Script

2024-01-16

Exercice 1

a) $X_t = \sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}$

1. Espérance

$\mathbb{E}[\epsilon_t] = 0$ puisqu'il s'agit d'un bruit blanc et $\mathbb{E}[\sin(t)]$ varie en fonction de t. Par conséquent, l'espérance de X_t n'est pas constante, car elle dépend de t à travers le terme $\sin(t)$.

2. Autocovariance

La fonction d'autocovariance est définie par $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}), \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Pour X_t, nous avons :

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(\sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \sin(t+h) + \varepsilon_{t+h} - 0.2 \times \varepsilon_{t+h-1})$$

Puisque ε_t est un bruit blanc de variance σ^2 et est indépendant des termes précédents et suivants, la seule autocovariance non nulle se produit lorsque $h = 0$ ou $h = \pm 1$. Cela donne :

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \text{Var}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) \\
\gamma_X(1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - 0.2 \times \varepsilon_t) \\
\gamma_X(-1) &= \text{Cov}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - 0.2 \times \varepsilon_{t-2})
\end{aligned}$$

- $h = 0$: $\gamma_X(0) = \text{Var}(\varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + 0.04\sigma^2 = 1.04\sigma^2$ (car $\sigma^2 = 1$ dans les simulations).
- $h = 1$ ou $h = -1$: $\gamma_X(1) = \gamma_X(-1) = -0.2\sigma^2$.

La dépendance de $\gamma_X(h)$ sur t (due à la présence de $\sin(t)$ et $\sin(t+h)$) indique que le processus n'est pas stationnaire au second ordre.

3. Différenciation

Pour le rendre stationnaire, nous allons différencier le processus à l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
&\Delta X_t = X_t - X_{t-1} \\
&\Delta X_t = (\sin(t) + \varepsilon_t - 0.2 \times \varepsilon_{t-1}) - (\sin(t-1) + \varepsilon_{t-1} - 0.2 \times \varepsilon_{t-2}) \\
&\Delta X_t = (\sin(t) - \sin(t-1)) + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) - 0.2 \times (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})
\end{aligned}$$

- L'espérance :

L'espérance du processus différencié, $E[\Delta X_t]$, est la différence entre les espérances des termes à t et $t-1$. Étant donné que l'espérance de ε_t est 0, l'espérance de ΔX_t devient :

$$E[\Delta X_t] = E[\sin(t) - \sin(t-1)]$$

- L'autocovariance :

b) $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

1. Espérance

$$E(X_t) = E(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_{t-1}) = 0 - 0 = 0$$

2. Autocovariance

- Pour $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+0}) \\
&= \mathrm{Var}(X_t) \\
&= \mathrm{Var}(\varepsilon_t) + \mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) \\
&= \sigma^2 + \sigma^2 \\
&= 2\sigma^2
\end{aligned}$$

- Pour $h = 1$:

$$\begin{aligned}
\gamma_X(1) &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+1}) \\
&= \mathrm{Cov}(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t) \\
&= \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+1}) - \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) - \mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1}) + \mathrm{Cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_t)
\end{aligned}$$

D'après la définition du bruit blanc, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s$, alors :

$$\begin{aligned}
\gamma_X(1) &= 0 - \mathrm{Var}(\varepsilon_t) - 0 + 0 \\
&= -\mathrm{Var}(\varepsilon_t) \\
&= -\sigma^2
\end{aligned}$$

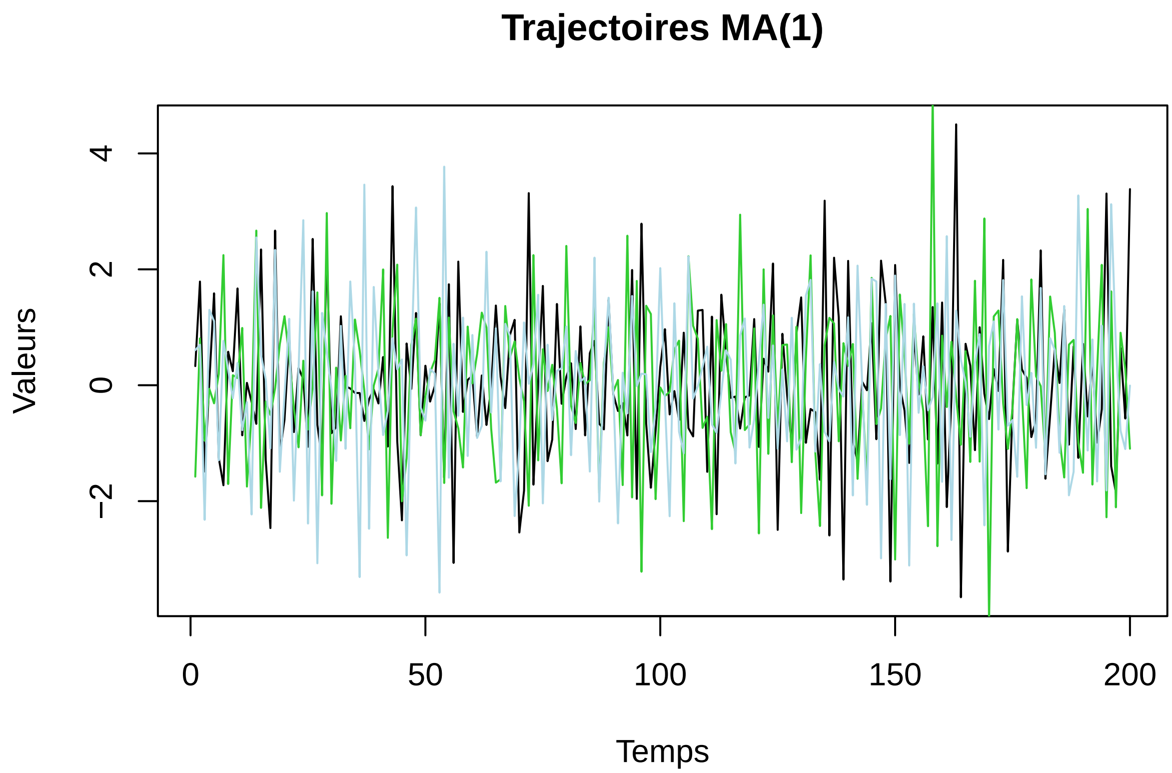
- Pour $h > 1$ ou $h < -1$: Les termes sont indépendants, donc $\gamma_X(h) = 0$.

