Oblig 1

Thobias Høivik

Problem: Oppgave 1.4.2

Vis at standardbasisen $(e_1,\dots,e_n)$ er en basis for $\mathbb{K}^n$.

Bevis. La $\mathbb{K}$ være en kropp og la $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ hvor

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, e_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

For å vise at $(e_1,\dots,e_n)$ utgjør en basis for $\mathbb{K}^n$ må vi vise at $\{e_1,\dots,e_n\}$ er lineært uavhengig og spenner $\mathbb{K}^n$.

Lineær uavhengighet.

Vi ønsker å vise at det ikke finnes en ikke-triviel løsning til

$$\sum_{i=1}^{n} k_i e_i=\vec{0}$$

hvor $k_i\in\mathbb{K}$. Summen av alle k_ie_i er

$$\sum_{i=1}^{n} k_i e_i=\begin{pmatrix}k_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ k_2\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

Vi ser at eneste måten

$$\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

er den trivielle løsningen $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$. Dette betyr at E er lineært uavhengig.

Utspenning av rommet.

Vi ønsker å vise at $\operatorname{span}(E)=\mathbb{K}^n$. Husk at

$$\mathbb{K}^n=\left\{\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\middle| k_i\in\mathbb{K}, i\in\{1,2,\dots,n\}\right\}$$

Spennrommet $\operatorname{span}(E)$ er underrommet av alle vektorer av formen

$$k_1e_1+k_2e_2+\cdots+k_ne_n=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

hvor $k_i\in\mathbb{K}$. Med andre ord:

$$\operatorname{span}E=\left\{\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\middle| k_i\in\mathbb{K}, i\in\{1,2,\dots,n\}\right\}=\mathbb{K}^n$$

som ønsket. Med dette har vi vist at E spenner ut hele rommet.

Siden vi har vist at E er lineært uavhengig og spenner ut $\mathbb{K}^n$ konkluderer vi med at E utgjør en basis for $\mathbb{K}^n$. $\square$

Problem: Oppgave 1.4.6

(a) La $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen i $\mathbb{K}^n$. Vis at

$$[x]_{\mathscr{C}} = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

(b) La U være et vektorrom over $\mathbb{K}$ med en basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Vis at

$$\left[u_j\right]_{\mathscr{B}} = e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Bevis av (a). La $\mathbb{K}$ være en kropp og la $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen i $\mathbb{K}^n$.

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen av x i basisen $\mathscr{C}$, $[x]_{\mathscr{C}} = x$ for alle $x \in \mathbb{K}^n$.

La $x \in \mathbb{K}^n$. Da har vi at det finnes en unik n-tuppel $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at $x = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n$. Denne tuppelen er basisrepresentasjonen $[x]_{\mathscr{C}} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Med standardbasisen har vi at

$$\begin{aligned}
x &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots\ b_n e_n \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b_n \\
&= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = [x]_{\mathscr{C}}
\end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise. □

Bevis av (b). La U være et vektorrom over kroppen $\mathbb{K}$ med en basis $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen, $\left[u_j\right]_{\mathscr{B}} = e_j$ hvor e_j refererer til den j-ende vektoren i standard basisen (vektoren med 0 i alle index-er utenom j, hvor vi har 1) og $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La u_j være en vilkårlig vektor i basisen. Da er u_j også en vektor i U, nemlig vektoren

$$0 \cdot u_1 + \dots + 1 \cdot u_j + \dots + 0 \cdot u_n$$

Da finens det en n-tuppel $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at

$$k_1 u_1 + \dots + k_j u_j + \dots + k_n j_n = u_j$$

Dette er basisrepresentasjonen av u_j i basisen. Spesifikt, er det tuppelen $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, hvor alle oppføringer er 0 utenom den j-ende index-en, som er 1. Dette er $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Med andre ord,

$$\left[u_j\right]_{\mathscr{B}} = e_j$$

som ønsket. □

Problem: Oppgave 1.5.2

Vis at

(a) $\dim \mathscr{P}^n = n+1$

(b) $\dim \mathscr{P} = \infty$

(c) $\dim C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \infty$

Bevis av (a). La $\mathscr{P}^n$ være rommet av polynomer med koeffisienter i $\mathbb{R}$.

Vi ønsker å vise at $\dim \mathscr{P}^n = n+1$. Vi vet at, viss et vektorrom har en basis $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, så er rommet et endelig-dimensjonelt rom med dimensjon n. La oss se på den kanoniske basisen til $\mathscr{P}^n$, altså $(1, x, x^2, \dots, x^n)$. Denne basisen består av alle x^i hvor $i = 0, 1, \dots, n$. Med andre ord består den av $|\{0, 1, 2, \dots, n\}| = n+1$ elementer. Derfor kan vi konkludere at $\dim \mathscr{P}^n = n+1$. □

Bevis av (b). La $\mathscr{P}$ være rommet av alle polynomer med koeffisienter i $\mathbb{R}$.

