

Oblig 3

Thobias Høivik

Jeg antar i oppgave 4.1.2 (a) at det er en skrivefeil, siden når jeg søker opp additivitet i det andre argumentet på nettet får jeg

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

Problem: Oppgave 3.5.8

En diagonalmatrise er en matrise $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ som har ikke-null elementer kun langs diagonalen: $(A)_{ij} = 0$ for alle $i \neq j$. Vis at

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \max_i |(A)_{ii}|$$

Bevis. La $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ være en diagonalmatrise. La $d_i = (A)_{ii}$ ($1 \leq i \leq \min\{m, n\}$ for $m \neq n$).

For enhver $x \in \mathbb{K}^n$ har vi da

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{\ell^2}^2 &= \sum_i |d_i x_i|^2 \\ &\leq (\max_i |d_i|^2) \sum_i |x_i|^2 \\ &= (\max_i |d_i|^2) \|x\|_{\ell^2}^2 \end{aligned}$$

men for enhetsvektorer har vi $\|x\|_{\ell^2}^2 = 1$ så

$$\|Ax\|_{\ell^2} \leq \max_i |d_i|$$

og dette gjelder for enhetsvektorer, dermed

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_{\ell^2} \leq \max_i |d_i|$$

La k være slik at $|d_k| = \max_i |d_i|$. Ta basisvektoren e_k med $\|e_k\|_{\ell^2} = 1$. Da har vi

$$\begin{aligned} \|Ae_k\|_{\ell^2} &= |d_k| \|e_k\|_{\ell^2} \\ &= |d_k| \\ &= \max_i |d_i| \end{aligned}$$

så

$$\|A\|_{\mathcal{L}} \geq \max_i |d_i|$$

Det følger da at

$$\|A\|_{\mathcal{L}} = \max_i |d_i|$$

□

Problem: Oppgave 4.1.2

Bevis følgende:

- (a) Indreproduktet er additivt i andre argument: $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- (b) Indreproduktet er konjugert-homogen i andre argument: $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$
- (c) Dersom $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, er indreproduktet symmetrisk: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

Bevis av (a). La V være et indreproduktrom med $u, v, w \in V$.

$$\begin{aligned}\langle u, v + w \rangle &= \overline{\langle v + w, u \rangle} \\ &= \overline{\langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle} \\ &= \overline{\langle v, u \rangle} + \overline{\langle w, u \rangle} \\ &= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle\end{aligned}$$

Bevis av (b). La V være et indreproduktrom over \mathbb{K} med $u, v \in V$ og $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\langle u, \alpha v \rangle &= \overline{\langle \alpha v, u \rangle} \\ &= \overline{\alpha \langle v, u \rangle} \\ &= \overline{\alpha} \overline{\langle v, u \rangle} \\ &= \overline{\alpha} \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

□

Bevis av (c). La V være et indreproduktrom over \mathbb{R} med $u, v \in \mathbb{R}$.

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

Det komplekse konjugatet er

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

For reelle tall har vi $b = 0$ så det komplekse konjugatet gjør ingenting med reelle tall så

$$\overline{\langle v, u \rangle} = \langle v, u \rangle$$

□

□

Problem: Oppgave 4.1.3

La $u \in U$ være slik at $\langle u, v \rangle = 0$ for alle $v \in U$. Vis at $u = 0$. Er det samme sant dersom $\langle v, u \rangle = 0$ for alle $v \in U$?

Hint: Prøv med $v = u$.

Bevis. La U være et indreproduktrom med $u \in U$ slik som i oppgavebeskrivelsen.

Siden u tilfredsstiller

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in U$$

så krever vi at

$$\langle u, u \rangle = 0$$

siden $u \in U$.

$$\langle u, u \rangle = 0$$

kun dersom $u = 0$.

Dersom $\langle v, u \rangle = 0, \forall v \in U$ så har vi at

$$\overline{\langle v, u \rangle} = \overline{0} = 0$$

så

$$\langle u, v \rangle = 0$$

□

Problem: Oppgave 4.1.5

Vi lar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Vis at følgende er indreprodukter.

(a) Det kanoniske indreproduktet i \mathbb{K}^n er prikkproduktet

$$\langle x, y \rangle_{\mathbb{K}^n} := x \cdot y = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$$

(c) La $\ell^2(\mathbb{K}) := \{(a_1, a_2, \dots) : \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2 < \infty\}$ (se Eksempel 3.1.2).

