习题六

【1】求下列二次型的矩阵并求出二次型的秩：

（1）$f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz+4yz$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$；

（3）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2$.

【解答】根据二次型矩阵的定义，我们容易得到

（1）$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$，进行行变换，有$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(f)=1$.

（2）$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$，进行行变换，有$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&2&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故$r(f)=2$.

（3）

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n-1}(x_i-x_{i+1})^2\\&=x_1^2+2x_2^2+\cdots+x_n^2-2x_1x_2-2x_2x_3-\cdots-2x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

故得到矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}$$

进行化简（第一行加到第二行，第二行加到第三行…）我们有

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\0&0&0&\cdots&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0&0\\0&1&-1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-1\\0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

显然我们有$r(f)=n-1$.

【2】设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为实矩阵，n 为二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2$$

证明：二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

【解答】令 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，则

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}^T\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

即 f 对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

【3】已知二次型的矩阵如下，试写出对应的二次型：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$；（3）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

【解答】容易得到（1）$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+10x_1x_2+16x_1x_3+2x_2x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-4x_1x_3-2x_2x_3$.

（3）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2x_1x_3-2x_2x_4-\cdots-2x_{n-2}x_n$

合并一下有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n-2}x_ix_{i+2}$.

【4】用正交替换化下列二次型为标准型，并求出所用的正交替换.

（一）$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3$；

（二）$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

（三）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$.

解答:（一）先写出二次型f的矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&3&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

（注意非对角线位置所得到的系数要除以二）.由

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&3-\lambda&0\\-2&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-4(3-\lambda)-4(1-\lambda)$$

$$=(\lambda^2-4\lambda-5)(2-\lambda)=(\lambda-5)(2-\lambda)(\lambda+1)=0$$

可以得到$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.计算特征向量，得到

$$\lambda_1=-1,\begin{bmatrix}3&2&-2\\2&4&0\\-2&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0.5\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=2,\begin{bmatrix}0&2&-2\\2&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0.5\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=5,\begin{bmatrix}-3&2&-2\\2&-2&0\\-2&0&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

这三个向量本就正交，我们只需要做单位化即可.可以得到：

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix},\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix},\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&2\\-1&2&2\\2&2&-1\end{bmatrix}$$

故正交对角化后有：

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 2 & \\ & & 5\end{bmatrix}$$

故$f=x^TAx=y^TQ^TAQy=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，正交替换为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}(2y_1-y_2+2y_3)\\ x_2=\dfrac{1}{3}(-y_1+2y_2+2y_3)\\ x_3=\dfrac{1}{3}(2y_1+2y_2-y_3)\end{cases}$$

（二）先写出二次型f的矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

（注意非对角线位置所得到的系数要除以二）.由

$$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda^3-3\lambda-2)=-(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)$$

可以得到$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=2$.计算特征向量，得到

$$\lambda_1=\lambda_2=-1,\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=2,\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

我们需要对第一个和第二个向量正交化，有

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$$

从而单位化后可以得到：

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

故正交对角化后有：

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

故$f = x^T A x = y^T Q^T A Q y = -y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$，正交替换为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} y_3 \end{cases}$$

（三）先写出二次型f的矩阵如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

（注意非对角线位置所得到的系数要除以二）.由

$$f(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 16 - 16 - 16(4-\lambda) - 8(1-\lambda)$$

$$= -(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda + 100) = -(\lambda-5)^2(\lambda+4)$$

可以得到$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -4$.计算特征向量，得到

$$\lambda_1=\lambda_2=5,\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=-4,\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-0.5\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

我们需要对第一个和第二个向量正交化，有

$$\eta_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\4\\-1\end{bmatrix}$$

从而单位化后可以得到：

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{4}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix},\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

故正交对角化后有：

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{4}{3\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{bmatrix}$$

故$f=x^TAx=y^TQ^TAQy=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$，正交替换为

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{3\sqrt{2}}y_2+\frac{2}{3}y_3\\x_2=\frac{4}{3\sqrt{2}}y_2+\frac{1}{3}y_3\\x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{3\sqrt{2}}y_2+\frac{2}{3}y_3\end{cases}$$

【5】用配方法化下列二次型为标准形，并求出所作的非奇异线性替换：

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$；

（3）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_n^2+2\sum\limits_{i=2}^{n-1}x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

【解答】（1）注意到

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3\\&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2^2+2x_2x_3-x_3^2\\&=(x_1+x_2)^2-(x_2-x_3)^2\end{aligned}$$

故令$y_1=x_1+x_2,y_2=x_2-x_3$，故$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2-y_2^2$.

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2-y_3\\x_2=y_2+y_3\\x_3=y_3\end{cases}$$

显然这是非奇异线性替换.

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$，先令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，则

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\\&=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3+y_1y_3-y_2y_3\\&=y_1^2-y_2^2+2y_1y_3\\&=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2\end{aligned}$$

再令$\begin{cases}z_1=y_1+y_3\\z_2=y_2\\z_3=y_3\end{cases}$，则得到$f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2-z_2^2-z_3^2$，线性替换为

$$\begin{cases}x_1=z_1+z_2-z_3\\x_2=z_1-z_2-z_3\\x_3=z_3\end{cases}$$

容易知道对应矩阵的行列式不为零，故为非奇异线性替换.

