

Script

2024-01-16

Exercice 1

a) $X_t = \sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}$

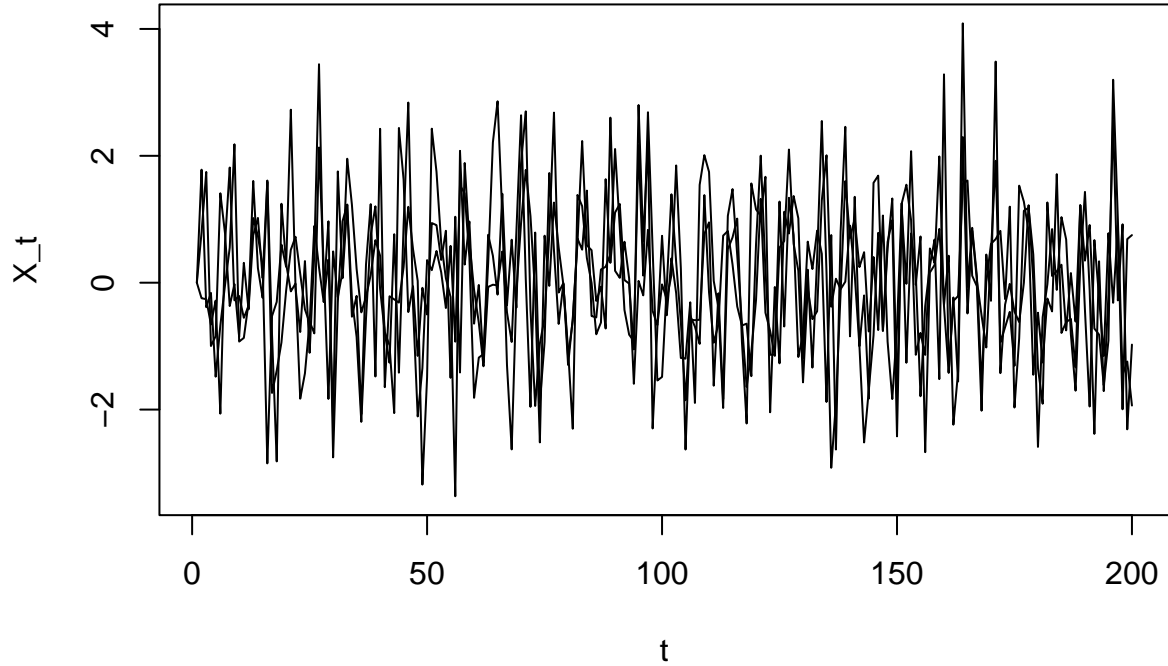
$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ puisqu'il s'agit d'un bruit blanc et $\mathbb{E}[\sin(t)]$ varie en fonction de t . Par conséquent, l'espérance de X_t n'est pas constante, car elle dépend de t à travers le terme $\sin(t)$. Ainsi nous n'avons pas besoin de la fonction d'autocovariance puisqu'on sait que le processus n'est pas stationnaire.

```
set.seed(123)
n <- 200

trajectoire_a <- function(n) {
  epsilon <- rnorm(n)
  X <- rep(0, n)
  for (t in 2:n) {
    X[t] <- sin(t) + epsilon[t] - 0.2 * epsilon[t - 1]
  }
  return(X)
}

X1 <- trajectoire_a(n)
X2 <- trajectoire_a(n)
X3 <- trajectoire_a(n)

plot(X1, type = "l", ylim = range(c(X1, X2, X3)), ylab = "X_t", xlab = "t")
lines(X2)
lines(X3)
```



a) $X_t = \sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ puisqu'il s'agit d'un bruit blanc et $\mathbb{E}[\sin(t)]$ varie en fonction de t . Par conséquent, l'espérance de X_t n'est pas constante, car elle dépend de t à travers le terme $\sin(t)$.

