  $F_j$  为相应于三个广义坐标的广义力, 系统广义位形坐标为

$$\begin{cases} q_1 = s \\ q_2 = h \\ q_3 = \eta \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $s, h, \eta$  分别为弹头飞行纵程、飞行高度、姿态

俯仰角. 系统拉格朗日函数为

$$L = T_1^{(1)} + T_1^{(2)} + T_2 - V_1 - V_2 \quad (3)$$

式中,  $T_1^{(1)}, T_1^{(2)}, T_2, V_1, V_2$  分别为弹头平动动能、弹头转动动能、滑块动能、弹头重力势能、滑块重力势能.

弹头平动动能为

$$T_1^{(1)} = m_1 (\dot{s}^2 + \dot{h}^2) / 2 \quad (4)$$

式中,  $m_1$  为弹头质量.

弹头转动动能为

$$T_1^{(2)} = J_z \dot{\eta}^2 / 2 \quad (5)$$

式中,  $J_z$  为弹头俯仰转动惯量.

将滑块视为一个质点, 故只须计算其平动动能.

滑块相对于地面惯性系(A)原点的绝对位矢为

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} s + \Delta x \cos \eta \\ h + \Delta x \sin \eta \end{pmatrix}_A \quad (6)$$

式中,  $\Delta x$  为滑块在弹头纵轴上的位置坐标. 所以, 其绝对速矢为

$$\mathbf{v}_2 \triangleq \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{s} - \Delta x \dot{\eta} \sin \eta \\ \dot{h} + \Delta x \dot{\eta} \cos \eta \end{pmatrix}_A \quad (7)$$

得到滑块动能为

$$T_2 \triangleq \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} m_2 [\dot{s}^2 + \dot{h}^2 + (\Delta x \dot{\eta})^2 + 2\Delta x \dot{\eta} (\dot{h} \cos \eta - \dot{s} \sin \eta)] \quad (8)$$

式中,  $m_2$  为滑块质量.

弹头重力势能为

$$V_1 = m_1 g h \quad (9)$$

滑块重力势能为

$$V_2 = m_2 g (h + \Delta x \sin \eta) \quad (10)$$

将式(4)、式(5)、式(8)~式(10)代入式(3)得系统拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\dot{s}^2 + \dot{h}^2) + \frac{1}{2} [J_z + m_2 (\Delta x)^2] \dot{\eta}^2 + m_2 \Delta x \dot{\eta} (\dot{h} \cos \eta - \dot{s} \sin \eta) - (m_1 + m_2) g h - m_2 g \Delta x \sin \eta \quad (11)$$

弹头-滑块系统受到的外部非保守力是空气动力, 即:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -F_D \\ F_L \end{bmatrix}_B \quad (12)$$

式中,  $F_D$  为气动阻力,  $F_L$  为气动升力; 右下角标 B 表示速度系(在只考虑纵向平面运动情况下, 也是弹道系).

根据弹道系和地面惯性系的坐标变换关系不难得到:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -F_D \cos \theta - F_L \sin \theta \\ -F_D \sin \theta + F_L \cos \theta \end{pmatrix}_A \quad (13)$$

式中,  $\theta$  为弹道倾角.

根据广义坐标、广义力、虚功的关系<sup>[14]</sup>, 不难得到弹头-滑块两体系统的广义力为

$$\begin{cases} F_1 = -F_D \cos\theta - F_L \sin\theta \\ F_2 = -F_D \sin\theta + F_L \cos\theta \\ F_3 = M_R \end{cases} \quad (14)$$

式中,  $M_R$  为弹头受到的气动俯仰力矩.

