Oblig 1

Thobias Høivik

Problem: Oppgave 1

Hva er verdien av k etter at følgende script er utført.

$$
\begin{aligned}
&k = 0\\
&\text{for } i_1 = 1 \text{ to } n_1\\
&\quad \text{for } i_2 = 1 \text{ to } n_2\\
&\qquad \vdots\\
&\qquad \text{for } i_k = 1 \text{ to } n_k\\
&\qquad\quad k = k + 1
\end{aligned}
$$

Løsning. Vi antar for denne oppgaven at loop-en er inklusiv på siste variabel (i.e. for i_k to n_k tar n_k iterasjoner).

Viss vi jobber baklengs har vi at, i den siste loop-en, k ender opp med å være n_k. Loop-en som gjør dette blir utført n_{k-1} ganger som gir $k = n_{k-1}n_k$.

Vi kunne lagd en formel og vist korrekthet via induksjon, men vi kan tydelig se at summen for k blir antal iterasjoner av den siste loop-en, multiplisert med antall iterasjoner av den nest siste loop-en og så videre ned til vi når den første iterasjonen.

Da får vi at

$$k = n_1 n_2 n_3 \cdots n_p = \prod_{i=1}^{p} n_i$$

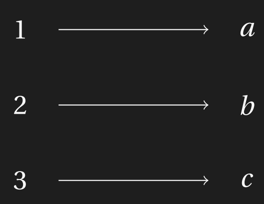
viss vi antar p loops. □

Problem: Oppgave 2

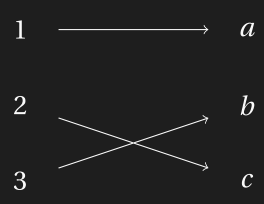
a) Teikn grafane til alle bijektive funksjonar mellom $A = \{1,2,3\}$ og $B = \{a,b,c\}$. Kva seier dette om kardinaliteten?
b) Anta at mengdene $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ og $B = \{a,b,c,d,e,f,g\}$. Kor mange bijektive funksjonar er det mellom A og B? Bruk multiplikasjonsprinsippet for å grunngje svaret.

Løsning av a).

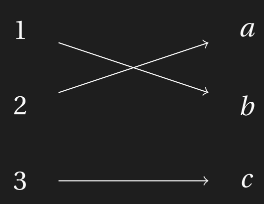
1



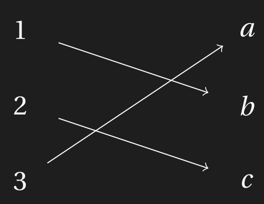
2



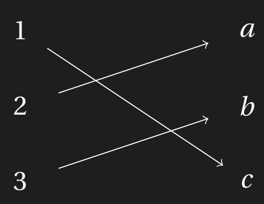
3



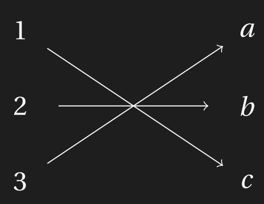
4



5



6



Det er $6 = 3! = |A|! = |B|!$ bijeksjoner. □

Løsning av b). Mellom to mengder med kardinalitet 7 fins det 7! ulike bijeksjoner.

Viss vi betrakter en vilkårlig bijeksjon $\phi : A \to B$, der $|A| = |B| = 7$, har vi at $\phi(a_1) = b_1$ for en $a_1 \in A, b_1 \in A$ der b_1 er en av 7 elementer i B. Så a_1 har 7 elementer å "velge" mellom. Deretter for $a_2 \in A$ må $\phi(a_2) \neq b_1$ så a_2 kan sendes til 1 av $7-1 = 6$ elementer. Dette fortsettes helt til a_7 kun har et element det kan være pre-bildet av. For å finne antallet mulige bijeksjoner tar vi produktet av alle mulige "valg". Dette betyr at antallet bijeksjoner er

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 1 = 7! = |A|! = |B|!$$

Generellt blir formelen for kardinaliteten til mengden av bijeksjoner mellom A og B (gitt at $|A| = |B|$) lik $|A|!$ når $|A| < \aleph_0$. Viss $|A| \geq \aleph_\alpha$, så er $|\{\phi : A \to B : \phi \text{ bijektiv}\}| = 2^{\aleph_\alpha}$.

Så det er like mange bijeksjoner fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{N}$ som det er reelle tall! □

Problem: Oppgave 3

I forelesningsrommet i MAT210 er det 100 sitteplassar. I ei forelesning møtte 20 studentar. Kor mange ulike måtar kunne studentane plassere seg i forelesninga?

