CHAPITRE 1

NOMBRES ET CALCUL

NOTES ET EXERCICES

Mathématiques - Seconde A
Lycée d'Adultes de la Ville de Paris

1 INTRODUCTION AU VOCABULAIRE ENSEMBLISTE

Les mathématiques modernes, enseignées au Lycée, sont formalisées selon la *théorie des ensembles*. On y considère des objets (par exemple : un nombre, une droite, une fonction, etc.) regroupés dans des ensembles (par exemple : ensemble des rationnels, ensemble des fonctions linéaires, etc.). Chaque objet est alors considéré comme un élément d'un ensemble. Un ensemble, désigné par une paire d'accolades, peut être défini soit par l'énumération des éléments qu'il contient, soit par leur définition à partir d'une propriété commune :

E = { élément 1, élément 2, élément 3, ... }, ou bien, E = { éléments | vérifiant la propriété P }

On définit alors un vocabulaire et une syntaxe "ensemblistes" permettant de formaliser le travail mathématique selon la théorie des ensembles. Donnons-en ci-après quelques premières notions.

— Appartenance : $e \in E$ (l'élément e appartient à l'ensemble E)

— Union : $C = A \cup B = \{c \mid c \in A, \text{ ou bien, } c \in B\}$

— Intersection : $C = A \cap B = \{c \mid c \in A \text{ et } c \in B\}$

— Inclusion : $E \subset F$ (l'ensemble E est inclus dans F : E est donc un sous-ensemble de F)

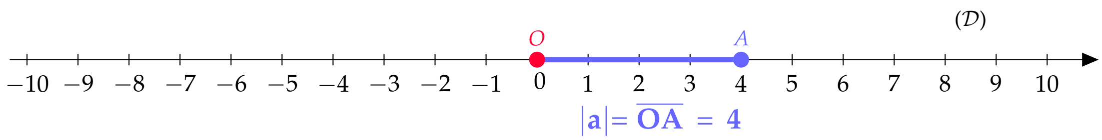
— Exclusion : $C = A \backslash B = \{c \mid c \in A \text{ et } c \notin B\}$

— Complémentaire : si $A \subset E$, alors $A^c = E \backslash A = \{e \in E \mid e \notin A\}$ est le complémentaire de A, et l'on a $A \cup A^c = E$.

2 NOTION DE NOMBRE RÉEL

Un *nombre* est un objet mathématique permettant de représenter des grandeurs. Un nombre est dit *réel* s'il permet de quantifier et comparer des grandeurs physiquement appréhendables. Le nombre réel est composé de deux attributs : un *signe* (positif, noté "+" ou négatif, noté "-") et une *valeur absolue*.

Ces deux attributs permettent de représenter le *nombre réel* sur un repère muni d'une droite $(\mathcal{D})$ et d"une origine O. Le signe du nombre réel renseigne alors le sens selon lequel on se déplace sur la droite (vers la droite de l'origine s'il est positif, vers la gauche sinon), et la valeur absolue du nombre réel indique sa distance à l'origine. Par exemple, le nombre $a = +4$ peut être représenté sur une droite graduée par un point A situé à droite de l'origine (car le signe du nombre réel a est positif), et à une distance de $|a|= 4$ graduations de l'origine.



Par convention, la valeur absolue d'un nombre réel a est notée $|a|$. On a donc, pour tout nombre réel positif a : $a = +|a|$, et pour tout nombre réel négatif b : $b = -|b|$. Il convient de bien noter que la valeur absolue d'un nombre réel est définie comme une distance, soit une quantité positive ou nulle. On aura donc pour tout nombre réel a quelconque : $|+a| = |-a| \geqslant 0$.

Enfin, il convient de distinguer plusieurs sous-ensembles de nombres réels en fonction de leurs propriétés algébriques. La définition de ces sous-ensembles est l'objet de la section suivante.

3 Les ensembles de nombres

— **Entiers naturels :** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Un nombre entier est dit *naturel* s'il est positif ou nul.

