



Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Année académique 2007 - 2008



**Reconstitution des mouvements de grande amplitude,
observés en temps réel**
(«animation et visualisation des vibrations de structure»)

Travail de fin d'études présenté par
PACOT Pierre-Emmanuel
en vue de l'obtention du grade académique
d'ingénieur civil électromécanicien (énergétique)
Promoteur Professeur LILIEN J-L.
Institut d'Electricité, Electronique et Informatique (Institut Montefiore)

Reconstitution des mouvements de grande amplitude, observés en temps réel («animation et visualisation des vibrations de structure»)

Travail de fin d'études présenté par PACOT Pierre-Emmanuel en vue de l'obtention
du grade d'ingénieur civil électromécanicien orientation énergétique

Année académique 2007-2008
Université de Liège

Résumé

Ce travail de fin d'études s'inscrit dans le cadre du projet Ampacimon¹. Il développe un algorithme de calcul des grandeurs cinématiques (vitesse et position) en un point d'un câble de distribution d'énergie électrique. Il repose sur la mesure de l'accélération par des accéléromètres MEMS biaxes placés en différents points du module Ampacimon (fixé sur le câble).

La technique numérique, utilisée dans ce mémoire, est le filtre de Kalman. Il fait appel à la combinaison de notions de modélisation et de probabilités (processus stochastiques). Ce filtrage a été appliqué pour reconstruire des mouvements à une, puis à trois dimensions par intégration double de l'accélération. Toutefois, il n'est pas possible de déterminer avec précision les mouvements du câble sur base de la seule mesure de l'accélération. La solution qui correspond le mieux à la physique du problème, est d'imposer à la vitesse une moyenne nulle.

Pour valider les calculs, deux sources de mesures sont à disposition : des essais en soufflerie sur le module Ampacimon (réalisées en 2006) et des simulations de câbles par le logiciel *Samcef Field*.

Pour encore améliorer ces résultats qui ne sauraient pas tenir compte de l'orientation du module, un capteur de vitesse angulaire, comme un gyroscope MEMS, pourrait être ajouté. La fusion des mesures des gyroscopes et des accéléromètres est possible par un filtre de Kalman basé sur un modèle des erreurs de mesures. Les principes généraux ainsi que les équations de base, qui permettent cette implémentation, sont présentés dans ce mémoire.

La réalisation pratique pourrait être vérifiée en laboratoire, dans le cadre du projet Ampacimon.

¹Pour AMPACity MONitoring

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier toutes les personnes sans l'aide desquelles ce travail de fin d'études n'aurait pas été possible. J'aimerais commencer par Monsieur LILIEN pour son aide, ses conseils et sa patience. Je remercie aussi chaleureusement Monsieur GODARD pour sa collaboration à mon travail tout au long des quatre derniers mois. Je souhaite également associer tout le service de transport et de distribution de l'énergie électrique et plus particulièrement Minh pour l'aide qu'il m'a fournie.

Je remercie également Monsieur DESTINÉ, Monsieur GOLINVAL et Monsieur CLOET pour l'intérêt qu'ils voudront bien porter à ce travail.

Je termine en exprimant toute ma gratitude à toutes les personnes qui de près ou de loin m'ont secondé et apporté de précieux conseils. Je cite en particulier Monsieur LÉONARD et Monsieur BORGUET du service de turbomachines et de propulsion aérospatiale ainsi que Monsieur MERCIER du service de mathématique générale.

Merci enfin, à tous mes proches, d'avoir été à mes côtés pour la réalisation de ce travail mais aussi durant mes années d'étude. Je pense tout particulièrement à mes parents, mon meilleur ami, Denis, et ma petit amie, Alice.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notions théoriques liées aux filtres de Kalman	4
2.1	Notions de probabilité attachées aux signaux aléatoires	4
2.2	Probabilités et notions de fréquence	6
2.3	Les bruits blancs	8
2.4	Les systèmes en temps continu	9
2.5	Les systèmes en temps discret	10
2.6	Passage d'un système temps continu vers son équivalent temps discret	10
2.7	Équations générales du filtre de Kalman	12
2.7.1	Les équations de prédiction	12
2.7.1.1	Signal biaisé	15
2.7.2	Les équations de correction	16
3	Implémentation du filtre de Kalman	21
3.1	Filtre de Kalman avec mesures GPS	21
3.1.1	Expression de l'équation de mise à jour de P_k	23
3.1.2	«Undershoot» et «overshoot» initiaux	24
3.1.3	Influence de la forme du signal imposé	28
3.1.4	Influence des conditions initiales	29
3.1.5	Influence des bruits de mesure	30
3.1.5.1	Caractéristiques des bruits de mesure	31
3.1.5.2	Bruitage des signaux	32
3.1.5.3	Bruits de mesures utilisés dans le code	33
3.2	Premiers essais de modélisation	35
3.2.1	«Micro-accelerometer based hardware for wearable computer mixed reality applications»	35
3.2.2	«Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system»	40
4	Filtre de Kalman à une dimension	42
4.1	Les définitions des systèmes continus et discrets	42
4.1.1	Le système continu	43
4.1.2	Le système discret	43
4.1.3	Observabilité	44
4.1.4	Influence du bruit	46
4.1.5	Conditions initiales du filtre	49
4.2	Élimination de la composante continue	50
4.2.1	Utilisation de la fonction «Mean window by window»	52
4.2.2	Fonction «Mean square»	56

5	Résultats du filtre de Kalman avec les mesures et les simulations	61
5.1	Mesures en soufflerie	61
5.1.1	Critiques des mesures	62
5.1.2	Filtrage passe-bas	63
5.1.3	Filtrage en utilisant le filtre de Butterworth	66
5.1.4	Comparaison des deux filtres proposés	66
5.1.5	Biais numériques	69
5.1.5.1	Origine des biais numériques	69
5.1.5.2	Valeurs des biais observés	70
5.2	Simulations par <i>Samcef Field</i>	71
6	Mouvements à trois dimensions	75
6.1	Introduction aux notions nécessaires pour les mouvements à trois dimensions	75
6.1.1	Rappels des notions de mécanique rationnelle	75
6.1.2	Hypothèses générales sur les repères utilisés	76
6.1.3	Hypothèses générales sur les repères utilisés	77
6.1.4	Filtre de Kalman pour des systèmes non linéaires	78
6.2	Reconstitution des grandeurs cinématiques en translation	80
6.2.1	Définition des repères utilisés	81
6.2.2	Cinématique en translation	81
6.2.3	Filtre de Kalman pour la cinématique en translation	85
6.2.3.1	Modélisation à deux degrés de liberté	85
6.2.4	Comparaisons avec les simulations	87
6.2.4.1	Essais en soufflerie	87
6.2.4.2	Simulations avec <i>Samcef Field</i>	87
6.2.5	Solution	91
6.3	Reconstitution des grandeurs cinématiques en rotation	92
6.3.1	Cinématique en rotation	93
6.3.2	Perspectives d'application d'un filtre de Kalman	95
6.3.2.1	Modèle du gyroscope	96
6.3.2.2	Modèle de l'accéléromètre	97
6.3.2.3	Modèle de Kalman	97
6.3.3	Perspectives	99
7	Conclusions et perspectives	100
7.1	Définition d'un filtre de Kalman	100
7.2	Spécificités de l'application	100
7.3	Mouvements à trois dimensions	101
A	Définitions des grandeurs statistiques	I
A.1	Temps continu	II
A.2	Temps discret	II
A.3	Traitement du signal et notions de probabilités	III

B	Les développements mathématiques	IV
B.1	Démonstration de la forme de la matrice de covariance du bruit d'état	IV
B.2	Passage d'un signal aléatoire dans un système linéaire	IV
B.2.1	Dans le cas continu	IV
B.2.2	Dans le cas discret	VI
B.3	Démonstration de l'expression du gain du filtre de Kalman	VII
B.3.1	Dans le cas continu	VII
B.3.2	Dans le cas discret	VIII
C	Calculs des matrices discrètes du système à une dimension	X
C.1	Développement au premier ordre	X
C.2	Développement au deuxième ordre	XI
D	Listing des différentes fonctions utilisées	XIII
D.1	Kalman avec mesure GPS	XIII
D.2	Utilisation de la fonction «Mean window by window»	XIV
D.2.1	Première boucle	XV
D.2.2	Seconde boucle	XV
D.3	Fonction «Mean square»	XVI
D.4	Définition de la fonction	XVI
D.4.1	Utilisation de la fonction pour l'accélération à une dimension .	XVII
D.5	Filtre de Kalman non linéaire	XIX

Table des figures

2.1	Illustration d'une distribution gaussienne d'un processus ϵ_k , source [21]	6
2.2	Schéma de principe des équations de Kalman et de l'implémentation pratique du filtre, source [31]	20
3.1	Illustration du temps nécessaire au filtre de Kalman pour retrouver la vitesse réelle du point quand les matrices de covariance ne sont pas optimisées	25
3.2	Illustration du temps nécessaire au filtre de Kalman pour retrouver la vitesse réelle du point quand les matrices de covariance sont optimisées	26
3.3	Évolution de l'erreur (absolue) a priori maximale en fonction de différentes valeurs de R	27
3.4	Évolution de l'erreur (absolue) a priori moyenne en fonction de différentes valeurs de R	28
3.5	Évolution de la position obtenue pour un signal d'accélération résultant de la superposition de signaux ayant des fréquences différentes	29
3.6	Signaux de vitesse réels et estimés par le filtre de Kalman quand leurs conditions initiales ne sont pas identiques	30
3.7	Bruitage de l'accélération par un bruit blanc gaussien de $snr = 20 \text{ dB}$	32
3.8	Illustration des possibilités du filtre de Kalman à travailler dans un environnement bruité (rapport signal à bruit égal à 5 dB)	34
3.9	Signal de position trouvé par le filtre de Kalman (3.14)	39
3.10	Signal de vitesse trouvé par le filtre de Kalman (3.14)	39
4.1	Évolution de la position calculée par un filtre de Kalman avec mesure de la position par GPS	45
4.2	Évolution de la position calculée par un filtre de Kalman sans mesure de la position par GPS	46
4.3	Illustration de l'influence du bruitage de l'accélération sur le bruit sur la vitesse calculée	47
4.4	Erreur sur la vitesse pour le système «sans entrée»	48
4.5	Erreur sur la vitesse pour le système «avec entrée»	48
4.6	Erreur sur la position pour le système «sans entrée»	48
4.7	Erreur sur la position pour le système «avec entrée»	48
4.8	Schéma de la structure de modélisation d'une mise en série de deux filtres	51
4.9	Position corrigée par la seconde boucle, voir annexe D	54
4.10	Zoom sur la vitesse corrigée par la seconde boucle, voir annexe D	54
4.11	Erreur relative commise sur la vitesse en valeur absolue, avec deux fenêtres	55
4.12	Erreur relative commise sur la vitesse en valeur absolue, avec cinq fenêtres	56
4.13	Vitesse calculée avec la fonction «Mean square» et illustrée entre 40 et 50 s	58
4.14	Évolution de l'erreur sur la vitesse en fonction du temps	59

4.15	Évolution de la position corrigée par «Mean square» entre 20 et 50 s	59
5.1	Schéma des axes de mesures des accéléromètres de la barre	61
5.2	Exemple de signal d'accélération verticale observée lors des mesures en soufflerie	63
5.3	Illustration de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal dans le monde fréquentiel	64
5.4	Illustration de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal dans le monde temporel, source [1]	64
5.5	Comparaison entre le signal d'accélération filtré par le filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie et le signal original	65
5.6	Diagramme de Bode du filtre de Butterworth pour la fréquence de coupure normalisée égale à 0,2	67
5.7	Comparaison entre l'accélération donnée et les accélérations filtrées par les filtres de Butterworth et à réponse impulsionnelle finie	67
5.8	Aire sous la courbe de trois signaux d'accélération : l'originale ainsi que les deux signaux filtrés	68
5.9	Problèmes liés à l'inclinaison des axes des capteurs par rapport à la gravité	69
5.10	Signal d'accélération filtré et dont le biais numérique a été retiré . . .	71
5.11	Signal d'accélération fourni par le logiciel <i>Samcef Field</i>	72
5.12	Calcul de la vitesse sur base de la simulation sous <i>Samcef Field</i> . . .	73
5.13	Calcul de la position (verticale) sur base de la simulation sous <i>Samcef Field</i> sans moyenner la position après le filtre de Kalman	74
5.14	Calcul de la position sur base de la simulation sous <i>Samcef Field</i> après correction à l'issue du filtre de Kalman	74
6.1	Illustration des différents repères considérés à trois dimensions	77
6.2	Illustration d'un premier offset possible sur l'orientation du module .	78
6.3	Vue du boîtier Ampacimon avant les mesures en soufflerie	78
6.4	Illustration de la disposition des capteurs dans le module Ampacimon	79
6.5	Illustration du degré de liberté dans le plan horizontal	82
6.6	Illustration du degré de liberté vertical	82
6.7	Illustration des deux degrés de libertés sur un schéma en trois dimensions	82
6.8	Évolution des positions verticale et horizontale au cours du temps . .	88
6.9	Vitesses verticale et horizontale pour les différents temps de discrétisation	88
6.10	Accélérations verticale et horizontale pour les différents temps de discrétisation	88
6.11	Positions verticale et horizontale pour les différents temps de discrétisation	89
6.12	Comparaison des accélérations horizontale et verticale obtenues par le logiciel <i>Samcef Field</i>	90
6.13	Illustration du caractère non observable de l'estimation de ϕ	91
6.14	Accélération hors plan considérée	91

6.15	Schéma de principe de l'intégration d'un gyroscope pour le calcul de l'orientation	96
------	--	----

Liste des tableaux

3.1	Erreurs associées aux deux formes de l'équation de mise-à-jour de P_k	23
3.2	Erreurs maximales et moyennes pour différentes valeurs de la densité spectrale de bruit, R , des figures 3.3 et 3.4	28
3.3	Estimation de la valeur de crête à crête du bruit, source [5]	31
3.4	Évolution des erreurs relatives (en valeur absolue) en fonction du rapport signal à bruit	34
3.5	Illustration de l'impact du caractère gaussien du bruit : erreurs calculées pour le même rapport signal bruit (20 dB) mais pour cinq simulations consécutives	34
4.1	Erreurs commises sur la vitesse lors de l'évaluation de la seconde boucle de correction.	55
5.1	Tableau de données du logiciel <i>Samcef Field</i>	71
6.1	Tableau comparatif entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman «Unscented», source [11]	80

1 Introduction

Ce travail de fin d'études prend sa place dans le cadre du projet Ampacimon (nom déposé). Ce dispositif fait l'objet d'un projet de recherche subsidié par la Communauté Française de Belgique (ARC 03/07-296) qui rassemble le centre spatial de Liège (CSL), le service de microélectronique (Pr. J.Destiné) et celui de transport et distribution de l'énergie électrique (Pr. J.L. Lilien) de l'institut d'électricité Montefiore (Université de Liège). Le dispositif Ampacimon est protégé par un brevet déposé en septembre 2005.

Ce projet vise à la réalisation du monitoring des lignes électriques aériennes en temps réel pour déterminer l'ampacité de la ligne électrique (c'est-à-dire la puissance que le câble peut encore faire transiter) ainsi que son état de fatigue mécanique. Ce travail concerne la seconde partie du projet c'est-à-dire déterminer les grandeurs cinématiques attachées aux câbles électriques en temps réel.

Les mouvements de grande amplitude consistent en des déplacements d'un ordre de grandeur allant du diamètre des conducteurs à celui de leurs flèches. Les origines de ces mouvements sont multiples, nous pouvons en citer deux : le délestage de lignes (fonte de la neige accumulée) et les courts-circuits. Les fréquences des mouvements sont assez basses : de l'ordre de $0,1\text{ Hz}$ à 3 Hz . Pour reconstruire ces mouvements, nous allons nous appuyer sur les mesures réalisées par le module Ampacimon qui possède quatre accéléromètres biaxes montés de manière intéressante dans le module. Nous détaillerons dans la suite cette disposition et les besoins pour la reconstitution des mouvements à trois dimensions.

La notion de temps réel est en fait très subjective. En effet, d'une part les fréquences des signaux observés sont relativement basses ; ce qui implique un temps d'observation assez long. D'autre part, la chaîne d'acquisition et de transmission des données peut être assez grande. Nous entendons donc par «temps réel» le calcul et la détermination des grandeurs caractéristiques du mouvement, vitesse et position, dans une plage temporelle d'environ deux à trois minutes.

La détermination de ces grandeurs caractéristiques peut être réalisée de deux manières différentes : premièrement par analyse fréquentielle des signaux d'accélération et deuxièmement par intégration temporelle directe. Comme ce mémoire est réalisé en collaboration avec M. GODARD, les résultats doivent pouvoir être intégrés de manière évidente avec son travail. Celui-ci consiste en la détermination du mouvement d'une ligne par propagation d'ondes, à partir des caractéristiques cinématiques d'un ou plusieurs points de la portée. Si nous arrivons à déterminer ces mouvements pour le point de mesures où se situe le module Ampacimon, la reconstruction par propagation d'ondes solutionnerait le problème pour l'ensemble de la portée.

Pour reconstruire le mouvement par intégration directe, nous allons utiliser un

filtre de Kalman. Cette méthode est une technique numérique qui présente trois intérêts principaux.

Premièrement, il s'agit d'une théorie connue et très répandue. En effet, elle trouve une application dans de nombreux domaines et pour des utilisations très diversifiées. Tout d'abord, elle est utilisée dans le contrôle des processus. Nous savons par exemple que ces filtres sont utilisés pour estimer l'état de charge d'un système de stockage électrochimique d'un véhicule hybride. Ensuite, le filtre de Kalman est également très utilisé dans le domaine de la navigation inertielle des véhicules, des avions ou des sous-marins, De plus, il permet la détermination de paramètres inconnus d'un processus : le diagnostic de l'état de santé d'une turbine à gaz. Enfin, une dernière application intéressante à noter se trouve dans le domaine de la biologie réputé assez difficile à modéliser.

Deuxièmement, le filtre de Kalman est une technique numérique très robuste. Il permet de travailler avec des signaux «réels». Nous opposons le sens de réel à celui d'idéal : en pratique, les signaux sont bruités ou bien leurs conditions initiales ne sont pas connues avec précision. Il suffit en quelque sorte de connaître les caractéristiques statistiques des signaux ainsi que la confiance que l'on peut avoir dans son modèle. Le filtre de Kalman trouve dans le domaine de la reconstitution des mouvements en temps réel une application de choix. D'une part, les mesures d'accélération sont fortement bruitées de par la nature même de l'accéléromètre. D'autre part, au moment où un utilisateur lancerait un programme de surveillance des lignes, les caractéristiques du mouvement sont totalement inconnues.

Troisièmement, la réalisation pratique du filtre est très facile. En effet, il repose sur un jeu de cinq équations. Deux de celles-ci permettent de réaliser une prédiction de l'état du système à partir de ses entrées et de sa modélisation, les trois autres réalisent la correction de cette estimation sur base des mesures réalisées. La simplicité du code de calcul est ici aussi une force de cette méthode. Ces équations doivent en effet être codées sur un microprocesseur à l'intérieur du boîtier de mesure Ampacimon. Cette dernière remarque implique également une valeur raisonnable des valeurs des signaux (codage des valeurs en grandeurs binaires).

Dans un premier temps, nous allons introduire les notions théoriques requises pour bien comprendre les implications du filtre de Kalman. Ensuite, pour nous familiariser avec cette technique, nous avons étudié la possibilité de reconstruire le mouvement d'un point à partir de la mesure en ce point de l'accélération unidimensionnelle et de la position (par gps). Ce cas nous permettra de proposer une quantification du «tuning» des différents paramètres du filtre ainsi que d'examiner sa sensibilité aux bruits de mesures.

Nous examinerons ensuite les spécificités liées à notre application : la reconstitution des mouvements sur base de la seule mesure de l'accélération. Nous passerons le

cas d'un mouvement unidimensionnel à celui tridimensionnel. Pour valider nos modèles, nous disposerons de deux sources : des essais en soufflerie réalisés pour étudier le phénomène de galop des câbles électriques ainsi que de simulation de mouvement par le logiciel *Samcef Field*.

Enfin, lors de la reconstitution des mouvements de grande amplitude, nous avons pu remarquer qu'il serait judicieux de déterminer l'orientation du module Ampacimon en temps réel. La reconstitution de cette grandeur nécessite l'ajout d'un ou plusieurs gyroscopes comme capteurs supplémentaires du module Ampacimon. Nous examinerons les modifications à apporter pour déterminer les grandeurs cinématiques en rotation.

2 Notions théoriques liées aux filtres de Kalman

Dans cette section, nous détaillerons les notions théoriques requises pour la bonne compréhension de la méthode du filtre de Kalman. Comme il s'agit d'une méthode assez connue et répandue, les notions de base peuvent se trouver dans de nombreuses publications ou livres de référence sur le sujet. Toutefois, nous conseillons quelques ouvrages ou textes bien construits, présentant de manière claire le sujet ; nous signalons en outre que les trois premières références sont disponibles librement sur Internet :

- «An introduction to Kalman filtering»[31]
- «Une introduction au filtre de Kalman»[7]
- «Introduction aux processus stochastiques - notes de cours» [16]
- «Application of the Kalman filter to health monitoring of gas turbine engines. A sequential approach to robust diagnosis» [23]

La théorie des filtres de Kalman est une théorie qui se trouve à la frontière entre plusieurs domaines des sciences mathématiques et de l'ingénieur. D'une part, elle fait appel à la théorie des systèmes qui a pris une place importante dans les notions d'un ingénieur. Elle offre un outil de modélisation très puissant et d'une grande souplesse qui permet son implémentation dans des codes de calculs numériques. Un autre avantage de la théorie des systèmes est la simplicité de la définition de systèmes complexes sur base de leur dynamique. D'autre part, les filtres de Kalman utilisent les notions des processus stochastiques et plus largement des probabilités pour fournir une estimation de «l'état d'un système»². En outre, nous ferons également appel au cours de ce mémoire à des notions issues du traitement du signal.

2.1 Notions de probabilité attachées aux signaux aléatoires

Tout d'abord, nous allons introduire les notions statistiques que nous jugeons intéressantes à rappeler pour comprendre la théorie sur les filtres de Kalman, toutefois les définitions des grandeurs statistiques de base que nous utilisons se trouvent en annexe A. Comme les processus gaussiens sont au cœur de la théorie des filtres de Kalman, nous allons expliciter les particularités de ce type de distribution. La justification de l'utilisation de la distribution gaussienne tient dans le fait de sa simplicité mathématique et son efficacité pratique. Elle est alors intéressante pour modéliser les erreurs aléatoires. En outre, nous savons que si un processus est gaussien, ce dernier est entièrement déterminé par ses deux moments statistiques : la moyenne et la variance. D'ailleurs, la fonction de distribution statistique de Gauss, pour une variable x , donnée par la relation (2.1), illustre bien cette remarque.

²Nous reviendrons, dans la suite de cette section, sur cette notion d'état d'un système et plus largement sur la définition d'un système

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x^2} e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma_x^2}} \quad (2.1)$$

Comme ces notations de la formule (2.1) sont différentes de celles que nous utilisons, nous définissons la moyenne du signal x , par la fonction \hat{x} et sa variance par la fonction σ_x^2 . Nous pouvons noter que l'intégrale de la fonction de distribution de probabilité sur l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction aléatoire x est égale à un, soit mathématiquement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1 \quad (2.2)$$

Comme précisé dans l'annexe A, si la variable x comporte plus d'une dimension, les notions statistiques développées s'étendent facilement. Soit donc x un vecteur de dimension q caractérisé par une distribution gaussienne, sa fonction de probabilité s'écrit alors selon la formule (2.3).

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^q |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\hat{x})^T \Sigma^{-1} (x-\hat{x})} \quad (2.3)$$

Dans cette expression, $\hat{x} = \mathbf{E}[(x)]$ est la moyenne ou le moment statistique d'ordre un et $\Sigma = \mathbf{E}[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$ est la matrice de covariance, de dimensions $q \times q$ attachée à la variable aléatoire. Dans le cadre des processus stochastiques, nous pouvons donner une signification physique aux différents termes. Nous citons ici ALAZARD D. :

«Soit $x(t)$ un signal aléatoire ou processus stochastique, il s'agit d'une fonction du temps tel que pour tout t fixé, $x(t)$ corresponde à une valeur de la variable aléatoire χ .»[7] .

Les liens entre la théorie des filtres de Kalman et le traitement de signal sont très étroits. Ainsi, la fonction d'autocorrélation définie dans le cadre de la théorie du traitement du signal est équivalente au moment d'ordre deux centré défini dans les notions de probabilités. Ainsi les termes diagonaux de la matrice de covariance sont les fonctions scalaires d'autocorrélation de chaque composante et les termes non diagonaux sont les fonctions scalaires d'intercorrélations entre composantes.

Pour illustrer notre propos sur la distribution gaussienne, nous fournissons un exemple de distribution gaussienne d'un processus ϵ_k . Il permet de saisir le sens physique de la fonction de répartition. Nous citons pour cela la thèse de doctorat de M.DEWALLEF :

«The probability of the measurement noise ϵ_k to take values in the interval 3σ et -3σ is :

$$P(-\sigma < \epsilon_k < \sigma) = \int_{-3\sigma}^{3\sigma} p(\epsilon_k) d\epsilon_k = 0,998 \quad (2.4)$$

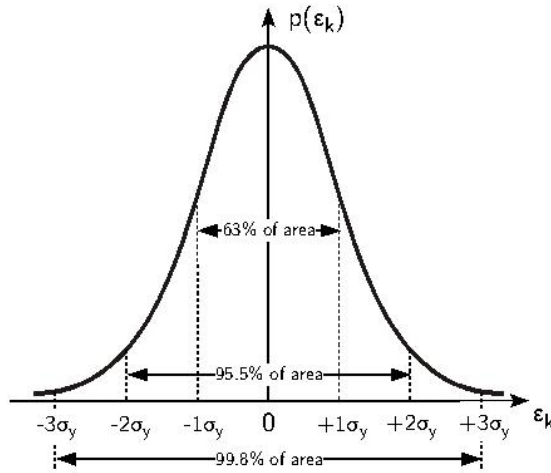


FIG. 2.1 – Illustration d’une distribution gaussienne d’un processus ϵ_k , source [21]

This interval is called the confidence interval because, in the case of an unbiased measurement, it represents the interval in which the actual value can be assumed to lie with a risk of $1 - 0,998 = 0,2\%$ »[23]

Les filtres de Kalman utilisent énormément des signaux aléatoires gaussiens centrés. Ces signaux suivent donc une loi de distribution statistique de type gaussienne. Le terme centré implique que le signal est de moyenne nulle. Ce dernier est donc entièrement défini par sa fonction d’autocorrélation.

2.2 Probabilités et notions de fréquence

Nous devons introduire une dernière notion liée au calcul des probabilités : la densité spectrale de puissance d’un signal aléatoire. Cette notion se base sur le concept d’analyse harmonique d’un signal et de détermination de son spectre complexe. Tout d’abord, nous allons donner les outils mathématiques nécessaires à la bonne compréhension des notions.

Premièrement, comme le calcul de la densité spectrale demande un changement de variable pour passer du monde temporel vers celui des fréquences, nous devons utiliser le concept des transformées de Laplace et de Fourier d’un signal. De manière générale, la transformée de Laplace, $X(s)$, d’un signal $x(t)$ est donnée par la formule (2.5).

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.5)$$

La variable s est la nouvelle variable qui remplace le temps ; dans le cas de la transformée de Laplace, cette variable s'exprime par :

$$s = \sigma + j \omega$$

Mathématiquement, la transformée de Fourier est la valeur de la transformée de Laplace sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire pour $\sigma = 0$. La transformée de Fourier est alors de la forme générale présentée par l'équation (2.6).

$$X(j \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j \omega t} dt \quad (2.6)$$

En outre, le passage de la variable fréquentielle vers le mode temporel se réalise par les transformées inverses. La transformée inverse de Fourier est alors donnée par la relation (2.7).

$$x(\tau) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j \omega \tau} d\omega \quad (2.7)$$

Les transformées sont donc des outils mathématiques pour analyser les fréquences qui caractérisent les signaux. De plus, ces transformées permettent dans certains cas de faciliter l'expression des équations qui modélisent les systèmes physiques. Nous pouvons citer le fait que la dérivation par rapport à la variable temporelle devient une simple multiplication par la nouvelle variable, s , dans le cas des transformées de Laplace.

Maintenant que nous avons les outils pour réaliser une analyse fréquentielle, nous pouvons donner la définition du spectre complexe d'un signal aléatoire stationnaire. Cette notion de stationnarité est importante car les phénomènes transitoires sont caractérisés par des fréquences propres qui modifient le spectre complexe en accentuant l'amplitude associée à ces fréquences. Nous donnons ci-après la définition de M.HAYKIN :

«The power spectral density $S_x(\omega)$ and the intercorrélacion function $R_x(\tau)$ of a wide-sense stationary process $X(t)$ form a Fourier transform pair as shown by the pair of relations :

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j \omega \tau} d\tau \quad (2.8)$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j \omega \tau} d\omega \quad (2.9)$$

This pair of equations constitutes the «Einstein-Wiener-Khintchine» relations for a wide sense stationary process.»[27]

Nous rappelons la définition de la fonction d'autocorrélacion (relation (A.11)) donnée en annexe A :

$$R_x(\tau) = \mathbf{E} [X(t) X(t - \tau)^T]$$

Si nous reprenons ensuite la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance, nous voyons apparaître une analogie en $\tau = 0$. En effet, nous pouvons écrire que :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (2.10)$$

2.3 Les bruits blancs

Dans la théorie des filtres de Kalman, le bruitage des signaux est un problème clé et constitue un des intérêts de la technique. Mais avant tout, il convient de s'entendre sur la classe de bruits ainsi qu'à leurs propriétés. Les bruits les plus aisés à utiliser sont les bruits blancs gaussiens. Nous citons ici, l'article de «Bruit de fond et mesures - Aspects théoriques» [17] qui nous donne la définition :

«Par analogie avec la lumière blanche, qui est composée de toutes les couleurs, on désigne par un bruit blanc, un signal aléatoire $X(t)$ dont la densité spectrale est indépendante de la fréquence et égale à une constante.»[17]

Physiquement, cette propriété signifie que les valeurs du signal pris à deux instants successifs ne sont pas corrélées[7]. Si le bruit blanc est gaussien, il suit une loi de distribution gaussienne donnée par sa variance et sa moyenne. En outre, la densité spectrale d'un bruit blanc est donnée par la relation simple :

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (2.11)$$

La densité spectrale d'un bruit blanc est une constante et le facteur 0.5 permet de pondérer la puissance spectrale N_0 sur l'ensemble des fréquences (fréquences positives et négatives).

Mathématiquement, un processus aléatoire, $x(t)$, est un bruit blanc s'il suit les règles données par les équations 2.12.

$$\mathbf{E}[x(t)] = 0 \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{E}[x^2(t)] = \sigma_x^2 \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{E}[(x(t) x(\tau))] = 0 \quad \forall t \neq \tau \quad (2.12c)$$

Les deux dernières expressions peuvent se ramener à une seule en se rappelant la propriété du delta de Kronecker, δ_{ij} , tel que :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.13)$$

Alors, la matrice de covariance de la grandeur aléatoire $x(t)$ s'exprime par la relation :

$$\mathbf{E}[(x(t) x(\tau))] = \sigma_x^2 \delta(t - \tau) \quad (2.14)$$

2.4 Les systèmes en temps continu

Pour réaliser un filtre de Kalman, il est nécessaire de définir le système de manière précise en identifiant ses entrées et ses sorties. La modélisation d'un tel système repose sur les équations (2.15). L'équation (2.15a) est appelée l'équation d'état du système et l'équation (2.15b) est l'équation d'observation des sorties du système si le système peut être modélisé par des équations «continues temporellement». Cette définition est liée à la modélisation d'un système comme une boîte noire possédant un ensemble d'entrée et de sorties. En outre, nous opposons par cette notion de «système en temps continu» à la notion de système discret ou échantillonné. Enfin, cette définition des systèmes entraîne un certain nombre d'hypothèses : les systèmes considérés sont linéaires et temps invariants. Toutefois, des systèmes non linéaires peuvent être réalisés moyennant quelques adaptations de la méthode. Nous aborderons ce sujet dans la section 6.

$$\dot{x} = Ax + Bu + Mw \quad (2.15a)$$

$$y = Cx + v \quad (2.15b)$$

La grandeur x est appelée le vecteur d'état du système ; sa seule définition est suffisante pour connaître la dynamique du système. L'entrée du système est modélisée par le signal u . Deux signaux représentent les bruits de «processus» et de mesure, respectivement, w et v : ils constituent également des entrées du système. Ces signaux ne sont pas connus a priori et peuvent constituer des sources d'erreur comme leur dynamique n'est pas connue. Nous verrons par la suite comment le filtre de Kalman permet de prendre en compte ces incertitudes. En outre, cette définition fait apparaître les matrices A , B , C et M . Si le système est correctement défini ces matrices sont indépendantes du temps.

L'équation d'observation (2.15b) exprime qu'une grandeur du système, modélisée par un élément du vecteur d'état, est mesurée. De manière idéale, l'observation doit porter sur la grandeur de sortie du système. Cette définition est très courante dans le domaine des systèmes. En pratique, il n'est toutefois pas possible de mesurer la grandeur de sortie du système : le problème de la mesure de grandeurs sans interférer sur la dynamique du système est un exemple de cette difficulté pratique. On ne mesure donc pas forcément la sortie au sens physique d'un système mais une grandeur de ce système que la modélisation détermine comme étant observée.

Cette remarque est en fait excessivement importante dans la théorie des systèmes. En effet, des systèmes peuvent être non observables : les grandeurs mesurées ne permettent pas de déterminer l'état du système courant. Cette notion entraîne alors celle d'observabilité d'un système par opposition. Mathématiquement, cette condition d'observabilité consiste en la vérification que la matrice W_0 , définie par la relation (2.16), soit de rang plein³.

³ n si la matrice définissant le système est une matrice carrée de dimension n

$$W_0 = \begin{pmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

2.5 Les systèmes en temps discret

La seule possibilité de définition d'un système par le temps continu est réducteur. Bon nombre de processus réels sont des processus en temps continu mais les signaux de mesures réalisées sur ces systèmes sont échantillonnés et donc de nature discrète. Toutefois, il est possible de passer d'une définition de système en temps continu vers son équivalent en temps discret moyennant un certain nombre d'opérations mathématiques.

Avant de donner les détails du passage continu vers le discret, nous allons donner les équations générales d'un système en temps discret, équations données par les relations (2.17). Par analogie avec le temps continu, le vecteur d'état du système est x_k . Comme le montre l'équation d'état (équation (2.17a)), la connaissance de l'état précédent, x_{k-1} , de l'entrée du système au temps précédent, u_{k-1} , et des bruits du processus, w_{k-1} modélisant les erreurs du modèle, permettent de déterminer l'état courant du système par son vecteur d'état.

La seconde équation ((2.17b)) exprime l'équation d'observation de la sortie du système en temps discret. Les remarques faites précédemment sur la définition de la sortie d'un système s'appliquent toujours.

$$x_k = A_d x_{k-1} + B_d u_{k-1} + M_d w_{k-1} \quad (2.17a)$$

$$y = C_d x_k + v_k \quad (2.17b)$$

Les systèmes en temps discret sont donc caractérisés par des définitions très semblables. Un paramètre important de ces derniers est le pas de la discrétisation. Ce dernier joue un rôle clé dans les définitions. Physiquement, dans le cas d'une discrétisation temporelle, sa valeur est l'inverse de la fréquence d'échantillonnage, nous le noterons dans la suite par le symbole dt (équation (2.18)).

$$dt = \frac{1}{f_s} \quad (2.18)$$

2.6 Passage d'un système temps continu vers son équivalent temps discret

Au regard de notre propos, il semble intéressant de définir un système en temps continu, de juger de son observabilité puis de passer à son équivalent temps discret

pour réconcilier cette définition avec l'échantillonnage des mesures. La définition d'un système temps continu présentant l'avantage de correspondre au sens physique que l'on peut avoir du processus «réel».

Les notes de cours de ALAZARD D.[7] fournissent le raisonnement ainsi que les développements mathématiques qui permettent de passer d'un système temps continu vers un système temps discret. Nous allons présenter ces développements qui fournissent la signification physique des opérations nécessaires.

Soit donc un système temps continu, de la forme donnée par les équations (2.15). L'intégration de l'équation (2.15a) entre les instants t_0 et t permet de trouver la forme générale du vecteur d'état (défini par les équations (2.15)) :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

Soit dt le pas de temps de la discrétisation temporelle, le vecteur d'état aux temps t_0 et t s'exprime alors de la manière suivante : $t_0 = k dt$ et $t = (k+1) dt$.

Il vient ainsi que :

$$x(k+1) = e^{A dt} x(k) + \left(\int_{k dt}^{(k+1) dt} e^{A(k+1) dt - \tau} B d\tau \right) u(k) + \int_{k dt}^{(k+1) dt} e^{A(k+1) dt - \tau} M w(\tau) d\tau$$

Soit ensuite le changement de variable $(k+1) dt - \tau = v$ qui implique $d\tau = -dv$; il vient ainsi :

$$x(k+1) = e^{A dt} x(k) + \left(\int_0^{dt} e^{A v} B dv \right) u(k) + \int_0^{dt} e^{A v} M w((k+1) dt - v) dv$$

La comparaison de cette dernière équation avec l'expression générale du système discret (donnée par l'équation (2.17)) permet de trouver les relations pour passer du système continu vers le système discret, données par les relations (2.20)⁴.

$$A_d = e^{A dt} \quad (2.20a)$$

$$B_d = \int_0^{dt} e^{A v} B dv \quad (2.20b)$$

$$C_d = C \quad (2.20c)$$

Ces équations font toutefois apparaître une exponentielle de matrice. Nous devons donc introduire cette notion pour expliquer le moyen d'évaluer les matrices discrètes. Nous rappelons le développement de Taylor de l'exponentielle d'une fonction, $x(t)$, autour de zéro par les équations (2.21).