Vi ønsker å vise at $\dim \mathscr{P} = \infty$. Vi gjør dette ved å vise at det ikke finnes en endelig basis for $\mathscr{P}$.

Anta, i søk om kontradiksjon, at det finnes en endelig basis $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ for $\mathscr{P}$, med n elementer. La d_i være graden av polynomet p_i for $i = 1, \dots, n$. La $d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$. Da er graden av hver p_i mindre enn eller lik d. Hvis vi nå ser på den lineære kombinasjonen

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i(x), k_i \in \mathbb{K}$$

så får vi at graden av q er mindre enn eller lik d. Så for hvert polynom i spennrommet til B har grad høyst d, men $x^{d+1} \in \mathscr{P}$, som motsier antagelsen vår at det finnes en endelig basis for rommet.

Med det kan vi konkludere at $\dim \mathscr{P} = \infty$. □

Bevis av (c). La $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ være rommet av kontinuerlige $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hvert polynom er kontinuerlig, så $\mathscr{P} \subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Siden $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ har et uendelig-dimensjonelt underrom, kan ikke $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ være endelig-dimensjonelt. Som sagt i Proposisjon 1.4.11 fra boken, for et underrom V av rommet U har vi at $\dim(V) \le \dim(U)$.

Konklusjon: $\dim(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})) = \infty$. □

Problem: Oppgave 1.6.2

(a) Vis at $V \oplus W$ er et vektorrom.
(b) Vis at dersom $(v_1, \ldots, v_n)$ er en basis for V og $(w_1, \ldots, w_n)$ er en basis for W, er

$$\mathscr{B} := ((v_1, 0_W), \ldots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \ldots, (0_V, w_m))$$

en basis for $V \oplus W$.
(c) Vis at $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

Bevis av (a). La $\mathbb{K}$ være en kropp og V, W rom over $\mathbb{K}$.

Vi ønsker å vise at $V \oplus W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$ er et vektorrom med

$$\text{Null element: } (0_V, 0_W)$$

og

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

og

$$k(u, w) = (ku, kw)$$

for $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ og $k \in \mathbb{K}$.

Vi begynner med å vise at $(V \oplus W, +)$ er en abelsk gruppe. Da må vi vise følgende

1. Assosiativitet av addisjon
2. Identitetselement
3. Inverser
4. Kommutativitet

Merk først at addisjonen, som vi har definert komponentvis, er lukket, siden addisjonsoperasjonene for V og W er lukket.

Assosiativitet.

La $v_1, v_2, v_3 \in V$ og $w_1, w_2, w_3 \in W$.

$$\begin{aligned}
((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) + (v_3, w_3) &= (v_1 + v_2, w_1 + w_2) + (v_3, w_3) \\
&= (v_1 + v_2 + v_3, w_1 + w_2 + w_3) \\
&= (v_1, w_1) + (v_2 + v_3, w_2 + w_3) \\
&= (v_1, w_1) + ((v_2, w_2) + (v_3, w_3))
\end{aligned}$$

Identitetselement.

Vi viser at null-elementet utgjør en identitet for denne gruppen. Vi har, for en vilkårlig $(v, w) \in V \oplus W$

$$(v, w) + (0_V, 0_W) = (0_V, 0_W) + (v, w) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$$

Inverser. For en vilkårlig $(v, w) \in V \oplus W$ har vi inversen

$$(-v, -w) \in V \oplus W$$

$$(v,w)+(-v,-w)=(v-v,w-w)=(0_V,0_W)=(-v,-w)+(v,w)$$

Kommutativitet.

Addisjonsoperasjonene til V og W er kommutative, så siden addisjon i $V \oplus W$ er komponentvis er addisjonen kommutativ.

$$(v_1,w_1)+(v_2,w_2)=(v_1+v_2,w_1+w_2)=(v_2+v_1,w_2,+w_1)=(v_2,w_2)+(v_1,w_1)$$

Deretter viser vi egenskapene til multiplikasjon, næmlig følgende

1. $0(v,w)=(0_V,0_W)$
2. $1(v,w)=(1_V,1_W)$
3. Kommutativitet

Den første egenskapen følger fra hvordan multiplikasjon er definert med $k \in \mathbb{K}$. Det samme gjelder for den andre egenskapen. For kommutativitet vet vi at det holder siden, igjen multiplikasjon er komponentvis og holder for element i V og W.

Til slutt har vi di distributative egenskapene.

