Estruturas de Dados II

Árvore B: propriedades, busca e inserção

Prof[a]. Juliana de Santi
Prof. Rodrigo Minetto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Material compilado de: Cormen, Notas de aula IC-UNICAMP, IME-USP

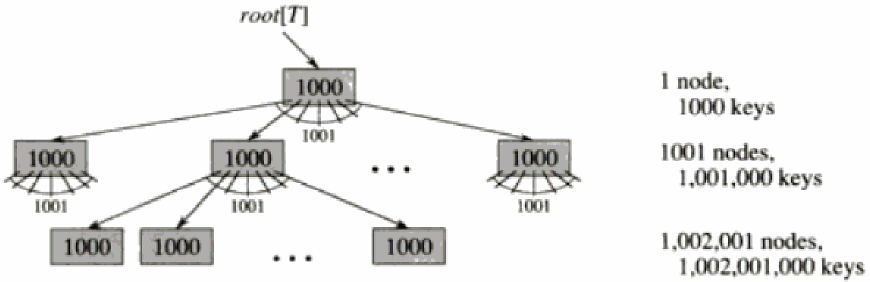
Sumário

1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

Árvores B: **são árvores de pesquisa balanceadas**, projetadas para minimizar operações de E/S de disco. Muitos sistemas de banco de dados usam árvores B ou variações (**B+**) para armazenar informações.

A árvore B foi criada em 1972 por **Bayer** e **McCreight**. Foi desenvolvida no *Boeing Scientific Research Labs*. A razão da letra B é desconhecida. **Árvores B** **diferem** significativamente das árvores AVL (e Rubro-Negras) pelo fato de que seus nós podem ter **muitos filhos**, desde uma dezena até milhares.

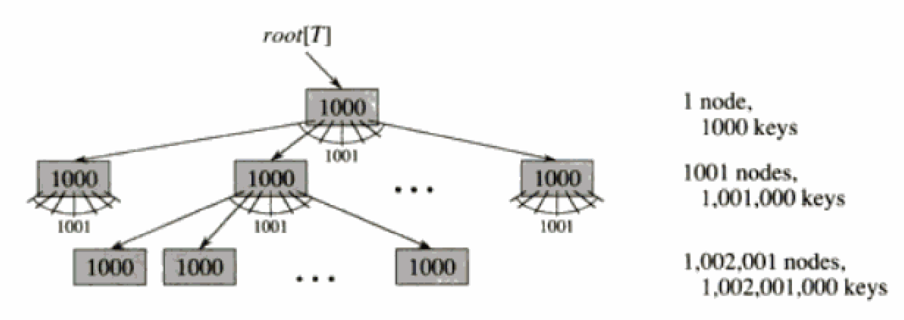
Exemplo: uma árvore B com **altura 2** contendo **mais de 1 bilhão de chaves**.



Introdução

Fatores de **ramificação** (grau da árvore) **entre 50 e 2000** são usados com frequência. Um grande fator de ramificação reduz drasticamente tanto a altura da árvore quanto o número de acessos ao disco necessários para encontrar qualquer chave.

Como o nó raiz pode ser mantido permanentemente na memória principal, apenas 2 acessos ao disco são exigidos para encontrar qualquer chave nessa árvore.



Árvores B **assemelham árvores AVL** (e Rubro-Negras) no fato de que toda árvore B de n nós tem altura $\mathcal{O}(\log n)$ (embora essa altura possa ser consideravelmente menor devido a seu fator de ramificação).

Sumário

1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

Árvore B - Definição

Propriedades de uma árvore **B**:

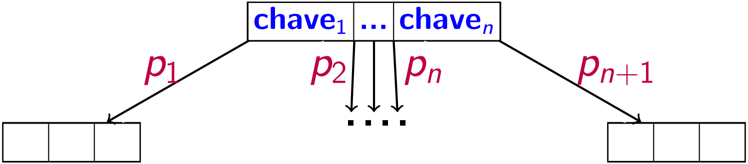
1) Todo nó x tem os seguintes campos:

- $n[\mathbf{x}]$, o número de chaves atualmente armazenadas no nó **x**;
- **as próprias $n[\mathbf{x}]$ chaves**, armazenadas em ordem *crescente*;
- **folha[x]**, um booleano que é **true** se **x** é folha e **false** se **x** é um nó interno.

Árvore B - Definição

Propriedades de uma árvore **B**:

2) Cada nó interno **x** também contém $n[\mathbf{x}] + 1$ **ponteiros** $p_1[\mathbf{x}], p_2[\mathbf{x}], \ldots, p_{n[\mathbf{x}]+1}[\mathbf{x}]$ para seus filhos. Os nós folhas não têm filhos, e assim seus campos p_i são indefinidos (nil).

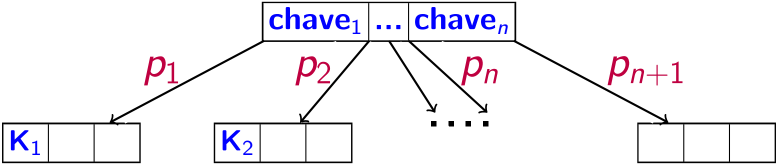


Árvore B - Definição

Propriedades de uma árvore **B**:

3) As chaves $chave_i[\mathbf{x}]$ **separam** os **intervalos de chaves** armazenadas **em cada subárvore**: se k_i é qualquer chave armazenada na subárvore com raiz $chave_i[\mathbf{x}]$, então:

$$k_1 \leq chave_1[\mathbf{x}] \leq k_2 \leq chave_2[\mathbf{x}] \leq \ldots$$



Árvore B - Definição

Propriedades de uma árvore **B**:

4) A construção de uma árvore B garante que **toda folha** tem a **mesma profundidade** (mesmo nível), que é a altura h da árvore.

5) Existem **limites** inferiores e superiores sobre o número de chaves que um nó pode conter. Esses limites são expressos em termos de um inteiro fixo $t \geq 2$ chamado **grau mínimo** da árvore B.

Árvore B - Definição

Propriedades de uma árvore **B**:

5a) Todo nó diferente da raiz deve ter pelo menos $t - 1$ chaves. Assim, todo **nó interno** diferente da raiz tem pelo menos t filhos. Uma árvore não vazia tem raiz com pelo menos uma chave.

5b) Todo nó pode ter no máximo $2t - 1$ chaves, assim um nó interno tem no máximo $2t$ filhos.