La fonction d'autocovariance est définie par $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Pour X_t , nous avons :

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(\sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \sin(t+h) + \varepsilon_{t+h} - 0.2 \times \varepsilon_{t+h-1})$$

Puisque ε_t est un bruit blanc de variance σ^2 et est indépendant des termes précédents et suivants, la seule autocovariance non nulle se produit lorsque $h = 0$ ou $h = \pm 1$. Cela donne :

$$\begin{aligned}\gamma_X(0) &= \text{Var}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) \\ \gamma_X(1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - 0.2 \times \varepsilon_t) \\ \gamma_X(-1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - 0.2 \times \varepsilon_{t-2})\end{aligned}$$

Calculons ces valeurs :

- Pour $h = 0$, $\gamma_X(0) = \text{Var}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + 0.04\sigma^2 = 1.04\sigma^2$ (car $\sigma^2 = 1$ dans les simulations).
- Pour $h = 1$ ou $h = -1$, $\gamma_X(1) = \gamma_X(-1) = -0.2\sigma^2$.

La dépendance de $\gamma_X(h)$ sur t (due à la présence de $\sin(t)$ et $\sin(t+h)$) indique que le processus n'est pas stationnaire au second ordre.

Pour le rendre stationnaire, nous allons différencier le processus à l'ordre 1.

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \quad \Delta X_t = (\sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) - (\sin(t-1) + \varepsilon_{t-1} - 0.2 \times \varepsilon_{t-2}) \quad \Delta X_t = (\sin(t) - \sin(t-1)) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) - 0.2 \times (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})$$

- L'espérance :

L'espérance du processus différencié, $E[\Delta X_t]$, est la différence entre les espérances des termes à t et $t-1$. Étant donné que l'espérance de ε_t est 0, l'espérance de ΔX_t devient :

$$E[\Delta X_t] = E[\sin(t) - \sin(t-1)] = 0$$

b) $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0 - 0 = 0$$

La fonction d'autocovariance est définie comme : $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- Pour $h = 0$:

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+0}) \\ &= \text{Var}(X_t) \\ &= \text{Var}(\varepsilon_t) + \text{Var}(\varepsilon_{t-1}) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 \\ &= 2\sigma^2 \end{aligned}$$

- Pour $h = 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_X(1) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+1}) \\ &= \text{Cov}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) \\ &= \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) - \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) - \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1}) + \text{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t) \end{aligned}$$

D'après la définition du bruit blanc, $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, $t \neq s$, alors :

$$\begin{aligned} \gamma_X(1) &= 0 - \text{Var}(\varepsilon_t) - 0 + 0 \\ &= -\text{Var}(\varepsilon_t) \\ &= -\sigma^2 \end{aligned}$$

- Pour $h > 1$ ou $h < -1$: Les termes sont indépendants, donc $\gamma_X(h) = 0$.

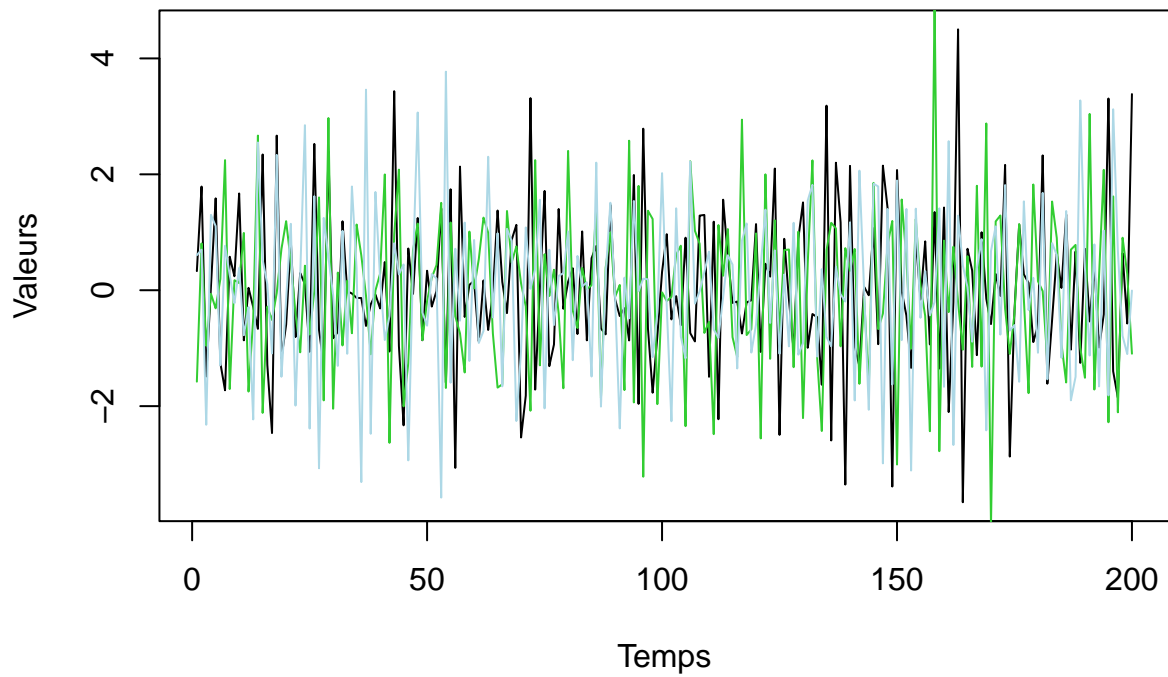
Le processus $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ est stationnaire au second ordre car son espérance est constante et sa fonction d'autocovariance ne dépend que de h et non de t .

