习题五

【1】选择题

（1）设三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是$-2,-1,2$，矩阵$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}$，则$|\boldsymbol{B}|=$

（A）-4；（B）-16；（C）-36；（D）-72.

（2）设$\lambda=2$是可逆矩阵$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则矩阵$\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$有一个特征值等于

（A）$\frac{4}{3}$；（B）$\frac{3}{4}$；（C）$\frac{1}{2}$；（D）$\frac{1}{4}$.

（3）设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{A}$的全部特征值为

（A）$3,3,-3$；（B）$1,1,7$；（C）$3,1,-1$；（D）$3,1,7$.

（4）设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵，且已知$|3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=0,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0,|3\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=0$,则$|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{E}|=$

（A）$\frac{5}{3}$；（B）$\frac{2}{3}$；（C）$-\frac{2}{3}$；（D）$-\frac{5}{3}$.

（5）设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆，$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{A}$的属于特征值λ的特征向量，则下列论述中不正确的是：

（A）$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$-2\boldsymbol{A}$的属于特征值-2λ的特征向量.

（B）$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right)^{-1}$的属于特征值$\frac{2}{\lambda^2}$的特征向量.

（C）$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\boldsymbol{A}^*$的属于特征值$\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$的特征向量.

（D）$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\boldsymbol{A}^T$的属于特征值λ的特征向量.

（6）设矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&2\end{bmatrix}$$

矩阵$\boldsymbol{A}$~$\boldsymbol{B}$，则$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=$

（A）7；　（B）6；　（C）5；　（D）4.

【解答】（1）考虑到特征值性质$|\boldsymbol{B}|=\prod_{j=1}^{n}\lambda_j$，所以我们仅需要求出$\boldsymbol{B}$的所有特征值即可.设$\lambda$是$\boldsymbol{A}$的一个特征值，则$\boldsymbol{B}$有特征值为$\lambda^3-3\lambda^2+2$，则代入$\boldsymbol{A}$的特征值可以分别得到：

$$\mu_1=(-2)^3-3(-2)^2+2=-18$$
$$\mu_2=(-1)^3-3(-1)^2+2=-2$$
$$\mu_3=2^3-3\cdot2^2+2=-2$$

故$\det(\boldsymbol{B})=-18\cdot(-2)\cdot2=72-72$.选 D.

（2）类似于上一题，可以知道$\frac{1}{3}\boldsymbol{A}^2$有一个特征值为$\frac{1}{3}\cdot2^2=\frac{4}{3}$，根据可逆矩阵特征值的性质，有$\lambda'=\frac{3}{4}$.选 B.

（3）从定义入手，去解方程$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，则我们有

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&-2\\2&-2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3-8-8-12(1-\lambda)=0$$

容易计算得到$\lambda=3,3,-3$.选 A.

（4）注意到所给条件都是特征值形式，我们容易计算得到$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$-\frac{2}{3},1,\frac{3}{2}$，则$\det(\boldsymbol{A})=1\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-1$.从而注意到$\boldsymbol{A}^*$的特征值为

$$\mu_1=\frac{\det(\boldsymbol{A})}{\lambda_1}=\frac{3}{2},\mu_2=\frac{\det(\boldsymbol{A})}{\lambda_2}=-1,\mu_3=\frac{\det(\boldsymbol{A})}{\lambda_3}=-\frac{2}{3}$$

从而$\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{E}$的特征值为$\dfrac{3}{2}-1=\dfrac{1}{2},-1-1=-2,-\dfrac{2}{3}-1=-\dfrac{5}{3}$，则

$$|\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{E}|=\frac{5}{3}$$

选 A.

（5）根据课本前面 Page183 的性质，容易知道 ABC 均是对的，所以此题选 D.

（6）根据相似矩阵的性质，我们发现存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\begin{aligned}&r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\\=&r(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}-3\boldsymbol{E})\\=&r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P})+r(\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{P})\\=&r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{E})\end{aligned}$$

其中，我们有

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&2\\0&0&2&1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-4&2\\0&0&2&-1\end{bmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故容易知道$r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{E})=4+2=6$.选 B.

从该题我们可以得到结论如下：若矩阵$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则有$r(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{E})$.

【2】求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$　　（2）$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&6\end{bmatrix}$

（3）$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$　　（4）$\begin{bmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{bmatrix}$

【解答】（1）

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3+\lambda)(2+\lambda)+3-2(3+\lambda)-5(2+\lambda) = -(\lambda+1)^3$$

则容易得到特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$

故我们有$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，解得基础解系为$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，即所有特征向量为$k[1\ \ 1\ \ -1]^T$.

（2）

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)^2(6-\lambda)+18+18-9(1-\lambda)-9(1-\lambda)-4(6-\lambda)$$
$$=-\lambda(\lambda-9)(\lambda+1)=0$$

从而特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=9,\lambda_3=-1$.

特征值为0时，我们有

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,化简系数矩阵有$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,解得基础解系为

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，即所有特征向量为$k[1\ \ 1\ \ -1]^T$.

特征值为9时，我们有

$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,化简系数矩阵有$\begin{bmatrix} -8 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,解得基础解系为$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，即所有特征向量为$k[1\ \ 1\ \ 2]^T$.

特征值为-1时，我们有

$\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$,化简系数矩阵有$\begin{bmatrix}2&2&3\\2&2&3\\3&3&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,解得基础解系为

$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，即所有特征向量为$k[1\quad -1\quad 0]^T$.

（3）

$\begin{vmatrix}-\lambda&0&0&1\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\1&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-1=0,\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，其中未考虑复数特征值的情况.则我们有

特征值为1时，$\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，化简系数矩阵有

$\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&1&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，得到基础解系为$\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$,从而特征向量为

$[l\quad k\quad k\quad l]^T,k,l\in\mathbb{R}$.

特征值为-1时，$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，化简系数矩阵有

$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，得到基础解系为$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$,从而特征向量为

$[-l\quad -k\quad k\quad l]^T,k,l\in\mathbb{R}$.

