# Oblig 2

Thobias Høivik

*Problem med Newton-basisen.*

I to av oppgavene skal vi se på Newton-basisen over tre punkter, men viss jeg forstår forklaringen i Seksjon 1.5.2 er ikke $t_2$ relevant siden det basiselementet med grad lik $n$ er definert som

$$\alpha_n \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i)$$

så en Newton-basisen for $\mathscr{P}_2$ vil ikke ha noen element som trenger $t_2$?

Kan hende jeg misforstår, men i de oppgavene antar jeg at $t_2$ står i oppgaveteksten ved uhell og ignorer de.

**Problem: Oppgave 2.5.2**

Bevis følgende korollar: Alle $n$-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$ er isomorfe med hverrandre.

*Bevis.* La $\mathbb{K}$ være en kropp, og $U, V$ n-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$.

Vi ønsker å vise at de er isomorfe, og med det at alle $n$-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$ er isomorfe med hverrandre (siden $U, V$ er vilkårlige).

Siden $U$ og $V$ er $n$-dimensjonelle vektorrom over $\mathbb{K}$ så har vi $U \cong \mathbb{K}^n$ og $\mathbb{K}^n \cong V$ ifølge Teorem 2.5.1 fra boken.

Siden $\cong$ utgjør en ekvivalensrelasjon må det være tilfellet at vi har transitivitet:

$$U \cong \mathbb{K}^n \wedge \mathbb{K}^n \cong V \Rightarrow U \cong V$$

□

**Problem: Oppgave 2.5.3**

I vektorrommet $\mathscr{P}_2$ lar vi $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$. Finn $[p]_{\mathscr{B}}$ og $[p]_{\mathscr{C}}$, der $p(t) = 2 - t + 3t^2$.

*Løsning.* La $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen til $\mathscr{P}_2$, og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$.

Vi ønsker å finne $[p]_{\mathscr{B}}$ og $[p]_{\mathscr{C}}$, der $p(t) = 2 - t + 3t^2$.

Med andre ord, vi skal finne $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ og $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ slik at

$$p(t) = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$$

og

$$p(t) = \beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2$$

Vi begynner med $[p]_{\mathscr{B}}$.

$$\begin{aligned} p(t) &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \\ 2 - t + 3t^2 &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \end{aligned}$$

Husk at $p_i = t^i$ så

$$\begin{aligned} 2 - t + 3t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \\ \alpha_0 &= 2 \\ \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \Rightarrow [p]_{\mathscr{B}} &= (2, -1, 3) \end{aligned}$$

Deretter tar vi $[p]_{\mathscr{C}}$.

$$\begin{aligned} p(t) &= \beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \\ &= \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t(t-1) \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 (t^2 - t) \\ &= \beta_2 t^2 + (\beta_1 - \beta_2) t + \beta_0 \end{aligned}$$

Vi sammenligner med $p(t) = 2 - t + 3t^2$, og får systemet

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 3 \\ \beta_1 - \beta_2 &= -1 \\ \beta_0 &= 2 \end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 3 \\ \beta_1 &= 2 \\ \beta_0 &= 2 \end{aligned}$$

som gir

$$[p]_{\mathscr{C}} = (2, 2, 3).$$

$\square$

**Problem: Oppgave 2.5.6**

La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være standardbasisene i henholdsvis $\mathbb{K}^n$ og $\mathbb{K}^m$, og la $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. La $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ være den tilhørende avbildingen $T(x) := Ax$. Vis at

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = A$$

*Bevis.* La $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasisen for $\mathbb{K}^n$, og la $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_m)$ være standardbasisen for $\mathbb{K}^m$. La $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, og definer en lineær avbildning $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ved $T(x) = Ax$.

Vi skal vise at

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = A.$$

Per definisjon består matrisen $[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}}$ av kolonnene

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \big([T(e_1)]_{\mathscr{C}} \ \ [T(e_2)]_{\mathscr{C}} \ \ \dots \ \ [T(e_n)]_{\mathscr{C}}\big).$$

Siden $T(e_j) = Ae_j$, får vi

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \big([Ae_1]_{\mathscr{C}} \ \ [Ae_2]_{\mathscr{C}} \ \ \dots \ \ [Ae_n]_{\mathscr{C}}\big).$$

Men vektoren $Ae_j$ er nøyaktig den $j$-te kolonnen i $A$, og koordinatene til en standardkolonne i standardbasisen er seg selv. Dermed blir hver kolonne $[Ae_j]_{\mathscr{C}}$ lik kolonne $j$ i $A$.

Altså er

$$[T]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = A.$$

$\square$

**Problem: Oppgave 2.5.9**

La $U$ og $V$ være endeligdimensjonelle vektorrom av lik dimensjon, og la $T \in \mathscr{L}(U,V)$. La $\mathscr{B}$ og $\mathscr{C}$ være basiser for henholdsvis $U$ og $V$. Vis at $T$ er en isomorfi hvis og bare hvis den kvadratiske matrisen $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar.

*Bevis.* La $U$ og $V$ være vektorrom slik at $\dim U = \dim V = n, n \in \mathbb{N}$, med basiser $\mathscr{B}$ for $U$ og $\mathscr{C}$ for $V$. La $T \in \mathscr{L}(U,V)$.

Vi ønsker å vise at $T$ er en isomorfi viss og bare viss $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar. Dette gjøres enklest med bruk av Proposisjon 2.5.8 fra boken.