Løsning. Det er 100 plassar og 20 av plassene skal velges. Da får vi

$$\binom{100}{20}$$

konfigurasjoner.

Men, studentene er unike, så for hver av måtene å velge 20 seter fra 100 er det 20! studentene kan sette seg (siden student nr.1 har 20 valg, student nr.2 har 19 valg, osv.).

Så det endelige antall måter 20 studenter kan fordele seg på 100 seter er

$$\binom{100}{20} \cdot 20!$$

som er ca. antall stjerner i universet i andre. □

Problem: Oppgave 4

a) Vis at $|\mathbb{N}| = |\{5n+1 : n \in \mathbb{N}\}|$.
b) Vis at $|(0,1)| = |(0,10)|$.

Bevis av a). La $f : \mathbb{N} \to \{5n+1 : n \in \mathbb{N}\}$ definert ved

$$f(n) = 5n+1$$

Vi ser at f er veldefinert og fortsetter med å vise at f utgjør en bijeksjon.

Injektiv.

La $n, m \in \mathbb{N}$ og anta at $f(n) = f(m)$.

$$\begin{aligned} f(n) &= f(m) \\ 5n+1 &= 5m+1 \\ 5n &= 5m \\ n &= m \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ injektiv.

Surjektiv.

La $m \in \{5n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. Da er pre-bildet til m

$$n = \frac{m-1}{5}$$

siden

$$f(n) = f\left(\frac{m-1}{5}\right) = 5\frac{m-1}{5} + 1 = m$$

så f er surjektiv.

Med dette har vi vist at f utgjør en bijeksjon fra de to mengdene og de har da samme kardinalitet ($\aleph_0$). $\square$

Bevis av b). La $f : (0,1) \to (0,10)$ definert ved

$$f(x) = 10x$$

da har vi, for en vilkårlig $x \in (0,1)$, at

$$0 < x < 1 \Rightarrow f(0) < f(x) < f(10) \Rightarrow 0 < f(x) < 10$$

så $f(x) \in (0,10)$.

Injektiv.

La $x, y \in (0,1)$ og anta at $f(x) = f(y)$. Da får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 10x &= 10y \\ x &= y \end{aligned}$$

Surjektiv. La $y \in (0, 10)$. Da er pre-bildet til y

$$x = \frac{y}{10}$$

som vi vet er i $(0, 1)$ siden $0/10 = 0$ og $10/10 = 1$. Som vi ser har vi at

$$f(x) = f\left(\frac{y}{10}\right) = 10\frac{y}{10} = y$$

f utgjør en bijeksjon mellom mengdene og de har derfor lik kardinalitet ($\aleph_1$). □

Problem: Oppgave 5

a) Kor mange ord med 3 bokstavar startar med A eller B?
b) Kor mange to-bokstav-ord startar med ein vokal i det norske alfabetet?
c) Du har 5 par sokkar og 3 par sandalar. Kor mange måtar kan ein kombinere sokkar og sandalar? Kor mange er det viss du ikkje har sokkar og sandalar på samtidig?

Løsning av a). Viss vi antar at vi har tilgang til det norske alfabetet, og at vi ignorerer store- og små bokstaver, får vi ord av formen

$$XYZ, \quad Y, Z \in \{A, B, C, \ldots, Æ, Ø, Å\}$$

og

$$X \in \{A, B\}$$

Valgene for bokstavene er uavhengige så vi begynner med bokstav nummer 1 hvor vi har $n_1 = 2$ valg.

Deretter for Y og Z har vi $n_2 = n_3 = 29$ valg.

Da er det

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2 \cdot 29^2 = 1682$$

muligheter. □

Løsning av b).

$$\begin{aligned} &AB, \\ &A \in \{A, E, I, O, U, Y, Æ, Ø, Å\} \\ &B \in \{A, B, C, \ldots, Æ, Ø, Å\} \\ |\text{vokaler}| \cdot |\text{alfabetet}| &= 9 \cdot 29 = 261 \end{aligned}$$

□

Løsning av c). Først, viss vi antar at du må velge et par (kan ikke ha på to mismatchende sandaler/-sokker), da får vi at du velger blant 5 par sokkar og 3 par sandaler.

$\Rightarrow 3 \cdot 5 = 15$ kombinasjoner.

Viss du må ha enten sokkar på eller sandaler kan du ta eit valg blant 5 sokkar og 3 sandaler.

