

# Statistics for Engineering

Thobias Høivik

Fall 2025

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Lecture 1</b>	<b>3</b>
2.1	Sentralkmål . . . . .	3
2.2	Spredningsmål. . . . .	3
2.3	Tsjebytsjevs regel . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Lecture 2</b>	<b>5</b>
3.1	Stokastisk forsøk, utfallsrom og hending . . . . .	5
3.2	Sannsyn for handling . . . . .	6
3.3	Mengdelære . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Lecture 3</b>	<b>8</b>
4.1	Grunnreglar for sannsynlighet . . . . .	8
4.2	Betinget sannsynlighet . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Lecture 4</b>	<b>10</b>
5.1	Diskret synnsynlighetsmodell . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Lecture 5</b>	<b>12</b>
6.1	Fleire stokastiske variabler . . . . .	12
6.2	Kovarians og korrelasjon . . . . .	13
<b>7</b>	<b>Lecture 6</b>	<b>15</b>
7.1	Binomiske forsøk . . . . .	15
7.2	Poissonfordeling . . . . .	17
<b>8</b>	<b>Lecture 7   Kontinuerelege sannsynlighetsmodellar</b>	<b>19</b>
<b>9</b>	<b>Lecture 8   Konfidensinterval</b>	<b>23</b>

# 1 Introduction

This course covers introductory statistics and is taught at the Western Norway University of Applied Science. This will be among my most scattered and improvised notes, probably mostly in norwegian.

## 2 Lecture 1

*Mål:*

- Finne matematiske størrelser som beskriver data i eit datasett
- Sentralmål
- Spredningsmål

### 2.1 Sentralmål

- Finne ein verdi som representerer ein "typisk" enhet i ei mengde.

#### Example 2.1

Lønna til 13 personer oppgitt som: 110, 125, 125, 300, 350, 370, 375, 380, 390, 410, 430, 435, 440.

*Modus/typetal.*

Verdien som dukkar opp flest gangar. Fra eksemplet har at vi moduslønn er 125.

*Median.* Median er den midterste verdien i ei datamengde. I dette tilfellet fra Example 2.1 har vi at medianlønn ligger på 375. I tilfellet hvor det er et partall antall verdier tar vi gjennomsnittet av de to midterste verdiene.

*Gjennomsnitt.*

Gjennomsnittet av en datamengde  $X$  er gitt ved

$$\bar{X} = \frac{1}{|X|} \sum_{i=1}^{|X|} x_i$$

I dette tilfellet, fra Example 2.1, har vi gjennomsnitt på 326.

Anta nå at en 14-ende tjener blir lagt til i mengden som tjener 30,000. Da er gjennomsnittslønnen på de 14 personene rundt 2445 som ligger langt over den nest høyeste tjeneren. Med andre ord drar person nummer 14 gjennomsnittet opp vanvittigt.

### 2.2 Spredningsmål.

Målet med et spredningsmål er å beskrive hvor stor variasjon det er i datasettet.

### Example 2.2

Gitt to mengder  $X, Y$ .

$$X = \{80, 90, 100, 110, 120\}$$

$$\bar{X} = 100$$

$$Y = \{20, 60, 100, 140, 180\}$$

$$\bar{Y} = 100$$

*Variasjonsbredde.*

Variasjonsbredda er største verdi minus minste verdi:

$$\max X - \min X$$

Fra Example 2.2 har vi at at variasjonsbredda til  $X$  er 40 og variasjonsbredda til  $Y$  er 160.

*Varsans og standardavik.*

Varsans:

$$\text{var}(X) = s_X^2 = \frac{1}{|X| - 1} \sum_{i=1}^{|X|} (x_i - \bar{X})^2$$

Standardavik:

$$\text{std}(X) = \sqrt{s_X^2} = \sqrt{\text{var}(X)}$$

Viss vi ser på Example 2.3 får vi

$$\text{var}(X) = \frac{(80 - 100)^2 + (90 - 100)^2 + \dots + (120 - 100)^2}{4} = 250 = 15.8^2$$

og

$$\text{std}(X) = 15.8$$

mens for  $Y$

$$\text{var}(Y) = \frac{(20 - 100)^2 + (40 - 100)^2 + \dots + (180 - 100)^2}{4} = 4000 = 63.25^2$$

$$\text{std}(Y) = 63.25$$

## 2.3 Tsjebytsjevs regel

"Sammenhengen mellom ei datamengde, gjennomsnitt og standardavik."

Minimum 75% av observasjonane har verdi i intervallet

$$\left[ \bar{X} - 2s_X, \bar{X} + 2s_X \right]$$

## 3 Lecture 2

Vi begynner med begrepet sannsyn.

