Mat104 Oblig3

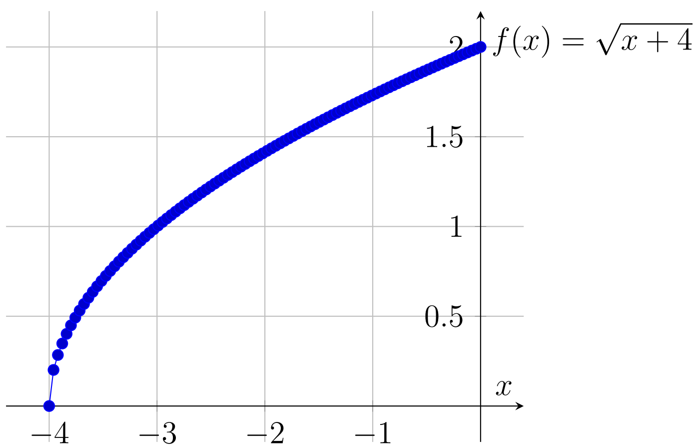
TKH

March 3, 2025

Oppgave 1

$f(x) = \sqrt{x+4}, \quad D_f = [-4, 0].$

a)



b)

Vi begynner med å finne

$$\frac{d}{dx}f(0) = [\frac{1}{2\sqrt{x+4}}]_{x=0} = \frac{1}{4}$$

Tangentlinjen vil være gitt ved $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + 2}$$

c)

$\sqrt{3.96} = \sqrt{-0.04+4} = f(-0.04) \approx f(0), \quad \therefore \sqrt{4} \approx [m(x - x0) - y_0]_{x=0.04} = -\frac{0.04}{4} + 2 =$ $\boxed{1.99}$

d)

Først må vi finne linjen som går parallellt gjennom $(-4, 0) \wedge (0, 2)$.

$$
\begin{gathered}
y = mx + b \\
\Delta x = 4, \quad \Delta y = 2 \\
m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\
b = 2 \because y = 0 \Leftrightarrow x = -4 \\
y = \frac{1}{2}x + 2
\end{gathered}
$$

For å finne en tangentlinje parallell med denne, må vi løse

$$f'(x_0) = \frac{1}{2}.$$

Løser $\frac{1}{2\sqrt{x_0+4}} = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{x_0 + 4} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 + 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -3.$$

Beregner y_0:

$$y_0 = f(-3) = \sqrt{-3 + 4} = 1.$$

Tangentlinjen er:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 3).$$

Omskriving gir:

$$\boxed{y = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}}$$

Oppgave 2

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - e^x}{\pi^x - \cos 2x}$$

$$x = 0 \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - e^x}{\pi^x - \cos 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{d}{dx}|_{x=0} \quad 3^x - e^x}{\frac{d}{dx}|_{x=0} \quad \pi^x - \cos 2x}$$

$$= \frac{[\ln(3) \times 3^x - e^x]_{x=0}}{[\ln(\pi) \times \pi^x + 2\sin(2x)]_{x=0}} = \frac{\ln(3) - 1}{\ln(\pi) + 2 \times 0} = \boxed{\frac{\ln(\frac{3}{e})}{\ln(\pi)}}$$

b)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1}$$

$$x = 1 \to \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} \div 2x = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x + x^2}$$

Husk at $(e^x)' = e^x$, og mer presist at $\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Observer da at vi kan derivere x^2 to ganger oppe og nede for oppnå svaret.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x + 2} = \boxed{0}$$

e^x går mot uendelig så uttrykket går mot 0

Viss vi ikke ville brukt l'Hopital kunne vi tatt $\div x^2$ oppe og nede.

