Oblig 3

Thobias Høivik

Jeg antar i oppgave 4.1.2 (a) at det er en skrivefeil, siden når jeg søker opp additivitet i det andre argumentet på nettet får jeg

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

Problem: Oppgave 3.5.8

En diagonalmatrise er en matrise $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ som har ikke-null elementer kun langs diagonalen: $(A)_{ij} = 0$ for alle $i \neq j$. Vis at

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \max_i |(A_{ij})|$$

Bevis. La $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ være en diagonalmatrise. La $d_i = (A)_{ii}$ $(1 \le i \le \min\{m,n\}$ for $m \neq n)$.

For enhver $x \in \mathbb{K}^n$ har vi da

$$\begin{aligned}\|Ax\|_{\ell^2}^2 &= \sum_i |d_i x_i|^2 \\ &\le (\max_i |d_i|^2) \sum_i |x_i|^2 \\ &= (\max_i |d_i|^2)\, \|x\|_{\ell^2}^2\end{aligned}$$

men for enhetsvektorer har vi $\|x\|_{\ell^2}^2 = 1$ så

$$\|Ax\|_{\ell^2} \le \max_i |d_i|$$

og dette gjelder for enhetsvektorer, dermed

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_{\ell^2} \le \max_i |d_i|$$

La k være slik at $|d_k| = \max_i |d_i|$. Ta basisvektoren e_k med $\|e_k\|_{\ell^2} = 1$. Da har vi

$$\begin{aligned}\|Ae_k\|_{\ell^2} &= |d_k|\, \|e_k\|_{\ell^2} \\ &= |d_k| \\ &= \max_i |d_i|\end{aligned}$$

så

$$||A||_{\mathscr{L}} \ge \max_i |d_i|$$

Det følger da at

$$\|A\|_{\mathscr{L}} = \max_i |d_i|$$

□

Problem: Oppgave 4.1.2

Bevis følgende:

(a) Indreproduktet er additivt i andre argument: $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

(b) Indreproduktet er konjugert-homogen i andre argument: $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$

(c) Dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, er indreproduktet symmetrisk: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

Bevis av (a). La V være et indreproduktrom med $u, v, w \in V$.

$$\begin{aligned}\langle u, v+w\rangle &= \overline{\langle v+w, u\rangle} \\ &= \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} \\ &= \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} \\ &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle\end{aligned}$$

Bevis av (b). La V være et indreproduktrom over $\mathbb{K}$ med $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\langle u, \alpha v\rangle &= \overline{\langle \alpha v, u\rangle} \\ &= \overline{\alpha\langle v, u\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\,\overline{\langle v, u\rangle} \\ &= \overline{\alpha}\langle u, v\rangle\end{aligned}$$

□

Bevis av (c). La V være et indreproduktrom over $\mathbb{R}$ med $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

Det komplekse konjugatet er

$$\overline{a+bi} = a - bi$$

For reelle tall har vi $b = 0$ så det komplekse konjugatet gjør ingenting med reelle tall så

$$\overline{\langle v, u\rangle} = \langle v, u\rangle$$

□

□

Problem: Oppgave 4.1.3

La $u \in U$ være slik at $\langle u, v\rangle = 0$ for alle $v \in U$. Vis at $u = 0$. Er det samme sant dersom $\langle v, u\rangle = 0$ for alle $v \in U$?
Hint: Prøv med $v = u$.

Bevis. La U være et indreproduktrom med $u \in U$ slik som i oppgavebeskrivelsen.

Siden u tilfredsstiller

$$\langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in U$$

så krever vi at

$$\langle u, u\rangle = 0$$

siden $u \in U$.

$$\langle u, u\rangle = 0$$

kun dersom $u = \mathbf{0}$.

Dersom $\langle v, u\rangle = 0, \forall v \in U$ så har vi at

$$\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{0} = 0$$

så

$$\langle u, v\rangle = 0$$

□

Problem: Oppgave 4.1.5

Vi lar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vis at følgende er indreprodukter.

(a) Det kanoniske indreproduktet i $\mathbb{K}^n$ er prikkproduktet

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{K}^n} := x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

(c) La $\ell^2(\mathbb{K}) := \left\{(a_1, a_2, \dots) : \sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty\right\}$ (se Eksempel 3.1.2). Vi definerer ℓ^2-indreproduktet som

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

(d) For $f, g \in C([a,b], \mathbb{K})$ (se Oppgave 1.1.5) definerer vi L^2-indreproduktet

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

Bevis av (a). La U være et vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, med $u, v, w \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$. Da vil $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{K}^n}$ gi en skalar i $\mathbb{K}$ siden den er definert til å ta summen av skalar-verdier i $\mathbb{K}$.

