习题一

【1】试确定下列集合是否是数域，并说明理由：

（1）$K_1=\left\{a+b\sqrt{3}\middle|a,b\in\mathbb{Z}\right\}$，$\mathbb{Z}$ 为整数集；

（2）$K_2=\left\{a+b\sqrt{3}\middle|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$，$\mathbb{Q}$ 为有理数集；

（3）$K_3=\{a+b\,\mathrm{i}|a,b\in\mathbb{Z}\}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\mathbb{Z}$ 为整数集；

（4）$K_4=\{a+b\,\mathrm{i}|a,b\in\mathbb{Q}\}$，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，$\mathbb{Z}$ 为有理数集；

【解答】（1）否.存在$m,n\in K_1$，但$\dfrac{m}{n}\notin K_1$，对于除法不封闭.

（2）是.可参考第三页的证明方法.

（3）否.存在$m,n\in K_3$，但$\dfrac{m}{n}\notin K_3$，对于除法不封闭.

（4）是.可参考第三页的证明方法.

【2】写出矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$：

（1）$m=n,a_{ij}=a_{i,j-1},1\le i,j\le n$；

（2）$m=3,n=2,a_{ij}=\delta_{i3}\delta_{j2},1\le i\le 3,1\le j\le 2;$其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1,i=j,\\0,i\ne j;\end{cases}$$

（3）$m=n=4$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}2,|i-j|=0,\\-1,|i-j|=1,\\0,|i-j|>1;\end{cases}$$

（4）$m=n=4$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}0,i<j,\\1,i\ge j.\end{cases}$$

【解答】（1）我们容易得到$a_{ij}=a_{i,j-1}=...=a_{i1}$，故有矩阵为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{n1} \end{bmatrix}$$

（2）可以发现只有当$i=3,j=2$时，才有$a_{ij}=1$，否则$a_{ij}=0$.故我们可以得到矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（3）显然，当$i=j$时，$a_{ij}=2$；其余位置根据顺序写下来即可.我们可以得到矩阵：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

（4）根据对角线可以分为两块，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

【3】设

$$\begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

求a,b,c,d的值.

【解答】即解方程，我们有

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ 2a-b=-2 \\ 2c+d=4 \\ c-2d=-3 \end{cases}$$

容易得到$a=0,b=2,c=1,d=2$.

【4】用初等行变换把下列矩阵化为简化阶梯形矩阵：

（1）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{bmatrix}$ （3）$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

（4）$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ （5）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ （6）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

（7）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ （8）$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

【解答】

（1）

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（2）

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（3）

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

（4）

$$\begin{bmatrix}2&3&1&-3&-7\\1&2&0&-2&-4\\3&-2&8&3&0\\2&-3&7&4&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-1&1&1&1\\1&2&0&-2&-4\\0&-8&8&9&12\\0&-7&7&8&11\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-1&1&1&1\\1&0&2&0&-2\\0&0&0&1&4\\0&0&0&1&4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&2&0&-2\\0&-1&1&1&1\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&0&-2\\0&-1&1&0&-3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&0&-2\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

（5）

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\5&4&5&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\5&4&5&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&6&10&18\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&4\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

（6）

$$\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\1&-2&2&3\\0&1&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&2&-1&2\\0&-3&-1&0\\0&1&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&0&-3&-6\\0&0&2&12\\0&1&1&4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&0&1&2\\0&0&1&6\\0&1&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\\0&1&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&1&1&4\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

（7）

$$\begin{bmatrix}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&2\\2&3&1&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&2\\0&-1&1&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

（8）

$$\begin{bmatrix}1&1&3\\-1&2&3\\1&3&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&2&4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

【5】判断下列线性方程组解的情况（不求解）：

（1）$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=6 \\ x_1-2x_2+x_3=4 \\ 3x_1+6x_2+2x_3=-1 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1+6x_2+2x_3=-1 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 2x_1+4x_2-x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ 3x_1+6x_2+2x_3=9 \end{cases}$ （4）$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 6x_1-4x_2+2x_3=-5 \\ -9x_1+6x_2-3x_3=6 \end{cases}$

（5）a 为何值时，方程组$\begin{cases} 2x_1+4x_2=a \\ 3x_1+6x_2=5 \end{cases}$无解？

（6）a 为何值时，方程组$\begin{cases} 3x_1+ax_2=3 \\ ax_1+3x_2=5 \end{cases}$无解？

【解答】可以通过矩阵化简从秩来判断方程组解的情况，我们分别有：

（1）容易得到矩阵以及其变换后形式为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 8 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 12 & -1 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 24 & -9 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 24 & -2 & -26 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 24 & -9 & -6 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 8 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -20 \end{bmatrix}$$

化简到此处可以简单的判断该矩阵秩为 3，故方程有唯一解.