Oppgave 3

a)

$$\int_0^4 3x^2 - 1dx = [x^3 - x]_{x=0}^4 = 4^3 - 4 = 64 - 4 = 60$$

b)

$$\int \sin(2x)dx$$

$$\text{La } u = 2x \Rightarrow \quad du = 2dx \Leftrightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$\int \sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int \sin(u)du$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos(u)) + c = \boxed{-\frac{1}{2}\cos(2x) + C}$$

c)

$$I = \int xe^{x^2+1}dx$$

$$\text{La } u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \boxed{\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C}$$

Oppgave 4

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 + 2x\tan(x)dx$$

a)

Vi deler intervalet $[0, \frac{\pi}{4}]$ i 4. Lengden av hver delinterval er da

$$h = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{4} = \frac{\pi}{16}$$

Punktene i oppdelingen blir

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \frac{\pi}{16} \\ x_2 &= \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \\ x_3 &= \frac{3\pi}{16} \\ x_4 &= \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

b)

La $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Vi kan da tilnærme integralet

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + (\sum_{i=1}^{|X|-1} f(x_i)) + f(x_4)]$$

$$\boxed{A \approx \frac{\pi}{32}[4 + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + x_4] \approx 3.5}$$

c)

Ved å tilnærme med $n = 25$ får vi 3.5135845378158312 som er lik geogebra sin tilnærming til tredje desimalpunkt.

Kode:

```python
import math

def f(x):
    return 4 + 2 * x * math.tan(x)

def trapezoidal_rule(a, b, n):
    h = (b - a) / n
    result = 0.5 * (f(a) + f(b))
    for i in range(1, n):
        result += f(a + i * h)
    result *= h
    return result

a = 0
b = math.pi / 4
n = 25

integral_value = trapezoidal_rule(a, b, n)

print(f'Estimert verdi: {integral_value}')
```

Oppgave 5

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 1$$

a)

$$\frac{df}{dx} = 6x^2 + 18x - 24$$
$$6x^2 + 18x - 24 = 0 \quad | \div 6$$
$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -4 \wedge x = 1$$
$$x < -4, \text{ f.eks } f'(-5) = 36 > 0$$
$$x \in (-4, 1) \rightarrow f'(0) = -24 < 0$$
$$x > 1 \rightarrow f'(2) = 36 > 0$$
$$\therefore x \in \mathbb{R} - [-4, 1] \Rightarrow f'(x) > 0 \wedge x \in (-4, 1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

b)

Vi har allerede funne $f'(x) = 0 : \quad x = 1 \wedge x = -4$. For å finne ut om de er bunn- eller topp-punkt kan vi ta den andrederiverte.

$$f''(x) = 12x + 18$$
$$f''(-4) = -30 < 0$$
$$f''(1) = 30 > 0$$

Vi har et bunn-punkt ved $x = 1$ og topp-punkt ved $x = -4$. $f(1) = -12 \wedge f(-4) = 113$.

c)

$$f''(x) = 12x + 18 = 0$$
$$12x = -18 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$$

Funksjonen skifter krumning ved $x = -\frac{3}{2}$, så vi har et vendepunkt der. For å avgjøre om funksjonen er konveks eller konkav, ser vi på fortegnet til $f''(x)$ på intervallene:
- For $x < -\frac{3}{2}$ (for eksempel $x = -2$):

$$f''(-2) = 12(-2) + 18 = -24 + 18 = -6 < 0$$

Funksjonen er **konkav** på $(-\infty, -\frac{3}{2})$.
- For $x > -\frac{3}{2}$ (for eksempel $x = 0$):

