习题三

【1】设$5(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+4(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})=2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})$，求向量$\boldsymbol{\gamma}$.其中

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix}$$

【解答】我们有

$$5(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+4(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})=2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{6}(3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})$$

代入有$\boldsymbol{\gamma}=\frac{1}{6}(3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{6}\left(3\begin{bmatrix}3\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\-1\\3\\2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}^T$.

【2】把向量$\boldsymbol{\beta}$表示成向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合，其中

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

【解答】即解线性方程组.我们有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}k_1+k_2+k_3=1\\k_2+k_3=2\\k_1+k_3=3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}k_1=-1\\k_2=-2\\k_3=4\end{cases}$$

即$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$.

【3】找出下面的四个向量中哪个向量不能由其余三个向量线性表示？

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\5\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\0\\1\end{bmatrix}$$

【解答】注意到$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4}{2}$，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$是线性相关的.故$\boldsymbol{\alpha}_3$无法被表示出来.

【4】设向量组

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\a\\b\\0\end{bmatrix}$$

问：

（1）a,b 取何值时，向量$\boldsymbol{\beta}$是向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$的线性组合，并写出$a=1,b=\dfrac{1}{3}$时$\boldsymbol{\beta}$的表达式.

（2）a,b 取何值时，向量$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

【解答】(1) 注意到$\boldsymbol{\beta}$的最后一位有数，而三个向量中最后一位也有数的是$\boldsymbol{\alpha}_2$，故必定只有一个$\boldsymbol{\alpha}_2$.此时，有$\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+n\boldsymbol{\alpha}_3$

对比系数发现，我们有$\begin{cases}m+3+n=1\\-1+an=2\\m+2+bn=-2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}n=\dfrac{3}{a}\\m=-2-\dfrac{3}{a}\\b=-\dfrac{2}{3}a+1\end{cases}$，故需要满足

$$b=-\frac{2}{3}a+1$$

且$a\neq0,b\neq1$（这是为了避免$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_3$）.代入$a=1,b=\dfrac{1}{3}$，有

$$\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+n\boldsymbol{\alpha}_3=-5\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$$

（2）$a=0,b=1$或者$a\neq0,b\neq1$且$b\neq-\dfrac{2}{3}a+1$.

【5】设有向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{bmatrix}$$

讨论：（1）a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示？

（2）a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，且表示式唯一？写出该表示式.

（3）a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，但表示式不唯一？并写出所有的表示式.

【解答】（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\b+3\\5\end{bmatrix}$

写出矩阵进行化简即可.我们有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&1&a&2&b+1\\0&2&-2&a+5&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}$$

发现不能线性表示，只需要$a=-1,b\neq 0$，这样会出现无解方程，即无法表示.

（2）$a\neq -1$时，方程有解，此时可以解出系数

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&-\dfrac{2b}{a+1}\\0&1&0&0&\dfrac{a+b+1}{a+1}\\0&0&1&0&\dfrac{b}{a+1}\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow k_1=-\frac{2b}{a+1},k_2=\frac{a+b+1}{a+1},k_3=\frac{b}{a+1}$$

因为此时满秩，故解唯一.得到$\boldsymbol{\beta}=-\dfrac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\dfrac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\dfrac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3$.

（3）要无穷解，需要秩不满，故$a=-1,b=0$，此时可以解出

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-1&0\\0&1&-1&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow k_1=n-2m, k_2=1-2n+m, k_3=m, k_4=n$$

$$m,n\in\mathbb{R}$$

故得到$\boldsymbol{\beta}=(n-2m)\boldsymbol{\alpha}_1+(1-2n+m)\boldsymbol{\alpha}_2+m\boldsymbol{\alpha}_3+n\boldsymbol{\alpha}_4$.

【6】判断下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$；

（3）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$；

（4）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$.

【解答】（1）线性相关，注意到有$-4\boldsymbol{\gamma}+6\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}$.

（2）线性相关，注意到有$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}$.

（3）线性不相关，写出矩阵化简看秩，有

$$\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-1&1\\0&0&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&3&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

发现秩为3，而向量个数也为3，故线性无关.

（4）线性不相关，写出矩阵化简看秩，有

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&-2&0\\0&-2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

发现秩为3，而向量个数也为3，故线性无关.

【7】讨论下列向量组的线性相关性：

（1）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}-1\\k\\0\\2\end{bmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}2\\4\\k\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}4\\5\\-4\\3\end{bmatrix}$.

【解答】（1）写出矩阵化简看秩，有

$$\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&k\\3&-1&0\\4&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&k+2\\0&-7&3\\0&-7&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&k+2\\0&-7&3\\0&0&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&k+2\\0&-7&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

容易发现秩为3，无论k取何值，秩都为3，故线性无关.

（2）写出矩阵化简看秩，有

$$\begin{bmatrix}2&1&4\\4&2&5\\k&-3&-4\\-2&-1&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&4\\0&0&-3\\k&-3&-4\\0&0&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\k&-3&-4\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\k&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

若$k=-6$，则秩为2，此时线性相关；若$k\neq-6$，则秩为3，此时线性无关.

【8】判断以下命题是否正确：

（1）若存在一组全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关；

（2）若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$$

则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关；

（3）若对任何一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$都有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\mathbf{0}$$

则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关；

（4）向量组则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由则$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$

线性无关；

（5）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，且$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由则$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关；

（6）向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\,(m>2)$中任意两个向量都线性无关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$也线性无关.

【解答】（1）×（2）×（3）√（4）×（5）√（6）×

（1）与定义矛盾，定义是“存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$”，且这样得到的是线性相关，不是线性无关，故错误.

（2）与定义矛盾，定义是“使$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$”，且这样得到的是线性相关，不是线性无关，故错误.

（3）正确.因为（3）的意思是只有当$k_1,k_2,\cdots,k_m$均为零时才能使原式成立，即线性无关的定义.

（4）$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由则$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$是否相关无关没有关系，因为还要考虑到$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$每一个能否用剩余向量表示.

