Script

2024-01-16

Exercice 1

a) $X_t = \sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}$

1. Espérance

$\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ puisqu'il s'agit d'un bruit blanc et $\mathbb{E}[\sin(t)]$ varie en fonction de t. Par conséquent, l'espérance de X_t n'est pas constante, car elle dépend de t à travers le terme $\sin(t)$.

2. Autocovariance

La fonction d'autocovariance est définie par $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Pour X_t, nous avons :

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(\sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \sin(t+h) + \varepsilon_{t+h} - 0.2 \times \varepsilon_{t+h-1})$$

Puisque ε_t est un bruit blanc de variance σ^2 et est indépendant des termes précédents et suivants, la seule autocovariance non nulle se produit lorsque $h = 0$ ou $h = \pm 1$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \text{Var}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) \\
\gamma_X(1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - 0.2 \times \varepsilon_t) \\
\gamma_X(-1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - 0.2 \times \varepsilon_{t-2})
\end{aligned}$$

- $h = 0$: $\gamma_X(0) = \text{Var}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + 0.04\sigma^2 = 1.04\sigma^2$ (car $\sigma^2 = 1$ dans les simulations).
- $h = 1$ ou $h = -1$: $\gamma_X(1) = \gamma_X(-1) = -0.2\sigma^2$.

La dépendance de $\gamma_X(h)$ sur t (due à la présence de $\sin(t)$ et $\sin(t+h)$) indique que le processus n'est pas stationnaire au second ordre.

3. Différenciation

Pour le rendre stationnaire, nous allons différencier le processus à l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
\Delta X_t &= X_t - X_{t-1} \\
\Delta X_t &= (\sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) - (\sin(t-1) + \varepsilon_{t-1} - 0.2 \times \varepsilon_{t-2}) \\
\Delta X_t &= (\sin(t) - \sin(t-1)) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) - 0.2 \times (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})
\end{aligned}$$

- L'espérance :

L'espérance du processus différencié, $E[\Delta X_t]$, est la différence entre les espérances des termes à t et $t-1$. Étant donné que l'espérance de ε_t est 0, l'espérance de ΔX_t devient :

$$E[\Delta X_t] = E[\sin(t) - \sin(t-1)]$$

- L'autocovariance :

b) $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

1. Espérance

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0 - 0 = 0$$

2. Autocovariance

- Pour $h = 0$:

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+0}) \\ &= \text{Var}(X_t) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_t) + \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \\ &= 2\sigma^2\end{aligned}$$

- Pour $h = 1$:

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+1}) \\ &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) \\ &= \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) - \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) - \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1}) + \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)\end{aligned}$$

D'après la définition du bruit blanc, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s$, alors :

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= 0 - \text{Var}(\varepsilon_t) - 0 + 0 \\ &= -\text{Var}(\varepsilon_t) \\ &= -\sigma^2\end{aligned}$$

