多元回归 第五周作业

20307100013 蒋翌坤

《实用多元统计分析》P154: 4.8

解:

（a）

记标准正态分布的 CDF 为$\Phi(x)$，即$P(X_1 \le x) = \Phi(x)$

当$x_2 < -1$时，$F_{X_2}(x_2) = P(X_2 \le x_2) = P(X_1 \le x_2) = \Phi(x_2)$

当 $-1 \le x_2 \le 1$ 时，$F_{X_2}(x_2) = P(X_2 \le x_2) = P(X_2 \le -1) + P(-1 < -X_1 \le x_2) = \Phi(-1) + \Phi(1) - \Phi(-x_2) = 1 - \Phi(-x_2) = \Phi(x_2)$

当 $x_2 > 1$ 时，$F_{X_2}(x_2) = P(X_2 \le x_2) = P(X_2 \le 1) + P(1 < X_1 \le x_2) = \Phi(1) + \Phi(x_2) - \Phi(1) = \Phi(x_2)$

因此，$F_{X_2}(x_2) = \Phi(x_2)$，即$X_2 \sim N(0,1)$

（b）

由题意可知，$X_2 - X_1 \in [-2, 2]$

假设X_1, X_2服从二元正态分布，$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ \sigma & 1 \end{bmatrix}\right)$, $\sigma \in (-1,1)$

则线性组合$X_2 - X_1$也服从正态分布，$X_2 - X_1 \sim N(0, 2-2\sigma)$， $X_2 - X_1 \in (-\infty, \infty)$，与题意矛盾。因此，$X_1, X_2$不服从二元正态分布。

《实用多元统计分析》P154: 4.9

解:

$$Cov(X_1, X_2) = E\left[\left(X_1 - E(X_1)\right)\left(X_2 - E(X_2)\right)\right] = E(X_1X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X_1X_2|X_1 = x)\,\phi(x)dx$$

$$= \int_{-C}^{C} -x^2\,\phi(x)dx + \int_{x\notin[-c,c]} x^2\phi(x)dx$$

由于x^2与$\phi(x)$为偶函数，则$Cov(X_1, X_2) = 2\left(\int_c^{\infty} x^2\phi(x)dx - \int_0^c x^2\phi(x)dx\right)$

可以发现$Cov(X_1, X_2)$是关于$c \in [0, +\infty)$的连续函数

令$c = 0$，则$X_2 = X_1$，$Cov(X_1, X_2) = E\left[\left(X_1 - E(X_1)\right)\left(X_2 - E(X_2)\right)\right] = E(X_1^2) = 1$

令$c \to +\infty$，则$X_2 = -X_1$，$Cov(X_1, X_2) = E\left[\left(X_1 - E(X_1)\right)\left(X_2 - E(X_2)\right)\right] = E(-X_1^2) = -1$

由零点存在定理，$\exists c \in (0, +\infty)$，使$Cov(X_1, X_2) = 0$

《实用多元统计分析》P114: 4.18

解:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4}(X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})' = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 1.5 \end{bmatrix}$$