*Fremover.*

Anta at $T$ utgjør en isomorfi fra $U$ til $V$. Da finnes $T^{-1} \in \mathscr{L}(V,U)$ slik at $TT^{-1} = id$. I følge 2.5.8 har vi at

$$\left[TT^{-1}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} \left[T^{-1}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$$

Betrakt

$$\left[TT^{-1}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}$$

Siden $\mathrm{id} : V \to V$ er identitetsavbildingen, er den $j$-te kolonnen i matrisen $[\mathrm{id}]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ koordinatvektoren til $\mathrm{id}(b_j) = b_j$ uttrykt i basis $\mathscr{C}$. Koordinatvektoren til $b_j$ i basis $\mathscr{C}$ har 1 i den $j$-te posisjonen og 0 ellers.

Derfor er

$$\left[TT^{-1}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = I,$$

der $I$ er identitetsmatrisen.

Så $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ har en matrise $\left[T^{-1}\right]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ slik at de multipliserer til identitetsmatrisen. Så $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar.

*Bakover.*

Anta nå at $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar. Da finnes en matrise $A^{-1}$ slik at

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} A^{-1} = I.$$

I følge Proposisjon 2.5.8 finnes det da en lineær avbildning $S \in \mathscr{L}(V,U)$ slik at $[S]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = A^{-1}$.

Da har vi

$$[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} [S]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = I = [\mathrm{id}]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}},$$

som igjen impliserer at

$$T \circ S = \mathrm{id}_V \quad \text{og} \quad S \circ T = \mathrm{id}_U.$$

Dermed er $T$ invertibel som lineær avbildning, altså en isomorfi.

Vi konkluderer da at $T$ er en isomorfi hvis og bare hvis $[T]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ er inverterbar. □

**Problem: Oppgave 2.6.4**

I vektorrommet $\mathbb{R}^2$ lar vi $\mathscr{B} = (u_1, u_2)$ være basisen gitt ved $u_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ og $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ være standardbasisen. Finn basisskiftematrisene $[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ og $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$

*Løsning.* Vi begynner med å finne

$$[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}[e_1]_{\mathscr{C}} & [e_2]_{\mathscr{C}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[e_1]_{\mathscr{C}} &= \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}, \\
\alpha u_1 + \beta u_2 &= e_1 \\
\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\
\alpha - 2\beta &= 1 \\
2(\alpha + \beta) &= 0 \\
3\alpha = 1 &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

så

$$[e_1]_{\mathscr{C}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$$

Deretter

$$\begin{aligned}
[e_2]_{\mathscr{C}} &= \begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}, \\
\gamma u_1 + \delta u_2 &= e_2 \\
\gamma\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
\gamma - 2\delta &= 0 \\
2(\gamma + \delta) &= 1 \\
3\gamma = 1 &\Rightarrow \gamma = \frac{1}{3} \\
&\Rightarrow \delta = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

så

$$[e_2]_{\mathscr{C}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Med dette har vi at

$$[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

For å finne

$$[id]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}$$

må vi bare finne inversen til matrisen over siden

$$[id]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}}[id]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = I_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [id]^{\mathscr{C}}_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

**Problem: Oppgave 2.6.5**

På vektorrommet $\mathscr{P}_2$ lar vi $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen og $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ være Newton-basisen over punktene $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$. Finn basisskiftematrisene $[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ og $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

*Løsning.* La $\mathscr{P}_2$ være rommet av alle polynomer med reelle koeffisienter av grad $\leq 2$.

La $\mathscr{B} = (p_0, p_1, p_2)$ være den kanoniske basisen, der $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$. Newton-basisen $\mathscr{C} = (q_0, q_1, q_2)$ over punktene $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ er definert som $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x - t_0 = x$, og $q_2(x) = (x - t_0)(x - t_1) = x(x-1) = x^2 - x$.

Vi ønsker å finne basisskiftematrisene.

Vi begynner med $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$. Per definisjon er kolonnene i $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$ koordinatvektorene til basisvektorene i $\mathscr{B}$ uttrykt i basis $\mathscr{C}$.

$$[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} [p_0]_{\mathscr{C}} & [p_1]_{\mathscr{C}} & [p_2]_{\mathscr{C}} \end{pmatrix}$$

Vi finner koordinatvektorene:

- For $p_0(x) = 1$: $1 = \alpha_0 q_0(x) + \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) = \alpha_0(1) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2 - x)$. Ved å sammenligne koeffisienter får vi $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Dermed er
$$[p_0]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- For $p_1(x) = x$: $x = \beta_0 q_0(x) + \beta_1 q_1(x) + \beta_2 q_2(x) = \beta_0(1) + \beta_1(x) + \beta_2(x^2 - x)$. Ved å sammenligne koeffisienter får vi $\beta_0 = 0, \beta_1 - \beta_2 = 1, \beta_2 = 0$. Dette gir $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$. Dermed er
$$[p_1]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- For $p_2(x) = x^2$: $x^2 = \gamma_0 q_0(x) + \gamma_1 q_1(x) + \gamma_2 q_2(x) = \gamma_0(1) + \gamma_1(x) + \gamma_2(x^2 - x)$. Ved å sammenligne koeffisienter får vi $\gamma_0 = 0, \gamma_1 - \gamma_2 = 0, \gamma_2 = 1$. Dette gir $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$. Dermed er
$$[p_2]_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss basisskiftematrisen
$$[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

For å finne $[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}}$ kan vi ta inversen av $[id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}$.

$$\begin{aligned} \left([id]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}}\right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dermed er

$$[id]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$