Le processus $X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ est stationnaire au second ordre car son espérance est constante et sa fonction d'autocovariance ne dépend que de h et non de t.

3. Forme canonique

Le processus, sous sa forme canonique, s'écrit comme : $X_t = (1 - B)\varepsilon_t$ correspondant à un un MA(1).

```r
set.seed(123)
b1 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200)
b2 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200)
b3 <- arima.sim(model = list(ma = -1), n = 200)

plot(b1, type="l", col="black", main="Trajectoires MA(1)", xlab = "Temps", ylab = "Valeurs")
lines(b2, col="limegreen")
lines(b3, col="lightblue")
```



c) $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ **Je suis vraiment pas sur de ça, j'arrive pas à trouver la forme canonique donc faut probablement le différencier et c'est probablement faux**

1. Espérance

$E[X_t] = E[A]\cos(\omega t) + E[B]\sin(\omega t) = 0$

2. Autocovariance

$$\begin{aligned}\gamma(s,t) &= E\left[(A\cos(\omega s) + B\sin(\omega s))(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\right] \\ &= E\left[A^2\cos(\omega s)\cos(\omega t) + AB\cos(\omega s)\sin(\omega t) + AB\sin(\omega s)\cos(\omega t) + B^2\sin(\omega s)\sin(\omega t)\right]\end{aligned}$$

Étant donné que A et B sont indépendantes, on peut simplifier cette expression en utilisant $E[A^2]$, $E[B^2]$ et le fait que $E[AB] = E[A]E[B] = 0$:

$$\gamma(s,t) = E[A^2]\cos(\omega s)\cos(\omega t) + E[B^2]\sin(\omega s)\sin(\omega t)$$

Puisque A et B ont une variance finie, disons σ_A^2 et σ_B^2 respectivement, nous pouvons remplacer $E[A^2]$ et $E[B^2]$ par leurs variances :

$$\gamma(s,t) = \sigma_A^2\cos(\omega s)\cos(\omega t) + \sigma_B^2\sin(\omega s)\sin(\omega t)$$

Nous pouvons utiliser l'identité trigonométrique pour les produits de cosinus et de sinus :

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$
$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

En appliquant ces identités à notre expression, nous obtenons :

$$\gamma(s,t) = \sigma_A^2 \cdot \frac{1}{2}[\cos(\omega s - \omega t) + \cos(\omega s + \omega t)] + \sigma_B^2 \cdot \frac{1}{2}[\cos(\omega s - \omega t) - \cos(\omega s + \omega t)]$$

En simplifiant cette expression, les termes en $\cos(\omega s + \omega t)$ se soustraient mutuellement, laissant :

$$\gamma(s,t) = \frac{1}{2}(\sigma_A^2 + \sigma_B^2)\cos(\omega(t-s))$$

Le processus $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ est stationnaire au second ordre, car son espérance est constante (et égale à zéro) et sa fonction d'autocovariance dépend uniquement de la différence entre les temps s et t, et non des temps individuels.

3. Forme canonique

d) $X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + \varepsilon_t$

1. Espérance :

$$\mathbb{E}[X_t] = 2\mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t]$$
$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_t] + 0$$

Le processus est égale à lui-même et donc constant dans le temps.

2. Fonction d'autocovariance

3. Forme canonique

Le modèle peut se réécrire sous sa forme canonique comme : $(1 - 2B + B^2)X_t = \varepsilon_t$, correspondant à un AR(2).

On cherche les racines du polynome caractéristique $1 - 2r + r^2 = 0$:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dans notre cas, $a = 1$, $b = -2$ et $c = 1$. Les racines seront donc :

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$
$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$$
$$r = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$r = \frac{2}{2}$$
$$r = 1$$

Le processus n'est donc pas stationnaire puisque les racines sont sur le cercle unité.

e) $X_t - 4X_{t-1} = \varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1}$

1. Espérance

L'espérance $E(X_t)$ d'un processus stationnaire doit être constante. Calculons-la :

$$E(X_t - 4X_{t-1}) = E(\varepsilon_t - 0.25\varepsilon_{t-1})$$

Étant donné que ε_t est un bruit blanc, $E(\varepsilon_t) = 0$ pour tout t. Par conséquent :

$$E(X_t - 4X_{t-1}) = 0 - 0.25 \times 0 = 0$$

Cela implique que $E(X_t) = 4E(X_{t-1})$. Pour qu'un processus soit stationnaire, il faut que $E(X_t)$ soit le même pour tout t. Ici, nous n'avons pas assez d'informations pour déterminer si $E(X_t)$ est constant sans connaître la valeur de $E(X_{t-1})$.

