多元回归 第二周作业

20307100013 蒋翌坤

《实用多元统计分析》P79: 2.8

解：

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)-4 = \lambda^2+\lambda-6 = 0$

解得A的特征值$\lambda_1=-3, \lambda_2=2$

$A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，对应标准化的特征向量$e_1{}' = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$，对应标准化的特征向量$e_2{}' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

A的谱分解：

$$A = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' = -3\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

《实用多元统计分析》P79: 2.9

解：

（a）设$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，则$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}+2a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ 2a_{11}-2a_{21} & 2a_{12}-2a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

解得$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

（b）$|A^{-1}-\lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}-\lambda\right)\left(-\frac{1}{6}-\lambda\right) - \frac{1}{9} = \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$

解得A^{-1}的特征值$\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$A^{-1}-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$，对应标准化的特征向量$e_1{}' = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

$A^{-1}-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$，对应标准化的特征向量$e_2{}' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

（c）A^{-1}的谱分解：

$$A^{-1} = \lambda_1 e_1 e_1' + \lambda_2 e_2 e_2' = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

和练习 2.8 中A的谱分解比较可以发现，A和A^{-1}的特征值存在倒数的关系，且标准化的特征向量相同。

《实用多元统计分析》P79: 2.10

解：

对于任意存在逆矩阵的2×2方阵有$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{4\times4.002-4.001^2}\begin{bmatrix} 4.002 & -4.001 \\ -4.001 & 4 \end{bmatrix}$，$B^{-1}=\frac{1}{4\times4.002001-4.001^2}\begin{bmatrix} 4.002001 & -4.001 \\ -4.001 & 4 \end{bmatrix}$

要证明$A^{-1}\doteq(-3)B^{-1}$，只需要证明$\frac{1}{4\times4.002-4.001^2}\doteq(-3)\frac{1}{4\times4.002001-4.001^2}$即可。

$\frac{4\times4.002001-4.001^2}{4\times4.002-4.001^2}=\frac{0.008004-0.008-0.000001}{0.008-0.008-0.000001}=\frac{0.000003}{-0.000001}=-3$

因此，$A^{-1}\doteq(-3)B^{-1}$

《实用多元统计分析》P79: 2.15

解：

令$x'=(x_1,x_2)$，则$3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2=x'\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}x$

令$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)(3-\lambda)-1=\lambda^2-6\lambda+8=0$

解得A的特征值$\lambda_1=2,\lambda_2=4$

$3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2=x'Ax=2x'e_1e_1'x+4x'e_1e_1'x=2y_1^2+4y_2^2\geq0$

其中，e_1,e_2为对应λ_1,λ_2的标准化特征向量，$y_1=x'e_1,y_2=x'e_2$

若x_1,x_2都为0，则$x'Ax=0$，$3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2$不正定

若x_1,x_2中至少有一个不为0，则$x'Ax>0$，$3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2$正定