Esercizio 1

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, D = -1$$

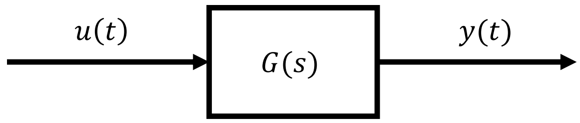
Punto 1: Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.

$$\begin{aligned} G(s) &= C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \\ &= \frac{1}{s\left(s+3\right)+2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \\ &= \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \\ &= \frac{s+3+2}{s^2+3s+2} - 1 \\ &= \frac{s+5-s^2-3s-2}{s^2+3s+2} \\ &= \frac{-s^2-2s+3}{s^2+3s+2} \\ &= -\frac{\left(s+3\right)\left(s-1\right)}{\left(s+2\right)\left(s+1\right)} \end{aligned}$$

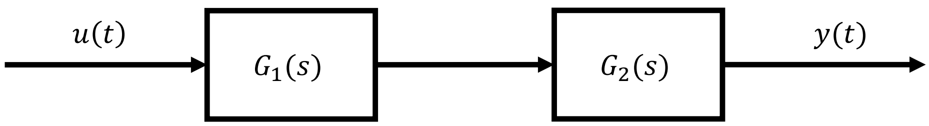
Possiamo osservare che il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore (cioè è pari ad n, l'ordine del sistema) poichè il sistema è proprio ($D \neq 0$).

Punto 2: Dire se il sistema può essere rappresentato come ottenuto dalla connessione in serie di due sottosistemi del primo ordine. In caso affermativo, determinare tali sottosistemi.

Poichè il sistema di partenza del secondo ordine, è possibile suddividerlo in due sistemi del primo ordine nel seguente modo:



$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$



Una possibile scelta di $G_1(s)$ e $G_2(s)$ è la seguente:

$$G_1(s) = -\frac{s-1}{s+2}, G_2(s) = \frac{s+3}{s+1}$$

Punto 3: Per uno dei due sottosistemi trovati al punto precedente, determinare una rappresentazione in variabili di stato.

$G_1(s)$ e $G_2(s)$ sono entrambe funzioni di trasferimento di un sistena dinamico del primo ordine proprio. La rappresentazione di stato di un qualsiasi sistema del primo ordine proprio è:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ y(t) = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

dove $a, b, c, d, x(t)$ ed $y(t)$ sono scalari. La corrispondente funzione di trasferimento è:

$$\begin{aligned} H(s) &= c\,(s-a)^{-1}\,b + d \\ &= \frac{cb + d\,(s-a)}{s-a} \\ &= \frac{ds + (cb - da)}{s-a} \end{aligned}$$

Consideriamo, ad esempio, $G_2(s)$. Per determinare una sua rappresentazione di stato dobbiamo ricavare i valori di a, b, c e d. Eguagliando ad $H(s)$ otteniamo:

$$\frac{s+3}{s+1} = \frac{ds + (cb - da)}{s-a}$$

$$\begin{cases} d = 1 & \text{Termine di primo grado del numeratore} \\ cb - da = 3 & \text{Termine noto del numeratore} \\ -a = 1 & \text{Termine noto del denominatore} \end{cases}$$

Abbiamo un sistema di tre equazioni e quattro incognite. Per ottenere una soluzione univoca dobbiamo fissare b oppure c. Scegliamo, ad esempio, $c = 1$:

$$\begin{cases} d = 1 \\ b - da = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto la seguente rappresentazione di stato per $G_1(s)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + 2u(t) \\ y(t) = x(t) + u(t) \end{cases}$$

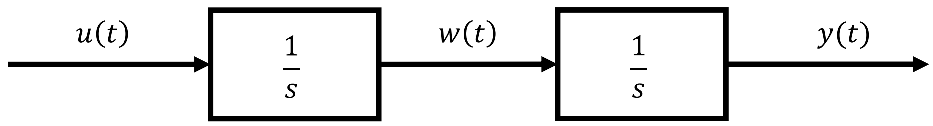
Esercizio 2

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^2}$$

Punto 1: Spiegare perchè tale sistema viene comunemente chiamato "doppio integratore".

Tralasciando inizialmente il guadagno μ, la funzione di trasferimento di cui sopra può essere rappresentata dal seguente schema a blocchi:



Dalla teoria, sappiamo che un semplice integratore è rappresentato dalla funzione di trasferimento $\frac{1}{s}$ (sistema del primo ordine). Dallo schema a blocchi abbiamo:

$$Y(s) = \frac{1}{s}W(s)$$

che, per le proprietà della trasformata di Laplace, nel dominio del tempo corrisponde ad avere:

$$y(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau$$

Procedendo a ritroso nello schema a blocchi abbiamo:

$$W(s) = \frac{1}{s}U(s)$$

che nel dominio del tempo è:

$$w(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau$$

Quindi, l'uscita $y(t)$ sarà uguale a:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t w(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} u(\tau_1)d\tau_1 \right) d\tau_2 \end{aligned}$$

ovvero è pari all'integrale doppio dell'ingresso. Considerando anche il guadagno μ della funzione di trasferimento $G(s)$, abbiamo:

$$y(t) = \mu \int_0^t \left(\int_0^{\tau_2} u(\tau_1)d\tau_1 \right) d\tau_2$$

Possiamo ricavare anche una rappresentazione in variabili di stato per il doppio integratore. Le equazioni di $Y(s)$ e $W(s)$ possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} sY(s) &= W(s) \\ sW(s) &= U(s) \end{aligned}$$

