**习题四**

【1】试判断下列集合对所指定的运算是否构成实数域上的线性空间：

（1）实数域上全体阶实对称矩阵的集合，对矩阵的加法和乘法.

（2）平面上不平行于某一向量的全体向量集合，依照二维向量的加法和数乘.

（3）平面上全体向量对于通常的向量加法和数乘.

（4）全体复数集合依照数的加法及数的乘法作数乘.

【解答】线性空间需要证明条定义.

（1）显然构成一个线性空间.

（2）不满足.不平行于某一向量的全体向量在加法下可能得到平行于该向量的向量，而该向量不属于集合，故不构成实数域上的线性空间.

（3）不满足，向量加法满足线性空间定义，而数乘不满足.因为我们有.

（4）显然构成一个线性空间.

【2】设是实数域上所有实函数的集合.对任意，定义



对于这两种运算，构成上的线性空间.问下列子集是否是的子空间，为什么？

（1）所有连续函数的集合；

（2）所有可微函数的集合；

（3）所有偶函数的集合；

（4）所有奇函数的集合；

（5）；

（6）.

【解答】子空间需要满足对于的加法和纯量乘法运算封闭.实际上容易判断（1）（2）（3）（4）（5）均为子空间.只需要取函数，然后证明也属于提供的集合即可.前四个的证明是显然的.让我们来看第五个.考虑



显然有，也满足



的条件，故该集合对于加法和纯量乘法运算封闭，是子空间.而（6）并不满足子空间的条件，原因如下：考虑，我们有



即不满足的条件，故该集合并不封闭，非子空间.

【3】在线性空间中，取一个固定矩阵，试证：与可交换的全体矩阵构成的一个子空间.

【解答】将首先将与可交换的全体矩阵的集合记为.由于都与可交换，故非空.

其次，设，则与都可交换，于是



即，故为子空间.

【4】设与都是的子空间，试证明：为的子空间的充分必要条件是或者.

【解答】考虑必要性.用反证法.设且，则有，但，并且有但是.由于，又因为为的子空间，故，从而或者.若，则



引出矛盾！同理有的情况.从而原假设不成立，故或者.

充分性显然.

【5】证明是的一个子空间，确定它的维数，并且求出它的一个基.

【解答】显然的有是上的非空子集.验证其为子空间只需要验证其对于加法以及纯量乘法封闭即可.我们设，有



接下来验证加法与乘法，我们有



故是的一个子空间.容易发现，任意的都可以表示为的形式，故维数为，且一个基可以为上述所示的.

【6】试求齐次线性方程组



的解空间的维数和一组基.

【解答】求解解空间，和求解基础解系是基本相同的.我们写出系数矩阵，有



得到基础解系为



故解空间维数为，一组基可以为



【7】令，其中为有理数域，中元素的加法以及数乘运算分别为通常数的加法及乘法.求证：关于这两种运算构成上的线性空间，并求的维数和一组基.

【解答】设，则，由于



所以关于这两种运算构成上的线性空间，维数则很简单，这是一个二维空间，取基为.

【8】验证集合



是的子空间，并且求出它的维数和一组基.

【解答】设题设集合为，显然该集合不是空集，我们取，有



其中满足.接下来验证加法与纯量乘法，有



故是的子空间.该空间维数为三维，一组基为，任意的可以表示为



此处三维是由条件决定的，至少需要三个数才能表示剩下的一个数.此处我们变形得到决定了基的选取.

【9】在中，令



求由生成的子空间的维数和一组基.

【解答】写出矩阵进行变形判断秩即可.我们有



容易发现矩阵秩为，故生成的子空间为维子空间.一组基可以取线性无关的，答案并不唯一，只要是极大无关组即可.

【10】设是线性空间的子空间，并且与的维数相等，证明：.

【解答】设与的维数相等均为，并设是的一组基.因为，所以即也是的一组线性无关向量，从而也是的一组基，故我们得到了.