（3）

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)&=x_1^2+x_n^2+2\sum_{i=2}^{n-1}x_i^2-2\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\\&=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2\end{aligned}$$

令$y_1=x_1-x_2,y_2=x_2-x_3,\cdots,y_{n-1}=x_{n-1}-x_n$，则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n-1}y_i^2$.

则线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ x_2 = \sum\limits_{i=2}^{n} y_i \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}$$

这是非奇异线性替换.

【6】设对称矩阵$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，证明$\boldsymbol{B}$是对称矩阵.

【解答】$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$满足

$$\begin{gathered} \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} \\ \Longrightarrow (\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{B}^T \end{gathered}$$

因为$\boldsymbol{A}$为对称矩阵，故$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.则$(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{P}^T)^T = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，故

$$(\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^T = \boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^T$$

故$\boldsymbol{B}$是对称矩阵.

【7】设矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都合同于$\boldsymbol{C}$，证明矩阵$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$.

【解答】矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都合同于$\boldsymbol{C}$，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$，使得

$$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{C}, \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{C}$$

即$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}$.我们变形，有

$$\begin{gathered} \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N} \\ \Longrightarrow \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{M}^T)^{-1}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1} \\ \Longrightarrow \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{M}^{-1})^T\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1} \\ \Longrightarrow \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1})^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1} \end{gathered}$$

显然矩阵$\boldsymbol{N}\boldsymbol{M}^{-1}$是可逆的，故矩阵$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$.

【8】证明任一实对称矩阵都合同于对角矩阵.

【解答】这是显然的，我们根据 P200 **定理 5.3** 可知实对称矩阵一定可以正交相似对角化，即存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，对实对称矩阵$\boldsymbol{A}$有$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$，其中

$\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角线上是 $\boldsymbol{A}$ 特征值的对角矩阵.定理的证明如下：

对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$，这里 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 使用数学归纳法.当 $n=1$ 时，结论显然成立.

归纳假设，当 $n=k-1$ 时结论成立，则考虑 $\boldsymbol{A}$ 是 k 阶实对称矩阵，则我们一定可以找到一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda\boldsymbol{\alpha}_1,|\boldsymbol{\alpha}_1|=1$，我们可以将其扩张为一组标准正交向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_{k-1}$（可以看作是 $\mathbb{R}^k$ 的一组正交基）.令

$$\boldsymbol{Q}_1=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_{k-1})$$

根据正交矩阵的性质：方阵 $\boldsymbol{A}$ 正交的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组是单位正交向量组，则我们容易知道 $\boldsymbol{Q}_1$ 是一个正交矩阵.

从而我们做如下矩阵乘法，可以得到一个分块矩阵如下.

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1{}^T\\ \boldsymbol{\beta}_1{}^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_{k-1}{}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_{k-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 & ... & \boldsymbol{\alpha}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_{k-1}\\ \boldsymbol{\beta}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 & ... & \boldsymbol{\beta}_1{}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_{k-1}\\ ... & ... & ... & ...\\ \boldsymbol{\beta}_{k-1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\beta}_{k-1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_1 & ... & \boldsymbol{\beta}_{k-1}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}_1$ 是 $k-1$ 阶的实对称矩阵，根据归纳假设，存在 $k-1$ 阶正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_k)$$

令 $\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Q}_2$ 为正交阵.则我们有

$$\boldsymbol{Q}_2{}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{Q}_2{}^T\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{B}_1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)=\boldsymbol{\Lambda}_k$$

令$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2$，则$\boldsymbol{Q}$正交，且$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}_k$.

【9】设矩阵$\boldsymbol{A}_1$合同于$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{A}_2$合同于$\boldsymbol{B}_2$，则$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$合同于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$.

【解答】即存在可逆矩阵$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$满足

$$\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{B}_2$$

则我们有

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^T & \\ & \boldsymbol{Q}_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \\ & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

而我们容易证明$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1^T & \\ & \boldsymbol{Q}_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_1 & \\ & \boldsymbol{Q}_2\end{pmatrix}^T$，故$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$合同于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$.

【10】证明：任一n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$都合同于对角阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

其中$r=r(\boldsymbol{A})$，p为$\boldsymbol{A}$的正惯性指数.

【解答】该证明需要用到**惯性定理**.我们可以用非奇异线性替换将$\boldsymbol{A}$化为规范形$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，根据惯性定理可以知道$p,r$是根据$\boldsymbol{A}$唯一确定的.而规范型对应于对角矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

故实对称矩阵$\boldsymbol{A}$也合同于该矩阵.

【11】证明：n阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$的充分必要条件为$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，且$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的正惯性指数相等.