— **Entiers relatifs :** $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}) = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Un nombre entier est dit *relatif* s'il est positif, négatif, ou nul. Tous les entiers naturels sont donc des entiers relatifs : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Par ailleurs, on ne parlera généralement plus que de "nombres entiers" pour désigner les entiers relatifs.

— **Nombres décimaux :** $\mathbb{D} = \left\{ \frac{m}{10^n} \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$

Un nombre est dit *décimal* s'il peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule (donc un nombre fini de "décimales"). C'est justement le cas de tous les nombres entiers, et on a donc les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

— **Nombres rationnels :** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$

Les nombres *rationnels* sont les nombres réels pouvant être représentés comme un rapport de deux entiers. Ils permettent de représenter des grandeurs "commensurables". On obtient les inclusions strictes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$, ce qui implique qu'il existe des nombres rationnels qui ne peuvent pas s'écrire avec un nombre fini de décimales (par exemple : $\frac{1}{3}$). Dans la définition de $\mathbb{Q}$, on notera que p est appelé le *numérateur*, et q le *dénominateur*.

— **Nombres irrationels :** $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$

Il existe enfin des nombres réels, dits *irrationels*, qui ne peuvent être représentés comme le rapport de deux entiers (qui échappent donc à la rationalité/à la "raison"). Par exemples, $\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationels.

— **Nombres réels :** $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$

L'ensemble des nombres réels se contruit algébriquement à partir de l'ensemble des rationnels (contenant donc aussi les décimaux, donc les entiers relatifs, et donc les entiers naturels) complété par l'ensemble des irrationels, qui en est le complémentaire dans l'ensemble des nombres réels.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \\ \hfill \cup \\ \hfill \mathbb{Q}^c \end{array}}$$

EXERCICE - Donnez tous les ensembles auxquels appartiennent les nombres réels : 4, -37, $\frac{1}{4}$, $-\frac{27}{9}$.

Remarques :
- On admettra par la suite que le nombre réel 0 est à la fois positif, et négatif.
- Il est également possible de construire algébriquement d'autres ensembles de nombres. On découvrira notamment, pour certains en classe de Terminale, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il convient toutefois de préciser que seuls les ensembles étudiés dans ce chapitre permettent de quantifier et comparer des grandeurs réelles, soit physiquement appréhendables.

4 Divisibilité des entiers

Définition (Division euclidienne des entiers)
Pour tous entiers $n, m \in \mathbb{Z}$, la division euclidienne de n par m est donnée par :

$$\boxed{n = q \times m + r \;\text{ avec }\; 0 \leqslant r \leqslant |m|}$$

où l'entier $q \in \mathbb{Z}$ est appelé *quotient*, et l'entier $r \in \mathbb{Z}$ appelé *reste*. Dans ce contexte, on appelera également *dividande* l'entier n à diviser, et *diviseur* l'entier m par lequel on le divise.

On dit alors qu'un entier n est *divisible* par un autre entier m (non nul) si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par m est nul. C'est-à-dire, si $n = m \times q + 0$, avec $q \in \mathbb{Z}$. L'entier n est alors un *multiple* de l'entier m, de multiplicité q.

Sont,

- divisibles par 2 : tous les entiers finissant par un chiffre pair $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
- divisibles par 3 : tous les entiers dont la somme des chiffres est divisible par 3. (Exemple : pour 27, on a 2 + 7 = 9 = 3 $\times$ 3, donc 27 est divisible par 3).
- divisibles par 4 : tous les entiers dont le nombre formé par les deux derniers chiffres est un multiple de 4. (Exemple : pour 3748, on a 48 = 4 x 22, donc 3748 est divisible par 4.)
- divisibles par 5 : tous les entiers finissant par 0 ou 5.
- divisibles par 6 : tous les entiers pairs qui sont divisibles par 3.
- divisibles par 7 : tous les entiers tels que la soustraction du double du chiffre des unités au chiffre (ou nombre) des dizaines est un multiple de 7. Pour les "grands" entiers, on peut en regrouper les chiffres par groupes de trois, puis alternativement soustraire ou additionner chaque groupe au premier (celui des unités). Si la somme obtenue multiple un multiple de 7, alors l'entier de départ est divisible par 7. (Exemple : pour 49, on a 4 - 2 x 9 = 4 - 18 = -14

= -2 x 7, donc 49 est un multiple de 7 ; pour 67 456 802, on a 802 - 456 + 67 = 413, puis 413 donne 41 - 2 x 3 = 35 = 5 x 7, donc 413 est un multiple de 7, donc 67 456 802 est un multiple de 7).