将式(1)、式(2)、式(11)、式(14)联立, 得弹头-滑块两体系统动力学方程为

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{s} - m_2 \Delta x \ddot{\eta} \sin\eta - m_2 \Delta x \dot{\eta}^2 \cos\eta = \\ -F_D \cos\theta - F_L \sin\theta \\ (m_1 + m_2)\ddot{h} + m_2 \Delta x \ddot{\eta} \cos\eta - m_2 \Delta x \dot{\eta}^2 \sin\eta + \\ (m_1 + m_2)g = -F_D \sin\theta + F_L \cos\theta \\ -m_2 \Delta x \ddot{s} \sin\eta + m_2 \Delta x \dot{s} \cos\eta + [J_z + m_2 (\Delta x)^2] \ddot{\eta} + \\ m_2 g \Delta x \cos\eta = M_R \end{cases} \quad (15)$$

式(15)是以广义坐标表示的弹头飞行力学, 下面将其转换为飞行力学中常用变量表示的形式.

首先对于纵平面内运动的弹头, 有运动学方程为

$$\begin{pmatrix} (m_1 + m_2) \cos\theta & -(m_1 + m_2) v \sin\theta & -m_2 \Delta x \sin\eta \\ (m_1 + m_2) \sin\theta & (m_1 + m_2) v \cos\theta & m_2 \Delta x \cos\eta \\ -m_2 \Delta x \sin\alpha & m_2 \Delta x v \cos\alpha & J_z + m_2 (\Delta x)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \rho v^2 S (C_{D0} + C_D^\alpha) \cos\theta - \frac{1}{2} \rho v^2 S (C_{L0} + C_L^\alpha) \sin\theta + m_2 \Delta x \omega^2 \cos\eta \\ -\frac{1}{2} \rho v^2 S (C_{D0} + C_D^\alpha) \sin\theta + \frac{1}{2} \rho v^2 S (C_{L0} + C_L^\alpha) \cos\theta + m_2 \Delta x \omega^2 \sin\eta - (m_1 + m_2) g \\ \frac{1}{2} \rho v^2 S l (m^\alpha \alpha + m^\omega \omega) - m_2 g \Delta x \cos\eta \end{pmatrix} \quad (20)$$

式(20)即是以飞行力学中常用变量表示的弹头-滑块两体系统动力学方程的状态空间形式. 结合式(16)、式(17)即构成完整的状态方程. 其中控制输入是滑块相对于弹头质心的纵坐标  $\Delta x$ . 需要说明的是, 滑块沿弹头纵轴( $x$ 轴)移动时, 其移动速度结合弹头姿态运动及弹道坐标系的旋转运动, 会产生额外的非惯性力, 如离心力、科氏力等, 从而也会对弹头动态有所影响, 但是比起气动俯仰力矩、气动阻力和气动升力对弹的影响要小得多, 并且滑块位置的变更是快变化过程, 弹头姿态和弹道的运动相对而言是慢变化过程, 滑块动态对弹头动态的影响可以被合理忽略. 所以, 本文动力学建模中忽略了与滑块移动速度有关的项.

$$\begin{cases} \dot{s} = v \cos\theta \\ \dot{h} = v \sin\theta \end{cases} \quad (16)$$

$$\dot{\eta} = \omega \quad (17)$$

式中,  $v, \omega$  分别为弹头飞行速度和姿态角速率.

所以,

$$\begin{cases} \ddot{s} = \dot{v} \cos\theta - v \dot{\theta} \sin\theta \\ \ddot{h} = \dot{v} \sin\theta + v \dot{\theta} \cos\theta \\ \ddot{\eta} = \dot{\omega} \end{cases} \quad (18)$$

另外, 根据导弹飞行力学, 有:

$$\begin{cases} F_D = q S C_D = \frac{1}{2} \rho v^2 S (C_{D0} + C_D^\alpha) \\ F_L = q S C_L = \frac{1}{2} \rho v^2 S (C_{L0} + C_L^\alpha) \\ M_R = q S l m_R = \frac{1}{2} \rho v^2 S l (m^\alpha \alpha + m^\omega \omega) \end{cases} \quad (19)$$

式中,  $\rho$  为大气密度;  $q$  为动压头;  $S, l$  分别为弹头气动特征面积和特征长度;  $C_D, C_L, m_R$  分别为弹头气动阻力系数、气动升力系数、气动俯仰力矩系数;  $\alpha$  为弹头攻角;  $C_{D0}, C_D^\alpha, C_{L0}, C_L^\alpha, m^\alpha, m^\omega$  为相关的气动导数.

