Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ИПММ

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №**3**

**тема "Решение интегралов обобщёнными квадратурными формами Ньютона-Котеса"**

**дисциплина "Численные методы"**

Выполнил студент гр. **3630102/80001** Д.В. Хрипунков

Преподаватель: С.Б. Добрецова

Санкт-Петербург

**2020**

1. Формулировка задачи

Для алгебраической функции необходимо найти определённый интеграл на заданном промежутке с использованием формулы Симпсона (парабол) с заданной точность

По результатам решения найти и проанализировать зависимости:

1. Погрешность , где - точное значение определённого интеграла, – значение интеграла, вычисленное по методу, а – точность вычисления
2. Теоретическую минимальную и максимальную погрешность для заданной точности
3. , где , то есть – число итераций для заданной точности

По зависимостям построить графики в MATLAB и установить закономерности

2. Постановка задачи

3. Алгоритм метода

Дано , , для вычисления определённого интеграла с заданной точностью используем следующий алгоритм:

1. Для всего отрезка строится равномерная сетка Вычисляем интеграл по всему отрезку по формуле
2. Делим отрезок на 2 равные части, для каждой из которых проводим пункт 1, и вычисляем интеграл
3. Обозначим число разбиений отрезка как , тогда интеграл из пункта 1 будет обозначаться как , а интеграл из пункта 2 , то есть соответственно
4. Если , то заканчиваем вычисления и -искомый интеграл, иначе возвращаемся к пункту 2, разбивая каждый отрезок ещё на 2 части и продолжаем вычисления

4. Анализ задачи

В качестве тестовой алгебраической функции используем . Функция непрерывна на всём промежутке и дифференцируема на нём.

Точное значение определённого интеграла при таких условиях будет равно

5. Тестовый пример

Возьмём . Проведём вычисление по методу Симпсона, разбив отрезок на 4 части:

1. Границы отрезков:
2. Для отрезка : . Тогда
3. Для отрезка : . Тогда
4. Для отрезка : . Тогда
5. Для отрезка : . Тогда
6. Сложим 4 интеграла и получим . Точное значение интеграла равно

Приведённый пример показал довольно высокую точность

6. Контрольные тесты

Весь анализирующий функционал реализован на языке c++ в Visual Studio 2019, а графическая интерпретация в пакете MATLAB.

Берём алгебраическую функцию , константы

Значение точности вычислений будет последовательно изменяться от с шагом в

Точное значение интеграла используем

Для вычисления теоретической погрешности используем , её минимум и максимум на промежутке соответственно

