383. Показать, что функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена в интервале $-\infty < x < +\infty$.

384. Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности точки $x=0$, однако не является бесконечно большой при $x \to 0$.

385. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$$

в интервале $0 < x < \varepsilon$.

386. Показать, что функция $f(x)=\frac{x}{1+x}$ в области $0 \leqslant x < +\infty$ имеет нижнюю грань $m=0$ и верхнюю грань $M=1$.

387. Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

Определить нижнюю и верхнюю грани функций:

388. $f(x)=x^2$ на $[-2, 5)$.

389. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty, +\infty)$.

390. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ на $(0, +\infty)$.

391. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

392. $f(x)=\sin x$ на $(0, +\infty)$.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ на $[0, 2\pi]$.

394. $f(x)=2^x$ на $(-1, 2)$.

395. $f(x)=[x]$: а) на $(0, 2)$ и б) на $[0, 2]$.

396. $f(x)=x-[x]$ на $[0, 1]$.

397. Определить колебание функции

$$f(x)=x^2$$

на интервалах: а) $(1;\ 3)$; б) $(1{,}9;\ 2{,}1)$; в) $(1{,}99;\ 2{,}01)$; г) $(1{,}999;\ 2{,}001)$.

398. Определить колебание функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

на интервалах: а) $(-1;\ 1)$; б) $(-0,1;\ 0,1)$; в) $(-0,01;\ 0,01)$; г) $(-0,001;\ 0,001)$.

399. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ — соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке $(a,\ b)$.

Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, определенные на $(a,\ b)$, то

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$$

и

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

Построить примеры функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства и б) случай неравенства.

400. Пусть функция $f(x)$ определена в области $[a,\ +\infty)$ и ограничена на каждом сегменте $[a,\ b] \subset [a,\ +\infty)$.

Положим:

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi) \quad \text{и} \quad M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi).$$

Построить графики функций $y = m(x)$ и $y = M(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x$ и б) $f(x) = \cos x$.

401. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. На языке «E—δ» доказать, что

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	10	100	1 000	10 000	. . .
δ					

403. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$; в) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Привести соответствующие примеры.

Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

404. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

405. а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$;

д) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$; ж) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$;

з) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$; и) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

406. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; е) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; з) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

407. Пусть $y = f(x)$. Сформулировать с помощью неравенств, что значит:

а) $y \to b - 0$ при $x \to a$;
б) $y \to b - 0$ при $x \to a - 0$;
в) $y \to b - 0$ при $x \to a + 0$;
г) $y \to b + 0$ при $x \to a$;
д) $y \to b + 0$ при $x \to a - 0$;
е) $y \to b + 0$ при $x \to a + 0$;
ж) $y \to b - 0$ при $x \to \infty$;
з) $y \to b - 0$ при $x \to -\infty$;
и) $y \to b - 0$ при $x \to +\infty$;
к) $y \to b + 0$ при $x \to \infty$;
л) $y \to b + 0$ при $x \to -\infty$;
м) $y \to b + 0$ при $x \to +\infty$.

Привести соответствующие примеры.

408. Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_i ($i=0,\ 1, \ldots, n$; $n \geqslant 1, a_0 \neq 0$) — вещественные числа.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

409. Пусть $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

410. Пусть $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x и

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

Какие возможные значения имеет выражение

$$\lim \frac{P(x)}{\ldots}\ ?$$

Найти значения следующих выражений:

411. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m и n — натуральные числа).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$. **419.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **421.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$. **423.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

424.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — натуральные числа).

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n — натуральное число).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n — натуральное число).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m и n — натуральные числа).

429. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right].$$

430. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2n}{n}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right].$$

Указание. См. пример 2.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

Указание. См. пример 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. Определить площадь криволинейного треугольника OAM (рис. 3), ограниченного параболой $y =$

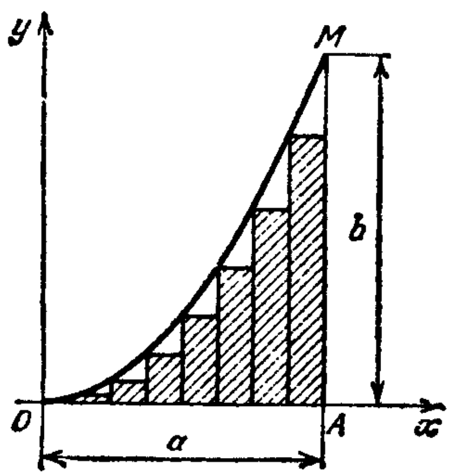

Рис. 3

$= b\,(x/a)^2$, осью Ox и прямой $x = a$, рассматривая ее как предел суммы площадей вписанных прямоугольников с основаниями a/n, где $n\to\infty$.

Найти пределы:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

440. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$. **443.** $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n — целое число).

445. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m и n—целые числа).

453. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m и n — целые числа).

454. Пусть $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ и m— целое число.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Найти пределы:

455. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m и n—целые числа).

455.1. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

458. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to+0} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\right.$

$$\left.-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right).$$

461. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right).$

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right).$

463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right].$

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right).$

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\ .\ .\ .\ (x+a_n)}-x\right].$

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n — натуральное число).

467. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n — натуральное число).

468. Изучить поведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, у которого коэффициент a стремится к нулю, а коэффициенты b и c постоянны, причем $b\neq 0$.

469. Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

470. Найти постоянные a_i и b_i ($i=1, 2$) из условий:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0.$$

Найти пределы:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}.$ **472.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}.$

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m и n — целые числа).

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **474.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

474.2. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 3x$.

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$. **476.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$. **478.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. **480.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$

$$\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right).$$

Найти пределы:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. **483.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$. **485.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$. **487.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg} a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg} a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. **496.** $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$. **503.** $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

506. а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

507. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. **508.** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\sin^n \dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to \pi/4+0} \left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. **512.** $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$. 514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

519.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$. 521. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$. 523. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$. 528. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$. 530. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$. **539.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$. **542.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$. **544.** $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$.

545.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

545.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$. **545.3.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$. **547.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$. **549.** $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Доказать, что

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad (a>1,\ n>0).$$

565. Доказать, что

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0\qquad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

Найти пределы:

566. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

568. $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to +0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0} (2e^{x/(x+1)}-1)^{(x^2+1)/x}$. **574.** $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\sec(\pi x/2)}$.

575. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{1-\sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

576. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x}$ (см. пример 340).

576.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$ (см. пример 340).

577. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x}$.

577.1. а) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} a}{x-a}$.

577.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\operatorname{ch} x}{\ln\cos x}$. **578.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-\ln\operatorname{ch} x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$.

580. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to \infty} \arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to +\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg}\dfrac{x-4}{(x-2)^2}$. **584.** $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-1/x^2}$. **592.** $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

593. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

594.1 Найти $h=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$$

595. а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

596. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

597. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Доказать, что

а) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$ при $x\to-\infty$;

б) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$ при $x\to+\infty$.