Vi definerer ℓ^2 -indreproduktet som

$$\langle a, b \rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$$

(d) For $f, g \in C([a, b], \mathbb{K})$ (se Oppgave 1.1.5) definerer vi L^2 -indreproduktet

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

Bevis av (a). La U være et vektorrom over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, med $u, v, w \in U$ og $\alpha \in \mathbb{K}$. Da vil $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}^n}$ gi en skalar i \mathbb{K} siden den er definert til å ta summen av skalar-verdier i \mathbb{K} .

(i)

Vi vet at $\langle u, u \rangle \geq 0$ fordi, i tilfellet der $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tar vi summen av kvadraten av hver komponent i vektoren u (i.e. vi tar summen av verdier som er større enn eller lik 0). I tilfellet der $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ simplifiseres uttrykket til

$$\sum_{k=1}^n a^2 + b^2$$

hvor $u = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, som er ikke-negativt for samme grunn.

Dersom $u = (0, 0, \dots, 0)$ blir summen åpenbart 0. Viss vi antar

$$\sum_{k=1}^n x_k \overline{x_k} = 0$$

vet vi at hver $x_k = 0$ siden $x_k \overline{x_k} \geq 0$ så eneste måten summen er 0 er vist alle $x_k = 0$.

(ii)

$$\begin{aligned} \langle u + v, w \rangle &= \sum_{k=1}^n (u_k + v_k) \overline{w_k} \\ &= \sum_{k=1}^n u_k \overline{w_k} + v_k \overline{w_k} \\ &= \sum_{k=1}^n u_k \overline{w_k} + \sum_{k=1}^n v_k \overline{w_k} \\ &= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u, v \rangle &= \sum_{k=1}^n \alpha u_k \overline{v_k} \\
&= \alpha \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} \\
&= \alpha \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \sum_{k=1}^n u_k \overline{v_k} \\
&= \sum_{k=1}^n \overline{v_k} u_k = \overline{\sum_{k=1}^n v_k \overline{u_k}} \\
&= \overline{\langle v, u \rangle}
\end{aligned}$$

Dermed oppfyller $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{K}^n} : U \times U \rightarrow \mathbb{K}$ egenskapene til et indreprodukt. □

Bevis av (c). La $a, b \in \ell^2(\mathbb{K})$. Da har vi at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \overline{b_k}| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 \right)$$

og de to summene er ved definisjon of $\ell^2(\mathbb{K})$ endelige, så $\langle a, b \rangle$ gir da en endelig verdi.

Videre la også $c \in \ell^2(\mathbb{K})$ og $\delta \in \mathbb{K}$.

i)

$$\begin{aligned}
\langle a, a \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{a_k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)^2 + \operatorname{Im}(a_k)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

siden hver $\operatorname{Re}(a_k)^2 \geq 0$ og $\operatorname{Im}(a_k)^2 \geq 0$.

Viss $a = \mathbf{0}$ får vi $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$. Anta da at $\langle a, a \rangle = 0$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)^2 + \operatorname{Im}(a_k)^2 = 0$$

Som sagt er $\operatorname{Re}(a_k)^2$ og $\operatorname{Im}(a_k)^2$ ikke-negative reelle tall. Den eneste løsningen for at summen av ikke-negative reelle tall skal være lik 0 er den trivielle løsningen hvor $\operatorname{Re}(a_k) = \operatorname{Im}(a_k) = 0$ for alle k . Med andre ord har vi at hver $a_k = 0$ så $a = \mathbf{0}$.

ii)

$$\begin{aligned}
 \langle a + b, c \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \overline{c_k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{c_k} + b_k \overline{c_k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{c_k} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{c_k} \\
 &= \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
 \langle \delta a, b \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta a_k \overline{b_k} \\
 &= \delta \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \\
 &= \delta \langle a, b \rangle
 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
 \langle a, b \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} a_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{a_k}} \\
 &= \overline{\langle b, a \rangle}
 \end{aligned}$$

Dermed er $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et indreprodukt på $\ell^2(\mathbb{K})$. □

Bevis av (c). La $f, g, h \in C([a, b], \mathbb{K})$ med $\alpha \in \mathbb{K}$, indreproduktet

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

Viss g er kontinuerlig på $[a, b]$ så er \overline{g} også kontinuerlig på dette intervallet. Dermed er integralet over $f(t) \overline{g(t)}$ vell-definert.