2. Fonction d'autocovariance

Comme pour l'espérance, nous n'avons pas assez d'informations pour déterminer si $E(X_t)$ est constant sans connaître la valeur de $E(X_{t-1})$.

3. Forme canonique

Nous pouvons réécrire le processus comme $(1 - 4B)X_t = (1 - 0.25B)\varepsilon_t$.

Solution de l'équation caractéristique pour la partie AR :

$1 - 4r = 0$ $r = 0.25$

Solution de l'équation caractéristique pour la partie MA :

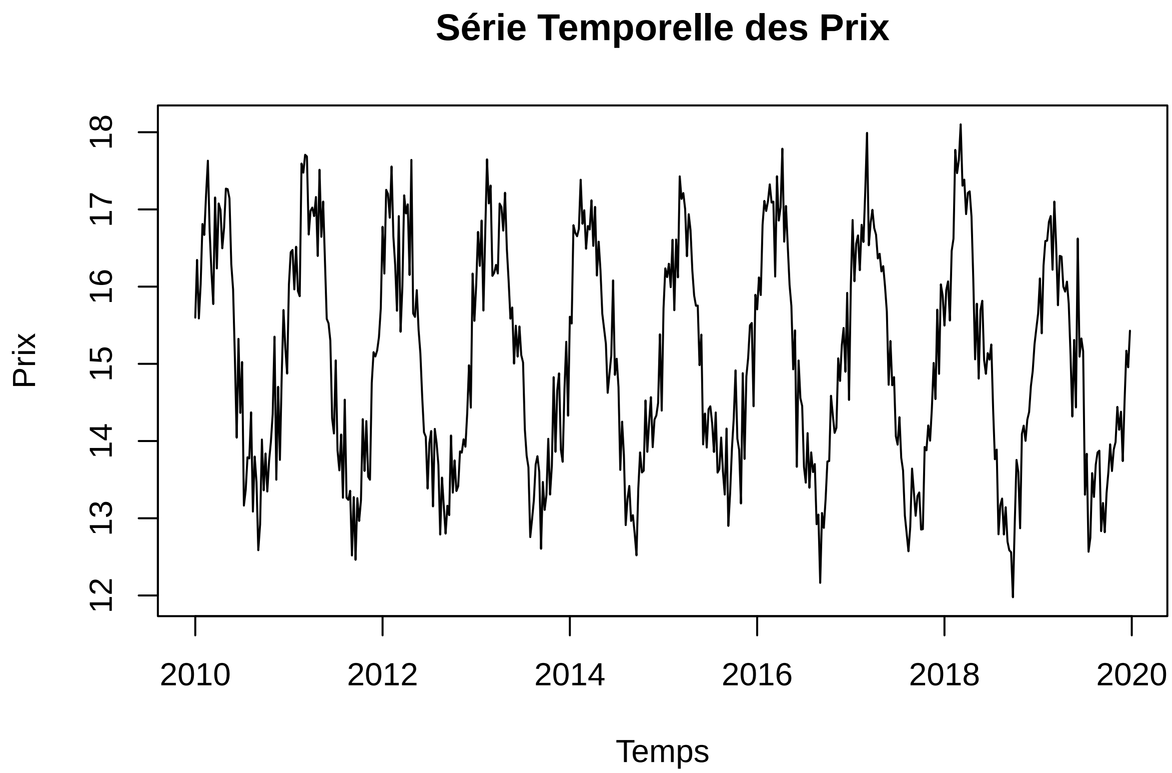
$1 - 0.25r = 0$ $r = 4$

Notre processus est donc un ARMA(0.25, 4)

Exercice 2

a) Représentation graphique de la série p1

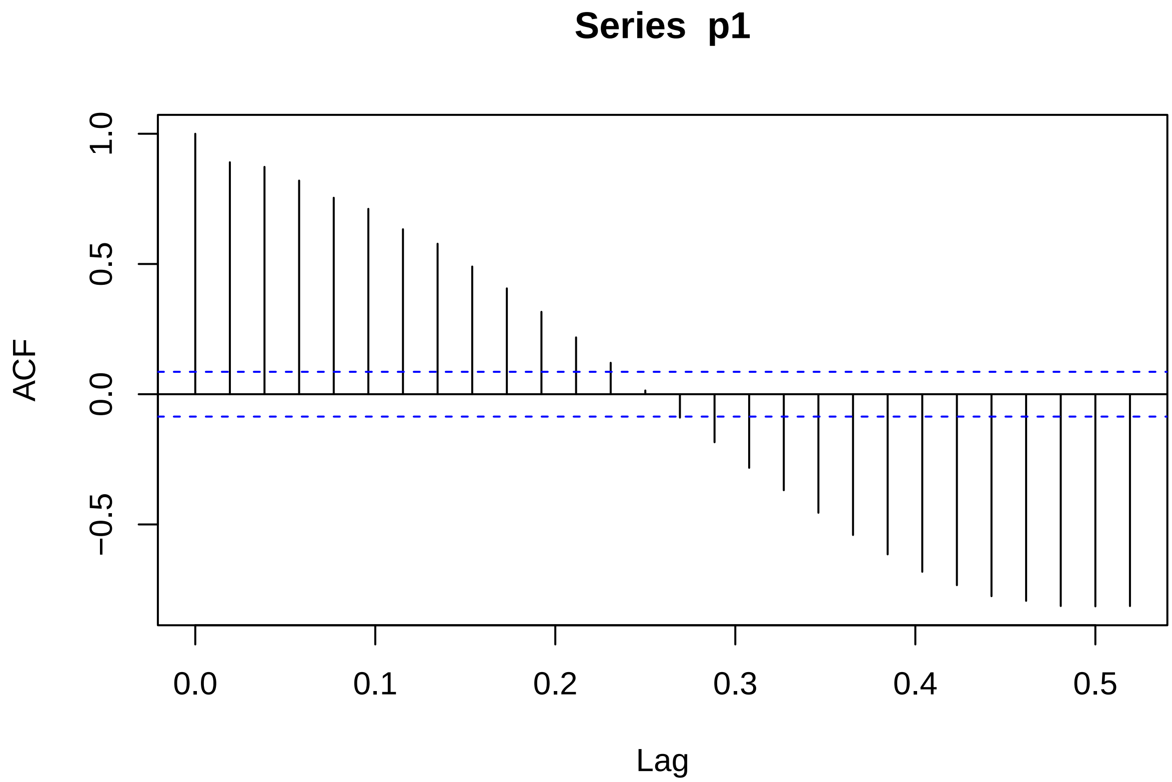
```r
source("prix.R")

plot(p1, type = "l", main = "Série Temporelle des Prix", xlab = "Temps", ylab = "Prix")
```



