

# Oblig 2

Thobias Høivik

*Problem med Newton-basisen.*

I to av oppgavene skal vi se på Newton-basisen over tre punkter, men viss jeg forstår forklaringen i Seksjon 1.5.2 er ikke  $t_2$  relevant siden det basiselementet med grad lik  $n$  er definert som

$$\alpha_n \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i)$$

så en Newton-basisen for  $\mathcal{P}_2$  vil ikke ha noen element som trenger  $t_2$ ?

Kan hende jeg misforstår, men i de oppgavene antar jeg at  $t_2$  står i oppgaveteksten ved uhell og ignorerer de.

**Problem: Oppgave 2.5.2**

Bevis følgende korollar: Alle  $n$ -dimensjonelle vektorrom over  $\mathbb{K}$  er isomorfe med hverandre.

*Bevis.* La  $\mathbb{K}$  være en kropp, og  $U, V$   $n$ -dimensjonelle vektorrom over  $\mathbb{K}$ .

Vi ønsker å vise at de er isomorfe, og med det at alle  $n$ -dimensjonelle vektorrom over  $\mathbb{K}$  er isomorfe med hverandre (siden  $U, V$  er vilkårlige).

Siden  $U$  og  $V$  er  $n$ -dimensjonelle vektorrom over  $\mathbb{K}$  så har vi  $U \cong \mathbb{K}^n$  og  $\mathbb{K}^n \cong V$  ifølge Teorem 2.5.1 fra boken.

Siden  $\cong$  utgjør en ekvivalensrelasjon må det være tilfellet at vi har transitivitet:

$$U \cong \mathbb{K}^n \wedge \mathbb{K}^n \cong V \Rightarrow U \cong V$$

□

**Problem: Oppgave 2.5.3**

I vektorrommet  $\mathcal{P}_2$  lar vi  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$  være den kanoniske basisen og  $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$  være Newton-basisen over punktene  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ . Finn  $[p]_{\mathcal{B}}$  og  $[p]_{\mathcal{C}}$ , der  $p(t) = 2 - t + 3t^2$ .

*Løsning.* La  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$  være den kanoniske basisen til  $\mathcal{P}_2$ , og  $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$  være Newton-basisen over punktene  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ .

Vi ønsker å finne  $[p]_{\mathcal{B}}$  og  $[p]_{\mathcal{C}}$ , der  $p(t) = 2 - t + 3t^2$ .

Med andre ord, vi skal finne  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  og  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  slik at

$$p(t) = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$$

og

$$p(t) = \beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2$$

Vi begynner med  $[p]_{\mathcal{B}}$ .

$$\begin{aligned} p(t) &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \\ 2 - t + 3t^2 &= \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \end{aligned}$$

Husk at  $p_i = t^i$  så

$$\begin{aligned} 2 - t + 3t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 \\ \alpha_0 &= 2 \\ \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= 3 \\ \Rightarrow [p]_{\mathcal{B}} &= (2, -1, 3) \end{aligned}$$

Deretter tar vi  $[p]_{\mathcal{C}}$ .

$$\begin{aligned} p(t) &= \beta_0 q_0 + \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2 \\ &= \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 \cdot t + \beta_2 \cdot t(t-1) \\ &= \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2(t^2 - t) \\ &= \beta_2 t^2 + (\beta_1 - \beta_2)t + \beta_0 \end{aligned}$$

Vi sammenligner med  $p(t) = 2 - t + 3t^2$ , og får systemet

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 3 \\ \beta_1 - \beta_2 &= -1 \\ \beta_0 &= 2 \end{aligned}$$

Dermed

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 3 \\ \beta_1 &= 2 \\ \beta_0 &= 2 \end{aligned}$$

som gir

$$[p]_{\mathcal{C}} = (2, 2, 3).$$

□

### Problem: Oppgave 2.5.6

La  $\mathcal{B}$  og  $\mathcal{C}$  være standardbasisene i henholdsvis  $\mathbb{K}^n$  og  $\mathbb{K}^m$ , og la  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ . La  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  være den tilhørende avbildningen  $T(x) := Ax$ . Vis at

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$$

*Bevis.* La  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  være standardbasen for  $\mathbb{K}^n$ , og la  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$  være standardbasen for  $\mathbb{K}^m$ . La  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , og definer en lineær avbildning  $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  ved  $T(x) = Ax$ .

