Oblig 3

Thobias Høivik

Jeg antar i oppgave 4.1.2 (a) at det er en skrivefeil, siden når jeg søker opp additivitet i det andre argumentet på nettet får jeg

$$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$$

Problem: Oppgave 3.5.8

En diagonalmatrise er en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ som har ikke-null elementer kun langs diagonalen: $(A)_{ij} = 0$ for alle $i \neq j$. Vis at

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \max_i |(A_{ij})|$$

Bevis. La $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ være en diagonalmatrise. La $d_i = (A)_{ii}$ $(1 \leq i \leq \min\{m,n\}$ for $m \neq n)$.

For enhver $x \in \mathbb{K}^n$ har vi da

$$\begin{aligned}\|Ax\|_{\ell^2}^2 &= \sum_i |d_i x_i|^2 \\ &\leq (\max_i |d_i|^2) \sum_i |x_i|^2 \\ &= (\max_i |d_i|^2)\, \|x\|_{\ell^2}^2\end{aligned}$$

men for enhetsvektorer har vi $\|x\|_{\ell^2}^2 = 1$ så

$$\|Ax\|_{\ell^2} \leq \max_i |d_i|$$

og dette gjelder for enhetsvektorer, dermed

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_{\ell^2} \leq \max_i |d_i|$$

La k være slik at $|d_k| = \max_i |d_i|$. Ta basisvektoren e_k med $\|e_k\|_{\ell^2} = 1$. Da har vi

$$\begin{aligned}\|Ae_k\|_{\ell^2} &= |d_k|\, \|e_k\|_{\ell^2} \\ &= |d_k| \\ &= \max_i |d_i|\end{aligned}$$

så

$$||A||_{\mathscr{L}} \geq \max_i |d_i|$$

Det følger da at

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \max_i |d_i|$$

□

Problem: Oppgave 4.1.2

Bevis følgende:

(a) Indreproduktet er additivt i andre argument: $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(b) Indreproduktet er konjugert-homogen i andre argument: $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$

(c) Dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, er indreproduktet symmetrisk: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

Bevis av (a). La V være et indreproduktrom med $u, v, w \in V$.

$$\begin{aligned}\langle u, v+w\rangle &= \overline{\langle v+w, u\rangle} \\ &= \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} \\ &= \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} \\ &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle\end{aligned}$$

Bevis av (b). La V være et indreproduktrom over $\mathbb{K}$ med $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\langle u, \alpha v\rangle &= \overline{\langle \alpha v, u\rangle} \\ &= \overline{\alpha\langle v, u\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{\langle v, u\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle u, v\rangle\end{aligned}$$

□

Bevis av (c). La V være et indreproduktrom over $\mathbb{R}$ med $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

Det komplekse konjugatet er

$$\overline{a+bi} = a - bi$$

For reelle tall har vi $b = 0$ så det komplekse konjugatet gjør ingenting med reelle tall så

$$\overline{\langle v, u\rangle} = \langle v, u\rangle$$

□

□

Problem: Oppgave 4.1.3

La $u \in U$ være slik at $\langle u, v \rangle = 0$ for alle $v \in U$. Vis at $u = 0$. Er det samme sant dersom $\langle v, u \rangle = 0$ for alle $v \in U$?
Hint: Prøv med $v = u$.

Bevis. La U være et indreproduktrom med $u \in U$ slik som i oppgavebeskrivelsen.

Siden u tilfredsstiller

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U$$

så krever vi at

$$\langle u, u \rangle = 0$$

siden $u \in U$.

$$\langle u, u \rangle = 0$$

kun dersom $u = \mathbf{0}$.

Dersom $\langle v, u \rangle = 0, \forall v \in U$ så har vi at

$$\overline{\langle v, u \rangle} = \overline{0} = 0$$

så

$$\langle u, v \rangle = 0$$

□

Problem: Oppgave 4.1.5

Vi lar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vis at følgende er indreprodukter.

(a) Det kanoniske indreproduktet i $\mathbb{K}^n$ er prikkproduktet

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} := x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

(c) La $\ell^2(\mathbb{K}) := \left\{(a_1, a_2, \dots) : \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty\right\}$ (se Eksempel 3.1.2).
Vi definerer ℓ^2-indreproduktet som

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

(d) For $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$ (se Oppgave 1.1.5) definerer vi L^2-indreproduktet

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

Bevis av (a). La U være et vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, med $u, v, w \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$. Da vil $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{K}^n}$ gi en skalar i $\mathbb{K}$ siden den er definert til å ta summen av skalar-verdier i $\mathbb{K}$.

(i)

Vi vet at $\langle u, u\rangle \geq 0$ fordi, i tilfellet der $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tar vi summen av kvadraten av hver komponent i vektoren u (i.e. vi tar summen av verdier som er større enn eller lik 0). I tilfellet der $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ simplifiseres uttrykket til

$$\sum_{k=1}^{n} a^2 + b^2$$

hvor $u = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, som er ikke-negativt for samme grunn.

Dersom $u = (0, 0, \dots, 0)$ blir summen åpenbart 0. Viss vi antar

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = 0$$

vet vi at hver $x_k = 0$ siden $x_k \overline{x_k} \geq 0$ så eneste måten summen er 0 er vist alle $x_k = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle u + v, w\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)\overline{w_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{w_k} + v_k \overline{w_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{w_k} + \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k} \\
&= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha u, v\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \alpha u_k \overline{v_k} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k} \\
&= \alpha \langle u, v\rangle
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} u_k = \overline{\sum_{k=1}^{n} v_k \overline{u_k}} \\
&= \overline{\langle v, u\rangle}
\end{aligned}
$$

Dermed oppfyller $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{K}^n} : U \times U \to \mathbb{K}$ egenskapene til et indreprodukt. $\square$

Bevis av (c). $\square$