计算机组织结构

3 数据的机器级表示

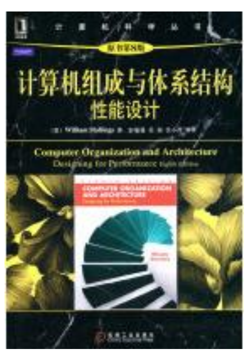
刘博涵

2023年9月19日

南京大学
NANJING UNIVERSITY

教材对应章节

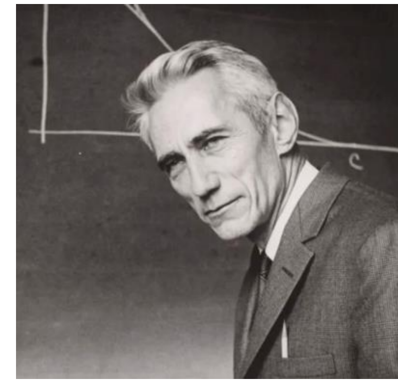
第2章 数据的机器级表示



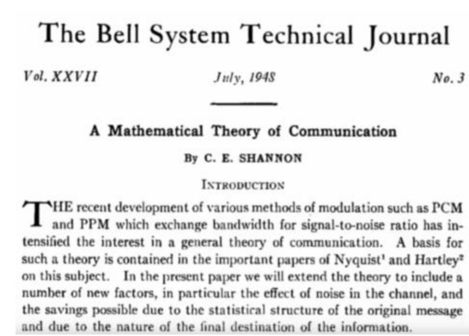
第10章 计算机算术

信息的二进制编码

- **什么是信息?**
  - Information is a message that is previously **uncertain** to receivers
- **怎么表示信息?**
  - Codebook（Dictionary)
- **怎么度量信息?**
  - **朴素的做法：**度量码长（前提是什么？）
  - **三个公理**
    - Monotonicity in event probability
    - Additivity
    - Continuity
  - **自信息量：** $I(x_i) = -log_2 p(x_i)$ 以2为底：bit
  - **一个系统的信息熵：** $H(X) = E[I(X)] = -\sum_i p(x_i) log_2 p(x_i)$



Claude Elwood Shannon



The Bell System Technical Journal

Vol. XXVII July, 1948 No. 3

A Mathematical Theory of Communication

By C. E. SHANNON

INTRODUCTION

THE recent development of various methods of modulation such as PCM and PPM which exchange bandwidth for signal-to-noise ratio has intensified the interest in a general theory of communication. A basis for such a theory is contained in the important papers of Nyquist[1] and Hartley[2] on this subject. In the present paper we will extend the theory to include a number of new factors, in particular the effect of noise in the channel, and the savings possible due to the statistical structure of the original message and due to the nature of the final destination of the information.

信息的二进制编码

- 假设有A，B，C，D四个事件，发生的概率分别为1/2，1/4，1/8，1/8

事件	编码一	编码二	编码三
A	00	0	0
B	01	10	1
C	10	110	01
D	11	111	10
平均码长	2bit	7/4bit	错误编码

- $H(X) = E[I(X)] = -\sum_i p(x_i) log_2 p(x_i)$

$$E[I(X)] = -\frac{1}{2} log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{8} log_2 \frac{1}{8}$$

$$E[I(X)] = \frac{7}{4}$$

信息的二进制编码

- 在冯·诺依曼结构中，所有信息（代码和数据）都采用二进制编码
  - 编码：用少量简单的基本符号对复杂多样的信息进行一定规律的组合
  - 采用二进制的原因
    - 制造两个稳定态的物理器件容易
    - 二进制编码、计数运算规则简单
    - 对应逻辑命题中的“真”和“假”
    - 便于使用逻辑电路实现算术运算
  - 真值和机器数
    - K位的二进制编码**至多**表示2^k个不同的值