599. Доказать, что

а) $2^x \to 1-0$ при $x \to -0$;

б) $2^x \to 1+0$ при $x \to +0$.

600. Найти $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, если $f(x) = x + [x^2]$.

601. Найти $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, если $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

Найти:

602. $\lim\limits_{x \to 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$. **603.** $\lim\limits_{x \to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$.

604. $\lim\limits_{n \to \infty} \sin\left(\pi \sqrt{n^2+1}\right)$.

605. $\lim\limits_{n \to \infty} \sin^2\left(\pi \sqrt{n^2+n}\right)$.

606. $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\sin \sin \ldots \sin x}_{n \text{ раз}}$.

607. Если $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x \to a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = 1/q$ при $x = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа и $\varphi(x) = 0$ при x — иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$; причем $x \to 0$.

608. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b), то

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ $\quad (f(x) \geqslant C > 0)$,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; б) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; в) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

610. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; 3) для некоторого натурального n существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = l,$$

то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$;

б) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

612. Доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} n \sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Указание. Использовать формулу (*) примера 72.

Построить график функций:

613. а) $y = 1 - x^{100}$; б) $y = \lim\limits_{n \to \infty} (1 - x^{2n})$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

614. а) $y = \dfrac{x^{100}}{1 + x^{100}}$ $(x \geqslant 0)$; б) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{1 + x^n} (x \geqslant 0)$.

615. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ $(x \neq 0)$.

616. $x = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

617. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

618. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x \geqslant 0)$.

619. $y = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}}$ $(x \geqslant 0)$.

620. а) $y = \sin^{1000} x$; б) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \sin^{2n} x$.

621. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ $(x \geqslant 0)$.

622. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x-1)\operatorname{arctg} x^n$.

623. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$.

624. $y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$.

625. $y = \lim\limits_{t\to x} \dfrac{1}{t-x} \ln \dfrac{t}{x}$ $(x > 0)$.

625.1. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x \operatorname{tg}^{2n} \dfrac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n} \dfrac{\pi x}{4} + 1}$ $(x \geqslant 0)$.

625.2. $y = \lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{sgn} |\sin^2 (n!\pi x)|$.

625.3. Построить кривую

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1.$$

626. *Асимптотой* (наклонной) для кривой $y = f(x)$ называется прямая $y = kx + b$, для которой

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Используя это уравнение, вывести необходимые и достаточные условия существования асимптоты.

627. Найти асимптоты и построить следующие кривые:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 2}$; б) $y = \sqrt{x^2 + x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$; г) $y = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$;

д) $y = \ln(1 + e^x)$; е) $y = x + \arccos \dfrac{1}{x}$.

Найти следующие пределы:

628. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} \right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, если $|x| < 1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right).$

631. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, где $\psi(x)>0$ и пусть $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$ при $n\to\infty$, т. е. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ при $m=1,\ 2,\ \ldots$ и $n>N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ \ldots\ +\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ \ldots\ +\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

Пользуясь предыдущей теоремой, найти:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right).$

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{k/n^2}-1)\ (a>0).$

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}.$

637. Последовательность x_n задана равенствами:

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots$$
$$(a>0).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

637.1. Последовательность x_n задается следующим образом:

$$x_1 = 0, \ x_2 = 1,$$

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

637.2. Последовательность y_n определяется с помощью последовательности x_n соотношениями:

$$y_0 = x_0, \ y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $|\alpha| < 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

637.3. Последовательность x_n определяется следующим образом:

$$x_0 = 1, \ x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Указание Рассмотреть разности между x_n и корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$.

638. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \ y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639. Последовательность функций $y_n = y_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \ y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639.1. Пусть $x > 0$ и $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что если $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, то последовательность y_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Указание. Изучить разность

$$\frac{1}{x} - y_n.$$

639.2. Для нахождения $y = \sqrt{x}$, где $x > 0$, применяется следующий процесс: $y_0 > 0$ — произвольно,

$$y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу

$$\frac{y_n - \sqrt{x}}{y_n + \sqrt{x}} = \left(\frac{y_{n-1} - \sqrt{x}}{y_{n-1} + \sqrt{x}}\right)^2 \quad (n \geqslant 1).$$

640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \qquad (1)$$

полагают

$x_0 = m$, $x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \ldots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \ldots$ (*метод последовательных приближений*).

Доказать, что существует $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x - \xi| \leqslant h$ $(h > 0)$, то число

$$\omega_0[f] = \lim_{h\to 0} \omega_h[f]$$

называется *колебанием функции* $f(x)$ *в точке* ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x = 0$, если $f(0) = 0$ и при $x \neq 0$ имеем:

а) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

в) $f(x) = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$; г) $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

д) $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$;

ж) $f(x) = (1 + |x|)^{1/x}$.

642. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Доказать, что, каково бы ни было число α, удовлетворяющее условию $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно выбрать последовательность $x_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Определить

$$l = \varliminf_{x\to 0} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to 0} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 (1/x)}$

644. Определить

$$l = \varliminf_{x\to\infty} f(x) \quad \text{и} \quad L = \varlimsup_{x\to\infty} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

в) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; г) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ $(x \geqslant 0)$.

§ 6. *O*-символика

1°. Запись

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \in X$$

обозначает, что существует постоянная A такая, что

$$|\varphi(x)| \leqslant A |\psi(x)| \text{ для } x \in X. \tag{1}$$

Аналогично пишут

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \to a, \tag{2}$$

если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности U_a точки a $(x \neq a)$. В частности, если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$ $(x \neq a)$, то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. В этом случае будем писать $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Если

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой порядка* p относительно

821. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

822. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = 1/x^2$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

823. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение Δy, если:

а) $y=ax+b$; б) $y=ax^2+bx+c$; в) $y=a^x$.

824. Доказать, что:

а) $\Delta [f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

б) $\Delta [f(x)\, g(x)] = g(x+\Delta x)\, \Delta f(x) + f(x)\, \Delta g(x)$.

825. Через точки $A\ (2,\ 4)$ и $A'\ (2+\Delta x,\ 4+\Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA'. Найти угловой коэффициент этой секущей, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0,1$; в) $\Delta x = 0,01$; г) Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A?

826. Отрезок $1 \leqslant x \leqslant 1+h$ оси Ox с помощью функции $y = x^3$ отображается на ось Oy. Определить средний коэффициент растяжения и произвести численный расчет, если: а) $h = 0,1$; б) $h = 0,01$; в) $h = 0,001$.

Чему равен коэффициент растяжения при этом отображении в точке $x = 1$?