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \mathbf{O}(dt^3) \quad (2.21)$$

⁴Les expressions des matrices des différents bruits sont données par les équations (2.27)

L'expression de l'exponentielle matricielle se détermine alors par analogie : l'équivalent de l'unité est la matrice unité I (de mêmes dimensions que la matrice A) et la grandeur x est remplacée par une matrice. On obtient de cette façon l'expression :

$$e^{A dt} = I + A dt + \frac{A^2 dt^2/2}{2!} + \mathbf{O}(dt^3)$$

2.7 Équations générales du filtre de Kalman

Nous venons de donner les définitions générales des systèmes et avons donné les moyens de passer d'un système en temps continu vers un système en temps discret. Nous pouvons maintenant définir un système de manière physique en temps continu puis passer à son équivalent en temps discret. Par la suite, nous parlerons des équations du filtre de Kalman, nous utiliserons la notation en temps discret puis nous discuterons du modèle et nous utiliserons la notation en temps continu. Il est à noter que le filtre de Kalman peut être défini sur base d'un système en temps discret.

Comme dit dans l'introduction, le filtre de Kalman se base sur un jeu de cinq équations. Deux premières qui réalisent une prédiction de l'état du système considéré, que nous appellerons équations de prédiction (équations (2.24)). Les trois autres équations réalisent la correction de la prédiction. Cette correction est permise par la définition du gain du filtre de Kalman qui permet également la prise en compte des mesures réalisées. En outre, nous rappelons que le filtre de Kalman est un filtre «itératif» ; il nécessite donc une initialisation du vecteur d'état ainsi que de l'erreur associée à ce vecteur.

2.7.1 Les équations de prédiction

Premièrement, les deux équations de prédiction estiment chacune une grandeur différente. La première est la plus simple car elle découle directement de la notion des systèmes que nous avons donné dans la section précédente (équations (2.15)). L'incertitude sur la connaissance du système étant simplement éliminée car il s'agit ici de donner une estimation de l'état. La grandeur \hat{x}_k signifie ici que la grandeur x_k est estimée. L'exposant $-$ signifie quant à lui que la grandeur x_k est estimée a priori. Cette notion d'estimation a priori signifie que cette estimation du vecteur d'état n'est due qu'à la connaissance du système (ou bien sa modélisation) et ne tient pas compte de toute autre évolution. On obtient ainsi l'équation (2.24a).

La seconde équation demande l'introduction de deux grandeurs supplémentaires : les matrices de covariance de l'erreur a priori et de covariance du «bruit du processus». Nous allons commencer par discuter de la matrice de covariance de l'erreur a priori. Nous pouvons définir deux types d'erreur : l'erreur a priori (équations (2.22a)) et l'erreur a posteriori (équation (2.22b)).

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (2.22a)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (2.22b)$$

Mathématiquement, on écrit donc deux matrices de covariance⁵ : l'une sur l'erreur a priori (équation (2.23a)) et la seconde sur l'erreur a posteriori (équation (2.23b)).

$$P_k^- = \mathbf{E} \left[e_k^- e_k^{-T} \right] \quad (2.23a)$$

$$P_k = \mathbf{E} \left[e_k e_k^T \right] \quad (2.23b)$$

Les termes diagonaux sont la variance des éléments associés (ou bien les fonctions d'autocorrélation au sens de la théorie du traitement de signal) et les termes non diagonaux représentent au sens du traitement de signal aux fonctions d'intercorrélation. Pour illustrer ce propos, nous allons discuter des conditions initiales du filtre. Cette initialisation implique que l'erreur commise sur un élément du vecteur d'état n'est généralement pas corrélée avec l'erreur commise sur un autre élément. À l'état initial, nous pouvons donc définir la matrice de covariance comme une diagonale dont les termes diagonaux sont les variances des éléments. Au cours des calculs du filtre, cette matrice ne risque évidemment pas d'être diagonale puisque les variables du système sont liées du point de vue physique et par la force des choses, les erreurs qui leur sont attachées aussi.

Pour résumer et de manière qualitative, nous pouvons dire que si les éléments de la matrice sont grands, l'incertitude sur la grandeur associée est grande. De même, si la matrice est non diagonale, on peut dire que les grandeurs associées à ces termes de la matrice ne sont pas indépendantes.

$$\hat{x}_k^- = A x_{k-1} + B u_{k-1} \quad (2.24a)$$

$$\hat{P}_k^- = A P_{k-1} A^T + W_d \quad (2.24b)$$

Une seconde matrice de covariance apparaît dans l'équation (2.24b). Il s'agit de la matrice de covariance des «bruits de processus», W_d ⁶. Elle est propre à la définition du système que l'on a considérée. Physiquement, elle représente la confiance que l'on peut avoir au modèle. Si la personne qui a défini le système sait qu'elle a commis une approximation grossière ou bien que les hypothèses de modélisation sont trop rigides, elle donnera un poids plus important à cette matrice de covariance. L'expression (2.24b) montre que si un élément de la matrice est important, l'élément

⁵La définition des matrices de covariance est donnée en annexe A

⁶L'indice $_d$ indique que la matrice est définie de manière discrète

correspondant de la matrice \hat{P}_k^- sera lui aussi important. Or nous venons de signaler qu'il s'agit de l'erreur commise a priori. La faible connaissance d'un système entraîne donc bien une incertitude sur l'estimation plus importante. Ceci démontre bien que cette équation conserve le sens physique des erreurs.

Pour déterminer de manière quantitative l'expression des matrices de covariance, nous pouvons dégager deux possibilités. Une première approche serait de l'estimer à partir de données statistiques. Une telle approche est fournie dans l'article [2]. Dans ce dernier, les auteurs expliquent que ces éléments ont été déterminés de manière à correspondre le mieux aux mesures qu'ils avaient effectuées au préalable sur un dispositif d'essai. Une seconde approche nous est fournie dans les notes de ALAZARD D. qui est basée sur un compromis entre différentes grandeurs. Nous devons malheureusement définir la notion du gain du filtre pour expliciter ce choix de paramètre.

Nous allons maintenant expliquer comment ces matrices de covariance se calculent de manière analytique à partir de la connaissance d'un système «entrée - sortie». En reprenant les développements mathématiques donnés à partir de la relation (2.19), nous pouvons écrire la dernière relation qui donne les expressions des bruits de processus et de mesures discrétisés (équations (2.25)) comme nous l'avons fait pour trouver les expressions (2.20).

$$w_k = \int_0^{dt} e^{A v} M w((k+1) dt - v) dv \quad (2.25a)$$

$$v_k = v(k dt) \quad (2.25b)$$

Nous considérons que les signaux w_k et v_k sont des bruits blancs gaussiens centrés. Cette notion de bruit blanc a déjà été définie dans la section 2.3. En outre, nous rappelons l'analogie entre densité spectrale de puissance et variance, illustrée par l'équation (2.10). Nous pouvons ainsi définir les relations (2.26). Toutefois, les bruits utilisés en discret ne sont pas exactement des bruits blancs gaussiens caractérisés par une densité spectrale infinie. Nous citons ici ALAZARD D. :

«Alors que dans le cas continu, les bruits blancs du modèle de Kalman sont définis par des matrices de densité spectrale de puissance W et V (les variances sont infinies), les bruits du modèle de Kalman discret sont définis par leur matrice de covariances W_d et V_d (les variances sont finies). Les densités spectrales de puissance de ces bruits sont constantes (et égales à W_d et V_d) mais sur une plage limitée de la pulsation réduite $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; d'où le qualificatif de bruit pseudo-blanc.» [7]

$$W_d \delta(l) = \mathbf{E} [w_d(k) w_d(k+l)^T] \quad (2.26a)$$

$$V_d \delta(l) = \mathbf{E} [v_d(k) v_d(k+l)^T] \quad (2.26b)$$

$$0 = \mathbf{E} [w_d(k) v_d(k+l)^T] \quad (2.26c)$$

Les développements complets des calculs pour la détermination de ces matrices sont donnés dans les annexes B. Ces derniers permettent d'affirmer que les matrices de covariance discrétisées M_d , W_d et V_d respectivement des bruits de processus et de mesures ont la forme donnée par les relations (2.27).

$$M_d = I \quad (2.27a)$$

$$W_d = \int_0^{dt} e^{A v} M W W^T e^{A^T v} dv \quad (2.27b)$$

$$V_d = \frac{V}{dt} \quad (2.27c)$$

2.7.1.1 Signal biaisé Dans des systèmes d'acquisition de mesures, il n'est pas rare qu'une constante non nulle modifie la valeur du signal de mesure. Cette constante est appelée un biais. Il est souvent dû aux bruits de mesures.

«La moyenne d'un signal aléatoire que l'on appelle aussi biais, est considérée comme déterministe et doit être, le cas échéant, extraite du signal $w(t)$ pour que celui-ci satisfasse l'hypothèse de signal centré»[7]

Deux méthodes sont possibles pour éliminer ce biais : soit le considérer comme une entrée du système, soit le considérer comme un élément du vecteur d'état. Dans le premier cas et si ce biais, $\mathbf{E}[w(t)]$, est connu, on peut réécrire le système sous la forme (2.28).

$$\dot{x}(t) = A x(t) + \begin{bmatrix} B & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{E}[w(t)] \end{bmatrix} + M (w(t) - \mathbf{E}[w(t)]) \quad (2.28a)$$

$$y = C x(t) + D u(t) + v(t) \quad (2.28b)$$

Cette dernière équation est obtenue grâce à une manipulation de l'équation du système. En effet, si on développe la première équation en réalisant le produit matriciel, on retrouve l'équation d'état du système telle que nous l'avons donnée jusqu'à présent. L'avantage de cette notation est que le signal bruit d'état équivalent est $w(t) - \mathbf{E}[w(t)]$ est centré et le biais est devenu une entrée du système.

La seconde méthode implique que la dynamique du biais soit connue pour pouvoir modifier le vecteur d'état en fonction de sa valeur. Pour expliquer cette technique, nous allons détailler la démarche suivie dans l'article «Measuring orientation of human body segments using miniature gyroscopes and accelerometers»[13]. Son objectif est de fournir un système qui détermine la position d'un membre du corps humain par mesure de l'accélération et de la vitesse angulaire. La technique du filtre de Kalman est ici appliquée pour déterminer l'erreur commise la plus probable.

Les sources d'erreur sont les biais des gyroscopes et des accéléromètres ainsi que les bruits de mesure. La dynamique du biais est telle que sa valeur à un instant

égale sa valeur passée plus un bruit. Ce bruit sera alors considéré comme un bruit d'état dont la distribution de probabilité est une distribution normale. De sorte que l'équation de modélisation de ce biais est donnée par l'équation (2.29).

$$b_k = b_{k-1} + w_k \quad (2.29)$$

De la même manière, on peut considérer que l'accélération mesurée par un accéléromètre est biaisée par l'accélération de la gravité et bruitée par un processus gaussien. On peut également écrire :

$$y_k = a_k - g_k + v_k$$

Dans cette équation de mesure, g_k est l'accélération de la pesanteur, constante au cours du temps, a_k est l'accélération linéaire issue de l'accéléromètre et v_k est un bruit de mesure gaussien. En outre, nous pouvons noter que si l'accélération de la pesanteur est constante, la constante vue par l'accéléromètre ne l'est pas forcément (effets dus à la rotation). Cette remarque explique la présence du terme v_k qui est un signal aléatoire ; il suit une loi de distribution gaussienne et peut être qualifié de blanc.

Dans les paragraphes précédents, nous avons passé en revue les différents éléments nécessaires à la compréhension des équations de prédiction. Pour conclure, nous pouvons affirmer que ces dernières réalisent la prédiction la plus plausible de l'évolution d'un système avec l'erreur commise a priori la plus probable. Il semble logique que lors des états transitoires et dans le cas de processus bruités, l'estimation de l'état n'est pas suffisante et la mesure des éléments du vecteur d'état : il apparaît ainsi le besoin de corriger l'estimation de l'état prédit. Nous détaillerons dans la suite, les mécanismes que le filtre met en œuvre pour réaliser cette correction.

2.7.2 Les équations de correction

L'état prédit par les équations (2.24) peut contenir un certain nombre d'erreur et n'est donc pas suffisant pour rendre compte de la complexité du système. Il est donc nécessaire de corriger cette estimation en prenant en considération les résultats des mesures au travers du gain du filtre de Kalman, que nous notons par le symbole K . Il semble tout à fait normal et logique que ce dernier prenne en compte la forme de la matrice d'observation, l'expression de l'incertitude liée à l'état prédit et la matrice de covariance de l'erreur de mesure, comme nous pouvons le voir par l'équation (2.30).

$$K = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + V_d)^{-1} \quad (2.30)$$

M.ALAZARD offre dans ses notes de cours, une définition intéressante de ce gain.

«Le gain K est calculé en fonction de la confiance que l'on a dans le modèle (exprimée par la densité spectrale W) relativement à la confiance que l'on a dans

la mesure (exprimée par la densité spectrale V). Si le modèle est très bon (W très petit) et la mesure très bruitée (V très grand) alors le gain K devra être très petit.»[7]

Cette remarque correspond bien à notre sensation physique car si la mesure est fortement bruitée, le poids à attacher à l'erreur doit être faible devant la prédiction. En effet, le système est mieux connu et un poids trop fort attaché à ces mesures dégraderait la qualité de la prédiction. A contrario, si la dynamique du système est mal connue, il vaut mieux attacher plus d'importance aux mesures.

La définition mathématique du gain doit être tel qu'il minimise la variance de l'erreur d'estimation. Cette définition assure donc au gain de générer le moins d'erreur en moyenne. La démonstration de cette expression est donnée dans l'annexe B. Nous signalons qu'elle est fortement inspirée de la démonstration proposée par les notes de cours de M.ALAZARD[7]

Maintenant que nous avons introduit la notion du gain du filtre, nous pouvons donner un moyen de quantifier l'importance relative des différents paramètres entre eux. Nous citons à nouveau ALAZARD D. :

«On pourra s'appuyer sur le compromis suivant pour régler qualitativement la réponse de l'erreur d'estimation :

- Influence de P_0 par rapport à V : En régime transitoire l'erreur d'estimation initiale e_0 sera d'autant plus vite recalée (et le gain du filtre de Kalman sera d'autant plus grand) que P_0 est grand par rapport à V . Mais l'estimé sera alors pollué par le bruit de mesure dans lequel on accorde beaucoup de confiance.
- Influence de W par rapport à V : En régime permanent, le gain K sera très faible et l'estimation très lisse si W est très faible par rapport à V (on fait confiance au modèle). Par contre, si le modèle est soumis à une perturbation que l'on a sous estimée en réduisant trop W , l'estimé ne suivra pas ou «mettra beaucoup de temps» à se recalculer, la variance de l'erreur d'estimation P ne sera pas non plus représentative de ce phénomène.

»[7]

Dans la section 3, nous examinerons l'effet des trois paramètres mentionnés ci-dessus sur la qualité du calcul fourni par le filtre. Nous pourrons alors vérifier l'exactitude de ces notions et déterminer le meilleur jeu de paramètre dans notre application.

Dans un second temps, quand le gain est connu, les caractéristiques du système sont corrigées selon les équations (2.31).

$$x_k = x_k^- + K (Y_k - C x_k^- - D u_k) \quad (2.31a)$$

$$P_k = (I_n - K C) P_k^- \quad (2.31b)$$

L'équation (2.31a) est obtenue en considérant que l'estimation du vecteur d'état correspond à la somme de l'état précédent et de la correction apportée par le filtre

de Kalman. Soit donc l'équation (2.32) donnant le vecteur d'état au temps discret suivant.

$$\hat{x}_k = A \hat{x}_{k-1} + \begin{bmatrix} B & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Nous allons maintenant écrire l'expression de l'erreur d'estimation a priori, $e(t)$. À partir de son expression donnée par la formule (2.22a), nous pouvons décrire sa dynamique par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}(t) = (A - K C) e(t) + (A - K C - A) \hat{x}(t) + (B - K D - B) u(t) + M w(t) - K v(t) \quad (2.33)$$

Comme le système est linéaire et que les bruits $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs gaussiens, $e(t)$ est également un signal aléatoire gaussien. Il nous est donc possible de calculer son espérance mathématique.

$$\mathbf{E}[\dot{e}(t)] = (A - K C) \mathbf{E}[e(t)] + (A - K C - A) \mathbf{E}[\hat{x}(t)] + (B - K D - B) \mathbf{E}[u(t)] \quad (2.34)$$

L'objectif de ces calculs est d'obtenir l'expression d'un estimateur non biaisé, ce qui signifie que la moyenne de l'erreur d'estimation doit tendre vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini et ce quelles que soient les valeurs de $u(t)$ et du vecteur d'état initialement. Mathématiquement, cette condition s'écrit par la relation :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}[e(t)] = 0, \quad \forall u(t), \quad \forall \mathbf{E}[e(t)] \quad (2.35)$$

Cette condition sera vérifiée de manière nécessaire et suffisante si on définit les matrices du filtre de Kalman par :

$$A_f = A - K C, \quad B_f = B - K D \text{ et } A_f \text{ soit stable}$$

Appliquant ensuite le théorème démontré dans la section B.2, nous pouvons affirmer que la moyenne de l'erreur sera donnée par l'expression mathématique suivante :

$$\mathbf{E}[\epsilon(t)] = e^{(A - K C)(t - t_0)} \epsilon(t_0) \quad (2.36)$$

En outre, l'espérance de l'erreur tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini.

Il vient ainsi l'expression de l'estimateur (2.37), dont le premier terme est égale à l'estimation réalisée a priori. On peut considérer le terme $y - C \hat{x} - D u$ correspond à l'erreur commise entre l'observation et la prédiction. Cette dernière modifiant ensuite la valeur de l'état du système.

$$\dot{\hat{x}} = (A \hat{x} + B u) + K (y - C \hat{x} - D u) \quad (2.37)$$

De plus, cette équation permet de voir sous un autre jour (plutôt mathématique) l'origine de la condition d'observabilité. En effet, nous citons ici les notes de cours de M. ALAZARD :

«La présence d'un mode instable et inobservable ne permet pas de trouver de gain K stabilisant et donc de construire un estimateur non biaisé.»[7]

Enfin, nous pouvons écrire que l'équation (2.31b) se trouve en remplaçant l'expression du gain du filtre de Kalman dans l'équation (B.29), toutes deux démontrées dans la section B.3.

Nous avons trouvé une seconde expression permettant de corriger l'estimation de la matrice de covariance. Nous avons trouvé cette équation dans l'article "Micro-accelerometer based hardware interfaces for wearable computer mixes reality applications"[2]. La démonstration de cette dernière ne nous ayant pas été fournie avec une démonstration, nous fournissons le paragraphe qui l'amène :

«However, even the smallest error in the computation of the Kalman gain can lead to enormous errors, if we use the simplified equation (2.31b). For example if the initial estimate of error covariance matrix has large diagonal values then it should change that large value to a value close to zero in one step. so that equation represents an indeterminate situation $O x \infty$. Generally the other form, called the Joseph form shown in equation (2.38) is used instead as it has symmetry and somewhat better behaviour than the first one.»[2]

$$P_k = (I_n - K C_d) P_k^- (I_n - K C_d)^T + K V_d K^T \quad (2.38)$$

La source dont font mention les auteurs est la suivante : «Introduction to random signals and Kalman filtering, 3rd edition» de BROWN R. et HWANG P.Y.C. et publié chez «John wiley» en 1997. Cette équation est en fait l'expression de la matrice de covariance (équation (B.29)) évaluée dans l'annexe B. Comme ces deux équations reposent sur la même base mathématique, il est judicieux de se demander laquelle est la meilleure. Nous réaliserons ces développements dans la section suivante.

Nous avons mentionné dans l'introduction que le filtre de Kalman est capable de travailler dans des environnements bruités. Cette remarque est vérifiée si on considère l'expression du filtre de Kalman qui pondère l'erreur entre l'estimation et la mesure. Il faut connaître les densités de bruit du système de mesure pour que la correction de l'estimation ait du sens.

Les conditions initiales n'influencent pas la convergence de la technique. Pour cela, il suffit d'estimer l'ordre de grandeur des termes multipliant les conditions initiales après un certain temps. Considérons le vecteur d'état après deux pas de temps, nous obtenons alors :

$$x_2 = A^2 x_0 + A B u_0 + B u_1 + A K_1 \hat{e}_1^- + K_2 \hat{e}_2^-$$

Les matrices A et B contiennent toutes les deux des éléments du type dt^n , avec n un nombre entier. Ces termes deviennent donc vite faibles dès que le nombre de

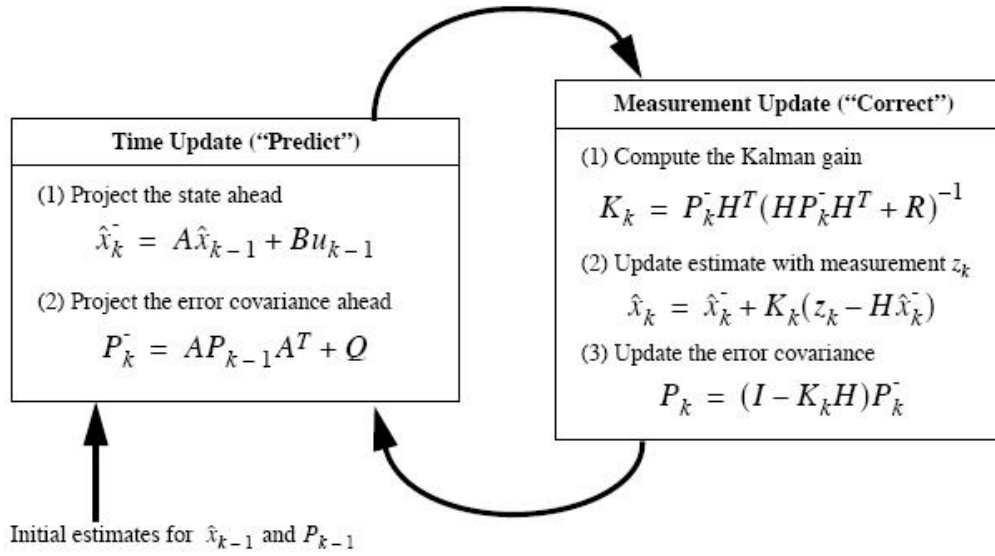


FIG. 2.2 – Schéma de principe des équations de Kalman et de l'implémentation pratique du filtre, source [31]

point calculé augmente. Les deux matrices multipliant les erreurs ont donc une influence plus importante sur le nouvel état du système que les conditions initiales. Après un certain nombre de calculs l'influence des conditions initiales ne se fait plus sentir et seules comptent les entrées et les erreurs d'estimation. Toutefois, nous avons fait l'hypothèse que le gain du filtre de Kalman devait être d'un ordre de grandeur supérieur à celui des matrices A et B .

Pour résumer, on peut dire que l'implémentation du filtre de Kalman repose sur un jeu d'équations tel que présenté sur la figure 2.2. Les deux équations de prédiction déterminent un état vraisemblable du système et sur base des mesures et de la confiance que l'on a dans le modèle, ces dernières sont corrigées.

3 Implémentation du filtre de Kalman

Nous allons, dans un premier temps, illustrer les performances du filtre de Kalman pour une application donnée : la détermination d'un mouvement unidimensionnel sur base de la mesure en un point de l'accélération par un accéléromètre et de la position par un capteur GPS. Nous déterminerons également comment calculer les meilleurs paramètres du filtre. Enfin, nous détaillerons les articles utilisés pour réaliser le filtre de Kalman à une dimension.

3.1 Filtre de Kalman avec mesures GPS

Pour illustrer notre propos sur les filtres de Kalman et illustrer des choix de «tuning» du filtre, nous avons étudié l'application simple à une dimension proposée dans l'article de M.SMYTH : «Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system monitoring» [3].

Nous citons ici le résumé de cet article pour permettre de comprendre les motivations et les hypothèses développées par M.SMYTH.

«In civil and mechanical structural modelling accelerometers are most often used, however displacement sensors such as non-contact optical techniques as well as GPS-based methods for civil structures are becoming more common. It is suggested, where possible, to exploit the inherent redundancy in the sensor information and combine the collocated acceleration and displacement measurements in a manner which yields highly accurate motion data. ... Another common feature of displacement-based sensing is that the high frequency resolution is limited, and often relatively low sampling rates are used. In contrast, accelerometers are often more accurate for higher frequencies and higher sampling rates are often available. The fusion of these two data types must, therefore, combine data sampled at different frequencies. A multi-rate Kalman filtering approach is proposed to solve this problem.» [3]

La définition des matrices du système est basée sur les deux équations (3.1) dans lesquelles \ddot{x}_m est la mesure de l'accélération et w est le bruit sur la mesure de l'accélération. La simplicité de telles définitions peut sembler bizarre à première vue mais toutefois, elle conduit à des résultats intéressants. Nous pouvons noter que l'accélération comporte deux termes : l'accélération proprement dite à laquelle s'ajoute un bruit de mesure supposé blanc et gaussien.

$$\dot{x} = \dot{x} \tag{3.1}$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_m + w \tag{3.2}$$

La grandeur observée est dans le cas de cet article est la sortie physique du système, c'est-à-dire la position. Cette mesure est effectuée au moyen du système GPS.

L'accélération est définie comme une entrée du système et symbolisée par \ddot{x}_m . Nous pouvons alors donner l'expression du système comme nous l'avons montré dans les équations (2.15) de la section 2. Nous obtenons de la sorte les équations (3.3).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{x}_m + w \quad (3.3a)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad (3.3b)$$

À partir de la définition en temps continu (3.3) et grâce aux équations (2.20), nous pouvons vérifier la concordance entre nos équations discrètes à celles données dans l'article [3]. De la même manière les matrices de covariances obtenues par les équations (2.27) sont identiques à celles données par l'article. Toutefois, les notations des grandeurs sont différentes de celles que nous avons utilisées jusqu'ici ; la matrice de covariance du bruit d'état, w_k est notée Q et celle du bruit de mesure R . Les densités spectrales de ces bruits sont notées respectivement q et r . Les expressions de ces matrices en fonction des densités spectrales de bruit sont :

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ R &= r \end{aligned}$$

Les différentes matrices discrétisées sont regroupées ensemble par les équations(3.4).

$$\begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ \dot{x}_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt}{dt} \end{pmatrix} \ddot{x}_m + \begin{pmatrix} \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt}{dt} \end{pmatrix} w_k \quad (3.4a)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \end{pmatrix} + v_k \quad (3.4b)$$

$$Q_d = q \cdot \begin{pmatrix} \frac{dt^3}{3} & \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt^2}{2} & dt \end{pmatrix} \quad (3.4c)$$

$$R_d = \frac{R}{dt} \quad (3.4d)$$

À présent, nous allons examiner l'influence des différents paramètres des filtres de Kalman et vérifier si les résultats proposés dans la section 2.7.2, résultats issus des notes de cours de M.ALAZARD, sont bien cohérents avec nos observations. Nous pourrons ainsi donner des résultats quantitatifs sur la définition de ces derniers.

Nous avons imposé le signal d'accélération qui constitue l'entrée du système pour pouvoir connaître avec assurance les vraies valeurs des vitesse et position au cours

du temps. Nous avons défini comme signal de position, noté x , comme un sinus de la forme «simple»⁷. Les signaux de vitesse et d'accélération se trouvent directement par dérivation pour donner les équations (3.5). Nous définissons ω comme étant la vitesse angulaire, égale à $\omega = 2\pi\nu$ et nous supposons que la fréquence, ν , des différents signaux est de $0,8 \text{ Hz}$. Ces valeurs seront conservées pendant une grande partie du travail. Dans le cas de cette fréquence, nous prendrons une période d'analyse de 30 s .

$$x = \sin \omega t \quad (3.5a)$$

$$\dot{x} = \omega \cos \omega t \quad (3.5b)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin \omega t \quad (3.5c)$$

3.1.1 Expression de l'équation de mise à jour de P_k

Dans la section 2, nous proposons deux expressions différentes pour l'équation de correction de la matrice P_k . Nous rappelons la forme de ces deux équations (2.31b) et (2.38) :

$$\begin{aligned} P_k &= (I_n - K C) P_k^- \\ P_k &= (I_n - K C_d) P_k^- (I_n - K C_d)^T + K V_d K^T \end{aligned}$$

Pour déterminer quelle est la meilleure expression de cette équation ou vérifier si la seconde citée est plus robuste, nous avons examiné les valeurs de différentes erreurs quand nous ne changions que la forme de cette équation. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 3.1. Les erreurs maximales et moyennes a priori sont en fait les valeurs maximales et moyennes de l'erreur d'estimation a priori. Les valeurs présentées dans ce tableau sont des erreurs absolues. Pour que ces dernières soient représentatives, nous donnons les valeurs maximales de la vitesse et de la position réelles respectivement égales à $5,0265 \text{ m s}^{-1}$ et 1 m . Les valeurs moyennes de ces signaux devraient être proches de zéro. Les valeurs calculées de ces deux grandeurs sont respectivement : $8,3762e^{-4} \text{ m s}^{-1}$ et $-4,2973e^{-17} \text{ m}$.

TAB. 3.1 – Erreurs associées aux deux formes de l'équation de mise-à-jour de P_k

	Formule simplifiée	Formule complète
Erreur maximale a priori	0,040977936	0,049499413
Erreur moyenne a priori	5,64E-05	1,15E-04
Erreur réelle sur la position	-3,50E-05	-9,63E-05
Erreur réelle sur la vitesse	-0,004302202	-0,003725703

⁷C'est-à-dire qui n'est pas composé de signaux de fréquence différente

Nous pouvons voir sur ce graphique que, tout d'abord, les erreurs commises dans les deux cas sont sensiblement du même ordre de grandeur. Ensuite, la forme «complète» de cette équation ne conduit pas à de meilleures performances en terme de diminution des erreurs sauf pour l'erreur absolue sur la vitesse. La forme «simplifiée» permet donc de diminuer l'erreur associée aux termes non mesurés ce qui va dans le sens d'une augmentation de la robustesse de cette équation. Toutefois, l'erreur associée aux grandeurs mesurées est plus grande.

Enfin, nous avons mesuré dans *Matlab* le temps nécessaire pour évaluer la boucle de Kalman dans ce cas-ci et pour les deux formes des équations de mise à jour. Les résultats confirment le bon sens. En effet, la forme complète demande un plus grand nombre d'opérations matricielles et ralentit quelque peu le programme. Dans le cas de l'équation simplifiée le temps nécessaire pour les calculs est égal à 4,609 s tandis que la forme complète demande 6,5 s⁸. Cette augmentation est importante mais reste d'un ordre de grandeur inférieur à la durée d'analyse totale. De sorte que sa seule action ne peut pas être jugée pénalisante pour les performances. Il convient toutefois de garder ce résultat en tête car, si dans la suite, d'autres opérations pouvant être qualifiées de longues (au point de vue du temps) sont ajoutées, le temps d'analyse pourrait augmenter et réduire la possibilité de filtre en temps réel.

Pour conclure, nous trouvons que l'utilisation de la forme complète n'est pas spécialement intéressante : elle ne conduit pas systématiquement à une réduction de l'erreur et demande plus de ressources. Néanmoins, si nous considérons l'aspect relatif des résultats, nous ne pouvons pas affirmer que la forme complète de l'équation soit moins bonne. En effet, l'ordre de grandeur des erreurs reste identique avec ceux obtenus par la forme simplifiée et le temps nécessaire d'analyse autorise toujours une réalisation en temps réel.

3.1.2 «Undershoot» et «overshoot» initiaux

La connaissance exacte des conditions initiales n'est pas extrêmement importante puisque le filtre de Kalman permet une correction et finit par les «oublier». Nous choisissons des conditions initiales du filtre telles que position, vitesse et accélération soient nulles à l'instant initial. Le vecteur d'état de ces dernières est donc donné par la relation (3.6).

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Toutefois, leur méconnaissance entraîne des erreurs transitoires sur le calcul de la vitesse.

L'amélioration des performances en transitoire du filtre peut être obtenue en «tunant» trois paramètres : la matrice de covariance de l'erreur initiale, P_0 , et les densités de probabilités du bruit d'état et de mesures, respectivement W et R . Nous

⁸La période d'analyse est toujours égale à 30 s

choisissons, dans un premier temps, de définir arbitrairement les paramètres de la façon suivante :

$$P_0 = 0,001 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

$$R = 0,001 \quad (3.7b)$$

$$W = 1 \quad (3.7c)$$

La vitesse évolue alors de la manière présentée sur la figure 3.1. La courbe en bleu représente le signal réel tel qu'il devrait être ; quant à la courbe en rouge, elle représente la vitesse calculée par le filtre. Nous voyons que le signal calculé par le filtre de Kalman présente un undershoot assez marqué sur les premiers instants par rapport au signal réel.

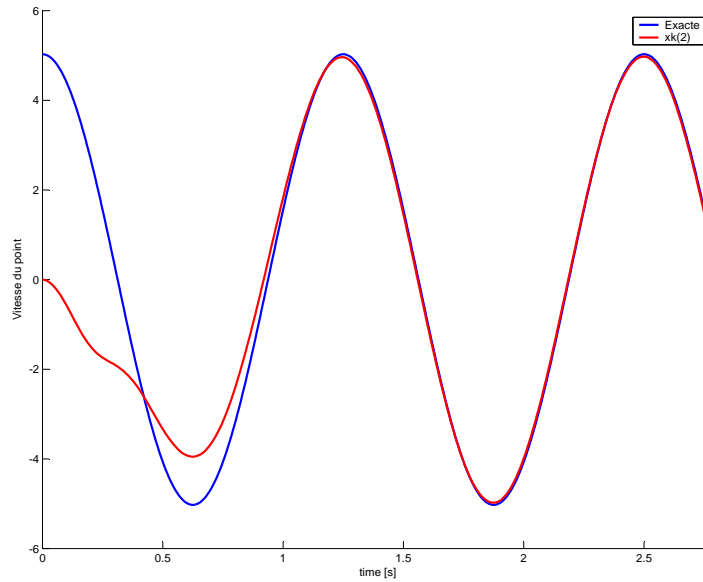


FIG. 3.1 – Illustration du temps nécessaire au filtre de Kalman pour retrouver la vitesse réelle du point quand les matrices de covariance ne sont pas optimisées

Premièrement, le passage à une matrice de covariance de l'erreur initiale donnée par la relation (3.8) permet d'atteindre un temps de transition inférieur à la seconde.

$$P_0 = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Deuxièmement, les datasheet des accéléromètres nous ont permis de trouver une valeur crédible de la densité de bruit de mesure, V . Nous pouvons considérer que

$110 \mu g \sqrt{Hz}^{-1}$ est un bon ordre de grandeur. Cette valeur de paramètre permet une amélioration beaucoup plus spectaculaire du temps nécessaire à l'élimination des phénomènes transitoires. Nous illustrons ces possibilités sur le graphique 3.2. Ce dernier nous semble être assez parlant car avec ces paramètres, il faut moins de $0,25 \text{ s}$ au filtre de Kalman pour retrouver la vitesse réelle. Comme la position est mesurée l'évolution de ce signal au cours du temps montre une faible erreur dans les premiers instants (inférieurs à $0,1 \text{ s}$) due à l'initialisation qui est ensuite vite corrigée de sorte que les signaux trouvés deviennent très proches.

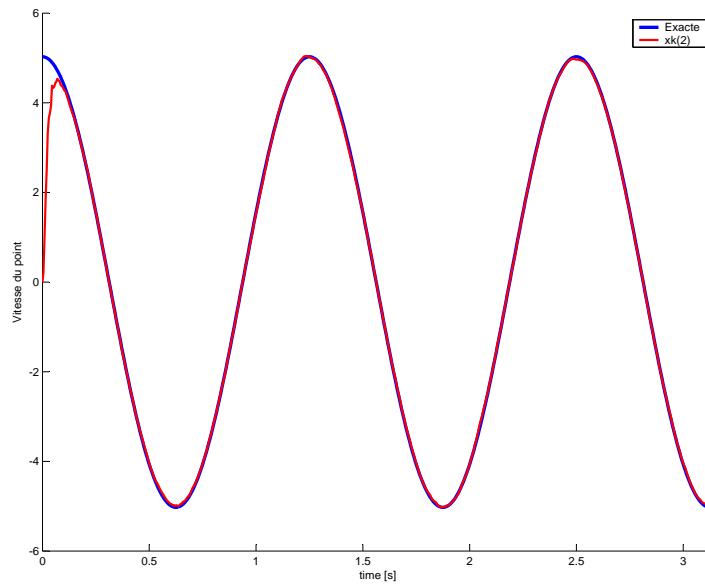


FIG. 3.2 – Illustration du temps nécessaire au filtre de Kalman pour retrouver la vitesse réelle du point quand les matrices de covariance sont optimisées

De plus, nous avons vérifié que, premièrement, considérer une densité spectrale de bruit trop grande rend les signaux calculés plus sensibles à la méconnaissance des conditions initiales ainsi qu'au biais des systèmes de mesures. Deuxièmement, choisir des densités spectrales de bruit et de processus à des valeurs trop proches diminue également les performances en régime transitoire. Pour conclure cette partie, nous pouvons affirmer qu'un bon choix de paramètre doit être tel que la densité spectrale de bruit soit faible devant celle du bruit de processus ainsi que les matrices de covariance de l'erreur initiale. La figure 3.2 présente l'évolution de la position dans les premiers instants selon ces recommandations.

Il convient d'insister sur le fait que l'échantillonnage modifie la densité spectrale de bruit. Les différentes datasheet nous fournissent comme nous l'avons déjà signalé

de bons ordres de grandeurs aux densités spectrales de bruit de mesure. Numériquement, elle vaut dans le cas de l'accéléromètre à $1,7\text{ g}$ et 5 g respectivement $1,1e^{-4}$ et $2e^{-4}$.

