Vorlesung: Operations Research (t.OR)	
Übungsserie 1: Lineare Programme	**HS 2023**

Aufgabe 1. Ein Bauer will auf 15 Aren Rüben und Kohl anpflanzen. Die wesentlichen Daten (pro Are bebautes Gebiet) dazu sind:

- Rüben bzw. Kohl benötigen 2 bzw. 3 Arbeitstage. Es stehen maximal 33 Arbeitstage zur Verfügung.
- Rüben bzw. Kohl benötigen 1 bzw. 3 Sack Dünger. Es stehen maximal 27 Säcke zur Verfügung.
- Der Gewinn für Rüben bzw. Kohl beträgt 300 bzw. 400 CHF.

Finden Sie einen Anbauplan, der einen maximalen Gewinn erzielt, indem Sie ein passendes lineares Programm aufstellen und dieses mit GAMS loesen.

Aufgabe 2. Gegeben ist das folgende LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & & \\
\text{u. d. N.} & -x_1 & + & x_2 & & & = & 4 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & & & 2x_2 & + & 3x_3 & \geq & 12 \\
 & x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}$$

1. Schreiben Sie das LP in kanonischer Form als Maximierungsproblem.
2. Schreiben Sie das LP in Standardform als Maximierungsproblem.
3. Implementieren Sie die Modelle in 1. und 2. in GAMS.
4. Besitzt das LP eine optimale Lösung?

Aufgabe 3. Gehen Sie auf die Seite

http://www.neos-guide.org/content/optimization-taxonomy

und lesen Sie die Beschreibungen von **Nonlinear programming, Linear programming und Quadratic programming.**

Aufgabe 1. Eine Fabrik stellt Marmelade in zwei Produktionsstätten (in Zürich und Basel) her. Sie hat drei Hauptlieferanten für frische Früchte, die folgende Mengen pro Jahr liefern können:

	lieferbare Menge in Tonnen	Preis pro Tonne
Lieferant 1	200	11,- CHF
Lieferant 2	310	10,- CHF
Lieferant 3	420	9,- CHF

Die Transportkosten sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	Zürich	Basel
Lieferant 1	3,00 CHF	3,50 CHF
Lieferant 2	2,00 CHF	2,50 CHF
Lieferant 3	6,00 CHF	4,00 CHF

Jede der Produktionsstätten in Zürich und Basel hat gewisse jährliche Produktionskapazitäten und Herstellungskosten:

	Kapazität in Tonnen	Herstellungskosten pro Tonne
Zürich	460	26,00 CHF
Basel	560	21,00 CHF

Die Marmelade wird für 50,- CHF pro Tonne verkauft. Zu diesem Preis kann die Firma sämtliche hergestellte Marmelade absetzen. Welche Mengen von Früchten muss die Firma von ihren Zulieferern für jede Produktionsstätte abnehmen, so dass sie ihren Profit maximiert?

1. Identifizieren Sie die Entscheidungsvariablen.
2. Stellen Sie die Zielfunktion auf.
3. Stellen Sie ein geeignetes lineares Programm auf, das dieses Problem modelliert und erläutern Sie dieses. Es handelt sich dabei um ein klassisches Problem aus dem Kurs Operations Management Grundlagen. Wie heisst dieses Modell?
4. Lösen Sie das von Ihnen aufgestellte lineare Programm mit Hilfe des Solvers in Excel.
5. Lösen Sie das von Ihnen aufgestellte lineare Programm mit Hilfe von GAMS.

Aufgabe 2. Ein Frachtschiff hat drei Laderäume, jeweils einen im Bug, in der Mitte und im Heck. Diese Laderäume können die folgenden Frachten halten:

Laderaum	Maximales Gewicht in Tonnen	Verfügbares Volumen in m3
Bug	10	6800
Mitte	16	8700
Heck	8	5300

Damit das Schiff stabil schwimmt, müssen die Gewichte in den drei Laderäumen möglichst gemäss den maximalen Zuladungen proportional verteilt werden.