— divisibles par 8 : tous les entiers dont le nombre formé par les trois derniers chiffres est divisible par 8.

— divisibles par 9 : tous les entiers dont la somme des chiffres est un multiple de 9.

— divisibles par 10 : tous les entiers finissant par 0.

— divisibles par 11 : tous les entiers tels que, la somme des chiffres de rangs pairs soustraite à la somme des chiffres de rangs impairs donne un multiple de 11. En particulier, un entier à trois chiffres est divisible par 11 si la somme des chiffres d'extrémités (des centaines et des unités) est égale au chiffre du mileu (des dizaines). (Par exemple : 451 est divisible par 11 car 4 + 1 = 5. Pareillement, 654 232 139 est divisible par 11 car (6+4+3+1+9) - (5+2+2+3) = 23 - 12 = 11 est un multiple de 11.)

— divisibles par 12 : tous les entiers qui sont multiples de 3 et multiples de 4.

— divisibles par 25 : tous les entiers finissant par $\{00, 25, 50, 75\}$

Définition (Nombre premier)
Tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ est nombre premier s'il n'admet que deux diviseurs distincts seulement : 1 et n.

Théorème (Décomposition des entiers)
Tout entier naturel peut être décomposé en un unique produit de facteurs premiers.
(Par exemple : $252 = 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 63 = 2 \times 2 \times 3 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.)

Remarques :

— Tous les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ sont divisible par 1 et par eux-mêmes puisque : $n = 1 \times n$. Un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ est donc premier s'il n'admet *aucun* autre diviseur.

— Les règles de divisibilité énumérées ci-dessus seront souvent utilisées pour montrer qu'un entier naturel est premier. Pour ce faire, il faut montrer que l'entier naturel considéré n'est divisible par aucun nombre inférieur à lui-même. En particulier, on remarquera qu'il suffit de démontrer qu'un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ n'est divisible par aucun nombre inférieur ou égal à $\sqrt{n}$ pour se convraincre qu'il est premier.

— En particulier, les règles de divisibilité présentées ici sont suffisantes à déterminer les entiers naturels premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

EXERCICE - Montrer que l'entier naturel 43 est un nombre premier. Décomposer l'entier naturel 3840 en produit de facteurs premiers.

5 CALCUL AVEC LES FRACTIONS

Définition (Produit en croix)
Soient a, b, c, d des entiers (dans $\mathbb{Z}$), avec b et d non-nuls. Alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $a \times d = b \times c$.

On déduit de cette règle du produit en croix la méthode à appliquer pour mettre deux fractions au même dénominateur. Ainsi, pour sommer ou soustraire deux fractions, on calculera :

$$\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 \times D_2 + N_2 \times D_1}{D_1 \times D_2} \text{ ou bien } \frac{N_1}{D_1} - \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 \times D_2 - N_2 \times D_1}{D_1 \times D_2}$$

Afin d'éviter d'avoir à manipuler d'inutilement grands nombres, on s'efforcera de préalablement simplifier les fractions dans le calcul à effectuer.

EXERCICE - Simplifier puis calculer : $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$, $B = \frac{5}{6} + 1$, $C = \frac{9}{39} - \frac{20}{5}$.

Remarque : On dira qu'une écriture fractionnaire est présentée sous forme irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux. C'est-à-dire, s'ils n'ont aucun multiple en commun autre que 1.

Pour multiplier les fractions, on veillera également à les simplifier, puis on procèdera au calcul :

$$\frac{N_1}{D_1} \times \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1 \times N_2}{D_1 \times D_2}$$

.