(i)

Vi vet at $\langle u, u\rangle \geq 0$ fordi, i tilfellet der $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tar vi summen av kvadraten av hver komponent i vektoren u (i.e. vi tar summen av verdier som er større enn eller lik 0). I tilfellet der $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ simplifiseres uttrykket til

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$$

hvor $u_k = a_k + b_k i, a_k, b_k \in \mathbb{R}$, som er ikke-negativt for samme grunn.

Dersom $u = (0, 0, \dots, 0)$ blir summen åpenbart 0. Viss vi antar

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} = 0$$

vet vi at hver $x_k = 0$ siden $x_k \overline{x_k} \geq 0$ så eneste måten summen er 0 er vist alle $x_k = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle u + v, w\rangle &= \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)\overline{w_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{w_k} + v_k \overline{w_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{w_k} + \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k} \\
&= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha u, v\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \alpha u_k \overline{v_k} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k} \\
&= \alpha \langle u, v\rangle
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v}_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{v_k} u_k} = \overline{\sum_{k=1}^{n} v_k \overline{u_k}} \\
&= \overline{\langle v, u\rangle}
\end{aligned}
$$

Dermed oppfyller $\langle \cdot, \cdot\rangle_{\mathbb{K}^n} : U \times U \to \mathbb{K}$ egenskapene til et indreprodukt. □

Bevis av (c). La $a, b \in \ell^2(\mathbb{K})$. Da har vi at

$$
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \overline{b_k}| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2\right)
$$

og de to summene er ved definisjon of $\ell^2(\mathbb{K})$ endelige, så $\langle a, b\rangle$ gir da en endelig verdi.

Videre la også $c \in \ell^2(\mathbb{K})$ og $\delta \in \mathbb{K}$.

i)

$$
\begin{aligned}
\langle a, a\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}e(a_K)^2 + \mathbb{I}m(a_k)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

siden hver $\mathbb{R}e(a_k)^2 \geq 0$ og $\mathbb{I}m(a_k)^2 \geq 0$.

Viss $a = \mathbf{0}$ får vi $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$. Anta da at $\langle a, a\rangle = 0$.

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{R}e(a_k)^2 + \mathbb{I}m(a_k)^2 = 0
$$

Som sagt er $\mathbb{R}e(a_k)^2$ og $\mathbb{I}m(a_k)^2$ ikke-negative reelle tall. Den eneste løsningen for at summen av ikke-negative reelle tall skal være lik 0 er den trivielle løsningen hvor $\mathbb{R}e(a_k) = \mathbb{I}m(a_k) = 0$ for alle k. Med andre ord har vi at hver $a_k = 0$ så $a = \mathbf{0}$.

ii)

$$\begin{aligned}\langle a+b,c\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)\overline{c_k}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{c_k}+b_k\overline{c_k}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{c_k}+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\overline{c_k}\\ &= \langle a,c\rangle+\langle b,c\rangle\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\langle \delta a,b\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty}\delta a_k\overline{b_k}\\ &= \delta\sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k}\\ &= \delta\langle a,b\rangle\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\overline{b_k}a_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k\overline{a_k}}\\ &= \overline{\langle b,a\rangle}\end{aligned}$$

Dermed er $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et indreprodukt på $\ell^2(\mathbb{K})$. $\square$

Bevis av (c). La $f,g,h\in C([a,b],\mathbb{K})$ med $\alpha\in\mathbb{K}$, indreproduktet

$$\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

Viss g er kontinuerlig på $[a,b]$ så er $\overline{g}$ også kontinuerlig på dette intervallet. Dermed er integralet over $f(t)\overline{g(t)}$ vell-definert.

i)

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

$|f(t)|^2\in[0,\infty)$ for alle $t\in[a,b]$. Siden $|f(t)|^2$ er kontinuerlig og ikke negativ på $[a,b]$ gir inetgralet en ikke-negativ verdi. Siden vi tar integralet over ikke-negative verdier er eneste løsningen hvor hele integralet blir 0 når $f(t)=0$ for alle $t\in[a,b]$.

ii)

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle &= \int_a^b (f(t)+g(t))\overline{h(t)}dt\\ &= \int_a^b f(t)\overline{h(t)}+g(t)\overline{h(t)}dt\\ &= \int_a^b f(t)\overline{h(t)}dt+\int_a^b g(t)\overline{h(t)}dt\\ &= \langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

iii)

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha f, g\rangle &= \int_a^b \alpha f(t)\overline{g(t)}dt \\
&= \alpha \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \\
&= \alpha\langle f, g\rangle
\end{aligned}
$$

iv)

$$
\begin{aligned}
\langle f, g\rangle &= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \\
&= \int_a^b \overline{g(t)}f(t)dt = \overline{\int_a^b g(t)\overline{f(t)}dt} \\
&= \overline{\langle g, f\rangle}
\end{aligned}
$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ utgjør et indreprodukt på $C([a,b],\mathbb{K})$. $\square$

Problem: Oppgave 4.2.2

Vis at L^2-normen $\|f\|_{L^2} := \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ (se Eksempel 3.1.2 (d)) er normen indusert av L^2-indreproduktet $\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ (se Oppgave 4.1.5 (d)).