827. Закон движения точки по оси Ox дается формулой

$$x = 10t + 5t^2,$$

где t — время в секундах и x — расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leqslant t \leqslant 20+\Delta t$ и произвести численный расчет, если: а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0,1$; в) $\Delta t = 0,01$. Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

828. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций: а) x^2; б) x^3; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\operatorname{tg} x$; ж) $\operatorname{ctg} x$; з) $\arcsin x$; и) $\arccos x$; к) $\operatorname{arctg} x$.

829. Найти $f'(1)$, $f'(2)$ и $f'(3)$, если

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

831. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.

833. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n — натуральное число, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = f'(x). \qquad (1)$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле (см. отд. I, задачу 734).

Пользуясь таблицей производных, найти производные следующих функций:

834. $y = 2 + x - x^2$.

Чему равно $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

При каких значениях x: а) $y'(x) = 0$; б) $y'(x) = -2$; в) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$. **837.** $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

841. $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

842.1. $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

844. Доказать формулу $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

Найти производные функций:

845. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$. **846.** $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y=\dfrac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$. **850.** $y=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

852. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. **854.** $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$. **866.** $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$. **868.** $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$. **870.** $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

871. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

872. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

874. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$. 876. $y=e^{-x^2}$.

877. $y=2^{\operatorname{tg}1/x}$. 878. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $(a>0,\ b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. 886. $y=\lg^3 x^2$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$. 888. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$ $(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

895. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

896. $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

897. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-$
$$-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x.$$

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$.

900. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2x+\ln\sin x$.

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$

$(0\leqslant|\alpha|<|b|)$.

907. $y=\frac{1}{x}(\ln^3x+3\ln^2x+6\ln x+6)$.

908. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

909. $y=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$.

910. $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

912. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$.

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. 915. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$.

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$. 917. $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

919. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

920. $y=\arccos\frac{1}{x}$. 921. $y=\arcsin(\sin x)$.

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$. 923. $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$. 925. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

926. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

$(a>b\geqslant 0)$

928. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$. 929. $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

930. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

931. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

933. $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$ $(b\neq 0)$.

934. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

935. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

938. $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

939. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

940. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

941. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arcctg}x^6$.

943. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

944. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

945. $y=\operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\quad(a>0)$.

946. $y=\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$.

947. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

948. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

949. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x.$$

950. $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.

951. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.

952. $y=\operatorname{arctg}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

953. $y=\arcsin\left(\frac{\sin a \sin x}{1-\cos a \cos x}\right)$.

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

956. $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

957. $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$.

958. $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$.

959. $y=e^{m \arcsin x}[\cos(m \arcsin x)+\sin(m \arcsin x)]$.

960. $y=\operatorname{arctg} e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

960.1. $y=\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}$.

960.2. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}}}$.

960.3. $y=\ln^2\left(\sec 2\sqrt[3]{x}\right)$.

961. $y=x+x^x+x^{x^x} \quad (x>0)$.

962. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x} \quad (a>0,\ x>0)$.

963. $y=\sqrt[x]{x} \quad (x>0)$.

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

965. $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$.

965.1. $y=\left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

966. $y=\log_x e$. **967.** $y=\ln(\operatorname{ch} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

968. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

970. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

971. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$
$(0\leqslant|b|<a)$.

972. Найти производную функции

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}),$$

вводя промежуточное переменное $u=\cos^2 x$.

Приемом, указанным в примере 972, найти производные функций:

973. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\dfrac{1}{2}\right]$.

974. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

975. $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

976. $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}$.

977. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y=|x|$; б) $y=x|x|$; в) $y=\ln|x|$.

978. Найти производные следующих функций:

а) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$; б) $y=|\sin^3 x|$;

в) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$; г) $y=[x]\sin^2\pi x$.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

979. $y=\begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty<x<1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2<x<+\infty. \end{cases}$

980. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0 & \text{вне отрезка } [a, b]. \end{cases}$

981. $y=\begin{cases} x & \text{при } x<0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$

982. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

983. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ \frac{1}{e} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

984. Производная от логарифма данной функции $y=f(x)$ называется *логарифмической производной* этой функции:

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|f(x)| \equiv \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную от функции y, если:

а) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

г) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции от x. Найти производную от функции y, если:

а) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; б) $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

в) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x) \neq 0;\ \psi(x)>0)$;

г) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. Найти y', если:

а) $y=f(x^2)$; б) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

в) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$; г) $y=f\{f[f(x)]\}$,

где $f(u)$ — дифференцируемая функция.

986.1. Найти $f'(0)$, если

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000).$$

987. Доказать следующее правило дифференцирования определителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \ldots & f_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Дан график функции. Приближенно построить график ее производной.

991. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0; \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

992. При каком условии функция

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0) \text{ и } f(0)=0$$

а) непрерывна при $x=0$; б) дифференцируема при $x=0$; в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

993. При каком условии функция

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \ (x \neq 0) \ \text{и} \ f(0) = 0 \ (m > 0)$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

994. Найти $f'(a)$, если

$$f(x) = (x-a)\,\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = a$.

995. Показать, что функция

$$f(x) = |x-a|\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a) \neq 0$, не имеет производной в точке a.

Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

996. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

997. Показать, что функция

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \ \text{и} \ f(0) = 0$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x = 0$, но дифференцируема в этой точке.

Построить эскиз графика этой функции.

998. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

имеет производную лишь при $x = 0$.

999. Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

а) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y = |\cos x|$;

в) $y = |\pi^2 - x^2|\sin^2 x$; г) $y = \arcsin(\cos x)$;

д) $y = \begin{cases} \dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ |x|-1 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

Для функции $f(x)$ определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если:

1000. $f(x) = |x|$. **1001.** $f(x) = [x]\sin \pi x$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x)=\frac{x}{1+e^{1/x}}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1006. $f(x)=|\ln|x||$ $(x\neq 0)$.

1007. $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x)=(x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$ $(x\neq 2)$, $f(2)=0$.

1009. Показать, что функция $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$ непрерывна при $x=0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

1009.1. Пусть x_0 — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$. Выражения

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to -0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-0)}{h}$$

и

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h}$$

называются *обобщенными односторонними* (соответственно левой и правой) *производными* функции $f(x)$ в точке x_0.

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2+x^3}{x}}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$;

в) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$.

1010. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant x_0;\\ ax+b, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

1011. Пусть

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ ax + b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$.

При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке x_0?

1012. На сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ построить сопряжение двух полупрямых

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a),$$
$$y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

с помощью кубической параболы

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c),$$

(где параметры A и c подлежат определению).

1013. Часть кривой $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ дополнить параболой

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leqslant c)$$

(где a и b — неизвестные параметры) так, чтобы получилась гладкая кривая.

1014. Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

1015. Можно ли утверждать, что произведение

$$F(x) = f(x)\,g(x)$$

не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$.

1016. Что можно сказать о дифференцируемости функции

$$F(x) = f(g(x))$$

в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, б) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$

в) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

1017. В каких точках график функции $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные? Построить этот график.

