CHAPITRE 1
NOMBRES ET CALCUL
DEVOIR 1 - INDICATIONS

Mathématiques - Seconde A
Lycée d'Adultes de la Ville de Paris

EXERCICE 1 - ELÉMENTS DE CALCUL.

1 Le nombre 97 est premier s'il n'est divisible *que* par 1 et 97. Citons d'abord quelques premiers nombres premiers, puis essayons de diviser 97 par ces nombres en utilisant les règles de divisibilité. Il nous faudra tester tous les nombres premiers jusqu'à celui dont le carré dépasse 97. (Par exemple, pour montrer que 43 est premier, on montre qu'il n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7. Pas besoin d'aller plus loin que 7, car un nombre plus grand que 7 facteur d'un nombre plus grand que 7 donnerait un nombre plus grand que $7 \times 7 = 49 > 43$).

Remarque : une bonne astuce pour tester la divisibilité d'un nombre par 7 est de retrancher deux fois le chiffre des unités au chiffre des dizaines du nombre à tester, et de vérifier que le résultat est bien un multiple de 7. Par exemple :

$$\begin{aligned}
49 &: 4 - 2 \times 9 = 4 - 18 = -14 = -2 \times 7 \\
63 &: 6 - 2 \times 3 = 6 - 6 = 0 = 0 \times 7 \\
35 &: 3 - 2 \times 5 = 3 - 10 = -7 = -1 \times 7 \\
15 &: 1 - 2 \times 5 = 1 - 10 = -9 \neq \mathbb{Z} \times 7 \\
196 &: 19 - 2 \times 6 = 19 - 12 = 7 = 1 \times 7
\end{aligned}$$

3 Simplifier la fraction R en décomposant tous ses termes en produit de facteurs premiers. On doit obtenir R = 2700. Pour ce faire, on rappelle les règles de calcul sur les puissances suivantes :

— $a^0 = 1$, par exemple : $37^0 = 1$
— $a^n \times a^m = a^{n+m}$, par exemple : $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
— $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, par exemple : $\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$
— $(a \times b)^n = a^n \times b^n$, par exemple : $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$
— $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, par exemple : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
— $(a^n)^m = a^{n \times m}$, par exemple : $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$

EXERCICE 2 - LEMME SUR LA STABILITÉ DE LA PARITÉ.

1 Dans cette question, on cherche une écriture commune à tous les entiers relatifs impairs. Une fois trouvée cette expression générale, on peut définir I comme l'ensemble des nombres réels qui s'écrivent sous la forme trouvée. Comme vu en cours, on doit obtenir : $I = \{2 \times k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$.

2 Il s'agit dans cette question de démontrer la proposition $\mathcal{P} : n \in I \;\; \Rightarrow \;\; n^2 \in I$, que l'on peut traduire par "si n est un entier relatif impair, alors n^2 est un entier relatif impair". Il s'agit alors de montrer que si n peut s'écrire comme un entier relatif impair, alors son carré s'écrit également comme un entier relatif impair.

3 Rappelons-nous ici que par définition, la contraposée d'une proposition "$A \Rightarrow B$" est "$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$", c'est-à-dire, que la contraposée de la proposition "A implique B" s'exprime comme "la négation de B implique la négation de A".

Exercice 3 - Irrationalité de $\sqrt{2}$ par l'absurde.

1 Rappelons-nous ici que tout carré peut être décomposé en deux triangles rectangles. De plus, le théorème de Pythagore nous enseigne que le carré de la longueur de l'hypothénuse (soit l'arrète faisant face à l'angle droit) d'un triangle rectangle (triangle présentant un angle droit) est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

2 Supposons que la longueur D obtenue soit un nombre rationel. Il existe donc deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ tels que $D = \frac{a}{b}$. Etant données la valeur de D déterminée à la question 1 et son expression supposée dans cette question, montrons alors que a est pair. Remarquons que la contraposée du lemme sur la stabilité de la parité (démontré dans l'exercice précédent) nous garanti que si $n^2 \in \mathbb{Z}$ est pair, alors $n \in \mathbb{Z}$ est pair.

3 Sous les mêmes arguments que pour la question 2, montrez que si a est pair, b l'est également.

4 Supposons de plus que l'écriture $D = \frac{a}{b}$ est irréductible, c'est-à-dire, que a et b soient premiers entre eux. Autrement dit, a et b n'ont autre dénominateur commun que 1. Expliquer alors en quoi vos réponses aux questions 2 et 3 sont contradictoires avec cette hypothèse.

5 Dans cet exercice, on a supposé que D appartienne à l'ensemble des rationels. Cela signifie que D peut s'écrire de façon irréductible sous la forme d'un rapport de deux entiers (relatifs). Cependant, la valeur de D obtenue à la question 1 entre en conflit avec cette hypothèse, d'après vos arguments à la question 4. Sachant que l'ensemble $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ est constitué, soit de nombres rationels, soit de nombre irrationels, en déduire l'ensemble de nombre auquel appartient D. On notera que ce type de raisonnement employé dans une preuve mathématique est appelé "démonstration par l'absurde".