Exam practice questions

Prøveeksamen 2023

Oppgave 1

La A være matrisen gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \\ -5 & 15 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Finn en basis til nullrommet til A og en basis for kolonnerommet.

b) Finn en ortonormal basis for nullrommet.

Løsning a).

Vi ser fort at det er 3 lineært uavhengige kolonnevektorer i A.

Siden $\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = 4$ vet vi at kjernen er 1-dimensjonell. For kolonnerommet velg de 3 lineært uavhengige vektorene.

Nullrommet $\ker A = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 & 2 \\ -5 & 15 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + 15x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Vi får at $-6x_3 + 3x_4 = 0$ samt $-5x_1 + 15x_2 = 0$. Med andre ord:

$$x_1 = 3x_2 2x_3 = x_4$$

Vi velger

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Løsning b).

$$\frac{1}{\sqrt{1+4}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

La $V = \mathcal{P}_1$ være vektorromet av polynomer av grad høgst 1.

La $T, S : V \to V$ være definert ved

$$Tp = p(1) + p(0)t \text{ og } Sp = p + t$$

a) Vis at T er en lineærtransformasjon, men at S ikke er det.

b) Finn $[T]_{\mathcal{B}}$ hvor $\mathcal{B} = \{1, t\}$ er en basis for V.

Bevis for a).

T er veldefinert siden $p(1), p(0) \in \mathbb{K}$ og $\mathcal{P}_1 = \{c_0 + c_1 t \mid c_0, c_1 \in \mathbb{K}\}$.

Videre ser vi at den er lineær siden

$$T(p+q) = p(1) + p(0)t + q(1) + q(0)t = Tp + Tq$$

og

$$T(\alpha p) = \alpha p(1) + \alpha p(0)t = \alpha(p(1) + p(0)t) = \alpha Tp$$

Merk at selv om S er veldefinert siden $\mathcal{P}_1$ er lukket under $+$ og $t \in \mathcal{P}_1$, se dette moteksempellet på lineæritet:

$$S(t + t) = (t + t) + t = 3t$$

men

$$St + St = (t + t) + (t + t) = 4t$$

MAT1120 2023

Oppgave 3

La V være rommet av funksjoner på formen

$$f(x) = ae^x + be^{-x}$$

der $a, b \in \mathbb{R}$. La

$$\text{cosh}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ og } \text{sinh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

a) La $\mathcal{B} = \{e^x, e^{-x}\}$. Begrunn at $\mathcal{B}$ er en basis for V.

Løsning a).

Det er tydelig at span$\mathcal{B} = V$ siden V, per definisjon, er lineære kombinasjoner av funksjonene i $\mathcal{B}$. Så det som gjenstår er å vise at $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig.

Anta at

$$\alpha e^x + \beta e^{-x} = 0$$

Da får vi at

$$\alpha e^x + \frac{\beta}{e^x} = \frac{\alpha e^{2x} + \beta}{e^x} = 0$$

siden $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ får vi da

$$\alpha e^{2x} = -\beta$$

men dette betyr da at αe^{2x} er konstant, så

$$\frac{d}{dx} \alpha e^{2x} = 0$$

men

$$\frac{d}{dx} \alpha e^{2x} = 2\alpha e^{2x}$$

som aldri er 0, utenom når $\alpha = 0$, men da får vi også at $\beta = 0$. Dermed finnes det ingen ikke-trivielle løsninger for

$$\alpha e^x + \beta e^{-x} = 0$$

Med andre ord er de lineært uavhengige og span$\mathcal{B} = V$, altså en basis for V.

b) La $\mathcal{B}' = \{\text{cosh}(x), \text{sinh}(x)\}$. Bergunn at dette også utgjør en basis for V, og finn overgansmatrisen P fra $\mathcal{B}$ til $\mathcal{B}'$, altså matrisen slik at

$$[f]_{\mathcal{B}'} = P[f]_{\mathcal{B}}, \forall f \in V$$

Løsning b).

Vi sjekker lineær avhengighet først.

$$\alpha \,\text{cosh}(x) + \beta \,\text{sinh}(x) = \frac{\alpha}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{\beta}{2}(e^x - e^{-x}) = (\alpha/2 + \beta/2)e^x + (\alpha/2 - \beta/2)e^{-x}$$

For at dette skal være 0 trenger vi

$$\alpha+\beta+\alpha-\beta=0$$

så $\alpha=0$, men dette medfører at $\beta=0$.

Vi ser at elementene i $\mathcal{B}'$ er lineære kombinasjoner av de i $\mathcal{B}$ dermed får vi at

$$\text{span}\mathcal{B} \subseteq \text{span}\mathcal{B}'$$

men vi har også

$$\text{span}\mathcal{B}' \subseteq \text{span}\mathcal{B}$$

siden

$$\cosh x+\sinh x=e^x$$

og

$$\cosh x-\sinh x=e^{-x}$$

Dermed får vi at

$$\text{span}\mathcal{B} = \text{span}\mathcal{B}'$$

For å finne overgangsmatrisen må vi finne

$$[e^x]_{\mathcal{B}'} \text{ og } [e^{-x}]_{\mathcal{B}'}$$

som vi nå vet til å være

$$[e^x]_{\mathcal{B}'}=\cosh(x)+\sinh(x)=(1,1)$$

$$[e^{-x}]_{\mathcal{B}'}=\cosh(x)-\sinh(x)=(1,-1)$$

så

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$