Sumário

1 Introdução

2 Propriedades

3 Operações
- Estrutura
- Busca
- Inserção

4 Altura de uma árvore B

5 Bibliografia

Sumário

1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

Árvore B

Uma árvore **B** pode ser definida pela **estrutura**:

```
#define T 3
typedef struct _node {
  int n;            /*Número de chaves!*/
  int folha;        /*Booleano*/
  int chaves[2 * T - 1];
  struct _node *filhos[2 * T];
} No, Arvore;
```

Sumário

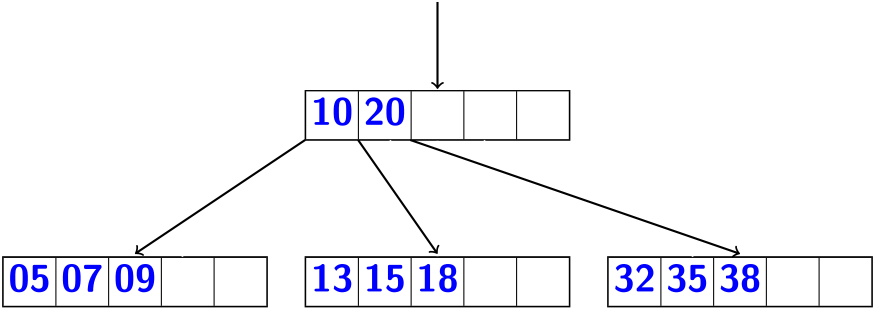
1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

Árvore B - Busca

Pesquisar em uma árvore B é **semelhante** a pesquisar em uma **árvore binária**, exceto que ao invés de uma bifurcação em cada nó, tomamos uma decisão de ramificação de várias vias, de acordo com o número de filhos do nó (generalização da árvore binária).

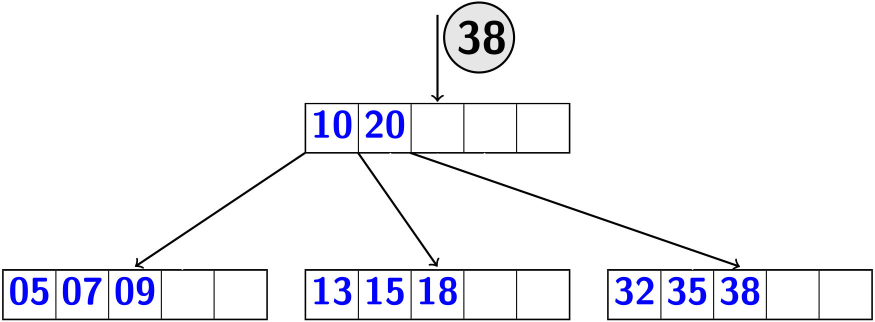
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **‘38’**



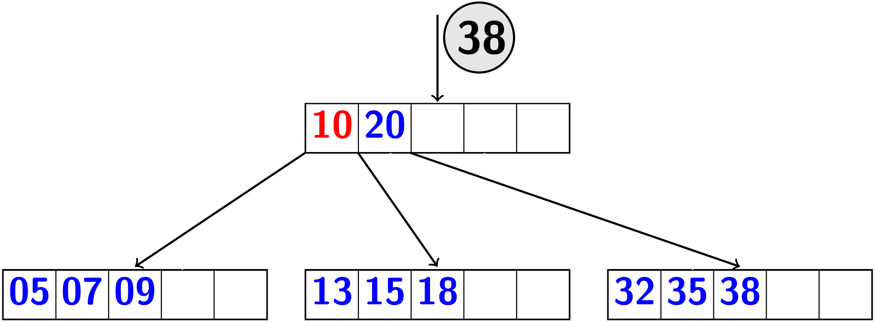
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **‘38’**



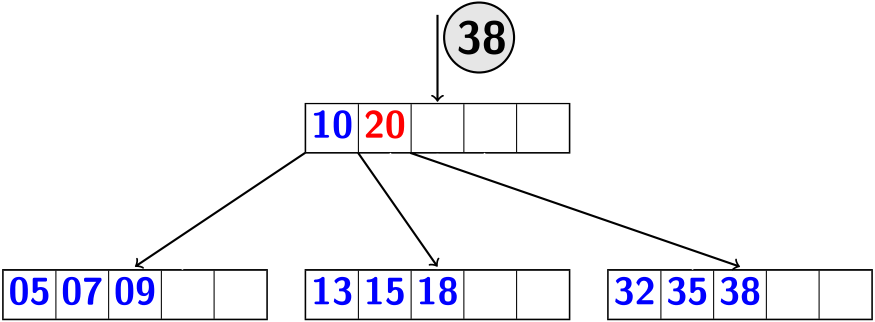
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **‘38’**



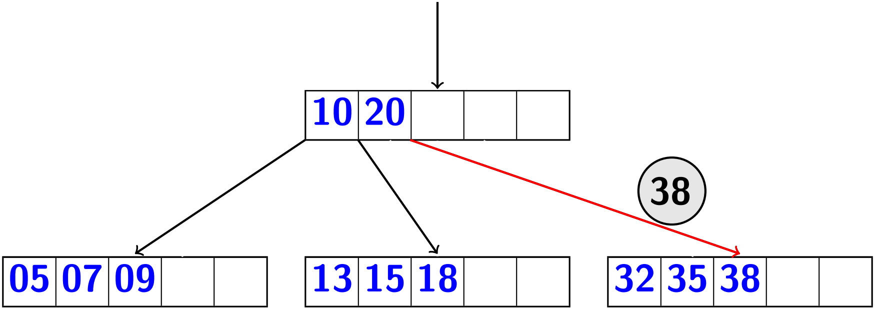
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **‘38’**



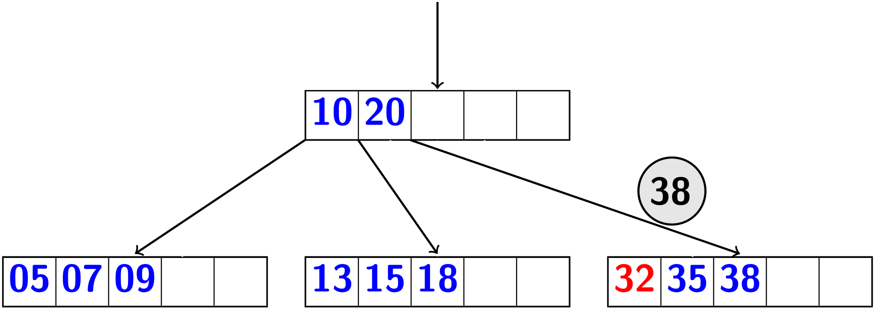
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **‘38’**