Mål:

- kjennskap til sentrale begrep
- rekne ut sannsyn
- kjenne til grunnleggande begrep frå mengdelære

### 3.1 Stokastisk forsøk, utfallsrom og hending

#### Definition 3.1: Stokastisk forsøk

- Vi veit kva utfall som er mulig
- Berre eitt utfall kan skje i kvart forsøk
- Veit ikkje utfallet vil bli

#### Example 3.1

Terningskast er eit eksempel på eit stokastisk forsøk. Vi veit at vi får 1 – 6. Vi kan kunn få eit utfall. Vi veit ikkje på forhånd kva vi får.

Vi kaster 2 terninger. Dei mulige utfalla er

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

som utgør  $6^2 = 36$  mulige utfall.

#### Example 3.2

Kaster eit kronestykke 3 gongar. Dei mulige utfalla er

<i>KKK</i>	<i>KKM</i>	<i>KMK</i>	<i>KMM</i>
<i>MKK</i>	<i>MKM</i>	<i>MMK</i>	<i>MMM</i>

som utgør  $2^3 = 8$  mulige utfall.

#### Definition 3.2: Utfallsrom og hending

Utfallsrommet  $S$  er mengda av alle mulige utfall.

Hending er eitt eller fleire utfall som oppfyller ein gitt betingelse.

### Example 3.3

Viss vi tar utgangspunkt i Example 3.1 kan vi se på hendinga  $A = \{\text{sum er 4}\} = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\}$ .  
 $B = \{\text{minst eit partal}\} = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), \dots\}$  som gir  $|B| = 27$ .

### Example 3.4

Viss ein målar høgda til personer er tilstandsrommet  $S = \{\text{alle reelle tal mellom 0.5 og 2.5}\}$ .

## 3.2 Sannsyn for handling

- Bruke modell for sannsyn
- Empiri
- Magefølelse

*Notasjon.*

La  $A$  være ei hending:

- sannsyn for  $A$ :  $P(A)$
- $0 \leq P(A) \leq 1$

### Definition 3.3: Uniform sannsynlighetsmodell

La  $S$  være utfallsrommet til eit stokastisk forsøk, og la  $A$  være ei hending.  
Viss alle utfall er like sannsynlige, då er

$$P(A) = \frac{\text{antal utfall der } A \text{ er gunnstig}}{\text{antal mulige utfall}}$$

### Example 3.5

Betrakt terningskast eksemplet fra tidligere.

La  $S$  være terningskast med to terninger.

$$A = \{\text{sum er 4}\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6^2} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$B = \{\text{minst eitt partal}\}$$

$$P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

*Empirisk sannsyn.*

Kva er sannsynligheita for at ein person er mellom 175cm og 180cm?

Dette er ikkje ein uniform modell siden det ikkje er like stor sannsynligheit for ein person å ha ein gitt høgde.

Det vi kan gjere da er å velge 1000 personer, måle høgda og lage ein frekvenstabell.

Da ville vi hatt

$$P(\text{mellom 175 og 180}) = \text{relativ frekvens}$$

*Store tals lov.*

Viss eit stokastisk forsøk blir gjentatt mange gangar så vil den empiriske sannsynligheita nærme seg den teoretiske sannsynligheita.

### 3.3 Mengdelære

#### Example 3.6

$$A = \{\text{sum} = 4\}, P(A) = \frac{1}{12}.$$

$$B = \{\text{minst eitt partal}\}, P(B) = \frac{3}{4}.$$

$$C = \{\text{sum} \geq 9\}, P(C) = \frac{5}{18}.$$

$P(\text{sum} = 4 \text{ og minst eitt partal})?$

$P(\text{sum} \leq 4 \text{ og sum} \geq 9)?$

#### Definition 3.4: Mengde

Ei mengde  $A$  er ei samling element (fra ei utvalgsMengde  $S$ ).

#### Definition 3.5: Union, snitt, komplement, disjunkt

La  $A, B$  være mengder med element fra ei utvalgsMengde  $S$ .

*Union.*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

*Snitt.*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

*Komplement.*

$$\overline{A} = A^c = S \setminus A = \{x \in S : x \notin A\}$$

*Disjunkt.*

$A$  og  $B$  er disjunkte viss

$$A \cap B = \emptyset$$

## 4 Lecture 3

### 4.1 Grunnreglar for sannsynlighet

La  $S$  være utfallsrommet til eit stokastisk forsøk, og la  $A, B$  være hendingar.

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
2.  $P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$
3. Viss  $A$  og  $B$  er disjunkte hendingar ( $A \cap B = \emptyset$ ), då er  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
4.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

#### Example 4.1

Betrakt kastingen av to terninger.

$A = \{\text{summen er } 4\}$

$B = \{\text{minst 1 terning er partall}\}$

$C = \{\text{sum} \geq 9\}$

$P(A) = \frac{3}{36}, P(B) = \frac{27}{36}, P(C) = \frac{10}{36}$

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{13}{36}$  siden  $A$  og  $C$  er disjunkte (ingen tall  $x$  oppfyller  $x = 4 \wedge x \geq 9$  samtidig).

