ŞIRURI DE FUNCŢII

$f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Def 1 Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplu** (punctual) ~~dacă~~ pe mulţimea $A \subseteq D$ dacă $\forall x \in A$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$

Notaţie $\forall x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=\!=} f(x)$.

$f : A \to \mathbb{R}$

f este funcţia limitei sau limita şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$f_n \xrightarrow[A]{s} f$ Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu la funcţia limită f pe A.

OBS! $f_n \xrightarrow[A]{s} f \iff \forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon,x}$ (def cu ε)

Def 2 Spunem că şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniform** la funcţia $f : A \subseteq D \to \mathbb{R}$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in A$.

Notaţie $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la funcţia f pe A.

OBS! $f_n \xrightarrow[A]{u} f \Longrightarrow f_n \xrightarrow[A]{s} f$

$\cancel{\Longleftarrow}$

CRITERIUL PRACTIC DE CONVERGENŢĂ UNIFORMĂ pt un şir de funcţii

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi o funcţie $f : A \subseteq D \to \mathbb{R}$. Urm. af. sunt echivalente:

a) $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

TEOREMĂ!

TEOREMA LUI WEIERSTRASS PT. ȘIRURI DE FUNCȚII

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții continue, $f_n : D\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și o funcție $f : A\subseteq D\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Atunci f este continuă A.

Dem Fie $x_0\in A$.

$f_n \xrightarrow[A]{u} f \Longrightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $\forall\, n\geq n_\varepsilon$ $\forall\, x\in A. \xrightarrow{n=n_\varepsilon} |f_{n_\varepsilon}(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall\, x\in A.$ (1)

f_{n_ε} continuă în $x_0 \Longrightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0$ ~~a.î. $|f_{n_\varepsilon}(x)-f_{n_\varepsilon}(x_0)|$~~ a.î. $|f_{n_\varepsilon}(x)-f_{n_\varepsilon}(x_0)|<\varepsilon$ $\forall\, x\in D$ cu $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$. (2)

$|f(x)-f(x_0)| = \cancel{|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)+f_{n_\varepsilon}(x)-f_{n_\varepsilon}(x_0)+f_{n_\varepsilon}(x_0)}$

$|a+b|<|a|+|b|$

$= |(f(x)-f_{n_\varepsilon}(x))+(f_{n_\varepsilon}(x)-f_{n_\varepsilon}(x_0))+(f_{n_\varepsilon}(x_0)-f(x_0))| \leq$

$$\leq \underbrace{|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|}_{\overset{(1)}{<}\varepsilon} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x)-f_{n_\varepsilon}(x_0)|}_{\substack{\overset{(2)}{<}\varepsilon \\ |x-x_0|<\delta_\varepsilon \\ \text{(restricție)}}} + \underbrace{|f_{n_\varepsilon}(x_0)-f(x_0)|}_{\overset{(1)}{<}\varepsilon}$$

$< 3\varepsilon\ \ \forall\, x\in A$ cu $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$.

Concl: $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta_\varepsilon$ a.î. $|f(x)-f(x_0)|<3\varepsilon\ \ \forall\, x\in A$ cu $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$.

$\Longrightarrow f$ este continuă în x_0. $\Longrightarrow f$ este continuă pe A.

COROLAR!

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții continue, $f_n : D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ și $f : A\subseteq D\to\mathbb{R}$ o funcție a.î. $f_n \xrightarrow[A]{s} f$. Dacă $\exists\, x_0\in A$ astfel încât f nu este continuă în x_0, atunci f nu e continuă pe A, adică $f_n \not\xrightarrow[A]{u} f$.

(condiție suficientă ca o conv. simplă să nu fie uniformă)

(ex) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Studiați convergența.
$f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Fie $x \in [0,1]$

Calculăm $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$A = \{x \in D \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} = [0,1]$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$.

(Pt conv. unif. verif. continuitatea funcțiilor f_n. Apoi verificăm funcția limită dacă e continuă peste tot, apoi aplicăm COROLARUL)

f_n funcție continuă pe $[0,1]$, $\forall x \in \mathbb{N}^*$

f este continuă pe $[0,1)$, dar f nu e continuă în $x=1$.

$\Rightarrow$ funcția limită nu e continuă peste tot.

$\Longrightarrow f_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\longrightarrow}} f$.

$\boxed{\text{COND. SUF. CA O CONV. SIMPLĂ SĂ DEVINĂ UNIFORMĂ}}$

! TEOREMA LUI DINI

Fie $K \subseteq \mathbb{R}$ mulț. compactă în $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții continue pe K.

$f_n : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și o funcție $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.
continuă

$f_n \xrightarrow[K]{s} f$

Dacă $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_{n+1} \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$,
atunci $f_n \xrightarrow[K]{u} f$.

! TEOREMA LUI POLYA

Fie $K \subseteq \mathbb{R}$ mulțime compactă, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții monotone pe K, $f_n : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ și $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe K a.î. $f_n \xrightarrow[K]{s} f$.