$$f''(0) = 12(0) + 18 = 18 > 0$$

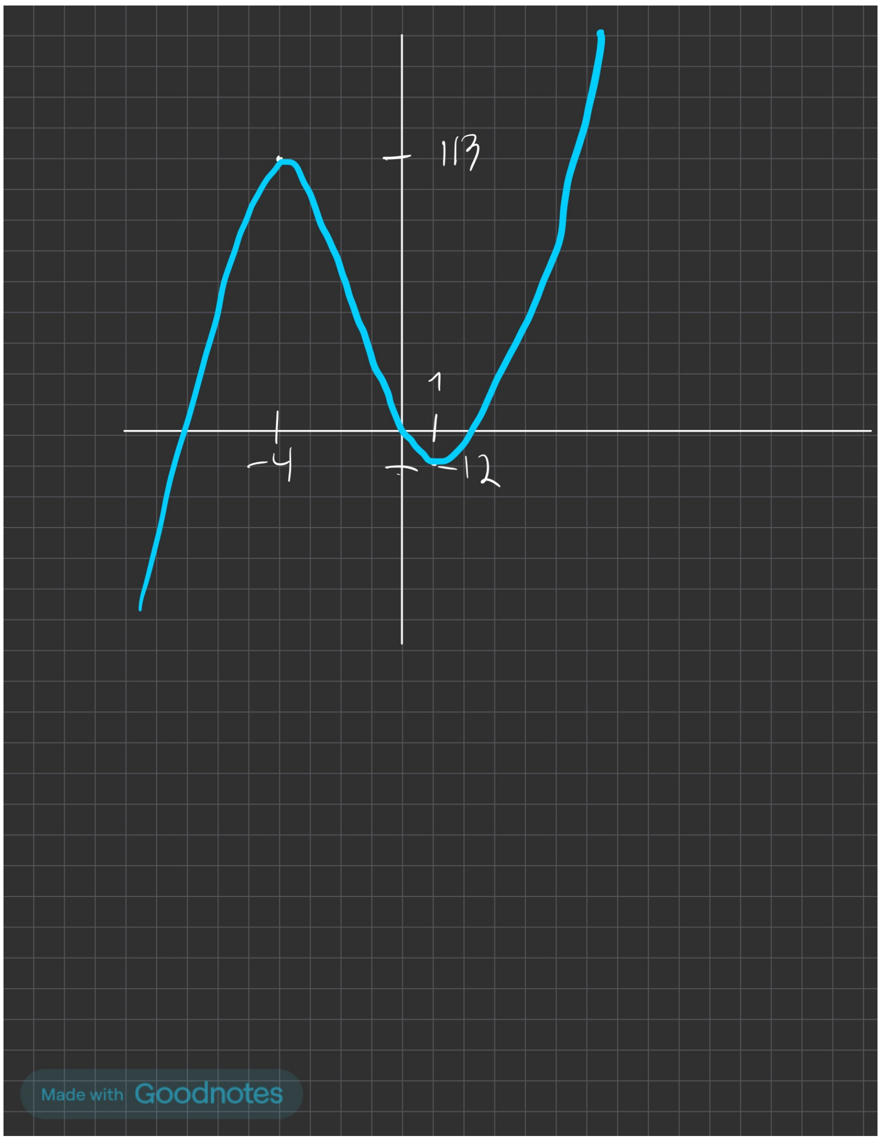
Funksjonen er **konveks** på $(-\frac{3}{2}, \infty)$.

Vendepunktet skjer når $f''(x) = 0$, altså ved $x = -\frac{3}{2}$.

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 50.5$$

Så, vendepunktet er ved $x = -\frac{3}{2}$ og $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 50.5$.

d)



e)

$$f(-8) < 0 \quad f(-4) > 0 \quad f(1) < 0 \quad f(2) > 0$$

f er kontinuerlig så mellom hver av de 3 parene over må det eksistere alle mulige reelle tal imellom dem, der iblant 0.

f/g)

Kode:

```python
def f(x):
    return 2*x*x*x + 9*x*x - 24*x + 1

def df(x):
    return 6*x*x + 9*x - 24

xN = 0
def findZero(xN, f, df, tolerance = 0.000000001):
    xNext = xN - f(xN) / df(xN)
    if (abs(xNext - xN) < tolerance):
        return xNext
    return findZero(xNext, f, df, tolerance)

print(f"Start value for x: {xN}")
print(findZero(xN, f, df))
```

Vi velger startpunkt $s_1 = -5, s_2 = -1, s_3 = 3$ ved hjelp av grafen og det vi har lært om funksjonen.