i)

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

$|f(t)|^2 \in [0, \infty)$ for alle $t \in [a, b]$. Siden $|f(t)|^2$ er kontinuerlig og ikke negativ på $[a, b]$ gir inetgralet en ikke-negativ verdi. Siden vi tar integralet over ikke-negative verdier er eneste løsningen hvor hele integralet blir 0 når $f(t) = 0$ for alle $t \in [a, b]$.

ii)

$$\begin{aligned}
 \langle f + g, h \rangle &= \int_a^b (f(t) + g(t)) \overline{h(t)} dt \\
 &= \int_a^b f(t) \overline{h(t)} + g(t) \overline{h(t)} dt \\
 &= \int_a^b f(t) \overline{h(t)} dt + \int_a^b g(t) \overline{h(t)} dt \\
 &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle
 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\langle \alpha f, g \rangle &= \int_a^b \alpha f(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \alpha \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \alpha \langle f, g \rangle\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \\ &= \int_a^b \overline{g(t)} f(t) dt = \overline{\int_a^b g(t) \overline{f(t)} dt} \\ &= \overline{\langle g, f \rangle}\end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ utgjør et indreprodukt på $C([a, b], \mathbb{K})$.

□

Problem: Oppgave 4.2.2

Vis at L^2 -normen $\|f\|_{L^2} := (\int_a^b |f(t)|^2 dt)^{1/2}$ (se Eksempel 3.1.2 (d)) er normen induisert av L^2 -indreproduktet $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$ (se Oppgave 4.1.5 (d)).

Bevis. Husk at for en f i et indreproduktrom har vi

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

så

$$\begin{aligned} (\langle f, f \rangle)_{L^2}^{1/2} &= \|f\|_{L^2} \\ (\langle f, f \rangle)^{1/2} &= \left(\int_a^b f(t) \overline{f(t)} dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

L^2 -normen er induisert av L^2 -indreproduktet.

□

Problem: Oppgave 4.3.2

Vi betrakter \mathbb{R}^2 med standardindreproduktet. Vis at listene

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ og } \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

er ortonormale. Tegn vektorene i hver av listene og forklar hvordan man kan se at de to listene er ortonormale.

Bevis. La $\langle x, y \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ betegne standardindreproduktet $x \cdot y = \sum_{k=1}^2 x_k y_k$.

\mathcal{B})

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

siden \mathbb{R}^2 er over \mathbb{R} har vi symmetri og trenger derfor ikke sjekke $\langle e_2, e_1 \rangle$ eksplisitt.

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_1 \rangle &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ &= 1 \\ \langle e_2, e_2 \rangle &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Så $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ er ortonormal.

\mathcal{C}) La $f_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ og $f_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ så $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$.

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 \rangle &= 1/\sqrt{2} \cdot -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} \\ &= -1/2 + 1/2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Igjen, vi har symmetri så dette holder for å konkludere at listen er ortogonal.

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_1 \rangle &= 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} \\ &= 1/2 + 1/2 \\ &= 1 \\ \langle f_2, f_2 \rangle &= -1/\sqrt{2} \cdot -1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} \\ &= 1/2 + 1/2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

\mathcal{C} er ortonormal.

□

Problem: Oppgave 4.3.3

Vis at en ortogonal liste (u_1, \dots, u_n) automatisk er lineært uavhengig.

Bevis. Anta at vi har en liste $U = (u_1, \dots, u_n)$ som er ortogonal.

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

og ingen av vektorene er 0.

For at en liste skal være lineært uavhengig trenger vi at

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i = 0$$

kunn har den trivielle løsningen hvor $\alpha_i = 0$ for alle $1 \leq i \leq n$.

La $u_j \in U$ være en vilkårlig vektor.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i &= 0 \\ \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, u_j \right\rangle &= \langle 0, u_j \rangle = 0 \quad \forall u_j \in U \\ \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, u_j \right\rangle &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \alpha_1 \langle u_1, u_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_j \rangle \end{aligned}$$

Siden $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ for alle $i \neq j$ sitter vi igjen med

$$\alpha_j \langle u_j, u_j \rangle$$

Siden ingen u_i kan være 0 har vi at $\alpha_j = 0$. u_j var valgt vilkårlig så da har vi at $\alpha_j = 0$ for alle j . Så $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. □