【11】试求实数域上关于矩阵的全体实系数多项式构成的线性空间的一组基及其维数，其中



【解答】记，由于，故



则对于任意有，，从而对于任意



可以让，则容易得到，则中任一元是的线性组合. 则不妨设



有，得到方程组



其系数矩阵为范德蒙德行列式



从而上述方程组只有零解，从而是线性无关的，从而是的一组基.且是三维的.

【12】求证：为的一组基，并求在这个基下的坐标.

【解答】证明其为的一组基，只需要证明其构成的矩阵的秩为即可，我们有



进行行初等变换，有



可以发现矩阵的秩为，所以是线性无关的，因此他们为的一组基.求坐标只需要求矩阵的逆矩阵即可，我们有



从而得到逆矩阵为，则得到坐标为



【13】验证



是线性空间的一组基，求在该基下的坐标.

【解答】经观察容易发现



而的线性组合又可以表示，故



是线性空间的一组基（显然是线性无关的，每一个的最高次数不同.）而求的坐标就比较简单了，我们可以通过来求，有



故坐标为.

【14】在三维线性空间的基下，非零向量的坐标为，试选取一组基，使得在这组基下的坐标为.

【解答】因为是的线性组合，且线性无关，故与中任意两个向量组成的向量组也都是线性无关的.所以我们可以取新的基为



其中，显然线性无关.

【15】是数域上次数不超过的多项式全体和零多项式按通常多项式加法与数乘构成的向量空间.现有两组基：



求基变换公式.

【解答】考虑通过最基础的一组基作为媒介来计算变换公式，发现有



故我们有



从而得到变换公式为

.

【16】实线性空间的两组基分别为



试求从基到基的过渡矩阵，并求矩阵在这两组基下的坐标.

【解答】容易得到在下的坐标是，在下的坐标是.下面来求过渡矩阵，则有



显然是的矩阵，容易得到.

【17】在中，设



试求：

（1）；

（2）；

（3）；

【解答】（1）



（2）



（3）



【18】在中，求一个单位向量，使之与下列向量构成正交向量组：



【解答】设，则我们需要满足方程组



写出系数矩阵，变形，有



得到基础解系为，对其进行单位化，得到



【19】由以下的基，利用施密特正交化构造的标准正交基：

（1）；

（2）.

【解答】（1）我们有



再进行单位化得到标准正交基为



（2）我们有





再进行单位化得到标准正交基为



【20】设是中的一个标准正交基，且



试求：.

【解答】简单的我们有



【21】设是的基，.

（1）若，有，则；

（2）若，对任意，有，则.

【解答】（1），而是的基，故我们一定有



从而我们有，故.

（2）我们根据，有.取，此时有



故.

【22】设是数域上三维欧氏空间的一组标准正交基，



（1）求与都正交的全部向量；

（2）求与都正交的全部单位向量.

【解答】（1）即解方程组，写出矩阵化简得到



故得到基础解系为，故与都正交的全部向量可写作



（2）单位化即可，得到.

【23】求齐次线性方程组



解空间的一个标准正交基.

【解答】写出系数矩阵进行变换，得到



故得到两个基础解系为



发现这两个向量并不正交，故需要进行施密特正交化，有



接下来进行单位化得到一个标准正交基：



【24】在中，设



令.

（1）求的一个标准正交基；

（2）将（1）中求得的的标准正交基，扩充为的标准正交基.

【解答】（1）解方程组即可，有



得到基础解系为.进行施密特正交化有



故一个标准正交基为



（2）扩充标准正交基，需要得到的向量与上述两个向量正交，有



得到基础解系为，发现两者可以线性组合为



将其作为一个基.继续扩充，我们有



得到基础解系为，将其作为一个基.故我们得到了扩充后的一组基，为：



【25】设是中的向量，是由生成的子空间.若有，.证明：与中的每一个向量都正交.

【解答】是由生成的子空间，则中任一向量均可表示为的形式，我们考虑内积



故与中的每一个向量都正交.

【26】判断下列矩阵是否是正交矩阵：

（1）； （2）.