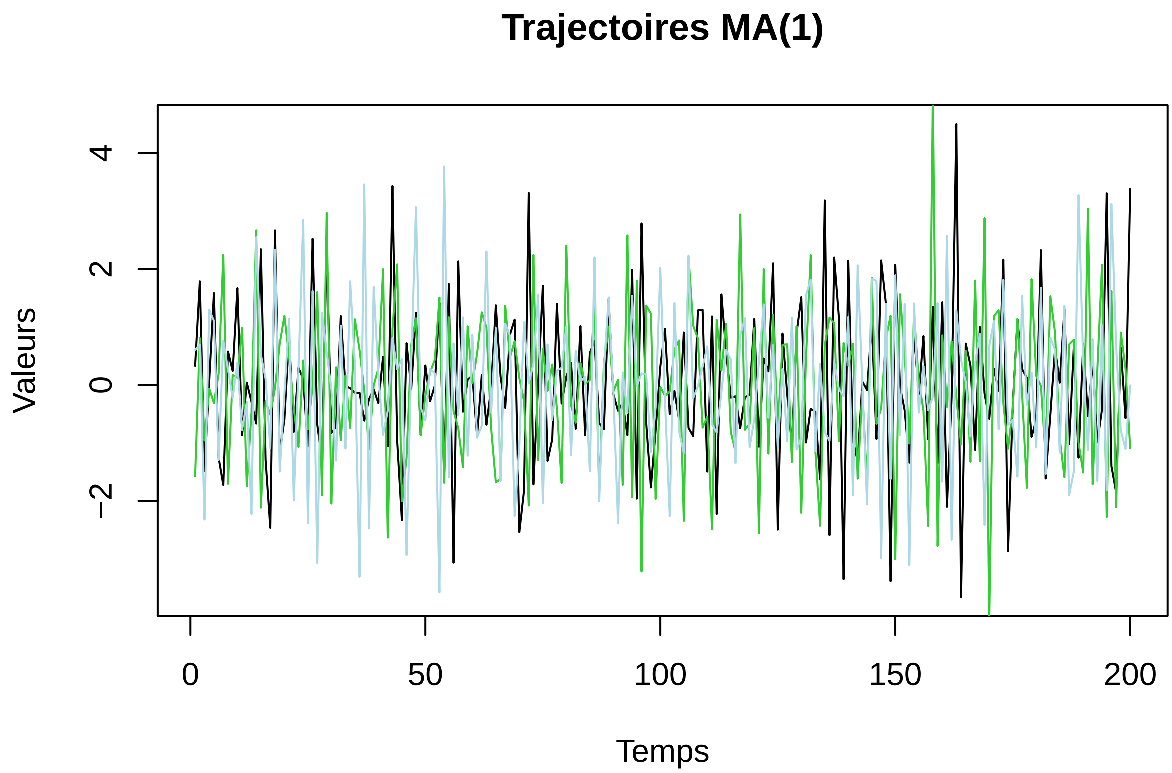
- Pour $h > 1$ ou $h < -1$: Les termes sont indépendants, donc $\gamma_X(h) = 0$.

Le processus $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ est stationnaire au second ordre car son espérance est constante et sa fonction d'autocovariance ne dépend que de h et non de t.

3. Forme canonique

Le processus, sous sa forme canonique, s'écrit comme : $X_t = (1 - B)\varepsilon_t$ correspondant à un un MA(1).

```r
set.seed(123)
b1 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200)
b2 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200)
b3 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200)

plot(b1, type="l", col="black", main="Trajectoires MA(1)", xlab = "Temps", ylab = "Valeurs")
lines(b2, col="limegreen")
lines(b3, col="lightblue")
```



c) $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ **Je suis vraiment pas sur de ça, j'arrive pas à trouver la forme canonique donc faut probablement le différencier et c'est probablement faux**

1. Espérance

$E[X_t] = E[A]\cos(\omega t) + E[B]\sin(\omega t) = 0$

2. Autocovariance

$$\begin{aligned}\gamma(s,t) &= E\left[(A\cos(\omega s) + B\sin(\omega s))(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\right]\\ &= E\left[A^2\cos(\omega s)\cos(\omega t) + AB\cos(\omega s)\sin(\omega t) + AB\sin(\omega s)\cos(\omega t) + B^2\sin(\omega s)\sin(\omega t)\right]\end{aligned}$$

Étant donné que A et B sont indépendantes, on peut simplifier cette expression en utilisant $E[A^2]$, $E[B^2]$ et le fait que $E[AB] = E[A]E[B] = 0$:

$$\gamma(s,t) = E[A^2]\cos(\omega s)\cos(\omega t) + E[B^2]\sin(\omega s)\sin(\omega t)$$

Puisque A et B ont une variance finie, disons σ_A^2 et σ_B^2 respectivement, nous pouvons remplacer $E[A^2]$ et $E[B^2]$ par leurs variances :

$$\gamma(s,t) = \sigma_A^2\cos(\omega s)\cos(\omega t) + \sigma_B^2\sin(\omega s)\sin(\omega t)$$

Nous pouvons utiliser l'identité trigonométrique pour les produits de cosinus et de sinus :

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

En appliquant ces identités à notre expression, nous obtenons :

$$\gamma(s,t) = \sigma_A^2 \cdot \frac{1}{2}[\cos(\omega s - \omega t) + \cos(\omega s + \omega t)] + \sigma_B^2 \cdot \frac{1}{2}[\cos(\omega s - \omega t) - \cos(\omega s + \omega t)]$$

En simplifiant cette expression, les termes en $\cos(\omega s + \omega t)$ se soustraient mutuellement, laissant :

$$\gamma(s,t) = \frac{1}{2}(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)\cos(\omega(t-s))$$

Le processus $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ est stationnaire au second ordre, car son espérance est constante (et égale à zéro) et sa fonction d'autocovariance dépend uniquement de la différence entre les temps s et t, et non des temps individuels.

