多元分析：第九周作业

蒋翌坤 20307100013

《实用多元统计分析》P259：6.11

令 $p\times 1$ 向量 $\left\{X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}\right\}, \left\{X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}\right\}$ 为分别来自正态总体 $N_p(\mu_1,\Sigma), N_p(\mu_2,\Sigma)$ 的样本，由于这些样本都是互相独立的，于是，

令 $n_1+n_2=n$，有，

$$L(\mu_1,\mu_2,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{np/2}|\Sigma|^{n/2}}\exp\Bigg\{-tr\Big\{\Sigma^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x_1})(x_{1j}-\bar{x_1})^{'}+n_1(\bar{x_1}-\mu_1)(\bar{x_1}-\mu_1)^{'} + \sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x_2})(x_{2j}-\bar{x_2})^{'}+n_2(\bar{x_2}-\mu_2)(\bar{x_2}-\mu_2)^{'}\Big]\Big\}/2\Bigg\}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&tr\Big\{\Sigma^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x_1})(x_{1j}-\bar{x_1})^{'}+n_1(\bar{x_1}-\mu_1)(\bar{x_1}-\mu_1)^{'}+\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x_2})(x_{2j}-\bar{x_2})^{'}+n_2(\bar{x_2}-\mu_2)(\bar{x_2}-\mu_2)^{'}\Big]\Big\}\\
&=tr\Big\{\Sigma^{-1}\Big[\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x_1})(x_{1j}-\bar{x_1})^{'}+\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x_2})(x_{2j}-\bar{x_2})^{'}\Big]\Big\}\\
&\qquad+n_1(\bar{x_1}-\mu_1)^{'}\Sigma^{-1}(\bar{x_1}-\mu_1)+n_2(\bar{x_2}-\mu_2)^{'}\Sigma^{-1}(\bar{x_2}-\mu_2)
\end{aligned}$$

对于 μ_1，$n_1(\bar{x_1}-\mu_1)^{'}\Sigma^{-1}(\bar{x_1}-\mu_1)\geq 0$，当仅当 $\mu_1=\bar{x_1}$ 取最小，此时，$L(\mu_1,\mu_2,\Sigma)$ 达到最大。因此，$\hat{\mu_1}=\bar{x_1}$ 。同理可得 $\hat{\mu_2}=\bar{x_2}$。

由结论 4.10 有

$$b=\frac{n}{2}=\frac{n_1+n_2}{2}$$

$$B=\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x_1})(x_{1j}-\bar{x_1})^{'}+n_1(\bar{x_1}-\mu_1)(\bar{x_1}-\mu_1)^{'}+\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x_2})(x_{2j}-\bar{x_2})^{'}+n_2(\bar{x_2}-\mu_2)(\bar{x_2}-\mu_2)^{'}$$

于是，

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}&=\frac{1}{n}\Big[\sum_{j=1}^{n_1}(x_{1j}-\bar{x_1})(x_{1j}-\bar{x_1})^{'}+\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x_2})(x_{2j}-\bar{x_2})^{'}\Big]\\
&=\frac{1}{n_1+n_2}[(n_1-1)S_1+(n_2-1)S_2]\\
&=\frac{n_1+n_2-2}{n_1+n_2}S_p
\end{aligned}$$

《实用多元统计分析》P266: 6.21

a

这里的融合是

$$S_p = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_1 + \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2} S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$$

由于 n_1, n_2 比较小，这种融合需要假设两样本来自正态总体且 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$。而通过 S_1 S_2 的比较来看，可以发现两样本的协方差差距很大，可以推测两总体的协方差差距也很大。因此，这种融合是不合理的。

b

$$T^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S_p\right]^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0.158$$

而,

$$\frac{(n_1 + n_2 - 2)p}{n_1 + n_2 - p - 1} F_{p, n_1 + n_2 - p - 1}(\alpha) = \frac{38 \times 2}{37} F_{2,37}(0.05) = 6.68 > 0.158 = T^2$$

因此，在 $\alpha = 0.05$ 的显著性水平下，不能拒绝原假设 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$。因此，债券为 Aa 级的公司与债券为 Baa 级的公司的财务特征没有显著差异。

c

对各分量求 95% 置信区间：

$$(\mu_{1i} - \mu_{2i}) : (\bar{X_{1i}} - \bar{X_{2i}}) \pm \sqrt{6.68 \times \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) s_{ii,p}}$$

可得

$$\mu_{11} - \mu_{21} : [-0.80, 0.57] \qquad \mu_{12} - \mu_{22} : [1.62, 9.27]$$
$$\mu_{13} - \mu_{23} : [-0.31, -0.04] \qquad \mu_{14} - \mu_{24} : [-2.80, 6.78]$$

可以发现 $\mu_{12} - \mu_{22}$ 和 $\mu_{13} - \mu_{23}$ 的 95% 置信区间内不包含 0。因此，导致 $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ 被拒绝的均值分量为 $[\mu_{12} - \mu_{22}, \mu_{13} - \mu_{23}]' = a(\mu_1 - \mu_2)$，其中，$a = [0, 1, 1, 0]'$。

d

由于 X_1, X_4 对应的财务比率指标对于两类公司没有显著差异，而 X_2, X_3 对应的财务比率指标对于两类公司有显著差异，因此，可以说在对债券的评级中，X_1, X_4: 流动比率和股本收益率没用，而 X_2, X_3: 长期利率和负债与股权比有用。

e

结论不会变。利用（6-27）式，T^2 变为，

$$T^2 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)' \left[\frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2 \right]^{-1} (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$$

因为两样本 $n_1 = n_2 = 20$，所以 $\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) S_p = \frac{1}{n_1} S_1 + \frac{1}{n_2} S_2$，因此，这里的 T^2 与融合方法得到的 T^2 相同，为 0.158。

而 $\min(n_1, n_2) \le v \le n_1 + n_2$，

$$\min\left(\frac{vp}{v-p-1} F_{p,v-p-1}(\alpha) \right) = \frac{40 \times 2}{37} F_{2,37}(0.05) = 7.03 > 0.158 = T^2$$

当 $v = n_1 + n_2$，取到最小值。因此，（b）中结论不会变。