（4）

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2+8-8-4(2-\lambda)+4\lambda+4(2-\lambda) = -\lambda^3+4\lambda^2$$

从而容易计算得到特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$.下面来计算特征向量：

当特征值为0时，$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，化简系数矩阵有

$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，可以得到基础解系为$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，即所有特征向量为

$k[2 \quad -1 \quad 1]^T$.

当特征值为4时，$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，化简系数矩阵有

$\begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，可以得到基础解系为$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，即所有特征向量为

$k[0 \quad 1 \quad -1]^T$.

【3】设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，证明$\boldsymbol{A}^T$和$\boldsymbol{A}$的特征值相同.

【解答】根据定义，知$\boldsymbol{A}$的特征值为特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$的根，同样$\boldsymbol{A}^T$的特征值是特征多项式$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^T|$的根.我们根据行列式$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{M}^T|$的性质，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})^T|=|\boldsymbol{A}^T-\lambda\boldsymbol{E}|$$

从而两者的根也相同，即$\boldsymbol{A}^T$和$\boldsymbol{A}$的特征值相同.

【4】设$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明$\boldsymbol{A}$的特征值只能取1或2.

【解答】对上述式子进行因式分解，有

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$$

对等式取行列式，有$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\,|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$，故$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$或者$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=0$,从

而特征值为1或者2.下面证明除了1,2之外没有其他的特征值.

$$(\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E})[\boldsymbol{A}-(3-k)\boldsymbol{E}]=(-k^2+3k-2)\boldsymbol{E}$$

可以发现$k\neq 1,k\neq 2$时$-k^2+3k-2\neq 0$，从而k不是$\boldsymbol{A}$的特征值.

【5】设$\lambda\neq 0$是m阶矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$的特征值，证明：$\lambda$也是$n$阶矩阵$\boldsymbol{BA}$的特征值.

【解答】$\lambda\neq 0$是m阶矩阵$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times m}$的特征值，则

$$\boldsymbol{AB\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$$

在矩阵两边乘上$\boldsymbol{B}$我们有$(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B\alpha}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB\alpha})=\boldsymbol{B}\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\boldsymbol{B\alpha})$.

若$\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则由特征值定义知$\lambda$是$\boldsymbol{BA}$的特征值.下面证明$\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.事实上，由$\lambda\neq 0,\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则有$\lambda\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.再根据$\boldsymbol{AB\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$知$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})\neq\boldsymbol{0}$，因此$\boldsymbol{B\alpha}\neq\boldsymbol{0}$.

【6】已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,3$，求$|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$.

【解答】根据矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,3$，可以知道矩阵$\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\begin{gathered}\lambda_1=1-5+7=3\\ \lambda_2=2^3-5\cdot 2^2+7\cdot 2=2\\ \lambda_3=3^3-5\cdot 3^2+7\cdot 3=3\end{gathered}$$

故$|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|=3\cdot 2\cdot 3=18$.

【7】已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,-3$，求$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}|$.

【解答】根据矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$1,2,-3$，先计算$\det(A)=1\cdot 2\cdot(-3)=-6$，从而我们有$\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}$的特征值为

$$\lambda_1=\frac{\det(A)}{1}+3\cdot 1^2+2=-1$$

$$\lambda_1=\frac{\det(A)}{2}+3\cdot 2^2+2=11$$

$$\lambda_1=\frac{\det(A)}{-3}+3\cdot 3^2+2=31$$

则$|\boldsymbol{A}^*+3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}|=-1\cdot 11\cdot 31=-341$.

【8】设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}},a_1\neq 0,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$.

（1）证明：$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值.

（2）求$\boldsymbol{A}$的非零特征值以及n个线性无关的特征向量.

【解答】（1）注意到$\boldsymbol{A}$为对称阵，故$\boldsymbol{A}$可以与对角阵$\boldsymbol{\Lambda}$相似.我们有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，则

$$r(A)\leq\min\{r(\boldsymbol{\alpha}),r(\boldsymbol{\alpha}^T)\}=r(\boldsymbol{\alpha})\leq 1$$

而$a_1\neq 0$，则$r(\boldsymbol{A})\leq r(\boldsymbol{\alpha})=1$；又$a_1\neq 0$，则$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，综上容易知道$r(\boldsymbol{A})=1$.

相似对角化后秩不变，则有$r(\boldsymbol{\Lambda})=r(\boldsymbol{A})=1$.于是$\boldsymbol{\Lambda}$只有一个非零对角元，即$\lambda=0$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$重特征值.

（2）其次我们来求$\boldsymbol{A}$的非零特征值.因为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$的对角元之和为$\sum {a_i}^2$，又由特征值性质：$\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=tr(\boldsymbol{A})$，从而由上知$\sum {a_i}^2$为$\boldsymbol{A}$唯一的非零特征值.

接下来求$\boldsymbol{A}$的特征向量.

（i）对应于$\lambda=0$，解方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，由

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & {a_2}^2 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & {a_n}^2 \end{bmatrix}\overset{}{\underset{r_1\div a_1}{\sim}}\underset{r_2-a_2r_1}{\sim},\ldots,\underset{r_n-a_nr_1}{\sim}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

得到$n-1$个线性无关的特征向量为

$$\xi_2=\begin{bmatrix} -\dfrac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix} -\dfrac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ldots,\xi_n=\begin{bmatrix} -\dfrac{a_n}{a_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

（ii）考虑$\lambda=\sum {a_i}^2$的特征向量.因为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$是个数字，则

我们有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}$$

根据定义，即知$\boldsymbol{A}$有非零特征值$\lambda=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$，对应特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$.

【9】设向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,...,a_n)^T,\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,...,b_n)^T$都是非零向量，且满足条件$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$.记$n$阶矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$.求

（1）$\boldsymbol{A}^2$.

（2）矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量.