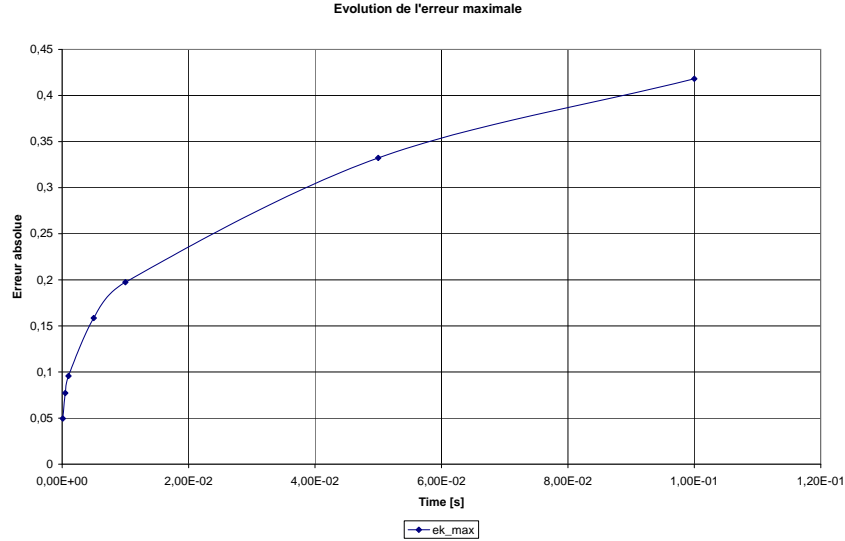


FIG. 3.3 – Évolution de l'erreur (absolue) a priori maximale en fonction de différentes valeurs de R

Pour donner des résultats quantitatifs de l'influence des paramètres statistiques, nous proposons de montrer les figures 3.3 et 3.4. L'erreur présentée sur ces figures consiste en la différence entre la mesure de la sortie et son estimation par le filtre de Kalman (erreur a priori). Ce terme est ensuite pondéré par le gain du filtre pour corriger la valeur de l'état prédit comme nous en parlons dans la section 2. En d'autres termes, elle représente l'importance de la correction à faire sur la prédiction. Nous présentons les différentes valeurs de densité spectrale de bruit de mesures à la base de ces graphiques dans le tableau 3.2.

Les deux erreurs, ek_{max} et ek_{mean} que nous proposons, sont les valeurs maximale et moyenne sur l'estimation a priori de l'état du système. Nous notons tout d'abord que les deux erreurs suivent des tendances semblables et qui correspondent bien au sens physique, puisque si le bruit de mesure est caractérisé par une densité spectrale plus faible, son importance est moindre et l'erreur à corriger par le filtre est plus faible.

Toutefois, l'influence de la densité spectrale est plus importante sur l'erreur maximale qui est commise initialement que sur l'erreur moyenne. En effet, alors que l'erreur moyenne passe de $1,15e^{-4}$ à $5,5129e^{-3}$, l'erreur maximale passe de $0,049499$

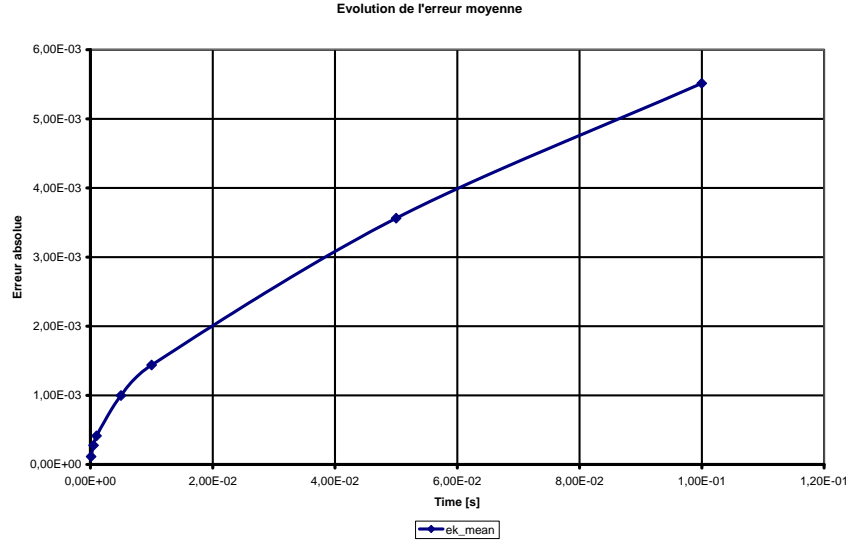


FIG. 3.4 – Évolution de l'erreur (absolue) a priori moyenne en fonction de différentes valeurs de R

à 0,41813. Ceci nous permet de conclure que la diminution de la densité spectrale permet de diminuer l'importance de l'erreur initiale. Enfin, nous insistons sur le fait qu'il s'agit d'erreurs absolues et non relatives. Elles sont des erreurs associées à l'accélération dont la valeur maximale (l'amplitude) dans ce cas-ci était de $25,26 \text{ m s}^{-2}$. Dans les deux cas, les erreurs relatives ne sont pas numériquement importantes.

TAB. 3.2 – Erreurs maximales et moyennes pour différentes valeurs de la densité spectrale de bruit, R , des figures 3.3 et 3.4

R	$1,10e^{-4}$	$5e^{-4}$	$1e^{-3}$	$5e^{-3}$	$1e^{-2}$	$5e^{-2}$	$1e^{-1}$
ek_{max}	0,049499	0,07721	0,095654	0,15859	0,19746	0,3323	0,41813
ek_{mean}	$1,15e^{-4}$	$2,78e^{-4}$	$4,13e^{-4}$	$9,98e^{-4}$	$1,439e^{-3}$	$3,5626e^{-3}$	$5,5129e^{-3}$

3.1.3 Influence de la forme du signal imposé

Le mouvement réel du câble ne peut pas être simplement rendu par une simple fonction sinusoïdale. En effet, notre application s'intéresse aux mouvements de basses fréquences mais à celles-ci se superpose un mouvement de plus haute fréquence. Il est donc important de vérifier le comportement du filtre quand les signaux qui lui sont appliqués résultent d'une superposition de signaux de fréquences différentes.

Nous avons considéré un signal d'accélération de la forme :

$$\ddot{x} = -\omega^2 \cdot [\sin(\omega \cdot t) + 9 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t) + 16 \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t)]$$

La vitesse angulaire, ω , est à nouveau évaluée pour une fréquence de $0,8 \text{ Hz}$. Le calcul par le filtre de Kalman permet d'obtenir le graphique 3.5. Nous avons repris les mêmes valeurs des matrices de covariance qui permettent un bon comportement du filtre dans les régimes transitoires. Il est à noter que l'erreur sur la position est maximale lors des extrema locaux et globaux. Il en est de même pour l'erreur relative sur la vitesse qui peut atteindre 5 %

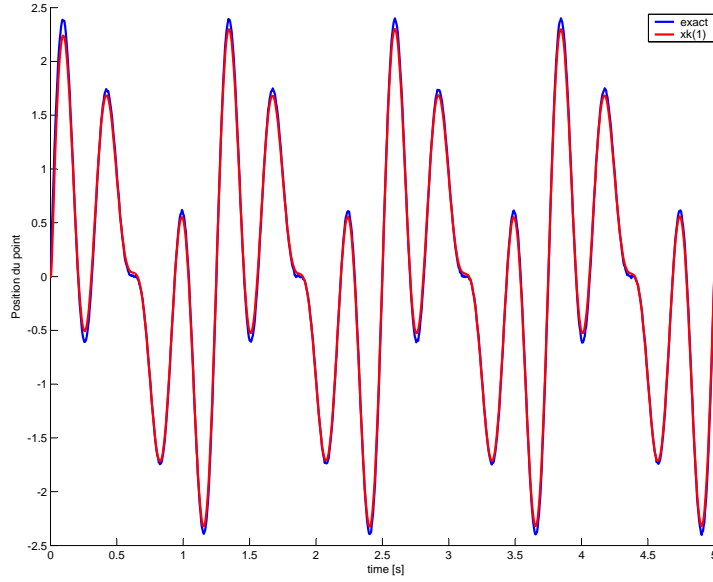


FIG. 3.5 – Évolution de la position obtenue pour un signal d'accélération résultant de la superposition de signaux ayant des fréquences différentes

3.1.4 Influence des conditions initiales

A priori les conditions initiales ne sont pas déterminantes pour la convergence vers l'erreur nulle du filtre de Kalman. Nous avons considéré que les conditions initiales consistent en une vitesse et une position nulles. Le câble est donc supposé se trouver au repos (sans vitesse initiale) à sa position de référence. Cette approximation est bien entendu grossière mais nous pouvons en tenir compte par un choix intéressant de la matrice P_0 comme nous l'avons fait précédemment. Les graphiques 3.1, 3.2 et 3.5 montraient les évolutions des signaux caractérisés par les mêmes conditions initiales (relation (3.6)).

Nous allons maintenant observer l'influence d'un signal de référence en retard ou en avance de 2 s sur le temps où les deux signaux se superposent. Sur la figure 3.6, on peut voir d'une part que les vitesses réelles et calculées sont déphasées dans les premiers instants mais qu'au bout de 0.15 s ce décalage est devenu quasi inexistant.

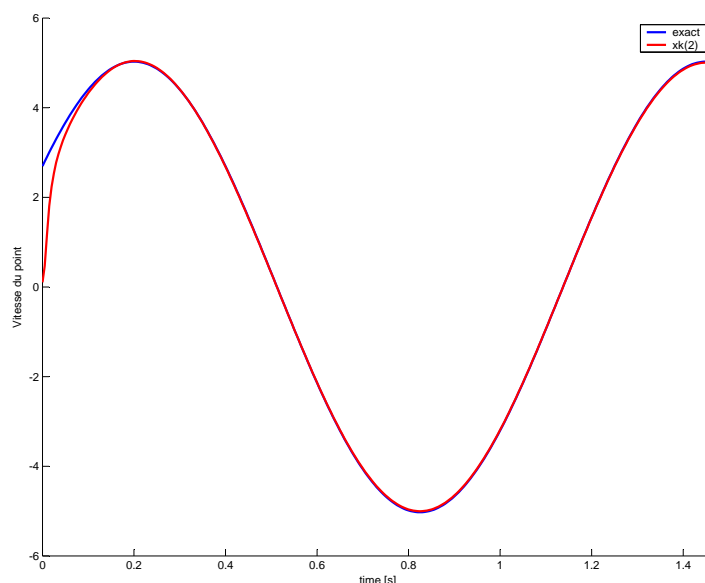


FIG. 3.6 – Signaux de vitesse réels et estimés par le filtre de Kalman quand leurs conditions initiales ne sont pas identiques

3.1.5 Influence des bruits de mesure

En pratique, les signaux mesurés sont bruités de manière plus ou moins importante. Il est donc primordial de déterminer comment un filtre de Kalman fonctionne dans de telles conditions et comment le code peut être modifié pour le rendre moins sensible à ces bruits de mesure. Le bruitage du signal par un bruit de type blanc Gaussien est très facile avec *Matlab*. En effet, une fonction existe sous ce programme qui ajoute un bruit blanc gaussien à un signal donné : **awgn**. Cette fonction nécessite de connaître le rapport signal à bruit (*snr* en anglais) exprimé en *dB*. En outre, nous pouvons également renseigner à cette fonction que le signal doit représenter un signal mesuré ; ce paramètre permet à la fonction de calculer la «puissance» du signal original pour obtenir une meilleure définition du bruit de mesure. Les détails d'utilisation de cette fonction se trouvent sur le site du logiciel *Matlab*[18] ou dans l'aide du logiciel.

3.1.5.1 Caractéristiques des bruits de mesure Précédemment, nous avons insisté sur la bonne valeur à donner à la densité spectrale du bruit dans le filtre de Kalman. Pour trouver des valeurs numériques crédibles, nous nous référons aux «datasheet» des accéléromètres qui fournissent de précieux renseignements sur les distributions de probabilité des signaux d'accélération. L'estimation de ses données permet de fournir au filtre de Kalman les valeurs de probabilité données par le constructeur des capteurs. Nous allons détailler les données ainsi que les calculs implémentés à partir de ces datasheet.

Pour l'accéléromètre biaxes à 1,7 g , la densité spectrale de bruit à 25 ° C est de $110 \mu g \sqrt{Hz}^{-1}$ en valeur moyenne quadratique. Quant à l'accéléromètre à 5 g , elle est de $200 \mu g \sqrt{Hz}^{-1}$. Le terme en Hz est la bande passante de l'accéléromètre. Connaissant cette dernière, il est possible de connaître la valeur RMS du bruit du signal par la formule (3.9) dans laquelle ND est la densité du bruit, BW est la bande passante de l'accéléromètre[5].

$$RMS_{noise} = ND \cdot \sqrt{BW \cdot 1,6} \quad (3.9)$$

Toutefois, la valeur maximale du bruit est souvent désirée [5]. Aussi les datasheet présentent une estimation du pourcentage de temps pendant lequel la valeur de crête à crête du bruit est supérieure à sa valeur «RMS». Cette estimation est bien entendu basée sur des observations statistiques.

Nous avons repris cette estimation dans le tableau 3.3. On peut voir que pour un tiers du temps, l'amplitude du bruit atteint le double de sa valeur moyenne quadratique. Toutefois, de plus grandes amplitudes deviennent de plus en plus rares en probabilité. Enfin, on peut conclure en disant que pour 37 % du temps, la valeur de crête à crête du bruit de mesure vaut au moins le double de sa valeur moyenne quadratique.

TAB. 3.3 – Estimation de la valeur de crête à crête du bruit, source [5]

Valeur de crête à crête	Pourcentage du temps pendant lequel la valeur de crête à crête dépasse la valeur RMS
$2 * RMS$	32
$4 * RMS$	4,6
$6 * RMS$	0,27
$8 * RMS$	0,006

Le tableau 3.3 permet de trouver la fonction de répartition de la probabilité. En effet, on peut dire que la probabilité que l'amplitude «peak-to-peak» du signal soit comprise entre RMS et $2 * RMS$ est de $100 - 4,6 - 0,27$, c'est-à-dire de 95,13 %.

3.1.5.2 Bruitage des signaux Pour illustrer les performances du filtre de Kalman dans un environnement bruité, nous allons réaliser le bruitage des deux signaux mesurés dans cette application : l'accélération et la position. Nous supposons qu'une amplitude crédible du bruit est de l'ordre de 10 % à 1 % de l'amplitude du signal. La fonction de *Matlab* qui permet de générer un bruit blanc gaussien exige de connaître le rapport signal à bruit en *dB*. La définition du *dB* est donnée par l'équation (3.10a) qui demande donc un rapport de puissance des signaux. Comme nous ne connaissons pas la puissance des signaux d'accélération, nous devons passer d'un rapport de puissance vers un rapport d'amplitude. Cette opération est réalisée par l'équation (3.10b). Une fois ce rapport d'amplitude connu, nous pouvons déterminer la valeur en *dB* que nous entrerons dans la fonction.

$$snr = 10 * \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right) \quad (3.10a)$$

$$snr = 20 * \log_{10} \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}} \right) \quad (3.10b)$$

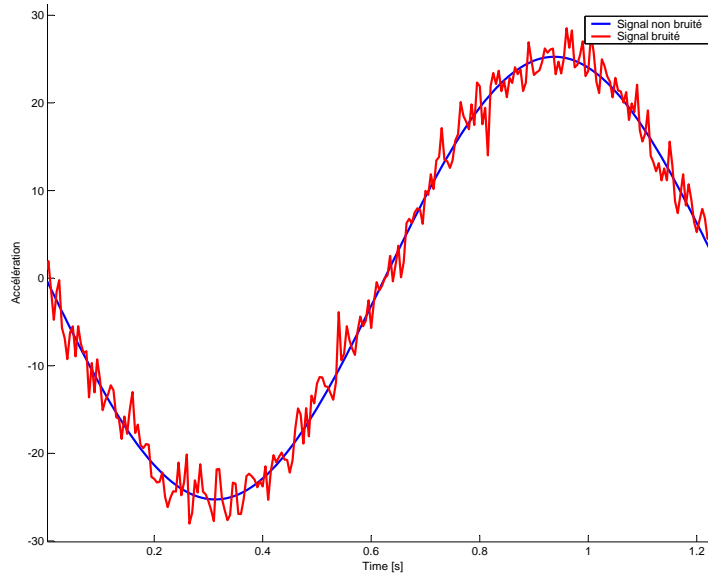


FIG. 3.7 – Bruitage de l'accélération par un bruit blanc gaussien de $snr = 20 \text{ dB}$

Pour juger les performances, nous décidons de nous placer dans un cas peu favorable dans lequel le bruit de mesure est égal à 10 % du signal original. Un pourcentage supérieur n'est pas intéressant à examiner de notre point de vue. En effet, un bruit de mesure tel que rapport signal à bruit soit supérieur 1,1 correspond à un environnement tellement bruité que les signaux d'entrée ne sont plus crédibles.

La figure 3.7 compare l'accélération bruitée à celle non bruitée. Nous pouvons voir qu'un bruitage tel que son rapport signal à bruit vaut 20 dB modifie déjà fortement la forme du signal.

3.1.5.3 Bruits de mesures utilisés dans le code Le rapport signal à bruit a été évalué selon les données de l'accéléromètre. Dans le cas de l'accéléromètre biaxes à $1,7\text{ g}$, la valeur quadratique moyenne du signal vaut, si on considère une bande passante de 100 Hz , $1,3914$. On peut considérer que le «fond d'échelle» de l'accéléromètre vaut (en amplitude «peak-to-peak») $2 * 1,7 * 9,81$ soit $13,73\text{ m s}^{-2}$. La plus grande amplitude «peak-to-peak» du bruit de mesure⁹ vaut $2 * RMS$ soit $2,7828$. On peut donc considérer le rapport maximum signal à bruit le plus probable vaut $11,9879$. Transformant ce rapport en décibel pour correspondre aux entrées de la fonction `awgn`, nous avons obtenu un snr égale à 35 dB .

Toutefois, pour illustrer les performances du filtre de Kalman à travailler dans des environnements bruités, nous illustrons, sur la figure 3.8, la différence entre position réelle (signal en rouge) et position calculée par le filtre (signal bleu). Il apparaît donc bien que le filtre de Kalman demeure performant même pour des environnements bruités.

Le tableau 3.4 montre l'évolution de l'erreur pour différentes valeurs de snr . On peut voir que l'ordre de grandeur de l'erreur est sensiblement le même quelle que soit la valeur du rapport signal bruit. Nous pouvons également noter qu'une tendance générale se dessine et montre que l'erreur diminue quand le snr augmente. Toutefois, cette tendance n'est pas significative au vu du bruitage réalisé sur le signal. En effet, sur le tableau 3.5, nous montrons l'évolution de l'erreur relative sur la vitesse et sur la position au cours de cinq simulations consécutives caractérisées par la même valeur du rapport signal bruit. Pour illustrer, nous avons pris ce rapport égal à 20 dB

Au vu des deux tableaux 3.4 et 3.5, nous pouvons affirmer tout d'abord que l'erreur commise sur la position est plus faible que celle commise sur la vitesse. Cette remarque semble tout à fait normale puisque nous disposons de la mesure de la position par GPS même si cette dernière est bruitée.

Ensuite, il n'est pas possible de déduire une évolution significative de l'erreur relative quand le rapport signal bruit augmente. D'une part, l'ordre de grandeur des erreurs est sensiblement identique pour différentes valeurs de snr et d'autre part, comme les mesures sont bruitées par un signal gaussien, des résultats différents sont trouvés pour une même valeur de snr .

⁹Valeur la plus probable également

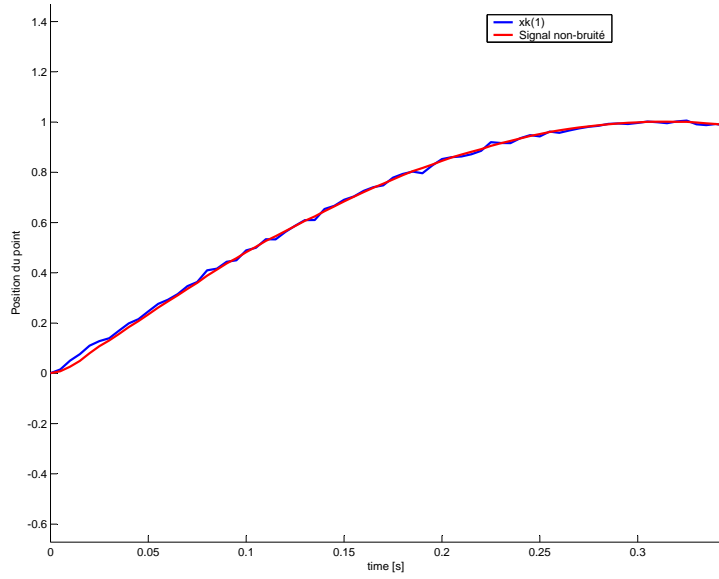


FIG. 3.8 – Illustration des possibilités du filtre de Kalman à travailler dans un environnement bruité (rapport signal à bruit égal à 5 dB)

TAB. 3.4 – Évolution des erreurs relatives (en valeur absolue) en fonction du rapport signal à bruit

snr	Erreur sur la position		Erreur sur la vitesse	
5	$2,66e^{-4}$	$2,65806e^{-4}$	$3,3706e^{-3}$	$3,37e^{-3}$
10	$6,38e^{-5}$	$6,37885e^{-5}$	$-7,49e^{-4}$	$7,49e^{-4}$
15	$7,70e^{-5}$	$7,69649e^{-5}$	$-1,064002e^{-3}$	$1,06e^{-3}$
20	$-1,39e^{-4}$	$1,38539e^{-4}$	$-6,670043e^{-3}$	$6,67e^{-3}$
25	$-5,53e^{-5}$	$5,5251e^{-5}$	$-4,499588e^{-3}$	$4,50e^{-3}$
30	$-2,21e^{-5}$	$2,21057e^{-5}$	$-3,602255e^{-3}$	$3,60e^{-3}$
35	$-3,57e^{-5}$	$3,56973e^{-5}$	$-3,868176e^{-3}$	$3,87e^{-3}$
40	$-2,75e^{-5}$	$2,75198e^{-5}$	$-3,791938e^{-3}$	$3,79e^{-3}$
45	$-3,36e^{-5}$	$3,36406e^{-5}$	$-3,887531e^{-3}$	$3,89e^{-3}$
50	$-3,29e^{-5}$	$3,28977e^{-5}$	$-3,9733e^{-3}$	$3,97e^{-3}$

TAB. 3.5 – Illustration de l'impact du caractère gaussien du bruit : erreurs calculées pour le même rapport signal bruit (20 dB) mais pour cinq simulations consécutives

Erreur sur la position	$-1,39e^{-4}$	$-7,36e^{-5}$	$1,12e^{-6}$	$-7,28e^{-5}$	$2,31e^{-5}$
Erreur sur la vitesse	-0,00667	-0,0049741	-0,0029729	-0,0047959	-0,0025413

3.2 Premiers essais de modélisation

Le sujet du présent mémoire est de reconstruire les mouvements des câbles électriques. Pour y arriver, quatre accéléromètres biaxes sont disposés dans le module Ampacimon comme illustré sur la figure 6.4 (section 6.4). Avant de réaliser un filtre de Kalman à trois dimensions, nous allons étudier la possibilité de reconstruire le mouvement sur base d'une accélération unidimensionnelle.

En outre, la modélisation que nous devons développer doit pouvoir s'intégrer avec le travail de Bertrand GODARD. Par propagation d'ondes, la connaissance des grandeurs cinématiques en un point permet de reconstruire les grandeurs cinématiques associées à chaque point du câble. La reconstitution du mouvement de l'ensemble de la portée n'est donc pas notre objectif : ce qui exclut la possibilité de discrétiser spatialement et temporellement les équations générales du mouvement. Nous nous plaçons dans le cas d'une mesure ponctuelle de l'accélération et un calcul de la position et de la vitesse en ce point.

Deux articles sont à l'origine de la présente réflexion sur la détermination du mouvement à partir de la connaissance de l'accélération :

1. «Micro-accelerometer based hardware interfaces for wearable computer mixed reality applications»[2]
2. «Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system monitoring»[3]

Ces derniers offrent deux visions différentes de l'intégration de l'accélération en temps réel. Nous avons étudié les deux solutions que ces derniers proposaient pour la réalisation de cet objectif. Nous devons tout de même préciser que si les moyens présentés sont différents pour réaliser une intégration double de l'accélération, les matrices caractéristiques obtenues sont identiques au final.

3.2.1 «Micro-accelerometer based hardware for wearable computer mixed reality applications»

Pour situer le contexte de cet article, nous jugeons intéressant de citer son contenu en reportant son résumé.

«This paper considers the design of new interaction hardware, such as a wearable computer pen, a tilt pad, a wand pad and a gesture pad designed using accelerometers for such scenarios. The very difficult problem of noise in small hardware accelerometers, in the form of random bias drifts, which seriously impedes it's application in position measurement is also examined in detail. Kalman filtering has resulted in improved results, which are presented herewith.»[2]

Le plus gros problème rencontré pour les auteurs était la sensibilité au bruit de mesure des capteurs lorsqu'ils devaient intégrer le signal d'accélération pour déterminer la position du point. Pour corriger ces écarts, ils ont utilisé un filtre de Kalman dont ils fournissent les matrices de covariance. Toutefois, s'ils fournissent les matrices du système, ils n'explicitent pas la définition même du vecteur d'état du système. Pour appliquer les concepts de cet article à notre application, nous avons supposé que le système discrétisé était caractérisé par le vecteur d'état, X_k , proposé par l'équation (3.11).

$$X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Les données dont nous disposons pour comprendre la modélisation réalisée était la seule matrice d'état du système, A , donnée par la relation (3.12)

$$\begin{pmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Il nous est impossible de définir ce système de la même manière aux développements théoriques de la section 2. En effet le système décrit n'est pas réellement un système entrée - sortie, puisque aucune entrée n'est imposée au système. Pour retrouver les éléments de cette matrice, nous devons donc nous fier au sens physique qui se base sur les équations des mouvements rectilignes uniformes accélérés. En effet, ces équations peuvent se mettre sous la forme donnée par les équations (3.13) pour un corps soumis à un instant discret $k - 1$ à une accélération \ddot{x}_{k-1} pendant un intervalle de temps dt et ayant une vitesse \dot{x}_{k-1} . Elles permettent de trouver la position et la vitesse au temps discret suivant k . Toutefois, pour arriver à la matrice donnée par l'équation (3.12), nous devons ajouter une hypothèse sur l'accélération : d'un pas à un autre le système considère que l'accélération demeure constante.

$$x_k = x_{k-1} + \dot{x}_{k-1} dt + \ddot{x}_{k-1} \frac{dt^2}{2} \quad (3.13a)$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k-1} dt \quad (3.13b)$$

Ce dernier point nous a tout de suite paru litigieux même si le filtre de Kalman corrige la prédiction réalisée sur base de la modélisation. Un mauvais choix de matrices de covariance pourrait entraîner des erreurs importantes.

$$\begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k-1} \\ \dot{x}_{k-1} \\ \ddot{x}_{k-1} \end{pmatrix} \quad (3.14a)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{pmatrix} \quad (3.14b)$$

Par la relation (3.15), nous communiquons l'expression de la matrice de covariance du bruit de processus telle qu'elle nous a été donnée dans l'article. Nous comparerons cette matrice dans la suite avec celle obtenue par la théorie développée dans la section 2. Dans cette formule, q représente la densité spectrale de bruit de processus alors que Q représente la matrice de covariance associée à ce bruit. L'article fixe sa valeur¹⁰ à 1 ($m^2 \cdot s^{-3}$) $\cdot rad^{-1}$. Cette valeur a été trouvée comme étant celle qui permettait la meilleure adéquation entre résultats de mesures et résultats calculés.

$$Q = q \cdot \begin{pmatrix} \frac{dt^5}{20} & \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{6} \\ \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{2} & \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt^3}{6} & \frac{dt^2}{2} & dt \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Les mesures de l'article ont été réalisées sur un banc d'essai décrit dans l'article. L'objectif de ce dernier était d'observer avec attention les erreurs de calcul sur la position calculée par intégration de l'accélération. L'accéléromètre utilisé était le CROSSBOW *ADLX202*. Il était placé sur un plan horizontal carré de 26 cm de côté.

Leur définition du bruit de mesures nous semble assez litigieuse. En effet, au lieu d'utiliser la densité spectrale du bruit de mesure donnée généralement par les datasheet des accéléromètres, les auteurs ont fixé sa valeur à

$$R = \frac{q^2}{4}$$

Ce qui donne une valeur égale numériquement à 0,25. Cette valeur nous semble un peu faible au regard de la densité spectrale fournie par les datasheet des accéléromètres (biaxes 1,7g) égale à 110 $\mu g \sqrt{Hz}^{-1}$. Or nous savons qu'une faible matrice de covariance du bruit de mesure conduit à un meilleur contrôle des bruits de mesure et tend à diminuer l'erreur. D'ailleurs, nous rappelons les graphiques 3.3 et 3.4 présentés dans la section précédente et qui montrent l'évolution des erreurs absolues en fonction de la densité spectrale de bruit de mesure. Il est possible d'extrapoler la courbe obtenue et dire que l'erreur absolue aurait pu atteindre 0,45 soit une erreur

¹⁰Retranscrites dans un système MKS pour la facilité de la lecture de sa dimension

relative de 2 %¹¹

Les auteurs communiquent dans l'article les différentes initialisations du filtre : matrice de covariance P_0 et le vecteur initial. Nous citons ci-après leurs hypothèses :

« We assume that the acceleration and displacement are zero at start of the experiment and hence the initial estimate of the process state is taken to be a zero-vector. The initial error covariance matrix is given by :

$$P_{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

»[2]

Nous jugeons ces dernières assez réalistes, ou en tout cas, parfaitement justifiées pour leur application. En effet, il nous semble normal que l'accélération et la vitesse du stylo utilisé soient nulles initialement. La position doit être considérée comme une référence pour la suite des calculs. En outre, définir de la covariance associée à l'accélération égale à la densité spectrale du bruit de mesure nous paraît être une idée bonne et assez correcte. Toutefois, dans la section 2, nous avons cité M.ALAZARD qui conseillait d'accorder à P_0 un poids plus grand que celui de V , la densité spectrale du bruit de mesure, pour améliorer la comportement dans les transitoires. Nous constatons donc que la densité spectrale du bruit de mesure est élevée, en plus d'être du même ordre de grandeur que P_0 . Nous pensons donc que les paramètres proposés, même s'ils sont donnés pour correspondre le mieux aux mesures réalisées, ne sont pas bien estimés.

Pour réaliser les calculs liés à cette modélisation, nous avons utilisé les signaux harmoniques donnés à nouveau par les équations (3.5) dont la fréquence était égale à 0,8 Hz qui est bien de l'ordre des fréquences qui caractérisent les mouvements de grande amplitude, comprises entre 0 et 3 Hz. En outre, nous avons réutilisé les valeurs des matrices de covariance données également dans la section précédente. Sur les figures 3.9 et 3.10, nous donnons les résultats obtenus pour ce système. Le signal mesuré est bien intégré mais le système était incapable de corriger les constantes issues de cette intégration. En d'autres mots, la vitesse trouvée est correcte mais à une constante près et la position calculée est une droite autour de laquelle le signal oscille, droite de pente égale à l'offset sur la vitesse.

L'origine mathématique de cette constante vient de la non observabilité du système tel qu'il est défini. L'erreur commise à l'initialisation n'est pas corrigée par les mesures. Il apparaît de la sorte un biais numérique dont l'origine, dans ce cas-ci, est l'erreur initiale sur la vitesse. Physiquement, on peut comprendre que l'offset sur la vitesse détermine un signal calculé égal à la somme des variations de vitesse et

¹¹L'amplitude de l'accélération ayant été fixée à une valeur de 25, 26 $m s^{-2}$ lors de ces simulations.

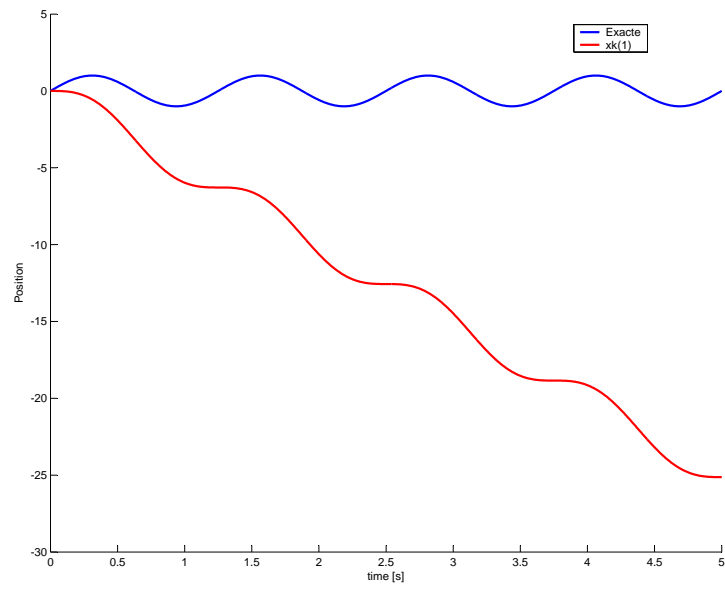


FIG. 3.9 – Signal de position trouvé par le filtre de Kalman (3.14)

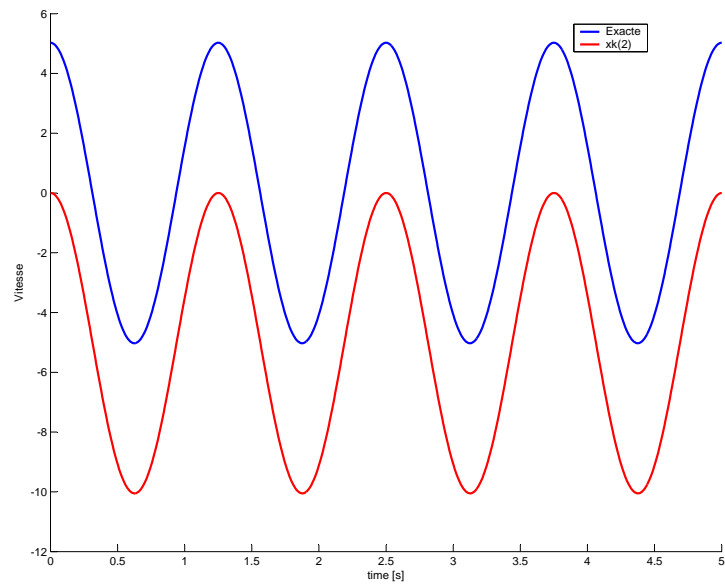


FIG. 3.10 – Signal de vitesse trouvé par le filtre de Kalman (3.14)

de cette constante initiale. Soit un signal, \dot{X} , composé de deux termes : un offset, \dot{X}_{off} , et le terme «réel», \dot{X} . Si ce signal est intégré entre deux instants t_0 et t , nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} X_{tot} &= \int_{t_0}^t (\dot{X}_{off} + \dot{X}) dt \\ &= \dot{X}_{off} \Delta t + X \end{aligned}$$

Au signal de position «réel» se superpose une droite de pente égale à l'offset.

Étant donné que les conditions initiales ne sont pas connues, la solution qui consiste à les imposer égales à zéro est la plus générale. En effet, nous pensons que la probabilité que la vitesse soit réellement maximale est la même qu'elle soit nulle. L'imposer à zéro permet en outre de ne pas avoir présager de la forme du signal. De toute façon, la moindre erreur sur la vitesse se propage très vite dans les calculs.

Mathématiquement, connaissant les matrices d'observation et de l'état, il est possible de déterminer le rang de la matrice, W_0 , donnée par la relation (2.16). On a ainsi :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Le rang de la matrice W_0 est 1, les trois lignes de la matrice sont égales. Elle ne possède donc qu'un vecteur linéairement indépendant.

De plus, ce biais numérique est intégré par le filtre de Kalman ; ce qui explique bien la forme du signal de position. Pour se rendre compte de la vitesse et de l'importance de l'erreur. Une erreur de l'ordre de $-8 \text{ m}\cdot\text{s}$ commise initialement, entraîne une erreur de $-8 \cdot 20$, soit -180 m au bout de 20 s .

3.2.2 «Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system»

Nous avons déjà donné le résumé de cet article dans les parties précédentes. Les hypothèses de la modélisation ont déjà également été données. Toutefois, à la différence du cas présenté dans cet article, la position n'est pas une grandeur observée. Pour appliquer les concepts de l'article, nous devons réaliser certaines modifications.

Si nous utilisons ce modèle in extenso, nous devrions considérer une équation d'observation de la forme donnée par l'équation (3.20) dans laquelle u représente le signal d'entrée déjà présent dans l'équation du système mais influencerait ici directement la sortie du système.

$$y = C x + D u \quad (3.20)$$

Le système est alors décrit par le modèle (3.21).

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ddot{x}_m + w \quad (3.21a)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \ddot{x}_m \quad (3.21b)$$

En outre, nous pouvons affirmer que cette application conduit de la même manière à un système non observable. En effet, puisque la matrice C ne contient que des zéros, la matrice W_0 ne contiendra elle aussi que des éléments nuls. Mais de manière plus frappante, une telle modélisation conduit à identifier le gain du filtre de Kalman égal à un vecteur rempli de zéro. En effet, en se souvenant de l'équation (2.30), on voit que la matrice d'observation définie de la sorte annule ce gain. De manière logique, cette observation revient à annuler tout effet de correction des erreurs du filtre de Kalman ; le vecteur d'état final et la matrice de covariance de l'erreur sont donc égaux aux estimations $x_k = x_k^-$ et $P_k = P_k^-$.

La seconde possibilité est celle que nous avons choisie dans la suite. Cette modélisation repose sur la définition de l'accélération comme un élément du vecteur d'état et deuxièmement la dérivée de l'accélération est définie comme l'entrée du nouveau système. Nous détaillerons dans la section 4, les différents éléments de modélisation ainsi que les conséquences d'un tel choix.