Supponendo $y(0) = w(0) = 0$, per le proprietà della trasformata di Laplace abbiamo:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= w(t) \quad \text{Eq. (a)} \\ \dot{w}(t) &= u(t) \quad \text{Eq. (b)} \end{aligned}$$

Rinominando le variabili in gioco come:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= w(t) \quad \text{Eq. (c)} \\ x_2(t) &= y(t) \quad \text{Eq. (d)} \end{aligned}$$

Otteniamo la seguente rappresentazione in variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) & \text{da Eq. (b) e (c)} \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) & \text{da Eq. (a), (c) e (d)} \\ y(t) = x_2(t) & \text{Eq. (d)} \end{cases}$$

Ritornando alla funzione di trasferimento originale del problema, $G(s) = \frac{\mu}{s^2}$, includiamo il guadagno μ nella rappresentazione di stato del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \\ y(t) = \mu x_2(t) \end{cases}$$

Punto 2: Valutare la stabilità del sistema.

Sappiamo che la stabilità (per un sistema LTI) dipende esclusivamente dalla matrice A. Dal sistema ricavato al punto precedente abbiamo ottenuto:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

che è una matrice triangolare inferiore. I suoi autovalori sono quindi gli elementi sulla diagonale, cioè $s_1 = s_2 = 0$.

Abbiamo più autovalori con parte reale nulla, sicuramente il sistema NON è asintoticamente stabile. Sappiamo che, nel caso di autovalori s_i multipli, se la matrice A fosse diagonalizzabile, allora potremmo valutare la stabilità a partire dalla parte reale di s_i. Nel nostro caso, se così fosse, il sistema risulterebbe stabile semplicemente (siccome abbiamo autovalori con parte reale nulla). Viceversa, se A non fosse diagonalizzabile e avessimo autovalori multipli in $s_i = 0$, allora il sistema risulterebbe instabile. Nel nostro caso, possiamo osservare che A non è diagonalizzabile poichè avremmo una matrice diagonale

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ovvero nulla. Di conseguenza, non esiste alcuna matrice M <u>invertibile</u> tale per cui:

$$\begin{gathered}\tilde{A} = M^{-1}AM \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M\end{gathered}$$

Possiamo quindi concludere che il sistema è instabile.

Approfondimento: Formalmente, per determinare se il sistema è stabile semplicemente oppure instabile, dobbiamo calcolare per ciascun autovalore con parte reale nulla s_i:

- la molteplicità algebrica $m_a(s_i)$: è il numero di volte che l'autovalore annulla l'eq. caratteristica (cioè quante volte si ripete lo stesso autovalore s_i);
- la molteplicità geometrica $m_g(s_i)$: dimensioni dell'autospazio relativo a s_i, cioè il numero di elementi di una qualsiasi base dell'autospazio relativo a s_i.

In particolare:

- se gli autovalori con parte reale nulla sono tali per cui $m_g(s_i) = m_a(s_i)$, allora il sistema è stabile semplicemente;
- altrimenti, se $m_g(s_i) < m_a(s_i)$ (N.B.: per una matrice A quadrata $n \times n$ vale $1 \leq m_g(s_i) \leq m_a(s_i) \leq n$), allora è il sistema è instabile.

(Infatti, se tutti gli autovalori della matrice A hanno molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica, allora A è diagonalizzabile).
Nel nostro caso, abbiamo due autovalori con parte reale nulla e quindi $m_a(0) = 2$.
Per calcolare la molteplicità geometrica possiamo usare la seguente formula:

$$m_g(s_i) = n - \text{rank}\,(A - s_i I)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}m_g(0) &= 2 - \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 - \text{rank}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &\text{La matrice } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ha rango 1 poichè presenta una colonna di zeri} \\ &= 1\end{aligned}$$

Di conseguenza, siamo nel caso $m_g(0) < m_a(0)$ ed il sistema risulta instabile.

Punto 3: Calcolare la risposta all'impulso del sistema.

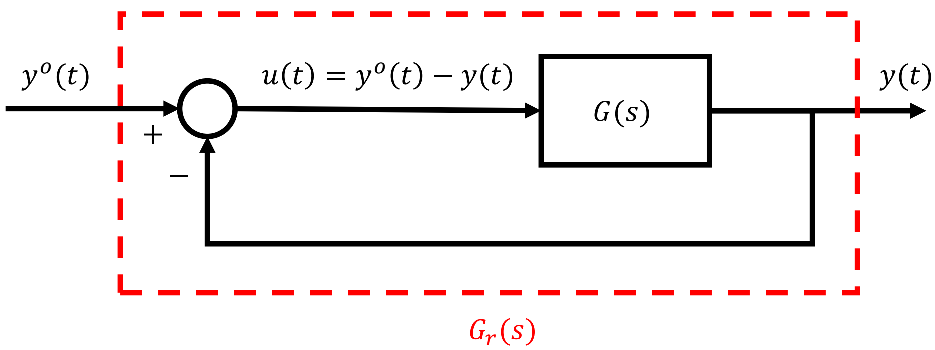
Sappiamo che la funzione di trasferimento $G(s)$ è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso. Di conseguenza, possiamo ricavare la risposta all'impulso antitrasformando $G(s)$. Dalle tabelle delle trasformate notevoli abbiamo:

$$Y(s) = G(s)\underbrace{U(s)}_{=1} = \frac{\mu}{s^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} y(t) = \mu \text{ram}(t)$$

Potevamo raggiungere lo stesso risultato ragionando sul sistema che stiamo analizzando (doppio integratore). Infatti, sappiamo che l'integrale di $u(t) = \text{imp}(t)$ è lo scalino e l'integrale dello scalino è la rampa, quindi $y(t) = \mu \text{ram}(t)$.