7. Модульная структура программы

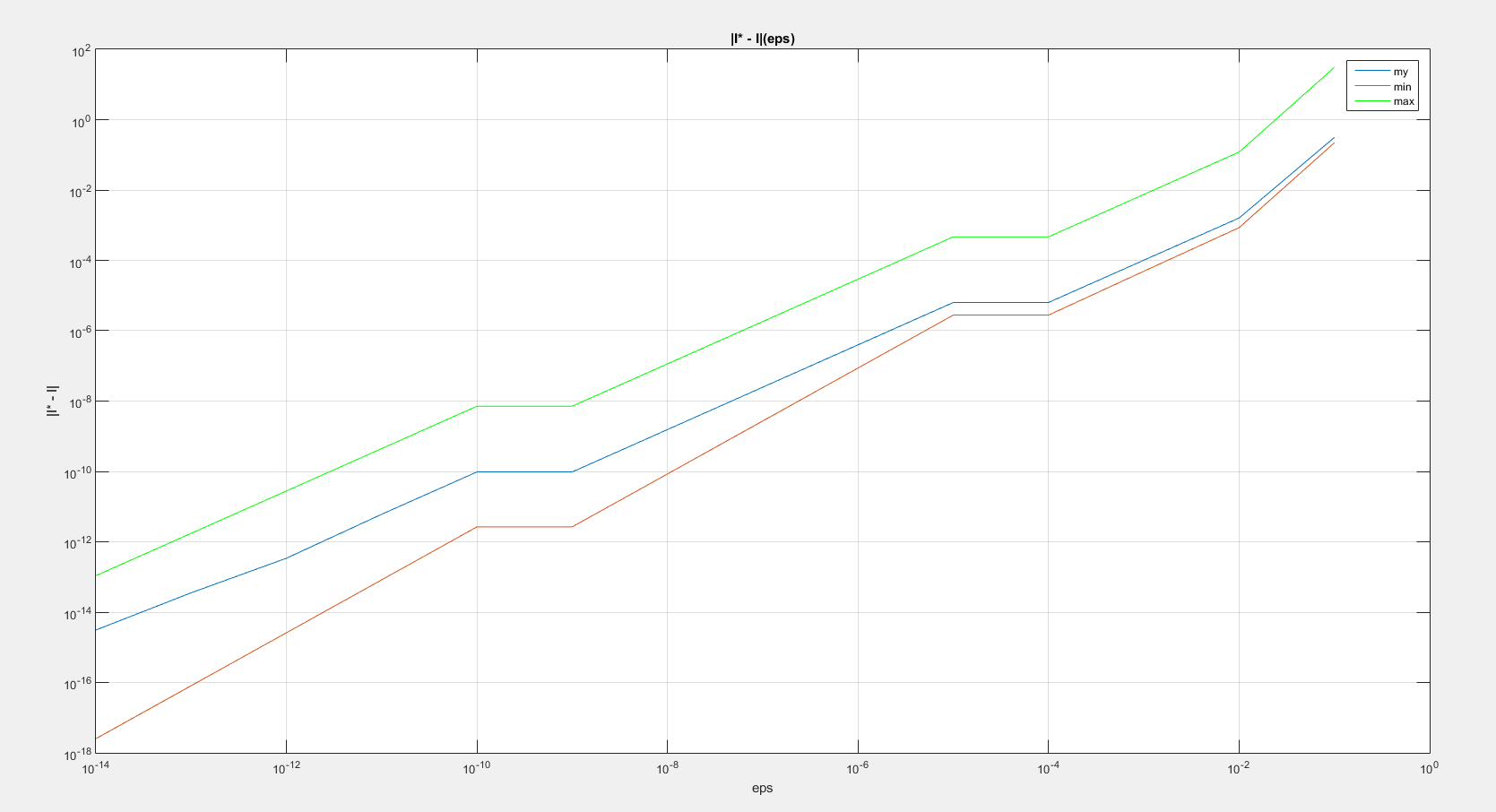
double CountFunc(double x) – функция вычисления

void FillXiVector(vector < double >\* xi, double h) – заполнение массива равномерной сетки с шагом h