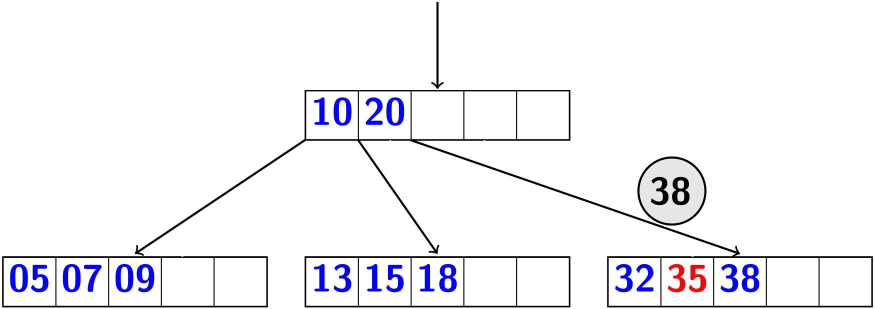
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **'38'**



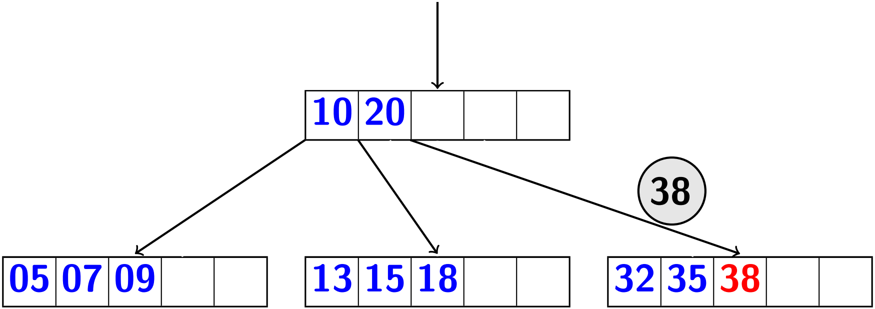
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **‘38’**



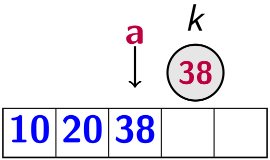
Árvore B - Busca

Suponha uma busca pelo elemento: **'38'**



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

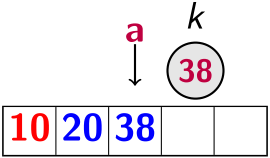
```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

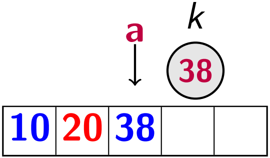
i = 0



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

i = 1



Busca (Arvore $*a$, Chave $k = \mathbf{38}$)

$i = 0$

while $(i < \mathbf{a{\rightarrow}n} \;\&\&\; k > \mathbf{a{\rightarrow}chave}[i])$

    $i = i + \mathbf{1};$

if (($i <$ a$\rightarrow$n) && ($k ==$ a$\rightarrow$chave[i]))

    return FOUND;

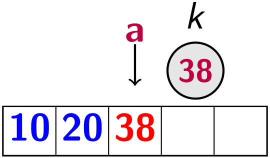
else if (a$\rightarrow$folha)

    return NOT_FOUND;

i = 2

else

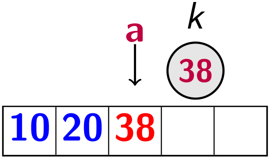
    return **Busca** (a$\rightarrow$filhos[i], k);



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

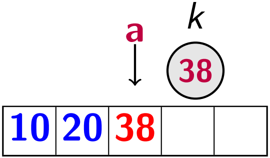
i = 2



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

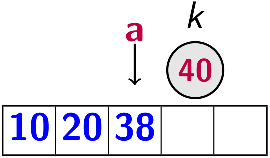
```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

i = 2



Busca (Arvore *a, Chave k = **40**)

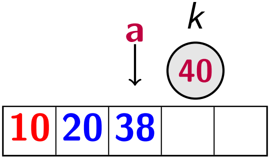
```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```



Busca (Arvore *a, Chave k = **40**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

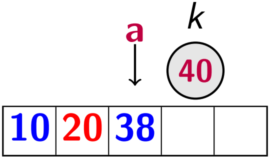
i = 0



Busca (Arvore *a*, Chave k = **40**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

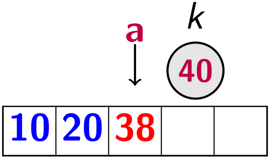
i = 1



Busca (Arvore *a, Chave k = **40**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

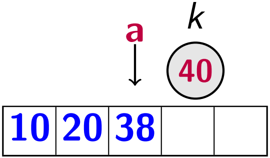
i = 2



Busca (Arvore *a, Chave k = **40**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

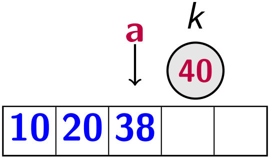
i = 3



Busca (Arvore *a, Chave k = **40**)

```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

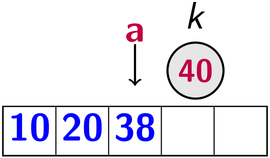
i = 3



Busca (Arvore *a, Chave k = **40**)

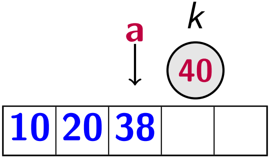
```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

i = 3



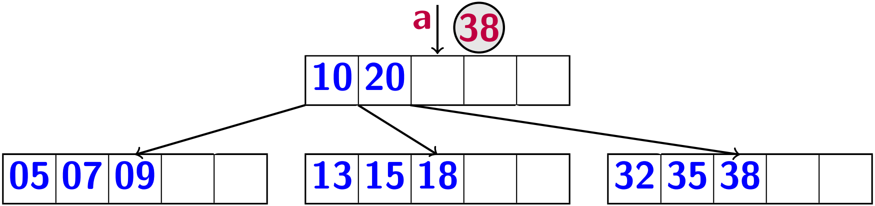
Busca (Arvore $*a$, Chave k = **40**)

```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```



Busca (Arvore *a, Chave k = 38)