（2）容易得到矩阵以及其变换后形式为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 37 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -13 \end{bmatrix}$$

化简到此处可以发现出现了无解的方程，故该方程组无解.

（3）容易得到矩阵以及其变换后形式为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化简到此处可以简单的判断该矩阵秩为 2，少于未知数个数，故方程有无数解.

（4）容易得到矩阵以及其变换后形式为：

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ -9 & 6 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

化简到此处可以发现出现了无解的方程，故该方程组无解.

（5）容易得到矩阵以及其变换后形式为：

$$\begin{bmatrix}2&4&a\\3&6&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}6&12&3a\\6&12&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}6&12&3a\\0&0&10-3a\end{bmatrix}$$

为了使方程组无解，我们需要得到一个无解方程，故需要满足

$$10-3a\neq 0\Longrightarrow a\neq\frac{10}{3}$$

故$a\neq\frac{10}{3}$时方程组无解.

（6）容易得到矩阵以及其变换后形式为：

$$\begin{bmatrix}3&a&3\\a&3&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3a&a^2&3a\\3a&9&15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3a&a^2&3a\\0&9-a^2&15-3a\end{bmatrix}$$

为了使方程组无解，我们需要得到一个无解方程，故需要满足

$$\begin{cases}9-a^2=0\\15-3a\neq 0\end{cases}\Longrightarrow a=\pm 3$$

故$a=\pm 3$时方程组无解.

【6】用高斯消元法解下列齐次线性方程组：

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$

（3）$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3-7x_4=0\\3x_1+x_2+2x_3-7x_4=0\\4x_1+x_2-3x_3+6x_4=0\\x_1-2x_2+5x_3-5x_4=0\end{cases}$ （4）$\begin{cases}3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0\\2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0\\4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0\\7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$

【解答】写出方程组对应的矩阵，然后通过高斯消元法消元即可.

（1）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0\\2&1&1&-1&0\\2&2&1&2&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0\\0&-1&-3&1&0\\0&0&-3&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&-1&0\\0&-1&0&-3&0\\0&0&-3&4&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{4}{3}&0\\0&1&0&3&0\\0&0&1&-\frac{4}{3}&0\end{bmatrix}$$

从而可以得到$x_1=\frac{4}{3}t,x_2=-3t,x_3=\frac{4}{3}t,x_4=t,t\in\mathbb{R}$.

（2）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}1&2&1&-1&0\\3&6&-1&-3&0\\5&10&1&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&-1&0\\0&0&-4&0&0\\0&0&-4&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

从而可以得到$x_1=-2a+b,x_2=a,x_3=0,x_4=b,a,b\in\mathbb{R}$.

（3）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}2&3&-1&-7&0\\2&1&2&-7&0\\4&1&-3&6&0\\1&-2&5&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&7&-11&-3&0\\0&5&-8&-3&0\\0&9&-23&26&0\\1&-2&5&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&7&-11&-3&0\\0&-2&3&0&0\\0&9&-23&26&0\\1&-2&5&-5&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&7&-11&-3&0\\0&-2&3&0&0\\0&9&-23&26&0\\1&0&2&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&7&-11&-3&0\\0&-2&3&0&0\\0&2&-12&29&0\\1&0&2&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&7&-11&-3&0\\0&-2&3&0&0\\0&0&-9&29&0\\1&0&2&-5&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&14&-22&-6&0\\0&-14&21&0&0\\0&0&-9&29&0\\1&0&2&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&14&-22&-6&0\\0&0&1&0&0\\0&0&-9&29&0\\1&0&2&-5&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

从而可以得到$x_1=x_2=x_3=x_4=0$.