4 Filtre de Kalman à une dimension

Nous avons vu dans la section 3 que pour appliquer le filtre de Kalman à notre application, certaines entorses sont nécessaires. Le vecteur d'état doit être modifié de telle sorte que l'accélération en devienne un élément. Cette modification a des conséquences importantes sur la définition du système.

Deux possibilités de modélisation s'offrent à nous. Premièrement, nous pouvons utiliser la définition de système proposée par l'article «Micro-accelerometer based hardware interfaces for wearable computer mixed reality applications» (que nous appellerons dans la suite par modèle un)¹². Deuxièmement, si nous considérons un système possédant une sortie (l'accélération) et une entrée (sa dérivée), le système sera mieux défini au sens donné dans la section 2. Ce dernier, que nous nommerons modèle deux, sera détaillé dans le reste de la section.

L'inconvénient majeur du modèle deux est l'augmentation du bruit. En effet, le signal d'accélération comporte deux termes : le premier est le signal exact tel que l'accéléromètre devrait le fournir, noté $a_{wn}(t)$, et le second est un bruit de mesure supposé blanc, noté $v(t)$. Le signal d'accélération, $a(t)$ s'écrit donc

$$a(t) = a_{wn}(t) + v(t)$$

L'expression de sa dérivée est alors :

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_{wn}}{dt} + \frac{dw(t)}{dt}$$

Si le terme $w(t)$ est de moyenne nulle puisqu'il s'agit d'un bruit blanc gaussien centré, les variations de ce signal peuvent être importantes et supérieures à la valeur du bruit. Le rapport signal sur bruit peut donc augmenter au travers de la dérivation. Toutefois, comme la définition du système est plus correcte, la prédiction de l'état sera meilleure comme la valeur finale calculée par le filtre. Le modèle devrait donc réaliser une moins bonne prédiction de l'état ; ce qui conduit à un moins bon calcul de l'état.

Toutefois, il s'agit d'une solution nous permettant de rapprocher en quelque sorte les modélisations des deux articles cités précédemment, d'une part, l'accélération puisqu'elle est observée doit faire partie du système et d'autre part, le système nécessite une entrée pour pouvoir être défini correctement.

4.1 Les définitions des systèmes continus et discrets

Comme nous l'avons déjà mentionné l'entrée du système modélisé est la dérivée de l'accélération mesurée par les accéléromètres, notée \dot{x}_m . Le vecteur d'état en temps continu, X , prend la forme donnée par l'équation (4.1).

¹²Modèle donné par les équations (3.14)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Les équations à la base de la modélisation du système sont données par les relations (4.2) qui définissent alors les matrices du système (4.3).

$$\dot{x} = \dot{x} \quad (4.2a)$$

$$\ddot{x} = \ddot{x} \quad (4.2b)$$

$$\dot{\ddot{x}} = \dot{\ddot{x}}_m \quad (4.2c)$$

4.1.1 Le système continu

Le système continu se caractérise par le vecteur d'état donné par l'équation (4.1). Son signal d'entrée est la dérivée du signal d'accélération. L'élément du vecteur d'état qui est mesuré est l'accélération. En bref, le système se ramène aux équations (4.3), dans lesquelles les signaux v et w sont les bruits de mesures des signaux d'entrées et de mesures.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \dot{\ddot{x}}_m + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \quad (4.3a)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + v \quad (4.3b)$$

4.1.2 Le système discret

Comme nous l'avons montré dans la section 2, une fois le système continu défini, il est relativement facile de déterminer les matrices qui définissent le système discrétisé avec un pas de temps de dt en utilisant les équations (2.20) et (2.27). Si on ne considère qu'un développement de Taylor au premier ordre, la matrice du système discrétisé ne permet pas l'estimation de la position. Il faut donc développer l'exponentielle à l'ordre supérieur. On trouve ainsi les équations et les matrices 4.6 qui modélisent le système. Les développements qui ont conduit à ces résultats se trouvent dans la section C

Si nous utilisons un développement au premier ordre de l'exponentielle, les équations discrétisées seraient données par les relations (4.4).

$$x_k = x_{k-1} + \dot{x}_{k-1} dt \quad (4.4a)$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}_{k-1} + \ddot{x}_{k-1} dt + \dot{\ddot{x}}_m \frac{dt^2}{2} \quad (4.4b)$$

$$\ddot{x}_k = \ddot{x}_{k-1} + \dot{\ddot{x}}_m dt \quad (4.4c)$$

Physiquement, il ne nous semble pas correct de définir la position du point sans qu'elle ne soit explicitement fonction de l'accélération. Ce constat est la raison pour laquelle nous avons choisi de considérer un développement au second ordre de l'exponentielle matricielle. Le vecteur d'état du système ainsi discrétisé est donné par l'équation (4.5); expression dans laquelle l'indice $_d$ réfère au caractère discrétisé de ce vecteur. Il est constitué de la position, la vitesse et l'accélération (discrètes).

$$X_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \ddot{x}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dt^3}{6} \\ \frac{dt^2}{2} \\ dt \end{pmatrix} \ddot{x}_m + \begin{pmatrix} \frac{dt^3}{6} \\ \frac{dt^2}{2} \\ dt \end{pmatrix} w_k \quad (4.6a)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \ddot{x}_k \end{pmatrix} + v_k \quad (4.6b)$$

$$QN = q \begin{pmatrix} \frac{dt^5}{20} & \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{6} \\ \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{3} & \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt^3}{6} & \frac{dt^2}{2} & dt \end{pmatrix} \quad (4.6c)$$

La matrice d'état du système discret, A_d , est la même que celle trouvée dans l'article «Micro-accelerometer based hardware interfaces for wearable computer mixed reality applications»[2]. Physiquement, on retrouve bien la notion d'intégration temporelle. La grande différence est que l'accélération estimée a priori par le filtre est la vraie entrée du système. De plus, la matrice de covariance du bruit d'état est identique à celle fournie par l'article[2] et donnée par la relation 3.15¹³.

4.1.3 Observabilité

Cependant le système défini par les matrices (4.3) n'est pas observable. En effet, considérant les matrices A et C du système continu, on obtient la matrice d'observabilité W_0 donnée par la relation (4.7).

$$W_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

¹³Voir section 3

La matrice W_0 ne contient qu'un seul vecteur linéairement indépendant, les deux autres ne contiennent que des éléments nuls.

Si le système n'est pas continu des biais numériques liés aux erreurs vont encore apparaître. Pour illustrer la différence entre un système observable (l'application de M.SMYTH) et un système non observable (notre application), c'est-à-dire la possibilité de mesurer la position, nous montrons les calculs de la position dans les deux cas sur les figures 4.1 et 4.2. Sur ces derniers, les grandeurs évaluées par le filtre de Kalman sont en rouge et les grandeurs réelles sont en bleu.

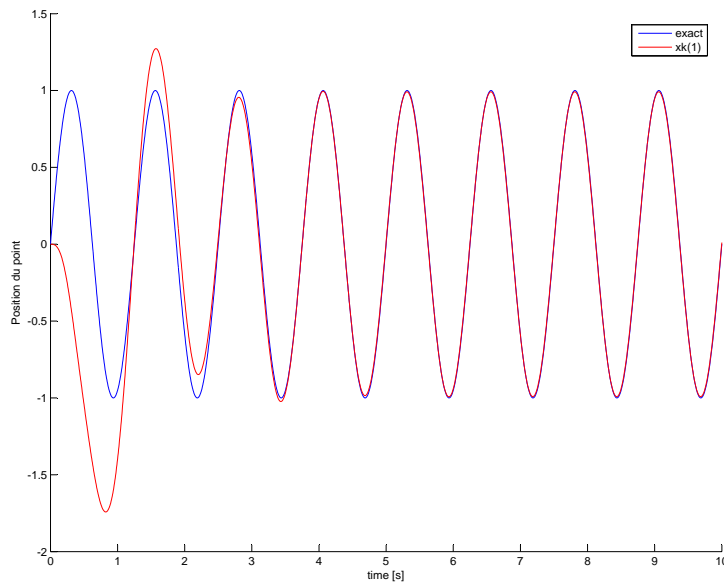


FIG. 4.1 – Évolution de la position calculée par un filtre de Kalman avec mesure de la position par GPS

La comparaison de ces figures¹⁴ permet de voir que la mesure de la position par GPS permet la correction des erreurs. La seule mesure de l'accélération est donc insuffisante. Une évolution semblable est constatée sur le graphique de la vitesse. Si l'état du système est corrigé par la mesure de la position, la vitesse tend à retrouver la bonne valeur du signal après un temps réduit fonction de la qualité de la définition des différentes matrices ; alors que dans l'autre cas, la vitesse trouvée est exacte à une constante près égale à $-5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Cette valeur est également la pente de la droite autour de laquelle le signal de position oscille. En outre, nous constatons que cette valeur d'offset est la même que celle trouvée sur la figure 3.10 de la section 3.

¹⁴Les conditions initiales sont données à nouveau par les relations (3.6)

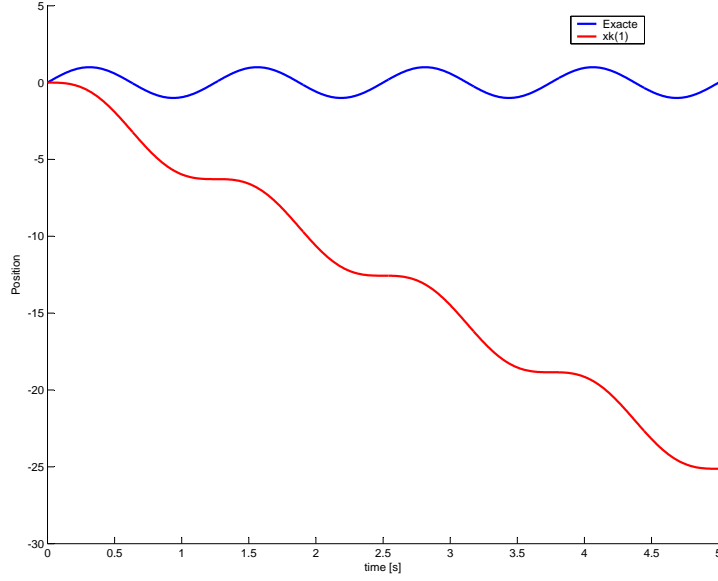


FIG. 4.2 – Évolution de la position calculée par un filtre de Kalman sans mesure de la position par GPS

4.1.4 Influence du bruit

Comme nous l'avons déjà dit, le système n'est pas capable de corriger tout seul la composante continue qui se superpose au signal exact. Le gain du filtre étant différent, il semble crédible que le filtre permet d'éliminer ou du moins de gérer correctement les bruits de mesures des signaux issus des accéléromètres.

Pour répondre à cette question, nous avons comparé l'amplitude relative d'un bruit blanc et gaussien superposé au signal d'accélération avec l'amplitude relative du bruit sur la vitesse calculée par le filtre de Kalman. Ces amplitudes sont calculées par le rapport entre la valeur absolue du bruit sur l'amplitude maximale du signal. Soit donc un signal X bruité par un bruit blanc gaussien, X_{wn} , et $\max(X_{wn})$ son amplitude si toutefois il s'agit bien d'un signal qui oscille autour de zéro.

$$Amp_{noise} = \frac{abs(X_{wn}(i) - X(i))}{\max(X_{wn})} \quad (4.8)$$

Le bruit est rendu adimensionnel pour pouvoir comparer sur un même graphique le bruit sur l'accélération et celui sur la position.

Pour obtenir ces graphiques, nous avons supprimé du signal de la vitesse l'erreur initiale qui posait des problèmes. Au vu des signaux utilisés comme entrée, les

conditions initiales du filtre sont telles que :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \\ \ddot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le graphique de la figure 4.3 est obtenu pour un signal d'accélération tel que décrit précédemment et pour une valeur de rapport signal à bruit de 35 dB. Ce dernier semble montrer que le bruit sur la mesure d'accélération (les ronds bleus) est dispersé et de moyenne nulle mais peut atteindre des valeurs relativement importantes. Le bruit sur la vitesse (les ronds rouges) est par contre relativement constant et de faible amplitude.

Cette figure tend donc à montrer que le bruit sur la mesure de l'accélération n'est pas transposé intégralement sur la vitesse calculée. Le filtre peut donc corrigé l'effet du bruit de mesure de l'accélération. Ces dernières sont alors moins bruitées.

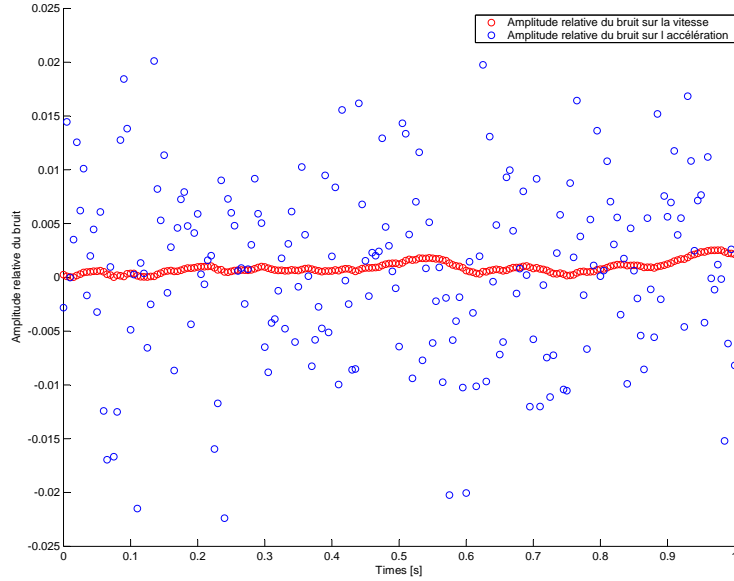


FIG. 4.3 – Illustration de l'influence du bruitage de l'accélération sur le bruit sur la vitesse calculée

Nous n'avons pas choisi d'illustrer le bruit sur la position car sa valeur n'est pas représentative de l'effet d'atténuation du bruit. En effet, le bruit n'étant pas corrigé, la faible erreur sur la vitesse due au bruit s'intègre et fausse le calcul de la position. Ce problème de bruit sur la position est donc maintenant lié à l'élimination des erreurs initiales.

En outre, il est intéressant de vérifier que la définition du système (en temps continu donné par l'équation (4.3)) n'entraîne pas une augmentation trop importante du bruit par rapport au modèle un. La comparaison entre ces deux systèmes est réalisée en évaluant l'erreur commise sur la position et sur la vitesse par deux filtres dont la seule différence est la définition d'une entrée égale à \ddot{x}_m . Les figures 4.4, 4.6, 4.5 et 4.7 illustrent cette comparaison.

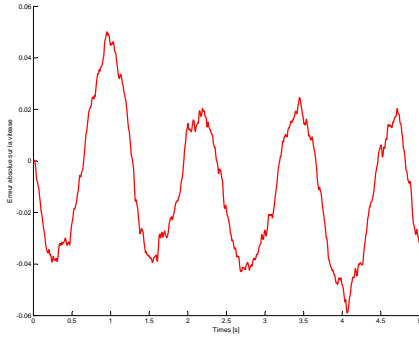


FIG. 4.4 – Erreur sur la vitesse pour le système «sans entrée»

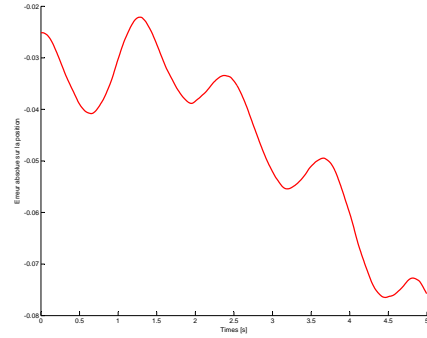


FIG. 4.6 – Erreur sur la position pour le système «sans entrée»

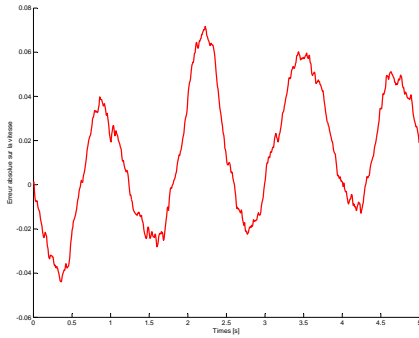


FIG. 4.5 – Erreur sur la vitesse pour le système «avec entrée»

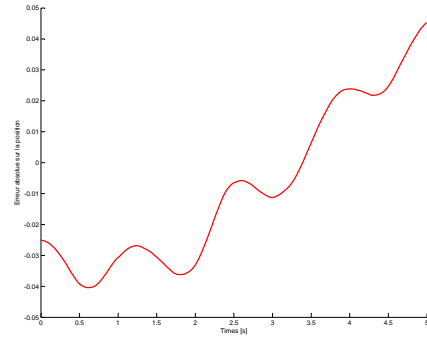


FIG. 4.7 – Erreur sur la position pour le système «avec entrée»

Les graphiques 4.4 et 4.6 présentent l'évolution de l'erreur absolue réelle (entre le signal réel et celui calculé) pour le système ne possédant pas d'entrée. Les graphiques 4.5 et 4.7 présentent a contrario l'évolution de cette erreur pour les systèmes possédant une entrée x_{tiers} . Le signal d'accélération a été bruité dans les deux cas par un bruit de snr égal à 35 dB.

À partir de ces graphiques, il est possible de dire que pour les deux systèmes définis, l'erreur sur la vitesse croît légèrement avec le temps. Il s'agit de l'illustration de la somme des erreurs commises par le bruit. L'erreur sur la position augmente

donc de manière quadratique. En outre ces graphiques illustrent bien notre opinion a priori : le bruit n'augmente que très légèrement malgré sa dérivation. De plus, si l'amplitude du bruitage est relativement faible, nous l'avons pris à une valeur proche de celui caractérisant les accéléromètres biaxes.

Enfin, bien que l'amplitude de l'erreur soit faible, son évolution temporelle risque de conduire à des erreurs toujours plus importantes avec le temps si elles ne sont pas corrigées. Il nous semble donc crucial de disposer d'une stratégie de contrôle des constantes fictives soit dues aux bruits de mesures, soit dues aux erreurs initiales.

4.1.5 Conditions initiales du filtre

Nous allons détailler dans ce paragraphe, les conditions initiales du filtre. Comme nous l'avons dit dans la section 2, les conditions initiales ne sont pas importantes pour le filtre de Kalman. Cette notion est vraie quand le système est observable et quand les mesures permettent de corriger l'estimation du vecteur d'état. Nous savons que notre système n'est pas observable et s'avère donc incapable de corriger les deux grandeurs que nous cherchons à déterminer.

Une première solution serait de déterminer les conditions initiales du système de manière itérative. Il est vrai que si les signaux sont harmoniques, le passage par zéro de l'accélération entraîne un passage par zéro de la position alors que la vitesse est maximale. Deux problèmes apparaissent. Premièrement, il faut déterminer un critère de sélection de zéro en sachant que l'effet du bruit d'accélération devra être pris en compte. Deuxièmement, l'amplitude de la vitesse demeure inconnue au passage par zéro. Il n'est donc pas envisageable, à notre sens, de rechercher les conditions initiales.

Examinons le vecteur d'état, on sait ce dernier donné par la relation (4.5) ; il est donc constitué des trois composantes du mouvement. Nous allons examiner l'effet de la méconnaissance des conditions initiales sur chaque élément du vecteur. Premièrement, l'accélération est une grandeur mesurée, sa valeur est donc corrigée très vite si le filtre de Kalman dispose des bons paramètres. Ensuite, une erreur sur la position initiale entraînera un décalage vers le bas ou vers le haut du signal de position. Ce décalage étant égal à la valeur de l'erreur commise initialement. Comme le câble oscille autour d'une position de référence, il ne s'agit pas de l'erreur la plus grave. Enfin, une erreur sur la vitesse aura le même effet sur le signal de vitesse : c'est-à-dire un décalage du signal de vitesse à une constante dont la valeur est l'erreur sur la vitesse initiale. Cependant, ce type d'erreur se propage par intégration, comme nous l'avons déjà dit, sur la position.

Le point crucial est donc de déterminer la vitesse initiale. L'hypothèse la moins restrictive est de la supposer nulle. Le biais numérique à éliminer dans la suite sera donc compris entre zéro et la valeur absolue maximale de la vitesse. Une itération

sur la vitesse conduirait au final au même résultat puisque même de très petites erreurs peuvent conduire à des positions erronées. En effet, considérons une erreur de $0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, au bout de 20 s , ce biais s'est traduit par une erreur de $0,2 \text{ m}$. Or un ordre de grandeur raisonnable du déplacement du câble est de quelques centimètres. L'erreur relative commise par le filtre est donc très importante et du même ordre de grandeur que le déplacement.

La détermination, précise des conditions initiales, demande des temps de calculs et un nombre d'opérations assez élevé. L'erreur sur la vitesse initiale peut être faible mais elle va continuer à être intégrée et donc conduire à des erreurs assez grandes sur la position. Nous trouvons que le gain lié au calcul exact des conditions initiales est plus faible que le surcoût de calculs que demande cette initialisation.

Enfin, nous précisons que le signal de position est plus exactement une variation de position. L'évolution autour de la flèche d'un conducteur peut donc être obtenue assez facilement, connaissant l'évolution de l'accélération selon l'axe vertical.

4.2 Élimination de la composante continue

Comme nous l'avons vu le biais numérique sur la vitesse pose un gros problème pour le calcul de la position. Nous devons insister une nouvelle fois sur le fait que même une faible erreur sur la connaissance de la vitesse peut entraîner des erreurs conséquentes sur la position. Pour éliminer ces biais numérique, nous avons moyenné le signal calculé en réalisant un certain nombre d'hypothèses que nous détaillons dans la suite.

Une première hypothèse physique qui doit être posée pour réaliser cette opération est que la moyenne de la vitesse doit être proche de zéro. En effet, le câble oscille dans la réalité autour d'une position donnée, par conséquent sa vitesse aussi est oscillante et donc de moyenne nulle ou du moins proche de zéro. Le problème qui se pose alors est de déterminer quelle stratégie choisir pour retrancher une constante au signal. En effet, la période du signal n'est pas connue a priori et résulte de la superposition de signaux à des fréquences différentes.

En outre, il n'est pas envisageable de détecter un passage par zéro de l'accélération pour corriger la position. En effet, numériquement et vu la fréquence d'échantillonnage de notre application qui est de 200 Hz , fréquence parfaitement justifiée vu les basses fréquences des signaux observés, l'accélération n'atteint jamais vraiment zéro. Pour un écart numérique de $0,1$ entre deux valeurs qui devraient être théoriquement nulles, le programme n'aurait pu détecté que l'une des deux. Numériquement donc, une telle condition ne tient pas la route. De plus, nous n'avons pas évoqué le bruit de mesure car son action sur un passage par zéro réel de l'accélération aurait été si forte qu'elle suffit à elle seule de rendre cette condition numérique

totalemment hors de question.

On voit donc apparaître le problème du choix du paramètre de calcul de la moyenne. Deux solutions peuvent être implémentées en restant dans le domaine temporel. L'une est de choisir un nombre élevé de points et utiliser la fonction «Mean window by window». La seconde utilise des notions supplémentaires, nous l'avons baptisée «Mean Square» dont le code se trouve dans l'annexe D.

Il faut également signaler pour fermer des portes de modélisation que la moins mauvaise solution est de déterminer la valeur du biais sur la vitesse puis de réaliser l'intégration de cette constante qui sera alors soustraite de la valeur du signal de position. Si on venait à considérer deux systèmes en série qui réaliseraient chacun une intégration, on obtient alors la modélisation illustrée par la figure 4.8.

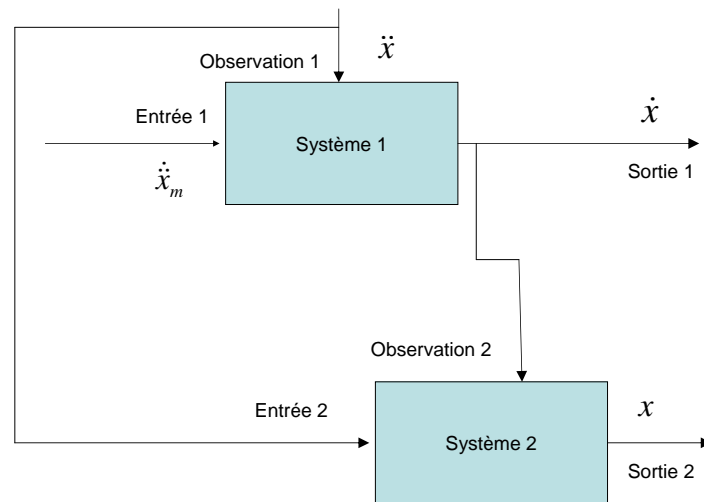


FIG. 4.8 – Schéma de la structure de modélisation d'une mise en série de deux filtres

L'idée développée était de réaliser une première intégration pour évaluer la vitesse, pour ensuite corriger sa valeur en soustrayant sa moyenne. La vitesse corrigée devenait alors la grandeur observée d'un second système dont l'entrée était l'accélération et qui évaluait la position puis la corrigeait par moyenne. Dans cette application, encore une fois, la moindre erreur sur la vitesse transitait encore dans les modèles réalisés de sorte que les résultats obtenus n'étaient pas meilleurs que ceux obtenus par le filtre de Kalman développé ci avant.

Toutefois, quelle que soit la stratégie choisie pour le calcul de la moyenne en «temps réel», nous devons être sûr que la demande de calcul ait un sens, il faut

disposer d'une longueur de signal à analyser assez grande pour que des signaux de fréquences différentes puissent être repris dans l'analyse. Les fréquences des mouvements de grande amplitude sont comprises entre 0,1 et 3 Hz . Considérant un mouvement de très basse fréquence de l'ordre de 0,1 Hz , à la fréquence d'échantillonnage de 200 Hz le nombre de points qui correspondent à une période de ce signal est égal à 2000 puisque sa période est de 10 s .

L'analyse fréquentielle du signal pour en déterminer sa période aurait pu avoir un sens si le but de ce travail n'avait pas été d'éviter toute analyse de ce genre. Tant qu'à implémenter une méthode, autant essayer d'éviter d'avoir recours à la première et éviter de la sorte de subir ses inconvénients. Toutefois, comme le signal d'accélération est déjà filtré pour éliminer les fréquences des signaux supérieures à 3 Hz , nous aurions pu utiliser un filtre passe-bas appliqué sur le signal de vitesse calculé et éliminer de la sorte sa composante continue. Cependant, il ne nous a pas paru souhaitable de filtrer à nouveau le signal pour en éliminer sa composante continue. Un filtre de ce type-là entraîne des distorsions et augmente le déphasage entre les signaux. Si aucune des deux méthodes en temporel ne donne de résultats significatifs, alors cette dernière est une option crédible de correction.

4.2.1 Utilisation de la fonction «Mean window by window»

Une première idée pour éliminer la composante continue est de moyenner le signal de vitesse sur une période et soustraire cette moyenne du signal initial. Finalement la connaissance exacte n'a que peu d'intérêt puisque elle risque d'être entachée de nombreuses erreurs dues aux bruits de mesures et de problèmes numériques. De plus, un code de calcul peut ne pas se formaliser de ce détail. Dans notre cas, le biais numérique est constant puisqu'il est dû aux conditions initiales. Si on calcule la moyenne de ce signal sur deux «fenêtres» différentes, c'est à dire sur deux ensembles de points ayant les mêmes dimensions mais grandissant ou diminuant au cours du temps, leur moyenne doit être égale.

Pour réaliser ce calcul de la moyenne, nous avons utilisé la fonction «Mean window by window». L'intervalle de temps sur lequel est étudié le signal est divisé en N fenêtres¹⁵. La fonction calcule la moyenne du signal sur chaque fenêtre et fournit deux vecteurs : *tendency* et *mean_{tendency}*. Ces N fenêtres sont de longueur égales sauf la dernière qui est telle que la somme des longueurs des fenêtres soit égale à la longueur totale du signal à analyser. Le vecteur *tendency* est un vecteur de longueur égale aux nombres de fenêtre et dont les éléments sont les moyennes sur chacune des fenêtres. *mean_{tendency}* est un vecteur de dimension égale à la longueur du signal. Ce vecteur possède la même répartition en fenêtre que celle calculée dans la routine et les valeurs des éléments sur une fenêtre est égale à la valeur de la moyenne sur la fenêtre associée.

¹⁵Le nombre de ses fenêtres est choisi par l'utilisateur.

Après un appel à cette fonction, nous retranchons du signal à analyser le vecteur *mean_tendency*. Sur chaque fenêtre que nous avons définie le signal résultant est égal au signal initial diminué de sa moyenne sur chacune des fenêtres.

La première chose que nous allons définir est le nombre de fenêtres pour lesquelles nous évaluerons la moyenne. Vu le problème lié à l'incertitude sur la période du signal étudié, il nous a semblé logique de ne pas multiplier à l'envie le nombre de fenêtres. Des signaux de basses fréquences risqueraient de modifier les résultats obtenus par calcul de la moyenne. Nous avons donc considéré seulement deux fenêtres lors du lancement de l'analyse.

Deux possibilités se dégagent pour déterminer une condition numérique qui permettrait de prendre la bonne partie du signal à mesurer : soit d'imposer une valeur limite de la moyenne de la vitesse corrigée, soit de considérer que l'égalité entre les moyennes sur chaque fenêtre doit être réalisée. Toutefois, comme l'égalité stricte n'a pas beaucoup de sens, la différence entre les deux moyennes ne doit pas être supérieure à une valeur numérique fixée de l'ordre de $1e^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Nous avons choisi cette valeur par essai erreur avec nos simulations, une valeur plus petite ne modifiait rien ; une valeur plus grande, n'avait pas beaucoup de sens.

Tout d'abord, nous avons considéré une boucle de correction telle que montrée dans l'annexe D. Elle se base sur l'idée que les moyennes évaluées sur les deux fenêtres doivent être égales. Bien que cette idée soit séduisante, il n'est pas possible, numériquement, de définir un gardien qui puisse rester général. Nous n'avons pas constaté la vérification de cette condition. Les graphiques obtenus sont les mêmes que ceux sans correction.

Ensuite, nous avons considéré une boucle qui s'assure que la moyenne de la vitesse corrigée, c'est-à-dire de la vitesse dont la composante moyenne a été ôtée, soit nulle ou bien numériquement proche de zéro. Nous admettons que cette condition risque de ne pas conduire à une stabilité numérique dans certains cas mais l'idée mérite d'être évaluée. Comparativement à la méthode précédente, l'erreur sur la vitesse est contenue à une valeur assez faible comme nous le montrent les graphiques 4.9 et 4.10.

Ces graphiques montrent clairement que le gardien de la boucle sur la correction n'est vérifié qu'une seule fois. Ce qui illustre encore le problème numérique qui apparaît. En effet, la différence entre vitesse réelle et vitesse recalculée tend vite vers une valeur qui minimise l'offset et rend le gardien insensible lors de son évaluation suivante. La position calculée oscille autour de deux droites. Leurs pentes sont égales à la différence entre la moyenne calculée par le fonction et le biais réel. L'erreur a donc diminué mais elle reste importante.

L'amplitude de l'erreur entre le signal X_{reel} et le signal calculé par le filtre de

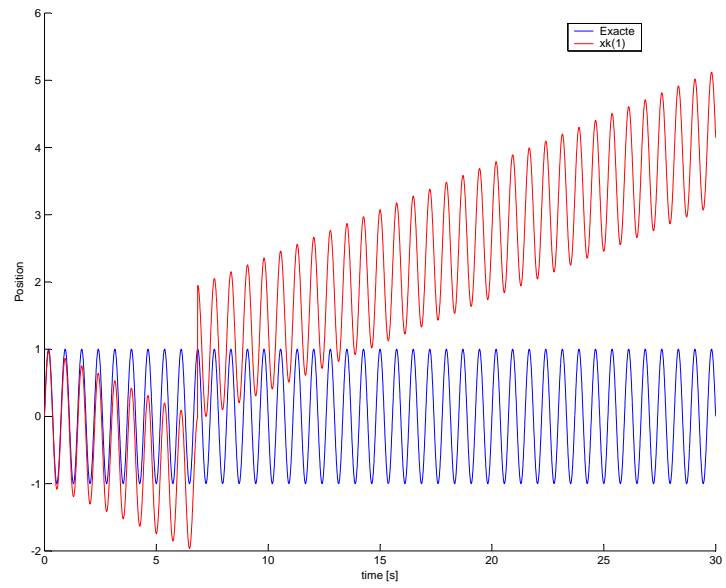


FIG. 4.9 – Position corrigée par la seconde boucle, voir annexe D

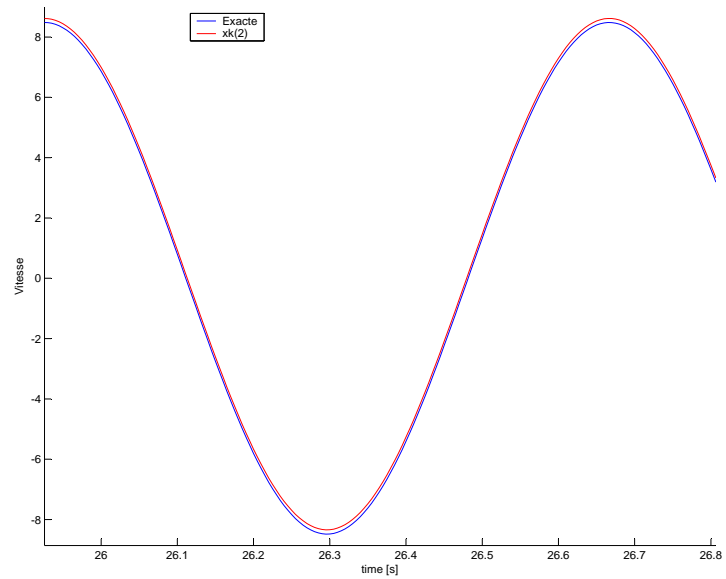


FIG. 4.10 – Zoom sur la vitesse corrigée par la seconde boucle, voir annexe D

Kalman X_{Kalman} consiste simplement en la différence de ces deux signaux, soit :

$$Amp_{erreur} = (X_{reel} - X_{Kalman})$$

Nous obtenons le graphique 4.11 qui illustre parfaitement les résultats obtenus pour la position du point. Il est tout de même intéressant de signaler que l'erreur relative sur la vitesse est faible. En effet, nous avons évalué sur le tableau 4.1 les différentes erreurs commises. Elles indiquent toutes que l'erreur moyenne n'est pas très importante mais a des répercussions sur le calcul de la position.

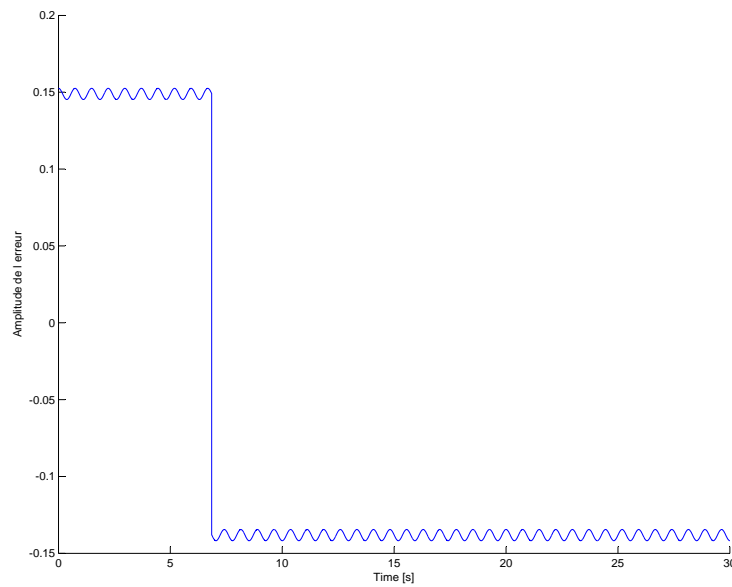


FIG. 4.11 – Erreur relative commise sur la vitesse en valeur absolue, avec deux fenêtres

TAB. 4.1 – Erreurs commises sur la vitesse lors de l'évaluation de la seconde boucle de correction.

	Valeurs de l'erreur
Erreur relative maximale	0.018
Erreur relative minimale en valeur absolue	0.016
Erreur maximale	0.15
Erreur minimale en valeur absolue	0.13

Envisageons tout de même la possibilité d'augmenter le nombre de fenêtres pour l'analyse de la moyenne. Nous considérons que le nombre de fenêtre doit rester un

multiple de la longueur du signal analysé. Cette hypothèse nous permet de rester maître des largeurs des fenêtres. Nous illustrons sur la figure 4.12 l'évolution de l'erreur quand le nombre de fenêtres augmente pour un même nombre de points analysés. La comparaison des figures 4.11 et 4.12 permet de voir que l'augmentation du nombre de fenêtres n'a pas amélioré la précision.

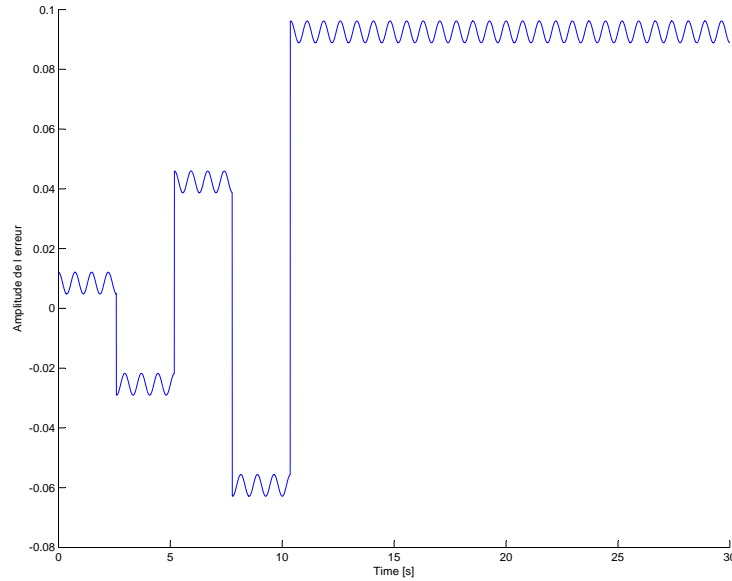


FIG. 4.12 – Erreur relative commise sur la vitesse en valeur absolue, avec cinq fenêtres

Pour conclure, cette section consacrée à l'utilisation de la fonction «Mean window by window» nous dirons qu'elle peut conduire à une erreur relative de la vitesse contenue à 2 %. L'erreur sur la position grandit selon l'amplitude de l'erreur par contre. Le problème n'est donc pas solutionné par cette méthode.