1018. Может ли функция $f(x)$ в точке ее разрыва иметь: а) конечную производную; б) бесконечную производную?

Рассмотреть пример: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

1019. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то обязательно ли

1) $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$; 2) $\lim\limits_{x \to a} |f'(x)| = +\infty$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

1020. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

1021. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

ния приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов:

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

Определить значения следующих выражений:

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$. **1319.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. **1321.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$. **1323.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$. **1325.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$. **1327.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$. **1330.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. **1332.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$. **1334.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th} x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh} x)-\operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x-\sin x}$, где $\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$. **1338.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0{,}01x}$. **1340.** $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x$ $(\varepsilon>0)$. **1342.** $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$. **1344.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x}-1\right)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0} x^{k/(1+\ln x)}$. **1346.** $\lim\limits_{x\to1} x^{1/(1-x)}$.

1347. $\lim\limits_{x\to1} (2-x)^{\operatorname{tg} \pi x/2}$. **1348.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. **1350.** $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$. **1352.** $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{1/x^2}$. **1354.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$. **1356.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$. **1359.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$. **1362.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{th} x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$. **1363.1.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$ **1363.3.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{1/x^2}$, где $\operatorname{Arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1364. $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$. **1365.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

1366. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$. **1367.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$. **1368.1.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+(1/x)}-x^{1+1/(x+a)}\right]$.

1371. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}$, если кривая $y=f(x)$ входит при $x\to 0$ в начале координат $(0, 0)$ $(\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0)$ под углом α.

1372. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{f(x)}=1$, если непрерывная кривая $y=f(x)$ входит при $x\to+0$ в начало координат $(\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0)$ и при $0<x<\varepsilon$ целиком остается внутри острого угла, образованного прямыми: $y=-kx$ и $y=kx$ $(k\neq\infty)$.

1373. Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.1. Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}, & \text{если } x\neq 0;\\[2ex] \dfrac{1}{2}, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

1373.2. Найти асимптоту кривой $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ $(x>0)$.

1374. Исследовать возможность применения правила Лопиталя к следующим примерам:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

1375. Найти предел отношения площади кругового сегмента, имеющего хорду b и стрелку h, к площади равнобедренного треугольника, вписанного в этот сегмент, если дуга сегмента при неизменном радиусе R

4°. Признак сравнения II. Если

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)\ ^{*)},$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p \leqslant 1$ расходится.

5°. Признак Даламбера. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

6°. Признак Коши. Если $a_n \geqslant 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

то а) при $q < 1$ ряд (1) сходится и б) при $q > 1$ расходится.

7°. Признак Раабе. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p,$$

то а) при $p > 1$ ряд (1) сходится и б) при $p < 1$ расходится.

8°. Признак Гаусса. Если $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

где $|\theta_n| < C$ и $\varepsilon > 0$, то а) при $\lambda > 1$ ряд (1) сходится и б) при $\lambda < 1$ расходится; в) при $\lambda = 1$ ряд (1) сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leqslant 1$.

9°. Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ ($x \geqslant 1$) — неотрицательная невозрастающая непрерывная функция, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Доказать непосредственно сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2546. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \ldots$

2547. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots$$

---

*) Значение символа O^* см. отдел I, § 6, 1°.

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2551. а) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\ldots+q^n\sin n\alpha+\ldots$;

б) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\ldots+q^n\cos n\alpha+\ldots$

$(|q|<1)$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2553. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

Указание. Показать, что при $x\neq k\pi$ (k — целое) невозможно, чтобы $\sin nx\to 0$ при $n\to\infty$!

2554. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n,\text{ где } A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i \quad (p_1=1,\quad p_1<p_2<\ldots),$$

полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения порядка следования их, также сходится и имеет ту же сумму. Обратное неверно; привести пример.

2555. Доказать, что если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, полученный в результате группировки членов этого ряда, сходится, то данный ряд также сходится.

Исследовать сходимость рядов:

2556. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2557. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

2558. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$$

2565. Доказать, что ряд чисел, обратных членам арифметической прогрессии, расходится.

2566. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (B) сходятся и $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ (C) также сходится. Что можно сказать о сходимости ряда (C), если ряды (A) и (B) расходятся?

2567. Пусть даны два расходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами.

Что можно сказать о сходимости рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

2568. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Обратное утверждение неверно; привести примеры.

2569. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

2570. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2571. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно убывающими членами сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

2572. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, если

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$$

при $p = 1, 2, 3, \ldots$?

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих рядов:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots \quad (|a_n| < 10)$.

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^n} + \ldots$

2575. $\frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \ldots$

$$\ldots + \frac{\cos nx - \cos (n+1)x}{n} + \ldots$$

2575.1. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos x^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos x^n}{n^2} + \ldots$

Указание. Использовать неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость следующих рядов:

2576. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

2577. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

2577.1. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots$

Пользуясь признаками сравнения, Даламбера или Коши, исследовать сходимость рядов:

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\ldots+\frac{1000^n}{n!}+\ldots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n!)}+\ldots$

2580. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots$

2581. а) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots$

$\ldots+\frac{2^n n!}{n^n}+\ldots;$

б) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots$

$\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots$

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\ldots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\ldots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

2585. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\ldots$

$\ldots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right).$

2585.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,$

где

$$a_n=\begin{cases} 1/n, & \text{если } n=m^2, \\ 1/n^2, & \text{если } n\neq m^2 \end{cases} \quad (m \text{ — натуральное число}).$$

2585.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\alpha}{1+x^2+\cos^2 k\alpha}.$

2586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$ 2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

2588. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$. **2589.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(2n^2+n+1)^{n+1/2}}$.

2589.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$. **2589.2.** $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$
$$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$$

Указание. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$.

2591. Доказать, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q \quad (a_n>0),$$

то $a_n = o(q_1^n)$, где $q_1 > q$.

2591.1. Пусть для членов знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n>0)$ выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \rho < 1 \text{ при } n \geqslant n_0.$$

Доказать, что для остатка ряда

$$R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots$$

имеет место оценка

$$R_n \leqslant a_{n_0} \frac{\rho^{n-n_0+1}}{1-\rho}, \quad \text{если } n \geqslant n_0.$$

2591.2. Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(4n)!!}$, где $[(2n)!!]^2 = 2\cdot4\ldots2n$, достаточно взять, чтобы соответствующая частная сумма S_n отличалась от суммы ряда S меньше, чем на $\varepsilon = 10^{-6}$?

2592. Доказать, что если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$ $(a_n>0)$,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Обратное утверждение неверно. Рассмотреть пример

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$$

2593. Доказать, что если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \; (a_n>0)$ существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \qquad \text{(А)}$$

то существует также

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q. \qquad \text{(Б)}$$

Обратное утверждение неверно: если существует предел (Б), то предел (А) может и не существовать. Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Доказать, что если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q \quad (a_n\geqslant 0)$, то а) при $q<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; б) при $q>1$ этот ряд расходится (*обобщенный признак Коши*).