Es stehen folgende vier Frachtaufträge zur Verschiffung an:

Frachtauftrag	Gewicht in Tonnen	Volumen pro Tonne in m^3	Profit pro Tonne
Auftrag 1	18	480	310,- CHF
Auftrag 2	15	650	380,- CHF
Auftrag 3	23	580	350,- CHF
Auftrag 4	12	390	285,- CHF

Die Frachtaufträge können beliebig in Teilaufträge aufgeteilt werden. Welche Frachtaufträge sollen in welchen Gewichten auf das Frachtschiff geladen werden und wie müssen diese in den Frachträumen aufgeteilt werden, damit der Profit maximiert wird.

1. Identifizieren Sie die Entscheidungsvariablen.
2. Stellen Sie die Zielfunktion auf.
3. Stellen Sie ein geeignetes lineares Programm auf, das dieses Problem modelliert und erläutern Sie dieses.
4. Lösen Sie das von Ihnen aufgestellte lineare Programm mit Hilfe von GAMS.

Aufgabe 3. Es sei das lineare Programm

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & \leq & 14 \\ 3x & - & y & \geq & 0 \\ x & - & y & \leq & 2 \\ & & x, y & \geq & 0 \end{array}$$

mit der Zielfunktion

$$f(x, y) = 3x + 4y$$

gegeben.

1. Zeichnen Sie die Geraden, die das zulässige Gebiet definieren, in ein geeignetes Diagramm ein.
2. Schraffieren Sie das zulässige Gebiet P im Diagramm.
3. Zeichnen Sie die Niveaulinien (d.h. $f(x, y)$ konstant) der Zielfunktion ein.
4. Zeichnen Sie den Punkt oder die Punkte ein, an denen die Zielfunktion im zulässigen Gebiet minimal wird.
5. Zeichnen Sie den Punkt oder die Punkte ein, an denen die Zielfunktion im zulässigen Gebiet maximal wird.

Aufgabe 4. In einer Ölraffinerie werden in einem Produktionsschritt für jeden Liter Heizöl mindestens 2 Liter Superbenzin hergestellt. Dem geschätzten Tages-Bedarf von 5 Millionen Liter Heizöl während des Winters stehen eine maximale Nachfrage von 10,5 Millionen Liter Superbenzin gegenüber. Der Liter Heizöl wird während des Winters für 1,20 CHF verkauft. Der Preis für Superbenzin in der Winterperiode liegt bei durchschnittlich 1,78 CHF. Wieviel Heizöl und wieviel Superbenzin sollen in einer Wintersaison hergestellt werden, damit der Umsatz maximal wird?

1. Stellen Sie ein geeignetes lineares Programm auf, das dieses Problem modelliert.
2. Zeichnen Sie die Geraden in ein geeignetes Diagramm ein.
3. Schraffieren Sie das zulässige Gebiet P im Diagramm.
4. Zeichnen Sie die Niveaulinien der Zielfunktion ein.
5. Zeichnen Sie den Punkt ein, an dem die Zielfunktion in P maximal wird.

Vorlesung: Operations Research (t.OR)	
Übungsserie 3: Lineare Programme	**HS 2023**

Aufgabe 1. Lesen Sie die besprochenen Seiten 45-51, 54-56, aus der Datei *Theorie Simplexmethode I* nochmals sorgfältig durch (ohne Beweise).

Aufgabe 2. Betrachten Sie nun das lineare Programm aus Aufgabe 3, Uebungsserie 2.

a) Bringen Sie das lineare Programm in Standardform für Minimierungsprobleme.

b) Wählen Sie im linearen Programm aus a) drei verschiedene zulässige Basen B (gemaess Definition auf Seite 46) aus.

c) Betrachten Sie die Skizze des zulässigen Bereichs aus Uebungsserie 1 und bringen Sie die Basen B aus b) in Verbindung mit den Eckpunkten des zulässigen Bereichs.

d) Wählen Sie eine Basis aus b) aus und schreiben Sie das lineare Programm aus a) in Form (2) resp. (3) von Seite 46.

e) Entscheiden Sie, ob das Simplexkriterium aus dem Satz auf Seite 47 für Ihre Basis aus d) erfüllt ist.

f) Bestimmen Sie fuer die zulaessige Basis aus Teilaufgabe (d), die jeweilige, maximale Vergroesserung einer Nichtbasisvariablen aus y, so dass die Basisvariablen $\tilde{x}$ noch groesser gleich 0 bleiben. Welche der Basisvariablen aus $\tilde{x}$ wird zuerst 0?