4.2.2 Fonction «Mean square»

Avant d'expliquer comment cette fonction travaille, nous devons rappeler quelques notions sur les composantes continue et alternative d'un signal périodique. En effet, on sait par les notions d'électricité en alternatif, qu'un signal se décompose comme la somme d'une composante continue à laquelle une composante alternative se superpose. Soit donc V_{AC} et V_{DC} respectivement les composantes alternatives et continues d'un signal V . La forme du signal périodique importe peu mais il doit s'agir d'un signal de période T .

$$V = V_{AC} + V_{DC}$$

Par définition la moyenne quadratique du signal V , notée V_{RMS} est donnée par l'expression (4.9).

$$V_{RMS} = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T V^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

En développant le signal en fonction de ses composantes alternatives et continues, on obtient l'expression suivante :

$$(V_{RMS})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (V_{AC}^2 + V_{DC}^2 + 2 V_{AC} V_{DC}) dt \quad (4.10)$$

Premièrement, comme le terme V_{AC} est une constante et ne dépend donc pas du temps, on peut le sortir de l'intégrale facilement. Deuxièmement, V_{DC} est périodique et son intégrale sur une période est nulle. Il ne reste plus que le terme V_{DC}^2 qui est également une constante. On trouve alors que :

$$V_{RMS}^2 = V_{AC}^2 + V_{DC}^2$$

Ce dernier résultat est exact si le signal est périodique et que les grandeurs V_{AC} et V_{RMS} sont correctement estimées sur la période. Nous ne connaissons pas dans notre cas cette période mais si nous définissons le résidu, r , par la formule (4.11), la valeur de V_{DC} que nous cherchons à calculer sera celle qui minimise ce résidu.

On peut dire alors que la moyenne, V_{DC} , est approchée par la valeur qui minimise le résidu. Il faut alors tout de suite mettre en garde, cette fonction ne donnera de bons résultats, c'est-à-dire entachés d'une erreur minimale que pour un grand nombre de valeurs du signal dont il faut connaître la moyenne. De manière itérative, les trois termes de cette équation sont estimés ainsi que la valeur du résidu attachée à ces calculs.

$$r = V_{RMS}^2 - V_{AC}^2 - V_{DC}^2 \quad (4.11)$$

Sous *Matlab*, la fonction que nous avons utilisé est appelée «Mean Square». Les paramètres de cette fonction sont le signal à examiner, la vitesse dans notre cas, et le pas entre les instants où la fonction calcule les grandeurs. Pour limiter les durées d'analyse, le calcul de cette moyenne est réalisé par pas de dix points dans la boucle. Le nombre de points passés au cours de l'appel de la fonction est le même que précédemment, c'est-à-dire 2000 points.

Comme nous l'avons déjà fait précédemment, nous allons évaluer les différentes erreurs relatives commises par cette technique sur le calcul de la vitesse. Sur la figure

4.13, nous pouvons voir que la vitesse calculée par cette méthode est plus proche de la valeur réelle. Nous avons d'ailleurs illustrer l'évolution de l'erreur relative commise sur cette vitesse sur le graphique 4.14. On voit clairement que l'amplitude de l'erreur sur la vitesse tend vers zéro. Le signal dont on retire la moyenne tend donc vers le signal exact.

Il est important de préciser que les différents signaux d'entrée du système n'ont pas été bruités. Cette entorse à la réalité nous permet de vérifier que l'erreur sur la vitesse tend bien vers zéro. Le bruitage risque de modifier le temps au bout duquel l'erreur s'annule.

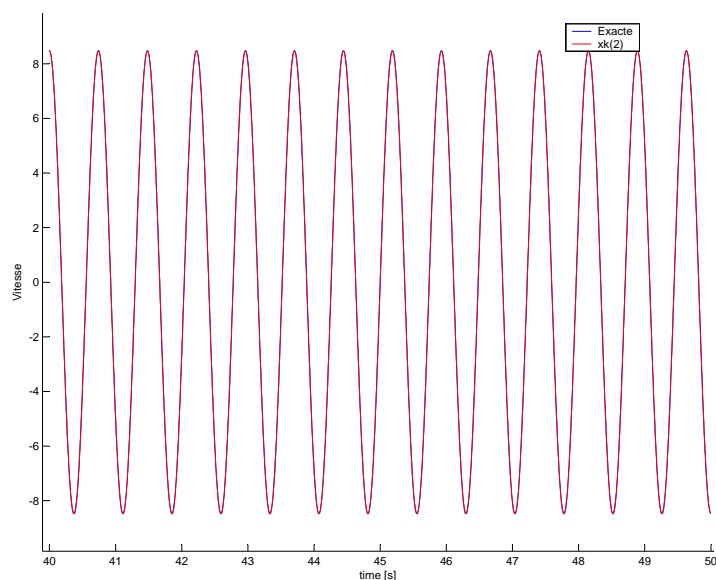


FIG. 4.13 – Vitesse calculée avec la fonction «Mean square» et illustrée entre 40 et 50 s

Cependant même si l'erreur initiale est corrigée de manière rapide et précise, elle se propage malgré tout à la position et fausse de manière forte les calculs. Au bout d'un certain temps, relativement long (de l'ordre de 50 s dans ce cas-ci sans aucun bruit) l'erreur sur la vitesse tend vers zéro et donc l'erreur sur la position tend vers une constante. Il apparaît donc ici une notion de longueur de temps minimale au bout de laquelle le calcul de la position tend vers une constante. Les composantes continues peuvent donc être trouvées. Ces remarques sont parfaitement illustrées sur la figure 4.15.

La position tend à se «stabiliser» au bout d'un certain temps. Si nous éliminons la composante continue sur la position pour une période d'analyse supérieure à une

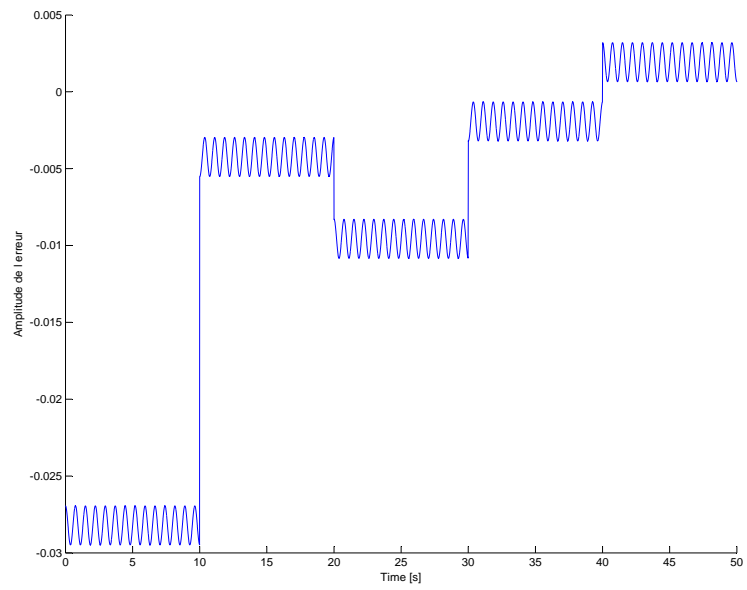


FIG. 4.14 – Évolution de l'erreur sur la vitesse en fonction du temps



FIG. 4.15 – Évolution de la position corrigée par «Mean square» entre 20 et 50 s

minute, la position ainsi calculée devrait osciller autour de zéro sauf aux premiers instants pendant lesquels sa valeur ne signifierait pas grand chose. Ce serait le prix à payer pour déterminer la position de manière approchée. Dans le cas d'un mouvement vertical, il serait alors possible connaissant la flèche initiale de déterminer ses variations au cours de la période d'analyse. Avec la restriction des premiers instants.

Les développements précédents sont permis pour autant que le mouvement du câble soit stationnaire. Des cas de mouvements non stationnaires entraînant une moyenne d'accélération presque non nulle sont à notre connaissance le délestage de la glace accumulée sur les conducteurs et les mouvements des câbles lors des courts-circuits. Comme nous ne parlons dans cette section que d'un mouvement à une dimension, nous pouvons examiner le cas d'un mouvement de délestage. Ce mouvement résulte généralement à notre connaissance d'une impulsion subie par le câble suite à la fonte de neige accumulée sur les conducteurs. La neige constitue en effet, une masse supplémentaire qui augmente la flèche. Quand elle fond, elle libère le câble d'une masse excédentaire qui modifie très vite sa flèche. Ce cas de figure sera examiné dans la section 5.

5 Résultats du filtre de Kalman avec les mesures et les simulations

Pour valider notre modèle de filtre de Kalman développé dans la section 4, nous disposons de deux outils : d'une part, de mesures en soufflerie et d'autre, de simulations du comportement des câbles par le logiciel *Samcef*. Ces deux outils vont nous permettre d'apporter des renseignements complémentaires sur l'utilisation des paramètres et sur son fonctionnement. Nous commencerons par les mesures, puis nous examinerons les simulations sous *Samcef Field*.

5.1 Mesures en soufflerie

En septembre 2006, le service de Transport et distribution de l'énergie électrique a effectué des essais en soufflerie pour démontrer la capacité du module «Ampacimon» à «monitorer» les vibrations éoliennes. Ces tests se sont déroulés sur trois jours. Le module est placé sur un câble d'une longueur de 2 m attaché à ses extrémités par une barre qui est elle-même reliée à des ressorts fixés à un cadre.

Quatre accéléromètres sont fixés sur les deux barres comme illustrés sur la figure 5.1. L'accélération n'est mesurée qu'aux points 1, 2 et 3. À ce dernier point, l'accé-

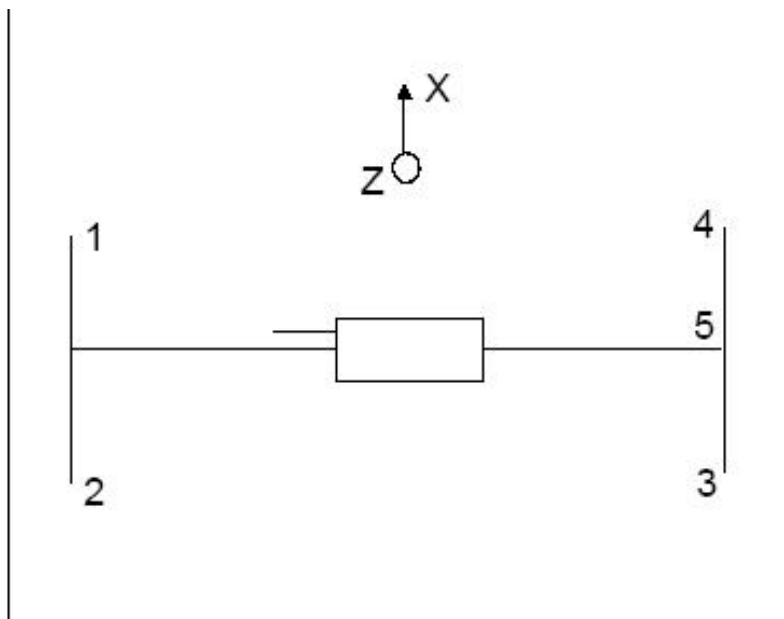


FIG. 5.1 – Schéma des axes de mesures des accéléromètres de la barre

lération horizontale ainsi que l'accélération verticale sont mesurées.

Outre ceux-ci, deux accéléromètres uniaxes sont présents dans le module Ampacimon mesurant l'accélération selon l'axe vertical et horizontal tel qu'il est indiqué sur la figure 5.1. Nous disposons ainsi de deux signaux d'accélération pouvant être

traités séparément pour illustrer les propos de la section 4 et offrir une meilleure définition des signaux d'accélération d'origine éolienne.

5.1.1 Critiques des mesures

Entre les conditions d'essai présentes et les conditions de l'application, un certain nombre de différences existent. Premièrement, la fréquence d'échantillonnage est différente et égale à 128 Hz . Cette remarque n'est pas d'une grande importance sur le plan conceptuel mais nous devons en être conscient. Enfin, la disposition des capteurs dans le module est différente dans l'essai en soufflerie. En effet, ce dispositif ne comportait que deux accéléromètres alors que le module Ampacimon actuel en comporte quatre. Les axes des mesures étaient en outre différents des axes actuels.

Nous présentons sur la figure 5.2 le signal d'accélération verticale observé lors de la première journée et ce pour les premiers instants. Ces signaux sont presque périodiques car à un signal sinusoïdal se superpose un signal aléatoire au point de vue de son intensité et de sa fréquence d'apparition. Son origine réside dans un problème de transmission des données entre l'antenne du module d'Ampacimon et les ordinateurs de stockage des signaux. Ce bruit n'est pas un bruit blanc et n'est pas non plus de moyenne nulle. En outre, des biais numériques apparaissent dans les données des essais. Ces deux phénomènes conduisent à l'obtention d'une vitesse croissante avec le temps et à une position évoluant de manière quadratique avec le temps.

Bien que ce problème soit propre aux mesures effectuées lors des essais, il nous semble important d'y prêter attention pour éviter ce type de problème lors de la pratique. Deux stratégies de correction peuvent être envisagées. La première consiste en l'élimination des composantes supérieures à une certaine valeur trouvée telle que supérieure à la valeur de la moyenne sur une fenêtre augmentée d'un pourcentage de cette moyenne. Par exemple, on considère que les points qui ont une amplitude supérieure à 1,6 fois la moyenne sur une fenêtre (largeur donnée par l'utilisateur). Cependant, comme on peut le voir sur la figure 5.2, le signal parasite possède des alternances positives et négatives. Cette fonction serait donc aveugle aux alternances négatives et exigerait la définition d'un nombre de fenêtre d'analyse important. Cette option ne nous a pas semblé intéressante à développer au vu de ces remarques.

La seconde option est de réaliser un filtrage passe-bas du signal pour éliminer cette composante aléatoire parasite. Pour réaliser ce filtrage, nous avons comparé deux stratégies de filtrage : un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie et un filtre de Butterworth.

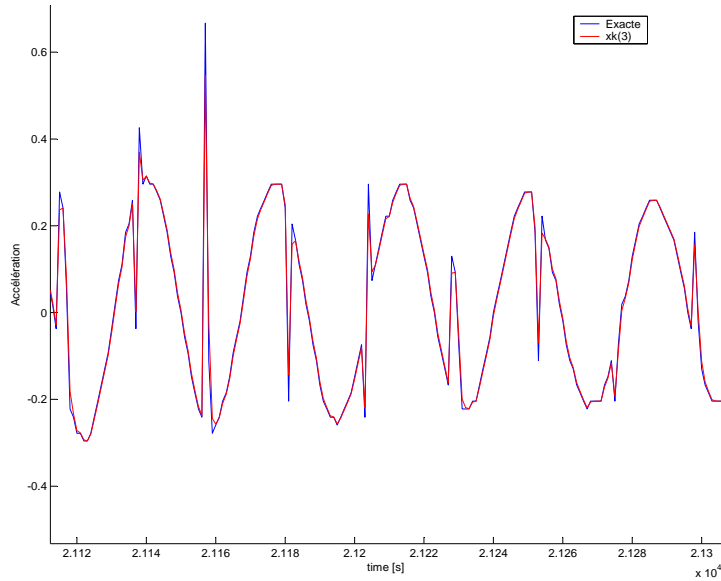


FIG. 5.2 – Exemple de signal d'accélération verticale observée lors des mesures en soufflerie

5.1.2 Filtrage passe-bas

Dans un premier temps, nous allons expliciter la théorie des filtres passe-bas. Ensuite, nous l'appliquerons aux mesures en soufflerie et illustrerons les résultats obtenus. Nous citons le livre de Haykin S., "An introduction o analogie ad digital communications" qui fournit une définition claire du filtrage :

«As previously mentioned, a filter is a frequency-selective device that is used to limit the spectrum of a signal to some specified band of frequencies. Its frequency response is characterized by a pass band and a stop band which is separated by a guardband. The frequencies inside the passband are transmitted with little or no distortion, whereas those in the stopband are rejected. The filter may be of the low-pass, band-pass or band-stop type, depending on whether it transmits low, high, intermediate or all but intermediate frequencies, respectively.»[27]

Dans le domaine fréquentiel, un filtre passe-bas laisse donc passer une partie du contenu fréquentiel et réduit voire même annule le reste du contenu. Dans notre application, nous ne souhaitons pas modifier le contenu fréquentiel du signal original ; le gain du filtre pour les fréquences passantes est donc égal à un. La fonction qui réalise cette opération est donc représentée par la fonction illustrée par le graphe de droite de la figure 5.1.2. Une fois cette réponse impulsionnelle connue dans le monde fréquentiel, nous pouvons passer dans le monde temporel en utilisant la transformée

de Fourier inverse. La forme de la fonction est donnée sur le graphe de gauche de la figure 5.1.2. Nous notons qu'il s'agit d'un sinus cardinal. Nous signalons également que cette figure a été trouvée sur le site de «Wikipédia»[1].

À partir de l'équation (2.7), nous pouvons trouver l'expression dans le monde temporel de la réponse impulsionnelle :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \quad (5.1)$$

Soit donc après intégration, l'équation (5.2) qui représente bien un sinus cardinal.

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c(t-t_0))}{\pi(t-t_0)} = 2\omega_c \text{sinc}(\omega_c(t-t_0)) \quad (5.2)$$

La réponse impulsionnelle est centrée en t_0 et son amplitude maximale (apparaissant en t_0) est égale à $2\omega_c$

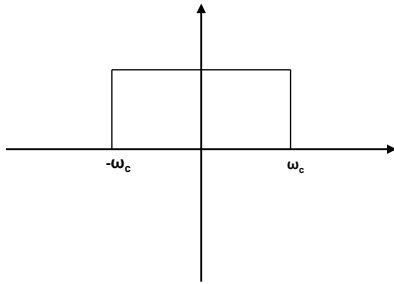


FIG. 5.3 – Illustration de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal dans le monde fréquentiel

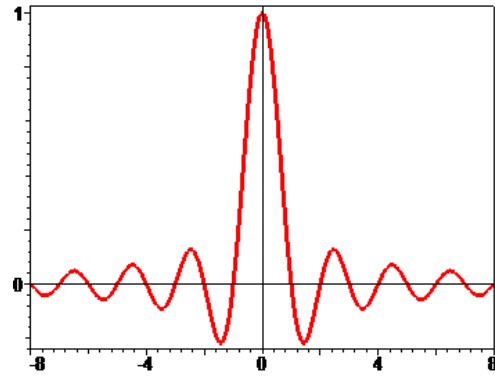


FIG. 5.4 – Illustration de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal dans le monde temporel, source [1]

Nous avons utilisé dans un premier temps un filtre de réponse impulsionnelle finie utilisée dans matlab sous le nom de la fonction «fir1». Cette fonction nécessite deux arguments : l'ordre du filtre et la fréquence de coupure. En effet, comme la réponse impulsionnelle est finie ; il faut définir l'ordre de la réponse. Le filtre passe-bas idéal est approché pour un ordre de filtre tendant vers l'infini. Pour déterminer les meilleurs paramètres, nous allons évaluer leurs effets sur le décalage temporel entre le signal corrigé et le signal original ainsi que la déformation du signal au niveau de son amplitude.

On peut observer que le signal parasite apparaît en première approximation tout les trente points. Connaissant la fréquence d'échantillonnage pour ces données qui est de 128 Hz , nous pouvons affirmer que la fréquence d'apparition du phénomène

est de l'ordre de 4 Hz . Ce calcul nous donne simplement une idée de l'ordre de grandeur de la fréquence du phénomène aléatoire. Nous pouvons ainsi nous rendre compte que cette fréquence est proche de celle des signaux observés. Il faut donc définir correctement la fréquence de coupure du filtre sans quoi une partie du contenu fréquentiel du signal réel serait perdue. La fréquence de coupure du filtre passe-bas devra donc être relativement basse pour que le signal parasite soit éliminé correctement. Le déphasage entre le signal réel et le signal filtré risque donc d'être assez important.

Une fois ces paramètres déterminés, nous pouvons réaliser le filtrage de notre signal d'accélération. Avec ce paramètre, nous obtenons le signal présenté à la figure 5.5. Nous y comparons le signal obtenu et le signal initial. Nous pouvons constater la bonne élimination de la composante indésirable ainsi que l'apparition du déphasage supplémentaire dont nous avons déjà discuté précédemment.

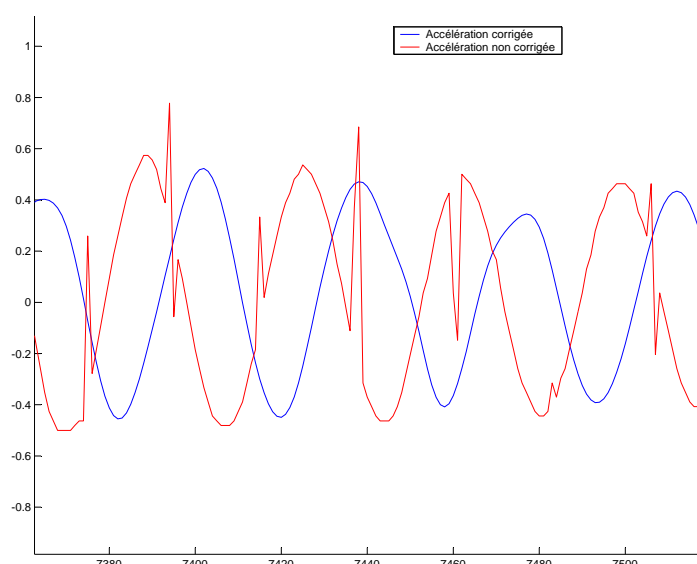


FIG. 5.5 – Comparaison entre le signal d'accélération filtré par le filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie et le signal original

Toutefois, il apparaît sur ce même graphique que le signal est déformé par l'utilisation du filtre passe-bas que nous avons développé. En effet, la valeur du maximum est modifiée au travers du filtre. Nous voyons donc que le filtrage a modifié le contenu fréquentiel du signal original. Si nous examinons la réponse fréquentielle du filtre passe-bas développé, nous voyons que le gain dans la bande passante n'est pas constant et est même éloigné des caractéristiques fréquentielles du filtre passe-bas idéal. Il nous semble donc important d'essayer un autre filtre numérique.

5.1.3 Filtrage en utilisant le filtre de Butterworth

Une seconde possibilité de filtrage est d'utiliser un filtre de Butterworth. Ce dernier présente en effet l'avantage de posséder un gain constant sur sa bande passante. L'expression du gain d'un tel filtre (ou de sa fonction de transfert) est :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}} \quad (5.3)$$

ω_c est la fréquence de coupure du filtre et n est son ordre. L'ordre du filtre est défini en écrivant cette équation sous la forme d'un quotient de polynômes d'ordre n tel que :

$$|H(j\omega)| = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + b(n+1)z^{-n}}{1 + a(2)z^{-1} + a(n+1)z^{-n}}$$

Le filtre de Butterworth est largement implémenté dans *Matlab*. La fonction qui réalise ce filtre est très facile à utiliser et ne nécessite que l'ordre du filtre de Butterworth désiré et la fréquence de coupure exprimée comme précédemment. Nous illustrons sur le graphique 5.6 le diagramme de «Bode» qui représente l'amplitude de la fonction de transfert ainsi que son déphasage en fonction de la fréquence (en échelles logarithmiques). Nous avons choisi comme fréquence de coupure normalisée, celle égale à 0,2. La définition de cette fréquence normalisée est qu'à la fréquence normalisée 1 correspond la demi fréquence d'échantillonnage.

Nous pouvons voir sur la figure 5.6 que le gain du filtre est constant entre zéro et la fréquence de coupure normalisée. Cette performance sur le plan de l'amplitude se paye bien sûr sur le diagramme de phase.

5.1.4 Comparaison des deux filtres proposés

Pour pouvoir comparer l'efficacité des deux filtres, nous avons placé sur la figure 5.7 les différents signaux d'accélération que nous avons considéré. Le signal original est illustré par la courbe rouge, celui filtré par le filtre à réponse impulsionnelle finie en bleu et enfin celui filtré par le filtre de Butterworth en vert. Premièrement, le filtre de Butterworth déforme moins le signal que le filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie ; dans la suite nous les nommerons respectivement filtre un et deux. En outre, pour la même fréquence de coupure mais qui reste peu élevée, nous voyons que le déphasage est supérieur dans le cas du filtre de Butterworth.

En outre, si la déformation du signal est importante et apparaît à proximité du maximum de la fonction, comme nous le voyons sur la gauche de la figure 5.7, le filtrage sous-estime l'amplitude du signal de manière très forte. Nous pouvons tout de même juger de l'ampleur de la déformation et de l'impossibilité physique de faire mieux.

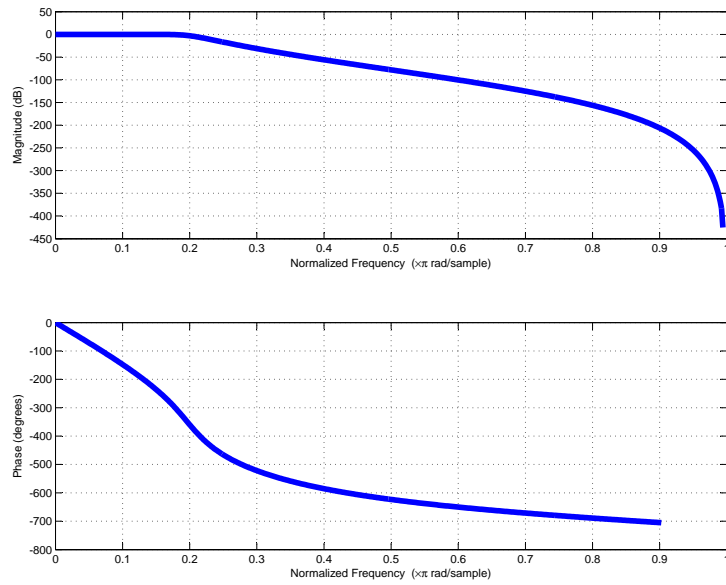


FIG. 5.6 – Diagramme de Bode du filtre de Butterworth pour la fréquence de coupure normalisée égale à 0,2

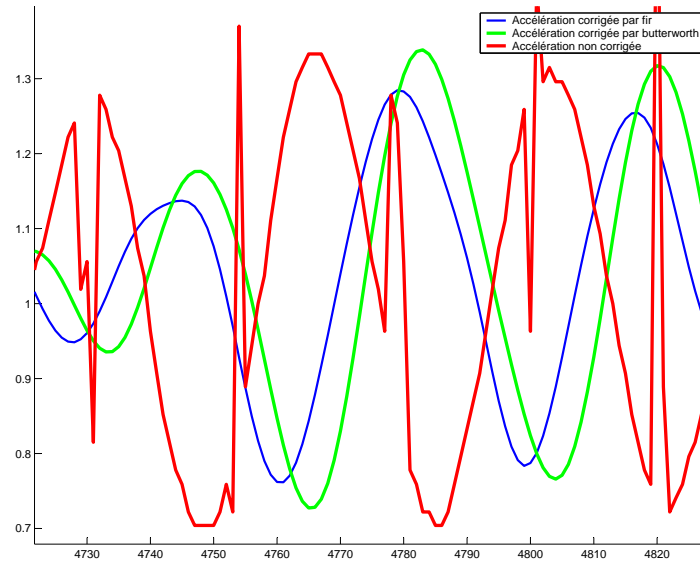


FIG. 5.7 – Comparaison entre l'accélération donnée et les accélérations filtrées par les filtres de Butterworth et à réponse impulsionnelle finie

Si nous diminuons encore la bande passante des filtres, le signal est de mieux en mieux filtré mais le déphasage augmente encore sans qu'une amélioration notable ne soit observée sur l'amplitude du signal d'accélération. Il apparaît clairement que le filtre de Butterworth permet de réduire l'effet du filtrage sur l'amplitude du signal résultant. Toutefois, deux ombres subsistent au tableau : d'une part, le déphasage entre le signal réel et le signal filtré demeure assez important et d'autre part, le signal est tout de même déformé d'une manière assez prononcée.

Nous devons donc trouver un compromis entre ces deux tendances pour déterminer la meilleure fréquence de coupure. Elle doit ne pas trop modifier le signal mais éliminer la partie incorrecte de l'accélération. Le déphasage doit également être le plus faible possible. Pour cela, nous proposons d'examiner l'aire sous la courbe de l'accélération en fonction du temps. Le graphique 5.8, présente l'évolution de cette valeur pour trois signaux : l'accélération originale, l'accélération filtrée par le filtre un et celle filtrée par le filtre deux.

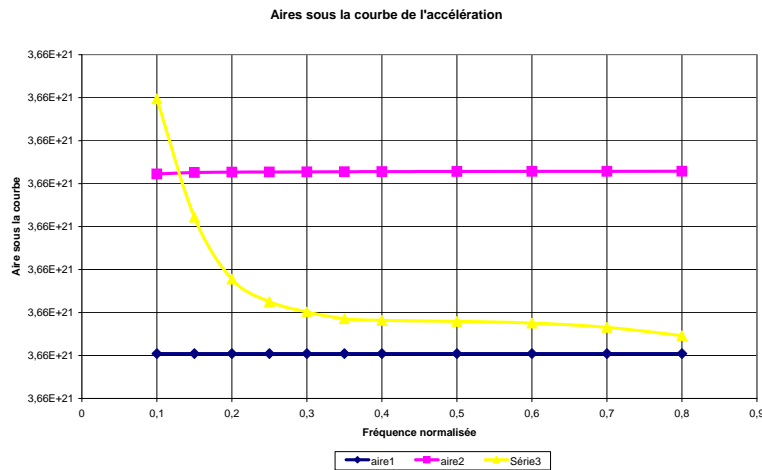


FIG. 5.8 – Aire sous la courbe de trois signaux d'accélération : l'originale ainsi que les deux signaux filtrés

Nous savons que si la fréquence de coupure est de l'ordre de 0,8, le filtre de Butterworth suit «trop bien» le signal de base de sorte que nous ne pouvons pas considérer que le signal soit filtré. L'aire sous la courbe du filtre doit donc s'éloigner de celle du signal original. Mais si elle s'éloigne de trop, comme pour une valeur de 0,15, la différence entre le signal original et le signal filtré est très grande. La meilleure solution qui se dégage du graphique 5.8 est donc de choisir une fréquence de coupure normalisée égale à 0,2 (approximativement).

5.1.5 Biais numériques

5.1.5.1 Origine des biais numériques La filtration du signal d'accélération n'est pas suffisante pour garantir un calcul correct. En effet, un biais numérique est apparu dans les valeurs de l'accélération et fausse les résultats s'il n'est pas corrigé. L'origine de ce biais nous est inconnue, toutefois nous pouvons dégager deux pistes pour expliquer un tel comportement. D'une part, l'influence de la gravité associée à une inclinaison de l'axe. D'autre part, la température peut modifier les densités de puissance du bruit.

D'une part, le biais est issu d'une mauvaise position des axes de mesure par rapport à l'axe de la gravité comme nous l'illustrons sur la figure 5.9. Les accéléromètres horizontaux voient une partie de l'accélération due à l'inclinaison de leurs axes de mesures. Les accéléromètres verticaux voient un biais inférieur à la constante de la gravité.

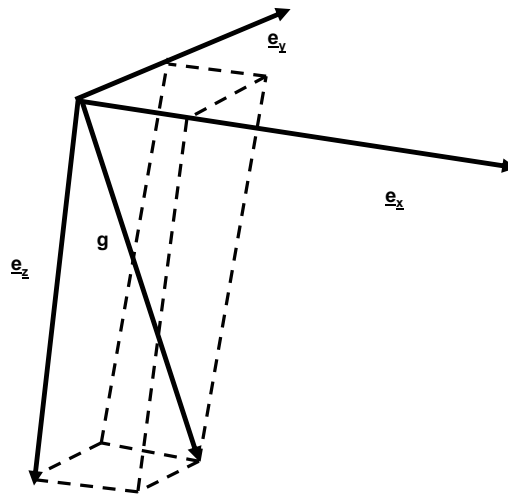


FIG. 5.9 – Problèmes liés à l'inclinaison des axes des capteurs par rapport à la gravité

Si nous supposons que le module Ampacimon est accroché sur le câble de manière à réaliser la coïncidence des coordonnées verticales du centre de gravité et du centre du câble électrique : c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'inclinaison du module autour du câble et si en outre, nous négligeons le phénomène de torsion du câble. Soient θ l'inclinaison par rapport à la verticale et ϕ l'inclinaison par rapport à l'horizontale,

les accélérations mesurées par les axes sont alors :

$$\begin{aligned}a_z &= \cos(\phi) \cos(\theta) g \\a_y &= \cos(\phi) \sin(\theta) g\end{aligned}$$

L'erreur due à l'inclinaison verticale est très faible car la forme de l'accélération mesurée, en statique, l'accéléromètre verra une accélération proche de celle de la gravité. Par contre l'inclinaison horizontale peut avoir une influence très forte sur les accélérations lues. Une calibration correcte des accéléromètres permet bien sûr de corriger ces «offset» sur la position de leurs axes de mesures.

D'autre part, la température ambiante peut influencer le comportement des capteurs et donner ainsi naissance à des biais numériques. Ces biais peuvent être corrigés en connaissant la température et en se référant aux data-sheet des capteurs.

5.1.5.2 Valeurs des biais observés Nous avons calculé les biais numériques apparus au cours des mesures. Ils valent pour l'accélération verticale et horizontale respectivement $1,024 g$ et $0,073 g$. Numériquement, la valeur du biais «vertical» vaut donc $0,23 m \cdot s^{-2}$. Si on considère que la durée de l'observation réalisée est de l'ordre de $120 s$, l'effet de ce dernier consiste en l'ajout au signal de vitesse d'une droite de pente égale au biais, soit une valeur supplémentaire de $28,25 m \cdot s^{-1}$ au bout des $120 s$.

Nous pouvons faire deux observations sur ces données. Premièrement, le biais sur l'accélération verticale est supérieur à la constante de gravité et deuxièmement, si nous soustrayons au premier biais la constante de gravité, nous voyons que l'ordre de grandeur des biais est identique. Ces deux remarques nous permettent de penser que les deux sources d'erreur sont présentes dans nos mesures. Premièrement, le fait d'obtenir une constante supérieure à g indique qu'il ne peut s'agir d'une erreur d'inclinaison uniquement puisque cette dernière est multipliée par un terme strictement inférieur à un. Mais dans le même temps, si l'ordre de grandeur du biais est identique dans les deux cas, leur valeurs sont assez différentes. Les deux causes sont liées mais quantitativement la température semble avoir une influence plus grande que l'inclinaison pour ces mesures. Nous notons que les accéléromètres utilisés lors des essais n'étaient pas calibrés contrairement au capteur du module Ampacimon actuel. Toutefois, une correction «préventive» des accéléromètres permet d'éviter les phénomènes liés à une éventuelle erreur de calibration.

Comme nous l'avons déjà dit, les effets des biais sont assez importants et conduisent à des résultats qui n'ont pas beaucoup de sens. Un biais sur l'accélération rend nuls tous les développements précédents. Il faut donc vérifier que la moyenne du signal est bien nulle. Pour clarifier les choses, le traitement du signal d'accélération doit

se faire sur deux points : la vérification de la nullité de la moyenne et le filtrage préalable pour éliminer les composantes indésirables. Nous illustrons le signal d'accélération tel que finalement utilisé comme signal dans le filtre de Kalman sur la figure 5.10.

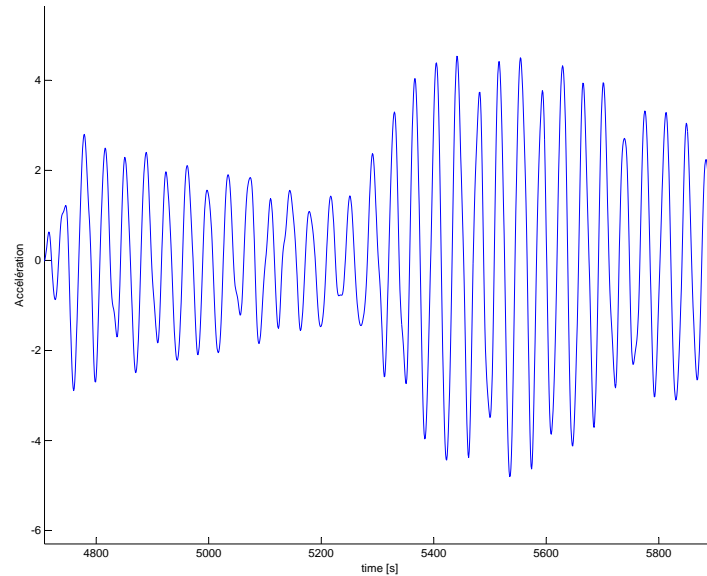


FIG. 5.10 – Signal d'accélération filtré et dont le biais numérique a été retiré

5.2 Simulations par *Samcef Field*

Le logiciel *Samcef field* dispose d'un module de simulation des câbles électriques. La modélisation réalisée dans le logiciel est très sommaire : elle consiste en un câble de longueur égale à 150 m accroché à un pylône. Bien que les chaînes d'isolateurs n'aient pas été modélisées pour simplifier les calculs, il s'agit de la modélisation d'un câble d'une ligne aérienne située près d'Anvers.