【解答】首先给出惯性指数的定义.设二次型$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},r(f)=r$，经非奇异线性替换化$f$为标准形.若$f$的标准型有$p$个正项，则称$p$为二次型$f$或实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的正惯性指数.又称$q=r-p$和$s=p-q$分别为二次型$f$或实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的负惯性指数和符号差.此题中$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，且$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的正惯性指数相等，则$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的所有正负惯性指数皆相同，即二者有着相同的规范形.

先证明充分性

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个实对称矩阵，设他们有相同的惯性指数，则$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有相同的规范形，记作$\boldsymbol{P}$,即存在可逆矩阵$\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$使得

$$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P},\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}$$

则有

$$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}$$
$$\Longrightarrow(\boldsymbol{N}^T)^{-1}\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}^{-1}=(\boldsymbol{N}^{-1})^T\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}^{-1}=(\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}^{-1})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}\boldsymbol{N}^{-1}=\boldsymbol{B}$$

所以$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$合同.

再证明必要性：设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是两个合同的实对称矩阵，即存在$\boldsymbol{\Lambda}$使得$\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{B}$.有$\boldsymbol{B}$与其规范式$\boldsymbol{P}$合同,即

$$\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}$$

所以$\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}$,即$(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{N})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{P}$,此即表示$\boldsymbol{A}$也合同于规范式$\boldsymbol{P}$.所以$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$有相同的规范式，即有相同的正负惯性指数.综上所述，证毕!

【12】证明二次型f的符号差s与f的秩r的奇偶性相同.

【解答】根据惯性定理，我们有$p+q=r,p-q=s$，则

$$r-q=s+q\Longrightarrow r=s+2q$$

$2q$显然为偶数，故r,s的奇偶性相同.

【13】判断下列二次型是否为正定二次型

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$；

（3）$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

【解答】

（1）写出二次型f的矩阵，如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

判断是否正定，只需要判断各阶顺序主子式.显然的，有

$$|1|=1>0,\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=1\times2-2\times2=-2<0$$

故不是正定二次型.

（2）写出二次型f的矩阵，如下

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

判断是否正定，只需要判断各阶顺序主子式.显然的，有

$$|3|=3>0,\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3\times3-1\times1=8>0$$

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=3\times3\times3+1+1-3-3-3=20>0$$

显然是正定二次型.

（3）写出二次型f的矩阵，如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0.5 & 1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 1 & 0.5 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0.5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.5 & 1\end{bmatrix}$$

同【14】(3)，故该二次型正定，证明见下.

【14】判断下列实对称矩阵是否为正定矩阵

(1) $\begin{bmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix}$

【解答】(1) 跟上一题一样，我们来考虑各阶顺序主子式，显然的，有

$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & -14 \\ 12 & -14 & 1 \end{vmatrix} = 10\times 2\times 1 - 4\times 14\times 12 - 4\times 14\times 12$$

$$-12\times 2\times 12 - 14\times 14\times 10 - 4\times 4\times 1 = -3588$$

从而不正定.

(2) 考虑各阶顺序主子式，显然的，有

$$|1| = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 + 2 - 2 - 4 - 3 = 1$$

从而正定.

(3) 考虑各阶顺序主子式.直接考虑D_n行列式，我们有

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

考虑消去法，将第一行乘以$-\dfrac{1}{2}$加到第二行，新的第二行乘以$-\dfrac{2}{3}$加到第三行，…，

将新的第$n-1$行乘以$-\dfrac{n-1}{n}$加到第n行，行列式值不变，而原行列式变为

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{n+1}{n} \end{vmatrix}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\dots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=n+1>0$$

这对于任意n均成立，从而有各阶顺序主子式大于零，从而矩阵正定.

【15】讨论参数t满足什么条件时，下列二次型是正定二次型：

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2tx_1x_2+2x_1x_3$；

（2）$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$；

（3）$f(x_1,x_2,x_3)=tx_1^2+x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-2tx_1x_3+4x_2x_3$；

【解答】

（1）写出二次型矩阵如下

$$\begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

考虑各阶顺序主子式，有

$$|1|=1>0,\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix}=4-t^2>0,\begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\times4\times2-t(2t)-4>0$$

$$4-t^2>0\Longrightarrow t\in(-2,2)$$

$$1\times4\times2-t(2t)-4>0\Longrightarrow t\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

从而可以解出$t\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

（2）写出二次型矩阵如下

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{bmatrix}$$

考虑各阶顺序主子式，有

$$|5|=5>0,\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=5-4>0,\begin{vmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{vmatrix}=5(t-1)-2(2t-1)-(-2+1)>0$$

$$5(t-1)-2(2t-1)-(-2+1)>0\Longrightarrow t>2$$

从而可以解出$t>2$.

（3）写出二次型矩阵如下

$$\begin{bmatrix}t&-2&-t\\-2&1&2\\-t&2&5\end{bmatrix}$$

考虑各阶顺序主子式，有

$$|t|=t>0,\begin{vmatrix}t&-2\\-2&1\end{vmatrix}=t+4>0,\begin{vmatrix}t&-2&-t\\-2&1&2\\-t&2&5\end{vmatrix}=5t+4t+4t-t^2-4t-20>0$$

$$5t+4t-t^2-20=-(t-4)(t-5)>0$$

从而可以解出$t\in(4,5)$.