$P(A \cup B)$ . Her kan vi ikke bruke regel 3, siden  $2 + 2 = 4$  og  $(2, 2)$  oppfyller at minst en er partall, så  $A \cap B = \{(2, 2)\} \neq \emptyset$ . I dette tilfellet har vi  $P(A \cup B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{29}{36}$  (som addisjon-regelen for ikke-disjunkte mengder fra MAT210).

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{7}{36}$

### 4.2 Betinget sannsynlighet

#### Example 4.2

Eit bilfirma har 2000 tilsette.

La

$A = \{\text{stemmer Ap}\}$

$B = \{\text{er bilmekaniker}\}$

La oss si at vi vet at en person er bilmekaniker, hva er da sjansen for at de stemmer Ap?

Viss vi vet at blant bilmekanikere så stemmer 500 Ap og 380 ikke da er sjansen for at, gitt en bilmekaniker, de stemmer Ap

$$P(A|B) = \frac{500}{500 + 380} = \frac{500}{880}$$

Den betinget sannsynligheten for at  $A$  skjer viss  $B$  har skjedd

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Fra dette følger det et par formler

1.  $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$



2.  $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$
3.  $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$

#### Theorem 4.1: Bayes teorem

La  $A, B$  være hendinger da har vi at

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

*Kort bevis.*

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{P(B \cap A)}{P(A)} P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= P(A|B) \end{aligned}$$

□

*Sensitivitet, spesifisitet, basisrate.*

La

$B = \{\text{pasient er syk}\}$

$A = \{\text{testmetode er positiv}\}$

Vi har som mål å finne sjansen for at en person er syk når testen er positiv,  $P(B|A)$ .

- Sensitivitet:  $P(A|B)$ , sannsynligheten for at test er positiv når pasient er syk
- Spesifisitet:  $P(\bar{A}|\bar{B})$ , sannsynlighet for at test er negativ når pasient er frisk
- Basisrate:  $P(B)$ , sannsynlighet for at gitt pasient er syk

$$\begin{aligned} P(B|A) &= P(A|B) \frac{P(B)}{P(A)} \\ P(A) &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B}) \\ P(\bar{B}) &= 1 - P(B) \\ P(A|\bar{B}) &= 1 - P(\bar{A}|\bar{B}) \\ \Rightarrow P(B|A) &= P(A|B) \frac{P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + (1 - P(\bar{A}|\bar{B}))(1 - P(B))} \end{aligned}$$

## 5 Lecture 4

### 5.1 Diskret sannsynlighetsmodell

Mål:

- kva er ein stokastisk variabel
- innholdet i sannsynlighetsmodell
- fordelingsfunksjonar og anvendelse
- sentralt mål og spredningsmål for diskret sannsynlighetsmodell

#### Definition 5.1: Stokastisk variabel

Ein stokastisk variabel  $X$  er ein tilfeldig variabel som knytter alle utfall i utfallsrommet til ein verdi.

#### Definition 5.2: Verdimengde

Dei moglege verdiane av eit stokastisk forsøk kalles verdimengda  $V_X$ .

#### Example 5.1

Anta at vi kaster 2 terninger.

La  $X = \{\text{summen av terningene}\}$ .

$X = 4 = \{13, 22, 31\}$ .

$X \leq 4 = \{11, 12, 21, 13, 22, 31\}$ .

$V_X = \{2, 3, 4, \dots, 9, 10, 11, 12\}$ .

$Y = \{\text{antall partall}\}$ .

$V_Y = \{0, 1, 2\}$ .

I eit pengespill taper du 10 viss  $\text{sum} \leq 6$ , vinner 8 viss  $\text{sum} = 7$ , og vinner 1 viss  $\text{sum} \geq 8$ .

Viss vi lar  $Z$  betegne den stokastiske variabelen i pengespillet får vi:

$V_Z = \{-10, 8, 1\}$ .

#### Definition 5.3: Sannsynlighetsfordeling

Ein sannsynlighetsfordeling til ein stokastisk variabel  $X$  inneholder:

1. verdimengden  $V_X$
2. sannsynligheten for alle mulige utfall i  $V_X$

$V_X$	$P(X = x)$	$F(x)$	$x \cdot P(X = x)$	$x^2 \cdot P(X = x)$
2	1/36	1/36	2/36	4/36
3	2/36	3/36	6/36	18/36
4	3/36	6/36	12/36	43/36
5	4/36	10/36	20/36	100/36
6	5/36	15/36	30/36	180/36
7	6/36	21/36	42/36	294/36
8	5/36	26/36	40/36	320/36
9	4/36	30/36	36/36	324/36
10	3/36	33/36	30/36	300/36
11	2/36	35/36	22/36	242/36
12	1/36	36/36	12/36	144/36
			$E(X) = 252/36 = 7$	$E(X^2) = 1974/36$

er hvordan sannsynlighetsfordelingen kan se ut for  $X = \{\text{summen av terningene}\}$ .  $F(x)$  er definert som sannsynligheten for at  $X \leq x$ . Med andre ord

