

Oblig 1

Thobias Høivik

Problem: Oppgave 1.4.2

Vis at standardbasen (e_1, \dots, e_n) er en basis for \mathbb{K}^n .

Bevis. La \mathbb{K} være en kropp og la $E = (e_1, \dots, e_n)$ hvor

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

For å vise at E utgjør en basis for \mathbb{K}^n må vi vise at E er lineært uavhengig og spanner \mathbb{K}^n .

Lineær uavhengighet.

Vi ønsker å vise at det ikke finnes en ikke-triviel løsning til

$$\sum_{i=1}^n k_i e_i = \vec{0}$$

hvor $k_i \in \mathbb{K}$. Summen av alle $k_i e_i$ er

$$\sum_{i=1}^n k_i e_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Vi ser at eneste måten

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

er den trivielle løsningen $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Dette betyr at E er lineært uavhengig.

Utspenning av rommet.

Vi ønsker å vise at $\text{span}(E) = \mathbb{K}^n$. Husk at

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mid k_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

Spennrommet $\text{span}(E)$ er underrommet av alle vektorer av formen

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

hvor $k_i \in \mathbb{K}$. Med andre ord:

$$\text{span} E = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mid k_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} = \mathbb{K}^n$$

som ønsket. Med dette har vi vist at E spanner ut hele rommet.

Siden vi har vist at E er lineært uavhengig og spanner ut \mathbb{K}^n konkluderer vi med at E utgjør en basis for \mathbb{K}^n . \square

Problem: Oppgave 1.4.6

(a) La $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasen i \mathbb{K}^n . Vis at

$$[x]_{\mathcal{C}} = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

(b) La U være et vektorrom over \mathbb{K} med en basis $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$. Vis at

$$[u_j]_{\mathcal{B}} = e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Bevis av (a). La \mathbb{K} være en kropp og la $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ være standardbasen i \mathbb{K}^n .

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen av x i basen \mathcal{C} , $[x]_{\mathcal{C}} = x$ for alle $x \in \mathbb{K}^n$.

La $x \in \mathbb{K}^n$. Da har vi at det finnes en unik n -tupplel $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at $x = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n$. Denne tupplel er basisrepresentasjonen $[x]_{\mathcal{C}} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Med standardbasen har vi at

$$\begin{aligned} x &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b_n \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = [x]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise. □

Bevis av (b). La U være et vektorrom over kroppen \mathbb{K} med en basis $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen, $[u_j]_{\mathcal{B}} = e_j$ hvor e_j refererer til den j -ende vektoren i standard basen (vektoren med 0 i alle index-er utenom j , hvor vi har 1) og $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. La u_j være en vilkårlig vektor i basen. Da er u_j også en vektor i U , nemlig vektoren

$$0 \cdot u_1 + \dots + 1 \cdot u_j + \dots + 0 \cdot u_n$$

Da finnes det en n -tupplel $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$ slik at

$$k_1 u_1 + \dots + k_j u_j + \dots + k_n u_n = u_j$$

Dette er basisrepresentasjonen av u_j i basen. Spesifikt, er det tupplel $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, hvor alle oppføringer er 0 utenom den j -ende index-en, som er 1. Dette er $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Med andre ord,

$$[u_j]_{\mathcal{B}} = e_j$$

som ønsket. □

Problem: Oppgave 1.5.2

Vis at

- (a) $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$
- (b) $\dim \mathcal{P} = \infty$
- (c) $\dim C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$

Bevis av (a). La \mathcal{P}^n være rommet av polynomer med koeffisienter i \mathbb{R} .

Vi ønsker å vise at $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$. Vi vet at, viss et vektorrom har en basis (b_1, b_2, \dots, b_n) , så er rommet et endelig-dimensjonelt rom med dimensjon n . La oss se på den kanoniske basisen til \mathcal{P}^n , altså $(1, x, x^2, \dots, x^n)$. Denne basisen består av alle x^i hvor $i = 0, 1, \dots, n$. Med andre ord består den av $|\{0, 1, 2, \dots, n\}| = n + 1$ elementer. Derfor kan vi konkludere at $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$. \square

Bevis av (b). La \mathcal{P} være rommet av alle polynomer med koeffisienter i \mathbb{R} .