【16】证明实对称矩阵$\boldsymbol{A}$为正定矩阵的充分必要条件为$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{E}$.

【解答】充分性.$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{E}$，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$.

则对于任意$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，因为$\boldsymbol{P}$可逆，故$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})>0$$

从而矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

必要性.若$\boldsymbol{A}$为对称正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$可以进行 Cholesky 分解（把一个对称正定的矩阵表示成一个下三角矩阵L和其转置的乘积的分解），即$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$，故我们有

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{L}^T)^T\boldsymbol{E}(\boldsymbol{L}^T)$$

从而$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{E}$.

或者，因为$\boldsymbol{A}$为对称正定矩阵，故$\boldsymbol{A}$的特征值$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正的，其相似于对角矩阵$\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{P}^T\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\boldsymbol{P}\\&=\boldsymbol{P}^T\operatorname{diag}\left(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\cdots,\sqrt{a_n}\right)\operatorname{diag}\left(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\cdots,\sqrt{a_n}\right)\boldsymbol{P}\end{aligned}$$

取$\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}\left(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},\cdots,\sqrt{a_n}\right)\boldsymbol{P}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}$，即$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{E}$.

【17】设$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，证明$\boldsymbol{B}$也是正定矩阵.

【解答】$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，故我们对于任意$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$.若$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$，故此时对于任意$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0\Longrightarrow\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}>0\Longrightarrow(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})>0$$

因为$\boldsymbol{P}$可逆，故$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，且$\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$也可为任意非零列向量，故矩阵$\boldsymbol{B}$也是正定的.

【18】设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n阶正定矩阵，k和l为正实数.证明矩阵$k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

【解答】这是显然的，我们对于任意$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，都有$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，则对于$k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$有

$$\boldsymbol{x}^T(k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

故矩阵$k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$为正定矩阵.

【19】设$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，证明：

（1）$\boldsymbol{A}^2,\boldsymbol{A}^3,...,\boldsymbol{A}^m\,(m\geq2,m\in\mathbb{N})$都是正定矩阵；

（2）$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+...+\boldsymbol{A}^m$是正定矩阵；

（3）$3\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$是正定矩阵.

【解答】我们首先证明正定矩阵的和还是正定矩阵.

我们称$\boldsymbol{A}$是正定的当$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$对于任意非零向量都成立.若$\boldsymbol{A}$正定，$\boldsymbol{B}$正定，则对于任意非零向量都有:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

显然对于他们的和$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，我们对于任意非零向量有

$$\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

从而$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$也是正定的.故我们只需要证明（1）即可得到（2）（3）成立.

（1）矩阵$\boldsymbol{A}$正定，当且仅当$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n>0$全大于零.则对于$\boldsymbol{A}^m$，我们根据特征值的性质容易知道它的全部特征值为$\lambda_1^m,\lambda_2^m,...,\lambda_n^m>0$显然成立.正定的考虑范围在实对称矩阵内，故我们首先证明$\boldsymbol{A}^m$是对称矩阵.由于$\boldsymbol{A}$正定，故我们有其对称，则：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T$.故容易得到：

$$(\boldsymbol{A}^m)^T=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{m-1})^T=(\boldsymbol{A}^{m-1})^T\boldsymbol{A}^T=(\boldsymbol{A}^{m-1})^T\boldsymbol{A}=...=\boldsymbol{A}^m$$

从而$\boldsymbol{A}^m$是对称矩阵.故矩阵$\boldsymbol{A}^m$正定.从而（1）（2）（3）得证！

【20】设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$实矩阵，证明$r(\boldsymbol{A})=n$的充要条件为$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

【解答】

必要性.因为$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$，故$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，又对任意$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$，有

$$\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\geq 0$$

且$\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$当且仅当$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$时成立.因为$\boldsymbol{A}$列满秩，从而$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,故$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$正定.

充分性.设$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则对任意$\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$，有

$$\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}>0$$

而$\boldsymbol{X}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，故$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，即对于任意$\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，都有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，从而$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$只有零解，即$r(\boldsymbol{A})=n$.

【21】设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵，证明矩阵$\boldsymbol{B}=(b_ib_ja_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵，其中$b_i(i=1,2,...,n)$是非零实常数.