联立式(15)~式(19)可得:

## 2 下滑弹道跟踪控制律设计

系统状态方程式(16)、式(17)、式(20)是复杂的多变量非线性耦合微分方程组. 为便于设计控制律, 在标准下滑弹道上计算配平点, 然后在该点上作小扰动线性化. 相关参数如表 1 所示, 表中,  $\theta^*$  为标准下滑弹道角,  $\rho$  为 13 km 高度处的密度.

表 1 基本参数值

$m_1 /$ kg	$m_2 /$ kg	$J_z /$ (kg·m <sup>2</sup> )	$g /$ (m·s <sup>-2</sup> )	$S /$ m <sup>2</sup>	$l /$ m	$C_{D0}$	$C_D$
1 000	300	100	9.8	0.25	2	0.05	0.5
$C_{L0}$	$C_L$	$m^\alpha$	$m^\omega /$ s	$\theta^* /$ (°)	$\rho /$ (kg·m <sup>-3</sup> )	$Ma^*$	$v^* /$ (m·s <sup>-1</sup> )
0.15	1.5	-0.1	-0.1	-15	0.265	4	1 360

指令高度(标准高度)为

$$h_c(t) = h_0 + v^* t \sin \theta^* \quad (21)$$

式中,  $h_0$  为初始高度. 配平俯仰角速率  $\omega^* = 0$ .

根据  $\dot{\theta} = 0, \dot{\omega} = 0$ , 算得配平攻角和配平滑块位置为  $\alpha^* = 1.943^\circ, \Delta x^* = -0.145$  m. 所以, 配平姿态俯仰角  $\eta^* = \theta^* + \alpha^* = -13.057^\circ$ .

在配平点上算得小扰动线性化方程为

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}$$

式中,  $\Delta \mathbf{X} \triangleq (\Delta h \ \Delta v \ \Delta \theta \ \Delta \eta \ \Delta \omega)^T$ ,  $\Delta \mathbf{U} \triangleq \Delta(\Delta x)$ ,  $\Delta h = h - h^*$ ,  $\Delta v = v - v^*$ ,  $\Delta \theta = \theta - \theta^*$ ,  $\Delta \eta = \eta - \eta^*$ ,  $\Delta \omega = \omega - \omega^* = \omega$ ,  $\Delta(\Delta x) = \Delta x - \Delta x^*$ .

系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -0.3 & 1313.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.0 & -1.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 86.6 & -86.6 & -116.9 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{B} = (0 \ 0.031 \ -0.0007 \ 0 \ -27.297)^T \quad (23)$$

经检验,  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  能控.

二次型性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\Delta \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \Delta \mathbf{X} + \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{R}' \Delta \mathbf{U}) dt$$

式中, 性能加权阵  $\mathbf{Q} \geq 0, \mathbf{R}' > 0$ , 数值如下:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \text{diag}(0.1, 0.1, 10^2, 0.1, 0.1) \\ \mathbf{R}' = 1 \end{cases} \quad (24)$$

式(22)~式(24)代入代数 Riccati 方程:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}'^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

得正定解:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 280 & 0 & 0 \\ 90 & 280 & 115920 & 2100 & 20 \\ 0 & 0 & 2100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据 LQR 理论, 状态反馈最优调节器的反馈增益矩阵为

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}'^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$$

$$(0.316 \ -0.096 \ 482.843 \ 12.000 \ 0.101)$$

得小扰动线性化系统的闭环特征值为

$$\text{eig}(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \begin{pmatrix} -116.43 \\ -1.79 \\ -0.89 + 1.44i \\ -0.89 - 1.44i \\ -0.01 \end{pmatrix}$$

全部极点在  $s$  域左半开平面, 可见闭环系统渐近稳定.

变质心最优控制律为

$$\begin{aligned} \Delta x = \Delta x^* + \Delta(\Delta x) = \Delta x^* + \mathbf{K} \Delta \mathbf{X} = \\ -0.145 + 0.316 \Delta h - 0.096 \Delta v + 482.843 \Delta \theta + \\ 12.000 \Delta \eta + 0.101 \omega \end{aligned} \quad (25)$$

式中, 弹道倾角  $\theta$ 、姿态角  $\eta$  均以 rad 为单位, 姿态角速率  $\omega$  以 rad/s 为单位, 所以其数值并不大.