Исследовать сходимость рядов:

2595. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$. **2596.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos^2 n\pi/3}{2^n}$.

2597. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$.

2597.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

Пользуясь признаками Раабе и Гаусса, исследовать сходимость следующих рядов:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\ldots$,

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(b+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\ldots$

$(a>0,\ b>0,\ d>0)$.

2600. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\ldots(q+n)}\quad(q>0)$.

2603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$.

2604. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

2605(н). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right]^{\alpha}(p>0,\ q>0)$.

2606 (н). Доказать, что если для знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ при $n\to\infty$ выполнено условие

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

то

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right),$$

где $\varepsilon>0$ произвольно мало; причем, если $p>0$, то $a_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$, т. е. a_n при $n\geqslant n_0$, монотонно убывая, стремится к нулю, когда $n\to\infty$.

Определив порядок убывания общего члена a_n, исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если

2607. $a_n = \dfrac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q}$, где $n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q > 0$.

2608. $a_n = \dfrac{1}{n^p} \sin \dfrac{\pi}{n}$.

2609. $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \dfrac{n-1}{n+1}$ $(n > 1)$.

2610. $a_n = \ln^p \left(\sec \dfrac{\pi}{n} \right)$.

2611. $a_n = \log_{b^n} \left(1 + \dfrac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

2612. $a_n = \left[e - \left(1 + \dfrac{1}{n} \right)^n \right]^p$.

2613. $a_n = \dfrac{1}{n^{1+k/\ln n}}$. **2614.** $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$.

2614.1. Доказать *признак Жамэ*: знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$ сходится, если

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \geqslant p > 1 \quad \text{при } n > n_0,$$

и расходится, если

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\ln n} \leqslant 1 \quad \text{при } n > n_0.$$

2615. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$ сходится, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha$ при $n \geqslant n_0$, и расходится, если $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1$ при $n \geqslant n_0$ (*логарифмический признак*).

Исследовать сходимость рядов с общим членом:

2616. $a_n = n^{\ln x}$ $(x > 0)$.

2617. $a_n = \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ $(n > 1)$.

2618. $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ $(n > 1)$.

Пользуясь интегральным признаком Коши, исследовать сходимость рядов с общим членом:

2619. $a_n = \dfrac{1}{n \ln^p n}$ $\quad (n > 1)$.

2620. $a_n = \dfrac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ $\quad (n > 2)$.

2620.1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2 \cdot \ln 3 \ldots \ln (n+1)}{\ln (2+p) \cdot \ln (3+p) \ldots \ln (n+1+p)} \quad (p > 0).$$

2620.2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\nu(n)}{n^2}$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

2620.3. Пусть λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательные положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

2621. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln (n!)}$.

2622. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными монотонно убывающими членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2623. Пусть $f(x)$ — положительная монотонно невозрастающая функция.

Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, то для остатка его

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$$

справедлива оценка

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Пользуясь этим, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ с точностью до 0,01.

2624. Доказать *признак Ермакова*: пусть $f(x)$ — положительная монотонно убывающая функция и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если $\lambda < 1$, и расходится, если $\lambda > 1$.

2625. Доказать *признак Лобачевского*: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными и монотонно стремящимися к нулю членами сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m 2^{-m}$, где p_m — наибольший номер членов a_n, удовлетворяющих неравенству

$$a_n \geqslant 2^{-m} \quad (n = 1, 2, \ldots, p_m).$$

Исследовать сходимость следующих рядов:

2626. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$.

2627. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}\right)$.

2628. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^\alpha}$. **2631.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$. **2634.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

2635. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$. **2639.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{1/n}-\dfrac{b^{1/n}+c^{1/n}}{2}\right)$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

2641. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^{n^{\alpha}}-1\right)$.

2642. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\ln\dfrac{1}{n^{\alpha}}-\ln\left(\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$ $(a>0)$.

2644. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ $(a>0,\ b>0)$.

2645. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\ldots(2n)!}$.

Исследовать сходимость рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ со следующими общими членами:

2646. $u_n = \int\limits_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x^2}$.

2647. $u_n = \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\, dx}$.

2648. $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

2649. $u_n = \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

2650. $u_n = \int\limits_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx$.

2651. $u_n = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k}{n^\alpha}$.

Заменив последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ соответствующими рядами, исследовать сходимость их, если:

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

2654. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. Сколько примерно надо взять членов ряда, чтобы найти его сумму с точностью до 10^{-5}, если

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$.

§ 2. Признаки сходимости знакопеременных рядов

1°. Абсолютная сходимость ряда. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{2}$$

В этом случае ряд (1) также сходится. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка слагаемых.

Для определения абсолютной сходимости ряда (1) достаточно применить к ряду (2) известные признаки сходимости для знакопостоянных рядов.

Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется *условно* (*не абсолютно*) *сходящимся*. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки слагаемых можно сделать равной любому числу (*теорема Римана*).

2°. Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1} b_n + \ldots$$

($b_n \geqslant 0$) сходится (вообще говоря, не абсолютно), если а) $b_n \geqslant b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \ldots$) и б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. В этом случае для остатка ряда

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots$$

имеем оценку

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

сходится, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) числа b_n ($n = 1, 2, \ldots$) образуют монотонную и ограниченную последовательность.

4°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится, если: 1) частичные суммы $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ограничены в совокупности; 2) b_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

2656. Доказать, что члены не абсолютно сходящегося ряда можно без перестановки сгруппировать так, что полученный новый ряд будет абсолютно сходящимся.

2657. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия: а) общий член этого ряда a_n стремится к нулю при $n \to \infty$; б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; в) число слагаемых a_i, входящих в член $A_n = \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \; (1=p_1<p_2<\ldots)$, ограничено.

2658. Доказать, что сумма сходящегося ряда не изменится, если члены этого ряда переставить так, что ни один из них не удаляется от своего прежнего положения больше чем на m мест, где m — некоторое заранее заданное число.

Доказать сходимость следующих рядов и найти их суммы:

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$

2660. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$

2661. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

Указание. Применить формулу $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}= C+\ln n+\varepsilon_n$, где C — постоянная Эйлера и $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

2662. Зная, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, найти суммы рядов, полученных из данного в результате перестановки его членов:

а) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$

и

б) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$

2663. Члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

Исследовать сходимость знакопеременных рядов:

2664. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{2^n}$.