【解答】首先证明矩阵$\boldsymbol{B}$是对称矩阵. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵，则$\boldsymbol{A}$是对称矩阵，则有$a_{ij}=a_{ji}$，从而我们有$b_{ij}=b_ib_ja_{ij},b_{ji}=b_jb_ia_{ji}=b_ib_ja_{ij}=b_{ij}$，从而矩阵$\boldsymbol{B}$也实对称.我们接下来考虑$\boldsymbol{B}$的$k$阶顺序主子式，有

$$|\boldsymbol{B}_k|=\begin{vmatrix} a_{11}b_1b_1 & a_{12}b_1b_2 & a_{13}b_1b_3 & a_{14}b_1b_4 & \dots & a_{1k}b_1b_k \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2b_2 & a_{23}b_2b_3 & a_{24}b_2b_4 & \dots & a_{2k}b_2b_k \\ a_{31}b_3b_1 & a_{32}b_3b_2 & a_{33}b_3b_3 & a_{34}b_3b_4 & \dots & a_{3k}b_3b_k \\ a_{41}b_4b_1 & a_{42}b_4b_2 & a_{43}b_4b_3 & a_{44}b_4b_4 & & a_{4k}b_4b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}b_kb_1 & a_{k2}b_kb_2 & a_{k3}b_kb_3 & a_{k4}b_kb_4 & \dots & a_{kk}b_kb_k \end{vmatrix}$$

第i行提出b_i，第j列提出b_j，我们有

$$|\boldsymbol{B}_k|=\begin{vmatrix} a_{11}b_1b_1 & a_{12}b_1b_2 & a_{13}b_1b_3 & a_{14}b_1b_4 & \dots & a_{1k}b_1b_k \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2b_2 & a_{23}b_2b_3 & a_{24}b_2b_4 & \dots & a_{2k}b_2b_k \\ a_{31}b_3b_1 & a_{32}b_3b_2 & a_{33}b_3b_3 & a_{34}b_3b_4 & \dots & a_{3k}b_3b_k \\ a_{41}b_4b_1 & a_{42}b_4b_2 & a_{43}b_4b_3 & a_{44}b_4b_4 & & a_{4k}b_4b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}b_kb_1 & a_{k2}b_kb_2 & a_{k3}b_kb_3 & a_{k4}b_kb_4 & \dots & a_{kk}b_kb_k \end{vmatrix}=b_1^2b_2^2\dots b_k^2|\boldsymbol{A}_k|$$

而显然，由于$\boldsymbol{A}$正定，则有$|\boldsymbol{A}_k|>0$，从而有$|\boldsymbol{B}_k|>0$对于任意k都成立，从而矩阵$\boldsymbol{B}=(b_ib_ja_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵.

【22】设$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，t为实数，证明：t充分大之后，矩阵$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

【解答】显然的，有$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$也是实对称矩阵，则我们仅需要考虑矩阵$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$的特征值即可.

考虑矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$，则$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$的特征值为$t+\lambda_1,t+\lambda_2,\dots,t+\lambda_n$，我们只需要足够大的$t$满足$t+\lambda_i>0(i=1,2,\dots,n)$，即有$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$的所有特征值全部大于零.从而$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$是正定矩阵.（等价命题：实对称矩阵$\boldsymbol{A}$正定$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的特征值全部大于零）.

【23】证明：正交矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵的充要条件是$\boldsymbol{A}$是单位矩阵.

【解答】先证明充分性，显然$\boldsymbol{A}$是单位矩阵的时候$\boldsymbol{A}$正交，且$\boldsymbol{A}$正定.

下面来证明必要性.如果$\boldsymbol{A}$正定，则存在一个正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n),\lambda_i>0(i=1,2,\dots,n)$$

又$\boldsymbol{A}$正交，则正交矩阵的乘积正交，即$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$正交，故

$$\lambda_i=1(i=1,2,...,n)$$

即$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$，则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{E}$，从而得证.

【24】证明：实对称矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵的充要条件为$\boldsymbol{A}$的特征值都大于零.

【证明】必要性.实对称矩阵$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，所以二次型$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$为正定型.根据定理“实二次型经非奇异线性替换后正定性不变”可以得到，取正交线性替换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，得它的标准二次型

$$f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}}\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+...+\lambda_ny_n^2$$

为正定二次型，其中$\lambda_i,i=1,2,...,n$为$\boldsymbol{A}$的特征值.根据课本 P223 的定理 6.5 我们可以得到有特征值全部大于零.

充分性.因为矩阵$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，所以存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$使得

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)$$

当对角线上所有特征值均大于零时，对于任意的非零向量$\boldsymbol{x}$，令$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，此时$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$一一对应.则$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_nx_i^2>0$.

从而矩阵$\boldsymbol{A}$正定.

【25】设$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，且满足$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

【解答】假设λ是矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值，则$\lambda^2-3\lambda+2$是$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$的特征值，但$\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{O}$的特征值只有$0$，即$\lambda^2-3\lambda+2=0$，从而我们解出矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值只有$\lambda=1,2$，发现全部大于零，故$\boldsymbol{A}$为正定矩阵.

【26】若$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，证明：存在正定矩阵$\boldsymbol{B}$，使$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^2$.

【解答】$\boldsymbol{A}$为正定矩阵，故存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$$

其中$\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n$.于是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{Q}\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)\boldsymbol{Q}^T \\
&= \boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T \\
&= \boldsymbol{B}^2
\end{aligned}
$$

其中$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\sqrt{\lambda_n}\right)\boldsymbol{Q}^T$为正定矩阵，因为其特征值

$$\sqrt{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$$

【27】设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵，且$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^m\text{（}m\text{为正整数）}$$

是正定矩阵.