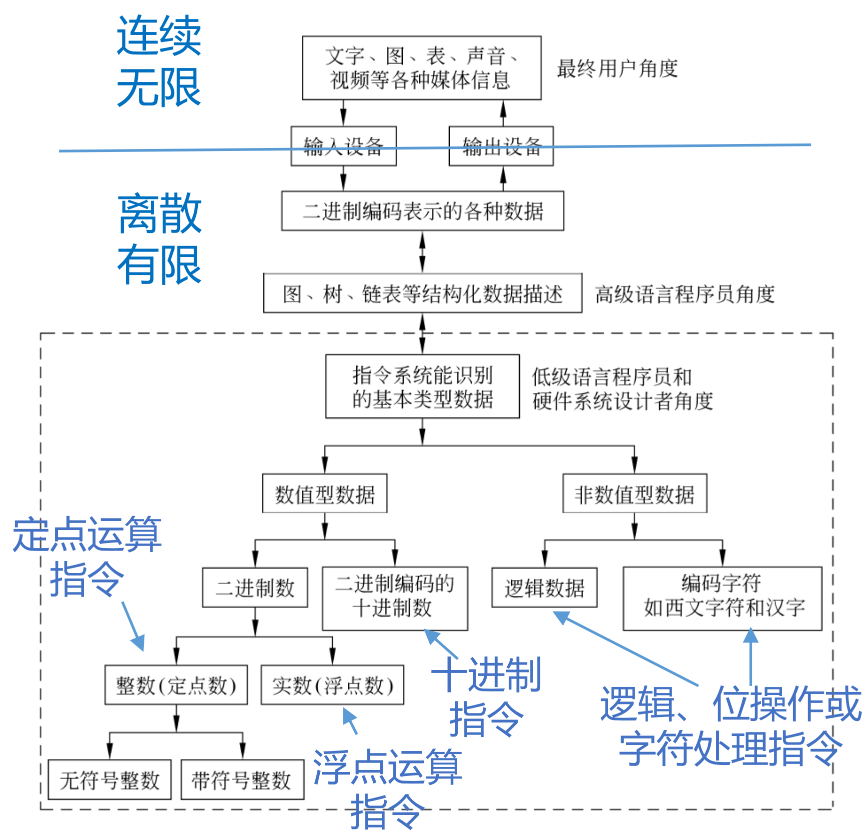


图 2.1 计算机外部信息与内部数据的转换

例：真值$127 = 2^7 - 1$，机器数为0000 0000 0111 1111

回顾：整数的二进制数表示

整数的二进制数表示

- 无符号整数
- 有符号整数：原码，反码，移码，补码
    - 编码是为了**解决正负号问题**
    - 计算机中几乎**不用反码**，运算**普遍使用补码**
    - 二进制补码的运算
    - 二进制-十进制转换

原码表示

真值	二进制	真值	二进制
0	0000	-0	1000
1	0001	-1	1001
2	0010	-2	1010
3	0011	-3	1011
4	0100	-4	1100
5	0101	-5	1101
6	0110	-6	1110
7	0111	-7	1111

0表示正

1表示负

数值不变

优点：

- 最直接，便于理解

缺点：

- 0的表示不唯一，不利于程序员编程
- 加、减运算方式不统一，尤其当a<b时，实现a-b比较困难
- 需要额外对符号位进行处理，不利于硬件设计

补码表示

在一个模运算系统中，一个数与它除以“模”后的余数等价。

时钟是一种模12系统

- **例：** 图中时针指向的是10点，要将它拨向6点，有两种拨法
  - 1、逆时针拨4格，10-4=6
  - 2、顺时针拨8格，10+8=18=6[mod 12]

- **加和减的统一：**
  - 一个负数的补码等于模减该负数的绝对值。
  - 对于某一确定的模，某数减去小于模的另一数，总可以加上另一数负数的补码来代替。
  - 一个**负数的补码**等于将**对应正数补码** **各位取反、末位加一**

8位二进制示例：

0111 1111 – 0100 0000 = 0111 1111 + (1 0000 0000 – 0100 0000)