（4）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}3&4&-5&7&0\\2&-3&3&-2&0\\4&11&-13&16&0\\7&-2&1&3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&4&-5&7&0\\2&-3&3&-2&0\\4&11&-13&16&0\\3&-13&14&-13&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&4&-5&7&0\\2&-3&3&-2&0\\4&11&-13&16&0\\0&-17&19&-20&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}3&4&-5&7&0\\2&-3&3&-2&0\\0&17&-19&20&0\\0&-17&19&-20&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3&4&-5&7&0\\2&-3&3&-2&0\\0&17&-19&20&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&-8&9&0\\2&-3&3&-2&0\\0&17&-19&20&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&7&-8&9&0\\0&-17&19&-20&0\\0&17&-19&20&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&7&-8&9&0\\0&17&-19&20&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{17}&\frac{13}{17}&0\\0&17&-19&20&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

从而可以得到$x_1=\dfrac{3}{17}a-\dfrac{13}{17}b,x_2=\dfrac{19}{17}a-\dfrac{20}{17}b,x_3=a,x_4=b,a,b\in\mathbb{R}$.

【7】用高斯消元法解下列齐次线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1\\ 2x_1+2x_2+5x_3=2\\ 3x_1+5x_2+x_3=3 \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=2\\ 2x_1-x_2-3x_3=1\\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} 4x_1+2x_2-x_3=2\\ 3x_1-x_2+2x_3=10\\ 11x_1+3x_2=8 \end{cases}$ （4）$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=4\\ x_1-2x_2+4x_3=-5\\ 3x_1+8x_2-2x_3=13\\ 4x_1-x_2+9x_3=-6 \end{cases}$

（5）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2\\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \end{cases}$ （6）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=4\\ x_1+4x_2-3x_3+5x_4=-2 \end{cases}$

【解答】写出方程组对应的矩阵，然后通过高斯消元法消元即可.

（1）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1&2&3&1\\ 2&2&5&2\\ 3&5&1&3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&2&3&1\\ 0&-2&-1&0\\ 0&-1&-8&0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&2&3&1\\ 0&2&1&0\\ 0&1&8&0 \end{bmatrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&2&1\\ 0&2&1&0\\ 0&1&8&0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&0&2&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&8&0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

故方程的解为$x_1=1,x_2=x_3=0$.

（2）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1&-2&-1&2\\ 2&-1&-3&1\\ 3&2&-5&0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&-2&-1&2\\ 0&3&-1&-3\\ 0&8&-2&-6 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&-2&-1&2\\ 0&3&-1&-3\\ 0&2&0&0 \end{bmatrix}$$
$$\sim\begin{bmatrix} 1&0&-1&2\\ 0&0&-1&-3\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&0&0&5\\ 0&0&-1&-3\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1&0&0&5\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&3 \end{bmatrix}$$

故方程的解为$x_1=5,x_2=0,x_3=3$.

（3）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\3&-1&2&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

故方程无解.

（4）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\4&-1&9&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\1&-9&11&-19\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&3&1&4\\1&-2&4&-5\\3&8&-2&13\\0&-7&7&-14\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}0&7&-7&14\\1&-2&4&-5\\0&14&-14&28\\0&-7&7&-14\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&4&-5\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故方程的解为$x_1=-2a-1, x_2=a+2, x_3=a, a\in\mathbb{R}$.

（5）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\4&2&-2&1&2\\2&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\2&1&-1&0&1\\2&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故方程的解为$x_1=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}, x_2=a, x_3=b, x_4=0, a,b\in\mathbb{R}$.

（6）我们容易得到对应矩阵以及其变换后矩阵为：

$$\begin{bmatrix}2&1&-1&1&1\\3&-2&1&-3&4\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0&-7&5&-9&5\\0&-14&10&-18&10\\1&4&-3&5&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&-3&5&-2\\0&7&-5&9&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}7&28&-21&35&-14\\0&28&-20&36&-20\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}7&0&-1&-1&6\\0&28&-20&36&-20\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\\0&1&-\frac{5}{7}&\frac{9}{7}&-\frac{5}{7}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

故方程的解为$x_1=\frac{1}{7}a+\frac{1}{7}b+\frac{6}{7}, x_2=\frac{5}{7}a-\frac{9}{7}b-\frac{5}{7}, x_3=a, x_4=b, a,b\in\mathbb{R}$.

【8】下列线性方程组中p,q取何值时，方程组有唯一解？有无穷多解？无解？在

有解的情况下求出所有的解.

（1）$\begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=p \\ x_1+x_2-2x_3=p^2 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 4x_1+7x_2+x_3=10 \\ x_2-x_3=q \\ 2x_1+3x_2+px_3=4 \end{cases}$

（3）$\begin{cases} px_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+px_2+x_3=p \\ x_1+x_2+px_3=p^2 \end{cases}$　　（4）$\begin{cases} (1+p)x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+(1+p)x_2+x_3=p \\ x_1+x_2+(1+p)x_3=p^2 \end{cases}$

【解答】通过矩阵变换和秩可以来判断方程组的解的情况.