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \in V_X, y \leq x} P(X = y)$$

### Example 5.2

Finn sannsynlighet for at sum er 7 eller mindre. Da skal vi finne  $P(X \leq 7)$  som næmlig er

$$F(7) = \frac{21}{36}$$

Finn sannsynlighet for at sum er større enn 8.

$$P(X > 8) = 1 - P(x \leq 8) = 1 - F(8) = \frac{10}{36}$$

*Sentralmål og spredningsmål.*

Forventningsverdi:

$$E(X) = \mu_X = \sum_{x \in V_X} xP(X = x)$$

$$Var(X) = \sigma_X^2 = \left( \sum_{x \in V_X} x^2 P(X = x) \right) - \mu_X^2$$

$$std(X) = \sigma_X$$

## 6 Lecture 5

### 6.1 Fleire stokastiske variabler

I eit terningspel kaster ein to terningar. Det er 2 måtar å vinne.

I spel 1 vinner ein 2 viss summen av terningane er 7, vinner 1 viss  $\text{sum} \geq 8$  og ein vinner 0 viss  $\text{sum} \leq 6$ .

I spel 2 vinner ein 2 viss begge terningane er partal, 1 viss ein av terningane er partal og 0 viss begge er oddetal.

La  $X = \{\text{gevinst spel 1}\}$ ,  $V_X = \{0, 1, 2\}$ .  $Y = \{\text{gevinst spel 2}\}$ ,  $V_Y = \{0, 1, 2\}$ .

	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$P(X = x)$
$x = 0$	1/6	1/6	1/12	5/12
$x = 1$	1/12	1/6	1/6	5/12
$x = 2$	0	1/6	0	1/6
$P(Y = y)$	1/4	1/2	1/4	1

$E(X), E(Y), \text{Var}(X), \text{Var}(Y)$

$$E(X) = \sum xP(X = x) = \mu_X$$

$$\text{Var}(X) = \sum x^2 P(X = x) - \mu_X^2$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{5}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{4} = \mu_X$$

$$\text{Var}(X) = 0 + \frac{5}{12} + 4 \cdot \frac{1}{6} - \mu_X^2 = \frac{13}{12} - \mu_X^2 = \frac{13}{12} - \frac{9}{16} = \frac{25}{48} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)^2 = \sigma_X^2$$

$$E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 = \mu_Y$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{1}{2} + \frac{4}{4} - \mu_Y^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma_Y^2$$

*Interessante spørsmål.*

- Viss eg spelar på begge spela, kva er forventa verdi og varians?
- Viss eg vinner på spel 1, aukar eg eller minskar eg sjansen for å vinne på spel 2?
- Er spela uavhengige av kvarandre?

La  $Z = X + Y$  (den samla gevinsten ved å spele på begge spela). Verdimengda  $V_Z = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

$z$	$P(Z = z)$	$zP(Z = z)$	$z^2P(Z = z)$
0	1/6	0	0
1	1/4	1/4	1/4
2	1/4	1/2	1
3	1/3	1	3
4	0	0	0
		$\mu_Z = 7/4$	$E(Z^2) = 17/4$

$$E(Z) = \mu_Z = 7/4$$

$$Var(Z) = 17/4 - (7/4)^2 = (\sqrt{19}/4)^2 = \sigma_Z^2$$

### Theorem 6.1

La  $X$  og  $Y$  vere stokastiske variablar. La  $Z = aX + bY + c$ .

$$E(Z) = aE(X) + bE(Y) + c$$

## 6.2 Kovarians og korrelasjon

- Er det samanheng mellom  $X$  og  $Y$ ?
- Er  $X$  og  $Y$  uavhengige?
- Vil seier i  $X$  påvirke  $Y$ ?

*Kovarians*

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y = \left( \sum_{x,y} x \cdot y P(X = x \wedge Y = y) \right) - \mu_X \mu_Y$$

*Korrelasjon*

$$Corr(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Viss vi betrakter eksemplet fra tidligere får vi

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

så

$$Cov(X, Y) = \frac{5}{6} - \mu_X \mu_Y = \frac{1}{12}$$

Deretter finner vi korrelasjon ved

$$Corr(X, Y) = \frac{1/12}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1/12}{\left(\frac{5\sqrt{3}}{12}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} = 0.164$$

For korrelasjon har vi at

$$-1 \leq Corr(X, Y) \leq 1$$

hvor nærmere  $-1$  betyr mer negativ relasjon og nærmere  $1$  betyr mer positiv relasjon. Med andre ord  $\rho$  nær  $1$  betyr en lineær sammenheng mellom  $X$  og  $Y$  (altså en økning i  $X$  betyr en økning i  $Y$  og vice-versa). På samme måte betyr  $\rho$  nær  $-1$  at en økning i en er en minking i den andre.  $\rho = 0$  betyr ingen lineær sammenheng.