Punto 4: Si disegni lo schema a blocchi del sistema che si ottiene retroazionando il sistema descritto da $G(s)$ con la legge di controllo $u(t) = y^o(t) - y(t)$.

Dalla legge di controllo possiamo vedere che il blocco $G(s)$ è stato posto in retroazione negativa e quindi lo schema a blocchi risulta:



Punto 5: Si discuta, al variare del parametro μ, la stabilità del sistema retroazionato considerato al punto precedente.

Sappiamo che la funzione di trasferimento che otteniamo ponendo in retroazione negativa il blocco $G(s)$ è:

$$\begin{aligned} G_r(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\ &= \frac{\frac{\mu}{s^2}}{1+\frac{\mu}{s^2}} \\ &= \frac{\mu}{s^2\left(\frac{s^2+\mu}{s^2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu}{s^2 + \mu}$$

I poli di $G_r(s)$ sono:

$$\begin{aligned} s^2 + \mu = 0 \\ s_{1,2} = \pm\sqrt{-\mu} \end{aligned}$$

Possiamo distinguere due casi:

- Se $\mu > 0$ abbiamo due poli complessi coniugati con parte reale nulla, $s_{1,2} = \pm j\sqrt{\mu}$. Il sistema risulta quindi stabile semplicemente;
- Se $\mu < 0$ abbiamo due poli reali, $s_1 = +\sqrt{-\mu} > 0$ e $s_2 = -\sqrt{-\mu} < 0$. Poichè abbiamo un polo con parte reale positiva, il sistema risulta instabile.

Esercizio 3

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Punto 1: Valutare la stabilità del sistema.

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \det(sI - A) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & -12 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s+10 & +12 \\ -2 & s \end{bmatrix}\right) \\ &= s^2 + 10s + 24 \\ &= (s+6)(s+4) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono quindi $s_1 = -6$ e $s_2 = -4$ che sono entrambi con $\mathrm{Re}(s_i) < 0$. Di conseguenza, il sistema è asintoticamente stabile.

Punto 2: Determinare il valore iniziale, $y(0)$, e finale, $y(\infty)$, della risposta del sistema ad uno scalino di ampiezza pari a -2.

Determiniamo la funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1} B + D \\ &= \frac{1}{(s+6)(s+4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -12 \\ 2 & s+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+6)(s+4)} \begin{bmatrix} s+2 & s-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{s+2+s-2}{(s+6)(s+4)} \\ &= \frac{2s}{(s+6)(s+4)} \end{aligned}$$

Abbiamo un ingresso a scalino del tipo $u(t) = -2\mathrm{sca}(t)$, la sua trasformata di Laplace è:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = -\frac{2}{s}$$

E quindi l'uscita (nel dominio della trasformata di Laplace) è:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ &= -\frac{4s}{s(s+6)(s+4)} \\ &= -\frac{4}{(s+6)(s+4)} \end{aligned}$$

Per ricavare $y(0)$ applichiamo il teorema del valore iniziale:

$$\begin{aligned}
y(0) &= \lim_{s\to\infty} sY(s) \\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{4s}{(s+6)(s+4)} \\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{4s}{s^2+10s+24} \\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{4s}{s^2\left(1+\frac{10}{s}+\frac{24}{s^2}\right)} \\
&= \lim_{s\to\infty} -\frac{4}{s\left(1+\underbrace{\frac{10}{s}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{24}{s^2}}_{\to 0}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Similmente, per ricavare $y(\infty)$, possiamo usare il teorema del valore finale. Dobbiamo prima verificare se sono rispettate le ipotesi del teorema, ovvero $Y(s)$ deve avere solo poli con parte reale negativa oppure nulli. Nel nostro caso, $Y(s)$ ha poli in $p_1 = -6$ e $p_2 = -4$ e di conseguenza possiamo applicare il teorema del valore finale:

$$\begin{aligned}
y(\infty) &= \lim_{s\to 0} sY(s) \\
&= \lim_{s\to 0} -\frac{4s}{s^2+10s+24} \\
&= -\frac{0}{24} \\
&= 0
\end{aligned}$$

N.B.: La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{2s}{(s+6)(s+4)}$ ha tipo $g = -1 < 0$, ovvero contiene un derivatore. Di conseguenza, il valore di regime dell'uscita a fronte di un ingresso costante (a scalino) deve essere per forza nullo. Questo è coerente con quanto abbiamo appena trovato applicando il teorema del valore finale.

Punto 3: Spiegare come si può calcolare il guadagno (generalizzato) della funzione di trasferimento del sistema .

Abbiamo visto che:

$$G(s) = \frac{2s}{(s+6)(s+4)}$$

ha tipo $g = -1$ (uno zero nell'origine). Per calcolare il guadagno generalizzato (che è diverso dal guadagno statico in questo caso $g \neq 0$) usiamo la formula:

$$\begin{aligned}
\mu &= \lim_{s\to 0} s^g G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s^{-1}\frac{2s}{(s+6)(s+4)} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{2}{(s+6)(s+4)} \\
&= \frac{2}{6\cdot 4} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

In questo caso, siccome $g < 0$, è possibile calcolare anche il guadagno statico della funzione di trasferimento come:

$$\begin{aligned} \mu_s &= G(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Punto 1: Calcolare l'espressione della funzione di trasferimento del sistema.