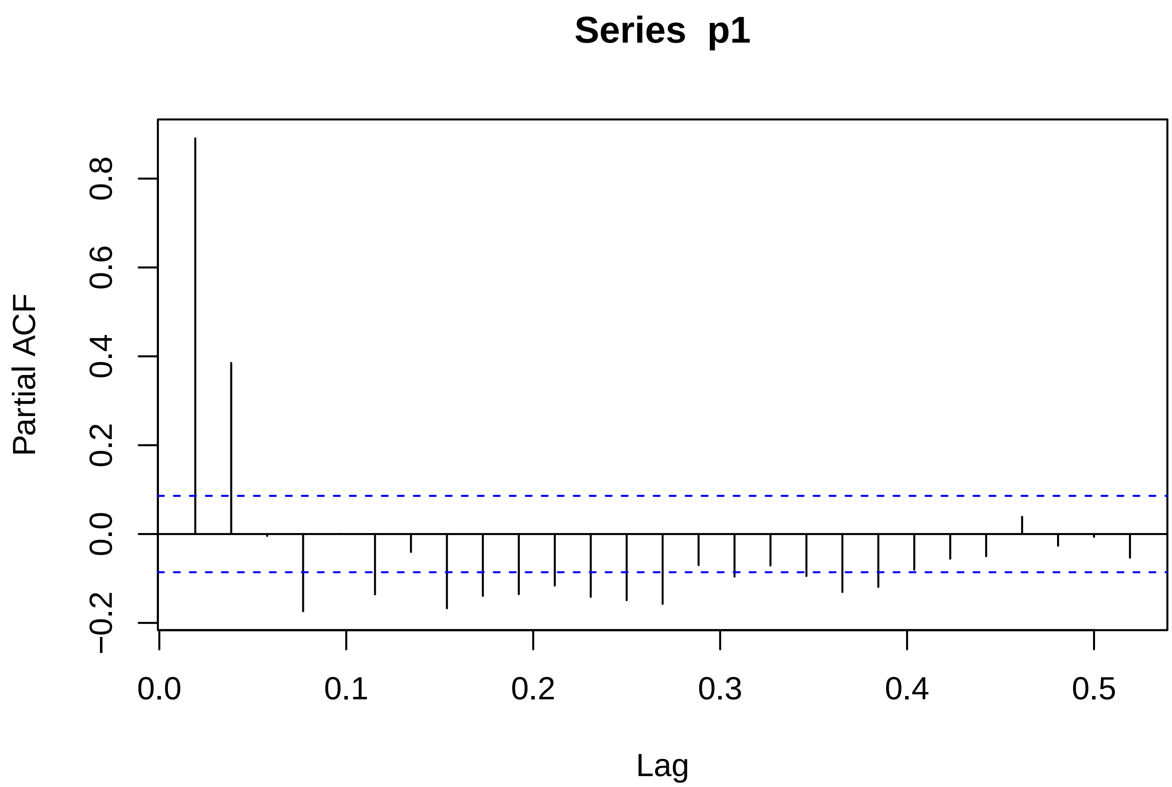
D'après le graphique, on peut émettre l'hypothèse que la série est stationnaire en moyenne et en variance puisque la moyenne est constante et la variance homoscédastique. De plus, la covariance entre 2 points semble constante, l'écart entre chaque fluctuation est le même et laisse penser à une saisonalité.