【解答】（1）$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=0$，说明$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$正交.我们写出$\boldsymbol{A}$，有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1\quad b_2\quad\ldots\quad b_n]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\ldots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\ldots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\ldots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\ldots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\ldots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\ldots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_1b_1\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}&a_1b_2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}&\ldots&a_1b_n\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\\a_2b_1\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}&a_2b_2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}&\ldots&a_2b_n\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}&a_nb_2\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}&\cdots&a_nb_n\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}$$

（2）下面来求矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，设矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为λ，我们有$\boldsymbol{A}^2$的特征值为λ^2，设其对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$，则我们有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}\Longrightarrow\lambda^2\boldsymbol{\alpha}=0\Longrightarrow\lambda=0$$

根据λ的任意性可以知道矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全部为零.由于$\lambda=0$，则求特征向量即去解方程$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.考虑到$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$是非零向量，不妨设$a_1\neq0,b_1\neq0$.即去解

$$-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T=-\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\ldots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\ldots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1&b_2&\ldots&b_n\\0&0&\ldots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

从而可以得到一组基础解系如下：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{b_2}{b_1},1,0,...,0\right)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=\left(-\frac{b_3}{b_1},0,1,...,0\right)^T,...,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}=\left(-\frac{b_n}{b_1},0,0,...,1\right)^T$$

于是$\boldsymbol{A}$对应于特征值$\lambda=0$的全部特征向量为

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+...+c_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$$

其中$c_i(i=1,2,...,n-1)\in\mathbb{R}$且不全为零.

【10】若四阶矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$,求行列式$|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|$.

【解答】矩阵相似，从而特征值相同，故$\boldsymbol{B}$的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$.故$\boldsymbol{B}^{-1}$的特征值为$2,3,4,5$.则$\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}$的特征值为$1,2,3,4$.故$|\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{E}|=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

【11】已知矩阵$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$.$g(\lambda)$是$\lambda$的多项式，求$|g(\boldsymbol{A})|$.

【解答】此题直接求解比较困难，我们不妨通过特征值来求解.根据相似于对角方阵，则容易知道$\lambda_i(i=1,2,...,n)$是矩阵$\boldsymbol{A}$的n个特征值.

不妨设多项式为

$$g(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+...+a_n\lambda^n$$

则对于矩阵$\boldsymbol{A}$的某个特征值λ_i，有$g(\boldsymbol{A})$的特征值为

$$a_0+a_1\lambda_i+a_2{\lambda_i}^2+...+a_n{\lambda_i}^n=g(\lambda_i)$$

从而有$\det(g(\boldsymbol{A}))=\prod\lambda_{i,g(\boldsymbol{A})}=\prod g(\lambda_i)=g(\lambda_1)g(\lambda_2)...g(\lambda_n)$.

【12】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别是矩阵$\boldsymbol{A}$对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，

$$\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2$$

a,b为常数，且$a\neq0,b\neq0$，证明$\boldsymbol{\alpha}$不是$\boldsymbol{A}$的特征向量.

【解答】根据题设，我们有

$$\boldsymbol{A\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$$

则我们有$a\boldsymbol{A\alpha}_1=a\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,b\boldsymbol{A\alpha}_2=b\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2$，二者相加有

$$\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1 a\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2 b\boldsymbol{\alpha}_2$$

若$\boldsymbol{\alpha}$为$\boldsymbol{A}$的特征向量，那我们一定有

$$\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2)$$

其中λ为$\boldsymbol{\alpha}$对应的特征值.从而我们得到

$$\boldsymbol{A}(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2)=\lambda_1 a\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2 b\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2)$$

故有$(\lambda_1-\lambda)a\boldsymbol{\alpha}_1=(\lambda-\lambda_2)b\boldsymbol{\alpha}_2$.而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$分别是矩阵$\boldsymbol{A}$对应于特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量，且$\lambda_1\neq\lambda_2$，则$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{\alpha}_2$.又有$a\neq 0,b\neq 0$，故若要等式成立必有

$$\lambda_1-\lambda=\lambda-\lambda_2=0$$

而这与题设矛盾！故$\boldsymbol{\alpha}$不可能为$\boldsymbol{A}$的特征向量.

【13】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$），则（）

（A）$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$；

（B）$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有相同的特征值和特征向量；

（C）$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都相似于同一个对角矩阵；

（D）对任意常数t，必有$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.

【解答】（A）$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$但$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$不意味着$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，故 A 错误.

（B）相似矩阵有相同特征值，但是特征向量不一定相同.

（C）一个n阶矩阵能够相似对角化的前提条件是有n个线性无关的特征向量，但题设无法得到这一点，即$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$不一定能够相似对角化.

（D）正确，因为$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，我们可知存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，从而对于任意常数$t$，我们有

$$\boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$$

即对于任意常数t，有$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\sim t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.故该题选 D.

【14】设矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$相似，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$$

求x和y的值.

【解答】容易知道矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值为$-1,2,y$，故矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值也为$-1,2,y$.我们有

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&0\\2&x-\lambda&2\\3&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)\left[(x-\lambda)(1-\lambda)-2\right]$$

容易发现$y=-2$，$x=0$.

【15】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则下列矩阵中，与$\boldsymbol{A}$相似的矩阵为（）

（A）$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$；　　（B）$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$；

（C）$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$；　　（D）$\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$.

【解答】容易知道矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$2,2,3$，而$\boldsymbol{A}$是对角矩阵，故我们需要判断下列四个矩阵哪个可以相似对角化.故我们考虑特征值2的几何重数和代数重数.显然代数重数为2，若需要相似对角化，则需要几何重数也为2.我们有

$$\boldsymbol{A}_1-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow r=2\neq 3-n_j=1$$

$$\boldsymbol{A}_2-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow r=2\neq 3-n_j=1$$

$$\boldsymbol{A}_3-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow r=1=3-n_j=1$$

$$\boldsymbol{A}_4-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Longrightarrow r=2\neq 3-n_j=1$$

故发现只有（C）中矩阵的代数重数等于几何重数，故此题选 C.(P193 结论)

【16】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，判断下列结论是否正确.若正确，请说明理由，若错误，请给出反例.