Bevis. Husk at for en f i et indreproduktrom har vi

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$$

så

$$\begin{aligned}
(\langle f, f\rangle)_{L^2}^{1/2} &= \|f\|_{L^2} \\
(\langle f, f\rangle)^{1/2} &= \left(\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\
&= \|f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

L^2-normen er indusert av L^2-indreproduktet. $\square$

Problem: Oppgave 4.3.2

Vi betrakter $\mathbb{R}^2$ med standardindreproduktet. Vis at listene

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \text{ og } \mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$$

er ortonormale. Tegn vektorene i hver av listene og forklar hvordan man kan se at de to listene er ortonormale.

Bevis. La $\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ betegne standardindreproduktet $x \cdot y = \sum_{k=1}^{2} x_k y_k$.

$\mathscr{B}$)

$$\begin{aligned}
&\langle e_1, e_2\rangle \\
&\quad = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

siden $\mathbb{R}^2$ er over $\mathbb{R}$ har vi symmetri og trenger derfor ikke sjekke $\langle e_2, e_1\rangle$ eksplisitt.

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_1\rangle &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\
&= 1 \\
\langle e_2, e_2\rangle &= 0\cdot 0 + 1\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Så $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ er ortonormal.

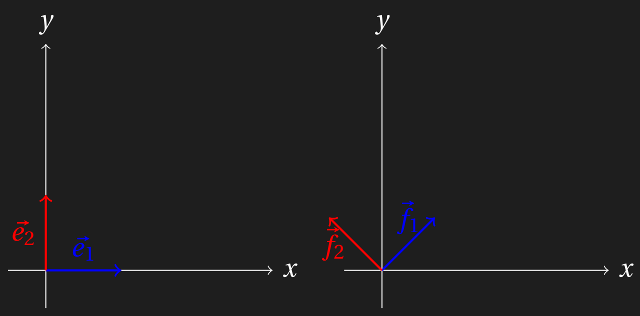
$\mathscr{C}$) La $f_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ og $f_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ så $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$.

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_2\rangle &= 1/\sqrt{2}\cdot -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\cdot 1/\sqrt{2} \\
&= -1/2 + 1/2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Igjen, vi har symmetri så dette holder for å konkludere at listen er ortogonal.

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_1\rangle &= 1/\sqrt{2}\cdot 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\cdot 1/\sqrt{2} \\
&= 1/2 + 1/2 \\
&= 1 \\
\langle f_2, f_2\rangle &= -1/\sqrt{2}\cdot -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\cdot 1/\sqrt{2} \\
&= 1/2 + 1/2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$\mathscr{C}$ er ortonormal. $\square$



Vi ser at vektorene i $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ er enhetsvektorer med 90 grader vinkel i mellom seg.

Problem: Oppgave 4.3.3

Vis at en ortogonal liste $(u_1, \ldots, u_n)$ automatisk er lineært uavhengig.

Bevis. Anta at vi har en liste $U = (u_1, \ldots, u_n)$ som er ortogonal.

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

og ingen av vektorene er 0.

For at en liste skal være lineært uavhengig trenger vi at

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$$

kunn har den trivielle løsningen hvor $\alpha_i = 0$ for alle $1 \leq i \leq n$.

La $u_j \in U$ være en vilkårlig vektor.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i u_i &= 0 \\
\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, u_j \right\rangle &= \langle 0, u_j \rangle = 0 \quad \forall u_j \in U \\
\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, u_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle u_i, u_j \rangle \\
&= \alpha_1 \langle u_1, u_j \rangle + \cdots + \alpha_n \langle u_n, u_j \rangle
\end{aligned}$$

Siden $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ for alle $i \neq j$ sitter vi igjen med

$$\alpha_j \langle u_j, u_j \rangle$$

Siden ingen u_i kan være 0 har vi at $\alpha_j = 0$. u_j var valgt vilkårlig så da har vi at $\alpha_j = 0$ for alle j. Så $\alpha_1 = \alpha 2 = \cdots = \alpha_n = 0$. □