#### Theorem 6.2

For stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  og konstanter  $a, b, c$  har vi:

$$\text{Var}(aX + bY + c) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$$

#### Definition 6.1: Uavhengighet

To stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  er uavhengige dersom

$$P(X = a \wedge Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$$

#### Theorem 6.3

Viss to stokastiske variabler  $X$  og  $Y$  er uavhengige så er

$$\text{Corr}(X, Y) = 0$$

Denne implikasjonen går bare en veg.

## 7 Lecture 6

### 7.1 Binomiske forsøk

#### Example 7.1

Ei skål inneholder 20 kuler. 8 av kulene er raude og 12 er ikkje raude. Vi trekker 5 kuler ut av skåla, og legger tilbake kula. Kva er sannsynligheita for å trekke 3 raude kuler?

La  $R$  - kula raud,  $P(R) = \frac{2}{5}$ .

$\bar{R}$  - kula ikkje raud,  $P(\bar{R}) = \frac{3}{5}$ .

Sannsynligheten for å trekke 3 raude er då sannsynligheita for å trekke raud 3 gongar og sannsynligheita for å trekke ikkje raud 2 gongar, siden hendelsane ikkje er relaterte (tilbakelegging).

Dermed er

$$P(RRR\bar{R}\bar{R}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{72}{3125}$$

men dette er bare en av måtene å trekke 3 raude.

Vi kunne også tatt

$$P(RR\bar{R}\bar{R}\bar{R}) = \frac{72}{3125}$$

Som vi ser, sannsynligheten for å trekke 3 raude er uavhengig av rekkefølgen. Dermed kan vi legge sammen alle sannsynlighetene for alle måtene å velge 3 raude og 2 ikkje raude.

Måtene å velge 3 raude er

$$\binom{5}{3} = 10$$

Dermed er sjansen for å trekke 3 raude er

$$10 \cdot \frac{72}{3125}$$

#### Definition 7.1: Binomisk forsøk

1. Det utføres  $n$  forsøk
2. Kvart forsøk har to utfall  $A$  eller  $\bar{A}$
3. Sannsynet  $P(A)$  er likt i kvart forsøk
4. Forsøka er uavhengige

Viss  $X$  - antal ganger  $A$  skjer er  $X \sim \text{binomial}(n, p)$ .

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p)$$

### Example 7.2

Trekker kuler ut av ei skål. Legger kula tilbake. 8 raude, 12 ikkje raude. Trekker 5 kuler.

$X \sim$  antall raude kuler, så er det binomial( $5, \frac{2}{5}$ ).

$$E(X) = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

$$Var(X) = 5 \cdot \frac{2}{5} (1 - \frac{2}{5}) = 1.2.$$

$$p(X=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^5 = 0.074$$

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0.259$$

$$P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0.346$$

### Problem 7.1: Oppgave 5.2

Du er sulten, og kjøper åtte tilfeldig valgte pølser. Sannsynet for at pølsa er sprukken er 0.2 for hver av pølsene. La  $X$  være antall sprukne pølser blant de 8. Hvilken sannsynlighetsfordeling for  $X$ ? Finn  $P(X=2)$ .

*Løsning.*  $X$  er et binomisk forsøk siden hver utfallet er sprukken eller ikke sprukken. Det at en pølse er sprukken påvirker ikke sannsynet for at en annen pølse er sprukken, så forsøka er uavhengige. Dermed er  $X \sim \text{binomial}(8, 0.2)$ .

$$P(X=2) = \binom{8}{2} (0.2)^2 (0.8)^6 = 0.29360128$$

litt mindre en 1/3 gongar.

□

Med utgangspunkt i Oppgave 5.2, hva er da sjansen for at mellom 2 og 5 av pølsene sprekker?

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= \sum_{x=2}^5 P(X=x) \\ &= \binom{8}{2} 0.2^2 0.8^6 + \dots + \binom{8}{5} 0.2^5 0.8^3 \end{aligned}$$

som blir en ganske lang utregning. Kan vi være mer effektive?

Fra *Kapittel 4.1* har vi

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$$

og

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$$

Så

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = 0.999 - 0.503 = 0.496$$



## 7.2 Poissonfordeling

### Definition 7.2: Poissonprosess

La  $A = \{\text{antall førekomster}\}$ . Da er  $A$  ein poissonprosess viss

1. Antall gongar  $A$  intreffer i eit tidsinterval er uavhengig av andre førekomster.
2. Forventa antal førekomster i ei gitt tidsenhet er konstant.
3. To førekomster kan ikkje skje samtidig.