（1）$\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$；

（2）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有相同的特征值与特征向量；

（3）存在对角矩阵$\boldsymbol{D}$，使$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都相似于$\boldsymbol{D}$；

（4）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$；

（5）$\boldsymbol{A}^k\sim\boldsymbol{B}^k$（$k$为正整数）；

（6）若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{B}$可逆，且$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$；

（7）$k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$.

【解答】$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

（1）正确.对于上式两边取转置，有

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T=\boldsymbol{B}^T\\ \Longrightarrow\ &\boldsymbol{P}^T(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{B}^T\\ \Longrightarrow\ &\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{P}^{-1})^T=\boldsymbol{B}^T\\ \Longrightarrow\ &\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{P}^T)^{-1}=\boldsymbol{B}^T\end{aligned}$$

故我们证明了$\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$.

（2）错误，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有相同的特征值，但是不一定有相同的特征向量.我们可以证明

对于相同特征值λ，若矩阵$\boldsymbol{A}$的特征向量为$\boldsymbol{\xi}$，有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$是矩阵$\boldsymbol{B}$对应于$\lambda$的特征向量.因为我们有

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{\xi})=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi})$$

显然不一定有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}$，故该命题不正确.

（3）错误，矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$不一定能够相似对角化.

（4）正确，对矩阵左乘可逆矩阵相当于进行初等行变换，对矩阵右乘可逆矩阵相当于进行初等列变换，而这些操作并不会改变矩阵$\boldsymbol{A}$的秩序，即

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=r(\boldsymbol{B})$$

这从另一方面说明了相似变换是一种初等变换.

（5）正确，我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}^m&=\underbrace{(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\cdots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})}_{m\text{个}}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\underbrace{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\cdots\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}_{m\text{个}}\\&=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

因此$\boldsymbol{A}^m\sim\boldsymbol{B}^m$.

（6）正确，我们有$\det\boldsymbol{A}\neq 0$，故

$$\det\boldsymbol{B}=\det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\det\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{P}\neq 0$$

故矩阵$\boldsymbol{B}$可逆.从而在$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$两边取逆，有

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{-1}$$

即$\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$.

（7）正确，我们有$\boldsymbol{P}^{-1}(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{B}$，故$k\boldsymbol{A}\sim k\boldsymbol{B}$.

【17】若$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_2$，则$\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\sim\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\sim\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$.

【解答】我们有

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\\\Longrightarrow\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\sim\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\end{gathered}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\sim\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$$

从而命题得证！

【18】证明：若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

【解答】若$\boldsymbol{A}$可逆，我们有$\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{BA}$，发现存在可逆矩阵$\boldsymbol{A}$使得$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{ABA}=\boldsymbol{BA}$，故$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$.

【19】若矩阵$\boldsymbol{A}_i\sim\boldsymbol{B}_i,i=1,2,\cdots,s$，证明：

$$\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)\sim\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_s)$$

【解答】P189 有证明.因为$\boldsymbol{A}_i\sim\boldsymbol{B}_i,i=1,2,\cdots,s$，故存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}_i$使得

$$\boldsymbol{P}_i^{-1}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{B}_i$$

令$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&&&\\&\boldsymbol{P}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{P}_s\end{pmatrix}$，则根据分块矩阵的乘法可以得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{-1}&&&\\&\boldsymbol{P}_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{P}_s^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&&&\\&\boldsymbol{A}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{A}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&&&\\&\boldsymbol{P}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{P}_s\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_1&&&\\&\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{A}_s\boldsymbol{P}_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&&&\\&\boldsymbol{B}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\boldsymbol{B}_s\end{pmatrix}$$

即$\boldsymbol{P}^{-1}\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_s)$，从而

$$\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s)\sim\operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_s)$$

【20】设矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆.

【解答】

$$(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=3\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=6\boldsymbol{E}$$

$$\Longrightarrow (3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\left[\frac{1}{6}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\right]=\boldsymbol{E}$$

故矩阵$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$可逆.

【21】若$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2|=0$，则0和1至少有一个是$\boldsymbol{A}$的特征值.

【解答】我们有$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})|=0$，故我们一定有

$$\det \boldsymbol{A}=0\text{或者}\det(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=0$$

从而0和1至少有一个是$\boldsymbol{A}$的特征值.

【22】设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{5\times 5}$，$\lambda=-2$是$\boldsymbol{A}$的四重特征值，$\lambda=1$是$\boldsymbol{A}$的单特征值，求$\boldsymbol{A}$的特征多项式.

【解答】显然的我们有特征多项式为$(\lambda-1)(\lambda+2)^4$.

【23】设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，若存在正整数k，使得$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则称$\boldsymbol{A}$为幂零矩阵.证明：幂零矩阵的特征值只能是0.

【解答】设矩阵的任一特征值为λ，对应的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$，即$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.于是我们有$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{\alpha}=\lambda^k\boldsymbol{\alpha}$.由于$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，故$\lambda^k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，而特征向量$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，所以$\lambda^k=0$.从而我们有$\lambda=0$.由特征值的任意性可知，幂零矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值全为零.

【24】设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$是对应的特征向量，证明：

$$g(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$$

是矩阵$g(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E}$的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$是对应的特征向量.

【解答】我们根据题设有$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则有

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\cdots=\lambda^m\boldsymbol{\alpha}$$

故可以得到

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha}&=(a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A}+a_m\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}\\&=a_0\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_{m-1}\boldsymbol{A\alpha}+a_m\boldsymbol{E\alpha}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_0\lambda^m\boldsymbol{\alpha}+a_1\lambda^{m-1}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+a_{m-1}\lambda\boldsymbol{\alpha}+a_m\boldsymbol{\alpha}\\
&=(a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m)\boldsymbol{\alpha}\\
&=g(\lambda)\boldsymbol{\alpha}
\end{aligned}
$$

则原命题得证！

【25】设$\boldsymbol{\alpha}$是n阶对称矩阵$\boldsymbol{A}$对应于特征值λ的特征向量，$\boldsymbol{P}$为n阶可逆矩阵，求矩阵$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$对应于特征值$\lambda$的特征向量.