TAB. 5.1 – Tableau de données du logiciel *Samcef Field*

Grandeurs	Valeur
Diamètre du câble	31,5 mm
Module de Young	54,9 Pa
Coefficient de Poisson	0,3

Pour étudier un phénomène unidimensionnel, la stimulation consistait en une force «impulsionnelle» d'amplitude égale à 100 Pa sur un élément de discrétisation du câble. Les propriétés physiques du matériau et la traction du câble sont données dans la tableau 5.1.

La figure 5.11 montre l'évolution de l'accélération au cours du temps telle qu'elle est fournie par le logiciel *Samcef Field* pour un point situé à une longueur de 100 m d'un des ancrages. La forme du signal d'accélération est étrange puisque si l'impulsion effectue bien un aller retour entre les deux ancrages, des signaux parasites qui n'ont pas de signification physique se superposent.

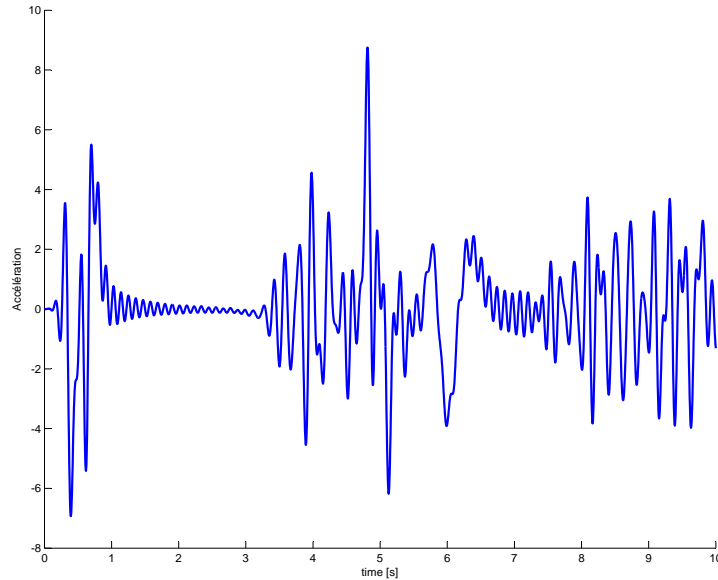


FIG. 5.11 – Signal d'accélération fourni par le logiciel *Samcef Field* field

Notre objectif étant de reconstruire le mouvement, nous ne nous attacherons pas plus à détailler la forme du signal d'accélération. Si nous utilisons les signaux tels quels, les vitesses et positions sont déterminées de manière exacte. Nous choisissons donc, pour vérifier l'application correcte du filtre de Kalman, de ne prendre que les mesures d'accélération après l'impulsion. Le graphiques 5.12 confirme nos dires de la section 4 : la fonction moyenne tend vers le signal exact au bout d'un certain temps.

De même manière, le nombre de points à considérer ne doit pas être trop grand sans être trop faible en même temps. Nous avons choisi un nombre de point à traiter de l'ordre de 800. Ce nombre a été trouvé comme celui permettant la meilleure

élimination de la composante continue.

Enfin, nous avons éliminé la composante continue «fictive» du signal de position à la fin des calculs par le filtre de Kalman et y avons ajouté la flèche initiale pour vérifier qu'il est bien possible de connaître l'évolution autour de la flèche avec une relative précision mais uniquement après un temps d'analyse relativement long. Dans le cas des simulations sous *Samcef Field*, la période d'analyse que nous avons utilisé est trop courte.

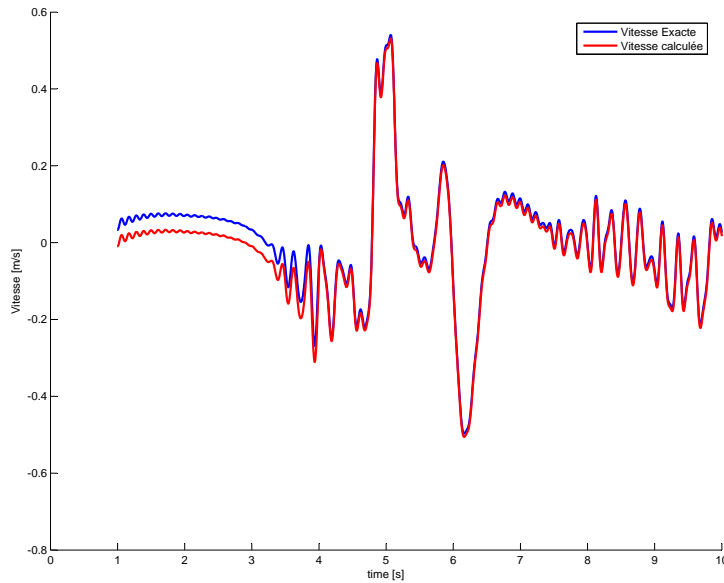


FIG. 5.12 – Calcul de la vitesse sur base de la simulation sous *Samcef Field*

La différence entre le signal réel et le signal calculé présente deux périodes caractéristiques : une première pendant laquelle sa valeur passe de $0,18$ à $0,04 \text{ m s}^{-1}$ (jusque 4 s) et une seconde période, allant de 4 à 10 s , pendant laquelle sa valeur diminue de $0,04$ à $0,02 \text{ m s}^{-1}$. Ces valeurs montrent qu'une période d'analyse de 10 s est insuffisante pour ne pas être dans un transitoire. L'élimination de la moyenne fictive ne peut donner de bons résultats que pour des périodes supérieures à 20 s . Au bout de ces dernières, la constante peut être éliminée. Enfin, notons que ces périodes d'analyse sont propres à notre simulation, il pourrait être intéressant de modifier cette valeur pour correspondre aux cas pratiques.

L'illustration de ces remarques est donnée en comparant les figures 5.13 et 5.14. La différence entre les deux signaux au bout des 10 s est faible mais est inférieure dans le cas où la moyenne a été éliminée. Une période d'analyse supérieure aurait montré la bonne convergence de la position vers la flèche réelle. Pour l'application

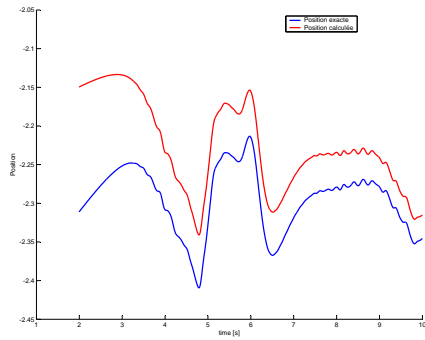


FIG. 5.13 – Calcul de la position (verticale) sur base de la simulation sous *Samcef Field* sans moyenner la position après le filtre de Kalman

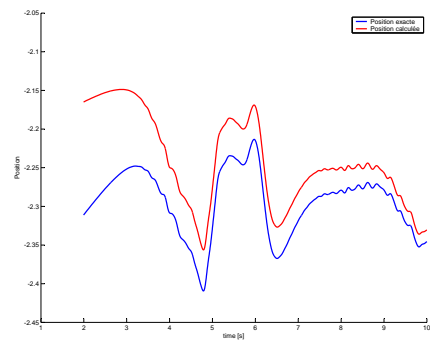


FIG. 5.14 – Calcul de la position sur base de la simulation sous *Samcef Field* après correction à l'issue du filtre de Kalman

pratique, comme l'accélération est stockée par deux minutes entières avant d'être traitée, l'opération que nous décrivons, peut prendre sa place au bout des deux minutes.

6 Mouvements à trois dimensions

L'objectif du mémoire est de reconstruire le mouvement des câbles électriques. Jusqu'à présent, nous nous étions limité à reconstruire un mouvement unidimensionnel, que ce soit avec les mesures en soufflerie, ou bien avec les simulations sous *Samcef Field* ou bien encore avec des accélérations imposées.

La différence fondamentale entre un mouvement à une dimension et celui à trois dimensions est la complexité. En effet, aux trois directions de l'espace peuvent se rajouter trois rotations pour un solide rigide (généralement prises autour de ces axes). Ses six mouvements ou degrés de liberté conduisent à définir un certain nombre de repères pour capter tout ces mouvements.

Nous diviserons cette section en trois parties : une première pour expliciter les notions théoriques nécessaires. Dans la seconde, nous nous attacherons à la reconstitution des grandeurs cinématiques en translation (position et vitesse). Enfin, dans la troisième, nous évaluerons la possibilité de reconstruire les grandeurs cinématiques en rotation. Le choix des repères devra être modifié selon le type de mouvements à décrire.

6.1 Introduction aux notions nécessaires pour les mouvements à trois dimensions

Deux types de notions supplémentaires doivent être introduites. D'une part, les notions de repères fixes et mobiles ainsi que leurs influences sur la description du mouvement. Et d'autre part, les notions théoriques requises pour l'utilisation de filtre de Kalman pour des systèmes non linéaires.

6.1.1 Rappels des notions de mécanique rationnelle

De manière générale, le mouvement d'un solide rigide peut être décrit de manière intéressante en utilisant les notions de mécanique rationnelle. Soient un repère inertiel $R_1(O \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y \mathbf{E}_z)$ et un repère mobile lié en un point du module Ampacimon $R_2(O' \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$. Ce point que nous notons par O' peut être quelconque ; nous citons ici le cours de «Mécanique rationnelle» de M. DELHEZ.

«Le mouvement d'un solide s'identifie complètement au mouvement d'un système quelconque qui lui est attaché. Dès lors, on peut également décrire le mouvement d'un solide par les trois composantes de la vitesse d'un de ses points et les trois composantes du vecteur de Poisson ω de tout système de référence qui lui est attaché. Ceci détermine entièrement le champ des vitesses du solide.»[9]

Toutefois il semble intéressant de choisir soit le centre de gravité du module Ampacimon, soit le point situé dans le cœur du conducteur à la verticale du centre de gravité. Les mesures d'accélération et les calculs n'ont de sens que pour connaître les grandeurs cinématiques en un point du câble. Nous décrirons donc le mouvement autour d'un de ses points. Le vecteur position de ce point dans le repère fixe est notée par \mathbf{b} .

La position d'un point du module Ampacimon, par exemple un point représentatif de la position d'un accéléromètre, dans le repère mobile est notée par le vecteur \mathbf{r} ; on en déduit que la position et la vitesse du point dans le repère inertiel sont données par les équations (6.1).

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{r} \quad (6.1a)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{b}} + \omega \wedge \mathbf{r} \quad (6.1b)$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{b}} + \dot{\omega} \wedge \mathbf{r} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) \quad (6.1c)$$

Dans ces dernières équations, le terme ω est le vecteur de Poisson; il traduit la modification des axes du repère mobile; il est donc propre aux repères définis. Mathématiquement, sa définition est la suivante, définition tirée du livre de «Mécanique rationnelle» de M.DELHEZ :

«Pour un vecteur \mathbf{a} quelconque, la formule de Poisson se généralise selon :

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_O = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{O'} + \omega \wedge \mathbf{a} \quad (6.2)$$

où ω désigne le vecteur de Poisson du système d'axes attaché au point O' par rapport au système d'axes centrés en O .»[9]

6.1.2 Hypothèses générales sur les repères utilisés

Bien que la définition même des repères soit propre à chaque modélisation, nous allons expliciter les hypothèses générales sur ces derniers. Comme le repère fixe est commun à toutes les modélisations, nous notons par $R(O, \mathbf{E}_X \mathbf{E}_Y \mathbf{E}_Z)$ un repère dans le référentiel terrestre que nous pouvons définir comme étant inertiel dans notre application. Par facilité, ce repère est placé sur les pylônes, au point d'ancrage des chaînes d'isolateurs.

Le second repère, $R_a(O', \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)$ est ensuite défini sur le câble. Nous le considérerons associé à un point à la verticale du centre de gravité et situé au cœur du câble. Ce repère permet la description du mouvement d'un point du module par rapport au câble.

L'axe, \mathbf{e}_1 , du repère R_a est parallèle à l'axe propre du conducteur, les deux autres axes sont orthonormés entre eux et se trouvent dans un plan perpendiculaire au premier axe propre, comme nous l'illustrons sur la figure 6.1. Le trièdre ainsi défini est bien dextrorsum. Nous considérons ces axes parallèles aux axes propres au module.

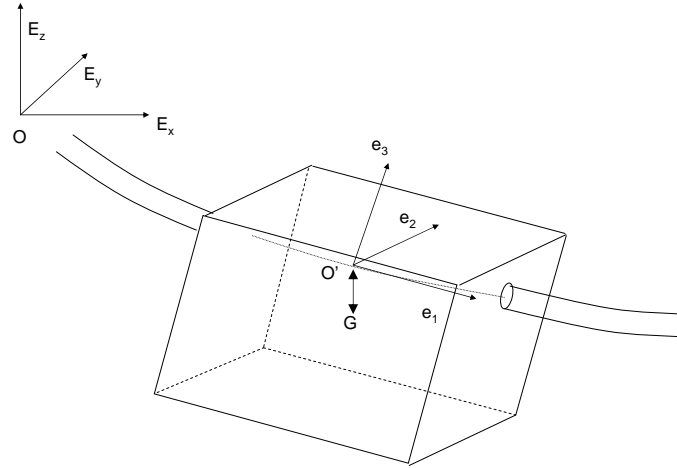


FIG. 6.1 – Illustration des différents repères considérés à trois dimensions

6.1.3 Hypothèses générales sur les repères utilisés

Les mouvements des câbles électriques et du module Ampacimon nous offrent des possibilités de limiter la complexité du modèle moyennant certaines hypothèses. Ces dernières peuvent être levées en rajoutant des angles «d'offset» dans les descriptions mathématiques.

La première hypothèse que nous faisons est de considérer le module Ampacimon comme un parallélépipède rectangle dont le centre de gravité, G , est situé sur la verticale passant par le centre du câble comme indiqué sur la figure 6.1. Si cette hypothèse n'était pas vérifiée, un offset existerait sur l'inclinaison du module autour de son axe vertical comme le montre la figure 6.2 puisque le centre de gravité va se placer sur la verticale passant par le centre du câble et le module sera penché. Les axes de mesures des accéléromètres seront alors légèrement différents des axes du repère R_a .

La seconde hypothèse que nous faisons est liée à la position des axes des accéléromètres. En effet, comme nous en parlons déjà dans la section 5, les axes des accéléromètres peuvent ne pas être identiques aux axes propres du module. Si c'était le cas, les accélérations mesurées par les accéléromètres seraient biaisées par un angle

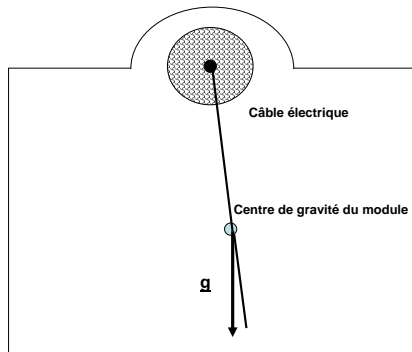


FIG. 6.2 – Illustration d'un premier offset possible sur l'orientation du module



FIG. 6.3 – Vue du boîtier Ampacimon avant les mesures en soufflerie

d'offset. Toutefois, il suffirait d'effectuer un essai d'inclinaison pour déterminer la valeur de cet offset et corriger les mesures de la sorte.

La disposition des accéléromètres MEMS (de l'anglais «Micro Electro Mechanical Systems»). dans le module Ampacimon est donnée sur la figure 6.4. Celle-ci nous semble a priori bonne. Les deux accéléromètres parallèles à l'axe du conducteur devraient permettre de déterminer l'inclinaison du câble par rapport à un plan horizontal. De plus, l'accélération verticale permettant de calculer la flèche est mesurée par les quatre capteurs. Cependant, il nous semblerait peut-être intéressant de placer les capteurs, non pas en vis-à-vis comme la figure le montre, mais «en opposition».

6.1.4 Filtre de Kalman pour des systèmes non linéaires

Les équations de mouvements à trois dimensions entraînent un certain nombre de complications : elles deviennent non linéaires. La description du système sur laquelle nous nous étions basée s'avère donc prise en faute pour ces systèmes.

Toutefois, la théorie des filtres de Kalman peut être appliquée à ces derniers. La méthode la plus simple est de linéariser les équations et de modifier légèrement les équations du filtre de Kalman que nous donnions dans la section 2.

L'équation d'observation du système est une fonction non linéaire, f , liant le nouvel état, x_k , à l'état précédent, x_{k-1} , à l'entrée au temps précédent, u_{k-1} , et enfin à un bruit d'état, w_{k-1} ¹⁶. Mathématiquement, nous pouvons écrire :

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})$$

¹⁶Nous choisissons donc une description en temps discret de la fonction

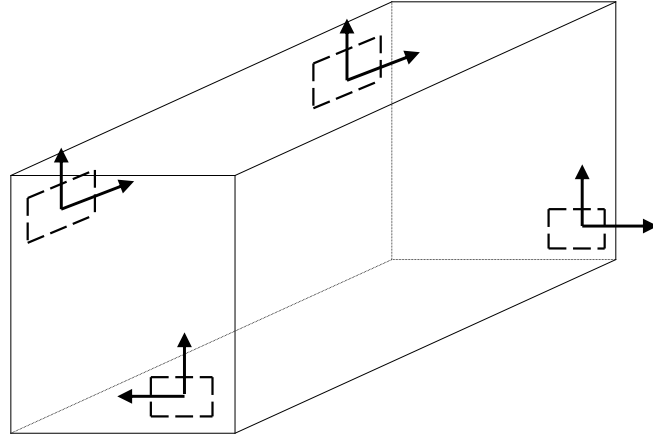


FIG. 6.4 – Illustration de la disposition des capteurs dans le module Ampacimon

L'équation d'état peut également être une fonction non linéaire du vecteur d'état, h . En notant par v_k le bruit de mesure, nous pouvons écrire :

$$z_k = h(x_k, v_k)$$

L'état prédit a priori sera donné par l'équation non linéaire ; de même que la prédiction de la sortie sera réalisée au travers de la fonction non linéaire. La linéarisation est nécessaire pour calculer le gain du filtre de Kalman. Cette linéarisation sera permise par le calcul du jacobien :

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial X_j} | (\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}, 0) \quad (6.3)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial X_j} | (\hat{x}_k^-, 0) \quad (6.4)$$

Les équations caractéristiques du filtre de Kalman s'écrivent alors par le jeu de cinq équations (6.5), semblables à celles caractérisant le filtre de Kalman linéaire¹⁷.

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \quad (6.5a)$$

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T \quad (6.5b)$$

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k v_k^T)^{-1} \quad (6.5c)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-, 0)) \quad (6.5d)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (6.5e)$$

Cependant une grosse limitation du filtre de Kalman étendu est la perte du caractère normal des distributions des processus (elles ne sont plus gaussiennes), nous

¹⁷Les équations linéaires sont résumées dans la section 2 par la figure 2.2

citons, les notes de WELCH et BISHOP :

«It is important to note that a fundamental flaw of the EKF is that the distribution (or densities in a continuous case) of the various random variables are no longer normal after undergoing their respective nonlinear transformations.»[31]

Une autre méthode de filtre de Kalman a été développée pour conserver une distribution normale des grandeurs lors du passage dans le filtre de Kalman. Cette méthode porte de nom de filtre de Kalman «Unscented»¹⁸. Nous n'avons pas choisi de développer cette méthode. En effet, bien que sa force soit de pouvoir travailler avec des équations d'état fortement non linéaires, elle présente l'inconvénient de demander un plus grand temps de calcul. Une comparaison entre ces deux méthodes est réalisée dans l'article «Nonlinear estimation methods for parameter tracking in power plants»[11]. Nous présentons celle-ci dans le tableau 6.1. Une description intéressante de la méthode est présentée dans l'article «A new extension of the Kalman Filter to nonlinear systems»[28].

TAB. 6.1 – Tableau comparatif entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Kalman «Unscented», source [11]

	EKF	UKF
Output error	moderate	good
Parameter error	good	moderate
Computational effort	good	moderate
Tuning effort	moderate	bad

En outre, il nous est impossible de certifier la précision des résultats qui justifierait ce temps de calcul supplémentaire ainsi que du temps qu'il nous aurait fallu y consacrer pour comprendre et appliquer la méthode. En effet, comme nous le verrons dans la suite, les équations du système ne permettent toujours pas d'affirmer l'observabilité du système.

6.2 Reconstitution des grandeurs cinématiques en translation

Notre objectif est de décrire le mouvement d'un point du câble pour pouvoir associer à ce point les trois grandeurs cinématiques importantes que sont la position, la vitesse et l'accélération. En effet, l'accélération du point dans le référentiel inertiel étant mesurée par les accéléromètres, nous devons trouver l'expression analytique de

¹⁸Une dérivation de cette dernière porte de le nom de «Square rooted unscented kalman filtering» ou SRUKF

cette accélération.

En outre, nous ajoutons d'autres hypothèses plus spécifiques aux mouvements. Ces dernières vont nous permettre d'en simplifier la description.

La première hypothèse est de négliger, la rotation du module Ampacimon autour de ses axes propres et plus particulièrement autour de l'axe propre du câble. Cette dernière revient à considérer le module complètement solidaire du câble sur lequel il est accroché. Le mouvement du câble s'assimile donc au mouvement du module Ampacimon. Le mouvement du module peut être décrit par celui de plusieurs points du module traités comme points matériels dans l'espace.

En outre, l'inclinaison du boîtier Ampacimon par rapport aux axes fixes n'est plus à prendre en compte puisque l'analyse va porter sur le mouvement d'un point et non plus d'un solide. Toutefois, la connaissance de la hauteur en deux points du module permet de déterminer la hauteur en chaque point par des interpolations justifiées par la rigidité du module. Si une différence de hauteur significative apparaît entre deux points, l'inclinaison au temps k peut être trouvée en connaissant l'inclinaison initiale par des relations trigonométriques.

6.2.1 Définition des repères utilisés

Ayant fait l'hypothèse de solidarité totale entre le module Ampacimon et le câble, la description de son mouvement est équivalente à celle de plusieurs points dans l'espace tridimensionnel. Le repère mobile lié au câble n'est plus vraiment utile. Nous choisissons comme repère mobile un repère cylindrique centré au point O défini précédemment.

Un observateur lié au repère inertiel voit un point du module Ampacimon à une longueur $|\mathbf{b}|$, qui est une fonction de la flèche, et sous un angle ϕ tel que défini par les trois figures 6.5, 6.6 et 6.7. Deux autres angles sont nécessaires pour déterminer de manière complète l'orientation du module.

Un point du câble, et plus largement un point du module Ampacimon, est décrit par sa position dans le plan vertical et par l'angle ϕ . Schématiquement, la décomposition du mouvement est illustrée par les figures 6.5 et 6.6. En reportant ces deux vues sur un seul graphique à trois dimensions, nous obtenons la figure 6.7 qui permet de mieux voir le déplacement du câble dans l'espace.

6.2.2 Cinématique en translation

Une fois la définition des repères réalisée, la description de la cinématique est déduite directement. En effet, le vecteur de position liant le point O au point C peut

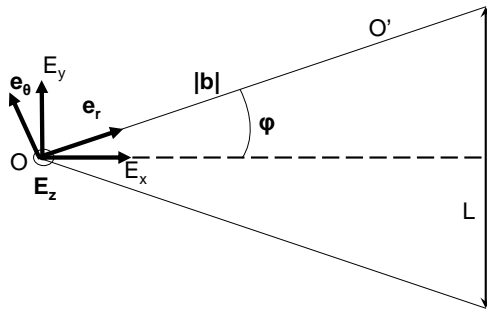


FIG. 6.5 – Illustration du degré de liberté dans le plan horizontal

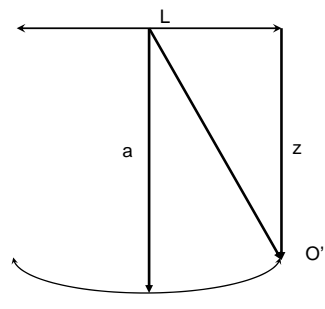


FIG. 6.6 – Illustration du degré de liberté vertical

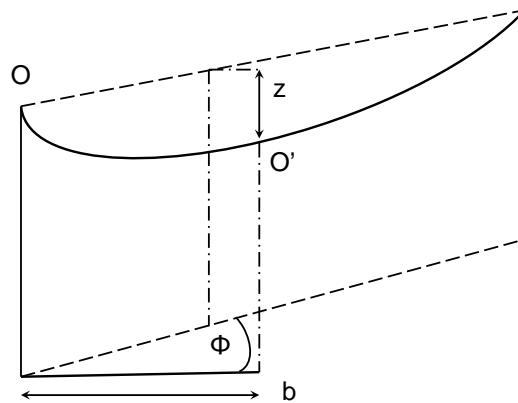


FIG. 6.7 – Illustration des deux degrés de libertés sur un schéma en trois dimensions

être décrit, dans les axes mobiles par l'expression (6.6).

$$\mathbf{OC} = b \mathbf{e_r} + z \mathbf{E_z} \quad (6.6)$$

L'évolution du repère mobile par rapport au repère fixe, est définie par celle de l'angle ϕ . Le vecteur de Poisson lié à ce changement de repère s'exprime alors par la formule (6.7).

$$\omega = \dot{\phi} \mathbf{E_z} \quad (6.7)$$

En utilisant les équations (6.1), nous pouvons déduire les vitesse dans le repère mobile :

$$\dot{\mathbf{OC}} = \dot{b} \mathbf{e_r} + b (\omega \wedge \mathbf{e_r}) + \dot{z} \mathbf{E_z} \quad (6.8)$$

$$= \dot{b} \mathbf{e_r} + b \dot{\phi} \mathbf{e_\theta} + \dot{z} \mathbf{E_z} \quad (6.9)$$

Et par dérivation, nous pouvons trouver l'expression de l'accélération :

$$\ddot{\mathbf{OC}} = (\ddot{b} - b \dot{\phi}^2) \mathbf{e_r} + (b \ddot{\phi} + 2 \dot{b} \dot{\phi}) \mathbf{e_\theta} + \ddot{z} \mathbf{E_z} \quad (6.10)$$

L'accélération est définie dans les axes mobiles décrivant le mouvement du câble. Or comme nous l'avons déjà dit l'accélération mesurée par les capteurs est une accélération dans les axes fixes. Nous devons donc effectuer un changement de variable. L'équation (6.10) s'écrit matriciellement comme :

$$\ddot{\mathbf{O}}\ddot{\mathbf{O}}' = \begin{pmatrix} \ddot{b} - b \dot{\phi}^2 & b \ddot{\phi} + 2 \dot{b} \dot{\phi} & \ddot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e_r} \\ \mathbf{e_\theta} \\ \mathbf{E_z} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Enfin, la matrice (6.12) réalise le passage des axes mobiles vers les axes fixes. Il s'agit donc de la matrice de changement de repère liant les deux systèmes de coordonnées.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e_r} \\ \mathbf{e_\theta} \\ \mathbf{E_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E_x} \\ \mathbf{E_y} \\ \mathbf{E_z} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

L'accélération d'un point possède trois degrés de liberté : b , ϕ et z et, en outre, fait intervenir les dérivées premières et secondes de ces grandeurs.

Il n'est pas intéressant de linéariser l'équation (6.11) pour implémenter un filtre de Kalman avec. En effet, d'une part, les variables b et ϕ sont liées de manière très forte au travers de leurs dérivées. D'autre part, cela nécessiterait la mesure de trois accélérations sans que nous puissions garantir l'observabilité du système résultant. Tous les calculs ne permettraient donc pas l'estimation exacte des grandeurs cinématiques.

Par contre, il semble logique de pouvoir négliger l'accélération longitudinale. Cette considération nous semble être rationnelle : l'allongement du câble se répercute davantage, selon nous, sur sa flèche. La projection de l'allongement dans le sens du câble sur le plan horizontal peut donc être négligée.

L'expression (6.11) se réduit donc, en appliquant la transformation des axes mobiles vers les axes fixes :

$$\ddot{\mathbf{O}\mathbf{O}'} = \begin{pmatrix} -b\dot{\phi}^2 \cos(\phi) + b\ddot{\phi} \sin(\phi) & b\ddot{\phi} \cos(\phi) + b\dot{\phi}^2 \sin(\phi) & \ddot{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

Enfin, nous pouvons émettre une seconde hypothèse simplificatrice : supposer que le mouvement vertical est corrélé à la variation de ϕ . Cette hypothèse n'est toutefois pas applicable aux mouvements de grande amplitude tels que le délestage et les mouvements dus aux courts-circuits. En effet, au cours de ces derniers, la grandeur z varie de manière forte et indépendante de la variation de l'angle ϕ .

L'énorme avantage est que le système résultant est observable puisqu'il n'existerait qu'une inconnue, à savoir l'angle ϕ , pour deux mesures d'accélération. En effet, sur les figures 6.5 et 6.6, nous pouvons lier l'angle ϕ et la position verticale z . Nous définissons la grandeur a comme la position du câble par rapport à un plan horizontal passant par le centre du repère inertiel. Si le mouvement du câble consiste en de petites variations autour de cette position verticale, nous pouvons considérer que la distance entre le point du câble et le centre du repère inertiel est constante.

Nous pouvons écrire tout d'abord que :

$$\frac{L}{2} = b \sin(\phi)$$

Ensuite, par les relations dans les triangles rectangles, nous pouvons dire, que pour des petites variations autour de la flèche a , voir figure 6.6, :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2(\phi)} \end{aligned}$$

Nous disposons, à présent, d'une équation liant le mouvement vertical au mouvement dans le plan. Si nous dérivons deux fois par rapport au temps, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{-b^2 \sin(2\phi) \dot{\phi}}{2 \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2(\phi)}} \\ \ddot{z} &= \frac{-4 (a^2 - b^2 \sin^2(\phi)) - b^4 \sin^2(2\phi)}{4 (a^2 - b^2 \sin^2(\phi))^{\frac{3}{2}}} \dot{\phi}^2 + \frac{-\sin(2\phi)}{2 (a^2 - b^2 \sin^2(\phi))^{\frac{1}{2}}} \ddot{\phi} \end{aligned}$$

6.2.3 Filtre de Kalman pour la cinématique en translation

Pour réaliser le filtre de Kalman, nous devons donc insérer une description de l'accélération que nous avons donné précédemment. Toutefois, l'accélération dans le repère inertiel est une fonction non linéaire des grandeurs caractéristiques du mouvement. Nous pouvons affirmer que si l'observation est non linéaire, le lien entre les grandeurs du vecteur d'état est linéaire puisqu'il s'agit d'une «simple» intégration.

Nous avons un choix entre trois descriptions de systèmes non linéaires. Elles présentent toutes des avantages et inconvénients :

- Mouvements à trois degrés de liberté
 - + Le modèle est moins restrictif, il tient compte de tous les mouvements possibles.
 - Le modèle est très fortement non linéaire et les grandeurs b et ϕ sont étroitement liées.
- Mouvements à deux degrés de liberté
 - + L'équation d'observation est relativement facilement linéarisable
 - + Les hypothèses du mouvement sont crédibles
 - Une accélération longitudinale subsiste, qui n'est pas linéarisable autour de $\phi = 0$ (comme nous le verrons dans la suite)
- Mouvements à un degré de liberté
 - + Le système décrit est parfaitement observable permettant une utilisation sûre du filtre de Kalman
 - Trop d'hypothèses simplificatrices sont nécessaires, le filtre ne reconstruirait pas tous les mouvements intéressants

La seconde modélisation nous semble être la meilleure solution, elle est plus simple à utiliser, sa signification physique semble être acquise. Son désavantage est qu'elle n'est pas observable ; nous devrions réutiliser la fonction de recherche de moyenne¹⁹ pour éliminer les biais numériques qui apparaîtront sur les grandeurs.

6.2.3.1 Modélisation à deux degrés de liberté Les deux grandeurs que le filtre de Kalman doit déterminer sont l'angle ϕ et la flèche z . Le vecteur d'état, X , possède donc six éléments tels que nous le donnons par la relation (6.14).

$$X = \begin{pmatrix} \phi & \dot{\phi} & \ddot{\phi} & z & \dot{z} & \ddot{z} \end{pmatrix}^T \quad (6.14)$$

$$= \begin{pmatrix} \Phi \\ Z \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Les grandeurs Φ et Z qui apparaissent dans l'équation 6.14 sont telles que :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} \text{ et } Z = \begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

¹⁹Il s'agit de la fonction «*Mean_square*» définie dans la section 4

Pour utiliser les notations du filtre de Kalman étendu, nous devons définir la matrice d'observation à partir de la linéarisation des équations de mesures non linéaires. Par sa définition, l'angle ϕ est très petit. En effet, si nous supposons que l'amplitude du mouvement hors plan est de l'ordre de 1 m, pour donner un cas extrême, un point à une distance de 30 m sera caractérisé par un angle ϕ de l'ordre de 3°.

Au vu de l'ordre de grandeur de l'angle ϕ , il semble clair que la linéarisation des équations autour de zéro est une bonne solution. Premièrement, comme l'angle est petit, il est possible d'écrire que :

$$\begin{aligned}\sin(\phi) &= \phi \\ \cos(\phi) &= 1\end{aligned}$$

Enfin, il est possible de discrétiser les équations autour de zéro par un développement de Taylor des équations de mesure qui nous permet de donner les équations (6.17). Nous notons A_1 l'accélération longitudinale, A_2 l'accélération hors plan et A_3 l'accélération verticale. L'accélération A_1 n'est due qu'à la variation des repères dans ce cas-ci. On peut supposer que comme l'angle ϕ est petit, cette accélération sera faible et par conséquent que le mouvement selon cette direction sera faible également.

$$A_1 = (b\ddot{\phi})\phi - (2b\dot{\phi})\dot{\phi} + (b\phi)\ddot{\phi} \quad (6.17a)$$

$$A_2 = (b\dot{\phi}^2)\phi + (2b\phi\dot{\phi})\dot{\phi} + (b)\ddot{\phi} \quad (6.17b)$$

$$A_3 = \ddot{z} \quad (6.17c)$$

Comme nous l'avions déjà dit précédemment, la mesure est non linéaire mais la dynamique du système l'est. Comme les valeurs $\ddot{\phi}$ et \ddot{z} sont intégrées deux fois, la matrice d'état s'écrira comme l'équation (6.18), avec la matrice d'état A définie comme dans la section 4 (équations (3.12)).

$$A_{tot} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{k+1} \\ Z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_k \\ Z_k \end{pmatrix} + w_k \quad (6.19)$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\ddot{\phi}_k & -2b\dot{\phi}_k & b\phi_k & 0 & 0 & 0 \\ b\dot{\phi}_k^2 & 2b\phi_k\dot{\phi}_k & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_k \\ Z_k \end{pmatrix} + v_k \quad (6.20)$$

Le rang de la matrice d'observation²⁰ est de deux, on ne peut donc pas dire que le système soit observable.

²⁰Équations (2.16) de la section 2

6.2.4 Comparaisons avec les simulations

Pour valider notre choix de modèle, nous allons de nouveau le confronter aux simulations dont nous disposons. La première consiste en des mesures en soufflerie dont nous avons déjà parlé dans la section 5. Nous tâcherons ici de reconstituer les mouvements sur base des accélérations mesurées par les deux accéléromètres disposés dans le module Ampacimon pour les essais. Les caractéristiques expérimentales diffèrent quelque peu du cas réel que nous devons traiter. En effet, vu les dimensions du dispositif, la flèche du câble est très faible : son mouvement ne pourra pas être décrit par une seule grandeur. Nous devons donc utiliser la modélisation à deux degrés de liberté.

La seconde possibilité de tests est permise par la simulation sous *Samcef Field* de comportement de câbles plus «proche» de la réalité.

6.2.4.1 Essais en soufflerie Comme le système pouvant décrire le mouvement à deux degrés de liberté n'est pas observable, nous devons utiliser comme précédemment la fonction «Mean square» pour éliminer la composante continue qui apparaît sur la vitesse. Le guide qui nous permettra de déterminer l'exactitude des calculs est l'ordre de grandeur du mouvement, disponible sur les vidéos associées aux mesures. Ces dernières montrent que les mouvements verticaux et horizontaux sont du même ordre de grandeur (en *cm*). Nous pouvons juger qu'un déplacement de l'ordre de 25 *cm* peut être considéré comme crédible.

Les accélérations verticale et horizontale sont des mesures à notre disposition. L'accélération longitudinale étant inconnue, nous avons supposé qu'elle était nulle. Cette hypothèse conduit à des résultats significatifs : les mouvements nous ont semblé être dans de bons ordres de grandeurs. En effet, sur des vidéos à notre disposition, le câble étudié vibrait de manière forte. Nous verrons toutefois dans la suite, les conséquences de cette hypothèse.

Les figures 6.10, 6.9 et 6.11 illustrent bien le fait que le mouvement soit réalisé selon une ellipse. Nous répétons encore une fois que les mesures à notre disposition sont des mesures «brutes». Il nous est donc impossible de vérifier l'exactitude des calculs réalisés sur ces données. Nous ne pouvons donc que constater que le mouvement est du bon ordre de grandeur et se rapproche de celui observé sur les vidéos réalisées lors des essais.