Lorsqu'il s'agira de diviser des fractions, on remarquera que diviser un terme par une fraction revient à *multiplier ce terme par l'inverse de la fraction* :

$$\frac{\frac{N_1}{D_1}}{\frac{N_2}{D_2}} = \frac{N_1}{D_1} \times \frac{D_2}{N_2}$$

EXERCICE - Calculer : $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$, $B = \frac{9}{39} \times \frac{20}{5}$, $C = \frac{\frac{15}{25}}{\frac{45}{27}}$.

6 CALCUL AVEC LES PUISSANCES

Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, et tous entiers naturels $n, m \in \mathbb{N}$, on définit les règles de calcul sur les puissances telles que :

— $a^0 = 1$, par exemple : $37^0 = 1$

— $a^n \times a^m = a^{n+m}$, par exemple : $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

— $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, par exemple : $\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$

— $(a \times b)^n = a^n \times b^n$, par exemple : $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

— $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, par exemple : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

— $(a^n)^m = a^{n \times m}$, par exemple : $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$

EXERCICE - Calculer : $R = \frac{4^3 \times 27^2 \times 15^3}{2^5 \times 3^7 \times 5^2}$.

7 Calcul avec les racines carrées

Définition (Racine carrée)
Pour tout entier naturel $a \in \mathbb{N}$ (donc entier positif ou nul), on définit la *racine carrée* de a $\sqrt{a}$ telle que : $(\sqrt{a})^2 = a$.

Propriété : Pour tous entiers naturels $a, b \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (si b non-nul).

Remarque : Attention à bien remarquer que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, pour tous entiers $a, b \in \mathbb{N}$. Assumer l'inverse est une erreur courante qui pré-suppose que la fonction racine carrée $\sqrt{} : x \to \sqrt{x}$ serait une droite linéaire...

Exercice
1) Comparer $3\sqrt{4}$ et $4\sqrt{3}$.
2) Simplifier : $A = \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{12}$ et $B = 7 \times \sqrt{75} - 2 \times \sqrt{12} + \sqrt{27}$.
3) Développer : $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
4) Simplifier : $A = \frac{4}{\sqrt{5}-3}$, $B = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$, et $C = \sqrt{\frac{8}{9}} \times \sqrt{\frac{12}{25}} \times \sqrt{\frac{225}{24}}$.

8 Identités remarquables

Pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, on retiendra en particuliers les trois formules remarquables suivantes :

— $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$

— $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$

— $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Remarque : si b est un réel positif, on peut extrapoler la formule : $a^2 - b = (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$, ce qui se révèlera utile pour factoriser certaines expressions.

9 Méthodes de calcul

Lorsque l'on effectue un calcul, on procèdera par ordre de priorité sur les opérations :

1) On effectue d'abord les calculs contenus dans les parenthèses.
2) On calcule en priorité les multiplications et divisions.
3) Enfin, on calcule les additions et soustractions.

Exercice
1) Calculer : $A = 3 \times \left[2 \times \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{8}\right) + 7 \times \left(\frac{2}{14} - \frac{7}{49}\right)\right]$
2) Développer : $A = (2x+3)(x-5) - (3x-1)(2x-1)$, $B = 4x(3x+5) - 7(3x+5)(2x-1)$, $C = (x+3)(2x-5)(-x+4)$, et $D = (3x^2 - 2x - 3)(-x+7)$.
3) Factoriser : $A = x^2 - 49 - (5x+3)(x+7)$, $B = (3-x)^2 + (x-3)$, $C = 81x^2 - 64 - (9x+8)(2x+7)$, et $D = 4x^2 - 9a^2$

Exercice - On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'équation : $E(x) = (x+3)^2 - 25$.
1) Montrer que $E(x) = x^2 + 6x + 16$.
2) Montrer que $E(x) = (x-2)(x+8)$. 3) A l'aide de la règle du produit nul, donnez les valeurs réelles de x pour lesquelles on a $E(x) = 0$.