Repetition Lineare Algebra

Aufgabe 3. Ueberpruefen Sie die folgenden Mengen auf lineare Unabhaengigkeit

(a) $\{(2,0,2,1)^T, (-1,1,3,1)^T, (2,1,0,3)^T\}$

(b) $\{(2,1,2)^T, (-1,-1,3)^T, (0,-1,8)^T\}$

Aufgabe 4. Welche der folgenden Matrizen ist invertierbar? Berechnen Sie gegebenfalls die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5. Loesen Sie mit Hilfe des Gaussverfahrens das folgende lineare Gleichungssystem (vgl. Uebung 1, Aufgabe 3 resp. Notizen zum Simplexverfahrens) nach den Variablen

(a) x_2, x_3, x_4
(b) x_2, x_4, x_5

auf.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & & & = & 33 \\ x_1 & + & x_2 & + & & & x_4 & & & = & 15 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & & & & & x_5 & = & 27 \end{array}$$

Aufgabe 1. Lösen Sie Aufgabe 3 aus Uebung 2 nochmals mit der Simplex-Methode. Veranschaulichen Sie die einzelnen Simplexschritte in dem Sie die berechneten Eckpunkte in der zulässigen Menge einzeichnen.

Aufgabe 2. Finden Sie mit Hilfe der Simplex-Methode alle optimalen Lösungen von folgenden linearem Problem:

$$\begin{array}{lrcl} \max & 2x_1 + x_2 + x_3 & & \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 5 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ueberprüfen Sie Ihre Lösung mit Hilfe von GAMS.

Aufgabe 3. Gegeben ist das folgende LP.

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Lösen Sie das LP mit dem Simplexalgorithmus.

(b) Suchen Sie eine graphische Lösung und vergleichen Sie ihr Resultat mit dem von (a).

Aufgabe 1. (Parametrische Aufgabe) Suchen Sie das Maximum der Funktion

$$f(x, y) = 400x + 300y$$

unter den Restriktionen:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\leq 12 \\ 3x + 3y &\leq 10 \\ 4x + 2y &\leq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) mit dem Simplex-Algorithmus. Verifizieren Sie Ihre Loesung mit GAMS.

b) Im nächsten Jahr ist der Gewinn für y nicht mehr 300, sondern 300 + q. Wie gross darf q sein, damit das Resultat von a) immer noch optimal ist?

c) Eine neue Variable z wird dazugefügt:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &\leq 12 \\ 3x + 3y + 3z &\leq 10 \\ 4x + 2y + 4z &\leq 8 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Die neue Zielfunktion heisst

$$f(x, y, z) = 400x + 300y + 500z$$

Ist die optimale Lösung aus a) immer noch optimal (die Variable z soll auf 0 gesetzt werden)? Versuchen Sie dazu das Simplextableau zur optimalen Basislösung aus a) für das Problem aus (c) direkt zu erzeugen.

Aufgabe 2. (2-Phasenmethode) Lösen Sie das folgende LP per Hand mit der Simplexmethode.

$$\begin{array}{lrcl} \max & -2x_1 - x_2 & & \\ \text{bzgl.} & x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 - x_2 & \geq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 3. (2-Phasenmethode) Betrachten Sie ein LP in der Form

$$\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Lösen Sie das LP mit Hilfe der Zwei-Phasen-Methode unter Benutzung der Bland-Regel:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 27 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1. (Dualität) Gegeben ist das folgende lineare Programm

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 15 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & \geq & 5 \\
 & x_1 & & & & & \geq & 2
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

1. Formulieren Sie das zu diesem LP gehörige duale Programm.
2. Lösen Sie sowohl das primale LP und das duale LP in GAMS oder Excel. Was stellen Sie fest?
3. Betrachten Sie die Lösungen des primalen und dualen LP's. Ueberpruefen Sie die Komplementaritätsbedingungen aus der Dualitätstheorie fuer diese Aufgabe.

Aufgabe 2. Aus zwei Nahrungsmittelsorten soll ein Menü mit Mindestvitaminmengen gemischt werden. Die enthaltenen Vitaminmengen (in mg) pro Sorteneinheit sind in der Tabelle dargestellt:

	Sorte 1	Sorte 2
Vitamin A	1	2
Vitamin B	2	1
Vitamin C	2	4

Im Menü sollen mindestens 40 mg von Vitamin A, 100 mg von Vitamin B und 130 mg von Vitamin C enthalten sein. Die Kosten für eine Einheit von Sorte 1 betragen 10 Franken, eine Einheit von Sorte 2 kostet 8 Franken. Gesucht ist die kostengünstigste Mischung.

