Oblig 1

Thobias Høivik

Problem (Problem 1). *La* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, hvor gruppeoperasjonen er vanlig multiplikasjon med komplekse tall. La*

$$A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$$

a) Er A *lukket under multiplikasjon?*
b) Er A *en undergruppe av* $\mathbb{C}^*$*?*

Løsning og bevis av (a). A er lukket under multiplikasjon.

Merk at for $z \in A$ kan vi skrive z som

$$z = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Vi vet at $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ er lukket under addisjon (faktisk en gruppe), og isomorf med A via $\phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to A$

$$\phi(\theta) = e^{i\theta}$$

så A er lukket.

Alternativt:

$$\begin{aligned} z, w \in A \Rightarrow |z| = |w| = 1 \\ |z \cdot w| = |z| \cdot |w| = 1 \\ \Rightarrow z \cdot w \in A \end{aligned}$$

□

Løsning og bevis av (b). Vi hevder at $A \leq \mathbb{C}^*$.

Med tanke på at $A \subseteq \mathbb{C}^*$, og at A er en gruppe (isomorf med $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, som vist i (a)), kan vi konkludere at $A \leq \mathbb{C}^*$.

Alternativt kan vi gjøre følgende:

$A \subseteq \mathbb{C}^*$, per definisjon, og

$$1 = e^{0i} \in A \neq \emptyset$$

Da gjenstår det å vise at for vilkårlig valgte $a, b \in A$ så har vi at

$$ab^{-1} \in A$$

For $a, b \in A$ finnes det $\theta_a, \theta_b \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ slik at

$$a = e^{i\theta_a},\ b = e^{i\theta_b}$$

Vi ser at

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= e^{i\theta_a}(e^{i\theta_b})^{-1} \\ &= e^{i\theta_a} e^{i(-\theta_b)} \\ &= e^{i(\theta_a - \theta_b)} \in A \end{aligned}$$

og konkluderer dermed at $A \leq \mathbb{C}^*$. □

Problem (Problem 2). *La G være en endelig gruppe med identitetselement e. Anta at for alle $g \in G$ gjelder*

$$g^2 = e.$$

a) La $a, b \in G$. Vis at

$$aba^{-1}b^{-1} = e$$

b) Vis at G er abelsk.
c) Vis at G er enten triviell eller isomorf med gruppen

$$\prod_{n=1}^{n} \mathbb{Z}_2 = \overbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}^{n}$$

for en eller annen $n \geq 1$.

For simplisitet viser vi (b) først.

Bevis av (b). $G = \{e, g_1, \dots, g_n\}$ med $g^2 = e, \ \forall g \in G$.

Vi har da at $g = g^{-1}$. Ta vilkårlige $x, y \in G$. Da får vi

$$\begin{aligned} (xy)^{-1} &= y^{-1}x^{-1} \\ (xy)^{-1} &= yx && (g = g^{-1}) \\ xy = (xy)^{-1} &= yx \end{aligned}$$

$x, y \in G$ var vilkårlig valgt så vi konkluderer at alle $x, y \in G$ kommuterer (sikkert ikke riktig Norsk begrep) med hverrandre. Altså G er abelsk. $\square$

Bevis av (a). Nå følger $aba^{-1}b^{-1} = e$ direkte siden G er abelsk.

Viss vi skulle vist det uten å vite at G er abelsk kan vi igjen observere at $g = g^{-1}$ og da

$$\begin{aligned} e &= abb^{-1}a^{-1} \\ &= abba && \text{siden } g = g^{-1} \\ &= aba^{-1}b^{-1} && \text{siden } (ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

Bevis av (c). G er endelig (og dermed endelig generert) og abelsk, så

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{(e_i)}} \right) \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

Ettersom $|G| < \infty$ må G være isomorf til produktet av grupper av formen $\mathbb{Z}_{p_i^{(e_i)}}$, altså

$$G \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{(e_i)}}$$

Betegn

$$\Gamma := \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i^{(e_i)}}$$

med antagelsen at $G \cong \Gamma$. Viss vi antar, for en kontradiksjon, at dette produktet inneholder $\mathbb{Z}_{p_k^{e_k}}$ med $p_k^{e_k} > 2$ ser vi at det finnes et element $\gamma = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \Gamma$ (0 i alle innslag uten om k) med

$$|\gamma| = p_k^{e_k} > 2$$

Med antagelsen at $\Gamma \cong G$ får vi da at et element med orden > 2 må bli sent til et element av orden 2, som ikke er mulig. Videre kan vi se at fra Lagrange's teorem må

$$|g| = 2 \, \Big| \, |G|$$

så $|G| = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$ (siden en odd prim divisor for $|G|$ hadde motsigt $|g| \leq 2$ pga. Cauchy's). Så for $|G| = 2^m$ blir

$$G \cong \prod_{i=1}^{n:=m} \mathbb{Z}_2$$

Dersom $G \ncong \Gamma$ så er den eneste andre endelige genererte abelske gruppen med $g^2 = e$, $\forall g \in G$ den trivielle gruppen $\{e\}$. $\square$

Problem (Problem 3). *La*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

a) Skriv σ som et produkt av disjunkte sykler.
b) Ligger σ i A_5?
c) Hva er ordenen til σ?
d) For den sykliske gruppen $\langle\sigma\rangle$ og elementet $(1,4) \in S_5$, vis at venstre restklasse $(1,4)\sigma$ er ikke lik høyre restklasse $\sigma(1,4)$.