【解答】同【19】（2）.

【28】设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是n阶实矩阵，如果$\mathbb{R}^n$对于内积

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$$

作一个欧氏空间，证明$\boldsymbol{A}$必定为正定矩阵.

【解答】取$\boldsymbol{\alpha}_i=\left(0,\cdots,\overset{(i)}{1},\cdots,0\right)^T,\boldsymbol{\alpha}_j=\left(0,\cdots,\overset{(j)}{1},\cdots,0\right)$，则由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_j=a_{ij},(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_j^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=a_{ji}$$

根据对称性，有$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha}_i)$，即$a_{ij}=a_{ji}$，即$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是实对称矩阵.从而$\boldsymbol{A}$是二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$的方阵.当$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$时，有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$$

从而f正定，从而矩阵$\boldsymbol{A}$是正定的.

【29】已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为2，试求：

（1）参数a的值；（2）$f(x_1,x_2,x_3)$在正交替换下的标准形.

【解答】（1）我们写出二次型矩阵

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{bmatrix}$$

因为不是满秩的，故考虑行列式，有

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 5(5a-9)+(-a+9)+3(3-15)=0 \Longrightarrow a=-3$$

（2）计算正交替换下的标准形，只需要计算矩阵的特征值即可.我们有

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 5-\lambda & -3 \\ 3 & -3 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(5-\lambda)[(5-\lambda)(-3-\lambda)-9]+[(-1)(-3-\lambda)+9]+3[(-1)(-3)-3(5-\lambda)]$$

$$=0$$

计算得到$\lambda=0,4,3$.则$f=4y_1^2+3y_2^2$.

【30】（第四章【60】）证明：对任何实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

【解答】这是n维的 Cauchy-Schwarz 不等式.我们可以构造二次函数来证明，有

$$f(x)=(a_1+b_1x)^2+(a_2+b_2x)^2+\cdots+(a_n+b_nx)^2 \ge 0$$

$$\Longrightarrow f(x)=(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

则有判别式$\Delta=4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le 0$，从而原命题得证！

【31】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，试判断二次型$f=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$是否正定.

【解答】我们有$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -10 & 10 \\ -10 & 104 & -116 \\ 10 & -116 & 173 \end{bmatrix}$.计

算主子式即可判断$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$是否是正定矩阵.我们有

$$|1|=1>0, \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 104 \end{vmatrix}=104-100=4>0, \begin{vmatrix} 1 & -10 & 10 \\ -10 & 104 & -116 \\ 10 & -116 & 173 \end{vmatrix}=36>0$$

故二次型$f=\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$正定.此题的$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$即是前面【16】中提到的 Cholesky 分解.

【32】设$\boldsymbol{A}$为$m\times n$实矩阵，证明：矩阵$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$是正定矩阵的充分必要条件为$r(\boldsymbol{A})=n$.

【解答】必要性.若$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$是正定矩阵，则对于任意$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq\boldsymbol{0}$均有

$$\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}>0$$

即$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})>0$，所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，即齐次方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解，故$r(\boldsymbol{A})=n$.

充分性.若$r(\boldsymbol{A})=n$，则齐次方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$只有零解，故对于任意

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq\boldsymbol{0}$$

均有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，故$\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})>0$，从而矩阵$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$正定.

【33】设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n阶正定矩阵，证明：矩阵$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$为正定矩阵的充分必要条件为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

【解答】$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n阶正定矩阵，故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^T,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T$.（正定矩阵是对称矩阵）.

证明必要性.此时我们有矩阵$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$为正定矩阵，故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$$

证明充分性.此时有$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则有$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，故矩阵$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$为实对称矩阵.又因为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$均为正定矩阵，故存在可逆矩阵$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}$$

所以$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T)^T(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T)\boldsymbol{Q}$.

记矩阵$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^T$，则$\boldsymbol{AB}\sim\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M}$，而$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M}$为正定矩阵，其特征值都大于零，故$\boldsymbol{AB}$的特征值也都大于零，则$\boldsymbol{AB}$为正定矩阵.

【34】设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n阶实对称矩阵，并且$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，证明：存在n阶实可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}$和$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}$都是对角阵.

【解答】$\boldsymbol{A}$是正定矩阵，故存在实可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{E}$.对于实对称矩阵$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{BQ}$，存在正交矩阵$\boldsymbol{M}$，使得$\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{BQ})\boldsymbol{M}$为对角矩阵.令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{QM}$，则$\boldsymbol{P}$是实可逆矩阵，且我们有

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M}=\boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{BQ})\boldsymbol{M}$$

均为对角阵.