Vi skal vise at

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A.$$

Per definisjon består matrisen  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  av kolonnene

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([T(e_1)]_{\mathcal{C}} \ [T(e_2)]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [T(e_n)]_{\mathcal{C}}).$$

Siden  $T(e_j) = Ae_j$ , får vi

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([Ae_1]_{\mathcal{C}} \ [Ae_2]_{\mathcal{C}} \ \dots \ [Ae_n]_{\mathcal{C}}).$$

Men vektoren  $Ae_j$  er nøyaktig den  $j$ -te kolonnen i  $A$ , og koordinatene til en standardkolonne i standardbasen er seg selv. Dermed blir hver kolonne  $[Ae_j]_{\mathcal{C}}$  lik kolonne  $j$  i  $A$ .

Altså er

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A.$$

□

**Problem: Oppgave 2.5.9**

La  $U$  og  $V$  være endeligdimensjonelle vektorrom av lik dimensjon, og la  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ . La  $\mathcal{B}$  og  $\mathcal{C}$  være basiser for henholdsvis  $U$  og  $V$ . Vis at  $T$  er en isomorfi hvis og bare hvis den kvadratiske matrisen  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  er inverterbar.

*Bevis.* La  $U$  og  $V$  være vektorrom slik at  $\dim U = \dim V = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , med basiser  $\mathcal{B}$  for  $U$  og  $\mathcal{C}$  for  $V$ . La  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ .

Vi ønsker å vise at  $T$  er en isomorfi viss og bare viss  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  er inverterbar. Dette gjøres enklest med bruk av Proposisjon 2.5.8 fra boken.

*Fremover.*

Anta at  $T$  utgjør en isomorfi fra  $U$  til  $V$ . Da finnes  $T^{-1} \in \mathcal{L}(V, U)$  slik at  $TT^{-1} = id$ . I følge 2.5.8 har vi at

$$[TT^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Betrakt

$$[TT^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

Siden  $id : V \rightarrow V$  er identitetsavbildningen, er den  $j$ -te kolonnen i matrisen  $[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  koordinatvektoren til  $id(b_j) = b_j$  uttrykt i basis  $\mathcal{C}$ . Koordinatvektoren til  $b_j$  i basis  $\mathcal{C}$  har 1 i den  $j$ -te posisjonen og 0 ellers.

Derfor er

$$[TT^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I,$$

der  $I$  er identitetsmatrisen.

Så  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  har en matrise  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  slik at de multipliserer til identitetsmatrisen. Så  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  er inverterbar.

*Bakover.*

Anta nå at  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  er inverterbar. Da finnes en matrise  $A^{-1}$  slik at

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} A^{-1} = I.$$

I følge Proposisjon 2.5.8 finnes det da en lineær avbildning  $S \in \mathcal{L}(V, U)$  slik at  $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A^{-1}$ .

Da har vi

$$[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = I = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}},$$

som igjen impliserer at

$$T \circ S = id_V \quad \text{og} \quad S \circ T = id_U.$$

Dermed er  $T$  invertibel som lineær avbildning, altså en isomorfi.

Vi konkluderer da at  $T$  er en isomorfi hvis og bare hvis  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  er inverterbar. □

**Problem 0.1: Oppgave 2.5.10**

La  $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  være gitt ved

$$Tp := \frac{dp}{dt} \quad \forall p \in \mathcal{P}_3,$$

den deriverte til polynomet  $p$ .

(a) La  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  og  $\mathcal{C} = (p_0, p_1, p_2)$  være de kanoniske basisene for henholdsvis  $\mathcal{P}_3$  og  $\mathcal{P}_2$ . Finn basisrepresentasjonen  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

(b) Generaliser den forrige oppgaven til avbildingen  $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$ , definert på samme måte, for en vilkårlig  $n \in \mathbb{N}$ .

*Løsning til (a).*

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &= ([Tp_0]_{\mathcal{C}} \quad [Tp_1]_{\mathcal{C}} \quad [Tp_2]_{\mathcal{C}} \quad [Tp_3]_{\mathcal{C}}) \\ Tp_0 &= \frac{d}{dt} 1 = 0 \\ [0]_{\mathcal{C}} &= (0, 0, 0) \\ Tp_1 &= \frac{d}{dt} t = 1 \\ [1]_{\mathcal{C}} &= (1, 0, 0) \\ Tp_2 &= \frac{d}{dt} t^2 = 2t \\ [2t]_{\mathcal{C}} &= (0, 2, 0) \\ Tp_3 &= \frac{d}{dt} t^3 = 3t^2 \\ [3t^2]_{\mathcal{C}} &= (0, 0, 3) \\ \Rightarrow [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La oss sjekke at matrisen gjør det vi forventer.