b) Fonctions d'autocorrélation acf et pacf

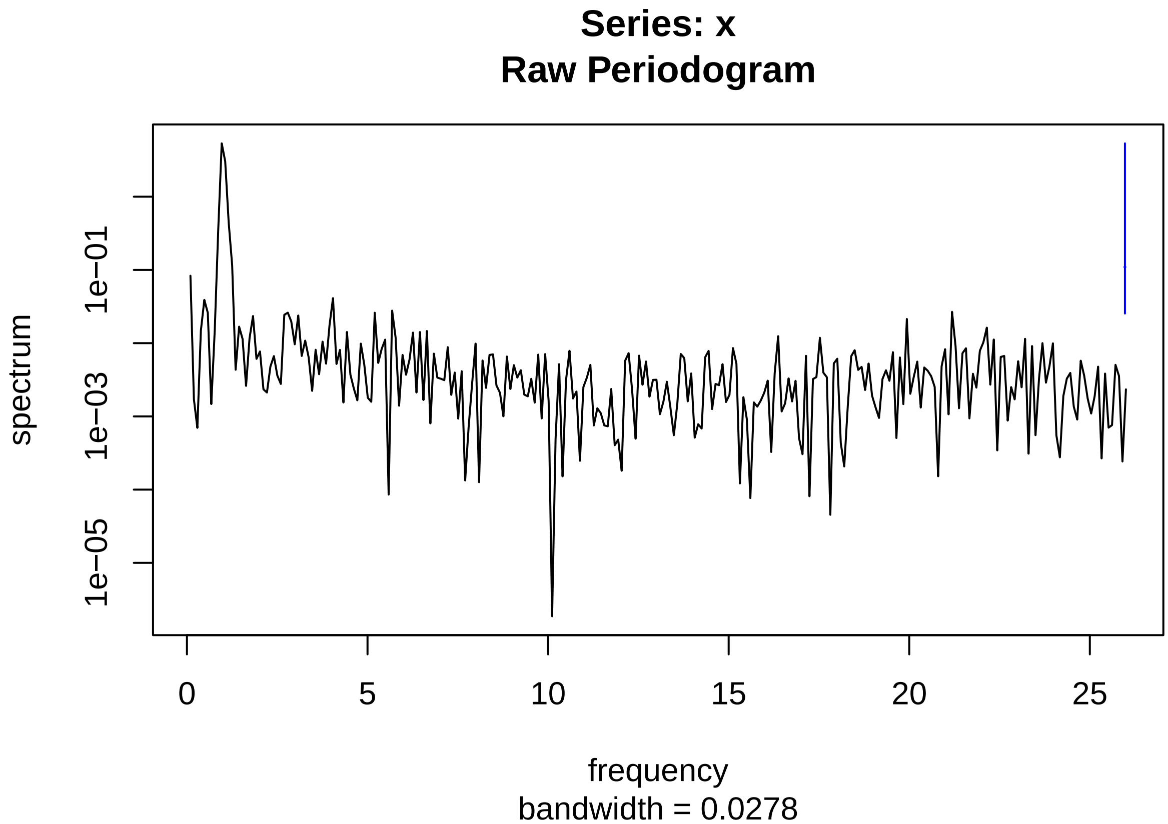
```
acf(p1)
```



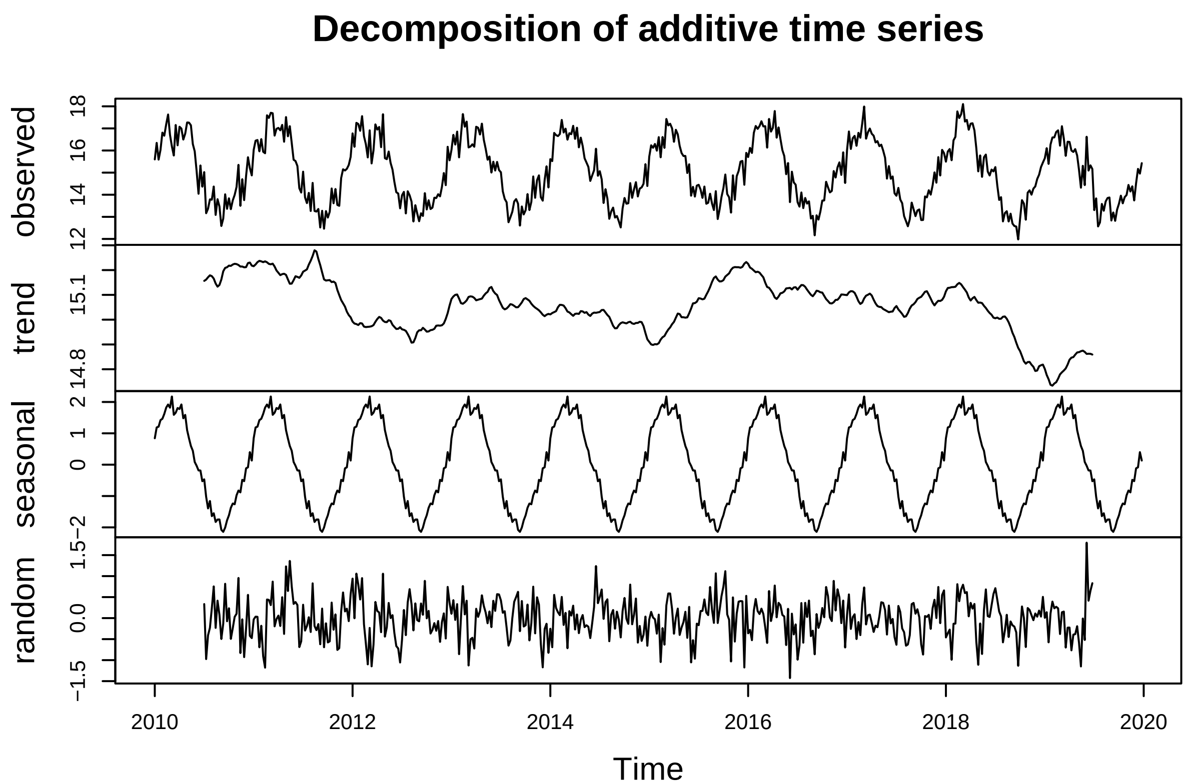

```
pacf(p1)
```




```r
spectrum(p1)
```




```r
p1_decomp <- decompose(p1)
plot(p1_decomp)
```



On remarque que la saisonalité est très marquée et régulière, tandis que la tendance est plus compliquée à discerner, même s'il semble y avoir une tendance à la baisse.

c) $X_t = m + A \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + B \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + Y_t$

- X_t représente la valeur de la série temporelle au temps t.
- m est la moyenne de la série.
- A et B sont les amplitudes des composantes sinusoïdales et cosinusoïdales, respectivement.
- T est la période de la composante saisonnière. Pour des données hebdomadaires sur plusieurs années, T pourrait être 52, représentant le nombre de semaines par an.
- Y_t est le terme d'erreur ou la composante non-périodique.