Vi ønsker å vise at $\dim \mathcal{P} = \infty$. Vi gjør dette ved å vise at det ikke finnes en endelig basis for \mathcal{P} .

Anta, i søk om kontradiksjon, at det finnes en endelig basis $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ for \mathcal{P} , med n elementer. La d_i være graden av polynomet p_i for $i = 1, \dots, n$. La $d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$. Da er graden av hver p_i mindre enn eller lik d . Hvis vi nå ser på den lineære kombinasjonen

$$q(x) = \sum_{i=1}^n k_i p_i(x), k_i \in \mathbb{K}$$

så får vi at graden av q er mindre enn eller lik d . Så for hvert polynom i spennrommet til B har grad høyst d , men $x^{d+1} \in \mathcal{P}$, som motsier antagelsen vår at det finnes en endelig basis for rommet.

Med det kan vi konkludere at $\dim \mathcal{P} = \infty$. \square

Bevis av (c). La $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ være rommet av kontinuerte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Hvert polynom er kontinuert, så $\mathcal{P} \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Siden $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ har et uendelig-dimensjonelt underrom, kan ikke $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ være endelig-dimensjonelt. Som sagt i Proposisjon 1.4.11 fra boken, for et underrom V av rommet U har vi at $\dim(V) \leq \dim(U)$.

Konklusjon: $\dim(C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})) = \infty$. \square

Problem: Oppgave 1.6.5

(a) Vis at $V \oplus W$ er et vektorrom.

(b) Vis at dersom (v_1, \dots, v_n) er en basis for V og (w_1, \dots, w_m) er en basis for W , er

$$\mathcal{B} := ((v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m))$$

en basis for $V \oplus W$.

(c) Vis at $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$.

Bevis av (a). La \mathbb{K} være en kropp og V, W rom over \mathbb{K} .

Vi ønsker å vise at $V \oplus W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$ er et vektorrom med

$$\text{Null element: } (0_V, 0_W)$$

og

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

og

$$k(u, w) = (ku, kw)$$

for $v, v' \in V, w, w' \in W$ og $k \in \mathbb{K}$.

Vi begynner med å vise at $(V \oplus W, +)$ er en abelsk gruppe. Da må vi vise følgende

1. Assosiativitet av addisjon
2. Identitetselement
3. Inverser
4. Kommutativitet

Merk først at addisjonen, som vi har definert komponentvis, er lukket, siden addisjonsoperasjonene for V og W er lukket.

Assosiativitet.

La $v_1, v_2, v_3 \in V$ og $w_1, w_2, w_3 \in W$.

$$\begin{aligned} ((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) + (v_3, w_3) &= (v_1 + v_2, w_1 + w_2) + (v_3, w_3) \\ &= (v_1 + v_2 + v_3, w_1 + w_2 + w_3) \\ &= (v_1, w_1) + (v_2 + v_3, w_2 + w_3) \\ &= (v_1, w_1) + ((v_2, w_2) + (v_3, w_3)) \end{aligned}$$

Identitetselement.

Vi viser at null-elementet utgjør en identitet for denne gruppen. Vi har, for en vilkårlig $(v, w) \in V \oplus W$

$$(v, w) + (0_V, 0_W) = (0_V, 0_W) + (v, w) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$$

Inverser. For en vilkårlig $(v, w) \in V \oplus W$ har vi inversen

$$(-v, -w) \in V \oplus W$$

$$(v, w) + (-v, -w) = (v - v, w - w) = (0_V, 0_W) = (-v, -w) + (v, w)$$

Kommutativitet.

Addisjonsoperasjonene til V og W er kommutative, så siden addisjon i $V \oplus W$ er komponentvis er addisjonen kommutativ.

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) = (v_2 + v_1, w_2 + w_1) = (v_2, w_2) + (v_1, w_1)$$

Deretter viser vi egenskapene til multiplikasjon, nemlig følgende

1. $0(v, w) = (0_V, 0_W)$
2. $1(v, w) = (v, w)$

Den første egenskapen følger fra hvordan multiplikasjon er definert med $k \in \mathbb{K}$. Det samme gjelder for den andre egenskapen.