= 0111 1111 + 1100 0000

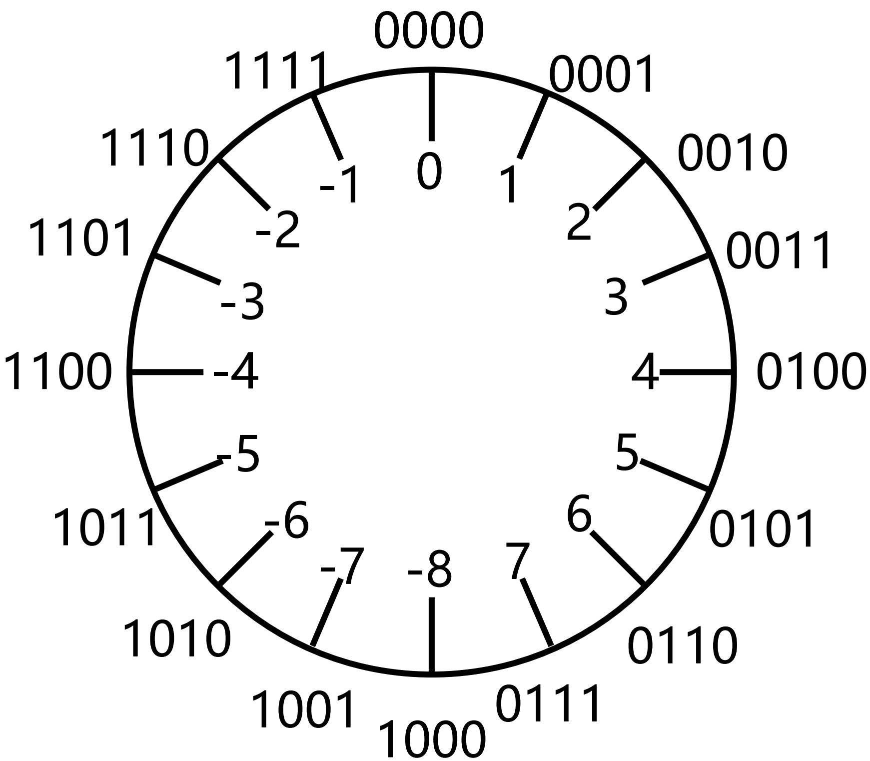
只留余数 = 1 0011 1111 (mod 1 0000 0000)

= 0011 1111

补码表示

一个n位运算器，只能保留低n位的运算结果，即模为2^n的补码运算

模为2^4的时钟系统



补码的定义：

$[X]_c = 2^n + X \ (-2^n \leq X \leq 2^n, mod\ 2^n)$

补码表示：

000…000 ~ 011…111：表示的值不变

100…000 ~ 111…111：表示的值由

$2^{k-1} \sim 2^k - 1$

变为

$-2^{k-1} \sim -1$

补码表示法的优势

- 补码表示法 vs. 原码表示法

	补码表示法		原码表示法	
9	0000 1001		0000 1001	
+ 8	+ 0000 1000		+ 0000 1000	
17	0001 0001	17	0001 0001	17
9	0000 1001		0000 1001	
+ -8	+ 1111 1000		+ 1000 1000	
1	10000 0001	1	1001 0001	-17

补码无论同号还是异号都可以直接相加

求真值的补码

特殊的真值：

$$[-2^{n-1}]_c = 2^n - 2^{n-1} = 10\ldots0\ (n-1\text{个}0)$$

$$[-1]_c = 2^n - 1 = 11\ldots1\ (n\text{个}1)$$

$$[+0]_c = [-0]_c = 00\ldots0\ (n\text{个}0)$$

在32位机器中n为32
int型 32位
short型 16位
char型 8位

一般的例子：

$$123 = 127 - 4 = 0111\ 1111\text{B} - 0000\ 0100\text{B} = 0111\ 1011\text{B}$$

$$-123 = -0111\ 1011\text{B}$$

$$[0111\ 1011]_c = 2^8 + 0111\ 1011 = 1\ 0111\ 1011\ (mod\ 2^8) = 0111\ 1011$$

$$[-0111\ 1011]_c = 2^8 - 0111\ 1011 = 1111\ 1111 - 0111\ 1011 + 1 = 1000\ 0101$$

0的补码唯一，为$00\ldots0\ (n\text{个}0)$
正数的补码等于它本身
负数的补码为各位取反，末位加1

求补码的真值

令：$[X]_C = x_{n-1}x_{n-2}\ldots x_2x_1$

则：$X = -x_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + x_2 \times 2^1 + x_1 \times 2^0$

真值的范围

$-2^{n-1} \le X \le 2^{n-1} - 1$

例：补码**1101 0110**的真值为

$-2^7 \times 1 + 2^6 \times 1 + 2^5 \times 0 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 0 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 0 = -42$

简便求法：

符号为0，则为正数，数值部分相同

符号位1，则为负数，数值各位取反，末位加1

例：补码**0101 0110**的真值为

$+\mathbf{101\ 0110} = 64 + 16 + 4 + 2 = 86$

例：补码**1101 0110**的真值为

$-\mathbf{010\ 1001} = -(32 + 8 + 1 + 1) = -42$

移码表示

将每一个数值加上一个**偏置常数**（excess/bias）
通常当编码位数为n时，bias取2^{n-1}或$2^{n-1}-1$（如IEEE 754）
例如n=4时， bias=8

