Oblig 1

Thobias Høivik

Problem: Oppgave 1

Hva er verdien av k etter at følgende script er utført.

$$
\begin{aligned}
&k = 0\\
&\text{for } i_1 = 1 \text{ to } n_1\\
&\quad \text{for } i_2 = 1 \text{ to } n_2\\
&\qquad \vdots\\
&\qquad \text{for } i_k = 1 \text{ to } n_k\\
&\qquad\quad k = k + 1
\end{aligned}
$$

Løsning. Vi antar for denne oppgaven at loop-en er inklusiv på siste variabel (i.e. for i_k to n_k tar n_k iterasjoner).

Viss vi jobber baklengs har vi at, i den siste loop-en, k ender opp med å være n_k. Loop-en som gjør dette blir utført n_{k-1} ganger som gir $k = n_{k-1} n_k$.

Vi kunne lagd en formel og vist korrekthet via induksjon, men vi kan tydelig se at summen for k blir antal iterasjoner av den siste loop-en, multiplisert med antall iterasjoner av den nest siste loop-en og så videre ned til vi når den første iterasjonen.

Da får vi at

$$k = n_1 n_2 n_3 \cdots n_p = \prod_{i=1}^{p} n_i$$

viss vi antar p loops. □

Problem: Oppgave 2

a) Teikn grafane til alle bijektive funksjonar mellom $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{a, b, c\}$. Kva seier dette om kardinaliteten?
b) Anta at mengdene $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ og $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Kor mange bijektive funksjonar er det mellom A og B? Bruk multiplikasjonsprinsippet for å grunngje svaret.

Løsning av a).

1

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & a \\ 2 \arrow[r] & b \\ 3 \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

2

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & a \\ 2 \arrow[dr] & b \\ 3 \arrow[ur] & c \end{tikzcd}$$

3

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & a \\ 2 \arrow[ur] & b \\ 3 \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

4

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & a \\ 2 \arrow[dr] & b \\ 3 \arrow[uur] & c \end{tikzcd}$$

5

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[ddr] & a \\ 2 \arrow[ur] & b \\ 3 \arrow[ur] & c \end{tikzcd}$$

6

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[ddr] & a \\ 2 \arrow[r] & b \\ 3 \arrow[uur] & c \end{tikzcd}$$

Det er $6 = 3! = |A|! = |B|!$ bijeksjoner. □

Løsning av b). Mellom to mengder med kardinalitet 7 fins det 7! ulike bijeksjoner.

Viss vi betrakter en vilkårlig bijeksjon $\phi : A \to B$, der $|A| = |B| = 7$, har vi at $\phi(a_1) = b_1$ for en $a_1 \in A, b_1 \in A$ der b_1 er en av 7 elementer i B. Så a_1 har 7 elementer å "velge" mellom. Deretter for $a_2 \in A$ må $\phi(a_2) \neq b_1$ så a_2 kan sendes til 1 av $7-1=6$ elementer. Dette fortsettes helt til a_7 kun har et element det kan være pre-bildet av. For å finne antallet mulige bijeksjoner tar vi produktet av alle mulige "valg". Dette betyr at antallet bijeksjoner er

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 1 = 7! = |A|! = |B|!$$

Generellt blir formelen for kardinaliteten til mengden av bijeksjoner mellom A og B (gitt at $|A| = |B|$) lik $|A|!$ når $|A| < \aleph_0$. Viss $|A| \geq \aleph_\alpha$, så er $|\{\phi : A \to B : \phi \text{ bijektiv}\}| = 2^{\aleph_\alpha}$.

Så det er like mange bijeksjoner fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$ som det er reelle tall! □

Problem: Oppgave 3

I forelesningsrommet i MAT210 er det 100 sitteplassar. I ei forelesning møtte 20 studentar. Kor mange ulike måtar kunne studentane plassere seg i forelesninga?

Løsning. Det er 100 plassar og 20 av plassene skal velges. Da får vi

$$\binom{100}{20}$$

konfigurasjoner.

Men, studentene er unike, så for hver av måtene å velge 20 seter fra 100 er det 20! studentene kan sette seg (siden student nr.1 har 20 valg, student nr.2 har 19 valg, osv.).

Så det endelige antall måter 20 studenter kan fordele seg på 100 seter er

$$\binom{100}{20} \cdot 20!$$

som er ca. antall stjerner i universet i andre. □

Problem: Oppgave 4

a) Vis at $|\mathbb{N}| = |\{5n+1 : n \in \mathbb{N}\}|$.
b) Vis at $|(0,1)| = |(0,10)|$.

Bevis av a). La $f : \mathbb{N} \to \{5n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ definert ved

$$f(n) = 5n+1$$

Vi ser at f er veldefinert og fortsetter med å vise at f utgjør en bijeksjon.

Injektiv.

La $n, m \in \mathbb{N}$ og anta at $f(n) = f(m)$.

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ 5n+1 &= 5m+1 \\ 5n &= 5m \\ n &= m \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ injektiv.

Surjektiv.

La $m \in \{5n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. Da er pre-bildet til m

$$n = \frac{m-1}{5}$$

siden

$$f(n) = f\left(\frac{m-1}{5}\right) = 5\frac{m-1}{5} + 1 = m$$

så f er surjektiv.

Med dette har vi vist at f utgjør en bijeksjon fra de to mengdene og de har da samme kardinalitet ($\aleph_0$). □

Bevis av b). La $f : (0,1) \to (0,10)$ definert ved

$$f(x) = 10x$$

da har vi, for en vilkårlig $x \in (0,1)$, at

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(0) < f(x) < f(10) \Rightarrow 0 < f(x) < 10$$

så $f(x) \in (0,10)$.

Injektiv.

La $x, y \in (0,1)$ og anta at $f(x) = f(y)$. Da får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 10x &= 10y \\ x &= y \end{aligned}$$

Surjektiv. La $y \in (0, 10)$. Da er pre-bildet til y

$$x = \frac{y}{10}$$

som vi vet er i $(0, 1)$ siden $0/10 = 0$ og $10/10 = 1$. Som vi ser har vi at

$$f(x) = f\left(\frac{y}{10}\right) = 10\frac{y}{10} = y$$

f utgjør en bijeksjon mellom mengdene og de har derfor lik kardinalitet ($\aleph_1$). □

Problem: Oppgave 5

a) Kor mange ord med 3 bokstavar startar med A og B?
b) Kor mange to-bokstav-ord startar med ein vokal i det norske alfabetet?
c) Du har 5 par sokkar og 3 par sandalar. Kor mange måtar kan ein kombinere sokkar og sandalar? Kor mange er det viss du ikkje har sokkar og sandalar på samtidig?

Løsning av a). □