(a) Formulieren Sie das LP und lösen Sie es mit GAMS oder Excel.

(b) Formulieren Sie das duale LP zum LP aus Aufgabe (a) und lösen Sie es mit der Simplexmethode von Hand.

(c) Welche Beziehungen bestehen zwischen den beiden Optimalwerten aus (a) und (b)?

(d) Nehmen Sie nun an, dass mindestens 110 mg von Vitamin B im Menü enthalten sein sollen. Benutzen Sie die schwache Dualitätseigenschaft um abzuschätzen wieviel sich das kostengünstigste Menü verteuern wird (das wäre also der Schattenpreis von Vitamin B).

Aufgabe 1. Gegeben ist das folgende ganzzahlige, lineare Optimierungsproblem.

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_1 + 2x_2 & & \\ \text{bzgl.} & 2x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \\ & x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

Lösen Sie diese Aufgabe mit dem Branch-and-Bound-Verfahren aus der Vorlesung, indem Sie die folgenden Teilaufgaben bearbeiten.
a) Lösen Sie das zugehörige relaxierte Problem graphisch.
b) Führen Sie so viele Verzweigungsschritte wie nötig durch und lösen Sie die entstehenden Teilprobleme wiederum graphisch. Verwenden Sie diesselbe Verzweigungsregel wie in der Vorlesung.
c) Zeichnen Sie den zur Aufgabe vollständigen Entscheidungsbaum.
d) Welches ist nun die optimale Lösung des ganzzahligen Problems?

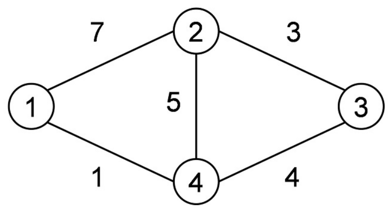
Aufgabe 2. Ein Wanderer hat 5 Gegenstände mit den Gewichten 5, 6, 12, 10, 12 kg, die er auf eine Wanderung mitnehmen möchte. Den Nutzen der Gegenstände bewertet er mit 10, 9, 12, 5, 9. Er kann maximal 25 kg transportieren. Welche Gegenstände soll er mitnehmen, um einen möglichst grossen Nutzen zu erzielen?

Formulieren Sie das zugehörige binäre, ganzzahlige Optimierungsproblem (dies ist ein Rucksackproblem) und lösen Sie das Problem mit Branch and Bound.
Für eine Verzweigung können Sie jeweils eine Variable auf 0 oder 1 setzen. Ueberlegen sich zuerst, dass die jeweilige lineare Relaxierung sich durch einfache Sortierung nach dem Nutzen/Gewicht Quotienten ermitteln lässt.

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

Vorlesung: Operations Research (t.OR)	
Übungsserie 8: Optimale Wege	**HS 2023**

Aufgabe 1
Gegeben ist der folgende ungerichtete Graph:



(a) Bestimmen Sie kürzeste Wege von Knoten 1 zu allen anderen Knoten mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra.

- Notieren Sie im Detail die Schritte des Algorithmus.
- Geben Sie für jeden Knoten sowohl die Länge eines kürzesten Weges als auch einen kürzesten Weg an.

(b) Nehmen Sie nun an, dass die Kante $(2,3)$ das negative Gewicht $d_{23} = -3$ hat.

- Führen Sie den Algorithmus von Dijkstra mit Startknoten 1 nochmals aus und erklären Sie am Beispiel, weshalb der Algorithmus nicht korrekt ist, wenn negative Bogengewichte vorhanden sind.
- Wie lauten in diesem Fall die korrekten kürzesten Wege von Knoten 1 aus?

Aufgabe 2
Geben ist ein gerichteter Graph mit folgenden Bogengewichten:

d_{ij}	1	2	3	4	5	6
1		2			9	
2	2					6
3	15	2		3	3	9
4						1
5			10	9		
6				4	3	

(a) Zeichnen Sie den Graphen.

(b) Berechnen Sie die Länge eines kürzesten Weges von Knoten 5 zu allen anderen Knoten mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra.