3. Forme canonique

d) $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \varepsilon_t$

1. Espérance :

$$\mathbb{E}[X_t] = 2\mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$$
$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_t] + 0$$

Le processus est égale à lui-même et donc constant dans le temps.

2. Fonction d'autocovariance

3. Forme canonique

Le modèle peut se réécrire sous sa forme canonique comme : $(1 - 2B + B^2)X_t = \varepsilon_t$, correspondant à un AR(2).

On cherche les racines du polynome caractéristique $1 - 2r + r^2 = 0$:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dans notre cas, $a = 1$, $b = -2$ et $c = 1$. Les racines seront donc :

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$
$$r = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$r = \frac{2}{2}$$
$$r = 1$$

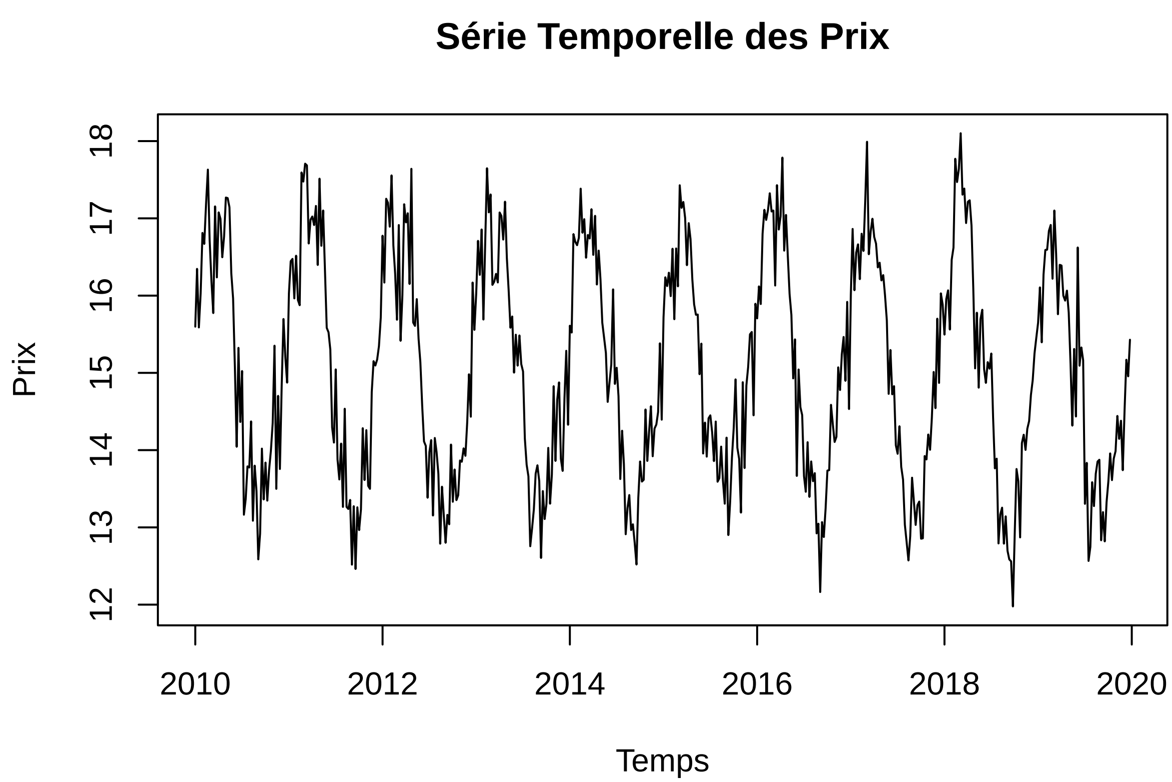
Le processus n'est donc pas stationnaire puisque les racines sont sur le cercle unité.