【解答】正交矩阵满足，我们以此进行判断即可.

（1），故不是正交矩阵.

（2），故是正交矩阵.

【27】求实数，使为正交矩阵.其中



【解答】我们计算即可，有



故我们得到方程组



求解得到



【28】设实矩阵为正交矩阵，证明：和都是正交矩阵.

【解答】，故我们有，从而有



同时，我们有，故此时有，从而得到



而，两边取行列式得到，故



从而也是正交矩阵.

【29】设和都是阶正交矩阵，证明也是正交矩阵.

【解答】这是显然的，我们有



命题得证！

【30】设为实对称矩阵，且.证明：是正交矩阵.

【解答】为实对称矩阵，故，从而有



故是正交矩阵.

【31】设和都是正交矩阵，证明也是正交矩阵.

【解答】我们有，此时有



故也是正交矩阵.

【32】已知向量与都正交，证明：与的任一线性组合都正交.

【解答】同【25】.

【33】设是中线性无关的向量组，又有向量都与正交，证明：向量线性相关.

【解答】由已知，即



这说明是齐次线性方程组的解向量，同理也是.根据线性无关可知，从而的解空间维数是，从而线性相关.

【34】设为阶实矩阵，为维实列向量，证明：.

【解答】根据内积的定义，我们有



从而原命题得证！

【35】设为实反对称矩阵，是维实列向量，且，证明：与正交.

【解答】即需要证明，我们有



根据第二章习题【13】，我们可以知道若为反对称矩阵，则对任意矩阵，都有.从而命题得证！

或者，我们有



故.

【36】设表示全体阶实矩阵所构成的线性空间，在上定义一个二元实函数：



（1）证明满足内积的条件，从而作成一个欧氏空间.

（2）求这个欧氏空间的一组标准正交基.

【解答】（1）考虑内积的性质，一共有三条，分别是**对称性**，**线性性**以及**正定性**.

设，我们有：

正定性：，当且仅当即



时成立.

对称性：.

线性性.



故满足内积的条件，从而作成一个欧氏空间.

（2）类比我们在中的取法，我们取即可，容易计算有



不同时成立，即该单位基正交.故为标准正交基.

【37】试考察下列线性空间所定义的变换是否是线性变换：

（1）是一线性空间，是中非零向量，定义



（2）是一线性空间，是中非零向量，定义

；;

（3）中，定义

；

（4）中，定义



其中是固定的数；

（5）中，定义

；

（6）中，定义

；

（7）中，**投影变换**的定义为

.

【解答】线性变换需要满足对于中任意有，我们下面验证即可.

（1）否，我们有



（2）是，我们有



（3）是，我们有



（4）是，我们有



（5）是，我们有



（6）否，我们有



（7）是，我们有



【38】是线性实空间中由函数



所生成的子空间.

（1）试证明为的一组基；

（2）求微分变换在这组基下的矩阵.

【解答】（1）我们只需要证明



线性无关即可.令



取，有；取，有，故.

取，有；取，有.

联立求解得到.故



线性无关.

（2）我们可以将中任一函数表示为



则



故得到矩阵如下



【39】中，线性变换将一组基变到，这些向量分别是



（1）求在下的矩阵；

（2）求在基下的矩阵，此处

；

（3）求的表达式，这里.

【解答】（1）我们有



则



（2）设过度矩阵为，则



我们有，从而



（3）根据（2）容易知道



【40】在中，定义线性变换：



其中是一个固定的矩阵，且



（1）分别求在基



下的矩阵.

（2）分别求在基



下的矩阵.

【解答】（1）我们对于有



故在下的矩阵为



我们对于有



故在下的矩阵为



（2）我们对于有



故在下的矩阵为



我们对于有





故在下的矩阵为



**注意，此处的乘法不是一般的矩阵乘法，而是类似于内积，举个例子，有**



【41】次数不超过的多项式全体和零多项式按通常多项式加法与数乘构成向量空间.求微分运算在基下的矩阵，此处



【解答】考虑多项式，则我们有



考虑正交单位基，则



考虑过渡矩阵，有



则.此题运算量较大.