Sous sa forme canonique $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$, le processus s'écrit comme : $X_t = (1 - B)\varepsilon_t$ correspondant à un ARMA(0,1) ou un MA(1).

```
set.seed(123)
b1 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200, sd = 1)
b2 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200, sd = 1)
b3 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200, sd = 1)

plot(b1, type="l", col="black", main="Trajectoires MA(1)", xlab = "Temps", ylab = "Valeurs")
lines(b2, col="limegreen")
lines(b3, col="lightblue")
```

Trajectoires MA(1)

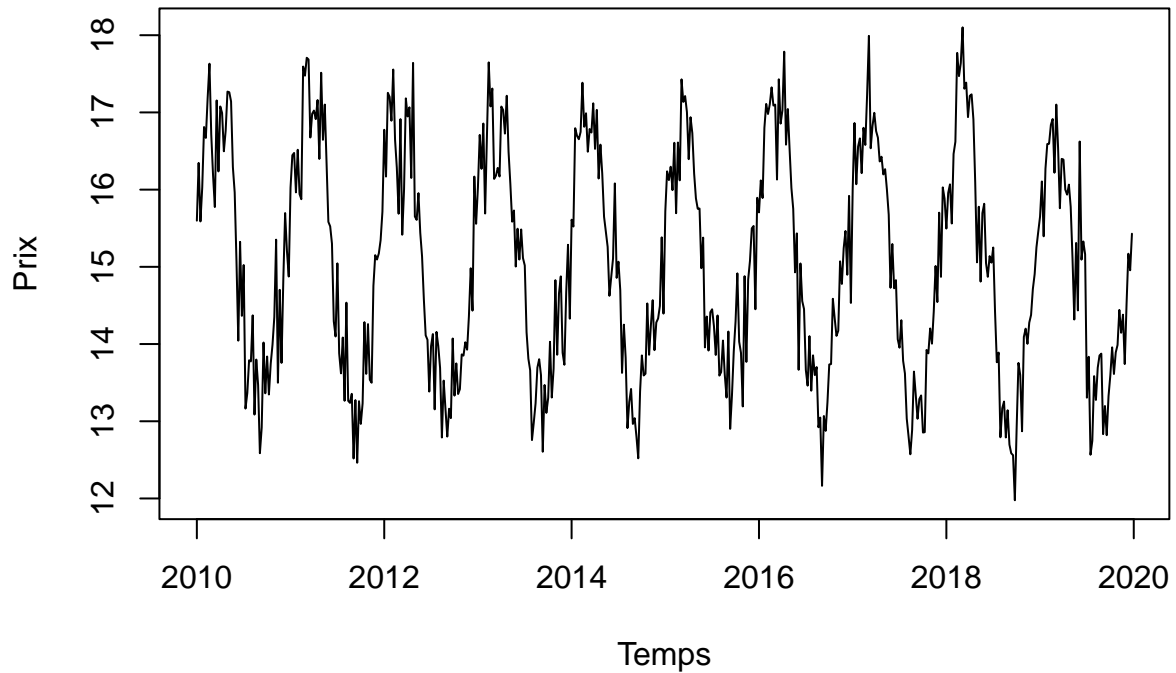


Exercice 2

a) Représentation graphique de la série p1

```
source("prix.R")  
  
plot(p1, type = "l", main = "Série Temporelle des Prix", xlab = "Temps", ylab = "Prix")
```