（5）正确.首先确定$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，若$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1$不能由则$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，与题设矛盾！

（6）任意两个向量线性无关与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关没有直接关系，因为可能发生“多个向量的线性组合与另一个向量线性相关”的情况.

【9】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\,(s\geq 3)$线性无关，指出向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1$$

的线性关系并说明理由.

【解答】

若s为奇数，则令$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，有

$$(k_1+k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\ldots+(k_{s-1}+k_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geq 3)$线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+k_s=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \ldots \\ k_{s-1}+k_s=0 \end{cases} \Longrightarrow -k_s=k_1=-k_2=k_3=\ldots=k_s$$

即有$k_1=k_2=\ldots=k_s=0$，即线性无关.

若s为偶数，则有$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots-(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，存在一组不全为零的系数使得$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$，即线性相关.

【10】设向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，问$l,m$满足什么条件时，向量组

$$l\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha},m\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}$$

也线性无关？

【解答】也线性无关即任意两个向量不能表示出另外一个向量.若可以表示，取$l\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha},m\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta}$表示$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}$，必须一定有

$$-(l\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})-\frac{1}{m}(m\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}$$

$$\Longrightarrow -l\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{m}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

而线性无关，即$-l\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{m}\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，我们得到$l=\frac{1}{m}\Longrightarrow lm=1$.

【11】设向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，证明向量

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}$$

也线性无关.

【解答】我们取$k_1(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+k_2(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})+k_3(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，因为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$前系数均为$0$，故有

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \\ k_2 - k_1 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{cases}$$

故只有$k_1 = k_2 = k_3 = 0$时，才能满足$k_1(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + k_2(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) + k_3(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$，即

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\alpha}$$

也线性无关.

【12】证明：向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$线性无关的充要条件是

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$$

中任意$k (1 \leq k \leq s)$个向量都线性无关.

【解答】必要性.考虑反证法，若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$存在一组$k$个向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i+k-1}$$

线性相关，则存在一组不全为零的系数$m_1, m_2, \cdots, m_k$，使得

$$m_1 \boldsymbol{\alpha}_i + m_2 \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + m_k \boldsymbol{\alpha}_{i+k-1} = \mathbf{0}$$

故同样存在一组不全为零的系数使得$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$的线性组合为$\mathbf{0}$，只需要先取

$$m_1 \boldsymbol{\alpha}_i + m_2 \boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + m_k \boldsymbol{\alpha}_{i+k-1} = \mathbf{0}$$

剩余向量系数全为0即可，即$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$线性相关，这与题设矛盾！故假设不成立，即$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$中任意$k (1 \leq k \leq s)$个向量都线性无关.

充分性. $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geq 2)$中任意$k (1 \leq k \leq s)$个向量都线性无关.那么取$k = s$即可，从而原命题得证！

【13】证明：两个n维向量$(n \geq 2)$线性相关的充要条件是这两个向量的对应分量成比例.

【解答】令$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$.充分性.若$a_i=kb_i$，则我们有$\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，此时找到了一组不全为零的数.故二者线性相关.

必要性.若二者线性相关，则存在一组不全为零的数k_1,k_2使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

不妨设$k_1\neq 0$，故$\boldsymbol{\alpha}=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\beta}\Longrightarrow a_i=-\dfrac{k_2}{k_1}b_i$，即对应分量成比例.原命题得证！

【14】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，证明：向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$$

也线性无关.

【解答】类似于题目【11】，取

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0}$$

整理得到

$$(k_1+k_2+\ldots+k_s)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+\ldots+k_s)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，故

$$\begin{cases}k_s=0\\k_s+k_{s-1}=0\\\ldots\\k_1+k_2+\ldots+k_s=0\end{cases}\Longrightarrow k_1=k_2=\ldots=k_s=0$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s$也线性无关.

【15】设n维基本向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$可由$n$维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

【解答】因为任一n维向量可由n维基本向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$（可以看作基底）线性表示，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$可由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性表示.而$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$可由$n$维向量

组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，故两个向量组等价.

即$r(\boldsymbol{\varepsilon})=r(\boldsymbol{\alpha})=n$.故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

【16】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$n$个$n$维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是任意一个$n$维向量都可被它们线性表示.

【解答】设n维基本向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，容易证明任意一个$n$维向量都可由其线性表示.

必要性. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$都能由$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$线性表示，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \boldsymbol{\alpha}_2=k_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_n\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n=k_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

故$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n^T\end{bmatrix}$，两边取行列式，得到

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n^T\end{vmatrix}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，故$\begin{vmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\ \boldsymbol{\alpha}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_n^T\end{vmatrix}\neq 0\Longrightarrow\begin{vmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$.故矩阵

$$K=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\ k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ k_{n1}&k_{n2}&\cdots&k_{nn}\end{bmatrix}$$

可逆，则$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1^T\\\boldsymbol{\varepsilon}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{\varepsilon}_n^T\end{bmatrix}=K^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^T\\\boldsymbol{\alpha}_2^T\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^T\end{bmatrix}$.也即$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$都能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示，故任意一个$n$维向量都可由其线性表示.

充分性. 意一个n维向量都可被它们线性表示，故$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$可以由

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$$

线性表示，故根据【15】的结论，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.从而原命题得证！

【17】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关，且$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$都不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示.证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$等价.

【解答】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关，即存在不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_s,b,c$使得

$$\sum_{i=1}^{s}a_i\boldsymbol{\alpha}_i+b\boldsymbol{\beta}+c\boldsymbol{\gamma}=0$$

因为$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$都不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，故$b\neq0,c\neq0$.（若其中有一个为零，则另一个向量可以被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示；若两个都为零，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，矛盾）.故容易知道

$$\boldsymbol{\beta}=-\sum_{i=1}^{s}\frac{a_i}{b}\boldsymbol{\alpha}_i-\frac{c}{b}\boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=-\sum_{i=1}^{s}\frac{a_i}{c}\boldsymbol{\alpha}_i-\frac{b}{c}\boldsymbol{\beta}$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$可以表示$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$.

且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\gamma}$可以表示$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$.