2665. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n.$

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+$
$+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$

2666.1. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \qquad (1)$$

где $b_n > 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следует ли отсюда, что ряд (1) сходится? Рассмотреть пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2+(-1)^n}{n}.$$

2667. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$. **2668.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$

2669. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}.$

2670. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$

2671. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi \sqrt{n^2+k^2}\right).$

2672. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}.$

2673. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$

2673.1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}.$

2674. Доказать, что знакочередующийся ряд
$b_1-b_2+b_3-b_4+\ \ldots\ +(-1)^{n-1}b_n+\ \ldots \qquad (b_n>0)$
сходится, если

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $p>0$ (см. 2606 (н)).

Исследовать на абсолютную (кроме 2690) и условную сходимость следующие ряды:

2675. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$. **2676.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1/n}}$.

2677. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n\sin^{2n}x}{n}$.

2679. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. **2680.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

2681. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$.

2682. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\,\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n-1)/2}\frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$. **2687.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)} \right]^p$.

2690. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$. **2691.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Указание. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q}$$

— рациональная функция, где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ и $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \ldots + b_q| > 0$ при $x \geqslant n_0$.

Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Исследовать сходимость рядов:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \ldots$

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \ldots$

2695. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \ldots$

2696. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \ldots$

2697. Доказать, что ряды

а) $\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$;

б) $\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \ldots$

не абсолютно сходятся в интервале $(0, \pi)$.

2698. Для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0<x<\pi)$$

определить для совокупности параметров (p, x): а) область абсолютной сходимости; б) область неабсолютной сходимости.

2698.1. Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln(\ln n)}$; в) $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{\sin n}{n + 10\sin n}$.

2699. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\,n^q}$$

определить: а) область абсолютной сходимости; б) область условной сходимости.

2700. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

где $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

2701. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

то можно ли утверждать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится?

Рассмотреть примеры

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right].$$

2702. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — не абсолютно сходящийся ряд и

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| + a_i}{2}, \quad N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i| - a_i}{2}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

для каждого $p > 0$ лежит между $\frac{1}{2}$ и 1.

2703.1. Сколько членов ряда следует взять, чтобы получить его сумму с точностью до $\varepsilon = 10^{-6}$, если:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^0}{\sqrt{n}}$.

2704. Доказать, что если члены ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

переставить так, чтобы группу p последовательных положительных членов сменяла группа q последовательных отрицательных членов, то сумма нового ряда будет

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

2705. Доказать, что гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

останется расходящимся, если, не переставляя его членов, изменить знаки их так, чтобы за p положительными членами следовало бы q отрицательных ($p \neq q$). Сходимость будет иметь место лишь при $p = q$.

§ 3. Действия над рядами

Сумма и произведение рядов. По определению полагают:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$,

где

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1.$$

Равенство а) имеет неформальный смысл, если оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, а равенство б) —если, сверх того, по меньшей мере один из этих рядов сходится абсолютно.

2706. Что можно сказать о сумме двух рядов, из которых а) один ряд сходится, а другой расходится; б) оба ряда расходятся?

2707. Найти сумму двух рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right].$$

Найти суммы следующих рядов:

2708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right]$.

2709. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{[n/2]} y^{[(n+1)/2]}$ $(|xy| < 1)$.

2711. Показать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

2712. Показать, что $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n \quad (|q|<1)$.

2713. Показать, что квадрат сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

есть ряд расходящийся.

2714. Доказать, что произведение двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \quad (\alpha>0) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \quad (\beta>0)$$

есть ряд сходящийся, если $\alpha+\beta>1$, и расходящийся, если $\alpha+\beta<1$.

2715. Проверить, что произведение двух расходящихся рядов

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

есть абсолютно сходящийся ряд.

§ 4. Функциональные ряды

1°. Область сходимости. Совокупность X_0 тех значений x, для которых сходится *функциональный ряд*

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

называется *областью сходимости* этого ряда, а функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (x\in X_0)$$

— его *суммой*.

2°. Равномерная сходимость. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

называется *равномерно сходящейся* на множестве X, если:

1) существует предельная функция

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad (x\in X);$$

2) для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать число $N=N(\varepsilon)$ такое, что

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

при $n>N$ и $x\in X$. В этом случае пишут: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если равномерно сходится на этом множестве последовательность его частичных сумм:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

3°. Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (1) на множестве X необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и $p > 0$ было выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

4°. Признак Вейерштрасса. Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве X, если существует сходящийся числовой ряд

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{2}$$

такой, что

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \text{ при } x \in X \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

5°. Признак Абеля. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{3}$$

сходится равномерно на множестве X, если: 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на множестве X; 2) функции $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности и при каждом x образуют монотонную последовательность.

6°. Признак Дирихле. Ряд (3) сходится равномерно на множестве X, если: 1) частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$ в совокупности ограничены; 2) последовательность $b_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонна для каждого x и равномерно на X стремится к нулю при $n \to \infty$.

7°. Свойства функциональных рядов. а) Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.

б) Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на каждом $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to a} u_n(x) = A_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то 1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится и 2) имеет место равенство

$$\lim_{x \to a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\}.$$

в) Если члены сходящегося ряда (1) непрерывно дифференцируемы при $a < x < b$ и ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на интервале (a, b), то

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \text{ при } x \in (a, b).$$

г) Если члены ряда (1) непрерывны и этот ряд сходится равномерно на конечном сегменте $[a, b]$, то

$$\int_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \qquad (4)$$

Вообще формула (4) верна, если $\int_a^b R_n(x)\, dx \to 0$ при $n \to \infty$, где $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. Это последнее условие годится также и для случая бесконечных пределов интеграции.

Определить области сходимости (абсолютной и условной) следующих функциональных рядов:

2716. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$. **2717.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

2718. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2n} x^n (1-x)^n$. **2721.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}$.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ $(q>0;\ 0<x<\pi)$.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (ряд Ламберта).

2725. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$. **2726.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

2727. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$.

2728. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. **2729.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{1}{1+a^{2n}x^2}$.

2730. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2-x)(2-x^{1/2})(2-x^{1/3})\ldots(2-x^{1/n})$ $(x>0)$.

2731. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$. **2732.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $(x>0;\ y>0)$.

2733. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}$ $(y\geqslant 0)$. **2734.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{|x|^{n^2}+|y|^{n^2}}$.

2735. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}$ $(x\geqslant 0)$. **2736.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n\left(x+\frac{y}{n}\right)$.

2737. Доказать, что если *ряд Лорана* $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ сходится при $x=x_1$ и при $x=x_2$ $(|x_1|<|x_2|)$, то этот ряд сходится также при $|x_1|<|x|<|x_2|$.

2738. Определить область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{n}{2^{|n|}}x^n$$

и найти его сумму.

2739. Определить области сходимости (абсолютной и условной) *рядов Ньютона*:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{[n]}}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\frac{x^{[n]}}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$,

где $x^{[n]}=x(x-1)\ldots[x-(n-1)]$.

2740. Доказать, что если *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится при $x = x_0$, то этот ряд сходится также при $x > x_0$.