Til slutt har vi di distributive egenskapene.

For $k \in \mathbb{K}$ og $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \oplus W$ så har vi

$$\begin{aligned} k((v_1, w_1) + (v_2, w_2)) &= k(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = (k(v_1 + v_2), k(w_1 + w_2)) \\ &= (kv_1 + kv_2, kw_1 + kw_2) = (kv_1, kw_1) + (kv_2, kw_2) \\ &= k(v_1, w_1) + k(v_2, w_2) \end{aligned}$$

Med det har vi vist at multiplikasjon er distributativt over vektor-addisjon.

For $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ og $(v, w) \in V \oplus W$ så har vi

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)(v, w) &= ((k_1 + k_2)v, (k_1 + k_2)w) = (k_1v + k_2v, k_1w + k_2w) \\ &= (k_1v, k_1w) + (k_2v, k_2w) = k_1(v, w) + k_2(v, w) \end{aligned}$$

Med dette kan vi konkludere at multiplikasjon er distributativt over skalar-addisjon.

Da har vi vist at $V \oplus W$ oppfølger alle kravene for å være et vektorrom. □

Bevis av (b). La (v_1, \dots, v_n) være en basis for V og (w_1, \dots, w_m) være en basis for W .

Vi ønsker å vise at

$$\mathcal{B} := ((v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m))$$

er en basis for $V \oplus W$. Vi må da vise at \mathcal{B} er lineært uavhengig og spanner ut $V \oplus W$.

Lineær uavhengighet.

Vi må vise at den eneste løsningen til

$$\sum_{s=1}^{|\mathcal{B}|} k_s b_s = (0_V, 0_W), k_s \in \mathbb{K}, b_s \in \mathcal{B}$$

er den trivielle løsningen.

Summen over blir

$$\begin{aligned}
& k_1(v_1, 0_W) + \cdots + k_n(v_n, 0_W) + k_{n+1}(0_V, w_1) + \cdots + k_{m+n}(0_V, w_m) \\
&= (k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n + k_{n+1} 0_V + \cdots + k_{m+n} 0_V, k_1 0_W + \cdots + k_n 0_W + k_{n+1} w_1 + \cdots + k_{m+n} w_m) \\
&= (k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n, k_{n+1} w_1 + \cdots + k_{m+n} w_m) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n k_i v_i, \sum_{j=1}^m k_j w_j \right)
\end{aligned}$$

Nå sitter vi igjen med en 2-tupple der første er summen av alle v_i i basisen til V , ganget med koeffisient, og andre er summen av alle w_j i basisen til W , ganget med koeffisient. Siden v_i, w_j er elementer av basisen til sine rom, vet vi at den eneste måten

$$\sum_{i=1}^n k_i v_i = 0_V \text{ og } \sum_{j=1}^m k_j w_j = 0_W$$

er når alle koeffisientene er 0; Den trivielle løsningen.

Spenner hele rommet.

Vi vet at for en vilkårlig $v \in V$ så har vi at v er en lineær kombinasjon av (v_1, \dots, v_n) hvor v_i er multiplisert med en $k_i \in \mathbb{K}$ og det samme gjelder for en $w \in W$ med W sin basis og koeffisienter i \mathbb{K} .

Viss $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$ og $w = \sum_{j=1}^m k_j w_j$, så er

$$\begin{aligned}
(v, w) &= \sum_{i=1}^n k_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^m k_j (0_V, w_j) \\
&= \sum_{s=1}^{n+m=|\mathcal{B}|} k_s b_s
\end{aligned}$$

hvor $k_s \in \{k_1, \dots, k_n, k_{n+1}, \dots, k_m\}$ og $b_s = (v_s, 0_W)$ for $s = 1, 2, \dots, n$ og $b_s = (0_V, w_{s-n})$

for $s = n+1, n+2, \dots, n+m$.

Så vi kan, for en vilkårlig $(v, w) \in V \oplus W$, lage (v, w) med en lineær kombinasjon av vektorer i basisen \mathcal{B} . Med andre ord har vi at $\text{span}(\mathcal{B}) = V \oplus W$.

