多元回归 第三周作业

20307100013 蒋翌坤

《实用多元统计分析》P153: 4.2

解：

（a）

$$f(x_1,x_2)=\left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho_{12}(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right)$$

$$=\left(4\pi\sqrt{1-0.25}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2(1-0.25)}\left(\frac{x_1^2}{2}+\frac{(x_2-2)^2}{1}-\frac{x_1(x_2-2)}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$=\left(2\sqrt{3}\pi\right)^{-1}\exp\left(-\frac{1}{3}\times\left(x_1^2+2x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2+2\sqrt{2}x_1-8x_2+8\right)\right)$$

（b）

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})=\begin{bmatrix}x_1\\x_2-2\end{bmatrix}'\frac{1}{2\times1-\frac{\sqrt{2}}{2}^2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{2}}{2} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2-2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{3}\begin{bmatrix}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+2x_2-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2-2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{3}\left(x_1^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2+\sqrt{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1x_2+\sqrt{2}x_1+2x_2^2-4x_2-4x_2+8\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(x_1^2+2x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2+2\sqrt{2}x_1-8x_2+8\right)$$

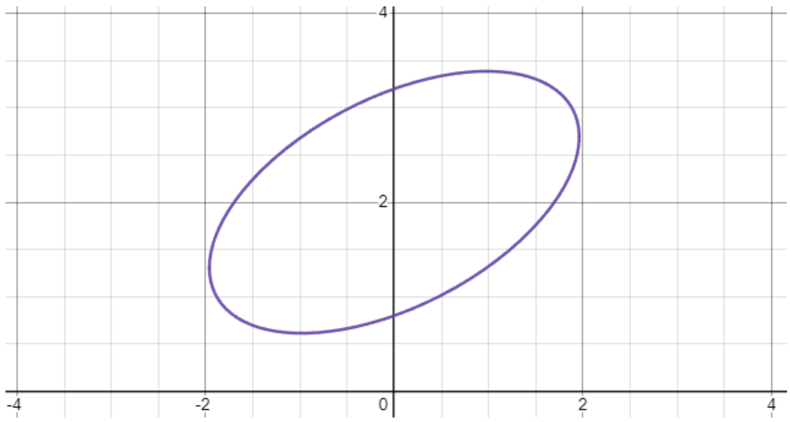
（c）

常密度轮廓线的解析式为：

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})=\frac{2}{3}\left(x_1^2+2x_2^2-\sqrt{2}x_1x_2+2\sqrt{2}x_1-8x_2+8\right)=c^2$$

要得到 50%概率的常密度轮廓线，取$c^2=\chi_2^2(0.5)=-2\times\ln 0.5$

常密度轮廓线草图如下：



《实用多元统计分析》P153: 4.4

解：

（a）

令$a'=[3,-2,1]$，则$3X_1-2X_2+X_3=a'\boldsymbol{X}\sim N(a'\boldsymbol{\mu},a'\boldsymbol{\Sigma}a)$，

$a'\boldsymbol{\mu}=[3,-2,1][2,-3,1]'=13$

$$a'\boldsymbol{\Sigma}a=[3,-2,1]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}=9$$

因此，$3X_1-2X_2+X_3\sim N(13,9)$

（b）

要使X_2与$X_2-a'\begin{bmatrix}X_1\\X_3\end{bmatrix}$独立，就是要使$\begin{bmatrix}X_2\\X_2-a'\begin{bmatrix}X_1\\X_3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$对应的二维正态分布的$\Sigma_2=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&0\\0&\sigma_{22}\end{bmatrix}$

令$a'=[a_1,a_2],A=\begin{bmatrix}0&1&0\\-a_1&1&-a_2\end{bmatrix}$，则$AX=\begin{bmatrix}X_2\\X_2-a'\begin{bmatrix}X_1\\X_3\end{bmatrix}\end{bmatrix}\sim N_2(A\mu,A\Sigma A')$

$$A\Sigma A'=\begin{bmatrix}0&1&0\\-a_1&1&-a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&2\\1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-a_1\\1&1\\0&-a_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&2\\-a_1+1-a_2&-a_1+3-2a_2&-a_1+2-2a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-a_1\\1&1\\0&-a_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&-a_1+3-2a_2\\-a_1+3-2a_2&\sigma_{22}\end{bmatrix}$$

因此，当$a'=[a_1,a_2]$满足$a_1+2a_2=3$时，X_2与$X_2-a'\begin{bmatrix}X_1\\X_3\end{bmatrix}$独立