（1）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & 1 & -2 & p^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -2+p \\ 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & 1 & -2 & p^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2+p-2 \\ 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & 1 & -2 & p^2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & p \\ 1 & 1 & -2 & p^2 \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & p \\ 0 & 3 & -3 & p^2-p \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p-2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3}(p^2-p) \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3}p^2+\frac{1}{3}p \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3}(p^2-p) \\ 0 & 0 & 0 & p^2+p-2 \end{bmatrix}$$

我们容易得到

（i）$p \neq 1$ 且 $p \neq -2$ 时无解.（根据 $p^2+p-2=0$ 解出）；

（ii）$p=1$ 时有无穷多解，解为 $x_1=k+1, x_2=k, x_3=k, k \in \mathbb{R}$；

（iii）$p=-2$ 时有无穷多解，解为 $x_1=k+2, x_2=k+2, x_3=k, k \in \mathbb{R}$.

（2）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & q \\ 2 & 3 & p & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & q \\ 0 & -1 & p & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & q-2 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q-2 \end{bmatrix}$$

我们容易得到

（i）$q\neq 2$时方程无解；

（ii）$q=2,p\neq 1$时方程有唯一解，解为$x_1=-1,x_2=2,x_3=0$；

（iii）$q=2,p=1$时方程有无穷多解，解为$x_1=-2k-1,x_2=k+2,x_3=k,k\in\mathbb{R}$.

（3）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

当$p\neq -2$时

$$\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} p+2 & p+2 & p+2 & p^2+p+1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dfrac{p^2+p+1}{p+2} \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dfrac{p^2+p+1}{p+2} \\ 0 & p-1 & 0 & \dfrac{p-1}{p+2} \\ 0 & 0 & p-1 & \dfrac{p^3+p^2-p-1}{p+2} \end{bmatrix}$$

若$p=1$，方程有无穷多解，解为$x_1=-a-b+1,x_2=a,x_3=b,a,b\in\mathbb{R}$.

若$p\neq 1$时，方程解为

$$x_1=\frac{-(p+1)}{p+2},x_2=\frac{1}{p+2},x_3=\frac{(p+1)^2}{p+2}$$

当$p=-2$时，$\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$，发现方程组无解.

综上所述：

（i）$p=-2$时无解；

（ii）$p=-1$时方程有无穷多解，解为$x_1=-a-b+1,x_2=a,x_3=b,a,b\in\mathbb{R}$；

（iii）$p\neq 1,p\neq -2$时，方程解为$x_1=\dfrac{-(p+1)}{p+2},x_2=\dfrac{1}{p+2},x_3=\dfrac{(p+1)^2}{p+2}$.

（4）我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

当$p\neq -3$时

$$\begin{bmatrix}1+p & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+p & 1 & p\\ 1 & 1 & 1+p & p^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}p+3 & p+3 & p+3 & p^2+p\\ 1 & 1+p & 1 & p\\ 1 & 1 & 1+p & p^2\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dfrac{p^2+p}{p+3}\\ 1 & 1+p & 1 & p\\ 1 & 1 & 1+p & p^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \dfrac{p^2+p}{p+3}\\ 0 & p & 0 & \dfrac{2p}{p+3}\\ 0 & 0 & p & \dfrac{p^3+2p^2-p}{p+3}\end{bmatrix}$$

若$p=0$，方程有无穷多解，解为$x_1=-a-b,x_2=a,x_3=b,a,b\in\mathbb{R}$.

若$p\neq 0$时，方程解为

$$x_1=\frac{-(p+1)}{p+3},x_2=\frac{2}{p+3},x_3=\frac{p^2+2p-1}{p+3}$$

当$p=-3$时，

$$\begin{bmatrix}1+p & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+p & 1 & p\\ 1 & 1 & 1+p & p^2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9\end{bmatrix}$$

发现方程组无解.

综上所述：

（i）$p=-3$时无解；

（ii）$p=0$时方程有无穷多解，解为$x_1=-a-b,x_2=a,x_3=b,a,b\in\mathbb{R}$；

（iii）$p\neq 0,p\neq -3$时，方程解为$x_1=\dfrac{-(p+1)}{p+3},x_2=\dfrac{2}{p+3},x_3=\dfrac{p^2+2p-1}{p+3}$.

【9】 令$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)=\left\{a+b\sqrt{3}\middle|a,b\in\mathbb{Q}\right\}$，试证明$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$是一个数域.

