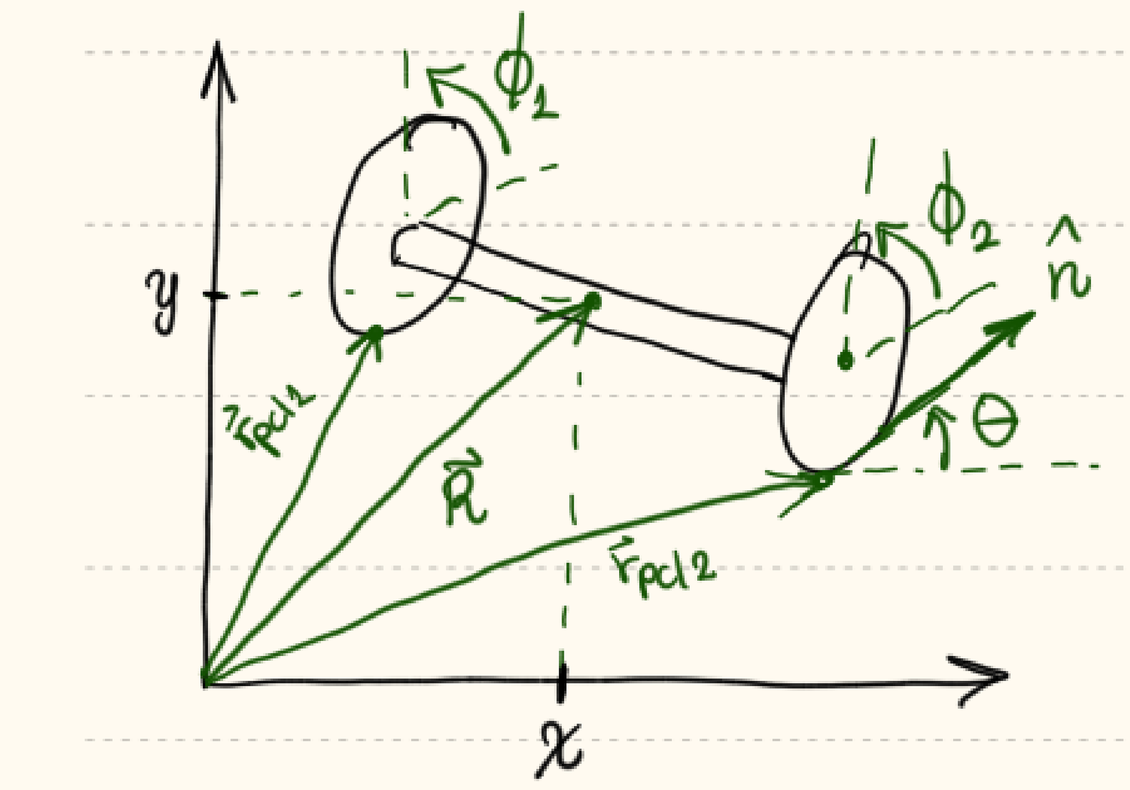
Mecánica Analítica – Proyecto #1: Sistema de dos ruedas bajo un potencial externo.

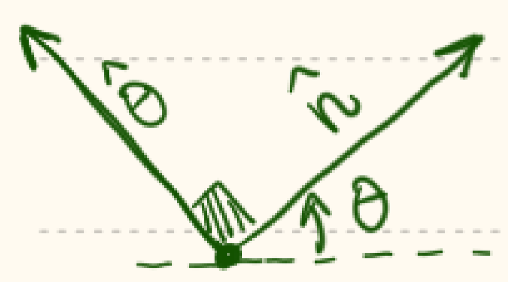
Hecho por: Thomas Andrade Hernández



(•) Este sistema rueda sin deslizar, por lo que cada rueda genera una ecuación de ligadura, ambas de la forma:

$$(i)\ \dot{\vec{r}}_{pcl1} = a\dot{\phi}_1\hat{n} \qquad (ii)\ \dot{\vec{r}}_{pcl2} = a\dot{\phi}_2\hat{n}$$

donde los vectores de los puntos de contacto pueden construirse usando el vector $\hat{\theta}$ paralelo a la barra y perpendicular a la dirección de movimiento del sistema. Así:



- $\hat{n} = (\cos\theta, \sin\theta)$
- $\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

- $\vec{r}_{pcl1} = \vec{R} + b\hat{\theta}$ y • $\vec{r}_{pcl2} = \vec{R} - b\hat{\theta}$

Además de las expresiones (i) y (ii), las ruedas no pueden moverse en el sentido del vector $\hat{\theta}$, lo que sería como deslizar lateralmente, lo que se ve como:

$$(iii)\ \dot{\vec{r}}_{pcl1}\cdot\hat{\theta} = 0 \qquad y \qquad (iv)\ \dot{\vec{r}}_{pcl2}\cdot\hat{\theta} = 0$$

→ Ambas ecuaciones llevan a lo mismo:

- $(\dot{\vec{R}} \pm b\dot{\hat{\theta}})\cdot\hat{\theta} = (\dot{\vec{R}}\cdot\hat{\theta}) = 0$ (1)

Trabajando sobre (i) y (ii) uno puede reescribirlas como:

$$(i)\ \dot{\vec{r}}_{pcl1} = \dot{\vec{R}} + b\dot{\hat{\theta}} = \dot{\vec{R}} - b\dot{\theta}\hat{n} = a\dot{\phi}_1\hat{n} \rightsquigarrow (\dot{\vec{R}}\cdot\hat{n}) - b\dot{\theta} = a\dot{\phi}_1$$

$$(ii)\ \dot{\vec{r}}_{pcl2} = \dot{\vec{R}} - b\dot{\hat{\theta}} = \dot{\vec{R}} + b\dot{\theta}\hat{n} = a\dot{\phi}_2\hat{n} \rightsquigarrow (\dot{\vec{R}}\cdot\hat{n}) + b\dot{\theta} = a\dot{\phi}_2$$

Aquí se pueden sacar dos ecuaciones adicionales:

$$(i)+(ii) \rightsquigarrow 2(\dot{\vec{R}}\cdot\hat{n}) = a(\dot{\phi}_1+\dot{\phi}_2) \rightsquigarrow (\dot{\vec{R}}\cdot\hat{n}) = \frac{a}{2}(\dot{\phi}_1+\dot{\phi}_2) = a\dot{\Phi} \quad (2)$$

$$(i)-(ii) \rightsquigarrow -2b\dot{\theta} = a(\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2) \rightsquigarrow \dot{\theta} = -\frac{a}{2b}(\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2) = -\frac{a}{2b}\dot{\Psi} \quad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtienen las ligaduras del sistema. Notar que de las tres únicamente (3) es holonómica, esto porque permite reducir el número de grados de libertad considerados. Las funciones de ligadura serán:

- $f_1 = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$ (no holonómica)
- $f_2 = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - a\dot{\Phi}$ (no holonómica)
- $f_3 = \dot{\theta} + \frac{a}{2b}\dot{\Psi}$ (Holonómica)

Ahora, para estudiar la dinámica del sistema se trabajará con el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_0 = \underbrace{\frac{1}{2}(\overbrace{M+2m}^{M_T\ (\text{Masa total})})(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}_{\text{E. cinética Traslacional}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_m(\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2)}_{\text{E. cinética Rotacional}} - \underbrace{V(x,y)}_{\text{Potencial Arbitrario}}$$

- Con $\Phi = \frac{\phi_1+\phi_2}{2}$ (Ángulo Medio) y $\Psi = \phi_1 - \phi_2$ (Desfase)

$$(2\dot{\Phi})^2 = (\dot{\phi}_1+\dot{\phi}_2)^2$$
$$+\ (\dot{\Psi})^2 = (\dot{\phi}_1-\dot{\phi}_2)^2$$
$$(2\dot{\Phi})^2 + (\dot{\Psi})^2 = 2(\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2)$$