故二者等价，原命题得证！

【18】设向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，但其中任意$m-1$个向量都线性无关，证明：必存在$m$个全不为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

【解答】$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则存在$m$个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

我们需要证明的是$k_1,k_2,\cdots,k_m$中没有一个数等于0.假设存在$k_i=0$，则

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

发现我们找到了$m-1$个不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},k_{i+1},\cdots,k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，这与题设任意$m-1$个向量都线性无关矛盾，故不存在$k_i=0$，即必存在$m$个**全不为零**的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

【19】求下列向量组的极大线性无关组与秩：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}3\\-5\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-5\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\-4\\-1\\-3\end{bmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\-1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}14\\7\\0\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}4\\2\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}6\\5\\1\\2\end{bmatrix}$.

【解答】（1）写出矩阵看秩，有

$$\begin{bmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&16&-10&11\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\1&-5&3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&16&-10&11\\0&24&-18&19\\0&2&-1&1\\1&-5&3&-3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&0&-2&3\\0&0&-6&7\\0&2&-1&1\\1&-5&3&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&-2&3\\0&0&0&-2\\0&2&-1&1\\1&-5&3&-3\end{bmatrix}$$

容易发现秩为4，故极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

（2）写出矩阵看秩，有（变形时不要交换行，否则原向量位置变化了）

$$\begin{bmatrix}2&0&14&4&6\\1&2&7&2&5\\3&-1&0&-1&1\\0&0&3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-4&0&0&-4\\1&2&7&2&5\\0&-7&-21&-7&-14\\0&0&3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&2&7&2&5\\0&1&3&1&2\\0&0&3&1&2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&2&7&2&5\\0&1&0&0&0\\0&0&3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&7&2&5\\0&1&0&0&0\\0&0&3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&1&0\end{bmatrix}$$

容易发现秩为4，观察变形后的向量组，可以发现极大线性无关组可以取

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5\\\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\\\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\end{cases}$$

【20】求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示：

（1）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}6\\4\\1\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\\-4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\4\\-9\\-16\\22\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}7\\1\\0\\-1\\3\end{bmatrix}$.

【解答】（1）写出矩阵进行化简有

$$\begin{bmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\2&0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\2&0&1&2\end{bmatrix}$$

容易发现秩为2，我们取极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$即可.容易得到

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$$

（2）写出矩阵进行化简有

$$\begin{bmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-11&55&7\\0&-8&40&1\\1&2&-9&0\\0&5&-25&-1\\0&-8&40&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-11&55&7\\0&-8&40&1\\1&2&-9&0\\0&5&-25&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&-11&55&0\\0&-8&40&0\\1&2&-9&0\\0&5&-25&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&-5&0\\0&1&-5&0\\1&2&-9&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&-5&0\\0&0&0&0\\1&2&-9&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

容易发现秩为3，我们取极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，容易得到$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-5\boldsymbol{\alpha}_2$.

【21】设向量$\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\gamma}=-\boldsymbol{\xi}+3\boldsymbol{\eta}$，试用不同的方式验证向量$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关.

【解答】解法 1：容易发现$\boldsymbol{\alpha}-\dfrac{5}{4}\boldsymbol{\beta}+\dfrac{3}{4}\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，存在不全为零的常数满足

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}+k_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$$

故三个向量线性相关.

解法 2：根据 P108 页定理 3.5，我们发现向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$能够被向量组$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$表示，且$3>2$，故向量组$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$线性相关.（向量组的替换定理）

【22】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$，证明：其中任意选取$m$个向量所构成的向量组的秩$\geq r+m-s$.

【解答】取$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{im}$的一个极大线性无关组$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jt}$，将其扩充为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大线性无关组

$$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jt},\boldsymbol{\alpha}_{j(t+1)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$$

因$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{im}$中任意一个元素皆是$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jt}$的线性组合，而

$$\boldsymbol{\alpha}_{j(t+1)},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$$

皆不是，故后者皆来自$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中除了$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{im}$的元素，而除去之后

元素只剩下$s-m$个，故$r-t\le s-m$，移项后得到$t\ge r+m-s$，即

$$\text{向量组的秩}\ge r+m-s.$$

【23】设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$为$m\times 2n$矩阵，证明：

$$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\le r(\boldsymbol{C})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$$

【解答】因为$\boldsymbol{A}$的最高阶非零子式总是$\boldsymbol{C}$的非零子式，故$r(\boldsymbol{A})\le r(\boldsymbol{C})$，同理可以得到$r(\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{C})$，故$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\le r(\boldsymbol{C})$.接下来证明不等式右边.

不妨设$r(\boldsymbol{A})=r,r(\boldsymbol{B})=s$，将$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$分别作列变换化为列阶梯形$\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}$，则$\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}$中分别有$r$个和$s$个非零列.所以$\left(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}\right)$中有$r+s$个非零列，故$r\left(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}\right)\le r+s$.又因为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\sim\left(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}\right)$，行、列变换不改变秩，故$r(\boldsymbol{C})=r\left(\tilde{\boldsymbol{A}},\tilde{\boldsymbol{B}}\right)$，从而得到了

$$r(\boldsymbol{C})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})=r+s$$

从而不等式$\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\le r(\boldsymbol{C})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$得证！

【24】用基础解系表示出下列方程组的全部解：

（1）$\begin{cases}2x-y+3z=0\\x+3y+2z=0\\3x-5y+4z=0\\x+17y+4z=0\end{cases}$；　　（2）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0\end{cases}$；

（3）$\begin{cases}2x+y-z=1\\3x-2y+z=4\\x+4y-3z=7\\x+2y+z=4\end{cases}$；　　（4）$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=1\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=2\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=1\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=5\end{cases}$；

（5）$\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1\\x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1\\x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3\\x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3\\x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1\end{cases}$.

【解答】（1）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}2&-1&3\\1&3&2\\3&-5&4\\1&17&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-7&-1\\1&3&2\\0&-14&-2\\0&14&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-7&-1\\1&3&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&2\\0&7&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}7&21&14\\0&21&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}7&0&11\\0&7&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

故得到通解为$c[11,1,-7]^T$，其中$c\in\mathbb{R}$.