### Theorem 7.1

$X$  - antal gongar  $A$  skjer.

$X \sim \text{poisson}(\lambda t)$  der  $\lambda$  er en konsentrasjon og  $t$  er eit tidsinterval.

Da er

$$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda t$$

$$P(X = x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

### Example 7.3

Ved en bensinstasjon er det i snitt 10 bilar som fyller bensin per time. Da er  $\lambda = \frac{10 \text{ bilar}}{t}$ .

La  $Y = \{\text{antall tankingar på 30 min}\}$ . Vi antar at raten ikke endrer seg, at forventet antal biler per time er konstant og at to biler ikke kan tanke på same tid.

Da er  $Y$  en poissonprosess med  $t = 0.5$ , så  $Y \sim \text{poisson}(5)$ .

$$P(Y = 10) = \frac{5^{10}}{10!} e^{-5} = 0.018$$

$$P(Y = 4) = \frac{5^4}{4!} e^{-5} = 0.175$$

$$P(Y \leq 8) = \sum_{y=0}^8 P(Y = y)$$

Dette er langt å rekne ut så vi bruker en tabell for å finne

$$P(Y \leq 8) = 0.932$$

Et viktig punkt er at  $\lambda$  og  $t$  ikkje treng å være tidsavhengig. For eksempel kan  $\lambda$  være antall mol/liter og  $t$  være volum. Eller  $\lambda$  sauar/ $m^2$  og  $t$  være  $m^2$ , osv.

#### Example 7.4

I prøvetaking av avløpsvatn kan du spore molekyla i vatnet. Vi forventer 100 molekyl fentanyl pr.liter. Ein tank inneholder 40mL.

$X = \text{antall molekyl} = \text{poisson}(100 \cdot 0.04) = \text{poission}(4)$

$E(X) = 4$  molekyl med fentanyl.

$Var(X) = 4$ , så 90% av tiden har vi mellom 2 og 6 molekyl med fentanyl.

$$P(X = 8) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} = \frac{4^8}{8!} e^{-4} = 0.030$$

så det er 3% sjanse å finne 8 molekyl fentanyl i en 40mL prøve.

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= P(X \leq 5) - P(X \leq 2) \\ &= 0.547 \end{aligned}$$

via poisson-tabell.

## 8 Lecture 7 | Kontinuerlige sannsynlighetsmodellar

### Definition 8.1: Sannsynlighetstetthet

Sannsynlighetstettheten  $f(x)$  beskriver fordelinga av ein kontinuerlig variabel, og oppfyller:

1. Arealet under kurven er 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

2. Sannsynligheten for utfall mellom  $a$  og  $b$  er gitt ved

$$P(a \leq X \leq B) = \int_a^b f(x) dx$$

3.  $f(x) \geq 0$

### Definition 8.2: Fordelingsfunksjon

La

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

Da er  $F(a)$  sannsynligheten for at  $X$  er mindre enn eller like  $a$ , i.e.  $P(X \leq a)$ .

Da er  $1 - F(a)$  sannsynligheten for at  $X$  er større enn  $a$ , i.e.  $P(a < X)$ .

$F(B) - F(A)$  er sannsynligheten for  $P(a < X \leq b)$ .

### Definition 8.3: Normalfordelt

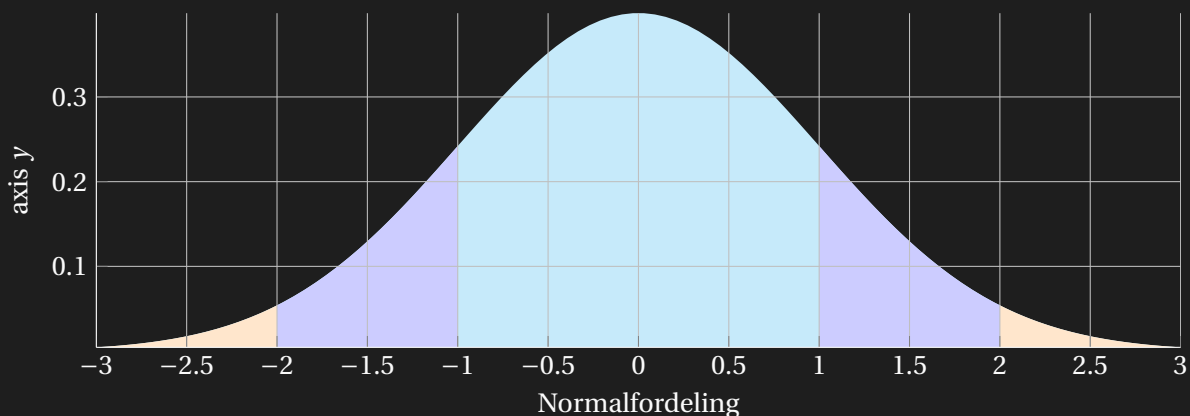
Ein variabel  $X$  er normalfordelt dersom med middelerdi  $E(X) = \mu$  og standardavik  $\sigma$ .