Usando la ligadura f_3:

$$\frac{(\dot{\phi}_1^2+\dot{\phi}_2^2)}{2} = \frac{1}{4}\left((2\dot{\Phi})^2 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2\dot{\theta}^2\right) \quad (*)$$

Usando (*) todo puede quedar en términos del conjunto reducido de coordenadas $\vec{q} = (x, y, \theta, \Phi)$:

- $\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}M_T(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}I_m\left(4\dot{\Phi}^2 + \left(\frac{2b}{a}\right)^2\dot{\theta}^2\right) - V(x,y)$

$$\hookrightarrow \mathcal{L}_0(\vec{q},\dot{\vec{q}},t) = \frac{1}{2}M_T(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}I_M + \left(\frac{b}{a}\right)^2 I_m\right)}_{\substack{I_{eff} \\ (\text{Momento de inercia efectivo})}}\dot{\theta}^2 + I_m\dot{\Phi}^2 - V(x,y)$$

Usando el principio de D'Alambert y los multiplicadores de Lagrange resulta el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\boxed{x} \rightsquigarrow M_T\ddot{x} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial x} = -\lambda_1\sin\theta + \lambda_2\cos\theta \qquad \boxed{\theta} \rightsquigarrow 2I_{eff}\ddot{\theta} = 0 \rightsquigarrow \dot{\theta} = cte \rightsquigarrow \boxed{\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0}$$

$$\boxed{y} \rightsquigarrow M_T\ddot{y} + \frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \lambda_1\cos\theta + \lambda_2\sin\theta \qquad \boxed{\Phi} \rightsquigarrow 2I_m\ddot{\Phi} = -a\lambda_2$$

Para cualquier potencial $\theta(t)$ sería linealmente.

Para simplificar el problema es posible usar las ligaduras:

- $\frac{d}{dt}f_2 = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta + \underbrace{(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)}_{f_1 = 0}\dot{\theta} - a\ddot{\Phi} = 0 \rightsquigarrow a\ddot{\Phi} = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta$ (■)

Usando $\boxed{\Phi}$

$\hookrightarrow (\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) = -\frac{a^2\lambda_2}{2I_m}$

- $\frac{d}{dt}f_1 = -\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta - \underbrace{(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta)}_{= a\dot{\Phi}}\dot{\theta} = 0 \rightsquigarrow a\dot{\Phi}\dot{\theta} = -\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta$ (■■)

Usando estos resultados es posible encontrar una expresión para λ_2:

- $\boxed{x}\cos\theta + \boxed{y}\sin\theta \rightsquigarrow M_T(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) = -\partial_x V\cdot\cos\theta - \partial_y V\cdot\sin\theta + \lambda_2 = M_T\left(-\frac{a^2\lambda_2}{2I_m}\right)$

Despejando λ_2 → $\boxed{\lambda_2 = (\partial_x V\cdot\cos\theta + \partial_y V\cdot\sin\theta)\left(1 + a^2M_T/2I_m\right)^{-1}}$ $\quad \gamma \underset{def}{:=} \left(1 + a^2M_T/2I_m\right)^{-1}$

$\boxed{\lambda_2}$

Ahora, colocando $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ en términos de $\ddot{\Phi}$ y $\dot{\Phi}$ obtenemos:

- (■)$\cos\theta$ − (■■)$\sin\theta \rightsquigarrow a(\ddot{\Phi}\cos\theta - \dot{\Phi}\dot{\theta}\sin\theta) = \ddot{x}$
- (■)$\sin\theta$ + (■■)$\cos\theta \rightsquigarrow a(\ddot{\Phi}\sin\theta + \dot{\Phi}\dot{\theta}\cos\theta) = \ddot{y}$

$$\ddot{\vec{R}} = a\frac{d}{dt}(\dot{\Phi}\hat{n}) \rightsquigarrow \dot{\vec{R}} = a\dot{\Phi}\cdot\hat{n}$$

Resolviendo para $\dot{\Phi}$ permite desglosar toda la dinámica.