【解答】显然$0,1\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$.$\forall x_1=a_1+b_1\sqrt{3},x_2=a_2+b_2\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$，容易知道$x_1\pm x_2,x_1x_2\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$.当$a_2,b_2$不同时为零时，它们的商为

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{a_1+b_1\sqrt{3}}{a_2+b_2\sqrt{3}}=\frac{\left(a_1+b_1\sqrt{3}\right)\left(a_2-b_2\sqrt{3}\right)}{a_2^2-3b_2^2}=\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2}+\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2-3b_2^2}\sqrt{3}$$

由于$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$，故容易知道

$$\frac{a_1a_2-3b_1b_2}{a_2^2-3b_2^2},\frac{(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2-3b_2^2}\in\mathbb{Q}$$

即$\frac{x_1}{x_2}\in\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$，故$\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$是一个数域.

【10】设P是至少包含一个非零元的数集，且P对四则运算封闭，证明P为一个数域.

【解答】至少包含一个非零元，我们取之记为a，注意到P对于四则运算封闭，故$a-a=0\in P$，且$a\div a=1\in P$，根据数域的定义，我们可以得到P为一个数域.

【11】证明任何一个数域必包含有理数域.

【解答】根据数域的定义，数域包含$0,1$且对于四则运算封闭.根据加法的封闭性，我们可以知道任意正整数n都属于该数域（$n=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n个1}$）.

根据减法封闭性可以知道任意负整数$-n=0-n$也属于该数域.从而任意整数属于该数域.再根据除法的封闭性可以知道任意两个整数之比也属于该数域，也即任意有理数属于该数域.

从而我们知道了有理数域是最小的数域，任意数域都包含它.

【12】若数域P真包含实数域，则P为复数域.

【解答】此处我们讨论的数域中，复数域为最大的数域.考虑反证法，若$\mathbb{R}\subsetneqq P$而$P\neq\mathbb{C}$，那么必然$\exists\,\mathbb{R}\subsetneqq P\subsetneqq\mathbb{C}$，且$P$是一个域.那么由于$\mathbb{R}\subsetneqq P\subsetneqq\mathbb{C}$，则$P$中一定有一个虚数$z_0=a_0+\mathrm{i}b_0,a_0,b_0\in\mathbb{R},b_0\neq0$.

因为$a_0 \in \mathbb{R} \subsetneqq P, z_0 \in P$，所以$z_0 - a_0 = a_0 + \mathrm{i} b_0 - a_0 = \mathrm{i} b_0 \in P$（对于减法封闭），

又因为$b_0 \in \mathbb{R} \subsetneqq P$且$b_0 \neq 0$，所以$\dfrac{\mathrm{i} b_0}{b_0} = \mathrm{i} \in P$.

则$\forall z = a + \mathrm{i} b \in \mathbb{C}(a, b \in \mathbb{R})$，显然$a, b \in \mathbb{R} \subsetneqq P$，所以$\mathrm{i} b \in P, z = a + \mathrm{i} b \in P$，这说明了$\mathbb{C} \subseteq P$，这与$P \subsetneqq \mathbb{C}$矛盾，故不存在这样的$P$，也就是说$P = \mathbb{C}$.

【13】试证明$\mathbb{C}$的子集若对减法封闭，则必对加法封闭.

【解答】可设$P \neq \varnothing$，于是有$a \in P, a - a = 0 \in P$.又因为$0 - a = -a \in P$，若有$b \in P$，则必有$a + b = b + a = b - (-a) \in P$，故$P$若对减法封闭，则必对加法封闭.

【14】试证明$\mathbb{C}$的子集若对除法封闭，则必对乘法封闭.

【解答】可设$P \neq \varnothing, P \neq \{0\}$，于是有$a \in P, a \neq 0$，因此$a \div a = 1 \in P$.又因为$1 \div a = a^{-1} \in P$，若有$b \in P$，则必有$ab = ba = b \div a^{-1} \in P$，故$P$若对除法封闭，则必对乘法封闭.

【15】$m \times n$的非齐次线性方程组，设其系数矩阵的阶梯型的非零行数为s，试分别在下面两个条件下，判断此线性方程组的解.

（1）$s = n$；　　　　（2）$s = m$.

【解答】非零行数代表了行秩，我们有

（1）$s = n$时，此时方程个数等于未知数个数，则对于非齐次方程组来说有唯一解或者无解.

（2）$s = m$时，此时行满秩，则对于非齐次方程组来说必定有解.