Oblig 1

Thobias Høivik

Problem: Oppgave 1.4.2

Vis at standardbasisen $(e_1,\ldots,e_n)$ er en basis for $\mathbb{K}^n$.

Bevis. La $\mathbb{K}$ være en kropp og la $E = \{e_1,\ldots,e_n\}$ hvor

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

For å vise at $(e_1,\ldots,e_n)$ utgjør en basis for $\mathbb{K}^n$ må vi vise at $\{e_1,\ldots,e_n\}$ er lineært uavhengig og spenner $\mathbb{K}^n$.

Lineær uavhengighet.

Vi ønsker å vise at det ikke finnes en ikke-triviel løsning til

$$\sum_{i=1}^{n} k_i e_i = \vec{0}$$

hvor $k_i \in \mathbb{K}$. Summen av alle $k_i e_i$ er

$$\sum_{i=1}^{n} k_i e_i = \begin{pmatrix}k_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ k_2\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

Vi ser at eneste måten

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

er den trivielle løsningen $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Dette betyr at E er lineært uavhengig.

Utspenning av rommet.

Vi ønsker å vise at $\operatorname{span}(E) = \mathbb{K}^n$. Husk at

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} \middle| k_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

Spennrommet $\operatorname{span}(E)$ er underrommet av alle vektorer av formen

$$k_1e_1 + k_2e_2 + \cdots + k_ne_n = \begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

hvor $k_i \in \mathbb{K}$. Med andre ord:

$$\operatorname{span} E = \left\{ \begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix} \middle| k_i \in \mathbb{K}, i \in \{1,2,\ldots,n\} \right\} = \mathbb{K}^n$$

som ønsket. Med dette har vi vist at E spenner ut hele rommet.

Siden vi har vist at E er lineært uavhengig og spenner ut $\mathbb{K}^n$ konkluderer vi med at E utgjør en basis for $\mathbb{K}^n$. $\square$

Problem: Oppgave 1.4.6

(a) La $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen i $\mathbb{K}^n$. Vis at

$$[x]_{\mathscr{C}} = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

(b) La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ med en basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Vis at

$$\left[u_j\right]_{\mathscr{B}} = e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Bevis av (a). La $\mathbb{K}$ være en kropp og la $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen i $\mathbb{K}^n$.

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen av x i basisen $\mathscr{C}$, $[x]_{\mathscr{C}} = x$ for alle $x \in \mathbb{K}^n$.

La $x \in \mathbb{K}^n$. Da har vi at det finnes en unik n-tuppel $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at $x = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n$. Denne tuppelen er basisrepresentasjonen $[x]_{\mathscr{C}} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Med standardbasisen har vi at

$$\begin{aligned} x &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots\ b_n e_n \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b_n \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = [x]_{\mathscr{C}} \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise. □

Bevis av (b). La U være et vektorrom over kroppen $\mathbb{K}$ med en basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen, $\left[u_j\right]_{\mathscr{B}} = e_j$ hvor e_j refererer til den j-ende vektoren i standard basisen (vektoren med 0 i alle index-er utenom j, hvor vi har 1) og $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La u_j være en vilkårlig vektor i basisen. Da er u_j også en vektor i U, næmlig vektoren

$$0 \cdot u_1 + \cdots + 1 \cdot u_j + \cdots + 0 \cdot u_n$$

Da finens det en n-tuppel $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at

$$k_1 u_1 + \cdots + k_j u_j + \cdots + k_n j_n = u_j$$

Dette er basisrepresentasjonen av u_j i basisen. Spesifikt, er det tuppelen $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, hvor alle oppføringer er 0 utenom den j-ende index-en, som er 1. Dette er $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Med andre ord,

$$\left[u_j\right]_{\mathscr{B}} = e_j$$

som ønsket. □

Problem: Oppgave 1.5.2

Vis at
(a) $\dim \mathscr{P}^n = n+1$
(b) $\dim \mathscr{P} = \infty$
(c) $\dim C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$

Bevis av (a). La $\mathscr{P}^n$ være rommet av polynomer med koeffisienter i $\mathbb{R}$.

Vi ønsker å vise at $\dim \mathscr{P}^n = n+1$. Vi vet at, viss et vektorrom har en basis $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, så er rommet et endelig-dimensjonelt rom med dimensjon n. La oss se på den kanoniske basisen til $\mathscr{P}^n$, altså $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Denne basisen består av alle x^i hvor $i = 0, 1, \ldots, n$. Med andre ord består den av $|\{0, 1, 2, \ldots, n\}| = n+1$ elementer. Derfor kan vi konkludere at $\dim \mathscr{P}^n = n+1$. □

Bevis av (b). La $\mathscr{P}$ være rommet av alle polynomer med koeffisienter i $\mathbb{R}$.

Vi ønsker å vise at $\dim \mathscr{P} = \infty$. Vi gjør dette ved å vise at det ikke finnes en endelig basis for $\mathscr{P}$.

Anta, i søk om kontradiksjon, at det finnes en endelig basis $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ for $\mathscr{P}$, med n elementer. La d_i være graden av polynomet p_i for $i = 1, \ldots, n$. La $d = \max\{d_1, \ldots, d_n\}$. Da er graden av hver p_i mindre enn eller lik d. Hvis vi nå ser på den lineære kombinasjonen

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i(x), k_i \in \mathbb{K}$$

så får vi at graden av q er mindre enn eller lik d. Så for hvert polynom i spennrommet til B har grad høyst d, men $x^{d+1} \in \mathscr{P}$, som motsier antagelsen vår at det finnes en endelig basis for rommet.

Med det kan vi konkludere at $\dim \mathscr{P} = \infty$. □

Bevis av (c). La $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ være rommet av kontinuerlige $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hvert polynom er kontinuerlig, så $\mathscr{P} \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Siden $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ har et uendelig-dimensjonelt underrom, kan ikke $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ være endelig-dimensjonelt. Som sagt i Proposisjon 1.4.11 fra boken, for et underrom V av rommet U har vi at $\dim(V) \leq \dim(U)$.

Konklusjon: $\dim(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \infty$. □