Antes de trabajar con potenciales de diversas formas resulta importante destacar que el valor de la fuerza de restricción del sistema se define como:

$$\boxed{F_R} \rightsquigarrow \vec{F}_R = (\lambda_1\cos\theta - \lambda_2\sin\theta)\hat{x} + (\lambda_1\sin\theta + \lambda_2\cos\theta)\hat{y} \rightsquigarrow \vec{F}_R = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

(•) Dinámica para diferentes potenciales:

1. ($V(x,y) = 0$) Para un potencial nulo es fácil ver que $\lambda_2 = 0$; lo que hace que las ecuaciones de movimiento se vuelvan:

$= 0$ (Para todos los casos)

$$\boxed{\theta} \rightsquigarrow \theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \qquad \boxed{\Phi}\ 2I_m\ddot{\Phi} = 0 \rightsquigarrow \dot{\Phi} = \dot{\Phi}_0 \rightsquigarrow \Phi(t) = \dot{\Phi}_0 t + \cancel{\Phi_0}$$

$$\boxed{x} \rightsquigarrow \dot{x}(t) = a\dot{\Phi}(t)\cos(\theta(t)) \rightsquigarrow x(t) = a\left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\right)\sin(\theta(t)) + x_0$$

$$\boxed{y} \rightsquigarrow \dot{y}(t) = a\dot{\Phi}(t)\sin(\theta(t)) \rightsquigarrow y(t) = -a\left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\right)\cos(\theta(t)) + y_0$$

Importante notar que las trayectorias son completamente circulares, ya que al reorganizar los términos resulta:

$$(\bullet)\ (x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = a^2\left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\right)^2(\sin^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t))) = a^2\left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\right)^2$$

¡Trayectorias Circulares!

Radio^2

2. $V(x,y) = -F_0 y$: Acá el valor de λ_2 ya no es nulo, por lo que la solución no es tan directa a priori:

$$\boxed{\lambda_2} \rightsquigarrow \lambda_2 = \gamma\left(\partial_x(-F_0 y)\cos\theta + \partial_y(-F_0 y)\sin\theta\right) = -\gamma F_0 \sin\theta$$

Resolviendo para $\ddot{\Phi}$:

$$\boxed{\Phi} \rightsquigarrow \ddot{\Phi} = -\frac{a}{2I_m}\lambda_2 = \overbrace{\frac{a\gamma F_0}{2I_m}}^{\alpha}\sin(\theta(t)) \rightsquigarrow \dot{\Phi}(t) = -\frac{\alpha}{\dot{\theta}_0}\cos(\theta(t)) + \dot{\Phi}_0 \rightsquigarrow \boxed{\Phi(t) = -\frac{\alpha}{\dot{\theta}_0^2}\sin(\theta(t)) + \dot{\Phi}_0 t}$$

Para el calculo de $x(t)$ se tiene que:

$$\boxed{x} \rightsquigarrow \dot{x}(t) = a\dot{\Phi}(t)\cos(\theta(t)) = a\left(-\frac{\alpha}{\dot{\theta}_0}\cos(\theta(t)) + \dot{\Phi}_0\right)\cos(\theta(t)) = -\frac{a\alpha}{\dot{\theta}_0}\cos^2(\theta(t)) + a\dot{\Phi}_0\cos(\theta(t))$$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = -\frac{a\alpha}{\dot{\theta}_0}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\theta(t))}{4\dot{\theta}_0}\right) + a\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\sin(\theta(t)) + x_0}$$

$$\boxed{y} \rightsquigarrow \dot{y}(t) = a\dot{\Phi}(t)\sin(\theta(t)) = -\frac{a\alpha}{\dot{\theta}_0}\cos(\theta(t))\sin(\theta(t)) + a\dot{\Phi}_0\sin(\theta(t))$$

$$\hookrightarrow \boxed{y(t) = -\frac{a\alpha}{2\dot{\theta}^2}\sin^2(\theta(t)) - a\left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\right)\cos(\theta(t)) + y_0}$$