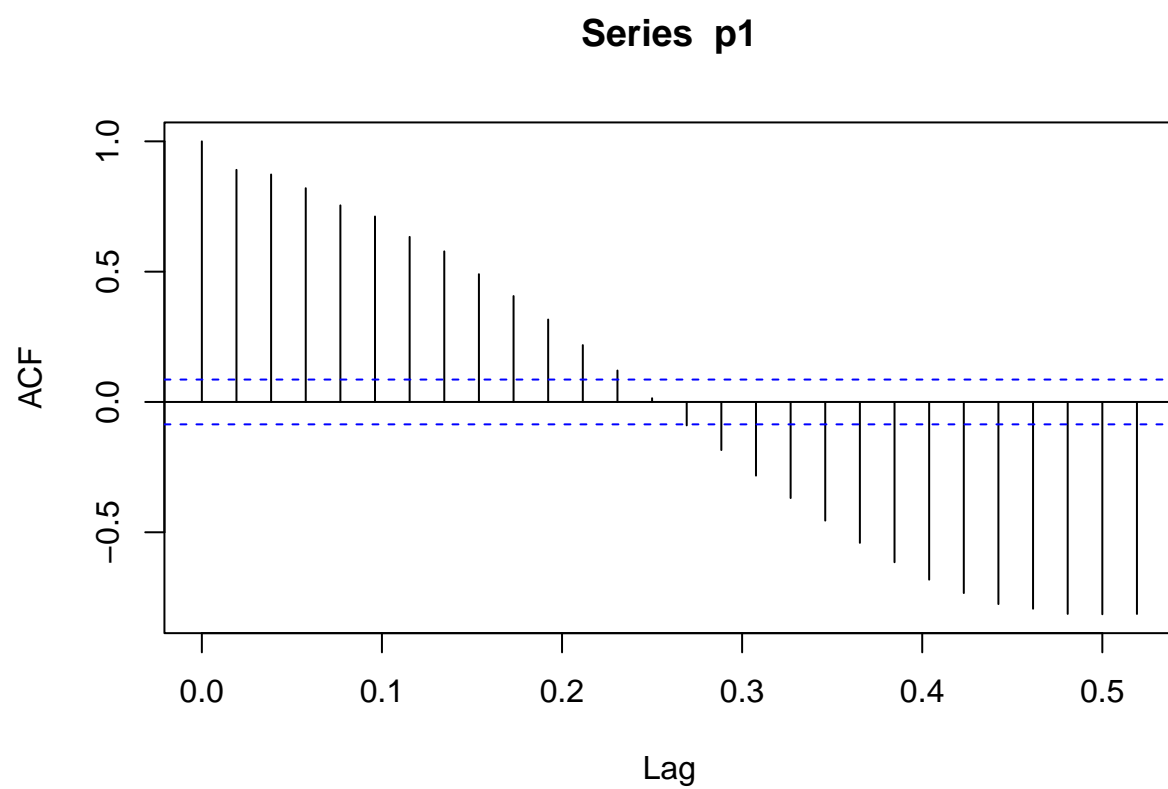
Série Temporelle des Prix



D'après le graphique, on peut émettre l'hypothèse que la série est stationnaire en moyenne et en variance puisque la moyenne est constante et la variance homoscédastique. De plus, la covariance entre 2 points semble constante, l'écart entre chaque fluctuation est le même et laisse penser à une saisonnalité.