【35】设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为n阶正定矩阵，且方程$|x\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$的根是$1$.证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

【解答】矩阵$\boldsymbol{A}$正定，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$满足$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}$，而又有$\boldsymbol{B}$正定，故矩阵$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}$也是正定矩阵，因此

$$|\boldsymbol{P}^T||x\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}||\boldsymbol{P}|=|x\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}|=|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}|=0$$

因为$\boldsymbol{P}$可逆，故$|\boldsymbol{P}|\neq 0$，故$|x\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$与$|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}|=0$同根.若方程$|x\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=0$的根是$1$，则方程$|x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}|=0$的根为$1$，即$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}$与$\boldsymbol{E}$相似，因此$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{E}$，从而$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{BP}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{AP}$，故$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

【36】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(1-\lambda)x_1^2+(1-\lambda)x_2^2+2(1-\lambda)x_1x_2+2x_3^2$$

已知$r(f)=2$，试求

（1）参数λ的值；（2）正交替换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，将$f$化为标准形；

（3）$f=0$的解.

【解答】（1）二次型f的矩阵为

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 0\\1-\lambda & 1-\lambda & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

进行矩阵变换有$\begin{pmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 0\\1-\lambda & 1-\lambda & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1-\lambda & 1-\lambda & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$r(f)=2$，故$\lambda\neq 1$.

（2）考虑配方，我们有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(1-\lambda)x_1^2+(1-\lambda)x_2^2+2(1-\lambda)x_1x_2+2x_3^2\\&=2(1-\lambda)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)^2+2x_3^2\end{aligned}$$

故令$\frac{1}{\sqrt{2}}x_1+\frac{1}{\sqrt{2}}x_2=y_1,x_3=y_2$即可，二次型变为

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(1-\lambda)y_1^2+2y_2^2$$

所用到的正交替换为

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\\x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{2}}y_3\\x_3=y_2\end{cases}$$

容易验证所用到的替换是正交替换，写出矩阵即可.

（3）根据$f(x_1,x_2,x_3)=2(1-\lambda)y_1^2+2y_2^2$，可以知道

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,x_3)=2(1-\lambda)y_1^2+2y_2^2=0\\&\Longleftrightarrow y_1=y_2=0,y_3=c,c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

则将解记为$\boldsymbol{y}_0=(0,0,c)^T$，我们变换回到$\boldsymbol{x}_0$即可.有

$$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}c\\\frac{1}{\sqrt{2}}c\\0\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},k\in\mathbb{R}$$

【37】用正交替换化二次型

$$f=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

为标准形.

【解答】写出矩阵，有

$$\begin{pmatrix}1&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&1&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&1&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&0.5&1&\cdots&0.5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

容易知道一个特征值为$\lambda=0.5$，因为此时有

$$\begin{vmatrix}1-0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&1-0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&1-0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&0.5&1-0.5&\cdots&0.5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&1-0.5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0.5&0.5&0.5&0.5&\cdots&0.5\end{vmatrix}$$
$$=0$$

注意到此时矩阵$\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}$的秩为$1$，故几何重数为$n-1$.代数重数大于几何重数，

故特征值要么全为$\frac{1}{2}$，要么有一个不为$\frac{1}{2}$.容易得到还有一个特征值为$\frac{n+1}{2}$，

可以通过矩阵变换从行列式得到，此处不做证明.则我们得到对应于$\frac{1}{2}$的特征向

量为

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

一共为$n-1$个.

$$\begin{pmatrix} 0.5-0.5n & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \cdots & 0.5 \\ 0.5 & 0.5-0.5n & 0.5 & 0.5 & \cdots & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5-0.5n & 0.5 & \cdots & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5-0.5n & \cdots & 0.5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & \cdots & 0.5-0.5n \end{pmatrix}$$

的一个解向量就是对应于 $\frac{n+1}{2}$ 的特征向量.有$(1,1,\cdots,1)^T$是符合要求的解.

故我们得到了所需要的n个线性无关的向量：

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

我们可以考虑对这些向量进行一些操作.进行施密特正交化，有

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (-1,1,0,\cdots,0)^T$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,0,1,\cdots,0)^T - \frac{(-1,1,0,\cdots,0)\boldsymbol{\alpha}_1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1 = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,\cdots,0\right)^T$$

$$\vdots$$

然后进行正交化，可以得到

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,\cdots,0)^T$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,\cdots,0)^T$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n^2-2n+1+n-1}}(-1,-1,-1,\cdots,n-1)^T$$

这些向量都与 $\frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\cdots,1)^T$ 正交，故我们得到了相互正交的n个线性无关向

量，得到了正交替换矩阵$\boldsymbol{Q}$如下：

$$
\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\
\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\
\frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \cdots & \frac{n+1}{\sqrt{n(n-1)}}
\end{pmatrix}
$$

则正交替换为

$$
\left\{\begin{array}{llllll}
x_1= & \frac{1}{\sqrt{n}}y_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 & -\frac{1}{\sqrt{6}}y_3 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}y_n \\
x_2= & \frac{1}{\sqrt{n}}y_1 & +\frac{1}{\sqrt{2}}y_2 & -\frac{1}{\sqrt{6}}y_3 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}y_n \\
x_3= & \frac{1}{\sqrt{n}}y_1 & & +\frac{2}{\sqrt{6}}y_3 & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}y_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n= & \frac{1}{\sqrt{n}}y_1 & & & \cdots & +\frac{n-1}{\sqrt{n(n-1)}}y_n
\end{array}\right.
$$

得到的标准形为$f=\frac{n+1}{2}y_1^2+\frac{1}{2}y_2^2+\cdots+\frac{1}{2}y_n^2$.