On choisit donc un T de 52.

```
T <- 52
t <- 1:length(p1)

sin_term <- sin(2 * pi * t / T)
cos_term <- cos(2 * pi * t / T)

reg_model <- lm(p1 ~ sin_term + cos_term)

m <- coef(reg_model)[1]
A <- coef(reg_model)[2]
B <- coef(reg_model)[3]

#centrer les résidus
```

```r
Zt <- reg_model$residuals - mean(reg_model$residuals)

#Test de Dickey-fuller (test de stationnarité)
adf_test <- adf.test(Zt)
```

```
## Warning in adf.test(Zt): p-value smaller than printed p-value
```

```r
summary(reg_model)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = p1 ~ sin_term + cos_term)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.51534 -0.32911  0.01565  0.33530  1.46808
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 15.05321    0.02336  644.30   <2e-16 ***
## sin_term     1.79372    0.03304   54.29   <2e-16 ***
## cos_term     0.56812    0.03304   17.19   <2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.5328 on 517 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8625, Adjusted R-squared:  0.862
## F-statistic:  1621 on 2 and 517 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```r
adf_test
```

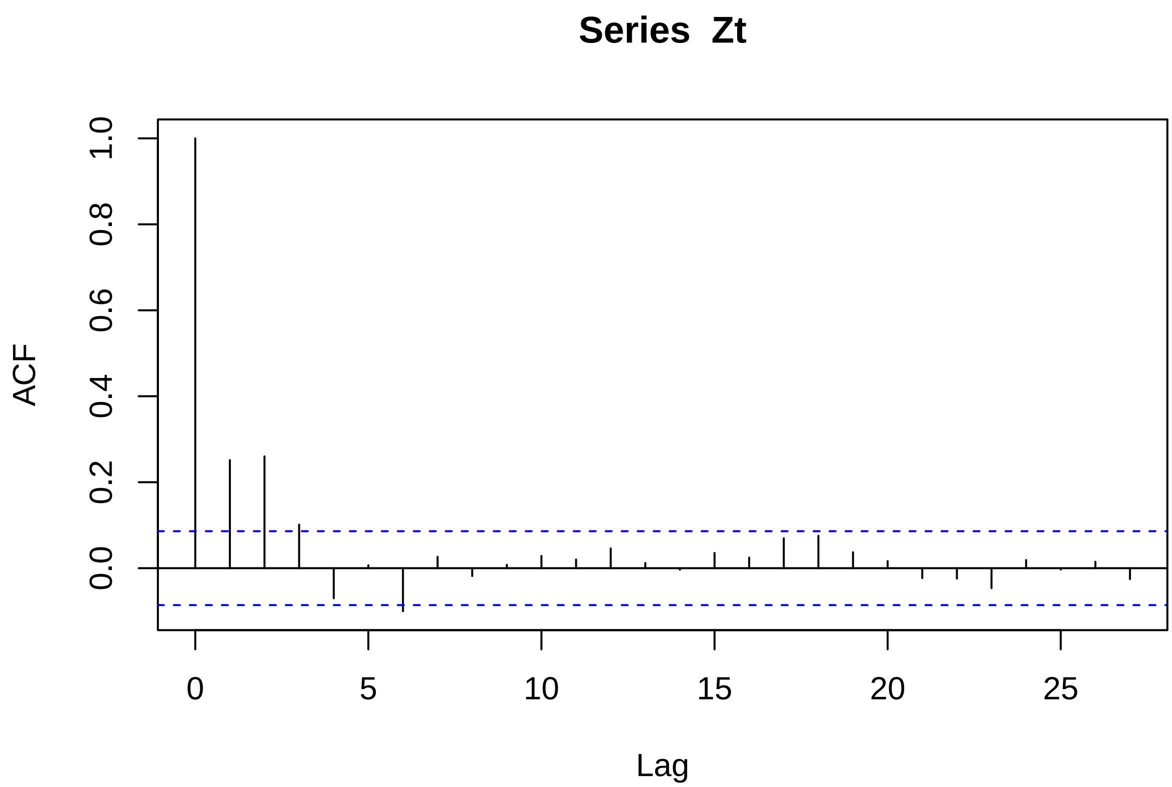
```
##
##  Augmented Dickey-Fuller Test
##
## data:  Zt
## Dickey-Fuller = -7.3263, Lag order = 8, p-value = 0.01
## alternative hypothesis: stationary
```

On remarque que tous les coefficients sont significatifs. La composante saisonnière sinusoïdale est donc une caractéristique importante de la série p1. L'écart type résiduel est faible (0.5328) et le coefficient de détermination ajusté est plutôt élevé (0.862), le modèle semble donc expliqué une grande partie de la variance des données.