Siden \mathcal{B} er lineært uavhengig og spenner ut $V \oplus W$ så har vi at \mathcal{B} utgjør en basis til dette rommet. \square

Bevis av (c). Som vi peket til i *Bevis av (b)*, så har vi at $|\mathcal{B}| = n + m$. Siden \mathcal{B} utgjør en basis for $V \oplus W$, har vi at $\dim V \oplus W = n + m = \dim V + \dim W$ på grunn av at det er antatt at basisen til V har n elementer og basisen til W , m . \square

Problem: Oppgave 1.8.2

- (a) Vis at vektorrommet \mathbb{K}^n har dimensjon n .
 (b) Vis at vektorrommet $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ har dimensjon mn .

Bevis av (a). La \mathbb{K} være en kropp.

Vi ønsker å vise at $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Betrakt basisen

$$E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$

hvor e_i er tuppelen med 0 alle steder utenom den i -ende index hvor det er en 1. I Oppgave 1.4.2 viste vi at dette utgjør en basis for \mathbb{K}^n . Siden E har n elementer og utgjør en basis for \mathbb{K}^n så har \mathbb{K}^n dimensjon n . \square

Bevis av (b). La \mathbb{K} være en kropp og $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ være rommet av $m \times n$ matriser med koeffisienter i \mathbb{K} .

Vi ønsker å vise at $\dim(M_{m \times n}(\mathbb{K})) = mn$.

La \mathcal{B} være den kanoniske basisen

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

hvor E_{ij} er matrisen hvor med 1 i posisjon (i, j) og 0 i alle de andre. Det er tydelig at $|\mathcal{B}| = m \cdot n$, så hvis den utgjør en basis for $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ kan vi konkludere at rommet er mn -dimensjonelt.

Lineær uavhengighet.

La $c_{ij} \in \mathbb{K}$, for alle $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$c_{11} = \dots = c_{mn} = 0$$

Spanner rommet.

La $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}$$

\mathcal{B} utgjør en basis for rommet og inneholder $m \cdot n$ elementer, derfor er $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ mn -dimensjonelt. \square

Problem: Oppgave 1.8.3

La U være et vektorrom. Bevis at følgende utsagn er ekvivalente:

- (a) $\dim U = \infty$
- (b) for enhver $n \in \mathbb{N}$ finnes et underrom U_n av U med dimensjon n

Bevis. La U være et vektorrom over \mathbb{K} .

Vi ønsker å vise at

$$\dim(U) = \infty \Leftrightarrow \exists U_n \text{ underrom av } U, \quad \dim(U_n) = n$$

\Rightarrow

Basistilfelle: Velg $u_1 \in U, u_1 \neq 0$.

Anta at det er valgt u_1, \dots, u_n lineært uavhengige. u_1, \dots, u_n kan ikke spenne U siden da ville ikke $\dim U = \infty$.

Velg så $u_{n+1} \in U \setminus \{\vec{0}\} \cup \text{span}(u_1, \dots, u_n) \neq \emptyset$. Da er (u_1, \dots, u_{n+1}) lineært uavhengig.

Det finnes da, for hver $n \in \mathbb{N}$ en lineært uavhengig (u_1, \dots, u_n) .

La $U_n = \text{span}(u_1, \dots, u_n)$. U_n er et n -dimensjonelt underrom av U .

\Leftarrow

Anta at for enhver $n \in \mathbb{N}$, så finnes det et underrom $U_n \subset U$ hvor $\dim(U_n) = n$. La oss anta, for en kontradiksjon, at det finnes en endelig basis (b_1, \dots, b_m) . Betrakt underrommet U_{m+1} som nødvendigvis har en basis B' med $m+1$ elementer. B' er, per definisjon, lineært uavhengig, men vi vet at i et m -dimensjonelt vektorrom kan det ikke eksistere en samling med vektorer på størrelse mer enn m , lineært uavhengig. Så B kan ikke utgjøre en basis for U . Vår antagelse at det finnes en endelig basis for U var feil og derfor har vi at $\dim(U) = \infty$.

Siden vi har vist implikasjonen begge veier har vi at de to utsagnene er ekvivalente.

□