Løsning av (a). σ sender $1 \to 2 \to 5 \to 1$ og $3 \to 4 \to 3$ så

$$\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$$

□

Løsning av b). Nei,

$$\sigma = (1\ 5)(1\ 2)(3\ 4)$$

Altså, σ er ikke komposisjonen av et partal transposisjoner. □

Løsning av (c). Ordenen av en komposisjon av disjunkte sykler σ_1, σ_2 er $\texttt{lcm}(|\sigma_1|, |\sigma_2|)$.

$$\sigma = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$$

og siden ordenen av en 3-sykel er 3 og en 2-sykel 2 så konkluderer vi at

$$|\sigma| = \texttt{lcm}(2,3) = 6$$

□

Bevis av (d). Anta at de er like. Husk at $gH = Hg \Leftrightarrow gHg^{-1} = H$, så viss

$$(1\ 4)\sigma(1\ 4)^{-1} = \sigma^r$$

for en $r \in \mathbb{Z}$ ville vi hatt at venstre restklasse er lik høyre. For simplisitet bruker vi at

$$\tau(a_1\ \cdots\ a_n)\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \cdots\ \tau(a_n))$$

så

$$\begin{aligned}(1\ 4)\sigma(1\ 4) &= (1\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 4) \\ &= (4\ 2\ 5)(3\ 1)\end{aligned}$$

Merk her at $3 \leftrightarrow 1$, men ingen potens av σ vil transponere 3 og 1. Dermed er antagelsen at $(1\ 4)\langle\sigma\rangle = \langle\sigma\rangle(1\ 4)$ feil. □

Problem (Problem 4). *La $GL_2(\mathbb{R})$ være gruppen av reelle, inverterbare (2×2)-matriser, dvs.*

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\},$$

med gruppeoperasjonen matrisemultiplikasjon. La

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, d \in \mathbb{R}, ad \neq 0 \right\} \subseteq GL_2(\mathbb{R}).$$

a) Vis at $B \leq GL_2(\mathbb{R})$.
La nå $M_1, M_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ være gitt ved

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

b) Vis at hvis $M_1 B = M_2 B$, så finnes det en $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

c) Vis at det finnes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

så er $M_1 B = M_2 B$.

Bevis av (a). Merk at identitetsmatrisen er i B;

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$$

så $B \neq \emptyset$. Videre la $x, y \in B$.

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ 0 & d_x \end{pmatrix} \frac{1}{a_y d_y} \begin{pmatrix} d_y & -b_y \\ 0 & a_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ 0 & d_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_y} & -\frac{b_y}{a_y d_y} \\ 0 & \frac{1}{d_y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_x}{a_y} & -\frac{a_x b_y}{a_y d_y} + \frac{b_x}{d_y} \\ 0 & \frac{d_x}{d_y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Vi ser at $(a_x/a_y) \cdot (d_x/d_y) \neq 0$, så $xy^{-1} \in B$ og vi konkluderer at $B \leq GL_2(\mathbb{R})$. (Kanskje one-step test ikke var det enkleste her)

Bevis av (b). Vi antar at $M_1B = M_2B$ så

$$M_2^{-1}M_1 \in B$$

Viss vi gjør utregninge får vi da

$$\begin{aligned} M_2^{-1}M_1 &= \frac{1}{a_2d_2 - b_2c_2}\begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_2d_2 - b_2c_2}\begin{pmatrix} a_1d_2 - b_2c_1 & b_1d_2 - b_2d_1 \\ a_2c_1 - a_1c_2 & a_2d_1 - b_1c_2 \end{pmatrix} \in B \end{aligned}$$

så $a_2c_1 - a_1c_2 = 0 \Rightarrow a_1c_2 = a_2c_1$. Med andre ord er determinanten av

$$\mathtt{det}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$$

så kolonnevektorene $(a_1, c_1), (a_2, c_2)$ er lineært avhengige. Altså

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

som ønsket. $\square$

Bevis av (c). Vi går fram med samme argument som i (b).

Viss vi antar at de første kolonnevektorene av M_1 er lineært uavhengige kan vi jobbe baklengs for å finne at

$$M_2^{-1}M_1 = \frac{1}{a_2d_2 - b_2c_2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \mathtt{det}(\mathtt{col}_1(M_1)\ \mathtt{col}_1(M_2)) & \delta \end{pmatrix}$$

Så $M_2^{-1}M_1$ er en upper-triangular, 2×2 inverterbar, reell, matrise. Altså er $M_2^{-1}M_1 \in B$ så vi konkluderer at $M_2B = M_1B$. $\square$