$\Rightarrow 5 + 3 = 8$ kombinasjoner. □

Problem: Oppgave 6

Ei klasse med informatikkstudentar tar tre emne: diskret matematikk, statistikk og programmering. Under er ein tabell med kor mange som strauk kvart emne:

Emne:	Stat	Mat	Prog	Stat & Mat	Prog & Stat	Mat & Prog	Mat & Prog & Stat
Stryk:	12	5	8	2	6	3	1

a) Kor mange studentar strauk på eit emne?
b) Kor mange studentar strauk berre diskret matematikk?

Løsning av a). La $S = \{\text{studenter som trauk Stat}\}$, $M = \{\text{studenter som strauk Mat}\}$, osv. hvor vi da kan finne de som strauk Mat & Prog med

$$M \cap P = \{\text{studenter som strauk Mat \& Prog}\}$$

Da har vi

$$\begin{aligned}
|M \cap P \cap S| &= 1 \\
|M \cap P| &= 3 \\
|P \cap S| &= 6 \\
|S \cap M| &= 2 \\
|P| &= 8 \\
|M| &= 5 \\
|S| &= 12
\end{aligned}$$

Da har vi at

$$\begin{aligned}
|\{\text{studenter som strauk ett emne}\}| &= |S| + |M| + |P| - 2(|S \cap M| + |S \cap P| + |M \cap P|) + 3(|M \cap P \cap S|) \\
&= 12 + 5 + 8 - 2(2 + 6 + 3) + 3(1) \\
&= 25 - 22 + 3 \\
&= 6
\end{aligned}$$

$\square$

Løsning av b).

$$6 - |S| - |P| = 6 - 5 = 1$$

$\square$

Problem

a) Kor mange måtar kan ein skrive bokstavane i ordet DISKRET?
b) Kor mange måtar kan ein skrive bokstavane i ordet DISKRET viss bokstavane IS må stå saman.
c) Kor mange måtar er det for å ordne 5 jenter og 5 gutar i ei rad på kino med 10 stoler slik at ingen gutar sitter ved sidan av kvarrandre?

Løsning av a). Vi velger bokstav for bokstave.

Velg en bokstav fra

$$\{D, I, S, K, R, E, T\}$$

for eksempel D.

Da tar vi neste valget fra

$$\{D, I, S, K, R, E, T\} \setminus \{D\}$$

og så videre.

Dermed får vi

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 1 = 7!$$

muligheter. □

Løsning av b). Samme prosedyre som sist, men mengden vi velger fra er

$$\{D, IS, K, R, E, T\}$$

som burde bety 6! muligheter, men vi kan også velge SI siden bokstavene fortsatt stå sammen. Så for hvert ord kan vi bytte plass på I og S som gir et nytt valg for hvert ord som kan lages med metoden over.

Dermed får vi

$$6! \cdot 2$$

muligheter. □

Løsning av c). Hver gutt må ha en jente på hver side, eller en jente på en side viss de sitter på enden, så jentene må plasseres uniformt på følgende måte:

$$F\_F\_F\_F\_F\_$$

eller

$$\_F\_F\_F\_F\_F$$

så vi har to konfigurasjoner. For hver av disse er det 5! måter å arangere jentene.

Da må vi plassere gutane på 5! måter i hvert tilfelle.

Alt i alt

$$2 \cdot 2 \cdot 5! \cdot 5!$$

□

Problem: Oppgave 8

a) Kor mange måtar kan vi trekke 2 ess og 3 kongar fra ein kortstokk med 52 kort?
b) Kor mange løysinger finns det til likninga som oppfyller betingelsen:

$$a + b + c + d + e = 500$$

Betingelse: a, b, c, d, e er heiltal som er minst 10?

Løsning av a). Vi antar at vi bruker en standard kortstokk 4 av hvert kort og at vi ikke betrakter

$$\text{ess}, 1, \text{kong}$$

som å være forskjellig fra

$$\text{ess}, \text{kong}$$

Da får vi

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} = 6 \cdot 4 = 24$$

□

Løsning av b). Siden hver variabel er større en 10 kan vi skrive

$$\begin{aligned} a &= \alpha + 10 \\ b &= \beta + 10 \\ c &= \gamma + 10 \\ d &= \delta + 10 \\ e &= \epsilon + 10 \end{aligned}$$

Da har vi

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 450$$

Antall ikke-negative heltalsløsninger til

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

er

$$\binom{n + k - 1}{n - 1}$$

Så svaret er

$$\binom{454}{4}$$

□