La  $p = t^3 + 2t^2 + 4t + 6$ . Da er  $[p]_{\mathcal{B}} = (6, 4, 2, 1)$ .

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 4 + 4t + 3t^2 &= \frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

□

*Løsning til (b).* For  $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$  har vi en  $n \times n + 1 = \dim \mathcal{P}_{n-1} \times \dim \mathcal{P}_n$  matrise med følgende

struktur

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

altså en matrise med en "offset" diagonal med økende naturlige tal som ender med  $n$  i nest nederste rad i kolonnen helt til høyre.  $\square$

**Problem: Oppgave 2.6.4**

I vektorrommet  $\mathbb{R}^2$  lar vi  $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$  være basisen gitt ved  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  og  $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$  være standardbasen. Finn basisskiftematisene  $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  og  $[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

*Løsning.* Vi begynner med å finne

$$[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([e_1]_{\mathcal{C}} \quad [e_2]_{\mathcal{C}})$$

$$[e_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = e_1$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha - 2\beta = 1$$

$$2(\alpha + \beta) = 0$$

$$3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$$

så

$$[e_1]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Deretter

$$[e_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix},$$

$$\gamma u_1 + \delta u_2 = e_2$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma - 2\delta = 0$$

$$2(\gamma + \delta) = 1$$

$$3\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{6}$$

så

$$[e_2]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Med dette har vi at

$$[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$



For å finne

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

må vi bare finne inversen til matrisen over siden

$$[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = I_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\therefore [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

□

**Problem: Oppgave 2.6.5**

På vektorrommet  $\mathcal{P}_2$  lar vi  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$  være den kanoniske basisen og  $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$  være Newton-basisen over punktene  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$ . Finn basisskiftematrixene  $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  og  $[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

*Løsning.* La  $\mathcal{P}_2$  være rommet av alle polynomer med reelle koeffisienter av grad  $\leq 2$ .

La  $\mathcal{B} = (p_0, p_1, p_2)$  være den kanoniske basisen, der  $p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2$ . Newton-basisen  $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$  over punktene  $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2$  er definert som  $q_0(x) = 1, q_1(x) = x - t_0 = x$ , og  $q_2(x) = (x - t_0)(x - t_1) = x(x - 1) = x^2 - x$ .

Vi ønsker å finne basisskiftematrixene.

Vi begynner med  $[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ . Per definisjon er kolonnene i  $[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  koordinatvektorene til basisvektorene i  $\mathcal{B}$  uttrykt i basis  $\mathcal{C}$ .

$$[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([p_0]_{\mathcal{C}} \quad [p_1]_{\mathcal{C}} \quad [p_2]_{\mathcal{C}})$$

Vi finner koordinatvektorene:

- For  $p_0(x) = 1$ :  $1 = \alpha_0 q_0(x) + \alpha_1 q_1(x) + \alpha_2 q_2(x) = \alpha_0(1) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2 - x)$ . Ved å sammenligne koeffisienter får vi  $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ . Dermed er

$$[p_0]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- For  $p_1(x) = x$ :  $x = \beta_0 q_0(x) + \beta_1 q_1(x) + \beta_2 q_2(x) = \beta_0(1) + \beta_1(x) + \beta_2(x^2 - x)$ . Ved å sammenligne koeffisienter får vi  $\beta_0 = 0, \beta_1 - \beta_2 = 1, \beta_2 = 0$ . Dette gir  $\beta_0 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ . Dermed er

$$[p_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- For  $p_2(x) = x^2$ :  $x^2 = \gamma_0 q_0(x) + \gamma_1 q_1(x) + \gamma_2 q_2(x) = \gamma_0(1) + \gamma_1(x) + \gamma_2(x^2 - x)$ . Ved å sammenligne koeffisienter får vi  $\gamma_0 = 0, \gamma_1 - \gamma_2 = 0, \gamma_2 = 1$ . Dette gir  $\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$ . Dermed er

$$[p_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss basisskiftematrixen

$$[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

For å finne  $[id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$  kan vi ta inversen av  $[id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

$$\begin{aligned} ([id]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