e) $X_t - 4X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1}$

Exercice 2

a) Représentation graphique de la série p1

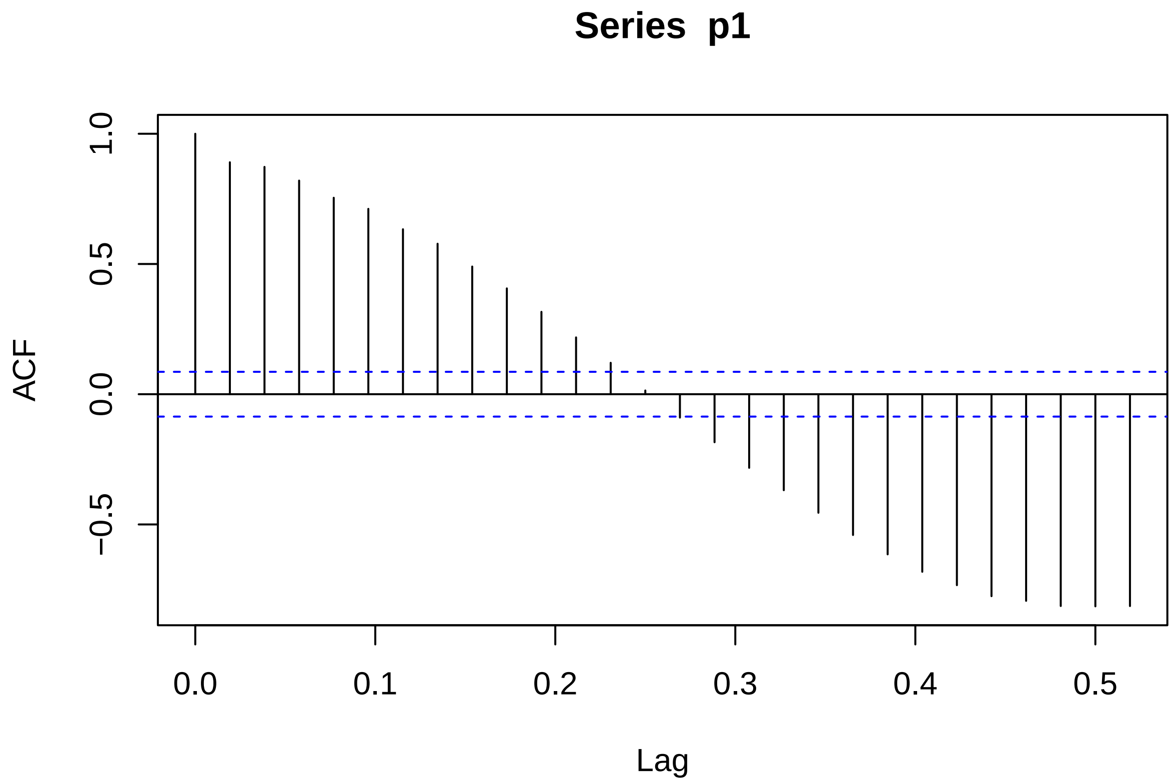
```r
source("prix.R")

plot(p1, type = "l", main = "Série Temporelle des Prix", xlab = "Temps", ylab = "Prix")
```