（2）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3\\0&1&2&2&6\\5&4&3&3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6\\0&1&2&2&6\\0&-1&-2&-2&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故得到通解为

$$c_1[1,-2,1,0,0]^T+c_2[1,-2,0,1,0]^T+c_3[5,-6,0,0,1]^T$$

其中$c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$.

（3）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}2&1&-1&1\\3&-2&1&4\\1&4&-3&7\\1&2&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-3&-3&-7\\0&-8&-2&-8\\0&2&-4&3\\1&2&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-6&-6&-14\\0&0&-18&4\\0&6&-12&9\\1&2&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&-18&-5\\0&0&-18&4\\0&6&-12&9\\1&2&1&4\end{bmatrix}$$

发现第一行第二行解出的结果不同，故原方程无解.

（4）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}1&2&4&-3&1\\3&5&6&-4&2\\4&5&-2&3&1\\3&8&24&-19&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3&1\\3&5&6&-4&2\\1&0&-8&7&-1\\0&3&18&-15&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3&1\\0&-1&-6&5&-1\\0&-2&-12&10&-2\\0&3&18&-15&3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3&1\\0&-1&-6&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&4&-3&1\\0&1&6&-5&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-8&7&-1\\0&1&6&-5&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故我们得到一组特解为$[-1,1,0,0]^T$，得到通解为

$$[-1,1,0,0]^T+c_1[8,-6,1,0]^T+c_2[-7,5,0,1]^T$$

其中$c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

（5）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}1&3&5&-4&0&1\\1&3&2&-2&1&-1\\1&-2&1&-1&-1&3\\1&-4&1&1&-1&3\\1&2&1&-1&1&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&0&-3&2&1&-2\\0&-5&-4&3&-1&2\\0&-7&-4&5&-1&2\\0&-1&-4&3&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&0&-3&2&1&-2\\0&0&16&-12&-6&12\\0&0&24&-16&-8&16\\0&-1&-4&3&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&5&-4&0&1\\0&0&-3&2&1&-2\\0&0&-2&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-1&-4&3&1&-2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&3&0&-4&0&1\\0&0&0&2&1&-2\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-1&0&3&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&0&-4&0&1\\0&1&0&-3&-1&2\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&2&1&-2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&5&3&-5\\0&1&0&-3&-1&2\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&2&1&-2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}6&0&0&30&18&-30\\0&10&0&-30&-10&20\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&30&15&-30\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}6&0&0&0&3&0\\0&10&0&0&5&-10\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&30&15&-30\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&0&0&0&1&0\\0&2&0&0&1&-2\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&1&-2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故容易得到特解为$[0,-1,0,-1,0]^T$，得到通解为

$$[0,-1,0,-1,0]^T+c[-1,-1,0,-1,2]^T$$

其中$c\in\mathbb{R}$.

【25】已知矩阵$\begin{bmatrix}1&-11&3&7\\-2&16&-4&-10\\1&-2&0&1\\0&-3&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$的各个列向量都是齐次线性方程组

$$\begin{cases}4x_1+3x_2+2x_3+2x_5=0\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0\\2x_1+x_2-2x_4=0\\3x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=0\end{cases}$$

的解向量，问这四个解向量能否构成方程组的基础解系？是多了还是少了？多了如何去掉？少了如何补充？

【解答】写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}4&3&2&0&2\\1&1&1&1&1\\2&1&0&-2&0\\3&2&1&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-1&-2&-4&-2\\1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-4&-2\\0&-1&-2&-4&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&4&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-3&-1\\0&1&2&4&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故容易得到通解为

$$c_1[1,-2,1,0,0]^T+c_2[3,-4,0,1,0]^T+c_3[1,-2,0,0,1]^T,c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$$

对比上面的矩阵，发现需要去掉第二列第四列，补充$[1,-2,0,0,1]^T$.

【26】已知齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$$

又已知齐次线性方程组(II)的通解

$$\boldsymbol{\eta}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix},\quad c_1,c_2\text{为任意常数}$$

（1）求齐次线性方程组(I)的基础解系；

（2）线性方程组(I)与方程组(II)是否有公共非零解？若有，求出所有公共非零解；若没有，则说明理由.

【解答】（1）写出矩阵，有

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

故容易得到基础解系为$[0,0,1,0]^T$,$[-1,1,0,1]^T$.

（2）即考虑基础解系的线性组合能否相等，我们有

$$c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}=c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

得到方程组为$\begin{cases}-c_2+c_4=0\\c_1+2c_2-c_4=0\\c_1+2c_2-c_3=0\\c_2-c_4=0\end{cases}$，写出矩阵，有

$$\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\1&2&0&-1\\1&2&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}\overset{\text{行变换}}{\sim}\begin{bmatrix}0&1&0&-1\\1&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

可以得到$c_1=-c_2=-c_3=-c_4$，故可以得到公共非零解为$c\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\1\end{bmatrix},c\in\mathbb{R}$.

【27】k取何值时，下列方程组无解？有唯一解？或有无穷多解？在有无穷多解时，求出其全部解.

（1）$\begin{cases}kx+y+z=1\\x+ky+z=k\\x+y+kz=k^2\end{cases}$；　　（2）$\begin{cases}2x-y-z=2\\x-2y+z=k\\x+y-2z=k^2\end{cases}$.

【解答】（1）详见习题一【8】（3），下面答案为照抄，题目为

$$\begin{cases}px_1+x_2+x_3=1\\x_1+px_2+x_3=p\\x_1+x_2+px_3=p^2\end{cases}$$

我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

当$p\neq-2$时

$$\begin{bmatrix}p&1&1&1\\1&p&1&p\\1&1&p&p^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}p+2&p+2&p+2&p^2+p+1\\1&p&1&p\\1&1&p&p^2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dfrac{p^2+p+1}{p+2} \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dfrac{p^2+p+1}{p+2} \\ 0 & p-1 & 0 & \dfrac{p-1}{p+2} \\ 0 & 0 & p-1 & \dfrac{p^3+p^2-p-1}{p+2}\end{bmatrix}$$

若$p=1$，方程有无穷多解，解为$x_1=-a-b+1, x_2=a, x_3=b, a, b\in\mathbb{R}$.