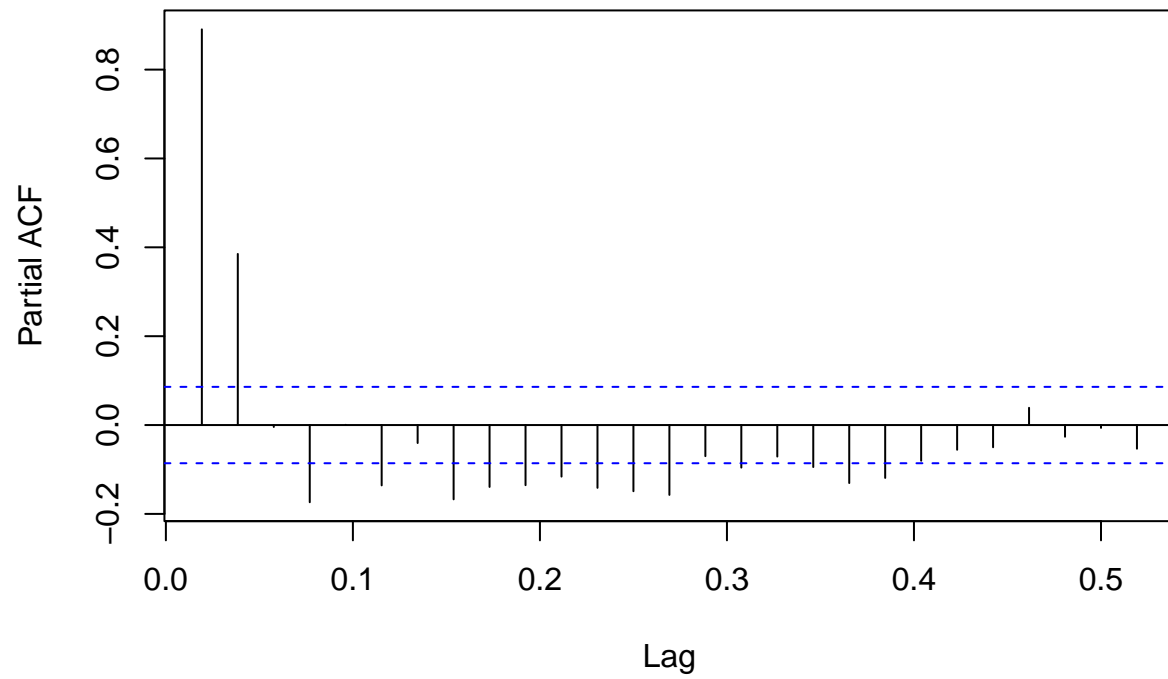
b) Fonctions d'autocorrélation acf et pacf

```
acf(p1)
```