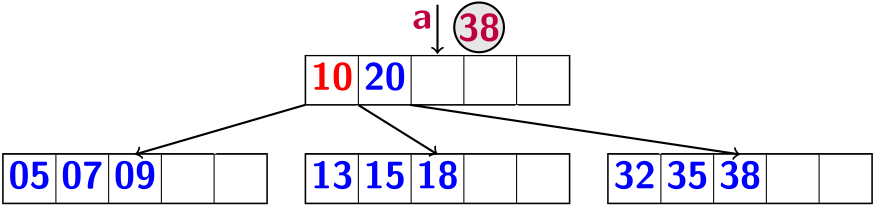
```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

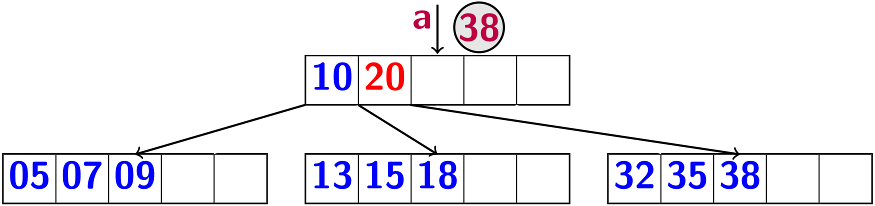
i = 0



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

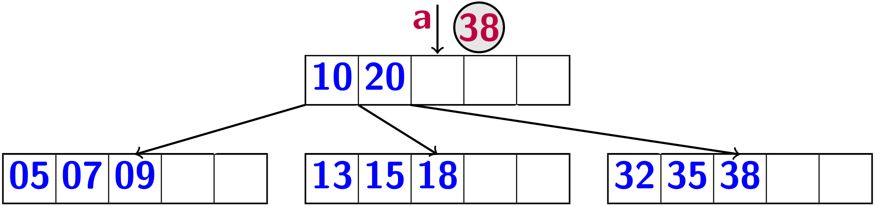
i = 1



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while (i < a→n && k > a→chave[i])
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

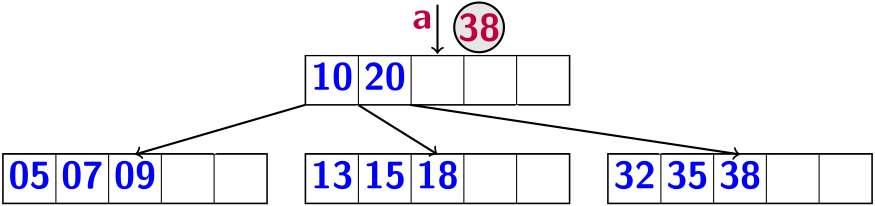
i = 2



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

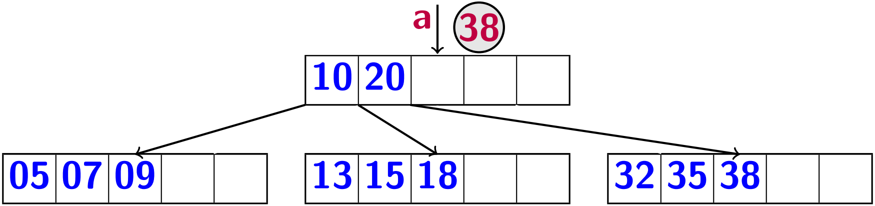
i = 2



Busca (Arvore *a, Chave k = **38**)

```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

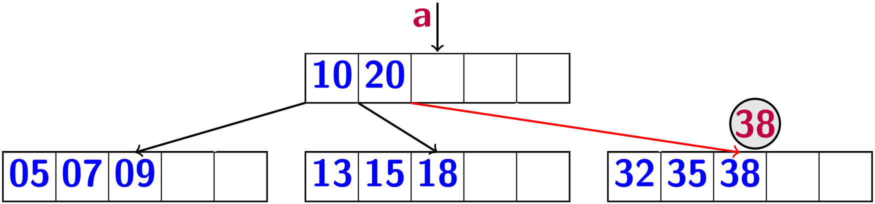
$i = 2$



Busca (Arvore $*a$, Chave k = **38**)

```
i = 0
while ( (i < a→n) && (k > a→chave[i]) )
    i = i + 1;
if ( (i < a→n) && (k == a→chave[i]) )
    return FOUND;
else if (a→folha)
    return NOT_FOUND;
else
    return Busca (a→filhos[i], k);
```

i = 2



Árvore B - Busca

Complexidade: para cada nó, tem-se uma busca linear em **t** chaves (dado que o máximo de chaves é $2t - 1$), então tem-se um custo $\mathcal{O}(\mathbf{t})$. A busca através dos nós tem custo em função da altura **h** da árvore. Logo, a busca na árvore B tem custo $\mathcal{O}(\mathbf{th})$.

Sumário

1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

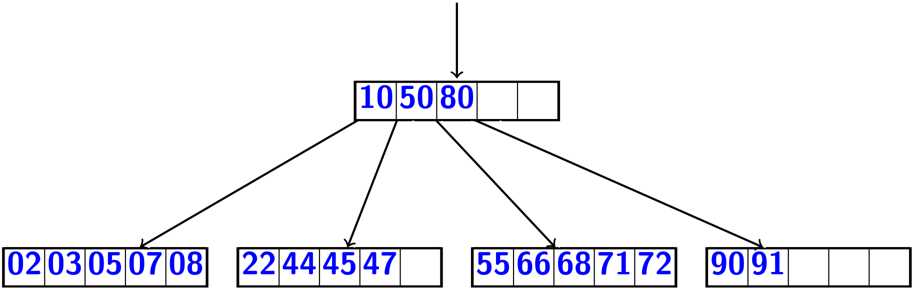
Inserção: a operação de inserção em uma árvore B é relativamente mais complicada, pois, precisamos inserir a nova chave no nó correto da árvore **sem violar** suas propriedades. Mas como proceder caso o nó já esteja **cheio**? Ou seja, já tem $2t - 1$ **chaves**.

Árvore B - Inserção

Devemos **separar** o nó cheio ao redor de sua chave **mediana**, **criando dois novos nós** que não violam as definições da árvore. O elemento **mediano é** então **promovido**, passando a fazer parte do nó pai daquele nó. A **chave é inserida** em um dos novos nós respeitando as definições da árvore.

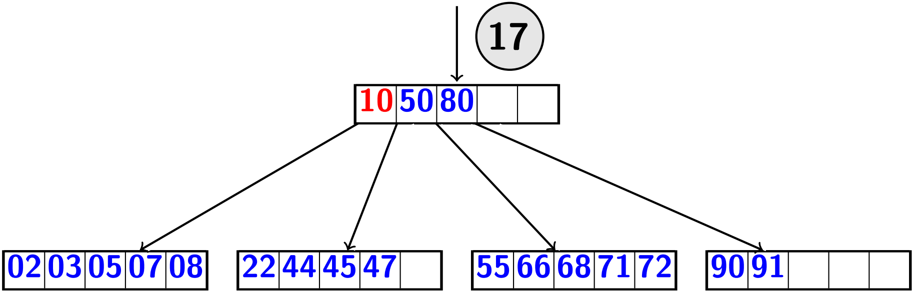
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘17’**



