

# Oblig 1

Thobias Høivik

August 21, 2025

**Problem: Oppgave 1.4.2**

Vis at standardbasen  $(e_1, \dots, e_n)$  er en basis for  $\mathbb{K}^n$ .

*Bevis.* La  $\mathbb{K}$  være en kropp og la  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  hvor

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

For å vise at  $(e_1, \dots, e_n)$  utgjør en basis for  $\mathbb{K}^n$  må vi vise at  $\{e_1, \dots, e_n\}$  er lineært uavhengig og spanner  $\mathbb{K}^n$ .

*Lineær uavhengighet.*

Vi ønsker å vise at det ikke finnes en ikke-triviell løsning til

$$\sum_{i=1}^n k_i e_i = \vec{0}$$

hvor  $k_i \in \mathbb{K}$ . Summen av alle  $k_i e_i$  er

$$\sum_{i=1}^n k_i e_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

Vi ser at eneste måten

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

er den trivielle løsningen  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ . Dette betyr at  $E$  er lineært uavhengig.

*Utspenning av rommet.*

Vi ønsker å vise at  $\text{span}(E) = \mathbb{K}^n$ . Husk at

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mid k_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

Spennrommet  $\text{span}(E)$  er underrommet av alle vektorer av formen

$$k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

hvor  $k_i \in \mathbb{K}$ . Med andre ord:

$$\text{span} E = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \mid k_i \in \mathbb{K}, i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\} = \mathbb{K}^n$$

som ønsket. Med dette har vi vist at  $E$  spanner ut hele rommet.

Siden vi har vist at  $E$  er lineært uavhengig og spanner ut  $\mathbb{K}^n$  konkluderer vi med at  $E$  utgjør en basis for  $\mathbb{K}^n$ .  $\square$

**Problem: Oppgave 1.4.6**

(a) La  $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$  være standardbasen i  $\mathbb{K}^n$ . Vis at

$$[x]_{\mathcal{C}} = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

(b) La  $U$  være et vektorrom over  $\mathbb{K}$  med en basis  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ . Vis at

$$[u_j]_{\mathcal{B}} = e_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

*Bevis av (a).* La  $\mathbb{K}$  være en kropp og la  $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$  være standardbasen i  $\mathbb{K}^n$ .

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen av  $x$  i basen  $\mathcal{C}$ ,  $[x]_{\mathcal{C}} = x$  for alle  $x \in \mathbb{K}^n$ .

La  $x \in \mathbb{K}^n$ . Da har vi at det finnes en unik  $n$ -tupplel  $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  slik at  $x = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n$ . Denne tupplel er basisrepresentasjonen  $[x]_{\mathcal{C}} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ . Med standardbasen har vi at

$$\begin{aligned} x &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + \dots + b_n e_n \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} b_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} b_n \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = [x]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

som er det vi ønsket å vise. □

*Bevis av (b).* La  $U$  være et vektorrom over kroppen  $\mathbb{K}$  med en basis  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ .

Vi ønsker å vise at basisrepresentasjonen,  $[u_j]_{\mathcal{B}} = e_j$  hvor  $e_j$  refererer til den  $j$ -ende vektoren i standard basen og  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . La  $u_j$  være en vilkårlig vektor i basen. Da er  $u_j$  også en vektor i  $U$ , nemlig vektoren

$$0 \cdot u_1 + \dots + 1 \cdot u_j + \dots + 0 \cdot u_n$$

Da finnes det en  $n$ -tupplel  $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$  slik at

$$k_1 u_1 + \dots + k_j u_j + \dots + k_n u_n = u_j$$

Dette er basisrepresentasjonen av  $u_j$  i basen. Spesifikt, er det tupplel  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , hvor alle oppføringer er 0 utenom den  $j$ -ende index-en, som er 1. Dette er  $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Med andre ord,

$$[u_j]_{\mathcal{B}} = e_j$$

som ønsket. □

### Problem 0.1: Oppgave 1.5.2

Vis at

- (a)  $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$
- (b)  $\dim \mathcal{P} = \infty$
- (c)  $\dim \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$

*Bevis av (a).* La  $\mathcal{P}^n$  være rommet av polynomer med koeffisienter i  $\mathbb{R}$ .

Vi ønsker å vise at  $\dim \mathcal{P}^n = n + 1$ . Vi vet at, viss et vektorrom har en basis  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , så er rommet et endelig-dimensjonelt rom med dimensjon  $n$ .

□