Applichiamo la formula:

$$\begin{aligned} G(s) &= C\left(sI - A\right)^{-1} B + D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s\left(s+1\right)+4} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2+s+4} \begin{bmatrix} s+4 & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2s+8-4s}{s^2+s+4} \\ &= \frac{-2s+8}{s^2+s+4} \end{aligned}$$

Essendo un sistema strettamente proprio ($D = 0$), il grado del numeratore risulta inferiore a quello del denominatore.

Punto 2: Calcolare il valore iniziale $y(0)$ e la derivata iniziale $\dot{y}(0)$ della risposta allo scalino unitario del sistema.

La trasformata di Laplace dello scalino unitario è:

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Utilizziamo il teorema del valore iniziale:

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{s\to\infty} sG(s)U(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} s\frac{-2s+8}{s^2+s+4}\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{-2s+8}{s^2+s+4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Similmente, per ricavare $\dot{y}(0)$:

$$\begin{aligned} \dot{y}(0) &= \lim_{s\to\infty} s \cdot sG(s)U(s) \\ &= \lim_{s\to\infty} s^2\frac{-2s+8}{s^2+s+4}\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to\infty} \frac{s\left(-2s+8\right)}{s^2+s+4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to\infty} \frac{-2s^2+8s}{s^2+s+4} \\
&= -2
\end{aligned}
$$

Punto 3: Calcolare analiticamente la risposta all'impulso del sistema.

Sappiamo che la trasformata di Laplace dell'impulso è:

$$U(s) = 1$$

E quindi:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)U(s) \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo i poli della funzione di trasferimento di $G(s)$:

$$
\begin{aligned}
&s^2+s+4 = 0 \\
&s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \\
&s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{2}
\end{aligned}
$$

Abbiamo due poli complessi coniugati, $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$. Quando ci troviamo in questa situazione (poli complessi coniugati), per ottenere l'antitrasformata mediante lo sviluppo di Heaviside dobbiamo scomporre la funzione di trasferimento nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\beta s + \gamma}{(s-\sigma)^2 + \omega^2} \\
&= \beta \frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{\gamma + \beta\sigma}{\omega} \frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

In questo modo, otteniamo due addendi di cui conosciamo l'antitrasformata:

$$
\begin{aligned}
\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} &\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} e^{\sigma t}\cos(\omega t) \\
\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} &\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} e^{\sigma t}\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Nel nostro caso abbiamo $\sigma = -\frac{1}{2}$ e $\omega = \frac{\sqrt{15}}{2}$ e quindi:

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{\beta s + \gamma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \\
\frac{-2s+8}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} &= \frac{\beta s + \gamma}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}
\end{aligned}
$$

Da cui:

$$
\begin{aligned}
\beta &= -2 \\
\gamma &= +8
\end{aligned}
$$

Separando la funzione di trasferimento nei due addendi abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{-2s+8}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} &= -2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} + \frac{8+2\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} \\
&= -2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} + \frac{18}{\sqrt{15}}\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} \\
&= -2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} + \frac{18}{15}\sqrt{15}\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} \\
&= -2\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} + \frac{6}{5}\sqrt{15}\frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}
\end{aligned}$$

La cui antitrasformata è:

$$y(t) = -2e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + \frac{6}{5}\sqrt{15}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right), \quad t \geq 0$$

Esercizio 5

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

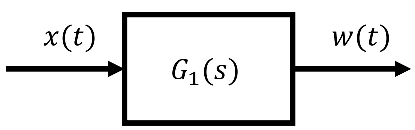
$$
\begin{aligned}
\text{Eq. (a)} \quad & \dot{w}(t) = w(t) + 2x(t) \\
\text{Eq. (b)} \quad & \dot{z}(t) = 4y(t) \\
\text{Eq. (c)} \quad & \dot{y}(t) = -4y(t) + 5\,(w(t) - z(t)) \\
\text{Eq. (d)} \quad & x(t) = u(t) + 10y(t)
\end{aligned}
$$

Punto 1: Si disegni il corrispondente schema a blocchi.

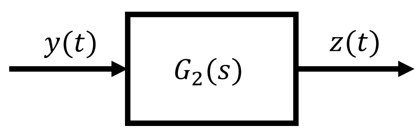
Prendiamo ciascuna equazione e calcoliamo la rispettiva trasformata di Laplace. Sotto l'ipotesi $x(0) = w(0) = z(0) = 0$ (condizione iniziale nulla per definizione di funzione di trasferimento) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\text{Eq. (a)} \quad & sW(s) = W(s) + 2X(s) \\
& G_1(s) = \frac{W(s)}{X(s)} = \frac{2}{s-1} \\
\text{Eq. (b)} \quad & sZ(s) = 4Y(s) \\
& G_2(s) = \frac{Z(s)}{Y(s)} = \frac{4}{s} \\
\text{Eq. (c)} \quad & sY(s) = -4Y(t) + 5\,(W(s) - Z(s)) \\
& G_3(s) = \frac{Y(s)}{W(s) - Z(s)} = \frac{5}{s+4} \\
\text{Eq. (d)} \quad & X(s) = U(s) + 10Y(s)
\end{aligned}
$$

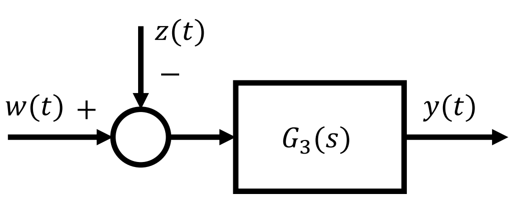
Rappresentiamo ciascuna equazione con il corrispondente schema a blocchi:



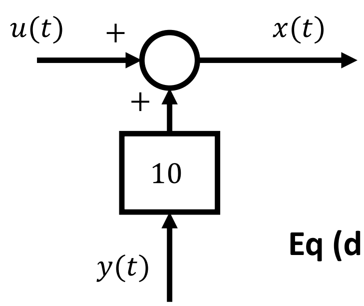
Eq (a)



Eq (b)

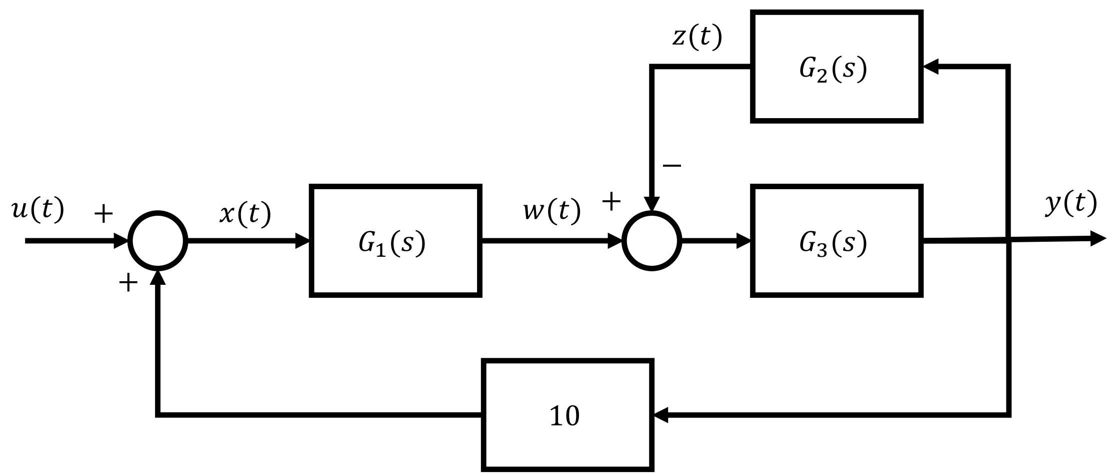


Eq (c)



Eq (d)

Possiamo connettere i quattro schemi a blocchi così ricavati tenendo in considerazione che $u(t)$ è l'ingresso e $y(t)$ è l'uscita:



Punto 2: Dallo schema a blocchi ricavato al punto precedente, si calcoli la funzione di trasferimento tra $u(t)$ e $y(t)$.

Partiamo calcolando la retroazione negativa dei blocchi $G_2(s)$ e $G_3(s)$:

$$\begin{aligned}
G_{23}(s) &= \frac{G_3(s)}{1 + G_3(s)G_2(s)} \\
&= \frac{5}{s+4}\frac{1}{1+\frac{5}{s+4}\frac{4}{s}} \\
&= \frac{5}{s+4}\frac{1}{\frac{s(s+4)+20}{s(s+4)}} \\
&= \frac{5s}{s^2+4s+20}
\end{aligned}$$

Successivamente, calcoliamo la serie tra $G_{23}(s)$ e $G_1(s)$:

$$\begin{aligned}
G_{123}(s) &= G_1(s)G_{23}(s) \\
&= \frac{2}{s-1}\frac{5s}{s^2+4s+20}
\end{aligned}$$

Infine, eseguiamo la retroazione positiva restante:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{G_{123}(s)}{1 - 10 \cdot G_{123}(s)} \\
&= \frac{2}{s-1}\frac{5s}{s^2+4s+20}\frac{1}{1-10\frac{2}{s-1}\frac{5s}{s^2+4s+20}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{10s}{(s-1)\left(s^2+4s+20\right)-100s} \\
&= \frac{10s}{s^3+4s^2+20s-s^2-4s-20-100s} \\
&= \frac{10s}{s^3+3s^2-84s-20}
\end{aligned}
$$

Punto 3: Si dica in quale altro modo si sarebbe potuto calcolare la stessa funzione di trasferimento.

$G(s)$ è ottenibile a partire dalla rappresentazione di stato del sistema dinamico. Rinominiamo le variabili in gioco nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
w(t) &\to x_1(t) \\
z(t) &\to x_2(t) \\
y(t) &\to x_3(t)
\end{aligned}
$$

Inoltre, sostituiamo l'Eq. (d) nell'Eq. (a):

$$
\begin{aligned}
\dot{w}(t) &= w(t) + 2x(t) \\
&= w(t) + 2\left(u(t) + 10y(t)\right) \\
&\text{Rinominando:} \\
\dot{x_1}(t) &= x_1(t) + 20x_3(t) + 2u(t)
\end{aligned}
$$

Mettiamo a sistema la varie equazioni con le variabili propriamente rinominate:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1}(t) = x_1(t) + 20x_3(t) + 2u(t) & \text{Eq. (a)} \\
\dot{x_2}(t) = 4x_3(t) & \text{Eq. (b)} \\
\dot{x_3}(t) = 5x_1(t) - 5x_2(t) - 4x_3(t) & \text{Eq. (c)} \\
y(t) = x_3(t) & \text{Da come abbiamo rinominato}
\end{cases}
$$

Possiamo ricavare le matrici A, B, C e D:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & -5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0
\end{aligned}
$$

E infine possiamo ricavare la funzione di trasferimento usando la formula:

$$
G(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D
$$

Senza fare tutti i calcoli, verifichiamo che almeno il polinomio caratteristico sia corretto:

$$
\begin{aligned}
\pi(s) &= \det\left(sI - A\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} s-1 & 0 & -20 \\ 0 & s & -4 \\ -5 & 5 & s+4 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Possiamo calcolare il determinante di questa matrice 3×3 utilizzando il teorema di Laplace. Scegliendo di "far scorrere" la seconda colonna:

$$\begin{aligned}
\pi(s) &= 0 \cdot (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix} + s \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} s-1 & -20 \\ -5 & s+4 \end{bmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} s-1 & -20 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \\
&= s\,(s-1)\,(s+4) - 100s + 20\,(s-1) \\
&= s^3 + 3s^2 - 4s - 100s + 20s - 20 \\
&= s^3 + 3s^2 - 84s - 20
\end{aligned}$$

Che corrisponde al denominatore della funzione di trasferimento ricavata al punto precedente.