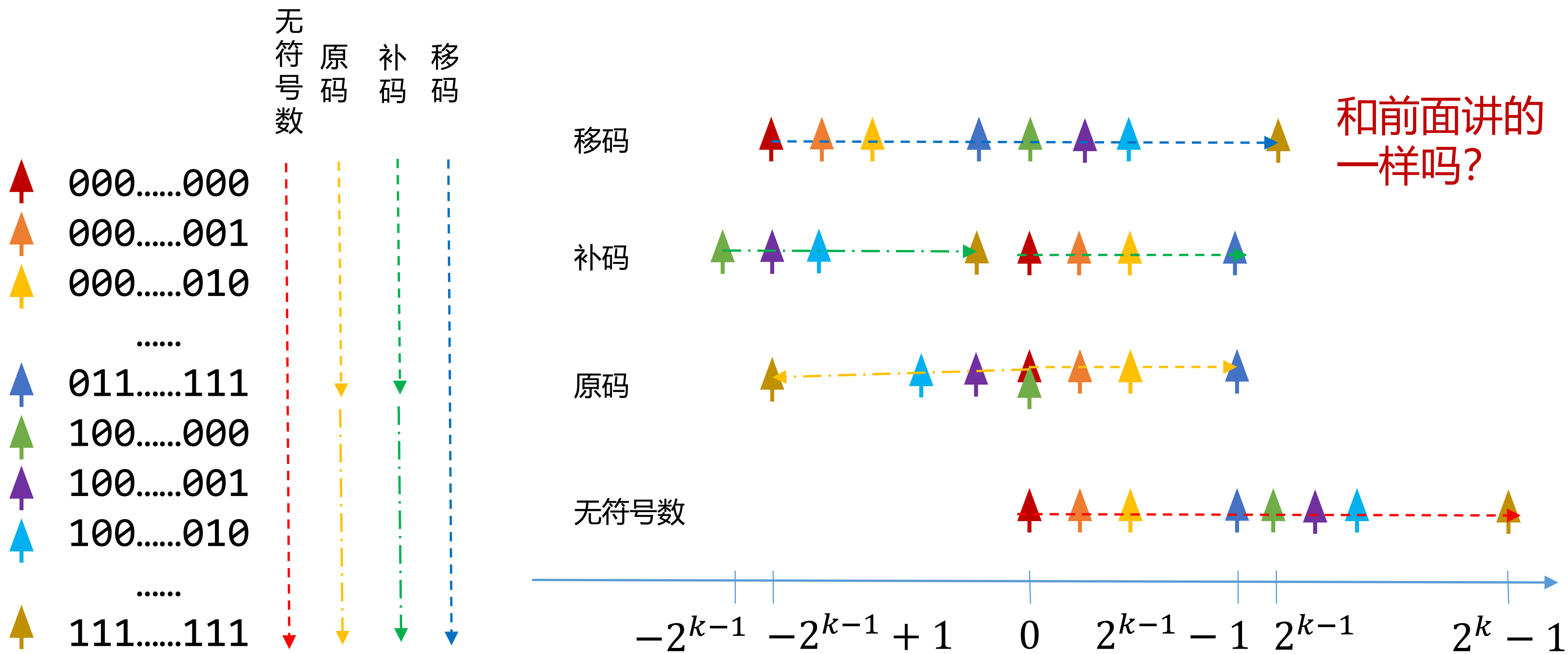
真值	二进制	真值	二进制
0	1000	-0	1000
1	1001	-1	0111
2	1010	-2	0110
3	1011	-3	0101
4	1100	-4	0100
5	1101	-5	0011
6	1110	-6	0010
7	1111	-7	0001
		-8	0000

当bias为2^{n-1}，
移码和补码仅第一位不同

0的表示唯一

补码：111<011？
移码：011<111
此外，全为负数时，移码比原码更容易比较

扩展：不同的整数编码



和前面讲的一样吗?