【42】在中，表示将向量投影到平面的线性变换，即



（1）取基为，求的矩阵.

（2）取基为，求的矩阵.

【解答】（1），故的矩阵为.

（2），故的矩阵为.

【43】设中线性变换在基下的矩阵为



求在基下的矩阵.

【解答】我们有线性变换效果为



故在基下，有



【44】设三维线性空间的线性变换在基下的矩阵为



（1）求在基下的矩阵；

（2）求在基下的矩阵，其中是一个不等于零的实数；

（3）求在基下的矩阵.

【解答】（1）此题比较简单，我们考虑线性变换的效果如下



故



（2）



（3）



【45】设为四维线性空间，线性变换在一组基下的矩阵为



求在基下的矩阵.

【解答】此题比较复杂，我们考虑过渡矩阵，有



故得到



【46】设是向量空间的一个线性变换，，且，但，试证明：线性无关.

【解答】构造，因为，而，则一定存在一个，使得.对



两边作次变换，有，同理可以推出剩下的，即线性无关.

【47】在维线性空间中，设有线性变换与向量使得，但



求证：在某组基下的矩阵是



【解答】向量线性无关，故构成线性空间的一组基.因为



所以，在基下的矩阵为



【48】阶方阵的全体在矩阵的线性运算下构成的向量空间中有基



为中一固定二阶方阵，定义变换为.证明：是中的线性变换，并求此变换在给定基下的矩阵.

【解答】我们取矩阵，有



故变换是线性变换.

接下来求在给定基下的矩阵.我们设，则



故得到给定的矩阵为.

【49】令是上一切矩阵所成的集合对通常矩阵加法和数乘所作成的线性空间，取



对于，令.求线性变换核的维数及像的维数.

【解答】取一组基



则有



故像空间是上述四个向量的线性组合，故实际上我们只需要判断矩阵的秩即可.



容易得到.线性空间的维数等于线性映射的维数加核的维数，故



【50】复数域作为实数域上的线性空间，维数是.如果作为它本身上的线性空间，维数是几？试着证明该结论.

【解答】维数是.事实上，对于任一复数，均有，而，从而线性无关，故是的一组基，的维数是.

【51】设是维线性空间的一个子空间，是的一个基，试证：中存在元素，使得成为的一个基.

【解答】设，则在中一定存在一个向量，它是不能被



表示的，将添加进来，则是线性无关的.

若，则命题得证！否则一定存在，则



线性无关.以此类推，可以找到个线性无关的向量成为的一个基.

【52】验证：主对角线上元素之和为零的阶方阵的全体，对于矩阵的加法和数乘运算构成线性空间，并写出此空间的一个基.

【解答】主对角线上元素之和为零的二阶方阵可以表示为



我们只需要证明该集合构成线性空间即可.取矩阵，显然满足八个条件，只需要证明对于数乘和加法封闭即可.我们有



故构成线性空间.基可以为.

【53】设是线性空间的基到基的过渡矩阵.试证：中存在关于前后两基有相同坐标的非零向量的充要条件是.

【解答】根据题设，有



考虑必要性.存在关于前后两基有相同坐标的非零向量，我们记该向量为，则有



其中为的坐标.即我们有



即.为非零向量，故方程



有非零解.此处必须有，因为基是线性无关的，故必须满足. 故有非零解.故



即.

充分性.充分性比较好证明，构造方程.因为



故有非零解，故有非零解.

故有非零解.

故有非零解，即中存在关于前后两基有相同坐标的非零向量.从而原命题得证！

【54】设是线性空间，都是的真子集和子空间.试证：，不属于，也不属于.

【解答】我们来证明一个更强的结论：无限数域上的线性空间不能被它的有限个真子空间所覆盖，即如果是线性空间的真子空间，则存在向量，使得.证明如下.我们考虑数学归纳法.