【解答】见【16】（2），根据$\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则我们有

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

故矩阵$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$对应于特征值$\lambda$的特征向量为$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

【26】设二阶实矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|<0$，证明：$\boldsymbol{A}$能相似于对角阵.

【解答】根据特征值的性质容易知道所有特征值的积等于$\det\boldsymbol{A}$.因为$\boldsymbol{A}$为二阶实矩阵，故只有两个实特征值.设这两个特征值为λ_1,λ_2，则

$$\det\boldsymbol{A}=\lambda_1\lambda_2<0$$

从而λ_1,λ_2异号，则$\lambda_1\neq\lambda_2$.故$\boldsymbol{A}$能相似于对角阵.P192 推论 1.

【27】已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$$

求$(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{AM})^n$（$n$为正整数）.

【解答】容易计算得到$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$，且我们有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^2&=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\\
\boldsymbol{A}^3&=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}\\
&\cdots\\
\Longrightarrow\boldsymbol{A}^n&=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M})^{n} &= \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\cdots\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\\
&= \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}^{n}\boldsymbol{M}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & 2n-1\\ -3 & -3n+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 6n+1 & 4n\\ -9n & -6n+1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

【28】 求$\boldsymbol{A}^{100},\boldsymbol{A}^{101}$，其中

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$；　　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$；

【解答】（1）我们有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{3}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

故周期为2，我们有$\boldsymbol{A}^{100}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix},\boldsymbol{A}^{101}=\boldsymbol{A}$.

（2）我们有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{2}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2\\ -2 & -5 & 1\\ -2 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-5&1\\-2&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&2\\-1&-2&0\end{pmatrix}=(-6)\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&2\\-1&-2&0\end{pmatrix}$$

故周期为2，我们有$A^{100}=(-6)^{49}\begin{pmatrix}-2&-2&-2\\-2&-5&1\\-2&1&-5\end{pmatrix}$,$A^{101}=(-6)^{50}A$.

注解：这两题题干比较奇怪，所给的矩阵都不能相似对角化，只能通过写出几项寻找规律了.

【29】设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\-2&5&-2\\-4&8&-3\end{pmatrix}$，求$A^n$，其中$n$为正整数.

【解答】首先求矩阵A的特征值，我们有

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-1\\-2&5-\lambda&-2\\-4&8&-3\end{vmatrix}\\&=-\lambda[(5-\lambda)(-3)+16]-2(6-8)-(-16+20-4\lambda)\\&=0\end{aligned}$$

求解得到特征值为$0,1,1$.对应的特征向量分别为

$$\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

故我们可以对此矩阵进行相似对角化，有$P=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&1\\4&-1&2\end{bmatrix}$,$P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-1\\-2&5&-2\end{bmatrix}$.

故得到$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$.故我们可以知道$P^{-1}A^nP=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$

故$A^n=P\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}P^{-1}=A$.

【30】若A和B都是对角矩阵，证明A相似于B的充分必要条件是A与B的主

对角元除了排列次序外是完全相同的.

【解答】首先证明必要性.$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有完全相同的特征值.而又因为$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是对角矩阵，则主对角元上元素是所有的特征值排列，故必然有$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的主对角元除了排列次序外是完全相同的.否则若二者有不同的主对角元，就说明二者有不同的特征值，不可能满足$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

接下来证明充分性.记$\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，对角线上分别为它们的特征值.当$\lambda_{i_k}=\mu_k,k=1,2,\cdots,n$时，我们取$\boldsymbol{P}$为第一种初等方阵（即由对换单位方阵的两行得到）之积，这样的$\boldsymbol{P}$也成为置换方阵，即可以得到$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，即$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.（实际上就是通过行变换与列变换使得两个矩阵相同）.

【31】已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$与矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似.

（1）求x与y；

（2）求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

【解答】（1）和【14】题相同，我们有$x=0,y=-2$.

（2）即进行相似对角化，我们只需要求出特征向量即可.有

$$\lambda=-1:\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:\begin{pmatrix}-4&0&0\\2&-2&2\\3&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&2\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=-2:\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&2\\3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\3&1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

从而得到可逆矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

【32】设$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

求$(\boldsymbol{A}^n)^T$，其中n是正整数.

【解答】

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\\
\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&\lambda_3^n\end{pmatrix}\\
\Longrightarrow\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&\lambda_3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}
\end{gathered}$$

可以求出$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n&=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&\lambda_3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}\\
&=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\\lambda_1^n&\lambda_2^n&0\\\lambda_1^n&\lambda_2^n&\lambda_3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&0\\\lambda_1^n-\lambda_2^n&\lambda_2^n&0\\\lambda_1^n-\lambda_2^n&\lambda_2^n-\lambda_3^n&\lambda_3^n\end{pmatrix}\\
(\boldsymbol{A}^n)^T&=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&\lambda_1^n-\lambda_2^n&\lambda_1^n-\lambda_2^n\\&\lambda_2^n&\lambda_2^n-\lambda_3^n\\&&\lambda_3^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

【33】设三阶矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$，对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

求矩阵$\boldsymbol{A}$.

【解答】显然我们有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&0&2\\2&0&-1\end{pmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&0&2\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&0&-2\\2&0&2\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

【34】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{pmatrix}$，问$a,b,c$取何值时，$\boldsymbol{A}$可相似于对角矩阵？求出它的相似对角矩阵.

【解答】容易发现这是一个下三角矩阵，故行列式为对角线乘积，容易知道特征值为$1,1,2,2$.故其对应的几何重数也都必须是2.我们有

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\a&0&0&0\\2&b&1&0\\2&3&c&1\end{pmatrix}$$

只有当$a=0$时才能满足$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2$，也即几何重数等于$4-2=2$.我们又有

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\a&-1&0&0\\2&b&0&0\\2&3&c&0\end{pmatrix}$$

只有当$c=0$时才能满足$r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=2$，也即几何重数等于$4-2=2$.$b$可以取任意实数.