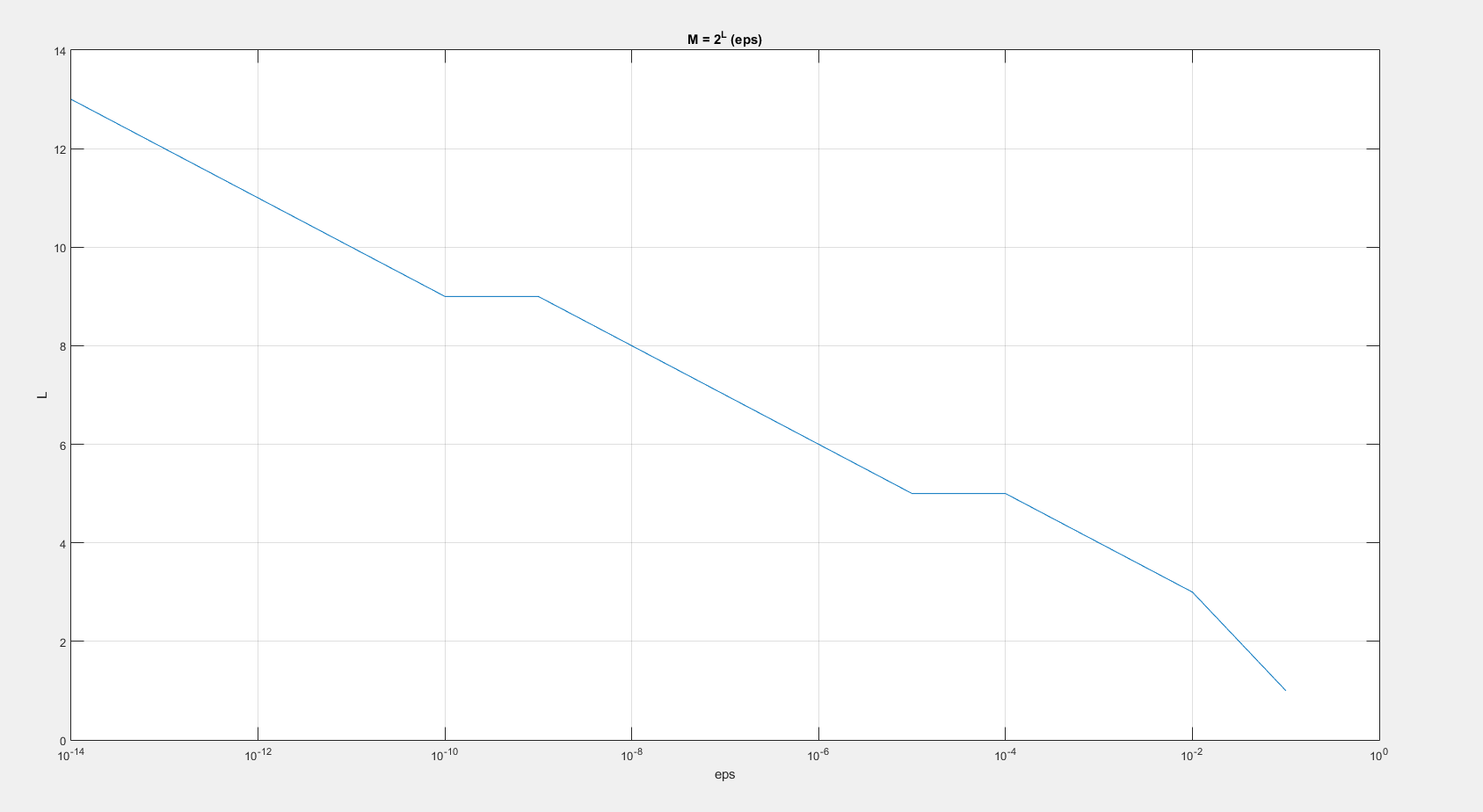
double CountIntegral(void) – функция вычисления интеграла на заданном отрезке, принимает в качестве глобальных параметров границы текущего отрезка, а также число N = 2, возвращает значение интеграла на отрезке

8. Численный анализ

Графики зависимостей, построенные в MATLAB:



Данный график показывает получившуюся ошибку вычислений (синяя линия), минимальную теоретическую (красная линия) и максимальную теоретическую (зелёная линия). Как видно из графика, полученная ошибка вычислений лежит в пределах допустимой и стабильно возрастает, а зависимость от близка к линейной



L(ε)

Данный график показывает, что число итераций практически линейно убывает при увеличении значения

9. Вывод

В целом, метод Симпсона показывает неплохие результаты как ошибки вычислений, так и числа итераций.

Значение близко к значению при всех исследуемых значениях, что делает метод достаточно точным. При этом соблюдаются рамки теоретической погрешности, что означает, что метод реализован правильно и исследование верно, а сам метод надёжен.

Число итераций невелико и даже в худшем случае равно , а при меньших точностях заметно снижается. В общем случае число примерно равно модулю порядка числа , что делает метод достаточно быстрым.