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

viss tetthetsfunksjonen er

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Tetthetsfunksjonen beskrivd i 8.3 ser slik ut:



Her har vi  $\mu = 0$  som fører til at høydepunktet på kurven er ved 0.

*Regel.*

Anta at  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

Da er

$$P(X \leq b) = G\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) = G\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - G\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

og

$$P(X > b) = 1 - G\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Hvor vi leter opp

$$G\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

i en tabell.

### Example 8.1

Anta at høgda av 18 åringar er  $\mathcal{N}(180, 7)$ .

- Kva er sannsynlighet for å velge en person mellom 175- og 185cm?

$$\begin{aligned}P(175 \leq X \leq 185) &= G\left(\frac{5}{7}\right) - G\left(-\frac{5}{7}\right) \\&= G(0.71) - G(-0.71) \\&= 0.7611 - 0.2389 \\&= 0.52\end{aligned}$$

- Kva er sannsynligheten for å velge ein person høgare enn 200cm?

$$\begin{aligned}P(X \geq 200) &= 1 - G\left(\frac{20}{7}\right) \\&= 1 - G(2.86) \\&= 1 - 0.9979 \\&= 0.0021\end{aligned}$$

- Finn eit intervall  $[180 - x, 180 + x]$  slik at det er 90% sjanse for at ein gitt person har høgde innafor intervallet.

$$\begin{aligned}P(180 - x \leq X \leq 180 + x) &= 0.9 \\G\left(\frac{x}{7}\right) - G\left(-\frac{x}{7}\right) &= 0.9 \\x/7 &= 1.65 \\x &= 11.55\end{aligned}$$

Så intervallet blir  $[168.45, 191.55]$ .

### Theorem 8.1: Spredningsintervall

La  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

- Da er det  $100(1 - \alpha)\%$  sikkert at utfallet av  $X$  er mindre enn  $\mu + Z_\alpha \sigma$ .
- Det er  $100(1 - \alpha)\%$  sjanse for at utfallet av  $X$  er større enn  $\mu - Z_\alpha \sigma$ .
- Det er  $100(1 - \alpha)\%$  sikkert at utfallet av  $X$  er mellom  $\mu - Z_{\alpha/2} \sigma$  og  $\mu + Z_{\alpha/2} \sigma$ .

*Regel.* La  $X_1, X_2, \dots, X_n$  være uavhengige. Anta  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Da er summen av forsøka  $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ . Da er gjennomsnittet  $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

### Example 8.2

Anta øretvekt er  $\mathcal{N}(300, 50)$ .

En dag fekk eg 50 fisk. Kva er sannsynligheten for at totalvekta er større en 15750g?

$Y = \text{totalvekt} = \sum_{i=1}^{50} X_i \sim \mathcal{N}(50 \cdot 300, \sqrt{50} \cdot 50) = \mathcal{N}(15000, 354)$ .

$$\begin{aligned} P(Y > 15750) &= 1 - G\left(\frac{15750 - 15000}{354}\right) \\ &= 1 - G(2.12) \\ &= 1 - 0.983 \\ &= 0.017 \end{aligned}$$

### Theorem 8.2: Sentralgrenseteoremet

La  $X_1, \dots, X_n$  være uavhengige forsøk frå samme sannsynlighets-fordeling. Anta  $E(X_i) = \mu$ ,  $Var(X_i) = \sigma^2$ . Viss  $n$  er tilstrekkelig stor (tommelregel  $n \geq 30$ ),

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

og

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$$

### Example 8.3: Galton

La  $X_i = \text{antall høgrehopp} \sim \text{binomial}(30, 0.5)$ .

$E(X) = n \cdot p = 15$ .

$Var(X) = np(1-p) = 2.74^2$ .

Anta at vi slipper 1000 kuler. La  $Y = \sum_{i=1}^{1000} X_i \sim \mathcal{N}(15000, 86.6)$ .

## 9 Lecture 8 | Konfidensinterval

### Example 9.1

La oss si at vi har to fjell hvor vi vil måle avstanden mellom toppene av disse fjellene. Da vil det være mange faktorer som påvirker nøyaktigheten av målingen som f.eks feil i måleutstyr, feil av den som måler avstanden, og mer. Vi ønsker å kunne finne et intervall slik at vi kan være  $x$  antall % sikker på at høyden faller innenfor det intervallet. I vårt eksempell ønsker vi å finne et intervall slik at det er 95% sikkerhet for at den faktiske høyden ligger i intervallet.