若$p\neq 1$时，方程解为

$$x_1=\frac{-(p+1)}{p+2}, x_2=\frac{1}{p+2}, x_3=\frac{(p+1)^2}{p+2}$$

当$p=-2$时，$\begin{bmatrix}p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$，发现方程组无解.

综上所述：

（i）$p=-2$时无解；

（ii）$p=-1$时方程有无穷多解，解为$x_1=-a-b+1, x_2=a, x_3=b, a, b\in\mathbb{R}$；

（iii）$p\neq 1, p\neq -2$时，方程解为$x_1=\dfrac{-(p+1)}{p+2}, x_2=\dfrac{1}{p+2}, x_3=\dfrac{(p+1)^2}{p+2}$.

按照习题要求，写成基础解系的话，无穷多解的通解为

$$\begin{bmatrix}1 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}-1 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}, c_1, c_2\in\mathbb{R}$$

（2）写出矩阵，有

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & k \\ 1 & 1 & -2 & k^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2-k-k^2 \\ 1 & -2 & 1 & k \\ 1 & 1 & -2 & k^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2-k-k^2 \\ 0 & -3 & 3 & k-k^2 \\ 1 & 1 & -2 & k^2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & k^2 \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{3}(k^2-k) \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & \dfrac{2}{3}k^2+\dfrac{1}{3}k \\ 0 & 1 & -1 & \dfrac{1}{3}(k^2-k) \\ 0 & 0 & 0 & k^2+k-2\end{bmatrix}$$

发现$k\neq 1,-2$时无解，因为此时会出现无解方程.

$k=1$时有无穷多解，解为$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},c_1\in\mathbb{R}$.

$k=-2$时有无穷多解，解为$\begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},c_2\in\mathbb{R}$.

【28】当a,b取何值时，下列线性方程组无解？有唯一解？或有无穷多解？在有解时，求出其所有解.

（1）$\begin{cases}ax+y+z=4\\x+by+z=3\\x+2by+z=4\end{cases}$；（2）$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=1\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$.

【解答】（1）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&b&1&3\\0&b&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a&1&1&4\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&1-a&4-2a\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{bmatrix}$$

显然$b=0$时无解.若$b\neq 0$，此时有

$$\begin{bmatrix}0&1&1-a&4-2a\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&0&1-a&4-2a-\dfrac{1}{b}\\1&0&1&2\\0&b&0&1\end{bmatrix}$$

此时，若$a=1,b\neq\dfrac{1}{2}$，方程无解；若$a\neq 1,b\neq 0$时有唯一解，解为

$$x=\frac{1-2b}{(1-a)b},y=\frac{1}{b},z=\frac{4b-2ab-1}{(1-a)b}$$

若$a=1,b=\dfrac{1}{2}$时有无穷多解，此时变为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-a & 4-2a-\frac{1}{b} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

可以得到通解$[x,y,z]^T=[2,2,0]^T+c[-1,0,1]^T,c\in\mathbb{R}$.

（2）写出矩阵，变形，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix}$$

发现矩阵的秩与a的值有关.

若$a=1$，此时秩最多为3，方程只能有无穷多解或者无解，矩阵继续变形，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故若$a=1,b\neq-1$，方程无解；若$a=1,b=-1$时，方程有无穷解，通解为

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

若$a\neq1$，则方程有唯一解，解为$\left[\dfrac{b-a+2}{a-1},\dfrac{a-2b-3}{a-1},\dfrac{b+1}{a-1},0\right]^T$.

【29】设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3 \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3 \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3 \\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_4=a_4^3 \end{cases}$$

（1）证明：若常数a_1,a_2,a_3,a_4互不相等，则此线性方程组无解.

（2）若$a_1=a_3=a,a_2=a_4=-a(a\neq0)$，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=c_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

是该线性方程组的两个解，试写出此线性方程组的通解.

【解答】（1）写出增广矩阵的行列式，有

$$\det\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&a_1^3\\1&a_2&a_2^2&a_2^3\\1&a_3&a_3^2&a_3^3\\1&a_4&a_4^2&a_4^3\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le 4}(a_i-a_j)$$

若常数互不相等，则此时行列式不为零，容易得到$r\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=4$.

而系数矩阵的任意三阶子式都是 Vandermonde 行列式，且都不为零，故$r(\boldsymbol{A})=3$.

故$r(\boldsymbol{A})=3<r\left(\tilde{\boldsymbol{A}}\right)=4$，所以方程组无解.

（2）容易得到通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{\eta}_1+c(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix},c\in\mathbb{R}$$

【30】判断以下命题是否正确：

（1）若$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则与$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$等价的向量组也为此方程组的基础解系；

（2）若$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，当$m<n$时，方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$必有无穷多解；

（3）设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$r(\boldsymbol{A})=n$，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$必有唯一解；

（4）设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$r(\boldsymbol{A})=m$，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$必有解；

（5）设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，则方程组$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\beta}$必有解；

（6）若方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$必有唯一解.

【解答】（1）×（2）×（3）×（4）√（5）√（6）×

（1）显然错，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$基础解系的一个等价向量组虽然也都是其解，但它所含的向量个数可以大于基础解系向量个数，因而它就不一定是解向量组的极大无关组.

（2）显然错，也可能无解.

（3）显然错，也可能无解.

（4）对，行满秩方程组必有解.

（5）对，注意到$r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)$，故

$$r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta}))\leq r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$$

所以方程组$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\beta}$必有解.

（6）显然错，也可能无解.

【31】设$\boldsymbol{A}$是n阶方阵，试证若对于任意一个n维向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【解答】因为线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中含有$n$个线性无关的解向量，故秩$r(\boldsymbol{A})=0$，即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【32】设齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0,i=1,2,\cdots,n$$

的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，其中$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，而$\boldsymbol{A}$中某元素$a_{ij}$的代数余子式$A_{ij}\neq0$.证明：$(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T$是该齐次线性方程组的一个基础解系.

