Seminar 5 – Completări inele și corpuri

Lema chineză a resturilor

(1) Fie R un inel comutativ și I, J ideale ale lui R.

(a) Aplicația $R/(I \cap J) \to R/I \times R/J$ dată de $\varphi(r) = (r + I, r + J), \forall r \in R$ este injectivă.

(b) Idealele I și J se numesc *coprime* (sau *comaximale*) dacă $I + J = R$. Dacă I și J sînt coprime, atunci morfismul de mai sus este și surjectiv. (Indicație: $1 = a + b, a \in I, b \in J$. Atunci pentru orice $r, s \in R, (d + I, d + J) = (r + I, s + J) \in R/I \times R/J$, unde $d = ra + sb$.)

(2) *Generalizare*: Fie R un inel comutativ și $I_1, I_2, \dots, I_n$ ideale în R. Considerăm morfismul de inele $\varphi : R \to R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_n$ definit ca proiecția canonică:

$$\varphi(x) = (x + I_1, x + I_2, \dots, x + I_n).$$

Atunci:

(a) $\mathrm{Ker}\varphi = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$;

(b) φ este surjectiv dacă și numai dacă idealele $I_1, \dots, I_n$ sînt oricare două comaximale, i.e. $I_j + I_k = R, \forall j \neq k$;

(c) Dacă oricare două ideale sînt comaximale, atunci φ induce un izomorfism de inele $R/(I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n) \xrightarrow{\sim} R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_n$.

(3) Suplimentar: Dacă I și J sînt ideale coprime, atunci $I \cap J = IJ$.

(4) Arătați că, dacă P este un ideal prim al inelului R, atunci nu există două ideale I, J ale lui R, cu $P \subsetneq I, J$ și $P = I \cap J$.

Definiţie 1: Fie R un inel. Un ideal M se numește *maximal* dacă oricînd există un alt ideal I al lui R astfel încît $M \subseteq I \subseteq R$, rezultă fie $M = I$, fie $I = R$.

Teoremă 1: *Idealul M al inelului R este maximal dacă și numai dacă R/M este corp.*

(5) Determinați idealele maximale ale inelelor $\mathbb{Z}$ și $\Bbbk[X]$.

(6) Determinați idealele prime și idealele maximale ale inelului $\mathbb{Z}_n$.

(7) Arătați că idealul $M = \{a + bi \in \mathbb{Z}[i] \mid a = 3k, b = 3q, k, q \in \mathbb{Z}\}$ este maximal.

(8) Fie R, S două inele. Definim *inelul produs direct* $R \times S$ avînd ca mulțime subiacentă produsul cartezian $R \times S$, iar operațiile, definite pe componente:

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s'), \qquad (r, s) \cdot (r', s') = (rr', ss'), \forall r, r' \in R, s, s' \in S.$$

Arătați că inelul comutativ R se poate scrie ca produs direct de două inele dacă și numai dacă conține un element idempotent e diferit de 0 și 1. (Indicație: $R \simeq Re \times R(1 - e)$).

(9) Orice ideal maximal este prim. Reciproc, fals: Fie $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Atunci $I = \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$ este prim, dar nu este maximal.

(10) Arătați că $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 1) \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, dar că $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1) \not\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (Indicație: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ conține elemente idempotente nenule, nu și $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1)$).