以8位为例，真值的表示范围

- 无符号：　0~255　　$0\sim2^k-1$
- 原码：　-127~127　　$-2^{k-1}+1\sim2^{k-1}-1$
- 移码：　-127~128　　$-2^{k-1}+1\sim2^{k-1}$
- 补码：　-128~127　　$-2^{k-1}\sim2^{k-1}-1$

移码在IEEE754中
尾数需要右移一位，所以
从-128~127变成了-127~128
实际可用范围是**-126~127**

回顾：浮点数的二进制数表示

浮点数的二进制数表示

十进制数的科学计数法

尾数（mantissa）

阶/指数（exponent）

符号（sign）

基/底（radix/base）

$$-3.04 \times 10^{20}$$

二进制数的科学计数法

尾数（mantissa）

阶/指数（exponent）

符号（sign）

基/底（radix/base）

$$-1.01 \times 2^{20}$$

基底不变，对符号、尾数和阶分别编码即可以表示一个**浮点数**

规格化数

- 任何浮点数都能以多种样式来表示

$$0.110 \times 2^5, \qquad 110 \times 2^2, \qquad 0.0110 \times 2^6$$

- 规格化表示

$$\pm 1.bbb\ldots b \times 2^E$$

$$X = (-1)^S \times M \times 2^E$$

S	E	M

- **编码**方式怎么选?
- **顺序**为什么不是$S\ M\ E$?
- **位数**怎么分配?
- **改进**的空间?

规格化数的变化

0		31
S	E	M
1位	？位**移码**	？位**原码**

$$X = (-1)^S \times M \times B^E$$

E使用**移码：**例如计算 $1.01 \times 2^{-1} + 1.11 \times 2^{3}$时，需要将**低阶**（$2^{-1}$）**转为高阶**（$2^{3}$）那么首先需要**比较-1和3的大小**

M使用**原码：**对称，无符号时原码的乘法运算简单

其他规格化数的表示**形式**：$\pm 0.1bb \ldots b \times 2^E$

- 对于一定长度的规格化数，表示范围和精度之间存在权衡（**总位数不变**）
  - **增加**阶码（E）位数：**扩大**表示**范围**，**降低**表示**精度**
  - **增加**尾数（M）位数：**减少**表示**范围**，**提高**表示精度，
  - **更大**的底（B）：如4，8，16，**扩大**表示**范围**，**降低**表示精度

需要一个统一的标准

一种规格化表示

- 规格化表示

$\pm 1.bbb\ldots b \times 2^{E}$

第一位永远是1

0	1 ... 8	9 ... 31
S	E	M
1位	8位**移码**	23位**原码**表示**24位**尾数

$X = (-1)^{S} \times M \times 2^{E}$

-127 ~ 128
（ bias取$2^{n-1}-1$ ）

$\mathbf{1 + 0 \sim 1 + 0.11\ldots11}$

2^{23}个1

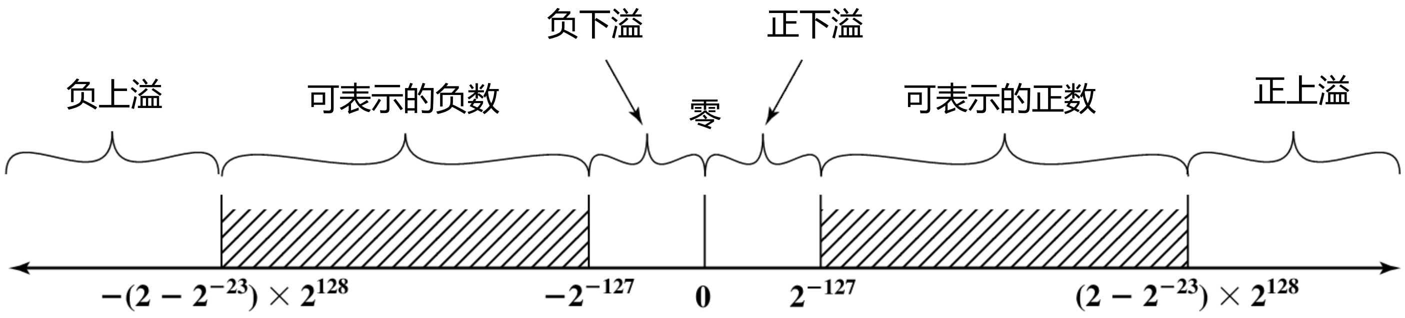
$\mathbf{0.11\ldots11 = 1 - 0.00\ldots01 = 1 - 2^{-23}}$ → 最大正数： $\mathbf{(2-2^{-23}) \times 2^{128}}$

最小正数：*E=0000 0000，M=0.00…00* → $\mathbf{2^{-127}}$

存在什么问题?