【解答】因为行列式$|\boldsymbol{A}|=0$，故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，将

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

按列分块，$\boldsymbol{A}^*=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，其中$\boldsymbol{\alpha}_i=(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})$$

即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}$，表明$\boldsymbol{\alpha}_i$是齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.

又因为$|\boldsymbol{A}|=0$，$A_{ij}\neq0$，即$\boldsymbol{A}$存在一个$n-1$阶的非零子式，故$r(\boldsymbol{A})=n-1$.

因此，方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系只包含有$n-r(\boldsymbol{A})=1$个向量，任意一个非零向量解都可作为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系；由$A_{ij}\neq 0$知$\boldsymbol{\alpha}_i\neq\boldsymbol{0}$，因此

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})^T$$

是该齐次线性方程组的一个基础解系.原命题得证！

【33】证明：非齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,i=1,2,\cdots,n$$

对任意常数$b_1,b_2,\cdots,b_n$都有解的充分必要条件是其系数矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式不为零.

【解答】充分性.若行列式不为零，根据 Cramer 法则可知对任意常数$b_1,b_2,\cdots,b_n$方程都有解.

必要性.根据已知，任一n维向量$(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$都可以由$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示，故n维基本向量组$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$也可由$\boldsymbol{A}$的列向量组线性表示.故$\boldsymbol{A}$的列向量组与$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$等价，故$r(\boldsymbol{A})=n$，则此时显然有$\det\boldsymbol{A}\neq 0$.

【34】设$\boldsymbol{\xi}$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$是其对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，证明：

（1）$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r,\boldsymbol{\xi}$线性无关；

（2）$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi},\cdots,\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi}$线性无关；

（3）方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$的任一个解$\boldsymbol{\gamma}$都可以表示成

$$\boldsymbol{\gamma}=c_0\boldsymbol{\xi}+c_1(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi})+c_2(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi})+\cdots+c_r(\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi})$$

其中，$c_0+c_1+\cdots+c_r=1$.

【解答】（1）设有一组数$k_0,k_1,\cdots,k_r$使得$k_0\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$，两边同时乘以矩阵$\boldsymbol{A}$，得到

$$k_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$$

又因为$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$，且$\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{0}$，得到$k_0\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，可以得到$k_0=0$.

此时$k_0\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$变为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$$

而$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，故其线性无关，即

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

从而得到若需要$k_0\boldsymbol{\xi}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}$成立，则$k_i=0,i=0,1,\cdots,r$，也即$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r,\boldsymbol{\xi}$线性无关.

（2）同理，设有一组数$k_0,k_1,\cdots,k_r$使得$k_0\boldsymbol{\xi}+k_1(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi})+\cdots+k_r(\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}$，两边同时乘以矩阵$\boldsymbol{A}$，得到

$$\begin{aligned}&k_0\boldsymbol{A\xi}+k_1\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi})+\cdots+k_r\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}\\ \Longrightarrow&\left(k_0+\sum_{i=1}^{r}k_i\right)\boldsymbol{A\xi}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots k_r\boldsymbol{\eta}_r=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

又因为$\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0})$，且$\boldsymbol{A\eta}_i=\boldsymbol{0}$，得到$\left(k_0+\sum_{i=1}^{r}k_i\right)\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$，故

$$k_0+\sum_{i=1}^{r}k_i=0$$

根据（1）我们知道$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_r,\boldsymbol{\xi}$线性无关，故$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，故可以解出$k_0=0$，从而我们知$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi},\cdots,\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi}$线性无关.

（3）$\boldsymbol{\gamma}$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的一个解（此处取$\boldsymbol{\gamma}\neq\boldsymbol{\xi}$，否则二者相减得到的是零向量），故我们有$\boldsymbol{A\gamma}=\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{\beta}$，可以得到$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}$，发现方程变为了$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的形式，故根据基础解系的性质，我们一定有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\eta}_r,c_i\in\mathbb{R}\\ \Longrightarrow&\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\xi}+c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\eta}_r\\ &\quad=c_0\boldsymbol{\xi}+c_1(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi})+c_2(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi})+\cdots+c_r(\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi})\end{aligned}$$

为了满足$\boldsymbol{\xi}$的系数，必须有$c_0+c_1+\cdots+c_r=1$，从而我们证明了任意一个解向

量$\boldsymbol{\gamma}$都可以表示为$\boldsymbol{\gamma}=c_0\boldsymbol{\xi}+c_1(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\xi})+c_2(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi})+\cdots+c_r(\boldsymbol{\eta}_r+\boldsymbol{\xi})$的形式，其中，$c_0+c_1+\cdots+c_r=1$.事实上，此处$c_1,\cdots,c_r$都是可以任取的，约束条件

$$c_0+c_1+\cdots+c_r=1$$

实际上是为了约束$\boldsymbol{\xi}$，若$c_1,\cdots,c_r$的和较大或者较小，都可以通过c_0来调整.

而若$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\xi}$，取$c_0=1$即可.

【35】设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，$\boldsymbol{b}$是n维非零列向量，$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的解，$\boldsymbol{\eta}$是对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.

（1）若$\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{\xi}_2$，证明：$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性无关.

（2）若$\boldsymbol{A}$的秩$r(\boldsymbol{A})=n-1$，证明：$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性相关.

【解答】（1）若$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性相关，则存在不全为零的$c_1,c_2$满足

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$$

不妨设$c_2\neq 0$，则此时得到$\boldsymbol{\xi}_2=-\frac{c_1}{c_2}\boldsymbol{\xi}_1$.那么$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=-\frac{c_1}{c_2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=-\frac{c_1}{c_2}\boldsymbol{b}$，因为$\boldsymbol{b}$是$n$维非零列向量，所以可以得到$c_1=-c_2$，带回$\boldsymbol{\xi}_2=-\frac{c_1}{c_2}\boldsymbol{\xi}_1$有$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_2$，与题设矛盾！故原假设不成立，则$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性无关.

