

# 多元分析：第十二周作业

蒋翌坤 20307100013

## 《实用多元统计分析》P412: 9.8

解方程

$$\begin{cases} l_{11}^2 + \psi_1 = 1 & l_{11}l_{21} = 0.4 & l_{11}l_{31} = 0.9 \\ & l_{21}^2 + \psi_2 = 1 & l_{21}l_{31} = 0.7 \\ & & l_{31}^2 + \psi_3 = 1 \end{cases}$$

得到

$$\begin{bmatrix} l_{11} \\ l_{21} \\ l_{31} \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{36}{70}} \\ \sqrt{\frac{28}{90}} \\ \sqrt{\frac{63}{40}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{34}{70} \\ \frac{62}{90} \\ -\frac{23}{40} \end{bmatrix}$$

这里  $\psi_3 = -\frac{23}{40} < 0$ ，但是  $\psi_3$  为特殊方差，应该大于 0，所以这个选择是不能接受的。

## 《实用多元统计分析》P412: 9.19

a

利用极大似然方法，可以分别得到  $m = 2$  和  $m = 3$  时公共因子的极大似然解，如表 1 所示。

变量	m=2			m=3			
	$F_1$	$F_2$	$\psi_i$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$\psi_i$
$x_1$ : 销售增长	0.95	0.03	0.07	-0.89	-0.28	-0.26	0.04
$x_2$ : 销售利润	0.95	-0.02	0.07	-0.82	-0.15	-0.50	0.03
$x_3$ : 新客户销售额	0.90	0.12	0.12	-0.93	-0.14	-0.09	0.09
$x_4$ : 创造力	0.57	0.77	0.06	-0.83	0.52	0.14	0.01
$x_5$ : 机械推理	0.67	0.28	0.45	-0.72	0.01	-0.16	0.44
$x_6$ : 抽象推理	0.57	-0.17	0.63	-0.59	-0.74	0.28	0.01
$x_7$ : 数学能力	0.96	-0.19	0.02	-0.77	-0.32	-0.49	0.04

表 1:  $m = 2$  与  $m = 3$  的极大似然解

b

使用 varimax 方法求解  $m = 2$  与  $m = 3$  时的旋转载荷，可得表 2。

从表中可以发现， $m = 2$  时，销售增长、销售利润、新客户销售额、数学能力在第一个因子上高载荷，创造力在第二个因子上高载荷； $m = 3$  时，创造力在第一个因子上高载荷，抽象推理在第二个因子上高载荷，销售增长、销售利润、数学能力在第三个因子上高载荷。

变量	m=2		m=3		
	$F_1$	$F_2$	$F_1$	$F_2$	$F_3$
$x_1$ : 销售增长	0.88	0.37	-0.36	-0.44	-0.78
$x_2$ : 销售利润	0.9	0.33	-0.31	-0.19	-0.9
$x_3$ : 新客户销售额	0.77	0.52	-0.53	-0.44	-0.64
$x_4$ : 创造力	0.25	0.92	-0.95	-0.03	-0.26
$x_5$ : 机械推理	0.53	0.5	-0.46	-0.21	-0.54
$x_6$ : 抽象推理	0.59	0.05	-0.04	-0.94	-0.29
$x_7$ : 数学能力	0.96	0.17	-0.17	-0.3	-0.91

表 2:  $m = 2$  与  $m = 3$  的旋转载荷

c

$m = 2$  时, 共性方差为  $(0.91 \ 0.91 \ 0.86 \ 0.92 \ 0.53 \ 0.35 \ 0.96)'$ ,  
特殊方差为  $(0.07 \ 0.07 \ 0.12 \ 0.06 \ 0.45 \ 0.63 \ 0.02)'$ 。  $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}$  的估计为

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.98 & 0.99 & 0.63 & 1.1 & 1.16 & 0.93 \\ 0.98 & 0.98 & 0.98 & 0.59 & 1.09 & 1.17 & 0.94 \\ 0.94 & 0.93 & 0.98 & 0.74 & 1.12 & 1.1 & 0.85 \\ 0.63 & 0.6 & 0.8 & 0.98 & 1.05 & 0.82 & 0.42 \\ 0.72 & 0.71 & 0.78 & 0.66 & 0.98 & 0.96 & 0.62 \\ 0.61 & 0.62 & 0.6 & 0.25 & 0.79 & 0.98 & 0.6 \\ 0.98 & 0.99 & 0.95 & 0.47 & 1.05 & 1.21 & 0.98 \end{bmatrix}$$

$m = 3$  时, 共性方差为  $(0.94 \ 0.95 \ 0.89 \ 0.97 \ 0.54 \ 0.97 \ 0.94)'$ ,  
特殊方差为  $(0.04 \ 0.03 \ 0.09 \ 0.01 \ 0.44 \ 0.01 \ 0.04)'$ 。  $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}$  的估计为

$$\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.94 & 0.98 & 0.57 & 1.12 & 0.67 & 0.94 \\ 0.94 & 0.98 & 0.92 & 0.54 & 1.1 & 0.47 & 0.97 \\ 0.93 & 0.86 & 0.98 & 0.69 & 1.12 & 0.64 & 0.85 \\ 0.6 & 0.56 & 0.77 & 0.98 & 1.01 & 0.16 & 0.44 \\ 0.72 & 0.7 & 0.77 & 0.59 & 0.98 & 0.39 & 0.67 \\ 0.7 & 0.49 & 0.71 & 0.15 & 0.81 & 0.98 & 0.59 \\ 0.94 & 0.96 & 0.9 & 0.41 & 1.07 & 0.57 & 0.98 \end{bmatrix}$$

可以计算得到  $R$

$$R = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.93 & 0.88 & 0.57 & 0.71 & 0.67 & 0.93 \\ 0.93 & 1.0 & 0.84 & 0.54 & 0.75 & 0.47 & 0.94 \\ 0.88 & 0.84 & 1.0 & 0.7 & 0.64 & 0.64 & 0.85 \\ 0.57 & 0.54 & 0.7 & 1.0 & 0.59 & 0.15 & 0.41 \\ 0.71 & 0.75 & 0.64 & 0.59 & 1.0 & 0.39 & 0.57 \\ 0.67 & 0.47 & 0.64 & 0.15 & 0.39 & 1.0 & 0.57 \\ 0.93 & 0.94 & 0.85 & 0.41 & 0.57 & 0.57 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$m = 3$  时  $R$  与  $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\mathbf{\Psi}}$  差距较小, 所以选  $m = 3$  比较好。

**d**

$m = 2$  时, 检验统计量  $(1 - u)M = 2.97 \times 10^5 > \chi_3^2(0.01) = 11.3$ ;  $m = 3$  时, 检验统计量  $(1 - u)M = 2.12 \times 10^5 > \chi_3^2(0.01) = 11.3$ 。所以都拒绝原假设  $H_0: \Sigma = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}' + \hat{\Psi}$ 。

从 (b)、(c) 结果看, 选择  $m = 3$  较好; 而从检验结果看, 虽然  $m = 2, 3$  都拒绝了原假设, 但是  $m = 3$  的检验统计量更小, 所以选择  $m = 3$  更好。综上所述, 选择  $m = 3$  最好。