6.2.4.2 Simulations avec *Samcef Field* Le logiciel *Samcef Field* permet de modéliser le mouvement des câbles électriques. Nous avons dans un premier temps choisi de soumettre le câble à une accélération horizontale «impulsionnelle» et d'observer son mouvement pendant 10 *s*. L'excitation portait sur un élément entier et

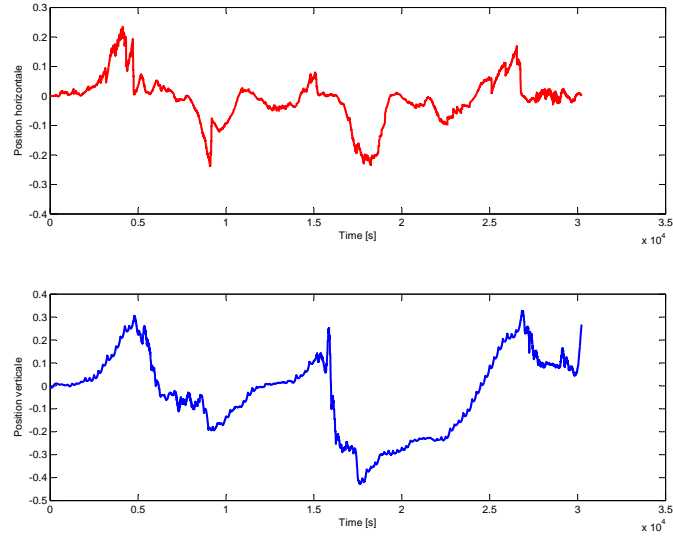


FIG. 6.8 – Évolution des positions verticale et horizontale au cours du temps

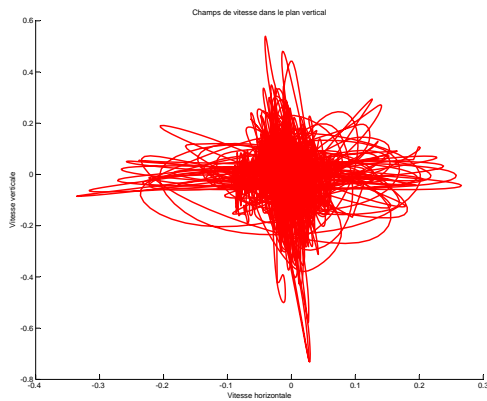


FIG. 6.9 – Vitesses verticale et horizontale pour les différents temps de discrétisation

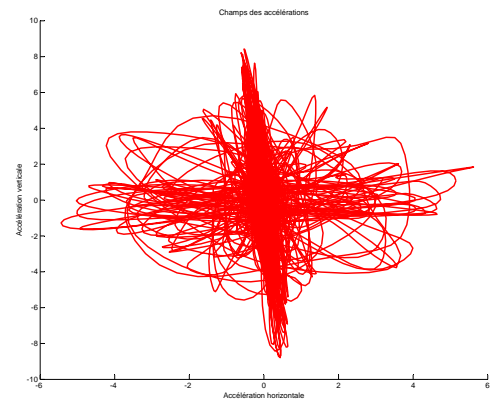


FIG. 6.10 – Accélérations verticale et horizontale pour les différents temps de discrétisation

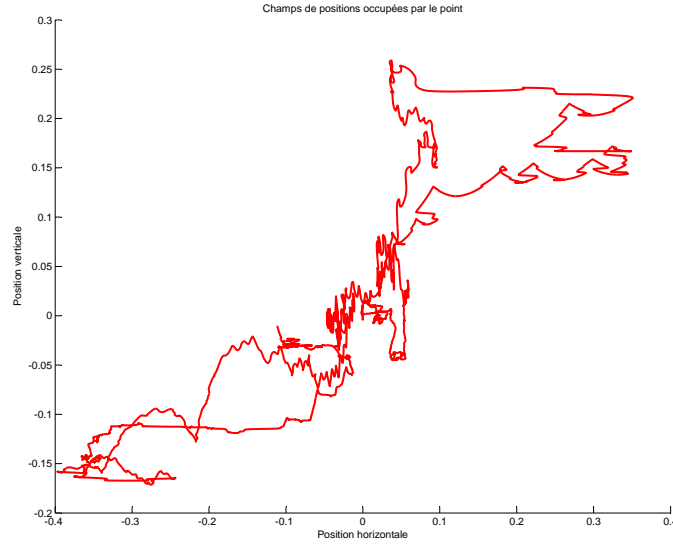


FIG. 6.11 – Positions verticale et horizontale pour les différents temps de discrétisation

non en un nœud de discrétisation de sorte qu'il ne s'agit pas vraiment d'une impulsion. Cette accélération a été imposée à une distance de 30 m du point d'ancrage et la mesure des grandeurs cinématiques était réalisée en deux nœuds à des distances respectives de 30 m et 100 m des points d'ancrage.

Si nous transposons notre modèle aux simulations de *Samcef Field*, nous obtenons des résultats sans points communs avec ceux fournis par le logiciel²¹. Deux options sont possibles : soit la simulation sous *Samcef Field* modifie l'accélération longitudinale et fausse donc la mesure, soit notre modèle développé n'est pas bon.

Sur la figure 6.12, l'accélération longitudinale est en rouge et celle verticale est en bleu. Nous avons choisi de montrer ces deux accélérations car elles sont du même ordre de grandeur, bien que très faibles devant l'accélération dans le sens de l'impulsion comme c'était le cas sur le graphique 5.11 de la section 5. Il nous paraît bizarre que l'accélération longitudinale soit la même, en ordre de grandeur, que l'accélération verticale.

La conséquence de l'hypothèse émise précédemment, qui considérait l'accélération longitudinale égale à zéro, nous a été illustrée avec les simulations de *Samcef Field*. Le fait d'imposer cette accélération nulle dans les simulations en soufflerie, permettait de rendre le système observable, la non observabilité du système étant due à la seule variation de la hauteur. L'ordre de grandeur des mouvements est par

²¹ *Samcef Field* fournit accélération, vitesse et position en un ou plusieurs nœuds

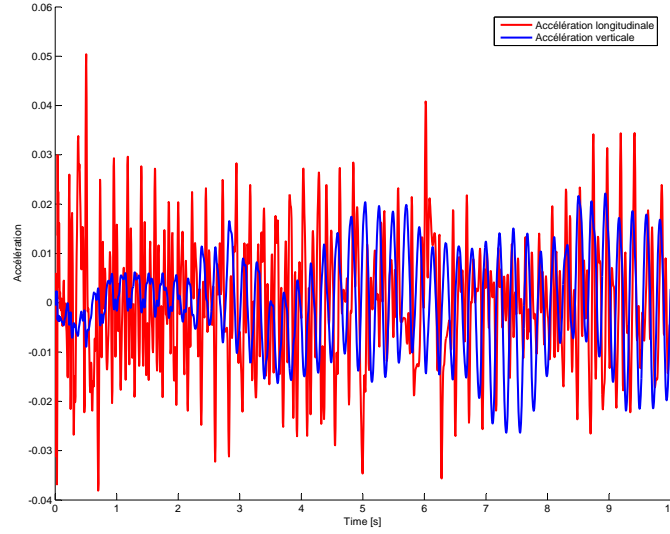


FIG. 6.12 – Comparaison des accélérations horizontale et verticale obtenues par le logiciel *Samcef Field*

contre identique quand le système est rendu observable à celui des mouvements réels.

Si nous supprimons la possibilité de mesurer cette accélération, c'est-à-dire en supprimant l'accélération A_1 des équations (6.17) et en calculant la vitesse, nous obtenons le graphique 6.13. Ce dernier, comparé avec le graphique 6.14, nous permet de constater que le moment d'apparition du pic sur la vitesse hors plan correspond à un retour de «l'impulsion». Une variation si brusque de l'accélération ne permet pas de trouver une valeur exacte de la vitesse lors de ce transitoire.

Nous n'avons pas trouvé de moyen de corriger la valeur de l'angle ϕ . En effet, sa variation lors du passage de l'accélération est quasiment impulsionnelle puis se stabilise à une valeur constante. Le terme impulsionnelle n'est pas vraiment approprié puisqu'un zoom sur cette impulsion montre qu'elle se déroule pendant 0,025 s. En outre, pendant le temps où l'angle ϕ calculé par le filtre reste à des valeurs proches de valeurs réelles, la différence entre ces derniers est assez importante, ce qui explique que la vitesse ne suit pas de manière exacte la vitesse «réelle».

Sur cette figure, nous voyons l'expression très simple de la non observabilité du système au travers de sa variable ϕ . La vitesse calculée est proche de la vraie valeur de la vitesse mais dès que l'accélération redevient impulsionnelle, le système n'est pas capable de se corriger et la vitesse calculée ne signifie plus grand chose.

En outre, il n'est pas envisageable d'ajouter une équation non linéaire dans la matrice d'état qui permettrait de prendre en compte le fait que l'accélération longi-

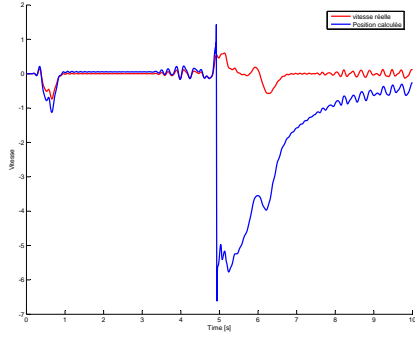


FIG. 6.13 – Illustration du caractère non observable de l'estimation de ϕ

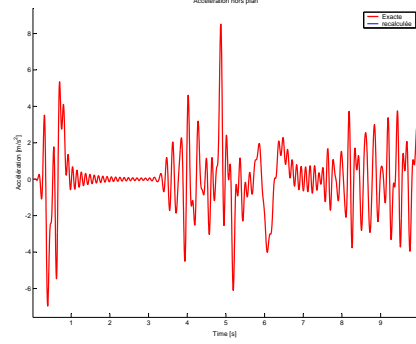


FIG. 6.14 – Accélération hors plan considérée

tudinale du câble est nulle. Nous allons montrer cette impossibilité en essayant cette technique. L'idée aurait été de définir le système continu par le jeu des équations (6.22). Le système aurait réalisé l'intégration des accélérations verticales et hors plan en considérant comme hypothèse la nullité de l'accélération longitudinale.

Si A_1 est nulle, il est normal d'écrire l'équation (6.21) qui lie les termes $\ddot{\phi}$, $\dot{\phi}$ et ϕ ensembles.

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{tg(\phi)} \quad (6.21)$$

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \quad (6.22a)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{\phi}^2}{tg(\phi)} \quad (6.22b)$$

La linéarisation de l'équation 6.21 n'est toutefois pas possible autour de zéro, car cette fonction n'y est pas définie. En outre, physiquement, ce terme ne peut pas être nul car il tire son origine dans le déplacement relatif des axes.

6.2.5 Solution

Il reste une solution que nous n'avons pas envisagée précédemment qui consiste en réalisant l'intégration directe des mesures d'accélérations des différents capteurs d'Ampacimon. Bien que le système ne soit pas observable, la correction de ces grandeurs est réalisable comme nous l'avons montrée dans la section 4.

Le désavantage est que l'accélération est définie dans les axes des accéléromètres, eux-mêmes liés, finalement, aux axes du module Ampacimon. Les vitesses et positions calculées seraient donc valables dans ces derniers. Toutefois, l'erreur commise

sur l'accélération dans le repère inertiel dans lequel les positions et vitesses réelles sont définies, est relativement faible de manière générale. Notons a_1 l'accélération longitudinale mesurée par un accéléromètre parallèle au boîtier Ampacimon et a_2 l'accélération verticale mesurée. En outre, si l'inclinaison de ces axes par rapport aux axes fixes est de 5° , les accélérations selon les axes fixes, notées respectivement a_x et a_z , seront très proches des accélérations a_1 et a_2 .

En outre, il est intéressant de déterminer quelle est l'influence d'une vitesse de rotation relativement élevée sur l'accélération vue par les capteurs. Considérons pour ce faire, le module Ampacimon initialement au repos (du point de vue de la rotation du moins) et supposons une variation de 20° en une seconde. La vitesse angulaire est égale à la variation d'angle sur la variation de temps ; elle vaut dans ce cas-ci, $20 \frac{degr}{s}$. L'accélération angulaire vaut donc $20 \frac{degr}{s^2}$. En transposant cette valeur en $rad s^{-1}$ et en multipliant par la distance entre le capteur et le centre de rotation (sur le câble), nous obtenons que la variation d'accélération (due uniquement à cette variation angulaire) vue par le capteur :

$$\begin{aligned}\Delta a &= 0,25 * \frac{20 \pi}{180} \\ &= 0,035\end{aligned}$$

Pendant cette seconde, les variations de vitesse et de position sont identiques et valent donc respectivement $0,035 m s^{-1}$ et $0,035 m$.

L'ordre de grandeur de ces variations les rend significatives. Il faut donc être conscient des effets de ces hypothèses. Toutefois, nous pensons que une telle variation angulaire constitue une exception plutôt qu'une règle générale. De sorte que l'accélération vue par les accéléromètres du module peut être considérée comme égale à l'accélération de ce dernier dans le repère inertiel.

Toutefois, nous pensons qu'il est possible de déterminer l'orientation d'Ampacimon de manière simple par interpolation des différentes positions des capteurs. Si le bruit sur la position n'est pas trop important, la différence de position résultant de l'intégration en des points opposés du module doit permettre par continuité de ce dernier de déterminer les positions angulaires par rapport à une référence des différents points.

6.3 Reconstitution des grandeurs cinématiques en rotation

Pour augmenter la généralité du propos, il semble intéressant de développer, à côté du modèle que nous avons déjà réalisé, un modèle qui permettrait d'estimer l'orientation du module au cours du temps. Toutefois, un tel modèle nécessite d'ajouter un ou plusieurs capteurs de vitesse angulaire, c'est-à-dire des gyroscopes²², dans

²²Normalement, un gyroscope mesure la position angulaire et un gyromètre la vitesse angulaire. Cependant les gyroscopes MEMS actuels mesurent la vitesse angulaire comme nous le verrons à la

le module pour déterminer les vitesses angulaires autour des axes propres du module.

Le gyroscope doit être couplé aux accéléromètres pour constituer une unité de mesure inertielle (IMU ou inertial measurement unit en anglais). Cette IMU peut être réalisée soit de manière analogique, soit par des capteurs MEMS. Dans ce dernier cas, on parle alors d'IMU attachée au corps (strapdown en anglais).

En outre, l'estimation de l'orientation ne peut pas être menée par intégration directe comme nous l'avons fait pour les signaux d'accélération. Le système serait de nouveau non observable. Les liens entre l'accélération et la vitesse angulaire étant étroits, il est possible de corrélérer les deux grandeurs. Nous proposons pour cela un algorithme basé sur le filtre de Kalman détaillé dans l'article «Measuring orientation of human body segments using miniature gyroscopes and accelerometers» [13]. Nous commencerons par décrire le mouvement du module Ampacimon en tenant compte de l'aspect de la rotation que nous avons négligé jusqu'ici.

6.3.1 Cinématique en rotation

Reprenant les notations de mécanique rationnelle, l'accélération, la vitesse et la position d'un point d'un solide est donnée par les expressions (6.1). Ces dernières sont rappelées ici par les équations (6.23). Nous devons différencier l'accélération dans le repère fixe, que nous indiquerons par un exposant g pour global, de l'accélération dans le repère mobile sera notée, quant à elle, par un exposant s pour système.

En outre, nous différencions l'accélération totale de l'accélération dynamique. Cette dernière regroupe l'accélération du point de référence ainsi que les accélérations dues aux rotations des repères. L'accélération totale est l'accélération qui serait mesurée par un accéléromètre ; elle est la somme de l'accélération dynamique et des composantes de l'accélération de la pesanteur dans les axes des repères. Il est important de préciser que l'orientation des axes des capteurs modifie ces composantes.

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \quad (6.23a)$$

$$\ddot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{b}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}) \quad (6.23b)$$

En effet, vu la rigidité du solide, la position du point dans les axes mobiles, r , est constante ; seule l'orientation des axes mobiles évolue. Le vecteur r possède trois composantes dans les axes mobiles ; il s'écrit :

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

fin de cette section

De plus, le vecteur $\ddot{\mathbf{b}}$ représente l'accélération d'un point du module, pris comme référence, dans le repère inertiel. Ce point de référence doit être bien choisi car la définition du vecteur de Poisson est liée à ce dernier. Comme précédemment, nous avons choisi le point C situé sur le câble à la verticale du centre de gravité. Ce vecteur de position est donné par :

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{Cx} \\ a_{Cy} \\ a_{Cz} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

De manière rigoureuse, nous devons définir trois repères : le repère inertiel, un repère mobile lié au point C mais dont les axes sont parallèles aux axes fixes et enfin un repère mobile dont l'orientation des axes évolue au cours du temps. Comme les axes des deux premiers repères sont parallèles en tout instant, le lien entre ces deux repères est une simple translation et le vecteur de Poisson définissant la rotation des axes mobiles par rapport aux axes fixes, sera identique. Ce vecteur s'écrit donc, en notant par α , β et γ les angles entre les axes mobiles et les axes fixes,

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (6.26)$$

Les produits vectoriels définis dans l'équation (6.23b) sont donc exprimés en terme de matrice par les relations (6.27).

$$\dot{\omega} \wedge \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\gamma} & \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} & 0 & -\ddot{\alpha} \\ -\ddot{\beta} & \ddot{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.27a)$$

$$\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\dot{\beta}^2 - \dot{\gamma}^2 & \dot{\alpha}\dot{\beta} & \dot{\alpha}\dot{\gamma} \\ \dot{\alpha}\dot{\beta} & -\dot{\alpha}^2 - \dot{\gamma}^2 & \dot{\beta}\dot{\gamma} \\ \dot{\alpha}\dot{\gamma} & \dot{\beta}\dot{\gamma} & -\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2 \end{pmatrix} \quad (6.27b)$$

Enfin, nous indiquons l'accélération dans le repère fixe du point considéré (point où l'accélération est mesurée) par l'indice $_1$, le vecteur de position s'écrit donc :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

Les accéléromètres MEMS mesurent l'accélération totale vue dans leurs axes de mesures. Il convient de tenir compte de leur orientation par rapport aux axes fixes. Si \mathbf{a}_t^s est l'accélération totale dans les axes du système, elle est liée à l'accélération totale dans les axes fixes, \mathbf{a}_t^g , au travers de la matrice de changement de repère, \mathbf{R}^{gs} .

$$\mathbf{a}_t^g = \mathbf{R}^{gs} \mathbf{a}_t^s \quad (6.29)$$

Cette matrice de changement de repère s'écrit par le produit de trois matrices, chacune représentant la rotation autour d'un axe. Nous citons ici le livre de BROXMEYER C., «Inertial navigation systems».

«If C_m^s represents an arbitrary rotation, it can always be expressed as a product of three matrices, each describing a rotation about a single axis. Let the s system be brought into coincidence with the m system by performing three rotations. Then C_m^s can be written as the product

$$C_m^s = C_m^q C_q^p C_p^s$$

»[6]

Si les matrices de rotation autour des axes \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y et \mathbf{e}_z sont notées respectivement par R_x , R_y et R_z , nous pouvons écrire :

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (6.30a)$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (6.30b)$$

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.30c)$$

Il vient ainsi que la matrice de changement de repère s'exprime par le produit de ces trois matrices :

$$\mathbf{R}^{gs} = R_x R_y R_z$$

En regroupant les différents résultats proposés ci-avant, nous pouvons exprimer la relation entre l'accélération dynamique dans les axes fixes au point C en fonction de la mesure de l'accélération en un point et de la mesure des variations angulaires. En effet, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{a}_{C, dyn}^g = \mathbf{R}^{gs} \mathbf{a}_{mes} - \mathbf{g}^g - \dot{\omega} \wedge \mathbf{r} - \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{r}) \quad (6.31)$$

6.3.2 Perspectives d'application d'un filtre de Kalman

L'équation (6.31) permet de se rendre compte du lien étroit qui unit accélération et vitesse de rotation. La détermination de l'orientation doit être réalisée de manière concertée en utilisant ces deux capteurs. L'algorithme que nous proposons est donné dans l'article «Measuring orientation of human body segments using miniature gyroscopes and accelerometers»[13].

Le principe de cette modélisation est de fusionner les mesures des gyroscopes et des accéléromètres pour réaliser une estimation de l'orientation. Cette fusion est

traduite par un terme d'erreur, noté θ_k , qui représente une erreur d'orientation résultant des mesures. Le filtre de Kalman est bâti sur une propagation de deux erreurs : les biais des gyroscopes, notés b_k et les erreurs d'orientation. La modélisation demande de disposer d'un modèle de chaque capteur ainsi que d'un modèle de l'erreur.

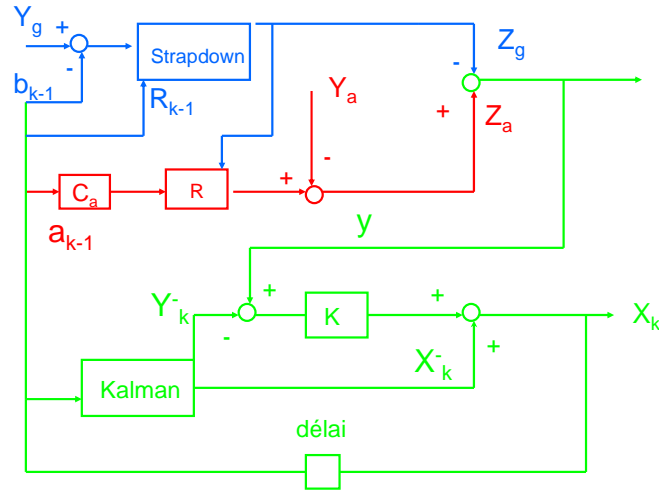


FIG. 6.15 – Schéma de principe de l'intégration d'un gyroscope pour le calcul de l'orientation

La figure 6.15 présente la modélisation en «boîtes noires» du système considéré. Les signaux Y_g et Y_a représentent les mesures des gyroscopes et des accéléromètres respectivement. Sur cette figure, nous avons associé une couleur à un ensemble de boîtes et signaux : la couleur bleue représente le modèle de gyroscope, le rouge pour l'accéléromètre et le vert pour le modèle de Kalman. Enfin la grandeur Z qui apparaît sur cette figure consiste en une colonne de la matrice de changement de variable qui représente finalement l'orientation.

6.3.2.1 Modèle du gyroscope Le terme «Strapdown» qui apparaît sur la figure 6.15, indique l'intégration directe du signal du gyroscope. Cette intégration directe est réalisée en temps discret par une formule (6.32) qui fait apparaître le signal du gyroscope et l'orientation au temps discret précédent.

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{\Omega} \quad (6.32)$$

Avec

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\gamma} dt & \dot{\beta} dt \\ \dot{\gamma} dt & 0 & -\dot{\alpha} dt \\ -\dot{\beta} dt & \dot{\alpha} dt & 0 \end{pmatrix}$$

Cette équation nous permet d'obtenir une estimation de la matrice de changement de repère au temps discret k que nous notons \hat{R}_k^- pour dénoter le caractère estimer a priori de la grandeur.

La mesure de la vitesse de rotation est modélisée par une équation du type :

$$y_g(k) = \omega(k) + b(k) + v_g(k)$$

Le terme $v_g(k)$ représente le bruit de mesures, supposé être un bruit blanc gaussien, lié au gyroscope.

6.3.2.2 Modèle de l'accéléromètre Le modèle d'accéléromètre permet d'estimer la valeur de l'accélération globale au temps discret $k + 1$ connaissant celle au temps k . Il s'agit d'une modélisation du capteur comme un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est modélisée par la constante adimensionnelle C_a . La prédiction de l'accélération est réalisée selon un modèle :

$$a_g(k) = C_a a_g(k - 1) + w_a(k)$$

La mesure de l'accélération est donc modélisée par une relation :

$$y_a(k) = a^s(k) + g^s(k) + v_a(k)$$

Les termes $w_a(k)$ et $v_a(k)$ représentent les bruits de processus et de mesures au temps discret k .

Le modèle permet donc de connaître l'accélération dans les axes globaux ou fixes alors que les accéléromètres mesurent dans les axes du système. Le passage de cette accélération prédite dans les axes globaux vers les axes propres est donc réalisé par la matrice de changement de repère définie précédemment.

En outre, la différence entre la mesure et l'accélération dans les axes du système est égale, aux bruits près, à l'accélération de la pesanteur dans les axes du système. Nous pouvons donc écrire que le rapport de cette différence sur son module est l'orientation au bruit près. L'expression de Z est donc :

$$\hat{Z}_a^- = \frac{y(k) - \hat{x}^-(k)}{|y(k) - \hat{x}^-(k)|}$$

6.3.2.3 Modèle de Kalman Comme dit précédemment, le filtre de Kalman développé porte sur l'estimation des erreurs associées aux mesures. Soit le vecteur d'état suivant :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \theta_{\epsilon,k} \\ b_{\epsilon,k} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

L'indice ϵ indique l'erreur sur la grandeur.

L'offset b_k du gyroscope varie de manière très lente ; il est donc possible d'écrire que l'erreur sur ce biais évolue de la manière suivante :

$$\hat{b}_{\epsilon,(k+1)}^- = b_{\epsilon,k} - w_{b,k}$$

Le terme $w_{b,k}$ représente le bruit de processus sur l'erreur du biais de gyroscope.

En outre, l'article «Measuring orientation of human body segments using miniature gyroscopes and accelerometers»[13] fournit la relation liant l'erreur d'estimation entre deux instants successifs. Ces matrices sont fournies sans démonstration ; les détails de la modélisation sont disponibles dans la thèse de LUINGE : «Inertial sensing of human movements»[12] qui donne des détails supplémentaires sur les développements mathématiques de l'article [13] du même auteur. La propagation de l'erreur est donc décrite par :

$$\theta_{\epsilon,k}^- = \theta_{\epsilon,(k-1)} - dt b_{\epsilon,(k-1)} + dt v_{g,k} \quad (6.34)$$

La dynamique des erreurs étant connue, l'étape suivante consiste en l'expression des erreurs en fonction des estimations de l'orientation décrites ci-avant. L'article montre que l'équation d'observation s'écrit par :

$$\begin{aligned} z_{\epsilon,k} &= \hat{Z}_A^s - \hat{Z}_G^s \\ &= \mathbf{C} \begin{pmatrix} \theta_{\epsilon,k} \\ b_{\epsilon,k} \end{pmatrix} + v_{g,k} \end{aligned}$$

La matrice d'observation s'exprime par la relation suivante :

$$\mathbf{C} = \left\{ \left[Z_k - \frac{\hat{a}_k^{s,-}}{g} \right] \wedge [dt Z_k] \wedge \right\} \quad (6.35)$$

L'opérateur \wedge exprime que le vecteur doit être réécrit sous forme de matrices pour pouvoir effectuer les opérations linéairement. Une telle formulation est présentée par la formule (6.27).

Enfin les matrices de covariance des bruits de processus et d'états sont données par les relations (6.36). Elles sont notées respectivement par $\mathbf{Q}_{w,k}$ et $\mathbf{Q}_{v,k}$.

$$\mathbf{Q}_{w,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{\theta,(k-1)} + dt^2 \mathbf{Q}_{b,(k-1)} + dt^2 \mathbf{Q}_{v,g} & dt^2 \mathbf{Q}_{b,(k-1)} \\ \mathbf{Q}_{b,(k-1)} & \mathbf{Q}_{b,(k-1)} + \mathbf{Q}_b \end{pmatrix} \quad (6.36a)$$

$$\mathbf{Q}_{v,k} = \frac{1}{g^2} (C_a^2 \mathbf{Q}_{a,(k-1)} + \mathbf{Q}_{w,a} + \mathbf{Q}_{v,a}) + \mathbf{Q}_{v,g} \quad (6.36b)$$

Les différentes matrices de covariances qui apparaissent dans ces expressions sont explicitées dans l'article, nous les citons pour expliciter les matrices de covariance

associées aux bruits de processus :

« $\mathbf{Q}_{\theta,(k-1)}$ and $\mathbf{Q}_{b,(k-1)}$ are the a posteriori error covariance matrices of the orientation and offset at previous timestep, respectively. \mathbf{Q}_b is the very small covariance matrix of the offset noise and $\mathbf{Q}_{v,g}$ is the gyroscope noise covariance matrix.»[13]

Les matrices de covariance associées au bruits de mesures sont nommées de manière analogue : $\mathbf{Q}_{a,(k-1)}$ est la matrice de covariance de l'erreur a posteriori de l'accélération, $\mathbf{Q}_{w,a}$ est la matrice de covariance du bruit $w_{a,k}$ et enfin $\mathbf{Q}_{v,a}$ est la matrice de covariance du bruit de processus.

6.3.3 Perspectives

Le modèle de filtre de Kalman n'a pas été implémenté. Il serait intéressant de poursuivre la modélisation pour disposer d'un filtre de Kalman robuste pour l'estimation de l'orientation.

En outre, il serait également intéressant de vérifier quelle est la grandeur mesurée par les gyroscopes utilisés. En effet, si les gyroscopes mécaniques fonctionnent sur le principe de la conservation du moment cinétique, les gyroscopes MEMS utilisent, selon le rapport technique de WOODMAN O., le principe de l'effet Coriolis.

«MEMS gyroscopes make use of the Coriolis effect, which states that in a frame of reference rotating at angular velocity ω , a mass m moving with velocity \mathbf{v} experiences a force :

$$F_c = -2m (\omega \wedge \mathbf{v})$$

MEMS gyroscopes contain vibrating elements to measure the Coriolis effect. Many vibrating element geometries exist, such as vibrating wheel and tuning fork gyroscopes.»[22]

Enfin, pour conclure sur la position du gyroscope, nous précisons que la position la plus utilisée est de construire une IMU par association entre un ou plusieurs accéléromètres avec un ou plusieurs gyroscopes. Cette unité prend un sens matériel et permet de déterminer avec assurance que la vitesse angulaire mesurée par le gyroscope s'assimile au vecteur de Poisson du changement de repère.

Cette disposition des capteurs est très courante dans la littérature de la navigation inertielle. Cette unité de mesures est détaillée dans deux articles que nous conseillons au lecteur intéressé :

- «In-use calibration of body-mounted gyroscopes for applications in gait analysis» [29]
- «Wireless MEMS inertial sensor system for golf swing dynamics» [15]

7 Conclusions et perspectives

La reconstitution des mouvements des câbles électriques est réalisée par l'intégration d'un ou de plusieurs signaux d'accélération. Le module Ampacimon dispose de quatre accéléromètres MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) biaxes placés en différents endroits du module. Deux techniques numériques sont envisageables pour réaliser l'intégration du signal d'accélération : d'une part, l'analyse fréquentielle de l'accélération (se basant sur le calcul des modes propres) et d'autre part, par son intégration temporelle directe. Pour ce travail, nous avons appliqué la seconde possibilité au travers d'un filtre de Kalman.

La technique du filtre de Kalman se justifiait a priori, d'une part, pour sa robustesse aux bruits de mesures et d'autre part pour ses capacités à calculer correctement les grandeurs sans connaître avec précision les conditions initiales. Ces deux arguments sont excessivement importants pour la reconstitution des mouvements des câbles électriques. En effet, les position et vitesse initiales sont inconnues au moment du lancement du filtre de Kalman.

7.1 Définition d'un filtre de Kalman

La définition d'un filtre de Kalman nécessite une modélisation semblable à un système (c'est-à-dire en modèle «entrées - sorties»). Un ensemble de grandeurs, constituant le vecteur d'état du système, modélise sa dynamique. La connaissance de ce vecteur en un instant donné est suffisant pour prédire l'état suivant du système. De plus, la propagation des erreurs au travers du système doit être connue pour déterminer la confiance à accorder au modèle. Celle-ci permet de définir de la matrice de covariance des bruits de processus.

En outre, les équations caractéristiques comprennent le gain du filtre de Kalman qui est défini pour minimiser la variance de l'erreur. L'association de la propagation des erreurs et de ce gain permet de réduire les effets des bruits de mesures. Toutefois, il est nécessaire de connaître leur densité spectrale de puissance. Enfin, le filtre de Kalman est une technique répandue dans les milieux scientifiques et qui est appliquée dans de nombreux domaines.

7.2 Spécificités de l'application

Toutefois, l'intégration directe de l'accélération est limitée par la condition d'observabilité du système physique ; la connaissance des conditions initiales n'est pas importante si une des grandeurs intégrées est mesurée. Nous ne disposons pas de cette mesure pour le module Ampacimon. Il n'est donc pas possible d'appliquer uniquement un filtre de Kalman pour reconstruire les mouvements à partir de l'accélération. Les erreurs initiales se propagent par intégration et faussent les calculs

de la vitesse et de la position. En outre, bien que le bruit soit réduit au travers du filtre de Kalman, son effet consiste en l'ajout d'une composante qui augmente avec le temps.

Pour éliminer cet effet «boule de neige», la vitesse est moyennée pendant un certain pas de temps, qu'il convient de choisir en fonction du temps de calcul global, et cette dernière est retranchée de la vitesse calculée par le filtre de Kalman. Le sens physique de cette hypothèse est bien acquis puisque, si la vitesse du câble était de moyenne non nulle, le câble ne resterait pas «accroché» aux pylônes.

La vitesse calculée se rapproche ainsi de la vitesse réelle. La position trouvée est égale à la somme de la position réelle et des biais initiaux mal corrigés. Au bout d'un temps variable selon les conditions mais, qui reste inférieur à la minute dans nos simulations, la position était correcte à une constante près.

Pour fournir un signal de position correcte, l'algorithme pourrait consister en un stockage de l'accélération mesurée pendant une à deux minutes à l'issue desquelles le filtre de Kalman, avec correction de la vitesse moyenne, réaliserait le calcul de la vitesse exacte et de la position à une constante près. Cette dernière constante serait éliminée à la fin de la boucle du filtre de Kalman.

L'évolution de la position ainsi trouvée ferait apparaître un transitoire, de longueur variable et qui nécessiterait une estimation au cas par cas. Pour indication, sa valeur a été trouvée égale à 20 s au minimum pour les simulations issues du logiciel *Samcef Field*.

Enfin, pour une accélération à une dimension, il est possible de trouver la position exacte moyennant l'apparition de ces transitoires. Le calcul de la flèche d'un conducteur peut donc être parfaitement réalisé à partir du signal d'accélération verticale si la flèche initiale est connue.

7.3 Mouvements à trois dimensions

La détermination du mouvement à trois dimensions du module Ampacimon, peut être réalisée en considérant que le module est fixé de manière très forte avec le conducteur et en négligeant le phénomène de torsion du câble. Ces hypothèses conduisent à estimer qu'un point du module se comporte dans l'espace comme un point du câble. Il apparaît que l'intégration directe des signaux d'accélération permet d'estimer la position d'un point du câble et, par la force des choses, celle du module Ampacimon. Par interpolation des différentes positions entre elles, l'orientation complète du module peut être calculée.

La mécanique rationnelle montre que pour reconstruire ce type de mouvements,

cette hypothèse est valable si les variations angulaires du module sont faibles. Cette dernière est d'application dans la plupart des circonstances et l'intégration directe est réalisée dans les axes des capteurs.

Pour faire un pas de plus dans la reconstitution des mouvements des câbles électriques, l'estimation de l'orientation du module par intégration de mesures, et non pas par calcul, est une possibilité intéressante. Elle nécessite par contre l'ajout d'un capteur de vitesse angulaire, comme un gyroscope MEMS, et d'une modification de l'intégration développée dans ce mémoire. Cette estimation pourrait être permise par l'utilisation d'un filtre de Kalman basé sur un vecteur d'état de système contenant les différentes erreurs (erreur d'orientation et de biais gyroscopique). Il pourrait en outre être couplé au modèle d'intégration temporelle de l'accélération proposé dans ce mémoire.

Enfin, une réflexion plus approfondie sur la physique utilisée par le capteur de vitesse angulaire devrait également être menée pour déterminer la grandeur que mesure le capteur. La pratique courante pour la réalisation de «IMU» ou «Inertial Measurement Unit» consiste en l'intégration du gyroscope sur la même plaque que les accéléromètres. Cette pratique permet d'identifier les éléments du vecteur de Poisson aux vitesses angulaires mesurées par les capteurs. Un essai en laboratoire permettrait de vérifier ces éléments et de déterminer le nombre de gyroscopes nécessaires.

A Définitions des grandeurs statistiques

Il nous semble important de définir de manière précise les grandeurs et variables utilisées dans les théories du traitement de signal ainsi que dans les processus stochastiques. Les développements de cette section sont fortement inspirés des livres suivants qui présentaient de manière claire les différents concepts clés :

- "Analog and digital communications" de HAYKIN S.[27]
- "Probability and stochastic processes - a friendly introduction for electrical and computer engineers" de GOODMAN D. et YATES R.[8]

La notion à la base de tous les développements est celle de la variable aléatoire. Nous donnons ici la définition donnée par YATES R. et GOODMAN D. :

«A random variable consists of an experiment with a probability measure $P(\cdot)$ defined on a sample spaces S and a function that assigns a real number to each outcome in the sample space of the experiment.»[8]

Pour différencier les notions de variable aléatoire continue et discrète, nous donnons la définition suivante, issue du livre de HAYKIN S. :

«The random variable X is a discrete random variable if X can take only a finite number of values in any finite observation interval. If, however, the random variable X can take on any value in a finite observation interval, X is called a continuous random variable.»[27]

À une variable, on peut attacher une grandeur statistique qui est la fonction de répartition. Elle est définie par la relation :

$$F_x(x) = P(X \leq x) \quad (\text{A.1})$$

Cette fonction de répartition n'est pas une fonction explicite de la variable aléatoire X mais elle associe une probabilité à chacune de ses valeurs. Nous pouvons ajouter que cette fonction possède deux propriétés intéressantes : d'une part, elle est comprise entre zéro et un, et d'autre part, il s'agit d'une fonction monotone croissante de x . Cette dernière propriété découle du fait que

$$F_x(x_1) \leq F_x(x_2) \text{ si } x_1 < x_2$$

Si cette fonction de répartition est dérivable et s'il s'agit d'une variable aléatoire continue, la fonction peut se dériver et cette dernière est appelée la densité de probabilité :

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Une fois cette notion établie, nous devons scinder une nouvelle fois les notions de temps continu et de temps discret. Deux notions caractérisent les signaux aléatoires gaussiens : la moyenne (en anglais, "the mean" or "expected value") et la variance.

A.1 Temps continu

La moyenne ou l'espérance mathématique d'un signal aléatoire à une variable est donnée par l'expression :

$$m_x = \mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad (\text{A.2})$$

La moyenne est aussi définie comme étant le moment statistique d'ordre un. Le moment statistique d'ordre deux d'un signal aléatoire à une variable est défini par la relation :

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (\text{A.3})$$

Cette définition est aussi la valeur moyenne quadratique du signal. Pour définir la variance du signal, nous devons définir le moment statistique **centré** d'ordre deux qui est en fait le moment statistique d'ordre deux du signal moins sa moyenne ; soit mathématiquement :

$$\mathbf{E}[(X - m_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f_x(x) dx \quad (\text{A.4})$$

La variance d'un signal aléatoire est couramment notée σ_x . Sa racine carrée est appelée la déviation standard de la variable aléatoire X .