（2）若$\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\xi}_2$，则显然线性相关.若$\boldsymbol{\xi}_1\neq\boldsymbol{\xi}_2$，容易知道$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{0}$，且

$$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{0}$$

故$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$也是方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.因为$r(\boldsymbol{A})=n-1$，故齐次线性方程组的基础解系可以为$\boldsymbol{\eta}$（基础解系向量个数为$n-r=n-n+1=1$，故唯一的解必定可以作为基础解系），从而$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$与$\boldsymbol{\eta}$线性相关，即存在数$k$使得$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=k\boldsymbol{\eta}$.故

$$-\boldsymbol{k}\eta+\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}$$

即$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性相关.

【36】设$a_1,a_2,\cdots,a_s$是s个互不相同的数，且$s<t$.证明：向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关，其中

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\a_1\\a_1^2\\\vdots\\a_1^{t-1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\a_2\\a_2^2\\\vdots\\a_2^{t-1}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=\begin{bmatrix}1\\a_s\\a_s^2\\\vdots\\a_s^{t-1}\end{bmatrix}$$

【解答】将每个$\boldsymbol{\beta}_i$的前s个分量组成新的向量组

$$\boldsymbol{\beta}_1'=\begin{bmatrix}1\\a_1\\a_1^2\\\vdots\\a_1^{s-1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2'=\begin{bmatrix}1\\a_2\\a_2^2\\\vdots\\a_2^{s-1}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s'=\begin{bmatrix}1\\a_s\\a_s^2\\\vdots\\a_s^{s-1}\end{bmatrix}$$

计算$\det[\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_s']$，容易发现这是一个 Vandermonde 行列式，其值为

$$\prod_{1\le i<j\le s}(a_j-a_i)\neq 0$$

故$\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_s'$线性无关，而$\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_s'$又是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的截短向量，故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$也线性无关.

【37】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，则必存在自然数$k(2\le k\le s)$使$\boldsymbol{\alpha}_k$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$的线性组合.

【解答】向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，即存在不全为零的数$\lambda_i,1\le i\le s$满足

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

而且$\lambda_2,\lambda_3,\cdots,\lambda_s$不全为零，如若不然，则$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，而$\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，此时得到$\lambda_1=0$，发现$\lambda_i,1\le i\le s$全为零，与题设不符合.因此存在$k(2\le k\le s)$使得

$$\lambda_k\neq 0,\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_s=0$$

于是

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$
$$\Longrightarrow\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$
$$\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}_k=-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$$

即$\boldsymbol{\alpha}_k$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k-1}$的线性组合.

【38】设$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$可由$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性表示，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$等价.

【解答】我们只需要证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示即可.

不妨设$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的极大无关组，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的极大无关组（二者秩相同，故极大无关组所含向量数相同）.考虑向量组

$$\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m]$$

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$可由$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$表示出，则$r(\boldsymbol{C})=r(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m)=m$，而又有

$$r(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m)=m$$

故$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_m$可由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$表示出，也即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，从而我们证明了向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$与向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$等价.

【39】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0})$线性相关，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i(1\leq i\leq m)$可由向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$$

线性表示.

【解答】因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0})$线性相关，故有不全为零的$k_j(0\leq j\leq m)$，使得$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$.容易证明$k_0\neq 0$.如若不然，则$k_0=0$，此时

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关，故此时$k_j=0(0\leq j\leq m)$，与题设不全为零矛盾！故$k_0\neq 0$.而又因为$\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，故必定存在$k_i\neq 0(1\leq i\leq m)$，若不存在

$$k_i \neq 0 (1 \leq i \leq m)$$

则$k_0\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=k_0\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$，与上面的条件矛盾！故此时我们找到了一个$\boldsymbol{\alpha}_i$，其可以表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_0}{k_i}\boldsymbol{\beta}-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\frac{k_{i+1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\frac{k_m}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_m$$

即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量$\boldsymbol{\alpha}_i(1\leq i\leq m)$可由向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$$

线性表示.命题得证！

【40】证明：$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关的充分必要条件是：当$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$时，必有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，这里$\boldsymbol{B}$是$n\times s$矩阵.

【解答】将矩阵$\boldsymbol{A}$进行分块，得到$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n],\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$

必要性.按照分块，我们有

$$\boldsymbol{AB}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}=\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i1}\boldsymbol{a}_i,\sum_{i=1}^{n} b_{i2}\boldsymbol{a}_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n} b_{is}\boldsymbol{a}_i\right]$$

发现得到的$\boldsymbol{AB}$的列向量均为矩阵$\boldsymbol{A}$列向量的线性组合，而这些线性组合的结果均为$\mathbf{0}$，同时，矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关，则这些线性组合的线性系数必须全部为0，即$\boldsymbol{B}$中所有元素均为零，故$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.必要性得证！

接下来证明充分性. 考虑反证法，若当$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$时，必有$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，而$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关，那么此时一定存在不全为零的系数$k_1,k_2,\cdots,k_n$满足

$$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=\mathbf{0}$$

可以用这组系数去替换矩阵$\boldsymbol{B}$中的任意一列，同样可以得到$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，而此时

$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$，与题设矛盾！故矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量必不可能线性相关，故矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性无关.从而原命题得证！

【41】设$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为r，证明：存在秩为$n-r$的n阶矩阵$\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$$

【解答】根据题设容易知道方程$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有$n-r$个线性无关的解向量构成的基础解系.再补上$r$个零向量即可构成$n$阶矩阵$\boldsymbol{B}$，且有$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.同时容易知道

$$r(\boldsymbol{B})=n-r$$

【42】设$m\times n$的矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为r，$r<n$，证明：齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意$n-r$个线性无关的解向量都是它的一个基础解系.

【证明】考虑反证法.若有$n-r$个线性无关的解向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-r}$不是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，由基础解系的定义知，至少有一个解向量$\boldsymbol{b}$不能由$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-r}$线性表示，因此$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-r},\boldsymbol{b}$线性无关，若需要表示这些线性无关的解，至少需要所含数目大于等于$n-r+1$的向量组（基础解系），这与$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系含$n-r$个向量矛盾！故原假设不成立.