- Eg veit usikkerheita til måleutstyret av målinga  $X \sim \mathcal{N}(\mu, 30)$ , hvor  $\mu$  (middelveien) forventer vi at er den nøyaktige verdien og 30 (standardavviket) er usikkerheita.

*Regel 5.16 (Repetisjon).*

Viss  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$  veit vi at det er  $100(1 - \alpha)\%$  sikker på at  $X$  er i intervallet  $\mu \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma$ .

- $\sigma = 30$
- $100(1 - \alpha) = 95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025$   
 $Z_{0.025} = 1.960$

Vi trenger da eit estimat for  $\mu$ . Vi måler avstanden, og det beste estimatet er resultatet av målinga.

$$X_1 = 3245m$$

Eit 95%-Konfidensinterval er gitt ved

$$\hat{\mu} = \pm Z_{\alpha/2} \cdot \sigma$$

$$3245 \pm 1.960 \cdot 30 = [3186, 3303]$$

når vi runder av til næreste meter.

For å forbedre estimatet tar vi fleire målingar.

Anta totalt 9 målingar, der gjennomsnittet ble

$$Z = \frac{X_1 + \dots + X_9}{9} = 3204m$$

Sentralgrenseteoremet seier då at

$$Z \sim \mathcal{N}(\mu, 30/\sqrt{9}) = \mathcal{N}(\mu, 10)$$

så usikkerheten har gått ned ved fleire målinger.

Eit 95%-konfidensinterval blir da

$$\hat{\mu} \pm Z_{\alpha/2} \cdot (\sigma/\sqrt{n})$$

$$3204 \pm 1.96 \cdot 10 = [3184, 3223]$$

### Definition 9.1: Estimator

Ein estimator  $\hat{\theta}$  er ein stokastisk variabel knytta til ei forsøksrekke  $\theta_1, \theta_2, \dots$  som estimerer  $\theta$ .

1.  $E(\hat{\theta}) = \theta$
2.  $Var(\hat{\theta})$  skal være minst mulig.
3.  $Var(\hat{\theta})$  skal gå mot 0 viss antal forsøk aukar.

**Estimator for  $\mu$ .**

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

**Estimator for  $\sigma$ .**

$$\widehat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

**Estimator for  $P$ .**

$$\hat{P} = \frac{X}{n}$$

der  $X$  er positive utfall og  $n$  er antall forsøk.

### Problem 9.1

$\theta$  er ein ukjent stokastisk variabel.

Mål: Finne eit interval  $[A, B]$  slik at

$$P(A \leq \theta \leq B) = 1 - \alpha$$

**Z-interval.**

- $\mu$  - ukjent
- $\sigma$  - kjent

Da er eit  $100(1 - \alpha)\%$  konfidensinterval gitt ved

$$X \pm Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

**P-interval.**

Da er eit  $100(1 - \alpha)\%$  konfidensinterval gitt ved

$$\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}$$



### ***T*-interval.**

- $\mu$  - ukjent
- $\sigma$  - ukjent

Eit  $100(1 - \alpha)\%$ -konfidensinterval for  $\mu$  er gitt ved

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

der  $S$  er estimatet for standardavviket, og  $t_{\alpha/2}$  har  $(n - 1)$  frihetsgrader.

- Siden  $\sigma$  er ukjent er eit  $T$ -interval større enn eit  $Z$ -interval.
- Viss  $n > 30$  er  $T$ -interval tilnærma lik  $Z$ -interval.

#### **Problem 9.2: 5.13**

$X = \text{diametere} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ ,  $n = 6$ .

Vi ønsker 95%-konfidensinterval  $\Rightarrow \alpha/2 = 0.025$ .

$t_{0.025}$  med 5 frihetsgrad = 2.571.

$$\bar{X} = (31 + 32 + 30 + 31 + 29 + 30)/6 = 30.5$$

$$S^2 = \frac{1}{5}((31 - 30.5)^2 + (32 - 30.5)^2 + \dots + (30 - 30.5)^2) = 1.1 \approx 1.05^2$$

Da blir konfidensintervallet

$$30.5 \pm 2.571 \cdot \frac{1.05}{\sqrt{6}} = [29.4, 31.6]$$

### **Konfidens for $P$ .**

Eit  $100(1 - \alpha)\%$ -konfidensinterval for  $P$  er gitt ved

$$\hat{P} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{P}(1 - \hat{P})}{n}}$$

#### **Problem 9.3: 6.16**

$n = 36$

$X = 29$

Da er  $\hat{P} = \frac{29}{36}$ .

Vi vil finne 90%-konfidensinterval.

$$\alpha/2 = 0.05$$

$$Z_{0.05} = 1.645$$

Da blir konfidensintervallet

$$\frac{29}{36} \pm \sqrt{\frac{29/36(1 - 29/36)}{36}} = [0.70, 0.91]$$