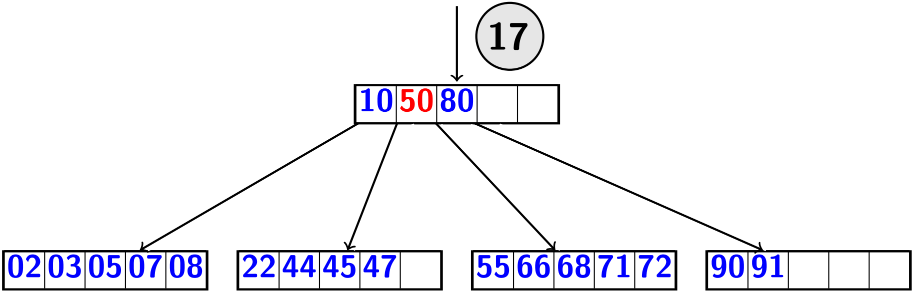
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘17’**

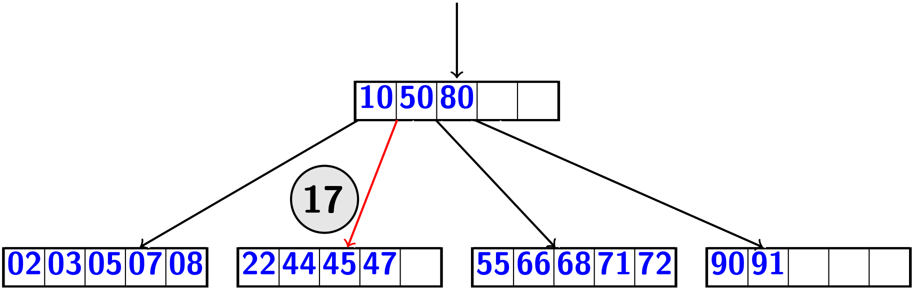


Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **'17'**

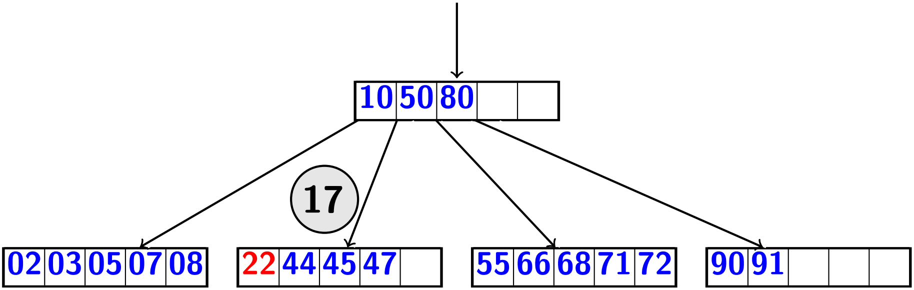


Suponha a inserção do elemento: **'17'**



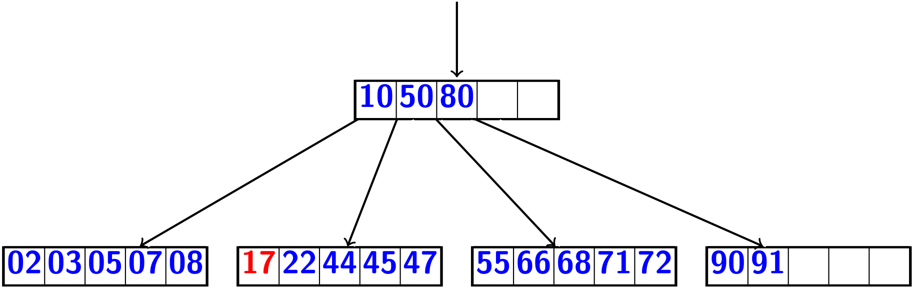
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘17’**



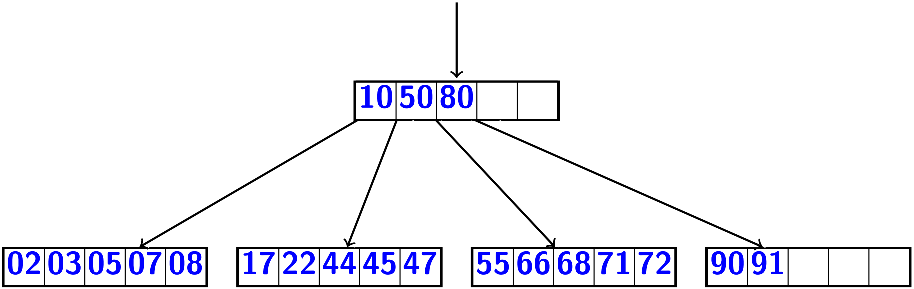
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘17’**

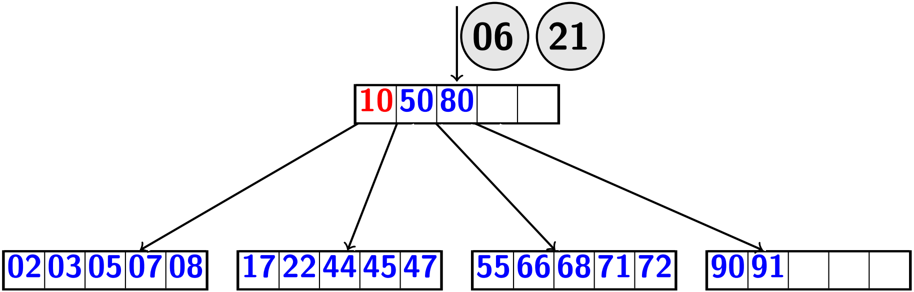


Árvore B - Inserção

Suponha a inserção dos elementos: **‘06’** e **‘21’**

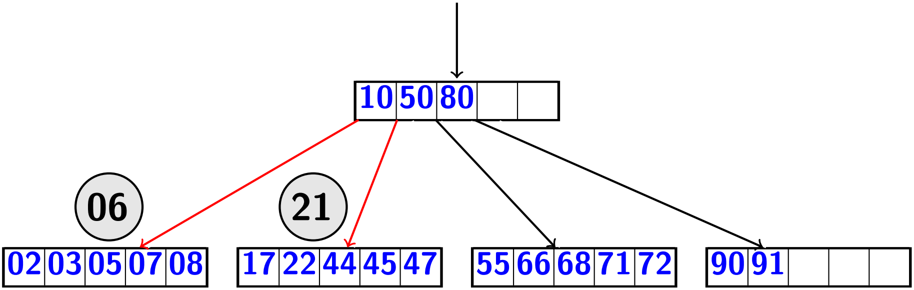


Suponha a inserção dos elementos: **‘06’** e **‘21’**



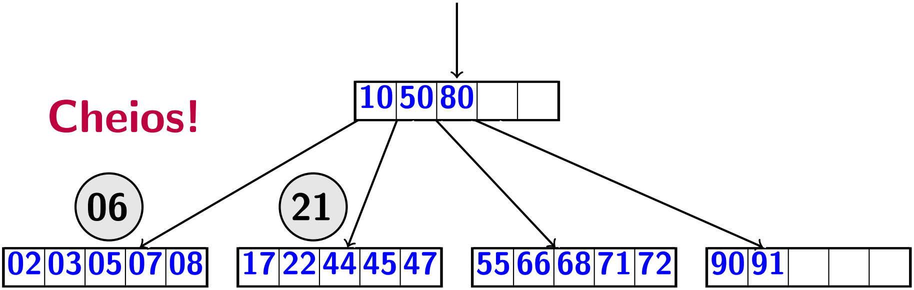
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção dos elementos: **‘06’** e **‘21’**