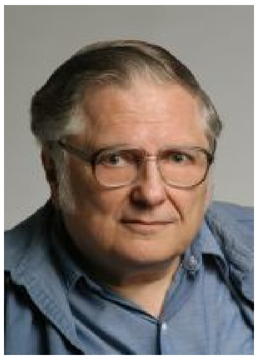
一种规格化数的值的范围

- 值的范围
  - 介于 $-(2-2^{-23})\times 2^{128}$ 和 -2^{-127} 之间的负数
  - 介于 2^{-127} 和 $(2-2^{-23})\times 2^{128}$ 之间的正数



原码的表示范围是对称的，所以浮点数值的范围也关于原点对称

IEEE 754 标准



Larger Photo

William M. Kahan

Professor Emeritus

Research Areas

- Computer Architecture & Engineering (ARC)
- Scientific Computing (SCI)

Computer architecture; Scientific computing; Numerical analysis

20世纪70年代，IEEE成立委员会着手制定浮点数标准。

20世纪80年代，Intel邀请Kahan教授设计8087处理器的浮点运算单元。

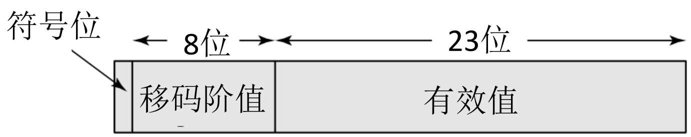
IEEE邀请Kahan基于8087中的浮点标准起草一份通用标准。

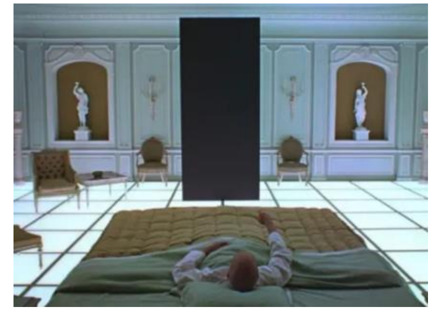
1985年提出浮点数标准**IEEE 754**。

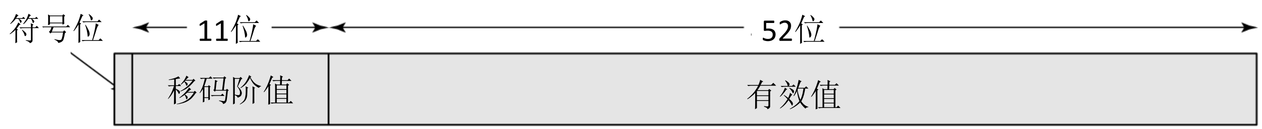
1989年Kahan教授因此获得ACM A.M Turing Award

IEEE 754 标准

- **定义32位的单精度和64位的双精度两种格式**







- **定义两种拓展格式**
  - 扩展单精度浮点格式（≥43 位，不常用）。
  - 扩展双精度浮点格式（≥79 位，一般情况下，Intel x86 结构的计算机采用的是 80 位，而 SPARC 结构的计算机采用的是 128 位）。

IEEE 754 标准

单精度浮点数

0	1　　　　8	9　　　　　　　　　　31
S	E	M
1位	8位**移码**	23位**原码**表示**24位**尾数

S：**1表示负，0表示正**

E：**全0和全1表示特殊值，**
范围是 0000 0001 (-126) ~ 1111 1110 (127)

M：**最高位总是1，所以隐含表示**

阶码的范围为什么是-126~127？为什么不是-127~128?