- Notieren Sie dabei (sowohl bei der Initialisierung als auch bei jeder Iteration) für jeden Knoten $v \in V$, bei welchem ein Update erfolgt, den neuen Wert von ℓ_v und $pred_v$.
- Beispiel für die Darstellung zu einem Knoten v:

ℓ_v	∞	7	5	...		
$pred_v$	1	2	4			

Aufgabe 3
In der Graphentheorie gilt der folgende elementare Zusammenhang, auch "Handshaking Lemma" oder "Erster Satz der Graphentheorie" genannt, welcher von Leonhard Euler im Jahre 1736 bewiesen wurde. Beweisen Sie diesen Satz.

Satz: *In einem ungerichteten, schlichten Graphen $G = (V, E)$ entspricht die Summe aller Knotengrade der doppelten Anzahl der Kanten, d.h.*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|.$$

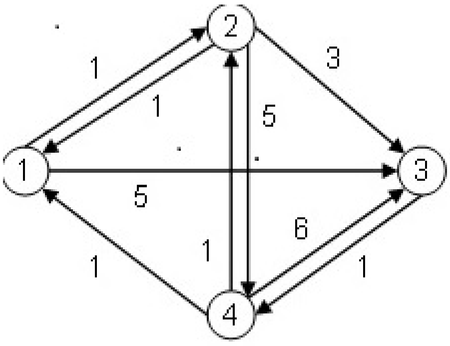
Aufgabe 4
Beweisen Sie auch den folgenden Satz, welcher als Korollar zum "Handshaking Lemma" gesehen werden kann und ebenfalls von Leonhard Euler 1736 bewiesen wurde.

Satz: *In einem ungerichteten, schlichten Graphen $G = (V, E)$ ist die Anzahl Knoten mit ungeradem Grad gerade. Mit der Bezeichnung $V^{odd} \subseteq V$ für die Knoten mit ungeradem Grad gilt also:*

$$\sum_{v \in V^{odd}} deg(v) \text{ ist eine gerade Zahl.}$$

	Vorlesung: Operations Research (t.OR)	
	Übungsserie 9: Optimale Wege	**HS 2023**

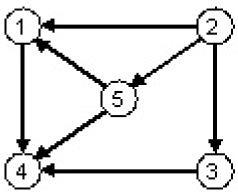
Aufgabe 1
Gegeben ist der folgende gerichtete Graph:



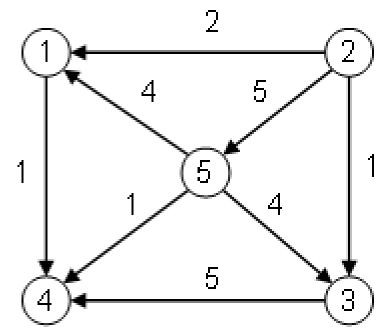
Berechnen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Floyd-Warshall kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren.

- Notieren Sie für jede Iteration $k = 0, ..., 4$ die Matrix $[\ell_{ij}^k, v_{ij}^k]$, sowie die für die Bestimmung der Matrix notwendigen Berechnungen.
- Geben Sie für jedes Knotenpaar sowohl die Länge eines kürzesten Weges als auch einen kürzesten Weg an.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie in folgendem Graphen alle möglichen topologischen Sortierungen.

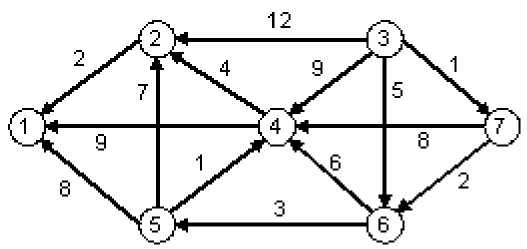


Aufgabe 3
Bestimmen Sie im folgenden gerichteten, azyklischen Graphen längste Wege von Knoten 2 zu allen anderen Knoten.



- Notieren Sie im Detail die Schritte des Algorithmus.
- Geben Sie für jeden Knoten sowohl die Länge eines längsten Weges als auch einen längsten Weg an.

Aufgabe 4
Bestimmen Sie im folgenden gerichteten, azyklischen Graphen kürzeste Wege von Knoten 3 zu allen anderen Knoten.