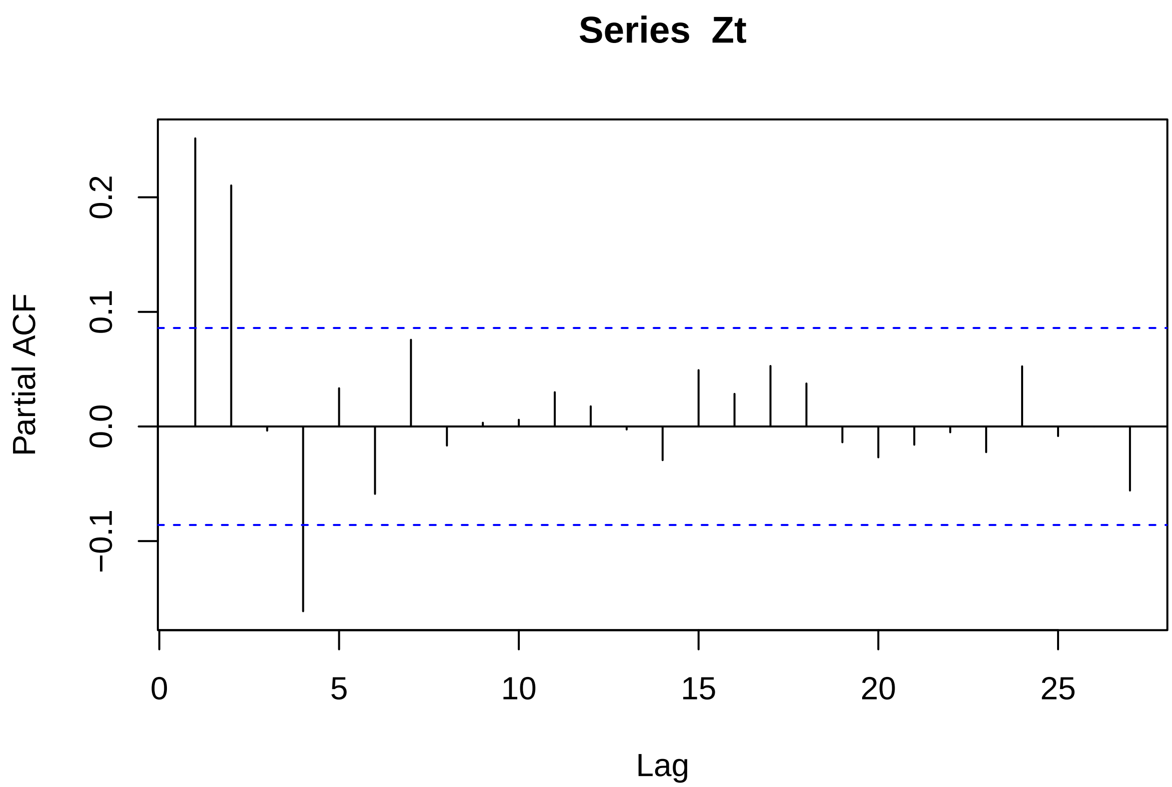
Le p.value du test de Dickey-Fuller étant inférieur au seuil de 5%, on rejette l'hypothèse nulle d'une racine unitaire. Les résidus Z_t du modèle sont stationnaires.

d) Choix du modèle

```r
acf(Zt)
```




```r
pacf(Zt)
```



Z_t n'est pas un bruit blanc puisqu'il y a des autocorrelations significatives sur l'acf comme sur le pacf, suggérant que notre modèle contiendra une partie AR et une partie MA. Sur la partie AR, le dernier retard est atteint en lag $= 4$ et pour la partie MA, le dernier retard est atteint en lag $= 6$. Nous allons ainsi tester par le moyen d'une boucle tous les modèles en faisant varier la partie AR de 0 à 4 et la partie MA de 0 à 6. Pour chaque modèle, on vérifiera les t.values associées à chaque coefficients $coef/s.e.$ en considérant que si sa valeur est inférieure à 1.96, considère la t.value comme non significative.

```
library(forecast)

# Generate all possible combinations of AR and MA orders
orders <- expand.grid(ar = 0:4, ma = 0:6)[-1, ] # exclude the case where both ar and ma are zero

# Fit an ARIMA model for each combination
models <- list()
for (i in seq(nrow(orders))) {
  models[[i]] <- Arima(Zt, order = c(orders[i, "ar"], 0, orders[i, "ma"]))
}

# Compute the AIC and count non-significant t values for each model
results <- data.frame(AR = rep(NA, nrow(orders)),
                      MA = rep(NA, nrow(orders)),
                      AIC = rep(NA, nrow(orders)),
                      stringsAsFactors = FALSE)
for (i in seq(nrow(orders))) {
  model <- models[[i]]
  coefs <- model$coef
  se_coefs <- sqrt(diag(vcov(model)))
```

```
  t.values <- abs(coefs / se_coefs)
  compteur_t.values <- sum(t.values < 1.96) - 1

  results[i, "AR"] <- orders[i, "ar"]
  results[i, "MA"] <- orders[i, "ma"]
  results[i, "AIC"] <- AIC(model)
  results[i, "t.value non significatives"] <- compteur_t.values
}

kable(results, booktabs = TRUE) %>%
  kable_styling(latex_options = c("hold_position"))
```