【38】设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$是正定矩阵，证明：二次型

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}
0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\
x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

是负定二次型.

【解答】因为$\boldsymbol{A}$正定，故我们有$|\boldsymbol{A}|>0$，故根据行列式的第一降价定理（P76 例 2.41），我们有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||0-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}|=-|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})$$

因为$\boldsymbol{A}$是正定阵，故可以分解为$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$，从而

$$\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}^T)^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1})^T$$

故$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定阵.从而$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$是正定二次型，而$-|\boldsymbol{A}|<0$，故

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是负定二次型.

【39】证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$能分解为两个实一次齐次式乘积的充要条件是f的秩为2，且符号差$s=0$，或者f的秩为1.

【解答】设$f=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\cdot\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$，若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$线性无关，不妨设$a_1,a_2$与$b_1,b_2$不成比例，于是线性代换

$$\begin{cases} y_1=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \\ y_2=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i \\ y_3=x_3 \\ \vdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

是非退化的，且二次型$f=y_1y_2$，再令

$$\begin{cases} y_1=z_1-z_2 \\ y_2=z_1+z_2 \end{cases}$$

于是得到$f=z_1^2-z_2^2$，显然f的秩为2，符号差为0.

若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$与$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$线性相关，可设

$$(b_1,b_2,\cdots,b_n)=k(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

则$f=k\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2$，因为$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$是一次齐式，可以假定$a_1\neq 0$，作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \\ y_2=x_2 \\ \cdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

化为二次型$f=ky_1^2$，即f的秩为1.

而若f的秩为2，且符号差$s=0$，则$f=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$，所以$f$是$x_1,x_2,\cdots,x_n$的两个一次齐次式的乘积，其中$y_1=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,y_2=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$.

若f的秩为1，则$f=ky_1^2$，其中，$y_1=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$为$x_1,x_2,\cdots,x_n$的一次齐次式.所以

$$f=k\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)^2$$

综上，命题得证！

【40】设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是标准正交列向量组，$k$为实数，矩阵$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T$，证明：

（1）$\boldsymbol{H}$是实对称矩阵；

（2）$\boldsymbol{\alpha}_1$是$\boldsymbol{H}$的特征向量，并求出其对应的特征值；

（3）$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$也是$\boldsymbol{H}$的特征向量，并求出它们对应的特征值；

（4）$k=0$或$k=2$时，$\boldsymbol{H}$为正交矩阵；

（5）$k\neq 1$时，$\boldsymbol{H}$为可逆矩阵；

（6）$k<1$时，$\boldsymbol{H}$为正定矩阵.

【解答】（1）我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^T&=(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T)^T\\&=\boldsymbol{E}^T-k(\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T)^T\\&=\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T=\boldsymbol{H}\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{H}$是实对称矩阵.

（2）标准正交列向量组，故$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=1$.我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_1&=(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T)\boldsymbol{\alpha}_1\\&=\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1\\&=\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)\\&=\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_1\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1$是特征向量，且其对应的特征值为$1-k$.

（3）因为正交，故我们有$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_1)=0,i\neq 1$.我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_i&=(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T)\boldsymbol{\alpha}_i\\&=\boldsymbol{\alpha}_i-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_i\\&=\boldsymbol{\alpha}_i-k\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_i)\\&=\boldsymbol{\alpha}_i\end{aligned}$$

故$\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$也是$\boldsymbol{H}$的特征向量，对应的特征值为$1$.

（4）$k=0$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}$显然为正交矩阵；$k=2$时$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T$，我们有

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T$$
$$\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T)^2=\boldsymbol{E}^2-4\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T+4\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\\&=\boldsymbol{E}^2-4\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T+4\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\\&=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

（5）根据（2）（3）可知矩阵$\boldsymbol{H}$的特征值为$1-k,1$，其中$1-k$是一重特征值，1是$n-1$重特征值.为了满足$\boldsymbol{H}$可逆，即需要其行列式不为零，即特征值不能为

0，故$1-k\neq 0$，从而$k\neq 1$.

（6）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是标准正交列向量组，故任意非零向量$\boldsymbol{x}$均可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i$$

的形式.则我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}&=\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\right)H\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\right)(\boldsymbol{E}-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T)\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)-k\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)\right]\\&=\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i^T\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} l_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)-kl_i\boldsymbol{\alpha}_1\right]\\&=\sum_{i=1}^{n} l_i^2-kl_i^2=(1-k)l_1^2+\sum_{i=2}^{n} l_i^2\end{aligned}$$

当$k<1$时，显然有$(1-k)l_1^2+\sum\limits_{i=2}^{n} l_i^2>0$，故矩阵$\boldsymbol{H}$正定.