综上所述，$a=c=0,b\in\mathbb{R}$时，$\boldsymbol{A}$相似于对角矩阵$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$.

【35】证明正交矩阵的实特征值的可能取值为1或-1.

【解答】考虑正交矩阵$\boldsymbol{A}$，我们有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.设$\boldsymbol{A}$关于特征值$\lambda$的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$，则我们有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$；两边同时转置得到$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^T=\lambda\boldsymbol{\alpha}^T$；两边同时乘以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$得到$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}^T\lambda\boldsymbol{\alpha}$，故我们得到$(\lambda^2-1)\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=0$.

因为$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$，从而必定有$\lambda^2-1=0\Longrightarrow\lambda=\pm1$.

【36】求正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵.

（一）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{bmatrix}$　　（二）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}$

解答:（一）先解出$\boldsymbol{A}$的特征值，有

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&0&0\\0&3-\lambda&2\\0&2&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)^2-4(2-\lambda)=(2-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)$$

则我们容易得到特征值为$2,1,5$.

当特征值为2时，做化简可以得到$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，可以得到基础解系为$[1\ \ 0\ \ 0]^T$，也可以作为特征向量.

当特征值为1时，做化简可以得到$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，可以得到基础解系为$[0\ \ -1\ \ 1]^T$，也可以作为特征向量.

当特征值为5时，做化简可以得到$\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$，可以得到基础解系为$[0\ \ 1\ \ 1]^T$，也可以作为特征向量.

注意到这三个向量本就正交，所以只需要单位化即可.从而我们容易得到

$$\boldsymbol{Q}=[\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$.

（二）先解出$\boldsymbol{A}$的特征值，有

$$\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & 0\\ 2 & -\lambda & 2\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(1-\lambda^2)+4(1+\lambda)-4(1-\lambda)=9\lambda-\lambda^3=0$$

则我们容易得到特征值为$0,3,-3$.

当特征值为0时，做化简可以得到$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，可以得到基础解系为

$[-2\ \ -1\ \ 2]^T$，也可以作为特征向量.

当特征值为3时，做化简可以得到$\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，可以得到基础解

系为$[1\ \ 2\ \ 2]^T$，也可以作为特征向量.

当特征值为-3时，做化简可以得到$\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，可以得到基础解系

为$[2\ \ -2\ \ 1]^T$，也可以作为特征向量.

注意到这三个向量本就正交，所以只需要单位化即可.从而我们容易得到

$$Q=[\xi_1\ \ -\xi_2\ \ \xi_3]=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

【37】设3阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$-1,-1,8$，且$\boldsymbol{A}$对应的特征值-1有特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

试求矩阵$\boldsymbol{A}$.

【解答】实对称矩阵属于不同特征值的特征向量必定正交，故我们考虑求解方程，写出系数矩阵，有

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

得到对应于特征值8的特征向量$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.故我们有

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

【38】设$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，若$\boldsymbol{A}$正交相似于$\boldsymbol{B}$，证明：$\boldsymbol{B}$为实对称矩阵.

【解答】根据已知，存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$.因为$\boldsymbol{A}$为对称矩阵，故

$$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$$

从而我们有$\boldsymbol{B}^T=(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})^T=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Q}^T)^T=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，故矩阵$\boldsymbol{B}$也为对称矩阵.又因为$\boldsymbol{A}$为实矩阵，则其特征值都是实数，故特征向量也都为实向量，所以$\boldsymbol{Q}$为实矩阵，故$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$也为实矩阵，即$\boldsymbol{B}$为实对称矩阵.

【39】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{AB}$有$n$个不相等的特征值，证明：$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$相似于同一个对角阵.

【解答】【18】中证明了若$\boldsymbol{A}$可逆，则$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$，此处$\boldsymbol{AB}$有$n$个不相等的特征值，显然$\boldsymbol{A}$可逆，则我们可以知道$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{BA}$，故$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$有相同的特征值，即$\boldsymbol{BA}$也有$n$个不相等的特征值.故$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$都可以相似对角化，且相似于同一个对角阵.（即主对角线上都是特征值的对角矩阵）.

【40】设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n),n>2$是两个非零的正交向量，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

证明：

（1）$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}$；（2）$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$；（3）$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$；（4）$\boldsymbol{A}$的所有特征值都等于零.

【解答】（1）显然我们根据矩阵乘法的规则有

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

（2）我们有

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_1b_1a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^n a_1b_2a_ib_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n a_1b_na_ib_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_2b_1a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^n a_2b_2a_ib_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n a_2b_na_ib_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^n a_nb_1a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^n a_nb_2a_ib_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^n a_nb_na_ib_i \end{pmatrix}$$

注意到矩阵每一项的求和形式都是$\sum_{i=1}^{n} a_m b_n a_i b_i = a_m b_n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$，而我们根据题设可以知道$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$，故$\boldsymbol{A}^2$中每一项均为零，即$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

（3）考虑矩阵$\boldsymbol{A}$的秩，观察

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

注意到，若存在$a_i \neq 0$，则有

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \underbrace{r_1-\frac{a_1}{a_i}r_i}\,\underbrace{r_2-\frac{a_2}{a_i}r_i}\cdots\underbrace{r_n-\frac{a_n}{a_i}r_i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_ib_1 & a_ib_2 & \cdots & a_ib_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故此时$r(\boldsymbol{A})=1$.而若不存在$a_i \neq 0$，则有$r(\boldsymbol{A})=0$，无论哪种情况，都有

$$r(\boldsymbol{A}^*)=0$$

即$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$.

（4）若矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为λ，我们有矩阵$\boldsymbol{A}^2$的特征值为λ^2.但$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，故矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值均为零.