Atunci $f_n \xrightarrow[K]{u} f$.

Normă! Spațiu normat.

Să știm regulile de derivare!

SPAȚII LINIARE (VECTORIALE) NORMATE

X spațiu vectorial (liniar) peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$(x, y) \longrightarrow x + y \in X$

$\alpha \in K, x \in X$

$(\alpha, x) \longrightarrow \alpha \cdot x \in X$

0_X elementul neutru al lui $(X, +)$

Def 1

O funcție $p: X \to \mathbb{R}_+$ se numește $\boxed{\text{normă pe } X}$ dacă îndeplinește următoarele condiții:

$\boxed{a)}$ $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X$.
(p este subaditivă)

$\boxed{b)}$ $p(\alpha, x) = |\alpha| \cdot p(x)$ $\forall \alpha \in K, x \in X$

$\boxed{c)}$ $p(x) = 0 \iff x = 0_X$
(orice normă se anulează doar în vectorul nul)

NOTAȚIE: $p: X \to \mathbb{R}_+$ normă

$p(x) \overset{not}{=} \|x\|$ norma elementului x.

$p \overset{not}{=} \| \ \|$ normă

Def 2 Se numește $\boxed{\text{spațiu liniar normat}}$ orice spațiu liniar real sau complex X pe care se definește cel puțin o normă $\| \ \|: X \to \mathbb{R}_+$

NOTAȚIE $(X, \| \ \|)$ spațiu liniar normat

EX. DE NORME:

1) $| \ |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ normă pe $\mathbb{R}$ (norma uzuală a lui $\mathbb{R}$)
$x \longrightarrow |x|$

2) $k \geq 2$

$\mathbb{R}^k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall 1 \leq i \leq k\}$

norma uzuală $\mathbb{R}^k$ → $\boxed{\| \ \|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+}$, $\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}$

- $\boxed{\| \ \|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+}$, $\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_1 \overset{def}{=} |x_1| + |x_2| + \dots + |x_k|$
- $\boxed{\| \ \|_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+}$, $\|(x_1, \dots, x_k)\|_\infty \overset{def}{=} \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\}$

$p \in [1, +\infty)$

$\| \ \|_p : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_+$

~~$\| \ \|_p$~~ $\|(x_1, x_2, \dots, x_k)\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$

$\|e_1\|_2 = \|(1, 0, 0, \dots 0)\|_2 = \sqrt{1} = 1$

$\|e_2\|_2 = \|(0, 1, 0, \dots, 0)\|_2 = 1$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$\|e_k\|_2 = \|0, 0, \dots\dots, 1)\|_2 = 1$

TEOREMA 1 (esențială!)

Orice spațiu liniar normat este spațiu metric.

Reciproca falsă în general.

Dem: ~~$\| \ \| : \mathbb{R}^k$~~

$\| \ \| : X \to \mathbb{R}_+$ norma spațiului X.

Definim $d_{\| \|} : X \times X \to \mathbb{R}_+$.

$$d_{\| \|}(x, y) \stackrel{def}{=} \|x - y\|$$

- $d_{\| \|}(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)\cdot(y - x)\| =$
$= |(-1)| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|.$
$= d_{\| \|}(y, x) \quad \forall x, y \in X.$

- $d_{\| \|}(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$
$= \|(x - z) + (z - y)\|$
$\|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$
$d_{\| \|}(x, y) \leq d_{\| \|}(x, z) + d_{\| \|}(z, y) \quad \forall x, y, z \in X.$

- $d_{\| \|}(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0_X \iff x = y$

Funcția $d_{\| \|}$ este distanța pe X.

$\Longrightarrow (X, d_{\| \|})$ este spațiu metric.

Obs! $\| \ \| \longrightarrow d_{\| \|} \longrightarrow \tau_{d_{\| \|}} \stackrel{not}{=} \tau_{\| \|}$

normă $\longrightarrow$ distanță $\longrightarrow$ topologie

$d_{\| \|}$ = dist. generată de norma $\| \ \|$

$\tau_{\| \|}$ = topologia generată de norma $\| \ \|$.

OBS! $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $(X, \| \ \|)$

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X \iff \exists \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$

șirul normelor

OBS! $f: D \subseteq (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$

$x_0 \in D \cap D'$ (punct de acumulare al lui D, din D)

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in Y \iff \exists \lim\limits_{x\to x_0} \|f(x) - l\|_Y = 0$

Def 3 O funcție $T: (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ se numește $\boxed{\text{aplicație liniară}}$ (operator liniar) dacă îndeplinește următoarele condiții:

$\boxed{(a)}$ $T(x+y) = T(x) + T(y) \quad \forall\, x, y \in X$

(T este aditivă)

$\boxed{(b)}$ $T(\alpha, x) = \alpha \cdot T(x) \quad \forall\, \alpha \in K, \ \forall\, x \in X.$

(funcție liniară; scoate scalarul fără modul)