Punto 4: Si dica se il sistema è asintoticamente stabile oppure no.

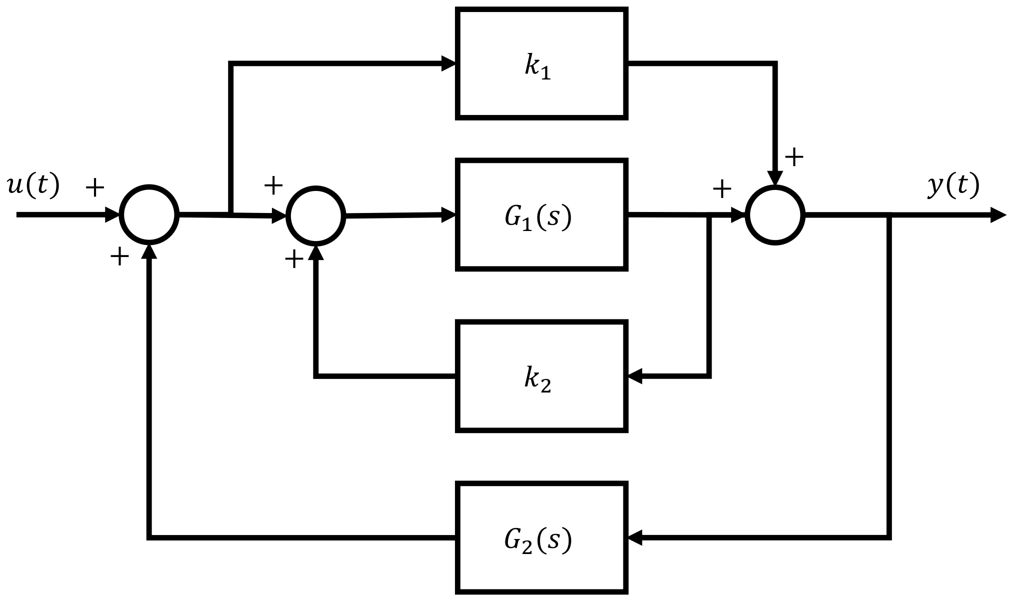
Valutiamo il polinomio caratteristico appena ricavato:

$$\pi(s) = s^3 + 3s^2 - 84s - 20$$

Sappiamo che la condizione necessaria per l'asintotica stabilità di un sistema dinamico è che i coefficienti del suo polinomio caratteristico siano tutti non nulli e concordi di segno (questa condizione è anche sufficiente nel caso $n = 2$). Questa condizione è violata dal sistema che stiamo prendendo in considerazione, di conseguenza non è asintoticamente stabile.

Esercizio 6

Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI SISO rappresentato dal seguente schema a blocchi:



dove $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s}$ **e** $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Punto 1: Si calcoli la funzione di trasferimento $G(s)$ **del sistema con ingresso** $u(t)$ **e uscita** $y(t)$.

Calcoliamo la funzione di trasferimento effettuando semplificazioni progressive dello schema a blocchi. Effettuiamo prima la retroazione positiva tra $G_1(s)$ e k_2:

$$\begin{aligned} G_{1k_2}(s) &= \frac{G_1(s)}{1 - k_2 G_1(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s}}{1 - k_2 \frac{1}{s}} \\ &= \frac{1}{s - k_2} \end{aligned}$$

Successivamente, calcoliamo il parallelo tra il blocco appena trovato e k_1:

$$\begin{aligned} G_{1k_2k_1}(s) &= G_{1k_2}(s) + k_1 \\ &= \frac{1}{s - k_2} + k_1 \\ &= \frac{k_1 s - k_1 k_2 + 1}{s - k_2} \end{aligned}$$

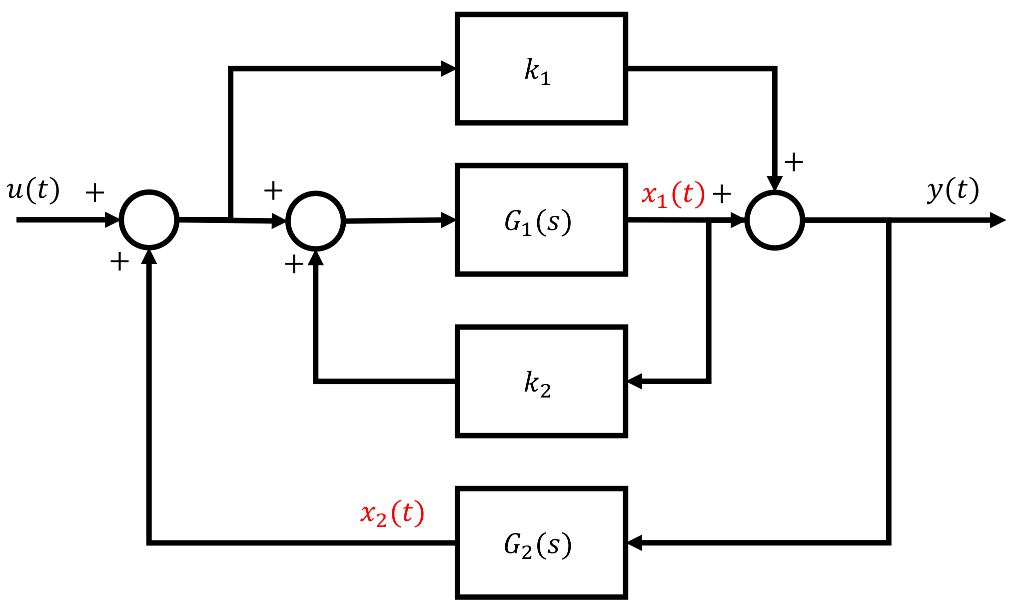
Infine, calcoliamo l'ultima retroazione positiva restante (tra $G_{1k_2k_1}(s)$ e $G_2(s)$):