Geben Sie für jeden Knoten v folgende Informationen an:

$$n : \ell_v \ (pred_v), \ \min\{...\}$$

Dabei bezeichnet:

- n die Nummer der Iteration, bei der v berechnet wird,
- ℓ_v die Länge eines kürzesten Weges von 3 nach v,
- $pred_v$ den Vorgänger von v auf einem kürzesten Weg von 3 nach v,
- $\min\{...\}$ gibt an, wie die Weglänge ℓ_v berechnet wurde als Minimum der entsprechenden Werte über alle Vorgänger von v.

Aufgabe 5
Betrachtet wird der gerichtete, azyklische Graph von Aufgabe 4.

(a) Notieren Sie explizit (d.h. ohne Summenzeichen und Vektoren) die ILP-Formulierung für das Problem des kürzesten Weges von Knoten 3 zu Knoten 1.

(b) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass der Inzidenzvektor, welcher zum Weg $3 \to 4 \to 2 \to 1$ gehört, eine zulässige Lösung des unter (a) formulierten ILP ist.

(c) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass der Inzidenzvektor, welcher zur Bogenmenge $S = \{(2,1),(4,2),(5,2),(6,5)\}$ gehört, keine zulässige Lösung des ILP ist.

Vorlesung: Operations Research (t.OR)

Übungsserie 10: TSP | **HS 2023**

Aufgabe 1
Lösen Sie das untenstehende, symmetrische TSP mit Hilfe der folgenden vier konstruktiven Heuristiken:

(a) ”Nearest Neighbor”,

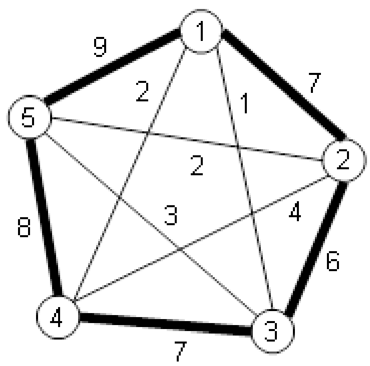
(b) ”Nearest Insertion”,

(c) ”Farthest Insertion”,

(d) ”Cheapest Insertion”.

d_{ij}	1	2	3	4	5
1	–	1	9	8	5
2		–	6	4	2
3			–	7	9
4				–	5
5					–

Aufgabe 2
Verbessern Sie die folgende TSP–Tour durch wiederholte Durchführung von 2–opt–Austauschen solange, bis keine weitere 2–opt–Verbesserung mehr gefunden werden kann, d.h. bis eine (bzgl. der 2–opt–Nachbarschaft) lokal optimale Tour vorliegt.



Aufgabe 3
Bei der Fabrikation unterschiedlicher Produkte auf einer Anlage ist es häufig notwendig, vor der Bearbeitung eines Produkts gewisse Vorbereitungsarbeiten durchzuführen (Installation von bestimmten Werkzeugen, Adjustierung, Reinigung, ...). Der Zeitbedarf für diese Vorbereitungsarbeiten (”Rüstzeiten”, ”setup times”) ist im allgemeinen abhängig vom zu

bearbeitenden Produkt, kann aber auch abhängen von dem Produkt, welches unmittelbar vorher auf der Anlage produziert wurde ("reihenfolgeabhängige Rüstzeiten", "sequence-dependent setup times").

Ein Beispiel von reihenfolgeabhängigen Rüstzeiten findet man bei der Herstellung von Farben auf der Basis von Pigmenten, welche auf einer (kontinuierlich arbeitenden) Anlage zusammengemischt werden. Der Produktionsleiter hat im allgemeinen sorgfältig darauf zu achten, in welcher Reihenfolge die Farben auf der Anlage fabriziert werden, denn der Übergang von einer dunklen zu einer hellen Farbe benötigt typischerweise viel intensivere (und längere) Reinigungsarbeiten als der umgekehrte Fall. Um die Kapazität seiner Anlage möglichst gut auszunützen, wird der Produktionsleiter somit versuchen, die Fabrikationsreihenfolge so festzulegen, dass die Summe notwendiger Rüstzeiten minimal ist.

Hier werden nun vier Aufträge (Farben) betrachtet mit den folgenden (reihenfolgeabhängigen) Rüstzeiten. (Der Eintrag in der Zelle (2,3) bedeutet beispielsweise, dass die Rüstzeit für Auftrag 3 vier Zeiteinheiten beträgt, wenn Auftrag 2 unmittelbar vor 3 bearbeitet wird.)