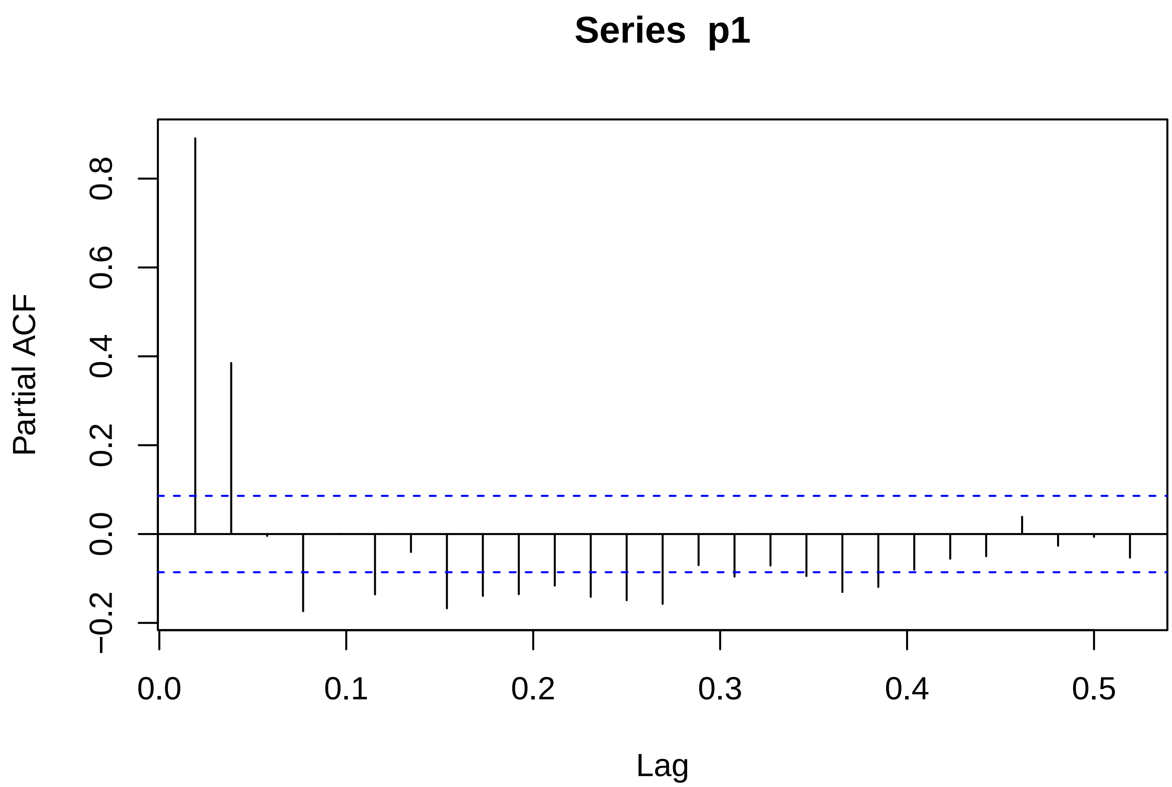
D'après le graphique, on peut émettre l'hypothèse que la série est stationnaire en moyenne et en variance puisque la moyenne est constante et la variance homoscédastique. De plus, la covariance entre 2 points semble constante, l'écart entre chaque fluctuation est le même et laisse penser à une saisonalité.