【41】已知$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$是三个非零的三阶矩阵，且

$$\boldsymbol{A}_i^2=\boldsymbol{A}_i(i=1,2,3),\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O}(i\neq j,i,j=1,2,3)$$

证明：（1）$\boldsymbol{A}_i$属于1的特征向量是$\boldsymbol{A}_j$属于0的特征向量；

（2）若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$分别是$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$属于特征值1的特征向量，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

【解答】（1）根据题意，我们有$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，而我们又有$\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{O}$，故

$$\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$$

故$\boldsymbol{A}_i$属于1的特征向量.

（2）根据题意我们有$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$，考虑下式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

即$k_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，两边同时乘以$\boldsymbol{A}_3$，有

$$k_1\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{A}_3^2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

而$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O}(i\neq j,i,j=1,2,3)$，故得到了$k_3\boldsymbol{A}_3^2\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.此时我们有

$$k_3\boldsymbol{A}_3^2\boldsymbol{\alpha}_3=k_3\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{\alpha}_3=k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$，则一定有$k_3=0$，同理可以得到$k_1=k_2=k_3=0$，即我们证明了$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

【42】设$a_0,a_1,...,a_{n-1}$是n个实数，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&...&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-2}&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

（一）若λ是$\boldsymbol{A}$的特征值，证明：$\boldsymbol{\alpha}=(1,\lambda,\lambda^2,...,\lambda^{n-1})$是对应于$\lambda$的特征向量.

（二）若$\boldsymbol{A}$的特征值两两互异，求可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为对角矩阵.

【解答】（1）直接根据定义来，根据特征值定义，有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$.即证明

$$\begin{bmatrix}\lambda&-1&0&...&0&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0&0\\0&0&\lambda&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda&-1\\a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{n-2}&\lambda+a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\\\lambda^3\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

即可.而显然的，我们有

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda \\ \lambda^2 - \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^k \cdot \lambda - \lambda^{k+1} \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}$$

其中，$m = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + (\lambda + a_{n-1})\lambda^{n-1}$

我们来计算带进特征值的行列式，即计算$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$，考虑拉普拉斯展开，有

$$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} a_0 |\boldsymbol{E}_{n-1}| + \lambda[(-1)^{n+2} a_1 |\boldsymbol{E}_{n-2}| + \lambda[(-1)^{n+3} a_2 |\boldsymbol{E}_{n-3}| + \lambda[\ldots]]]$$

$$= a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = 0$$

即$m=0$，从而我们证明了$\boldsymbol{\alpha} = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$是对应于$\lambda$的特征向量.

（2）我们接下来寻找可逆矩阵$\boldsymbol{P}$.根据上一题，我们已经得到对于任意一个特征值λ，都有特征向量为$\boldsymbol{\alpha} = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1})$.而根据特征值两两相异，我们知道该矩阵必定存在$n$个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，同时对应着$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$个特征向量.则我们可以构造如下的矩阵$\boldsymbol{P}$来进行相似对角化：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

从而得到

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

【43】设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都是n阶实对称矩阵，且有正交阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$都是对角矩阵，证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$也是实对称矩阵.

【解答】设$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}$以及$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}$，则$\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}^T=\boldsymbol{D}$（对角阵的性质），故我们有$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}$，从而有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T&=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T\\&=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^{-1})^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^{-1})^T\\&=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T)^T(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^T)^T\\&=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}^T\\&=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{Q}^T\\&=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}^T=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q}^T\end{aligned}$$

从而我们得到$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$也是实对称矩阵.

【44】证明：矩阵$\boldsymbol{A}$只与自身相似的充分必要条件是$\boldsymbol{A}$是数量矩阵.

【解答】充分性.显然矩阵$\boldsymbol{A}$与自身相似.接下来证明矩阵$\boldsymbol{A}$是数量矩阵的情况下只能与自身相似.不妨设$\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E},k\in\mathbb{R}$.若存在矩阵$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{A}$使得$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则必定有可逆矩阵$\boldsymbol{P}$满足

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

即$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}k\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=k\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，这与假设矛盾！故矩阵$\boldsymbol{A}$只与自身相似.

必要性.矩阵$\boldsymbol{A}$只与自身相似，相当于对于任意的可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，都有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}$$

即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$.我们取一些特殊的矩阵$\boldsymbol{P}$来探究$\boldsymbol{A}$的性质.令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}$，其中

$\boldsymbol{M}$ 是只有一个元素为1而其他元素均为零的矩阵，显然$\boldsymbol{P}$可逆（是三角矩阵）.

则

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AM}$$
$$\boldsymbol{PA}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MA}$$

故有$\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{MA}$.设$\boldsymbol{M}$中为1的元素为$m_{ij}$.则

$$\boldsymbol{AM}=\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\underbrace{\left.\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&\vdots&0&0\\0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\vdots&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}}_{\text{第}j\text{列}}\text{第}i\text{行}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&\cdots&a_{1i}&\cdots&0\\0&\cdots&a_{2i}&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&a_{ni}&\cdots&0\end{pmatrix}}_{\text{第}j\text{列}}$$

$$\boldsymbol{MA}=\underbrace{\left.\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&\vdots&0&0\\0&\cdots&1&\cdots&0\\0&0&\vdots&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}}_{\text{第}j\text{列}}\text{第}i\text{行}\begin{pmatrix} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}=\left.\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\right\}\text{第}i\text{行}$$

则为了二者相等，必须有$a_{ii}=a_{jj},a_{ij}=0,i\neq j$.我们只需要依次把$\boldsymbol{M}$全部取一遍，即可知道$\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{E}$.从而必要性得证！

【45】设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，证明：$\boldsymbol{A}$必能相似于对角矩阵.写出$\boldsymbol{A}$的相似对角矩阵的形式.

【解答】根据第三章习题【45】可以知道$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.根据基础解系的知识，我们可以知道方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系包含$n-r(\boldsymbol{A})$个特征向量；方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系包含了$n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$个特征向量.而不同特征值的特征向量线性无关，故线性无关的特征向量一共有

$$n-r(\boldsymbol{A})+n-r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2n-n=n$$

从而$\boldsymbol{A}$必定可以对角化.容易知道$\boldsymbol{A}$的特征值为$0,1$.对角矩阵的形式为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}&\\&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{E}$是$r(\boldsymbol{A})$阶的单位矩阵，$\boldsymbol{O}$为$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$阶的单位矩阵.