Aufträge	1	2	3	4
1	–	3	4	5
2	3	–	4	6
3	1	6	–	2
4	5	4	∞	–

(a) Auf welchen (in der Vorlesung besprochenen) Problemtyp kann dieses Reihenfolgeproblem zurückgeführt werden?

(b) Formulieren Sie das Problem und lösen Sie es mit der "Nearest Neighbor" Heuristik.

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Vorlesung: Operations Research (t.OR)

Übungsserie 11: TSP, Optimale Bäume | **HS 2023**

Aufgabe 1

Betrachtet wird ein symmetrisches TSP, welches durch folgende Gewichtsmatrix definiert ist:

d_{ij}	1	2	3	4	5,	6
1	–	72	47	7	14	58
2		–	17	59	26	69
3			–	51	66	45
4				–	37	46
5					–	39
6						–

Geben Sie eine ILP-Formulierung für dieses TSP. Schreiben Sie dabei alle Restriktionen *explizit* (d.h. ohne Verwendung des Summenzeichens) auf.

Beachten Sie, dass die Teiltouren-Eliminationsbedingungen (Subtour Constraints) nur für Knotenteilmengen S formuliert werden müssen, für welche gilt:

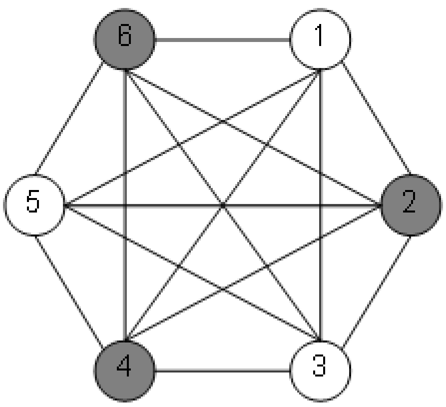
$$3 \leq |S| \leq \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor.$$

Hierbei bezeichnet V die Menge aller Knoten und $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl, die $\leq x$ ist.

Erklären Sie, weshalb dies gilt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie im untenstehenden Graphen mit Kantengewichten d_{ij} einen Steiner-Baum minimalen Gewichts. Die Menge der obligatorischen Knoten ist gegeben durch $N = \{1, 3, 5\}$.



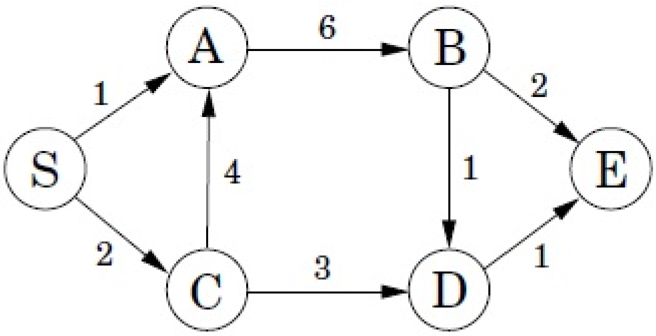
d_{ij}	1	2	3	4	5,	6
1	–	9	6	2	5	7
2		–	4	1	3	4
3			–	7	8	9
4				–	3	4
5					–	4
6						–

Probe mündliche Prüfung
Schriftliche Aufgabe

Lösen Sie die untenstehende Aufgabe und bereiten Sie sich darauf vor, die Aufgabe zu präsentieren und zu erklären. Dokumentieren Sie alle nötigen Rechenschritte.

Sie dürfen dazu den Beamer oder den Projektor für Handnotizen benutzen.

1. Aufgabe Wege



Betrachten Sie den gegebenen Graphen.

a) Sie suchen den kürzesten Weg von S zu allen anderen Knoten. Welche Algorithmen aus der Vorlesung können Sie dazu anwenden? Welchen würden Sie anwenden?

b) Bestimmen Sie falls möglich die topologische Sortierung des Graphen.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus für azyklische Wege den kürzesten Weg von S zu allen anderen Knoten. Dokumentieren Sie alle nötigen Rechenschritte.

d) Verändern Sie den gegebenen Graphen so, dass der Algorithmus von Dijkstra den kürzesten Weg von S zu einem Knoten ihrer Wahl falsch berechnet.