对子空间个数用归纳法.当时结论显然成立.假设结论对成立，下面证明。结论对成立.如果，则



由归纳假设，可知存在使得



因此，当时，假设成立.

如果存在向量，但，由于是的真子空间，因此存在向量，但.考虑所有形如的向量，这里，且，显然，这些向量中其中至多有一个数域.

因为否则将有，，使得，从而



即不可能.

因此，必有无数多个形如的向量不在中.如果不在中的形如的向量都属于，则由抽屉原理知，其中至少有两个向量，如同在某个子空间中，.此处.由于



所以.因此，于是



那么就会有，矛盾！这就证明：必有一个向量，且，从而.原命题就此得证！

【55】设是线性空间的子空间，其中，且



试证明：.

【解答】因为，故只需要证明.由于



又



故



从而得证！从而.

【56】在欧式空间中，已知三个向量



求两个互相正交的向量，使它们都与正交.

【解答】写出构成的矩阵，有





得到基础解系.考虑施密特正交化，有

故我们得到了答案.课本后所给答案有误！

【57】设有个列向量，是一个阶正定矩阵，如果满足：

（1）；

（2）；

（3）与每一个都正交.

证明：.

【解答】设有实数，使得，则对任意，有



由于，且是正定矩阵，所以，从而，即



线性无关.从而可以构成的一组基.设，则



故.

【58】设是阶可逆方阵，，在定义内积



（1）试证：所定义的内积符号符合内积的性质，从而在此内积下构成欧氏空间；

（2）写出这个欧氏空间的柯西—施瓦茨不等式的具体形式；

（3）对，试求



中任意两个的内积.

【解答】（1）内积需要满足对称性、线性性和正定性.我们首先来考虑对称性，有



注意到是一个数，故，故.

考虑线性性，我们对于有



故满足线性性.

考虑正定性，有，记



注意到当且仅当时等号才成立，即当且仅当时等号才成立.这是显然的，当时，；而当，必须有，注意到可逆，故满秩，从而只有零解，也即.

（2）Cauchy-Schwarz不等式形式为，代入有



若记，则有



（3）显然的，我们有.

【59】设为维欧式空间，是中一非零向量，试证：

（1）是的子空间.

（2）的维数等于.

【解答】（1）我们有，则非空.则，有



发现对于加法以及数乘都是封闭的，故是的一个子空间.

（2）因为，故将其扩充为的一组正交基，这时因为



故.对于任意，有，由于



由于，故.即可以由线性表出，从而是的一组基，故其维数为.

【60】证明：对任何实数和有



【解答】这是维的Cauchy-Schwarz不等式.我们可以构造二次函数来证明，有

则有判别式，从而原命题得证！

【61】已知向量与都正交，证明：与的任一线性组合都正交.

【解答】和【32】题一模一样.

【62】设是中线性无关的向量组，又有向量都与正交，证明：向量线性相关.

【解答】和【33】题一模一样.

【63】线性空间中变换为；线性变换定义为，其中.

求在基下的矩阵.

【解答】首先将在下的矩阵写出来，对于，我们有



对于我们有



则.

而过渡矩阵为

，则

故在下的矩阵分别是







则.此题和答案不一致，不确定是否正确.

【64】设是上的维线性空间，定义

.

（1）试证：是的一个线性变换，且，其中为零变换.

（2）求及的维数.

【解答】（1）证明线性变换只需要证明加法与数乘即可.任取如下



根据线性空间的性质，有



接下来考虑数乘，有.

从而满足数乘，即是一个线性变换.

考虑，个，则我们可以得到：



其中有个.从而根据数学归纳法，我们可以得到：



即是零变换.

（2）考虑，即求满足的，则容易得到



从而是维的. 接下来考虑，任给一个，都有，从而



从而是维的.（此处说明都简化了，实际上是很容易证明的.）

【65】试求线性空间的线性变换的像及核并确定他们的维数，其中.

【解答】首先考虑像空间，简单的有



故像空间是二维的.接下来考虑核空间，即要满足



故，从而核空间是一维的.