附：要证明一组向量为齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系时，必须满足以下三条：（1）这组向量是该方程组的解；（2）这组向量必须是线性无关组，即基础解系各向量线性无关；（3）方程组的任意解均可由基础解系线性表出，即方程组的所有解都可以用基础解系的量来表示。另外，这组向量所含向量的个数为$n-r$.

【43】设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$实矩阵，证明：

（1）$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$是同解方程组；

（2）$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{AA}^T)$.

【解答】（1）若$\boldsymbol{x}_0$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，即$\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，显然我们有$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{x}_0$是方程$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.反之，若$\boldsymbol{x}_0$是方程$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，那么我们有

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$$

从而有$\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$，即$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$，从而

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0|^2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0)^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$$

于是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\mathbf{0}$，即$\boldsymbol{x}_0$是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解，从而）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$是同解方程组.

（2）二者同解，故二者解空间维数相同，而解空间维数又等于未知数个数减去系数矩阵的秩，故$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$.而我们知道$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)$，故容易知道

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^T)=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)$$

【44】设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$是$n\times s$矩阵.证明：方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$同解的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})$.

【解答】先证明必要性.设$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系中有$s-r$个解向量，又因为方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$同解，故线性方程组$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系中也包含了$s-r$个解向量，故$r(\boldsymbol{B})=s-(s-r)=r$，即$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})$.

接下来证明充分性.若$r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{B})$，则线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系中所包含的解向量个数相同.又发现$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的所有解都是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解，所以$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的一个基础解系也是$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的基础解系，即$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$同解.

【45】设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$（称$\boldsymbol{A}$为**幂等矩阵**）.证明：

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$$

【解答】$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\Longrightarrow\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，故$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$的每一列都是方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$的解向量.而$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$中的列向量未必构成解空间的基，故

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$$

实际上，这是显然的，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$中的列向量的极大无关组所含向量的数量必然小于等于$n-r(\boldsymbol{A})$，最多的情况就是基础解系的情况.

又有$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\geq r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$，从而我们有

$$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{E})=n$$

故夹逼得到$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

【46】设$\boldsymbol{A}$为n阶方阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$（称$\boldsymbol{A}$为**对合矩阵**）.证明：

$$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$$

【解答】$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}\Longrightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，故$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leq n$（和上一题类似，将$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$看成一个矩阵即可）.

同时我们有$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\geq r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(2\boldsymbol{E})=n$，从而夹逼得到$r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.证明和上一题是类似的.

【47】设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{B}$为$m\times 1$矩阵.证明：方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$有解的充要条件是$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$的任一解向量$\boldsymbol{y}_0$都是$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$的解向量.

【解答】先证明必要性.$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$有解，不妨设这个解为$\boldsymbol{x}_0$，则此时有

$$\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{B}$$

而对于方程$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$来说，对于其解向量$\boldsymbol{y}_0$我们有$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{0}$，从而有

$$\boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{0}$$

从而我们证明了$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$的任一解向量$\boldsymbol{y}_0$都是$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$的解向量.必要性得证.

接下来证明充分性. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$的任一解向量$\boldsymbol{y}_0$都是$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$的解向量，故方程组$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与方程组$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{B}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解.故$r(\boldsymbol{A}^T)=r\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^T\\\boldsymbol{B}^T\end{bmatrix}\right)$，从而有

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$$

即我们证明了方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{B}$有解（增广矩阵与系数矩阵同秩）.原命题得证！

【48】设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，且$n>2$，证明：

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

【解答】当$\boldsymbol{A}$可逆时，我们有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故有$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}$.从而得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^*&=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}^*)^*\\&=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^*)^*\\&=\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}^*|\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

从而我们得到$(\boldsymbol{A}^*)^*=\dfrac{|\boldsymbol{A}^*|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\dfrac{||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}|}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\dfrac{|\boldsymbol{A}|^n}{|\boldsymbol{A}|^2}\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.

而当$\boldsymbol{A}$不可逆时，显然有$r(\boldsymbol{A}^*)\leq 1$，故$r((\boldsymbol{A}^*)^*)=0$，也即$(\boldsymbol{A}^*)^*$为零矩阵，故

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$$

显然也是成立的，因为此时有$|\boldsymbol{A}|=0$.故原命题得证！

其中用到了结论$r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n,r(\boldsymbol{A})=n\\1,r(\boldsymbol{A})=n-1\\0,r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}$.

【49】设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵，证明：$r(\boldsymbol{A}^n)=r(\boldsymbol{A}^{n+1})$.

【解答】证明$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解即可.事实上，显然$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解都是$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，下面证明$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解都是$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.假若不然，假设存在$\boldsymbol{x}_1$满足$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$而$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$（此处暗含了$\boldsymbol{A}^{n+i}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0},i\geq 1$的信息），**则**$n+1$**个**$n$**元向量**

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1$$

线性无关（因为若这些向量线性相关，则

$$k_0\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_1+k_1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+k_n\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$$

依次乘以$\boldsymbol{A}^n,\boldsymbol{A}^{n-1},\cdots,\boldsymbol{A}$，容易得到$k_0=k_1=\cdots=k_n=0$，而这与线性相关矛盾），而这是不可能的，因为$n$维向量最多只能有$n$个向量线性无关（这是由向量空间决定的），故矛盾！原假设不成立，必须有$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，从而我们证明了$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解都是$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.故原命题得证！

下面提供一种更加妙的证明方法.

★ 另解：显然，$n \geq r(\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}) \geq r(\boldsymbol{A}) \geq r(\boldsymbol{A}^2) \geq \cdots \geq r(\boldsymbol{A}^{n+1}) \geq 0$.

因此在这$n+2$个矩阵中，必有某$0 \leq k \leq n$使得$r(\boldsymbol{A}^k)=r(\boldsymbol{A}^{k+1})$，从而方程组$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与方程组$\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解，从而方程组$\boldsymbol{A}^{k+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与方程组$\boldsymbol{A}^{k+2}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解，以此类推可以得到$r(\boldsymbol{A}^k)=r(\boldsymbol{A}^{k+1})=r(\boldsymbol{A}^{k+2})=\cdots$.该证明运用了容斥原理，较为巧妙.