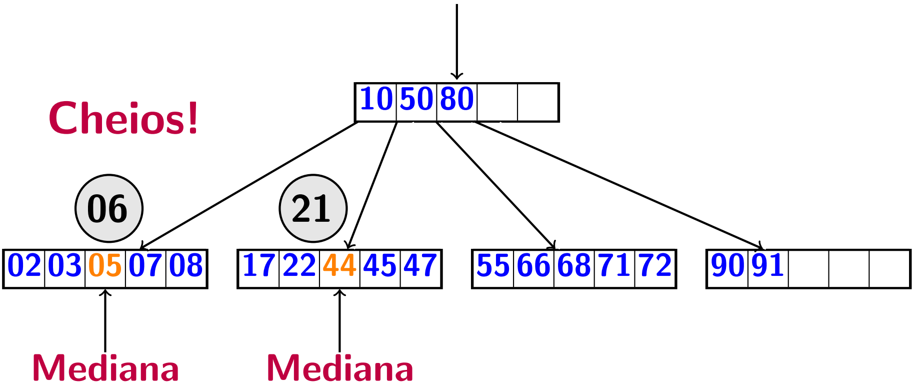


Árvore B - Inserção

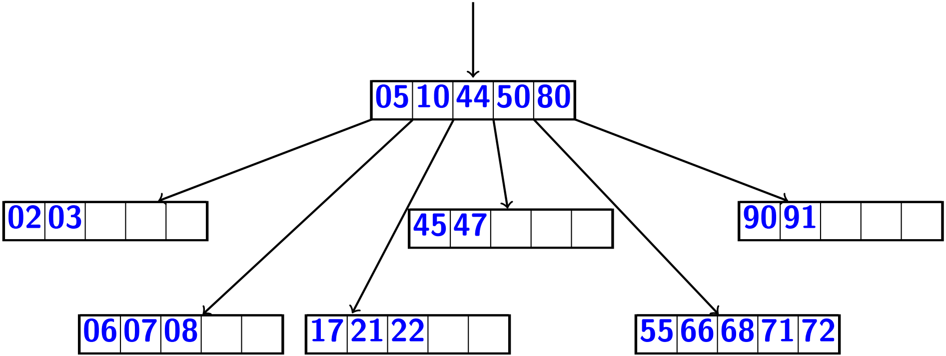
Suponha a inserção dos elementos: **‘06’** e **‘21’**



Divisão do nó completo

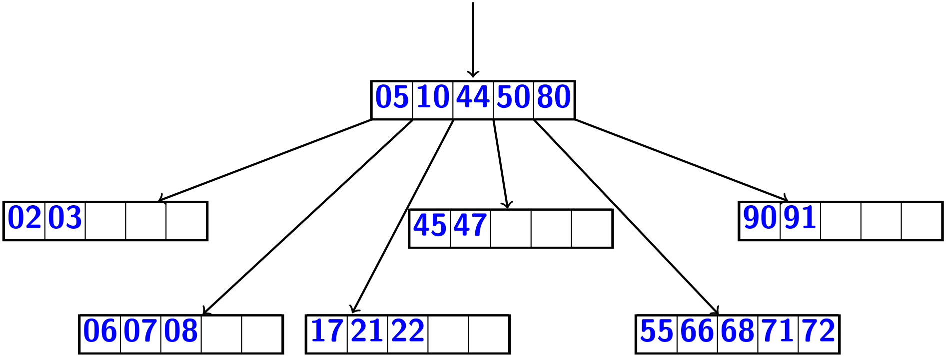


Árvore B - Inserção



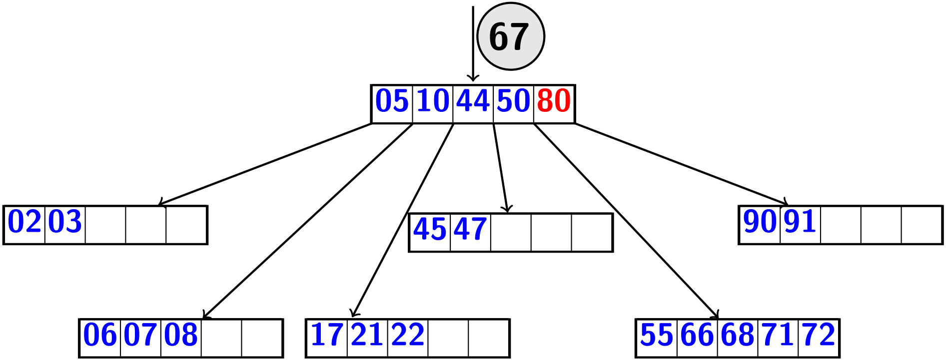
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘67’**



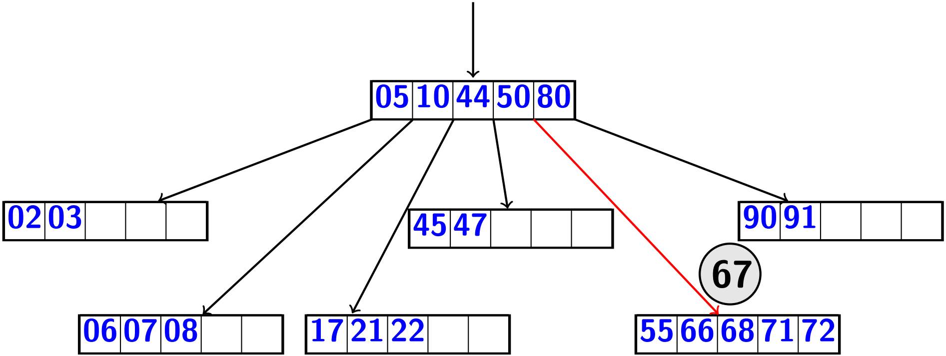
Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘67’**

