Oblig 2

Thobias Høivik

Problem: Oppgave 2.5.2

Bevis følgende korollar: Alle n-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$ er isomorfe med hverrandre.

Bevis. La $\mathbb{K}$ være en kropp, og U, V n-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$.

Vi ønsker å vise at de er isomorfe, og med det at alle n-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$ er isomorfe med hverrandre (siden U, V er vilkårlige).

Siden U og V er n-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$ så har vi $U \cong \mathbb{K}^n$ og $\mathbb{K}^n \cong V$ ifølge Teorem 2.5.1 fra boken.

Siden $\cong$ utgjør en ekvivalensrelasjon må det være tilfellet at vi har transitivitet:

$$U \cong \mathbb{K}^n \wedge \mathbb{K}^n \cong V \Rightarrow U \cong V$$

□

Problem: Oppgave 2.5.3

I vektorrommet $\mathscr{P}_2$ lar vi $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$. Finn $[p]_{\mathscr{B}}$ og $[p]_{\mathscr{C}}$, der $p(t) = 2 - t + 3t^2$.

Løsning. La $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen til $\mathscr{P}_2$, og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$.

Vi ønsker å finne $[p]_{\mathscr{B}}$ og $[p]_{\mathscr{C}}$, der $p(t) = 2 - t + 3t^2$.

Med andre ord, vi skal finne $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ og $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ slik at

$$p(t) = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$$

og

$$p(t) = \beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2$$

Vi begynner med $[p]_{\mathscr{B}}$.

$$\begin{aligned} p(t) &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \\ 2 - t + 3t^2 &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \end{aligned}$$

Husk at $p_i = t^i$ så

$$\begin{aligned} 2 - t + 3t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \\ \alpha_0 &= 2 \\ \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \Rightarrow [p]_{\mathscr{B}} &= (2, -1, 3) \end{aligned}$$

Deretter tar vi $[p]_{\mathscr{C}}$.

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \\
&= \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t(t-1) \\
&= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 (t^2 - t) \\
&= \beta_2 t^2 + (\beta_1 - \beta_2) t + \beta_0
\end{aligned}
$$

Vi sammenligner med $p(t) = 2 - t + 3t^2$, og får systemet

$$
\begin{aligned}
\beta_2 &= 3 \\
\beta_1 - \beta_2 &= -1 \\
\beta_0 &= 2
\end{aligned}
$$

Dermed

$$
\begin{aligned}
\beta_2 &= 3 \\
\beta_1 &= 2 \\
\beta_0 &= 2
\end{aligned}
$$

som gir

$$[p]_{\mathscr{C}} = (2, 2, 3).$$

□

Problem: Oppgave 2.5.6

La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være standardbasisene i henholdsvis $\mathbb{K}^n$ og $\mathbb{K}^m$, og la $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. La $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ være den tilhørende avbildingen $T(x) := Ax$. Vis at

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = A$$

Bevis. La $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ være standardbasisen for $\mathbb{K}^n$, og la $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ være standardbasisen for $\mathbb{K}^m$. La $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, og definer en lineær avbildning $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ved $T(x) = Ax$.

Vi skal vise at

$$[T]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} = A.$$

Per definisjon består matrisen $[T]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}$ av kolonnene

$$[T]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} = \big([T(e_1)]_{\mathscr{C}} \ \ [T(e_2)]_{\mathscr{C}} \ \ \ldots \ \ [T(e_n)]_{\mathscr{C}} \big).$$

Siden $T(e_j) = Ae_j$, får vi

$$[T]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} = \big([Ae_1]_{\mathscr{C}} \ \ [Ae_2]_{\mathscr{C}} \ \ \ldots \ \ [Ae_n]_{\mathscr{C}} \big).$$

Men vektoren Ae_j er nøyaktig den j-te kolonnen i A, og koordinatene til en standardkolonne i standardbasisen er seg selv. Dermed blir hver kolonne $[Ae_j]_{\mathscr{C}}$ lik kolonne j i A.

Altså er

$$[T]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} = A.$$

□

Problem: Oppgave 2.5.9

La U og V være endeligdimensjonelle vektorrom av lik dimensjon, og la $T \in \mathscr{L}(U,V)$. La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være basiser for henholdsvis U og V. Vis at T er en isomorfi hvis og bare hvis den kvadratiske matrisen $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar.

Bevis. La U og V være vektorrom slik at $\dim U = \dim V = n, n \in \mathbb{N}$, med basiser $\mathscr{B}$ for U og $\mathscr{C}$ for V. La $T \in \mathscr{L}(U,V)$.

Vi ønsker å vise at T er en isomorfi viss og bare viss $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar. Dette gjøres enklest med bruk av Proposisjon 2.5.8 fra boken.

Fremover.

Anta at T utgjør en isomorfi fra U til V. Da finnes $T^{-1} \in \mathscr{L}(V,U)$ slik at $TT^{-1} = id$. I følge 2.5.8 har vi at

$$[TT^{-1}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}[T^{-1}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$$

Betrakt

$$[TT^{-1}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = [id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$$

Siden $\mathrm{id} : V \to V$ er identitetsavbildingen, er den j-te kolonnen i matrisen $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ koordinatvektoren til $\mathrm{id}(b_j) = b_j$ uttrykt i basis $\mathscr{C}$. Koordinatvektoren til b_j i basis $\mathscr{C}$ har 1 i den j-te posisjonen og 0 ellers.

Derfor er

$$[TT^{-1}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = I,$$

der I er identitetsmatrisen.

Så $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ har en matrise $\left[T^{-1}\right]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ slik at de multipliserer til identitetsmatrisen. Så $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar.

Bakover.

Anta nå at $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar. Da finnes en matrise A^{-1} slik at

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} A^{-1} = I.$$

I følge Proposisjon 2.5.8 finnes det da en lineær avbildning $S \in \mathscr{L}(V,U)$ slik at $[S]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = A^{-1}$.

Da har vi

$$[T]_C^B[S]_B^C = I = [\mathrm{id}]_C^B,$$

som igjen impliserer at

$$T \circ S = \mathrm{id}_V \quad \text{og} \quad S \circ T = \mathrm{id}_U.$$

Dermed er T invertibel som lineær avbildning, altså en isomorfi.

Vi konkluderer da at T er en isomorfi hvis og bare hvis $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar. □

Problem: Oppgave 2.6.4

I vektorrommet $\mathbb{R}^2$ lar vi $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ være basisen gitt ved $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ og $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ være standardbasisen. Finn basisskiftematrisene $[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ og $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$

Løsning. Vi begynner med å finne

$$[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix}[e_1]_{\mathscr{B}} & [e_2]_{\mathscr{B}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[e_1]_{\mathscr{B}} &= \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \\
\alpha u_1 + \beta u_2 &= e_1 \\
\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\
\alpha - 2\beta &= 1 \\
2(\alpha+\beta) &= 0 \\
3\alpha &= 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

så

$$[e_1]_{\mathscr{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

Deretter

$$\begin{aligned}
[e_2]_{\mathscr{B}} &= \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}, \\
\gamma u_1 + \delta u_2 &= e_2 \\
\gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
\gamma - 2\delta &= 0 \\
2(\gamma+\delta) &= 1 \\
3\gamma &= 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \delta = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

så

$$[e_2]_{\mathscr{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Med dette har vi at

$$[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

For å finne

$$[id]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$$

må vi bare finne inversen til matrisen over siden

$$[id]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}[id]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = I_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [id]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Problem: Oppgave 2.6.5

På vektorrommet $\mathscr{P}_2$ lar vi $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Finn basisskiftematrisene $[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ og $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

Løsning. $\square$