$$G(s) = \frac{G_{1k_2k_1}(s)}{1 - G_2(s)G_1(s)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k_1 s - k_1 k_2 + 1}{s - k_2} \frac{1}{1 - \frac{1}{s}\frac{k_1 s - k_1 k_2 + 1}{s - k_2}} \\
&= \frac{k_1 s - k_1 k_2 + 1}{s - k_2} \frac{1}{\frac{s(s-k_2) - (k_1 s - k_1 k_2 + 1)}{s(s-k_2)}} \\
&= \frac{s\left(k_1 s - k_1 k_2 + 1\right)}{s\left(s - k_2\right) - \left(k_1 s - k_1 k_2 + 1\right)} \\
&= \frac{k_1 s^2 + \left(-k_1 k_2 + 1\right) s}{s^2 + \left(-k_2 - k_1\right) s + \left(k_1 k_2 - 1\right)}
\end{aligned}
$$

Punto 2: Usando come variabili di stato le uscite dei blocchi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ si determini una rappresentazione di $G(s)$ in termini di variabili di stato.

Rinominiamo le uscite dei blocchi $G_1(s)$ e $G_2(s)$:



Abbiamo $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s}$, ovvero le due funzioni di trasferimento sono integratori. Di conseguenza, l'uscita dei blocchi $G_1(s)$ e $G_2(s)$ sarà l'integrale di quello che hanno in ingresso.
Dallo schema a blocchi abbiamo in ingresso a $G_1(s)$:

$$u(t) + x_2(t) + k_2 x_1(t)$$

E di conseguenza abbiamo:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \int_0^t \left(u(t) + x_2(t) + k_2 x_1(t)\right) dt \\
\dot{x_1}(t) &= u(t) + x_2(t) + k_2 x_1(t)
\end{aligned}
$$

Similmente, se consideriamo $G_2(s)$, abbiamo in ingresso l'uscita $y(t)$:

$$y(t) = x_1(t) + k_1\left(u(t) + x_2(t)\right) \quad \text{Trasformazione d'uscita}$$

E quindi:

$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= \int_0^t (x_1(t) + k_1 u(t) + k_1 x_2(t))\, dt \\
\dot{x_2}(t) &= x_1(t) + k_1 u(t) + k_1 x_2(t)
\end{aligned}
$$

Abbiamo ottenuto le due equazioni di stato e la trasformazione di uscita, possiamo scrivere la rappresentazione di stato:

$$
\begin{cases}
\dot{x_1}(t) = k_2 x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\
\dot{x_2}(t) = x_1(t) + k_1 x_2(t) + k_1 u(t) \\
y(t) = x_1(t) + k_1 x_2(t) + k_1 u(t)
\end{cases}
$$

Punto 3: Spiegare se e come la stabilità del sistema dipenda da k_1 e k_2.

Il denominatore della funzione di trasferimento è:

$$
\pi(s) = s^2 + (-k_2 - k_1)\, s + (k_1 k_2 - 1)
$$

Siccome è di secondo grado, condizione necessaria <u>e sufficiente</u> per l'asintotica stabilità è che $\pi(s)$ abbia coefficienti non nulli e concordi di segno. Di conseguenza, dobbiamo imporre:

$$
\begin{cases}
-k_2 - k_1 > 0 \\
k_1 k_2 - 1 > 0
\end{cases}
$$

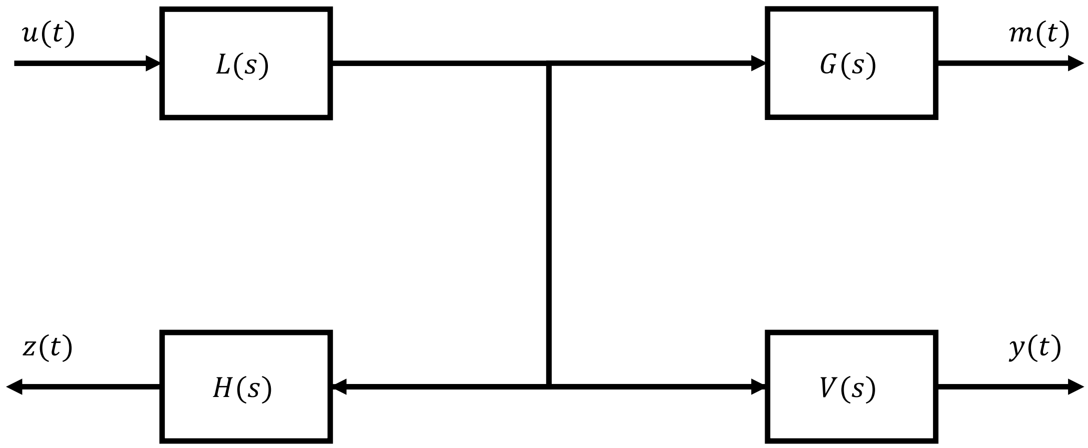
$$
\begin{cases}
k_2 + k_1 < 0 \\
k_1 k_2 > 1
\end{cases}
$$

Punto 4: Si determini il valore di equilibrio di $y(t)$ quando $u(t) = \bar{u} = 5$.