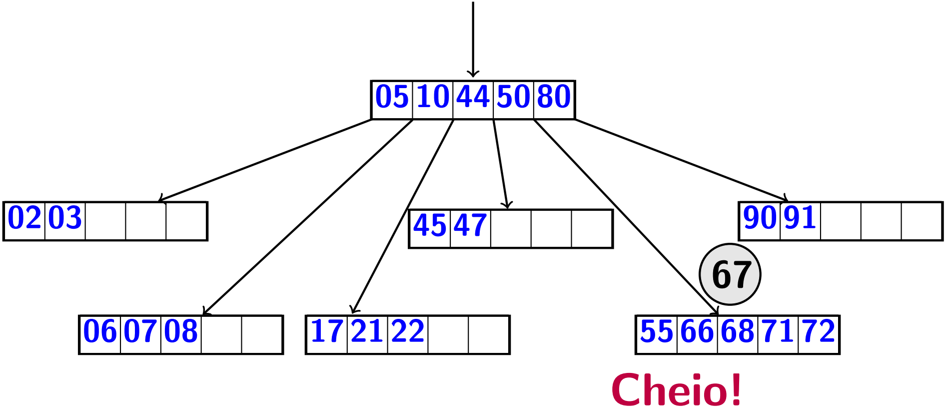


Árvore B - Inserção

Suponha a inserção do elemento: **‘67’**

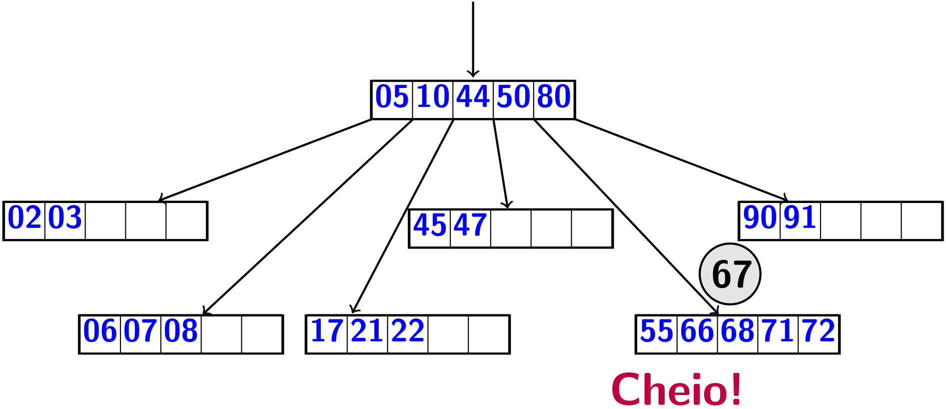


Suponha a inserção do elemento: **'67'**



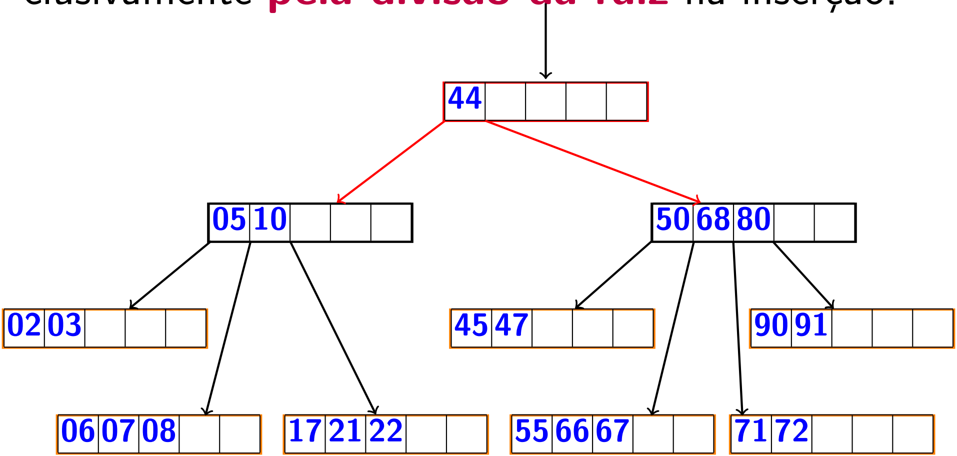
Árvore B - Inserção

Exercício: mostre a árvore após a inserção.



Árvore B - Inserção

A **altura** de uma árvore B **aumenta** única e exclusivamente **pela divisão da raiz** na inserção.



Árvore B - Inserção

Complexidade: a inserção de uma chave k em um árvore B de altura $\mathbf{h}$ é feita em uma única passagem descendente na árvore, exigindo $\mathcal{O}(\mathbf{h})$ acessos ao disco. A ordenação dos elementos é da ordem de $\mathcal{O}(\mathbf{t})$. As divisões dos nós podem se propagar até a raiz, exigindo tempo da ordem de $\mathcal{O}(\mathbf{th})$. Portanto a operação de inserção tem um custo de $\mathcal{O}(\mathbf{th})$.

Sumário

1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

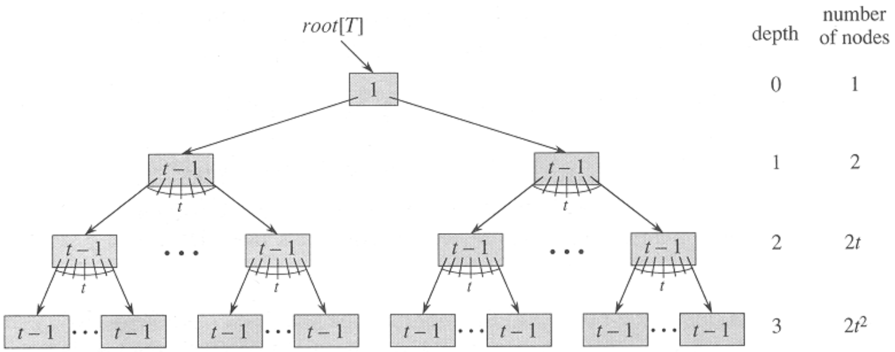
Árvore B - Altura

O número de acessos ao disco exigidos para a maioria das operações em uma árvore B é proporcional à altura da árvore B.