【46】设n阶矩阵$\boldsymbol{A}$满足$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$必能相似于对角矩阵.写出$\boldsymbol{A}$的相似对角矩阵的形式.

【解答】方法同【45】题，容易验证$\boldsymbol{A}$有n个线性无关的特征向量.考虑特征值，有

$$\lambda^2-\lambda-3=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

故$\boldsymbol{A}$的相似对角矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{13}}{2}\boldsymbol{E}_1 & \\ & \frac{1-\sqrt{13}}{2}\boldsymbol{E}_2 \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{E}_1$是$r\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\boldsymbol{E}\right)$阶的单位矩阵，$\boldsymbol{E}_2$为$r\left(\boldsymbol{A}-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\boldsymbol{E}\right)$阶的单位矩阵.

【47】证明：若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，则$\boldsymbol{A}$的特征值的模为1.

【解答】正交矩阵满足$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{E}$，若$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda$，特征向量为$\boldsymbol{\alpha}$，则

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha} \\ \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\alpha} \\ \Longrightarrow \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\alpha} \end{gathered}$$

故矩阵$\boldsymbol{A}^T$的特征值为$\dfrac{1}{\lambda}$.然而$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^T$的特征值相同，故$\lambda=\dfrac{1}{\lambda}\Longrightarrow\lambda^2=1$，即我们有$\boldsymbol{A}$的特征值的模为$1$.

注意，上面的证明中必须有$\lambda\neq0$，下面证明$\lambda=0$是不可能的.若$\lambda=0$，则

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0} \\ \Longrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0} \end{gathered}$$

这是矛盾的！故$\lambda\neq0$.

【48】若矩阵$\boldsymbol{A}$和矩阵$\boldsymbol{B}$是同阶的正交矩阵，则$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$是否为正交矩阵？若是，证明你的结论；若不是，举出一个反例.

【解答】显然不是.取$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$即可.

【49】设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$是四维线性空间$V$的一组基，$V$上的线性变换$\sigma$在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -10 & 3 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

（一）求σ在基

$$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\eta}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_4 \end{cases}$$

下的矩阵；

（二）求σ的全部特征值和特征向量；

（三）求V的一组基，使σ在这组基下的矩阵是对角阵.

【解答】（1）我们有如下结论：

设线性空间V_n中有两个基：$[1]a_1,a_2,...,a_n[2]b_1,b_2,...,b_n$，由基$a_1,a_2,...,a_n$到基$b_1,b_2,...,b_n$的过渡矩阵为$P$，$V_n$中的线性变换$T$在这两个基下的矩阵分别为$A,B$，则我们有$B=P^{-1}AP$.

则我们先来求过渡矩阵：根据关系式$\begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4 \\ \boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3 \\ \boldsymbol{\eta}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_4 \end{cases}$容易得到过渡矩阵如下：

$$P=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}-3&2&0&0\\2&-1&0&0\\1&-1&1&0\\3&-2&0&1\end{bmatrix}$$

从而有 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&3.5&-1.5\\0&0&5&-2\end{bmatrix}$

（2）即计算 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5&-2&-4&3\\3&-1&-3&2\\-3&\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{5}{2}\\-10&3&11&-7\end{bmatrix}$ 的所有特征值.考虑到上述变换过程是一个相似变换，故特征值不变，我们即可以求 $\begin{bmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&3.5&-1.5\\0&0&5&-2\end{bmatrix}$ 的特征值以此来减少计算量.即计算 $\begin{vmatrix}-\lambda&0&6&-5\\0&-\lambda&-5&4\\0&0&3.5-\lambda&-1.5\\0&0&5&-2-\lambda\end{vmatrix}=0$.根据拉普拉斯展开，我们有

$$\begin{vmatrix}-\lambda&0&6&-5\\0&-\lambda&-5&4\\0&0&3.5-\lambda&-1.5\\0&0&5&-2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&-5&4\\0&3.5-\lambda&-1.5\\0&5&-2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(3.5-\lambda)(2+\lambda)-7.5\lambda$$

$$=\lambda[(3.5-\lambda)(2+\lambda)-7.5]=(-0.5+1.5\lambda-\lambda^2)\lambda=-(\lambda-1)(\lambda-0.5)\lambda=0$$

从而我们得到四个特征值分别为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1,\lambda_4=0.5$.

相似变换特征向量也不变，故直接求特征向量即可.对于 $\lambda_1=\lambda_2=0$，有

$\begin{bmatrix}0&0&6&-5\\0&0&-5&4\\0&0&3.5&-1.5\\0&0&5&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，从而可以得到基础解系如下：$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$.

即可以写成如下特征向量：$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，$k_1,k_2$ 不同时为零.

对于 $\lambda_3=1$，有

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 6 & -5\\ 0 & -1 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 2.5 & -1.5\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1.4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -0.6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$，从而可以得到基础解系如下$\begin{bmatrix}-1.4\\ 1\\ 0.6\\ 1\end{bmatrix}$.

即可以写成如下特征向量：$k(-1.4\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+0.6\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4),k\neq 0$.

对于$\lambda_4=0.5$，有

$$\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 6 & -5\\ 0 & -0.5 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -1.5\\ 0 & 0 & 5 & -2.5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$,可以得到基础解系如下$\begin{bmatrix}-4\\ 3\\ 0.5\\ 1\end{bmatrix}$.

即可以写成如下特征向量：$k(-4\boldsymbol{\eta}_1+3\boldsymbol{\eta}_2+0.5\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4),k\neq 0$.

（3）显然的根据上面计算得到的特征向量，可以构造这样一组基，为

$$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,-4\boldsymbol{\eta}_1+3\boldsymbol{\eta}_2+0.5\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,-1.4\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2+0.6\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4$$

此时该组基下的矩阵为对角矩阵：

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$