For $k \in \mathbb{K}$ og $(v_1,w_1),(v_2,w_2) \in V \oplus W$ så har vi

$$\begin{aligned}
k((v_1,w_1)+(v_2,w_2)) &= k(v_1+v_2,w_1+w_2)=(k(v_1+v_2),k(w_1,w_2)) \\
&= (kv_1+kv_2,kw_1+kw_2)=(kv_1,kw_1)+(kv_2,kw_2) \\
&= k(v_1,w_1)+k(v_2,w_2)
\end{aligned}$$

Med det har vi vist at multiplikasjon er distributativt over vektor-addisjon.

For $k_1,k_2 \in \mathbb{K}$ og $(v,w) \in V \oplus W$ så har vi

$$\begin{aligned}
(k_1+k_2)(v,w) &= ((k_1+k_2)v,(k_1+k_2)w)=(k_1v+k_2v,k_1w+k_2w) \\
&= (k_1v,k_1w)+(k_2v,k_2w)=k_1(v,w)+k_2(v,w)
\end{aligned}$$

Med dette kan vi konludere at multiplikasjon er distributativt over skalar-addisjon.

Da har vi vist at $V \oplus W$ oppfølger alle kravene for å være et vektorrom. □

Bevis av (b). La $(v_1,\ldots,v_n)$ være en basis for V og $(w_1,\ldots,w_m)$ være en basis for W.

Vi ønsker å vise at

$$\mathscr{B} := ((v_1,0_W),\ldots,(v_n,0_W),(0_V,w_1),\ldots,(0_V,w_m))$$

er en basis for $V \oplus W$. Vi må da vise at $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig og spenner ut $V \oplus W$.

Lineær uavhengighet.

Vi må vise at den eneste løsningen til

$$\sum_{s=1}^{|\mathscr{B}|} k_s b_s = (0_V,0_W),\ k_s \in \mathbb{K},\ b_s \in \mathscr{B}$$

er den trivielle løsningen.

Summen over blir

$$
\begin{aligned}
&k_1(v_1, 0_W) + \dots + k_n(v_n, 0_W) + k_{n+1}(0_V, w_1) + \dots + k_{m+n}(0_V, w_m) \\
&= (k_1 v_1 + \dots k_n v_n + k_{n+1} 0_V + \dots + k_{m+n} 0_V, k_1 0_W + \dots + k_n 0_W + k_{n+1} w_1 + \dots + k_{m+n} w_m) \\
&= (k_1 v_1 + \dots + k_n v_n, k_{n+1} w_1 + \dots + k_{m+n} w_m) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} k_i v_i, \sum_{j=1}^{m} k_j w_j \right)
\end{aligned}
$$

Nå sitter vi igjen med en 2-tuppel der første er summen av alle v_i i basisen til V, ganget med koeffisient, og andre er summen av alle w_j i basisen til W, ganget med koeffisient. Siden v_i, w_j er elementer av basisen til sine rom, vet vi at den eneste måten

$$
\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0_V \text{ og } \sum_{i=1}^{m} k_j w_j = 0_w
$$

er når alle koeffisientene er 0; Den trivielle løsningen.

Spenner hele rommet.

Vi vet at for en vilkårlig $v \in V$ så har vi at v er en lineær kombinasjon av $(v_1, \dots, v_n)$ hvor v_i er multiplisert med en $k_i \in \mathbb{K}$ og det samme gjelder for en $w \in W$ med W sin basis og koeffisienter i $\mathbb{K}$.

Viss $v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i$ og $w = \sum_{j=1}^{m} k_j w_j$, så er

$$
\begin{aligned}
(v, w) &= \sum_{i=1}^{n} k_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^{m} k_j \left(0_V, w_j\right) \\
&= \sum_{s=1}^{n+m=|\mathscr{B}|} k_s b_s
\end{aligned}
$$

hvor $k_s \in \{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}, \dots, k_m\}$ og $b_s = (v_s, 0_W)$ for $s = 1, 2, \dots, n$ og $b_s = (0_V, w_{s-n})$

for $s = n+1, n+2, \dots, n+m$.

Så vi kan, for en vilkårlig $(v, w) \in V \oplus W$, lage (v, w) med en lineær kombinasjon av vektorer i basisen $\mathscr{B}$. Med andre ord har vi at $\text{span}(\mathscr{B}) = V \oplus W$.

Siden $\mathscr{B}$ er lineært uavhengig og spenner ut $V \oplus W$ så har vi at $\mathscr{B}$ utgjør en basis til dette rommet. □

Bevis av (c). Som vi peket til i *Bevis av (b)*, så har vi at $|\mathscr{B}| = n + m$. Siden $\mathscr{B}$ utgjør en basis for $V \oplus W$, har vi at $\dim V \oplus W = n + m = \dim V + \dim W$ på grunn av at det er antatt at basisen til V har n elementer og basisen til W, m. □