b) Fonctions d'autocorrélation acf et pacf

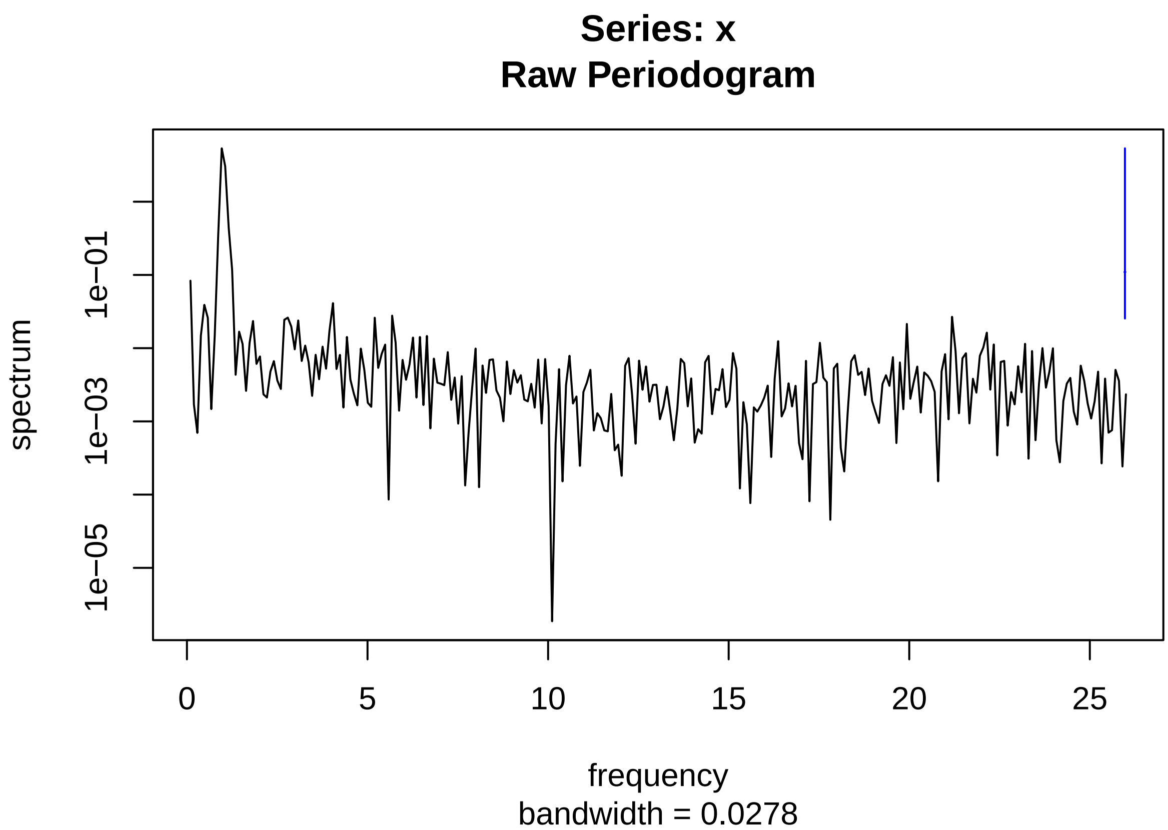
```r
acf(p1)
```



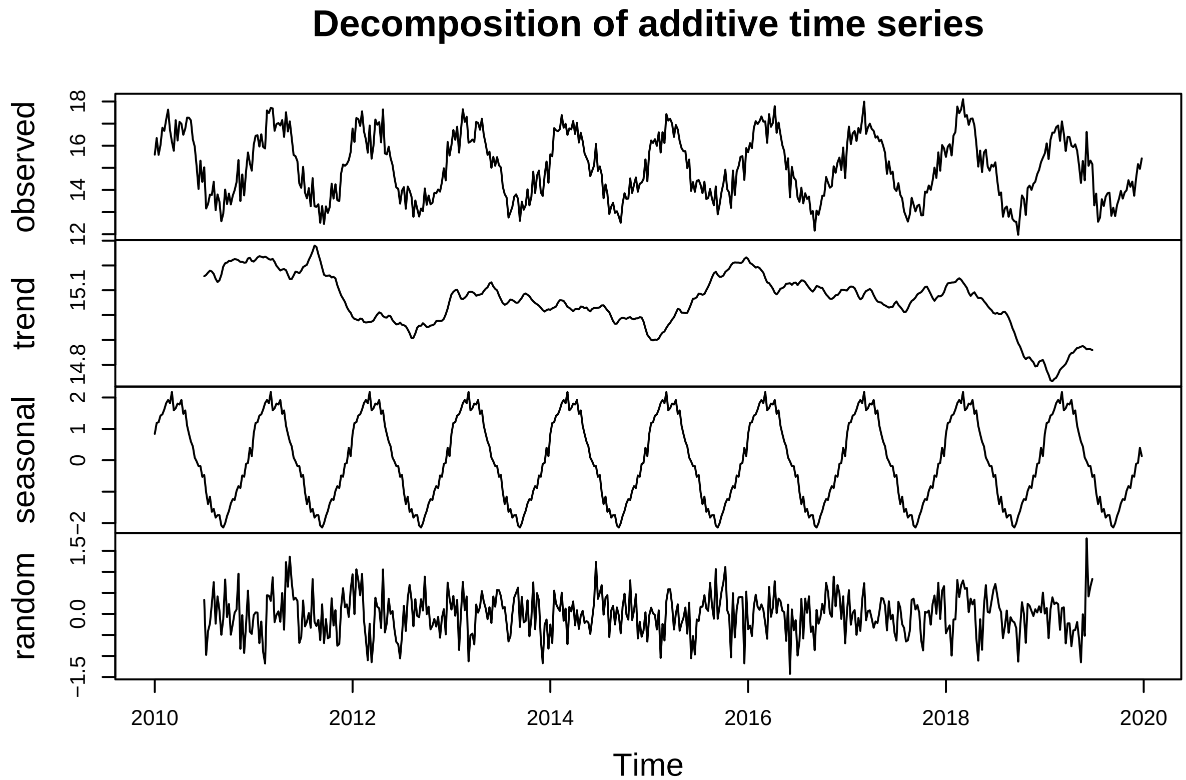

```r
pacf(p1)
```




```
spectrum(p1)
```




```r
p1_decomp <- decompose(p1)
plot(p1_decomp)
```



c) $X_t = m + A\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + B\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + Y_t$

- X_t représente la valeur de la série temporelle au temps t.
- m est la moyenne de la série.
- A et B sont les amplitudes des composantes sinusoïdales et cosinusoïdales, respectivement.
- T est la période de la composante saisonnière. Pour des données hebdomadaires sur plusieurs années, T pourrait être 52, représentant le nombre de semaines par an.
- Y_t est le terme d'erreur ou la composante non-périodique.

On choisit donc un T de 52.