3. $\left(V(x,y) = \frac{K}{2}(x^2+y^2)\right)$: Para este caso, el valor para λ_2 resulta en la siguiente expresión:

$$\boxed{\lambda_2} \rightsquigarrow \lambda_2 = \gamma\left(\partial_x\left(\tfrac{K}{2}(x^2+y^2)\right)\cos\theta + \partial_y\left(\tfrac{K}{2}(x^2+y^2)\right)\sin\theta\right) = \gamma K(x\cos\theta + y\sin\theta)$$

Ahora, resolviendo para $\Phi(t)$:

$$\boxed{\Phi} \rightsquigarrow \ddot{\Phi} = -\frac{a}{2I_m}\lambda_2 = -\overbrace{\frac{a\gamma K}{2I_m}}^{\beta}(x\cos\theta + y\sin\theta) \rightsquigarrow \dddot{\Phi} = -\beta(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + \dot{\theta}(-x\sin\theta + y\cos\theta))$$

$$\hookrightarrow \ddddot{\Phi} = -\beta(\underbrace{\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta}_{=a\ddot{\Phi}(t)} + \dot{\theta}\underbrace{(-\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta)}_{=f_1=0}(2) + \cancelto{0}{\ddot{\theta}(\cdots)})$$

$\hookrightarrow$ $\theta(t)$ varía linealmente

La ecuación para $\ddot{\Phi}$ satisface un oscilador armónico $\rightsquigarrow \ddddot{\Phi}(t) = -\underbrace{a\beta}_{\Omega^2}\ddot{\Phi}(t)$

$$\boxed{\Phi} \rightsquigarrow \ddot{\Phi}(t) = \ddot{\Phi}_0\cos(\Omega t + \delta) \rightsquigarrow \dot{\Phi}(t) = \frac{\ddot{\Phi}_0}{\Omega}\sin(\Omega t + \delta) + \dot{\Phi}_0 \rightsquigarrow \Phi(t) = -\frac{\ddot{\Phi}_0}{\Omega^2}\cos(\Omega t + \delta) + \dot{\Phi}_0 t$$

Resolviendo para $x(t)$ y $y(t)$ se llega a las expresiones:

$$\boxed{x} \rightsquigarrow \dot{x}(t) = a\dot{\Phi}(t)\cos(\theta(t)) \rightsquigarrow \dot{x}(t) = a\left(\frac{\ddot{\Phi}_0}{\Omega}\sin(\Omega t + \delta) + \dot{\Phi}_0\right)\cos(\theta(t))$$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = -a\frac{\ddot{\Phi}_0}{2\Omega}\cdot\left(\frac{\cos((\Omega + \dot{\theta}_0)t + \delta)}{\Omega + \dot{\theta}_0} + \frac{\cos((\Omega - \dot{\theta}_0)t + \delta)}{\Omega - \dot{\theta}_0}\right) + a\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\sin(\theta(t)) + x_0}$$

$\hookrightarrow$ Integral calculada con Wolfram

$\boxed{y} \rightsquigarrow \dot{y}(t) = a\dot{\Phi}(t)\sin(\theta(t)) \rightsquigarrow \dot{y}(t) = a\left(\frac{\ddot{\Phi}_0}{\Omega}\sin(\Omega t+\delta) + \dot{\Phi}_0\right)\sin(\theta(t))$

$$\boxed{y(t) = -\frac{a\ddot{\Phi}_0}{2\Omega}\cdot\left(\frac{\sin((\Omega-\dot{\theta}_0)t+\delta)}{\Omega-\dot{\theta}_0} - \frac{\sin((\Omega+\dot{\theta}_0)t+\delta)}{\Omega+\dot{\theta}_0}\right) - a\frac{\dot{\Phi}_0}{\dot{\theta}_0}\cos(\theta(t)) + y_0}$$

↳ Integral calculada con wolfram.