AR	MA	AIC	t.value non significatives
1	0	789.9238	0
2	0	768.4178	0
3	0	770.4101	1
4	0	758.7975	1
0	1	800.4477	0
1	1	778.3851	0
2	1	770.4147	2
3	1	763.2294	0
4	1	757.8453	0
0	2	767.7087	0
1	2	763.7444	1
2	2	763.1060	1
3	2	765.1027	3
4	2	758.4314	4
0	3	760.8459	0
1	3	757.8281	0
2	3	758.9232	2
3	3	760.7775	4
4	3	760.2288	5
0	4	761.8718	1
1	4	759.1082	1
2	4	760.9157	6
3	4	762.2010	6
4	4	761.7376	8
0	5	762.9353	2
1	5	760.2818	2
2	5	763.0230	7
3	5	759.6398	2
4	5	763.2266	8
0	6	758.3870	2
1	6	759.3247	5
2	6	761.3083	8
3	6	763.1383	9
4	6	765.0393	10

Il y a deux modèles qui se distinguent clairement des autres : ARMA(1,3) et l'ARMA(4,1). Ils ont toutes leurs t.values significatives et ont un AIC plus faible que les autres. On gardera l'ARMA(1,3) car son AIC est un petit peu plus faible que pour l'ARMA(4,1), bien qu'on puisse considérer les deux modèles comme équivalents.

e) Prévision pour le mois de janvier

Pour la fonction forecast, on choisit un h = 4, correspondant aux 4 premières semaines de janvier.

```
arma_xt <- Arima(Zt, order=c(1,0,3))
Zt_forecast <- forecast(arma_xt, h=4)
```

On doit ensuite reconstruire les prédictions pour X_t en ajoutant la trend et la saisonalité.

```
t_future <- length(p1) + 1:length(Zt_forecast$mean)
sin_term_future <- sin(2 * pi * t_future / 52)
cos_term_future <- cos(2 * pi * t_future / 52)
Xt_future <- m + A * sin_term_future + B * cos_term_future + Zt_forecast$mean

# Afficher les prédictions pour Xt
Xt_future
```

```
## Time Series:
## Start = 521
## End = 524
## Frequency = 1
## [1] 15.66913 15.94741 16.19854 16.40389
```

f) SARIMA

```
sarima_Xt <- auto.arima(p1)
summary(sarima_Xt)
```

```
## Series: p1
## ARIMA(0,0,3)(2,1,0)[52] with drift
##
## Coefficients:
##          ma1     ma2     ma3      sar1      sar2   drift
##       0.1950  0.2721  0.1673  -0.6107  -0.3304  -5e-04
## s.e.  0.0464  0.0451  0.0523   0.0474   0.0496   5e-04
##
## sigma^2 = 0.3332:  log likelihood = -416.16
## AIC=846.33   AICc=846.57   BIC=875.37
##
## Training set error measures:
##                        ME      RMSE       MAE         MPE     MAPE      MASE
## Training set 0.0003056615 0.5441267 0.4104175 -0.08892772 2.749445 0.7177345
##                      ACF1
## Training set -0.003545234
```

La fonction `auto.arima()` choisi le modèle $SARIMA_{52}[(0,0,3)(2,1,0)]$. Ainsi, il choisi 3 composantes MA pour la partie non saisonnière et 2 composantes AR ainsi qu'une différenciation pour la partie saisonnière.

```
january_forecast <- forecast(sarima_Xt, h=4)
january_forecast
```

```
##          Point Forecast    Lo 80    Hi 80    Lo 95    Hi 95
## 2020.000       15.67229 14.93248 16.41209 14.54085 16.80372
## 2020.019       16.22468 15.47095 16.97842 15.07194 17.37742
```

```
## 2020.038       15.79242 15.01225 16.57258 14.59926 16.98557
## 2020.058       16.11875 15.32883 16.90867 14.91067 17.32683
```

g) Application de l'opérateur de différenciation $(1 - B^52)$

```r
p1_diff <- diff(p1, lag = 52)
arma_model_diff <- auto.arima(p1_diff, seasonal = FALSE)
summary(arma_model_diff)
```

```
## Series: p1_diff
## ARIMA(1,0,3) with zero mean
##
## Coefficients:
##           ar1     ma1     ma2     ma3
##       -0.5820  0.7645  0.3188  0.2628
## s.e.   0.1876  0.1859  0.0593  0.0446
##
## sigma^2 = 0.4662:  log likelihood = -483.57
## AIC=977.13   AICc=977.26   BIC=997.88
##
## Training set error measures:
##                       ME      RMSE       MAE      MPE     MAPE      MASE
## Training set -0.02222536 0.6798283 0.5490841 569.9611 690.0975 0.5611167
##                     ACF1
## Training set 0.005028545
```

```r
january_forecast_diff <- forecast(arma_model_diff, h=4)
kbl(january_forecast_diff, booktabs = TRUE) %>%
  kable_styling(latex_options = c("hold_position"))
```

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
2020.000	-0.0662999	-0.9412823	0.8086824	-1.404470	1.271870
2020.019	-0.0632689	-0.9527012	0.8261635	-1.423538	1.297001
2020.038	-0.0019736	-0.9106402	0.9066930	-1.391659	1.387712
2020.058	0.0011487	-0.9156305	0.9179279	-1.400944	1.403242

h) Modèle le plus pertinent

i)

$(1-B^2)(1-2B+B^2)(1-2B)X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\backslash$ $(1-B^2)(1-2B+B^2)(1-2B) = (1-B)(1+B)(1-B)(1-B) = (1-B)^3(1+B)\backslash$ $(1-B)^3(1+B)X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\backslash$