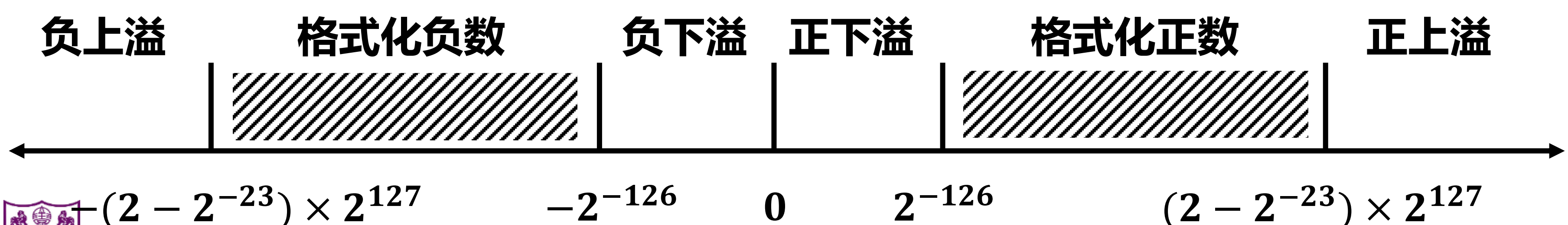
IEEE 754 标准

IEEE754 格式化浮点数表示范围

格式	最小正数	最大正数	最小负数	最大负数
单精度	$E=1$ $M=0$ 1.0×2^{-126}	$E=254$ $M=1-2^{-23}$ $(2-2^{-23})\times 2^{127}$	$E=254$ $M=1-2^{-23}$ $-(2-2^{-23})\times 2^{127}$	$E=1$ $M=0$ -1.0×2^{-126}
双精度	$E=1$ $M=0$ 1.0×2^{-1022}	$E=2046$ $M=1-2^{-52}$ $(2-2^{-52})\times 2^{1023}$	$E=2046$ $M=1-2^{-52}$ $-(2-2^{-52})\times 2^{1023}$	$E=1$ $M=0$ -1.0×2^{-1022}

注：均为真值

原码的表示范围是对称的，所以浮点数值的范围也关于原点对称



溢出区域怎么表示?

IEEE 754 标准

阶码的值	尾数的值	表示
0（全0）	0	+/- 0
0（全0）	非0	非规格化数
1~254	任意	规格化数
255（全1）	0	+/- ∞
255（全1）	非0	NaN

全0和全1

- 用于表示格式化数以外的情况
- 负上溢和正上溢中只能表示无穷

IEEE 754 标准

- 格式参数

参数	格式			
	单精度	单精度拓展	双精度	双精度拓展
字宽（位数）	32	≥43	64	≥79
阶值位宽（位数）	8	≥11	11	≥15
阶值偏移量	127	未指定	1023	未指定
最大阶值	127	≥1023	1023	≥16383
最小阶值	−126	≤−1022	−1022	≤−16382
数的范围（底为10）	$10^{-38}, 10^{+38}$	未指定	$10^{-308}, 10^{+308}$	未指定
有效值位宽（位数）	23	≥31	52	≥63
阶值的数目	254	未指定	2046	未指定
小数的数目	2^{23}	未指定	2^{52}	未指定
值的数目	1.98×2^{31}	未指定	1.99×2^{63}	未指定

IEEE 754 标准

小数第一位：0
用法：表示未初始化的值，用于捕获异常

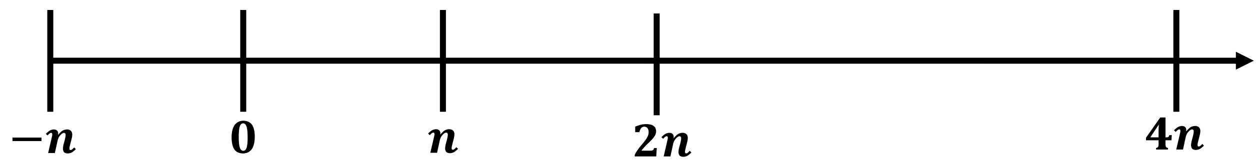
小数第一位：1
用法：表示未定义的算术结果，如除数等于0

	单精度（32位）				双精度（64位）			
	符号	移码阶值	小数	值	符号	移码阶值	小数	值
正零	0	0	0	0	0	0	0	0
负零	1	0	0	-0	1	0	0	-0
正无穷大	0	255 (all 1s)	0	∞	0	2047 (all 1s)	0	∞
负无穷大	1	255 (all 1s)	0	$-\infty$	1	2047 (all 1s)	0	$-\infty$
静默式非数	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN	0 or 1	2047 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
通知式非数	0 or 1	255 (all 1s)	$\neq 0$	NaN	0 or 1	2047 (all 1s)	$\neq 0$	NaN
正的规格化非零数	0	$0 < e < 255$	f	$2^{e-127}(1.f)$	0	$0 < e < 2047$	f	$2^{e-1023}(1.f)$
负的规格化非零数	1	$0 < e < 255$	f	$-2^{e-127}(1.f)$	1	$0 < e < 2047$	f	$-2^{e-1023}(1.f)$
正的非规格化数	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-126}(0.f)$	0	0	$f \neq 0$	$2^{e-1022}(0.f)$
负的非规格化数	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-126}(0.f)$	1	0	$f \neq 0$	$-2^{e-1022}(0.f)$