Pergunta: qual a **altura máxima** h de uma árvore B com n chaves no **pior caso?**

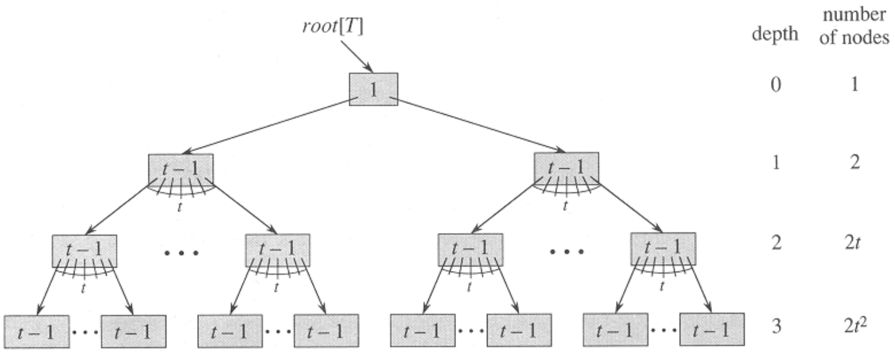
Árvore B - Altura

Teorema: se $n \geq 1$, então para armazenar n chaves em uma árvore B com altura h e grau mínimo $t \geq 2$ é: $h \leq \log_t \frac{n+1}{2}$



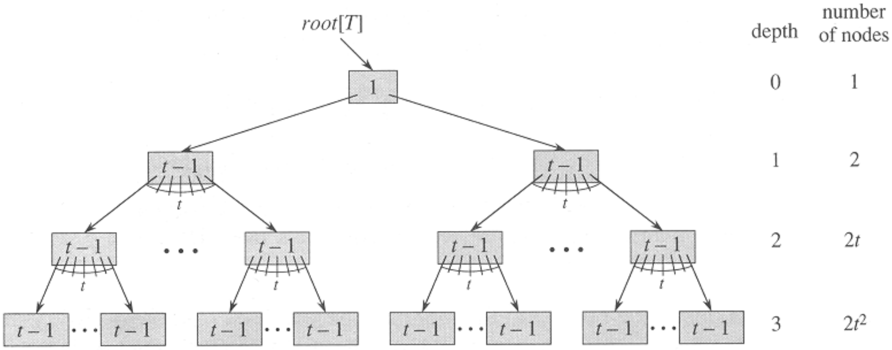
Árvore B - Altura

Note que a árvore B mais esparsa possível acontece quando a raiz contém uma chave e todos os outros nós contêm $t-1$ chaves.



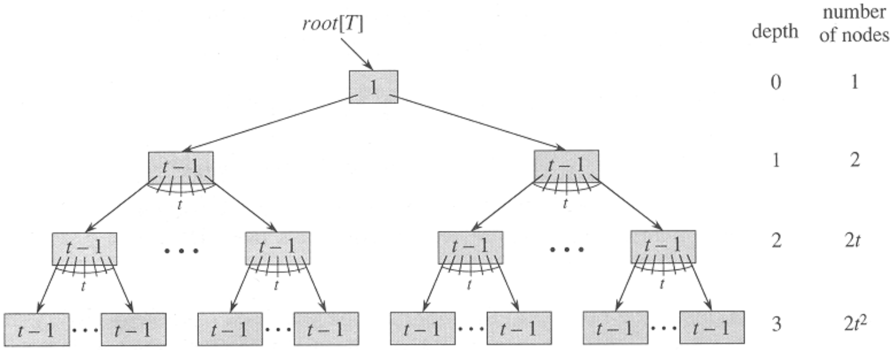
Árvore B - Altura

Nesse caso, existem 2 nós na profundidade 1, $2t$ nós na profundidade 2, $2t^2$ nós na profundidade 3, e $2t^{h-1}$ nós na profundidade h. Então há $\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1}$ nós nesta àrvore B de altura h.



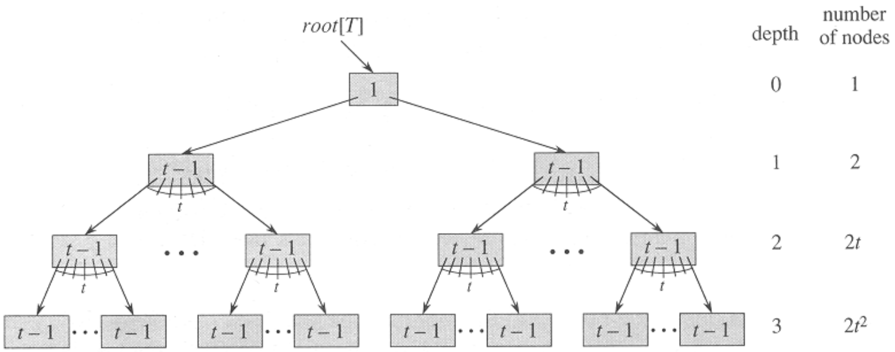
Árvore B - Altura

Logo, o número de chaves neste árvore é:
$1 + (t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1}$: pois cada nó tem $(t-1)$ chaves e o $+1$ vem da raíz que tem uma chave.



Árvore B - Altura

Desse modo, o número n de chaves satisfaz a desigualdade: $n \geq 1 + (t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1}$



Árvore B - Altura

Por definição (A.5 Cormen):

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \tag{1}$$

Ex:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4} 2^k &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \\ &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \end{aligned}$$

Com a fórmula fechada (1) temos: $\frac{2^5-1}{2-1} = 31$

Árvore B - Altura

No caso da altura temos:

$$\sum_{i=1}^{h} t^{i-1} = t^0 + t^1 + t^2 + ... + t^{h-1}$$

Então por Eq(1) temos:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \rightarrow \frac{t^h - 1}{t - 1}$$

Árvore B - Altura

$$
\begin{aligned}
n &\geq 1 + (t-1)\sum_{i=1}^{h} 2t^{i-1} \\
n &\geq 1 + 2(t-1)\left(\frac{t^h - 1}{t-1}\right) \\
n &\geq 2t^h - 1 \\
(n+1)/2 &\geq t^h \\
\log_t((n+1)/2) &\geq \log_t t^h \\
\log_t((n+1)/2) &\geq h
\end{aligned}
$$

Árvore B - Altura

Essa prova **demonstra a capacidade das árvores B**, quando comparadas a árvores AVL e Rubro-Negras. Embora a **altura** da árvore **cresça** na proporção $\mathcal{O}(\log n)$ em ambos os casos, **para as árvores B, a base do logaritmo pode ser muitas vezes maior**.

Árvore B - Altura

Desse modo, as **árvores B poupam** um fator de aproximadamente $\log t$ sobre as árvores AVL e Rubro-Negras **no número de nós examinados** para a maioria das operações de árvores. Tendo em vista que o exame de um nó arbitrário em uma árvore normalmente exige um acesso ao disco, o número de acessos ao disco é substancialmente reduzido.

Sumário

1. Introdução
2. Propriedades
3. Operações
   - Estrutura
   - Busca
   - Inserção
4. Altura de uma árvore B
5. Bibliografia

Referências

[1] Algoritmos: Teoria e prática. Cormen.