2741. Доказать, что для равномерной сходимости на множестве X последовательности $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ к предельной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \left\{\sup_{x\in X} r_n(x)\right\} = 0,$$

где $r_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

2742. Что значит, что последовательность $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$: а) сходится на интервале $(x_0, +\infty)$; б) сходится равномерно на к а ж д о м конечном интервале $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; в) сходится равномерно на интервале $(x_0, +\infty)$?

2743. Для последовательности

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad (0 < x < 1)$$

определить наименьший номер члена $N = N(\varepsilon, x)$, начиная с которого отклонение членов последовательности в данной точке x от предельной функции не превышает 0,001, если $x = \frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$

Сходится ли эта последовательность равномерно на интервале (0, 1)?

2744. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$ следует взять, чтобы частная сумма $S_n(x)$ отличалась при $-\infty < x < +\infty$ от суммы ряда меньше чем на ε? Произвести численный расчет при: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

2745. При каких n будет обеспечено выполнение неравенства

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0{,}001 \quad (0 \leqslant x \leqslant 10)?$$

Исследовать последовательности на равномерную сходимость в указанных промежутках:

2746. $f_n(x)=x^n$; a) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; б) $0\leqslant x\leqslant 1$.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

2748. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

2749. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

2750. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$; $0\leqslant x\leqslant 1$.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; a) $0\leqslant x\leqslant 1-\varepsilon$;
б) $1-\varepsilon\leqslant x\leqslant 1+\varepsilon$; в) $1+\varepsilon\leqslant x<+\infty$, где $\varepsilon>0$.

2752. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$; a) $0\leqslant x\leqslant 1$;
б) $1<x<+\infty$.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

2755. a) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$;
б) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

2756. a) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$; б) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$; $0<x<1$.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$; a) $-l<x<l$, где l — любое положительное число; б) $-\infty<x<+\infty$.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; a) на конечном интервале (a, b); б) на интервале $(-\infty, +\infty)$.

2761. $f_n(x)=n(x^{1/n}-1)$; $1\leqslant x\leqslant a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0\leqslant x\leqslant 2$.

2763. $$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{n};\\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \text{если } \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n};\\ 0, & \text{если } x\geqslant\frac{2}{n}\end{cases}$$

на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

2764. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на сегменте $[a, b]$, и $f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}$ ($n=1, 2, \ldots$).

Доказать, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ при $n\to\infty$.

2765. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b) и

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

Доказать, что $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ на сегменте $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, где $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Пусть $f_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, где $f(x)$ — непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция. Доказать, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на любом конечном сегменте $[a, b]$.

Исследовать характер сходимости следующих рядов:

2767. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ а) на интервале $|x|<q$, где $q<1$; б) на интервале $|x|<1$.

2768. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$.

2768.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ на интервале $(0, +\infty)$.

2769. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ на сегменте $0\leqslant x\leqslant 1$.

2770. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right);\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$

2771. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)};\quad 0<x<+\infty.$

2772. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)};\quad 0<x<+\infty.$

2773. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)};$

а) $0\leqslant x\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$; б) $\varepsilon\leqslant x<+\infty$.

2774. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2},\quad -\infty<x<+\infty;$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n},\quad -2<x<+\infty;$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2},\quad 0\leqslant x<+\infty;$

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2},\quad |x|<+\infty;$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}),\quad \frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2;$

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!},\quad |x|<a,$ где a — произвольное положительное число;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $|x|<+\infty$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $|x|<+\infty$;

и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $|x|<+\infty$;

к) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$, $|x|<a$;

л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leqslant x < +\infty$;

м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$, $|x|<+\infty$.

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках следующие функциональные ряды:

2775. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ а) на сегменте $\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$; б) на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2776. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$; $0<x<+\infty$.

2777. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

Указание. Оценить остаток ряда.

2778. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2779. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$; $|x| \leqslant 10$.

2780. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $-\infty < x < +\infty$.

2781. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $0 \leqslant x < +\infty$.

2783. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

Рассмотреть пример

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\psi(x) \quad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

где $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально;} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально.} \end{cases}$

2784. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ также сходится равномерно на $[a, b]$.

2785. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[a, b]$, то обязательно ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ сходится равномерно на $[a, b]$?

Рассмотреть пример $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-x) x^n$, где $0 \leqslant x \leqslant 1$.

2786. Доказать, что абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2^{-(n+1)}; \\ \dfrac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{если } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{если } 2^{-n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$

нельзя мажорировать сходящимся числовым рядом с неотрицательными членами.

2787. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$, члены которого суть монотонные функции на сегменте $[a, b]$, сходится абсолютно в концевых точках этого сегмента, то данный ряд сходится абсолютно и равномерно на сегменте $[a, b]$.

2788. Доказать, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно на любом сегменте, целиком лежащем внутри его интервала сходимости.

2789. Пусть $a_n \to \infty$ так, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|$ сходится.

Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ сходится абсолютно и равномерно на любом ограниченном замкнутом множестве, не содержащем точек a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

2790. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ сходится равномерно при $x \geqslant 0$.

2791. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ сходится равномерно в области $x \geqslant 0$.

2792. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную в области $-\infty < x < +\infty$.

2793. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n - x)^2}$$

а) определена и непрерывна во всех точках, за исключением целочисленных: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; б) периодическая с периодом, равным 1.

2794. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)\, xe^{-(n-1)\, x}]$ сходится неравномерно на сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$, однако его сумма есть функция, непрерывная на этом сегменте.

2795. Определить области существования функций $f(x)$ и исследовать их на непрерывность, если

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$;

в) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$.

2796. Пусть r_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — рациональные числа сегмента $[0, 1]$. Показать, что функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

обладает следующими свойствами: 1) непрерывна; 2) дифференцируема в иррациональных точках и недифференцируема в рациональных.

2797. Доказать, что *дзета-функция Римана*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

2798. Доказать, что *тэта-функция*

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

2799. Определить область существования функции $f(x)$ и исследовать ее на дифференцируемость, если:

а) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$; б) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$.

2800. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

2801. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

сходится равномерно на интервале $(-\infty, +\infty)$, но

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. При каких значениях параметра α: а) последовательность

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \qquad (1)$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ сходится на сегменте $[0, 1]$; б) последовательность (1) сходится равномерно на $[0, 1]$; в) возможен предельный переход под знаком интеграла

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx?$$

2803. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится на сегменте $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\, dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

2804. Показать, что последовательность

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится неравномерно на сегменте $[0, 1]$, однако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

2805. Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^4}\, dx?$$

Найти:

2806. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{x^n}{x^n+1}$.

2807. $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n+1})$.

2808. $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$. 2808.1. $\lim\limits_{x\to \infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2809. Законно ли почленное дифференцирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}?$$

2810. Законно ли почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$$

на сегменте $[0, 1]$?