Possiamo osservare che il tipo di $G(s)$ è $g = -1$ (zero nell'origine) quindi, per qualunque valore costante dell'ingresso $\bar{u}$, l'uscita di equilibrio vale $\bar{y} = 0$.

Esercizio 7

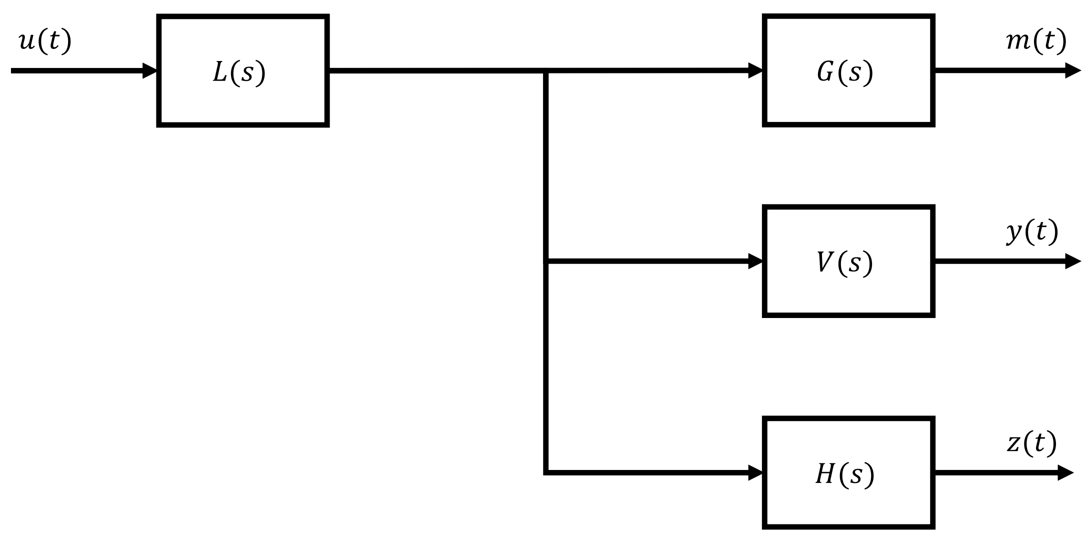
Si consideri il sistema dinamico a tempo continuo LTI rappresentato dallo schema a blocchi:



dove $L(s) = \frac{\mu}{1+s}, G(s) = 3, H(s) = \frac{2+2s}{1+2s}, V(s) = \frac{1}{1+s\tau}$ **e** $\mu, \tau \in \mathbb{R}$.

Punto 1: Dire, motivando la risposta, se il sistema in figura rappresenta un sistema retroazionato.

Possiamo riorganizzare lo schema a blocchi di cui sopra come:



Visto in questo modo, il sistema risulta essere un sistema SIMO (Single Input Multiple Output) dove l'ingresso è $u(t)$ mentre le uscite sono $m(t), z(t)$ e $y(t)$. Possiamo osservare che le uscite non si influenzano in alcun modo tra loro. Di conseguenza, potremmo vedere lo schema a blocchi dell'esercizio come tre sistemi (schemi a blocchi) separati, uno per ciascuna uscita, costituiti dalla serie di $L(s)$ con il rispettivo blocco che precede l'uscita presa in considerazione. Quindi, possiamo concludere che lo schema in figura non rappresenta un sistema retroazionato.

Punto 2: Valutare la stabilità del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ al variare dei parametri μ e τ.

Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{U(s)} &= L(s)V(s) \\
&= \frac{\mu}{1+s}\frac{1}{1+s\tau} \\
&= \frac{\mu}{(1+s)(1+s\tau)}
\end{aligned}
$$

Possiamo osservare che μ non influenza la stabilità del sistema (è il guadagno).
I poli della funzione di trasferimento sono:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -1 \\
s_2 &= -\frac{1}{\tau}
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, il sistema sarà asintoticamente stabile per $\tau > 0$ ed instabile per $\tau < 0$.

Punto 3: Calcolare μ tale che il valore asintotico di $m(t)$ a fronte di una variazione a scalino unitario di $u(t)$ sia pari a 6.

Calcoliamo la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $m(t)$:

$$
\begin{aligned}
F(s) = \frac{M(s)}{U(s)} &= L(s)G(s) \\
&= 3\frac{\mu}{1+s}
\end{aligned}
$$

Il tipo della funzione di trasferimento è $g = 0$. Di conseguenza, l'uscita a regime $\bar{m}$ a fronte di un ingresso costante $\bar{u}$ (a scalino) che l'ha prodotta è pari a:

$$\bar{m} = \mu_s \bar{u}$$

Dove μ_s è il guadagno statico del sistema, in questo caso:

$$
\begin{aligned}
\mu_s &= F(0) \\
&= 3\mu
\end{aligned}
$$

Nel nostro caso $\bar{u} = 1$ e $\bar{m} = 6$, quindi:

$$
\begin{aligned}
6 &= 3\mu \\
\mu &= 2
\end{aligned}
$$