### 3 数值仿真

为了验证本文控制方法对滑翔弹的有效性, 进行了数值仿真研究. 标准下滑弹道按照式(21)给出, 其中初始指令高度为 15 km. 设定滑翔弹初始高度相对于初始指令高度偏离为 5 m. 然后将式(25)给出的控制律代入滑翔弹动力学和运动学方程式(16)、式(17)、式(20), 并考虑到工程实际情况, 对滑块的移动量做了限幅. 利用龙格-库塔方法进行数值仿真, 仿真时间为 20 s, 结果如图 2 和图 3 所示.

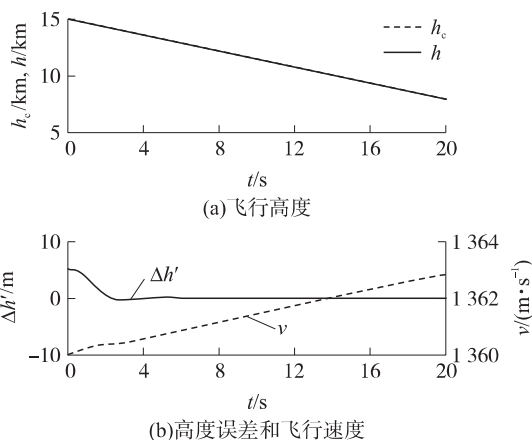


图2 飞行高度、高度误差和速度仿真结果

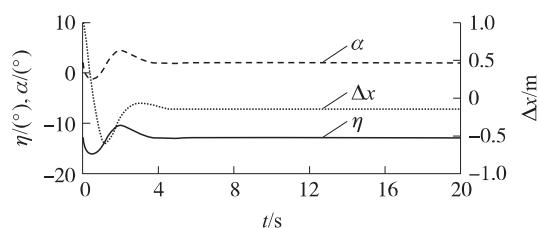


图3 弹头姿态和滑块位置仿真结果

图 2(a) 给出了标准下滑弹道  $h_c(t)$  和实际下滑弹道  $h(t)$ . 因为实际下滑弹道相对于标准弹道的初始偏差为 5 m, 且很快被修正, 然后紧密跟踪标准下滑弹道, 以至于在图上 2 条曲线几乎重合; 图 2(b) 给出了实际下滑弹道和标准下滑弹道之间的偏差

$\Delta h'$  曲线和弹头飞行速度曲线, 可以看到, 初始偏差值在不到 5 s 内即被消除; 随着弹头下滑飞行, 其速度有所增加, 但是数值较小 (增量不足 3 m/s). 图 3(a) 给出弹头姿态俯仰角  $\eta(t)$  和攻角  $\alpha(t)$  及滑翔弹的控制输入 (即滑块相对于弹头质心的轴向位置量  $\Delta x$ ). 可以看到, 在最初几 s 内为了对滑翔弹的弹道进行调整以跟踪标准弹道, 弹头的攻角和俯仰角出现一定波动, 但波动幅度较小, 并且随着弹道跟踪误差的消除, 弹头姿态角在不到 5 s 内即收敛到配平值. 滑块沿弹头纵轴的移动量不足 1 m, 且移动速度不快, 对伺服系统的要求并不高. 以上结果表明, 变质心控制系统对高速滑翔弹具有强大的控制能力, 滑块只需以不大的速度移动较小距离, 就能控制滑翔弹灵活运动, 紧密跟踪标准下滑弹道. 本文给出的滑翔弹变质心控制方法是有效的.

## 4 结束语

本文针对下一代远程精确打击武器——高速滑翔弹的下滑弹道控制问题, 基于 Lagrange 分析力学建立了变质心控制的弹头-滑块两体系统动力学模型; 基于 LQR 理论设计了针对标准下滑弹道的闭环跟踪控制律; 最后进行了数值仿真研究. 结果显示, 滑块只须以不大的速率移动较小距离就能对弹头形成强大的控制, 使其准确跟踪标准下滑弹道. 说明本文给出的控制方法是有效和可行的.