2811. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — бесконечно дифференцируемая функция и последовательность ее производных $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ сходится равномерно на каждом конечном интервале (a, b) к функции $\varphi(x)$. Доказать, что $\varphi(x) = Ce^x$, где C — постоянная величина. Рассмотреть пример $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, $n = 1, 2, \dots$

2811.1. Пусть функции $f_n(x)$, $n=1, 2, \dots,$ — определены и ограничены на $(-\infty, +\infty)$ и $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на каждом сегменте $[a, b]$. Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x} f(x) = \sup_{x}\varphi(x)?$$

§ 5. Степенные ряды

1°. Интервал сходимости. Для каждого степенного ряда

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

существует замкнутый *интервал сходимости*: $|x-a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится, а вне расходится. *Радиус* *сходимости* R определяется по *формуле Коши — Адамара*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Радиус сходимости R может быть вычислен также по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если этот предел существует.

2°. Теорема Абеля. Если степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < R)$ сходится в концевой точке $x = R$ интервала сходимости, то

$$S(R) = \lim_{x\to R-0} S(x).$$

3°. Ряд Тейлора. Аналитическая в точке a функция $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Остаточный член этого ряда

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

может быть представлен в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(*форма Лагранжа*), или в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!}(1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

(*форма Коши*).

Необходимо помнить следующие пять основиых разложений:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

$(-\infty < x < +\infty)$.

$$\text{IV. } (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (-1 < x < 1).$$
$$\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$
$$(-1 < x \leqslant 1).$$

4°. Действия со степенными рядами. Внутри общего интервала сходимости $|x-a| < R$ имеем:

а) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-a)^n;$$

б) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$;

в) $$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-a)^n;$$

г) $$\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n\right]dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

5°. Степенные ряды комплексной области. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a = \alpha + i\beta, \quad z = x + iy, \quad i^2 = -1.$$

Для каждого такого ряда имеется замкнутый *круг сходимости* $|z-a| \leqslant R$, внутри которого данный ряд сходится (и притом абсолютно), а вне расходится. *Радиус сходимости* R равен радиусу сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

в действительной области.

Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости следующих степенных рядов:

2812. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$. 2813. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n}(x+1)^n$.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} \cdot x^n \quad (0<\alpha<1)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

2817. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n \quad (a>1)$.

2818. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots (2n)}\right]^p \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2819. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right]^p x^n$.

2820. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n$.

2821. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right) x^n \quad (a>0,\ b>0)$.

2822. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n} \quad (a>0,\ b>0)$.

2823. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}} \quad (a>0)$.

2824. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

2825. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$.

2826. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n.$

2827. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) x^n.$

2828. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$

2829. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$ 2830. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

2831. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (*ряд Принсгейма*).

2831.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^{\nu(n)}}{n} (1-x)^n$, где $\nu(n)$ — число цифр числа n.

2831.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{\sin n}\right)^n.$

2832. Определить область сходимости *гипергеометрического ряда*

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots$$

Найти область сходимости обобщенных степенных рядов:

2833. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$ 2834. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}.$

2835. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$. 2836. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$.

2837. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \operatorname{tg}^n x$.

2838. Функцию

$$f(x) = x^3$$

разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x+1$.

2839. Функцию

$$f(x) = \frac{1}{a-x} \quad (a \neq 0)$$

разложить в степенной ряд: а) по степеням x; б) по степеням бинома $x-b$, где $b \neq a$; в) по степеням $\frac{1}{x}$. Указать соответствующие области сходимости.

2840. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить по целым неотрицательным степеням разности $x-1$ и выяснить интервал сходимости разложения.

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Написать разложения следующих функций по целым иеотрицательным степеням переменной x и найти соответствующие интервалы сходимости:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$. 2842. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

2843. $f(x) = \sin^2 x$. 2844. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

2845. $f(x) = \sin(\mu \arcsin x)$.

2846. $f(x) = \cos(\mu \arcsin x)$.

2847. Написать три члена разложения функции $f(x) = x^x$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

2848. Написать три члена разложения функции $f(x) = (1+x)^{1/x}$ $(x \neq 0)$ и $f(0) = e$ по целым неотрицательным степеням переменной x.

2849. Функции $\sin(x+h)$ и $\cos(x+h)$ разложить по целым неотрицательным степеням переменной h.

2850. Определить интервал сходимости разложения в степенной ряд функции:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

а) по степеням x; б) по степеням бинома $x-5$, не производя самого разложения.

2850.1. Можно ли утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \rightrightarrows \sin x \text{ на } (-\infty, +\infty)$$

при $N \to \infty$?

Пользуясь основными разложениями I—V, написать разложения в степенной ряд относительно x следующих функций:

2851. e^{-x^2}. **2852.** $\cos^2 x$. **2853.** $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$. **2855.** $\frac{1}{(1-x)^2}$. **2856.** $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **2858.** $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

Указание. Разложить данную дробь на простейшие.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$. **2860.** $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$. **2862.** $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2862.1. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.

Чему равно $f^{(1000)}(0)$?

2863. $\frac{x\cos\alpha - x^2}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$. **2864.** $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha + x^2}$.

2865. $\frac{x \operatorname{sh} a}{1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2}$. **2866.** $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$. **2868.** $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Указание. Применить формулы Эйлера.

Разложив предварительно производные, путем почленного интегрирования получить разложения в степенной ряд следующих функций:

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x) = \arcsin x$. **2871.** $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$.

2873. Применяя различные методы, найти разложения в степенной ряд следующих функций:

а) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

г) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;

д) $f(x) = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$;

е) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;

ж) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

з) $f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}$.

2874. Используя единственность разложения

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots,$$

найти производные n-го порядка от следующих функций:

а) $f(x) = e^{x^2}$; б) $f(x) = e^{a/x}$; в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

2875. Функцию $f(x) = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по целым положительным степеням бинома $x+1$.

2876. Функцию $f(x) = \frac{1}{1-x}$ разложить в степенной ряд по отрицательным степеням переменной x.

2877. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Функцию $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ разложить в степенной ряд по целым положительным степеням дроби $\frac{x}{1+x}$.

2879. Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Доказать непосредственно, что

$$f(x)\,f(y) = f(x+y).$$

2880. Пусть по определению

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказать, что

а) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; б) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. Написать несколько членов разложения в степенной ряд функции

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}$$

Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложения в степенные ряды следующих функций:

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$. **2883.** $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$. **2885.** $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

2886. $f(x)=e^x\cos x$. **2887.** $f(x)=e^x\sin x$.

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$. **2889.** $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Написать три члена разложения (отличные от нуля) в степенной ряд по положительным степеням переменной x следующих функций:

2891. $f(x)=\operatorname{tg} x$. **2892.** $f(x)=\operatorname{th} x$.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}$.