Dans le cas de fonction de plusieurs variables aléatoires, les notions définies ci-dessus peuvent être étendues sans problème. Au lieu de parler de la variance de la variable aléatoire, on parle plutôt de la **matrice de covariance** de la variable aléatoire :

$$COV[X, Y] = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] \quad (\text{A.5})$$

A.2 Temps discret

Par analogie avec le temps continu, les mêmes définitions peuvent être appliquées en temps discret. La notion de densité de probabilité n'est plus présente ; toutefois, vu la notion de temps discret, on peut directement associer à chaque valeur de la variable aléatoire sa probabilité. Il vient ainsi successivement pour la moyenne, le moment statistique d'ordre deux et le moment statistique centré d'ordre deux :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^N x_i P(X = x_i) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{E}[X^2] = \sum_{i=1}^N x_i^2 P(X = x_i) \quad (\text{A.7})$$

$$Var(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \quad (\text{A.8})$$

A.3 Traitement du signal et notions de probabilités

Nous allons particulariser les notions définies dans la section précédente et les adapter avec le cadre des notions de traitement du signal. Cette théorie possède un vocabulaire propre mais les grandeurs en question sont les mêmes que celles définies dans la théorie des statistiques. Nous citons ici HAYKIN S. qui explique dans son livre le besoin d'utiliser ses notions en traitement de signal :

«In many practical situations we find that it is not possible to determine (by means of suitable measurement, say) the probability distribution of a random process. Then we must content ourselves with a partial description of the process. Ordinarily, the mean, autocorrelation function and autocovariance function of the random process are taken to give a crude but nevertheless, useful description of the distribution; these terms will be defined here after.»[27]

La moyenne d'un processus $X(t)$ est une constante définie par la relation (A.9) en un instant t_k

$$m_x = \mathbf{E} [X(t_k)] \quad (\text{A.9})$$

La fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire est définie pour tout t_k et t_j par la relation :

$$R_x(t_k - t_j) = \mathbf{E} [X(t_k) X(t_j)^T] \quad (\text{A.10})$$

Les deux grandeurs $X(t_k)$ et $X(t_j)$ sont les grandeurs aléatoires obtenues en observant la variable aléatoire $X(t)$ aux instants t_k et t_j . Pour simplifier les notations, nous définissons la variable τ telle que égale à la différence entre t_k et t_j . L'expression prend alors la forme :

$$R_x(\tau) = \mathbf{E} [X(t) X(t - \tau)^T] \quad (\text{A.11})$$

La variable τ est appelée en anglais "Time-delay" ou "Time-lag" de manière assez «libre».

De manière semblable, la fonction d'autocovariance est définie par la relation (A.12), en adoptant la même définition de τ .

$$K_x(\tau) = \mathbf{E} [(X(t) - \mathbf{E} [X(t)]) (X(t - \tau) - \mathbf{E} [X(t)]^T)] \quad (\text{A.12})$$

La signification physique de la matrice de covariance est donnée de manière claire et précise dans le livre de HAYKIN S. que nous citons ici :

«The physical significance of the autocorrelation function $R_x(\tau)$ is that it provides a means of describing the interdependences of two random variables obtained by observing a random process at times τ seconds apart. It is therefore apparent that the more rapidly the random process $X(t)$ changes with time, the more rapidly will the autocorrelation function $R_x(\tau)$ decrease from its maximum $R_x(0)$ as τ increases.»[27]

B Les développements mathématiques

B.1 Démonstration de la forme de la matrice de covariance du bruit d'état

Dans cette partie nous allons donner les développements mathématiques qui permettent de déterminer la matrice de covariance de bruit de processus et de mesures quand le système continu est discrétisé.

Nous rappelons les définitions théoriques de ces matrices données par les relations (2.26) :

$$\begin{aligned}w_k &= \int_0^{dt} e^{Av} M w((k+1) dt - v) dv \\v_k &= v(k dt)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_d &= \mathbf{E} [w_d(k) w_d^T(k)] \\&= \mathbf{E} \left[\int_0^{dt} e^{Av} M w((k+1) dt - v) dv \int_0^{dt} w^T((k+1) dt - \tau) M^T e^{A^T \tau} d\tau \right] \\&= \int \int_0^{dt} e^{Av} M \mathbf{E} [w((k+1) dt - v) w^T((k+1) dt - \tau)] M^T e^{A^T \tau} dv d\tau \\&= \int \int_0^{dt} e^{Av} M W \delta(\tau - v) M^T e^{A^T \tau} dv d\tau\end{aligned}$$

La matrice de covariance du bruit de mesure dans le cas discret résulte simplement de l'échantillonnage et s'exprime donc par la relation :

$$V_d = \frac{V}{dt} \quad (\text{B.1})$$

B.2 Passage d'un signal aléatoire dans un système linéaire

Cette démonstration est issue des notes de cours de M. Alazard, «Introduction au filtre de Kalman»[7], nous trouvons qu'elle permet de mieux comprendre la base mathématique associée aux filtres de Kalman. Ce théorème permet de déterminer les caractéristiques stochastiques d'un système linéaire.

B.2.1 Dans le cas continu

«Soit le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = A x(t) + M w(t)$$

avec $w(t)$ un bruit blanc gaussien stationnaire centré et de densité spectrale de puissance W . On note $m(t_0)$ et $P(t_0)$ la moyenne et la covariance de l'état initial $x(t_0)$

(lui aussi aléatoire mais indépendant de $w(t)$). Alors $x(t)$ est un signal aléatoire gaussien :

– de moyenne :

$$\mathbf{E}[x(t)] = e^{A(t-t_0)} m(t_0)$$

– de covariance $P(t) = \mathbf{E}[(x(t) - \mathbf{E}[x(t)])(x(t) - \mathbf{E}[x(t)])^T]$ vérifiant l'équation différentielle :

$$\dot{P}(t) = A P(t) + P(t) A^T + M W M^T$$

Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative, le système est stable et on tend vers un régime permanent (stationnaire) tel que : $\dot{P} = 0$ et $P(t) = P$.»[7]

Par intégration temporelle entre les instants t_0 et t , on peut trouver l'équation (2.19). Calculons à présent sa moyenne et sa covariance.

$$\mathbf{E}[x(t)] = e^{A(t-t_0)} \mathbf{E}[x(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M \mathbf{E}[w(\tau)] d\tau \quad (\text{B.2})$$

$$= e^{A(t-t_0)} \mathbf{E}[x(t_0)] \quad (\text{B.3})$$

En effet, $w(t)$ est un bruit blanc gaussien, donc son espérance mathématique est égale à zéro. Ensuite, nous obtenons l'expression suivante pour la covariance :

$$x(t) - \mathbf{E}[x(t)] = e^{A(t-t_0)} (x(t_0) - \mathbf{E}[x(t_0)]) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M \mathbf{E}[w(\tau)] d\tau \quad (\text{B.4})$$

$$= e^{A(t-t_0)} \left(x(t_0) - \mathbf{E}[x(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M \mathbf{E}[w(\tau)] d\tau \right) \quad (\text{B.5})$$

Nous savons que la matrice de covariance est donnée par l'expression :

$$P(t) = \mathbf{E}[(x(t) - \mathbf{E}[x(t)])(x(t) - \mathbf{E}[x(t)])^T] \quad (\text{B.6})$$

Nous trouvons ainsi la relation :

$$P(t) = e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M \mathbf{E}[w(\tau) (x(t_0) - \mathbf{E}[x(t_0)])^T] d\tau \right) \quad (\text{B.7})$$

$$+ \int_{t_0}^t \mathbf{E}[(x(t_0) - \mathbf{E}[x(t_0)]) w(\tau)^T] M e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \quad (\text{B.8})$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M \mathbf{E}[w(\tau) w^T(u)] M^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \Big) e^{A^T(t-t_0)} \quad (\text{B.9})$$

Puisque $w(t)$ est un bruit blanc centré et indépendant de $w(t)$, deux termes de l'expression ci dessus peuvent se simplifier de la manière suivante :

$$\mathbf{E}[w(\tau) (x(t_0) - \mathbf{E}[x(t_0)])^T] = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{E}[w(\tau) w^T(u)] = W \delta(\tau - u) \quad (\text{B.11})$$

On obtient alors une expression simplifiée de la matrice de covariance, donnée par la formule (B.12)

$$P(t) = e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} e^{A(t_0-\tau)} M W M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \right) e^{A^T(t-t_0)} \quad (\text{B.12})$$

En dérivant par rapport au temps cette dernière équation, nous obtenons :

$$\dot{P}(t) = A P(t) + P(t) A^T + M W M^T \quad (\text{B.13})$$

En régime permanent, l'équation (B.13) devient :

$$A P(t) + P(t) A^T + M W M^T = 0$$

La forme générale de la solution de cette dernière équation est :

$$P = \int_0^\infty \left(A e^{A^<,t} M W m^T e^{A^T t} \right) dt \quad (\text{B.14})$$

Nous allons vérifier ce résultat en le supposant correct et en examinant l'équation (B.13). En remplaçant, on trouve donc :

$$A P + P A^T = \int_0^\infty \left(A e^{A^t} M W m^T e^{A^T t} + e^{A^t} M W M^T e^{A^T t} A^T \right) dt \quad (\text{B.15})$$

On peut noter que l'expression entre parenthèse est simplement la dérivée de :

$$e^{A^t} M W m^T e^{A^T t}$$

Et nous pouvons donc écrire successivement :

$$\begin{aligned} A P + P A^T &= \left[e^{A^t} M W m^T e^{A^T t} \right]_0^\infty \\ &= 0 - M W M^T \end{aligned}$$

Cette dernière équation n'est vérifiable que si la matrice A est stable.

B.2.2 Dans le cas discret

Les raisonnements et les étapes clés s'appliquent de la même manière en discret qu'en continu. Nous allons toutefois redonner le théorème dans le cas discret et insister sur ces différences avec le cas continu.

«*Soit le système linéaire :*

$$x_{k+1} = A x_k + M w_k$$

avec w_k un bruit pseudo blanc gaussien centré et de densité spectrale de puissance W_d . On note m_0 et P_0 la moyenne et la covariance de l'état initial x_0 (lui aussi aléatoire mais indépendant de w_k). Alors x_k est un signal aléatoire gaussien :

– de moyenne :

$$\mathbf{E}[x_k] = e^{A(k-k_0)} m_0$$

– de covariance : $P_k = \mathbf{E}[(x_k - \mathbf{E}[x_k])(x_k - \mathbf{E}[x_k])^T]$ vérifiant l'équation aux différences :

$$P_{k+1} = A_d P_k A_d^T + M_d W_d M_d^T$$

Si le module des valeurs propres de A_d est inférieure à un, le système est stable et on tend vers un régime permanent (stationnaire) tel que : $P_{k+1} = P_k$ et $P_k = P \gg [7]$

Premièrement, la solution générale du système entre les temps discrets k_0 et k est donnée par la formule :

$$x(k) = A_d^{k-k_0} x_0 + \sum_{i=k_0}^{k-1} A_d^{i-k_0} B_d u(k-1-i+k_0) \quad (\text{B.16})$$

Cette expression montre que x_k est une combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes. Son espérance mathématique vaut, si on se souvient que les signaux w_k et v_k sont des bruits blancs gaussiens centrés :

$$\mathbf{E}[x_k] = A_d^{k-k_0} \mathbf{E}[x_{k_0}]$$

Cette formule est parfaitement analogue à celle trouvée dans le cas continu.

Ensuite, on trouve l'expression suivante :

$$x_{k+1} - \mathbf{E}[x_{k+1}] = A_d (x_k - \mathbf{E}[x_k]) + M_d w_k$$

Les deux variables centrées w_k et $x_k - \mathbf{E}[x_k]$ sont en outre indépendantes et on peut donner la forme de l'équation (B.13) :

$$P_{k+1} = A_d P_k A_d^T + M_d W_d M_d^T \quad (\text{B.17})$$

B.3 Démonstration de l'expression du gain du filtre de Kalman

B.3.1 Dans le cas continu

Nous voulons obtenir l'expression d'un gain tel qu'il minimise la variance de l'erreur d'estimation, notée $P(t)$. Comme l'erreur possède n composantes, nous définissons une nouvelle grandeur qui est la somme des covariances de l'erreur associée à chaque élément, que nous notons $J(t)$.

$$J(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[\epsilon_i^2(t)] \quad (\text{B.18})$$

$$= \mathbf{E}[e^T(t) e(t)] \quad (\text{B.19})$$

Si le processus e est gaussien, on peut alors exprimer $J(t)$ en fonction de la matrice de covariance de l'erreur a posteriori :

$$J(t) = \text{trace} (\mathbf{E} [e(t) e^T(t)]) \quad (\text{B.20})$$

$$= \text{trace} (P(t)) \quad (\text{B.21})$$

Si nous considérons la structure d'un estimateur non biaisé tel que nous l'avons développé dans la section B.2 et si nous reprenons l'équation (2.33) qui donne l'expression d'un tel estimateur, nous obtenons l'évolution suivante de l'erreur :

$$\dot{\epsilon}(t) = (A - K f C) \epsilon(t) + \begin{bmatrix} M & -K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

En vue d'estimer la dynamique de la covariance de l'erreur, nous estimons l'expression suivante :

$$\mathbf{E} \left[\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t + \tau) & v^T(t + \tau) \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} W_{qxq} & 0_{qxp} \\ 0_{pxq} & V_{pxp} \end{bmatrix} \delta(\tau) \quad (\text{B.23})$$

En utilisant le théorème de la section B.2 à l'équation (B.22), nous pouvons affirmer que la covariance de l'erreur obéit à l'équation différentielle B.24 après développement des termes.

$$\dot{P}(t) = (A - K C) P(t) + P(t) (A - K C)^T + M W W^T + K V K^T \quad (\text{B.24})$$

L'expression du gain du filtre de Kalman est donc :

$$K(t) = P(t) C^T V^{-1} \quad (\text{B.25})$$

Ensuite, nous utilisons cette expression du gain dans l'équation (B.24) qui permet alors de trouver l'expression (B.26). Cette équation doit ensuite être intégrée avec la condition initiale $P(t_0)$. Nous rappelons que cette dernière traduit la confiance accordée à l'initialisation. L'expression analytique de l'erreur de covariance en stationnaire découle de cette équation, toutefois, comme nous nous intéressons plus particulièrement au problème discrétisé, nous ne détaillerons pas ce résultat. De plus amples détails sont disponibles dans les notes de cours de M. ALAZARD, «Introduction au filtre de Kalman»[7].

$$\dot{P}(t) = A P(t) + P(t) A^T - P(t) C^T V^{-1} C P(t) + M W M^T \quad (\text{B.26})$$

B.3.2 Dans le cas discret

La démonstration suit évidemment les grandes lignes de la démonstration du cas continu. Nous définissons à nouveau l'erreur commise a posteriori avant d'évaluer la matrice de covariance et d'en minimiser la trace. Dans un premier temps, à partir des équations (2.22b) et (2.17), nous pouvons dire que :

$$e_k = x_k - \hat{x}_k^- - K_k (y_k - C_d \hat{x}_k^- - D u_k - v_k) \quad (\text{B.27})$$

$$= (I_n - K_k C_d) (x_k - \hat{x}_k^-) + K_k v_k \quad (\text{B.28})$$

Ensuite, nous pouvons écrire l'expression de la matrice de covariance de l'erreur :

$$P_k = (I_n - K_k C_d) \hat{P}_k^- (I_n - K_k C_d)^T + K_k v_k K_k^T \quad (\text{B.29})$$

Après avoir développé les termes et avoir dérivé l'équation (B.29), nous pouvons donner l'expression du gain du filtre de Kalman dans le cas discret (équation (B.30))

$$K_k = \hat{P}_k^- C_d^T \left(C_d \hat{P}_k^- C_d^T + V_d \right) \quad (\text{B.30})$$

C Calculs des matrices discrètes du système à une dimension

Dans cette section, nous présentons les calculs nécessaires pour réaliser le passage des matrices de notre système définies en temps continu vers celles définies en temps discret. Ces calculs sont valables pour la réalisation de la double intégration temporelle de l'accélération. Nous développerons l'exponentielle au premier ordre tout d'abord avant de refaire les calculs pour le second ordre.

C.1 Développement au premier ordre

Le développement de l'exponentielle au premier ordre prend la forme (C.1).

$$e^{A dt} = I + A dt + \mathbf{O}(dt^2) \quad (\text{C.1})$$

Dans la section 2, nous avons donné les équations qui permettent de passer d'une description continue d'un système à sa description discrétisée. Ce passage est réalisé au moyen des équations (2.20). Remplaçant l'expression (C.1) dans ces dernières, nous obtenons les expressions suivantes :

$$A_d = I + A dt \quad (\text{C.2})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & dt & 0 \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$B_d = \int_0^{dt} (B \tau + A \tau B) d\tau \quad (\text{C.4})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{dt^2}{2} \\ dt \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$C_d = C \quad (\text{C.6})$$

Ensuite, nous rappelons la forme du bruit de processus dans le cas discret, explicitée par la relation (2.27). Si on fait l'hypothèse que les incertitudes sur les valeurs du vecteur d'état sont indépendantes et de densité spectrale de puissance égale à q , alors on peut écrire $Q = M W M^T$ dans laquelle la matrice M est la matrice qui multiplie l'incertitude w_k associée à l'entrée du système.

Il vient ainsi :

$$W_d = \int_0^{dt} (I + A \tau) Q (I + A \tau)^T d\tau \quad (C.7)$$

$$= Q dt + (Q A^T + A Q) \frac{dt^2}{2} + A Q A^T \frac{dt^3}{3} \quad (C.8)$$

$$= q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dt^3}{3} & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & \frac{dt^2}{2} & dt \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

C.2 Développement au deuxième ordre

De manière analogue à la section précédente, nous allons définir l'expression de l'exponentielle matricielle au second ordre d'abord. Ensuite nous évaluerons les matrices du système discret.

$$e^{A dt} = I + A dt + \frac{(A dt)^2}{2!} + \mathbf{O}(dt^3) \quad (C.10)$$

Il vient ainsi :

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & dt & \frac{dt^2}{2} \\ 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.11)$$

$$B_d = B dt + A B \frac{dt^2}{2} + A^2 \frac{dt^3}{6} \quad (C.12)$$

$$C_d = C \quad (C.13)$$

Ces expressions ont bien un sens physique, elles sont identiques aux équations données dans la section 3.2.1 qui correspondent bien à la signification physique résultant de la double intégration de l'accélération. Ensuite, nous détaillons le calcul de la matrice de covariance des bruits de processus. Les hypothèses faites dans la section précédente demeurent identiques.

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} W_d &= \int_0^{dt} \left(I + A \tau + \frac{A^2 \tau^2}{2} \right) Q \left(I + A^T \tau + \frac{(A^T)^2 \tau^2}{2} \right) d\tau \\ &= Q dt + [A Q + Q A^T] \frac{dt^2}{2} + \left[\frac{Q (A^T)^2}{2} + A Q A^T + \frac{A^2 Q}{2} \right] \frac{dt^3}{3} \\ &\quad + \left[A Q (A^T)^2 + A^2 Q A^T \right] \frac{dt^4}{8} + A^2 Q (A^T)^2 \frac{dt^5}{20} \end{aligned}$$

Dans notre cas, l'expression précédente permet d'obtenir une matrice de covariance des bruits de processus donnée par l'expression C.14

$$Q_d = q \begin{pmatrix} \frac{dt^5}{20} & \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{6} \\ \frac{dt^4}{8} & \frac{dt^3}{3} & \frac{dt^2}{2} \\ \frac{dt^3}{6} & \frac{dt^2}{2} & dt \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

On peut noter que cette matrice est la même que celle proposée par l'article [2].

D Listing des différentes fonctions utilisées

D.1 Kalman avec mesure GPS

Dans le cas basique où la mesure par GPS est disponible, les équations dans *Matlab* du filtre de Kalman sont les suivantes :

```
f_s = 200;% en Hz fréquence d'échantillonnage
dt = 1/f_s;% pas de temps
t_fin = 20;
t = [0 : dt : t_fin]; % intervalle de temps

f_sig = 0.8; % fréquence du signal supposé
T = 1/f_sig;
omega = 2*pi*f_sig;
% Cas 1 signaux déphasés
%Y=-9*sin(omega*(t-0.15));

% Cas2 signaux en phase
s_Y = sin(omega*t);
v_Y = omega*cos(omega*t);
Y = -omega^2*sin(omega*t);
g = 9.81;

% Caractéristiques des accéléromètres
BW = 100; % bande passante du signal d'accélération (100 Hz)

% Dans le cas de l'accéléromètres 1.7g bi-axes
ND = 110;% densité spectrale du bruit de mesure
RMS_noise = ND*sqrt(BW*1.6)*1e-3; % Moyenne quadratique du bruit
snr = 20*log(0.7*g/(2*RMS_noise));

% Conditions initiales (déterminées de manière libre : leurs effets sont
    annulés par le filtre)
xk = [0;0];
Pk = 100*eye(2);

%Caractéristiques maximales et moyennes de l'accélération
Y_max = max(Y);
Y_mean = mean(Y);

% Stockage des signaux non bruités
Y_wn = Y;
s_Y_wn = s_Y;

% Bruitage des signaux
% measured est à placer entre ''
```

```

s_Y = awgn(s_Y,snr, measured);
Y = awgn(Y,snr, measured );

% Définition du système considéré comme :
% \dot{x} = A*x + B*u+w;
% y = C*x + D*u + v;
A = [1      dt;
      0      1];

B = [dt^2/2;
      dt];

C = [ 1      0];
% D = 1;

% Matrice des erreurs statistiques
% R et Q sont supposés être des bruits blancs gaussiens
q=10;
QN = q*[dt^3/3 dt^2/2;
        dt^2/2 dt];

R = ND*1e-6;
RN = R/dt;
for s = 1:size(t,2),
    uk = Y(s);
    xk_minus = A*xk + B*uk;
    Pkminus = A*Pk*transp(A) + QN;
    Kk = Pkminus*transp(C)*inv(C*Pkminus*transp(C) + RN);
    zk = s_Y(s);
    ek_minus(s) = zk - C*xk_minus;
    xk = xk_minus + Kk*( zk - C*xk_minus);
    Pk = (eye(2) - Kk*C)*Pkminus*transp(eye(2) - Kk*C) + Kk*R*transp(Kk);

    % Stockage des valeurs du filtre pour observer l'évolution des calculs
    % sur graphiques
    v_dot(s) = xk(2);
    v(s) = xk(1);
end

```

D.2 Utilisation de la fonction «Mean window by window»

Nous allons détailler les boucles de contrôle qui ont été implémenté pour moyenner le signal dans la section traitant du filtre de Kalman à une dimension. Ces deux boucles s'insèrent directement dans le code du filtre de Kalman.

D.2.1 Première boucle

```
if s == k*nb_pt + k1*nb_pt_1,
    L_min = (k - 1)*nb_pt + 1;
    L_max = s;
    % Le mode plot ou no_plot est à placer entre ''
    [v_dot(L_min:L_max),tendency,mean_tendency] = mwbw(v_dot(L_min:L_max)
        ),nbwindow, no_plot);
    % Numériquement la condition ne fonctionne pas
    if abs(tendency(1,1) - tendency(1,2)) < 0.1*tendency(1,1),
        v_dot(L_min:L_max) = v_dot(L_min:L_max) - mean_tendency;

        cst = [1:(L_max - L_min)+1];
        cst = mean_tendency.*cst*dt;

        v(L_min:L_max) = v(L_min:L_max) - cst;

        xk(1) = v(s);
        xk(2) = v_dot(s);
        % k est le plus grand entier proche
        k = ceil(L_max / (k*nb_pt));
    else
        k1 = k1+1;
    end
end
```

D.2.2 Seconde boucle

```
if s == k*nb + k1*nb_pt
    L_min = (k-1)*nb + 1;
    L_max = k*nb + k1*nb_pt;
    % Le mode plot ou no_plot est à placer entre ''
    [v_dot(L_min:L_max),tendency,mean_tendency] = mean_window_by_window(
        v_dot(L_min:L_max),nbwindow, no_plot);
    v_dot_corr = v_dot(L_min:L_max) - mean_tendency;
    if abs(mean(v_dot_corr)) > 1e-5
        k1 = k1 + 1;
    else
        cst=[0 : (L_max - L_min)].*mean_tendency*dt;
        mean(v_dot_corr)
        tendency;
        pause
        v(L_min:L_max) = v(L_min:L_max) - cst;
        k1 = 0;
        k = ceil(L_max / (k*nb_pt));
        v_dot(L_min:L_max) = v_dot_corr;
```

```

        xk(2) = v_dot(L_max);
        xk(1) = v(L_max);

    end
end

```

D.3 Fonction «Mean square»

D.4 Définition de la fonction

```

function [meanmin,erreurmin] = mean_square(signal,i_inter)

N = length(signal);

%%% Définition arbitraire des variables avant la boucle.
%valeur finale de la moyenne
meanmin = max(signal);
%moyenne initiale
moyenne = 0;
moyenne_bar = mean(signal);
%erreur de départ.
erreurmin = 500000;

%% la recherche du carré de la valeur RMS du signal
% par un carré terme à terme.
signal_RMS = signal.^2;

%i permet d'itérer
i = floor(N/2);
j = 0;
%%Tant que l'on est dans le domaine
while (i <= N)
    signal_etudie = signal(1:i);
    moyenne = mean(signal_etudie);

    %Calcul de  $v^2_{AC}$  sur l'intervalle considéré.
    residu = (signal_{etudie} - moyenne*ones(1,i)).^2;

    v_RMS = mean(signal_RMS(1:i));
    v_AC = mean(residu);
    alternative(i) = v_AC;

    erreur = abs(-v_AC + v_RMS - moyenne^2);
    %on trouve une valeur plus proche que celle déjà trouvée, et qui est
    %plausible.

```

```

    if (erreur <= erreurmin) && erreur ~= 0 && (abs(moyenne) < abs(1.5*
        moyenne_bar) && abs(moyenne) > abs(0.5*moyenne_bar))
        j = j+1;
        meanmin = moyenne;
        plot_m(j) = meanmin;
        i_min = i;

        erreurmin = erreur;
    end
    i = i + i_inter;
end

```

D.4.1 Utilisation de la fonction pour l'accélération à une dimension

Le filtre présenté ci-dessous diffère du filtre de Kalman avec mesure GPS par l'acquisition des données (simulations sous *Samcef Field*) et par l'utilisation de la fonction «Mean Square». Il est plus intéressant de montrer l'utilisation de cette fonction dans le code du filtre. Nous n'illustrerons donc que la boucle principale du fichier.

```

% Filtre de Kalman à une dimension avec correction du biais /erreur
% initiale
% Simulation du mouvement par Samcef field

% Définition des systèmes : comme il s'agit à chaque fois d'une simple
% intégration, les matrices des équations d'état sont les memes. Pour
% rappel  $\dot{x} = A x + B u + M w$  et pour l'observation
%  $y = C x + D u + N v$ 

A = [1,      dt, 1/2*dt^2;
     0,      1,      dt;
     0,      0,      1];

C = [ 0 0 1];

% Matrices de covariance des bruits
q = 10;
QN = q*[1/20*dt^5      1/8*dt^4      1/6*dt^3;
        1/8*dt^4      1/3*dt^3      1/2*dt^2;
        1/6*dt^3      1/2*dt^2      dt];

R=ND*1e-6;
RN=R/dt;

% Conditions initiales
xk = [0;0;0];
Pk = 100*eye(3);

```



```

% Signal d'observation
zk = Y_corr;

% Initialisation du <<compteur de correction>>
k = 1;
r = 0;
nb_pt = 800;

% Définition des paramètres de la fonction mean_square
i_inter = 10;

% Boucle du filtre
for s = 1:length(Y_corr)
    % 1. Prédiction de l'état
    xk_minus = A*xk;
    Pkminus = A*Pk*transp(A) + QN;

    % 2. Gain du filtre de Kalman
    Kk = Pkminus*transp(C)*inv(C*Pkminus*transp(C) + RN);
    ekminus = zk(s) - C*xk_minus;

    % 3. Correction de l'état
    xk = xk_minus + Kk*(ekminus);
    Pk = (eye(3) - Kk*C)*Pkminus*transp(eye(3) - Kk*C) + Kk*RN*transp(Kk);

    v(s) = xk(1);
    v_dot(s) = xk(2);
    a(s) = xk(3);

    % Appel à la fonction Mean Square
    if (s == k*nb_pt)
        L_min = (k-1)*nb_pt+1;
        L_max = k*nb_pt;
        % Calcul de la moyenne
        [mean_v_dot, erreur] = mean_square(v_dot(L_min:L_max), i_inter);
        % Correction de la vitesse
        v_dot(L_min:L_max) = v_dot(L_min:L_max) - mean_v_dot*ones(1, nb_pt);

        % Correction de la position
        cst = [1:nb_pt];
        cst = mean_v_dot.*cst*dt;
        v(L_min:L_max) = v(L_min:L_max) - cst;

        % Modification des éléments du vecteur d'état
        xk(1) = v(L_max);
        xk(2) = v_dot(L_max);

```

```

    % Passe à l'intervalle suivant
    k = k+1;
end
end

% Moyenne la position à l'issue du filtre de Kalman
mean_v_2 = mean(v);
v = v + pos_real(1)+ mean_v_2

```

D.5 Filtre de Kalman non linéaire

Pour illustrer le filtre de Kalman en non linéaire, nous présentons le code associé au traitement des simulations issues du logiciel *Samcef Field*. L'acquisition des données n'est pas non plus illustrer, nous préférons de nouveau nous intéresser à la modification du filtre.

```

% Filtre de Kalman incluant la cinématique du câble

% Matrice d'état du système

Zero = 0*eye(3);

A = [1,      dt, 1/2*dt^2;
     0,      1,   dt;
     0,      0,   1];

A_tot = [A Zero;
         Zero A];

% Matrices de covariance des bruits
% 1. Bruits d'état
q = 10;
QN = q*[1/20*dt^5      1/8*dt^4      1/6*dt^3;
        1/8*dt^4      1/3*dt^3      1/2*dt^2;
        1/6*dt^3      1/2*dt^2      dt];

Q_tot = [QN Zero;
         Zero QN];

% 2. Bruits de mesures
% Densité spectrale du bruit de mesures
ND = 110; % Donnée issue des data sheet des accéléromètres biaxes à 1.7g
R=ND*1e-6*eye(2);
RN=R/dt;

% Conditions initiales
xk = 0*ones(6,1);

```

```

Pk = 100*eye(6);
% Observation du système
zk = [A_2; A_3];
% Définition des grandeurs pour la fonction Mean Square
nb_pt = 800;
i_inter = 5;
k = 1;
% Boucle de calcul du filtre de Kalman
for s = 1:length(A_1)

    phi2_k = xk(3);
    phi1_k = xk(2);
    phi_k = xk(1);
    z_ddot = xk(6);

    % Matrice d'observation linéarisée
    C_l = [b*phi1_k^2 2*b*phi_k*phi1_k b 0 0 0;
           0 0 0 0 0 1];

    % Accélérations A_2 et A_1 évaluées par la relation non linéaire
    C_n1 = [b*phi1_k^2*sin(phi_k)+b*phi2_k*cos(phi_k);
            z_ddot];

    % Filtre de Kalman
    % 1. Prédiction de l'état du système
    xk_minus = A_tot*xk;
    Pkminus = A_tot*Pk*transp(A_tot) + Q_tot;

    % 2. Gain du filtre de Kalman
    Kk = Pkminus*transp(C_l)*inv(C_l*Pkminus*transp(C_l) + RN);
    ekminus = zk(:,s) - C_n1;

    % 3. Correction de l'état du système
    xk = xk_minus + Kk*(ekminus);
    Pk = (eye(6) - Kk*C_l)*Pkminus;

    % Extraction des grandeurs liées au vecteur d'état du système
    phi(s) = xk(1);
    phi_dot(s) = xk(2);
    phi_ddot(s) = xk(3);

    % Evolution des positions
    x_2(s) = - b * sin(phi(s));
    x_3(s) = xk(4);

    % Evolution des vitesses dans le repère lié au point
    x_dot_2(s) = b * phi_dot(s) * cos(phi(s));

```

```

x_dot_3(s) = xk(5);

% Recalcul de l'accélération linéaire sur base de phi
A_2_r(s) = b * sin(phi(s))*phi_dot(s)^2 + b*xk(3)*cos(phi(s));
A_3_r(s) = xk(6);

% Moyenne sur la position verticale à éliminer par la fonction mean
sqaure
if (s == k*nb_pt)
    L_min = (k-1)*nb_pt+1;
    L_max = k*nb_pt;
    % Détermination de l'offset
    [mean_x_dot,erreur] = mean_square(x_dot_3(L_min:L_max),i_inter);
    % Correction de la vitesse
    x_dot_3(L_min:L_max) = x_dot_3(L_min:L_max) - mean_x_dot*ones(1,
        nb_pt);

    cst = [1:nb_pt];
    cst = mean_x_dot.*cst*dt;
    % Correction de la position
    x_3(L_min:L_max) = x_3(L_min:L_max) - cst;
    % Correction des grandeurs pour le filtre de Kalman
    xk(4) = x_3(L_max);
    xk(5) = x_dot_3(L_max);
    % Passe à l'intervalle suivant
    k = k+1;
end
end
end

```

Références

- [1] Site internet de wikipédia. Adresse internet : [http ://fr.wikipedia.org/](http://fr.wikipedia.org/).
- [2] Cheok A., Kumar K., and Prince S. Micro-accelerometer based hardware interfaces for wearable computer mixed reality applications.
- [3] Smyth A. and Wu M. Multi-rate Kalman filtering for the data fusion of displacement and acceleration response measurements in dynamic system monitoring. *Mechanical systems and signal processing*, 2007.
- [4] Team ampacimon. Overhead power lines real time monitoring : a future trend ? *Elektriciteit, sleutelproduct*, 2005.
- [5] Analog devices. *Datasheet accelerometer Analog devices (1.7g and 5g)*.
- [6] Broxmeyer C. *Inertial navigation systems*. McGraw-Hill Book Company, 1964.
- [7] Alazard D. Une introduction au filtre de Kalman. Notes de cours disponibles à l'adresse internet : [http : //personnel.supaero.fr/alazard – daniel/Pdf/cours_Kalman.pdf](http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/Pdf/cours_Kalman.pdf), 2005.
- [8] Goodman D. and Yates R. *Probability and stochastic processes*. Wiley and sons, 1998.
- [9] Delhez E.J.M. *Mécanique rationnelle – Théorie et Applications*. Etienne Riga, 2003.
- [10] LeGland F. Introduction au filtrage en temps discret : Filtre de Kalman, filtrage particulaire et modèles de Markov cachés. Master's thesis, Université de Rennes 1, 2006.
- [11] Hovland G., von Hoff T., Gallestey E., Antoine M., Farruggio D., and Paice A. Nonlinear estimation methods for parameter tracking in power plants. *Journal of power sources*, 2005.
- [12] Luinge H. Inertial sensing of human movement. Master's thesis, University of Twente, 2002.
- [13] Luinge H. and Veltink P. Measuring orientation of human body segments using miniature gyroscopes and accelerometers. *Medical and biological Engineering and Computing*, 2005.
- [14] Zhou J. and Luecke R. Estimation of the covariances of the process noise and measurement noise for a linear discrete dynamic system. *Computers chemical engineering*, 1994.
- [15] King K., Yoon S., Perkins N., and Najatafi. Wireless MEMS inertial sensor system for golf swing dynamics. *Sensors and Actuators*, 2007.
- [16] Wehenkel L. Introduction aux processus stochastiques. Notes de cours disponibles à l'adresse internet : [http ://www.montefiore.ulg.ac.be/ lwh/ProcStoch/](http://www.montefiore.ulg.ac.be/lwh/ProcStoch/), 2008.
- [17] Valenza M., Pascal F., and Hoffman A. Bruit de fond et mesures – Aspects théoriques. *Sciences et techniques de l'ingénieur*, 2008.

- [18] Mathworks. Site internet de MATWORKS, www.mathworks.com. Internet.
- [19] M.Irvine. *Cable structure*. 1981.
- [20] Bonnet-Torres O. Filtrage de Kalman appliqué à la navigation inertielle. 2003.
- [21] Léonard O. Diagnostique thermodynamique de turbines à gaz. Notes de cours.
- [22] Woodman O. An introduction to inertial navigation. Technical report, University of Cambridge, 2007.
- [23] Dewallef P. Application of the kalman filter to health monitoring of gas turbine engines. A sequential approach to robust diagnosis. Master's thesis, Université de Liège, 2005.
- [24] Dewallef P. and Léonard O. On-line measurement validation and performance monitoring using robust Kalman filtering techniques. In *Proceedings of the 5th European Conference on Tubomachinery*, 2003.
- [25] Vanderbemden P. *Analyse et conception des systèmes de mesures électriques – Théorie*. Centrale des cours de l'AEES, 2008.
- [26] Sepulchre R. *Modélisation et analyse des systèmes*. Centrale des Cours de l'AEES, asbl, 2005.
- [27] Haykin S. *An introduction to analog and digital communications*. Wiley and sons, 1989.
- [28] Julier S. and Uhlmann. A new extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems. In *In Proceedings of aerosens : the 11th international symposium on aerospace/defense sensing, simulation and control*, 2000.
- [29] Scapellato S., Cavallo F., Martelloni C., and Sabatini A. In-use calibration of body-mounted gyroscopes for applications in gait analysis. *Sensors and actuators*, 2005.
- [30] Åström K. and Murray R. *Feedback Systems : An Introduction for Scientists and Engineers*.
- [31] G. Welch and G.Bishop. An introduction to the Kalman filter. 2006.



2007 - 2008