但是本文的成果只是初步的, 尚有如下复杂问题有待进一步深入研究: ①考虑滑块移动速度和加速度对弹头动力学耦合影响的更加准确的弹头-滑块两体系统动力学模型; ②考虑弹头六自由度运动和滑块三自由度移动的全维度弹头-滑块两体系统动力学模型; ③针对下滑弹道全段, 考虑滑翔弹气动参数大范围时变的自适应跟踪控制律设计.

## 参考文献

- [1] 关世义. 基于钱学森弹道的新概念飞航导弹[J]. 飞航导弹, 2003, (1): 1—4.  
GUAN Shi-yi. New concept winged missile based on QIAN Xue-sen ballistics[J]. Winged Missiles Journal, 2003, (1): 1—4. (in Chinese)
- [2] 雍恩米, 陈磊, 唐国金. 助推-滑翔弹道的发展史及基于该弹道的制导武器方案设想[J]. 飞航导弹, 2006, (3): 20—23.  
YONG En-mi, CHEN Lei, TANG Guo-jin. History of boost-glide trajectory and it based scheme idea of guided weapons [J]. Winged Missiles Journal, 2006, (3): 20—23. (in Chinese)
- [3] 李瑜, 崔乃刚, 郭继锋. 助推-滑翔导弹发展概况及关键技术分析[J]. 战术导弹技术, 2008, (5): 13—19.  
LI Yu, CUI Nai-gang, GUO Ji-feng. Development and key technology analysis of boost-glide missile [J]. Technical Missile Technology, 2008, (5): 13—19. (in Chinese)
- [4] VINH N X, YANG C Y, CHERN J S, et al. Optimal trajectories for maximum endurance gliding in a horizontal plane, AIAA1981-1868[R]. 1981.
- [5] 雍恩米. 助推-滑翔式导弹中段弹道方案的初步分析[J]. 国防科学技术大学学报, 2006, 28(6): 6—10.  
YONG En-mi. Schematic study of mid-course trajectories for the boost-glide missiles [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2006, 28(6): 6—10. (in Chinese)
- [6] 雍恩米. 助推-滑翔式弹道中段的近似解[J]. 飞行力学, 2007, 25(3): 49—52.  
YONG En-mi. Approximate solutions of the mid-course trajectories for the boost-glide missiles [J]. Flight Dynamics, 2007, 25(3): 49—52. (in Chinese)
- [7] 李邦杰, 王明海. 滑翔式远程导弹滑翔段弹道研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(6): 2122—2126.  
LI Bang-jie, WANG Ming-hai. Research on glide trajectory of long range glide missile [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(6): 2122—2126. (in Chinese).
- [8] 高长生, 李君龙. 导弹质量矩控制技术发展综述[J]. 宇航学报, 2010, 31(2): 307—314.  
GAO Chang-sheng, LI Jun-long. Key technique and development for moving mass actuated kinetic missile [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(2): 307—314. (in Chinese)
- [9] PETSOPOULOS T. A moving-mass roll control system for a fixed-trim re-entry vehicle, AIAA1994-0033[R]. 1994.
- [10] VADDI S S. Moving mass actuated missile control using convex optimization techniques, AIAA2006-6575[R]. 2006.
- [11] MENON P K, VADDI S S. Finite-horizon robust integrated guidance-control of a moving-mass actuated kinetic warhead, AIAA2006-6787[R]. 2006.
- [12] MUKHERJEE R M, BALARAM J. Attitude dynamics and control of moving mass multibody aeromaneuver vehicle, AIAA2008-6390[R]. 2008.
- [13] ROGERS J, COSTELLO M. A variable stability projectile using an internal moving mass, AIAA2008-7116[R]. 2008.
- [14] 刘延柱. 高等动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.  
LIU Yan-zhu. High dynamics [M]. Beijing: High Education Press, 2000. (in Chinese)