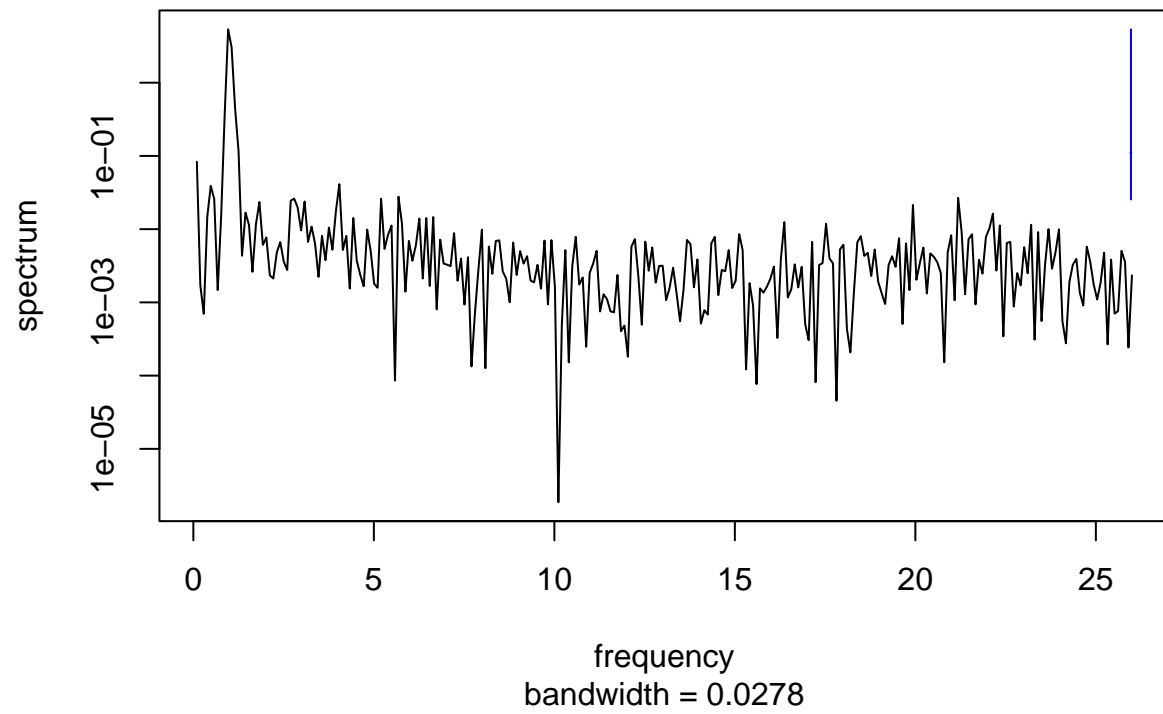
```
pacf(p1)
```

Series p1



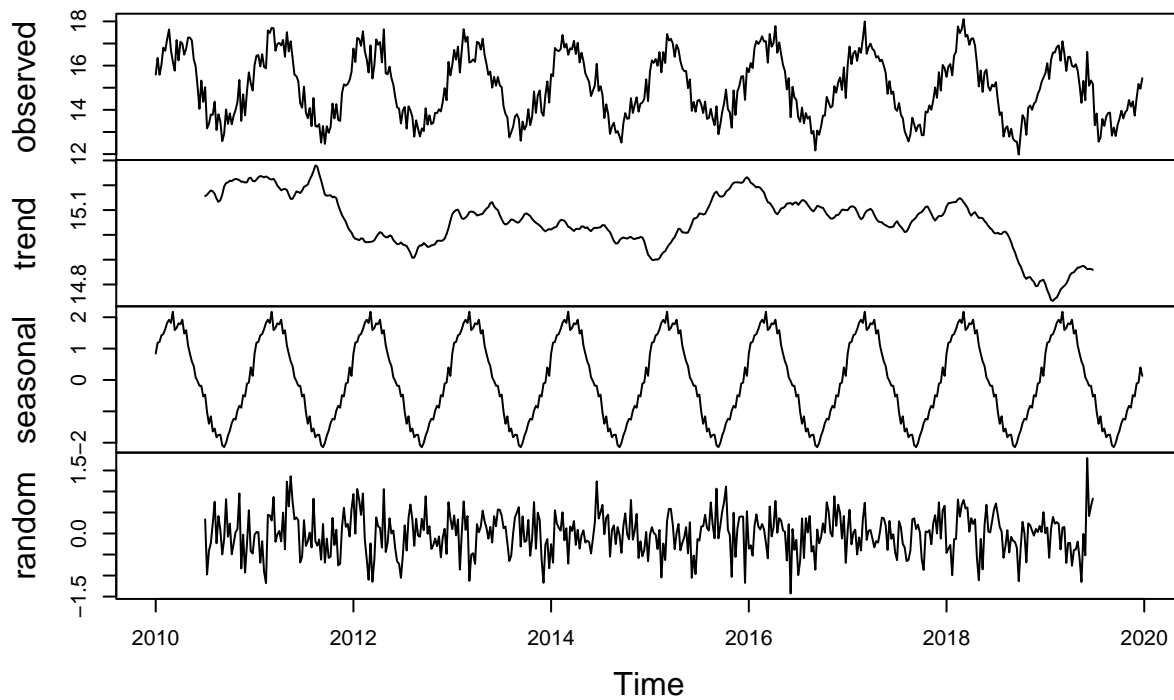
```
spectrum(p1)
```

Series: x
Raw Periodogram



```
p1_decomp <- decompose(p1)  
plot(p1_decomp)
```


Decomposition of additive time series



c) $X_t = m + A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + Y_t$

- X_t représente la valeur de la série temporelle au temps t .
- m est la moyenne de la série.
- A et B sont les amplitudes des composantes sinusoïdales et cosinusoidales, respectivement.
- T est la période de la composante saisonnière. Pour des données hebdomadaires sur plusieurs années, T pourrait être 52, représentant le nombre de semaines par an.
- Y_t est le terme d'erreur ou la composante non-périodique.

On choisit donc un T de 52.