IEEE 754 标准

精度不够怎么办?
舍入原则

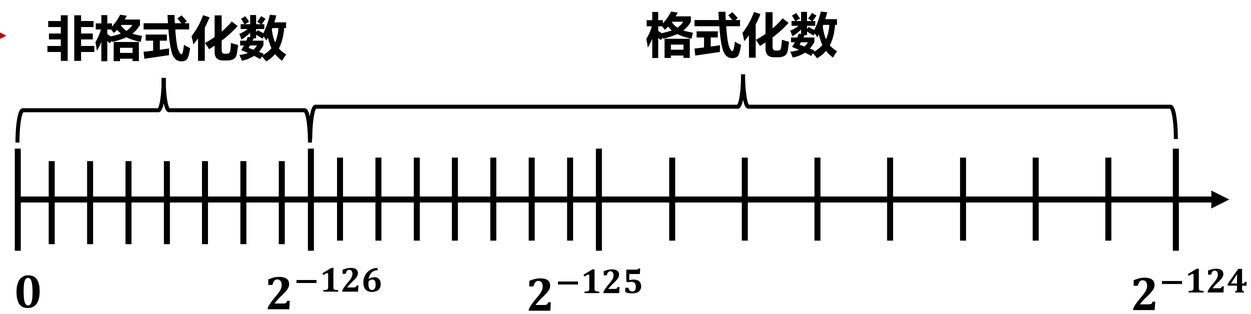
单精度每格表示2^{23}个数



精度随着绝对值的增大而降低

阶码全0，尾数非0 →

$(-1)^s \times 0.bb\ldots b \times 2^{-126}$



IEEE 754 标准

- 例子

0.5 = 0.100…0B = (1.00..0)2×2^(-1)

0 01111110 000…00 (23)

-0.4375 = -0.01110…0B = - (1.110..0)2×2^(-2)

1 01111101 110…00 (21)

二进制编码的十进制数表示

- 浮点运算的问题
  - 精度限制
  - 转换成本高
- 应用需要
  - 长数字串的计算：会计，……
- 解决方法
  - 用4位二进制编码十进制（BCD）表示0, 1, ..., 9，直接计算

二进制编码的十进制数表示

- 自然BCD码 (NBCD, 8421 码)
  - 0 ~ 9: 0000 ~ 1001
  - 符号: 使用四个最高有效位
    - 正: 1100 / 0
    - 负: 1101 / 1
  - 例子
    - +2039: **1100** 0010 0000 0011 1001 / **0** 0010 0000 0011 1001
    - -1265: **1101** 0001 0010 0110 0101 / **1** 0001 0010 0110 0101
- 其他BCD码
  - 2421, 5211, 4311, …

非数值数据的编码表示

- **逻辑值**
  - **逻辑数据**和**数值数据**在形式上**没有差异**
  - 通过**指令的操作码**类型来**识别运算类型**，如逻辑运算指令，算术运算指令。
- **西文字符**
  - 有**多种**不同的**字符集**
  - 最广泛使用的是**ASCII码**
    - **7位或8位二进制表示**
- **汉字字符**
  - 一个**字**就是一个**方块图形**
  - 如GB2312-80**字符集**
  - 超过**6万**个字（**至少16位**）
- **多媒体信息（图像、音频等）**
  - 同样用0和1表示，**数据结构**各异

表 2.6 ASCII 码表

$b_3b_2b_1b_0$ \ $b_6b_5b_4$	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

总结

- 信息的二进制编码
- 整数的二进制表示
  - 补码表示的优势，表示方法，真值计算
  - 不同的整数二进制表示
- 浮点数的二进制表示
  - 浮点数表示方法，规格化数，非规格化数，IEEE 754标准
- 二进制编码的十进制数表示
  - NBCD码表示方法
- 非数值数据的编码表示
  - 逻辑值，西文字符，汉字字符，多媒体信息

谢谢

bohanliu@nju.edu.cn

南京大學
NANJING UNIVERSITY