Obs! 1) $T: (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ este aplicație liniară $\iff \boxed{T(\alpha\cdot x + \beta\cdot y) = \alpha\cdot T(x) + \beta\cdot T(y)}$

$\forall\, \alpha, \beta \in K$

$\forall\, x, y \in X.$

2) Dacă T este aplicație liniară

$\Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} T(0_X) = 0_Y \\ T(-x) = -T(x) \end{array}} \quad \forall\, x \in X.$

! TEOREMA DE CARACTERIZARE A CONTINUITĂȚII UNOR APLICAȚII LINIARE

O aplicație liniară $T: (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ este continuă pe $X \iff \exists\, c > 0$ a.î. $\|T(x)\|_Y \le c \cdot \|x\|_X \ \forall x \in X$

NOTAȚIE $\mathcal{L}(X, Y) \overset{def}{=} \{T: (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y) \mid T$ aplicație liniară și continuă de la X la $Y\}$

FORMA APLICAȚIILOR LINIARE

$T : (\mathbb{R}^k, \| \|_2) \to (\mathbb{R}^p, \| \|_2)$

1) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ aplicație liniară $\Longleftrightarrow$

$(\exists!)\ (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ a.î.

$T(x) = x \cdot (a_1, \dots, a_p)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

2) $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ aplicație liniară $\Longleftrightarrow$

$(\exists!)\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ a.î. ~~$T(x_1, x_2, \dots, x_k)$~~

$T(x_1, x_2, \dots, x_k) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k \quad \forall (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^k$

$\to T(1) = (a_1, \dots, a_p)$

$\alpha_1 = T(e_1)$; $\alpha_2 = T(e_2)$; ... $\alpha_k = T(e_k)$

3) $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ ($k, p \geq 2$) aplicații liniare $\Longleftrightarrow$

$(\exists!)\ A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ a.î.

$T(x_1, \dots, x_k) = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \right]^t$ = o matrice cu p linii și o coloană

$= \forall (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

! TEOREMA 2

Orice aplicație liniară $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este continuă pe $\mathbb{R}^k$

FUNCȚII DERIVABILE

$(X, \| \|_X)$ spațiu liniar normat

Def 1 O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \|_X)$ este $\boxed{\text{derivabilă}}$ în $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\boxed{\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \in X}$

NOTAȚIE $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \stackrel{not}{=} f'(x_0) \in X$ derivata funcției f în x_0.

Def 2

O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|_X)$ este $\boxed{\text{derivabilă}}$ dacă este derivabilă în orice punct din $D \cap D'$.

! TEOREMA DE LEGATURĂ

Orice funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|_X)$ derivabilă într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ este continuă în x_0.

Dem f derivabilă în $x_0 \iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) =$

$= f'(x_0) \in X. \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to x_0} \left\| \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0) \right\|_X = 0}$ (1)

$$\| f(x) - f(x_0) \| = \left\| (x - x_0) \cdot \frac{1}{(x - x_0)} \cdot (f(x) - f(x_0)) \right\| =$$

$$\cancel{= \frac{1}{x - x_0} \cdot \| (x - x_0) \cdot f(x) - f}$$

$$= | x - x_0 | \cdot \left\| \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \right\| =$$

$$= | x - x_0 | \cdot \left\| \left[\frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0) \right] + f'(x_0) \right\| \leq$$

$$\leq | x - x_0 | \left(\left\| \frac{1}{x - x_0} \cdot f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \right\| + \| f'(x_0) \| \right)$$

$\forall x \in D, x \neq x_0$

$$0 \leq \| f(x) - f(x_0) \| \leq \underbrace{|x - x_0|}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} \left(\underbrace{\| f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \|}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} + \| f'(x_0) \| \right)$$

$\forall x \in D, x \neq x_0$

$0 \xrightarrow{x \to x_0} 0$, $\quad \| f(x) - f(x_0) \| \to 0$, $\quad |x - x_0| \left(\ldots \right) \xrightarrow{x \to x_0} 0$

$\Rightarrow f$ este continuă în x_0.

Funcții derivabile

Def 1

(a) O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \|_X)$ este derivabilă la stânga în $x_0 \in \mathring{D}$ dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \in X$

(b) O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \|_X)$ este derivabilă la dreapta în $x_0 \in \mathring{D}$ dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{x - x_0} \cdot (f(x) - f(x_0)) \in X$

Notații

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=\!=} f_s'(x_0) \in X$ derivata la stânga a funcției f în x_0

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=\!=} f_d'(x_0) \in X$ derivata la dreapta a funcției f în x_0.

OBS!

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \|_X)$ este derivabilă în $x_0 \in \mathring{D} \iff$ f este derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.

TEOREMA 1

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ (funcție vectorială) cu $f_i : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$

Funcția f este derivabilă într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ $\iff$ $f_1, f_2, \dots, f_m$ sunt derivabile în x_0. In plus,

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$$

TEOREMA 2
(OPERAȚII CU FUNCȚII DERIVABILE)

(a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D \cap D'$ a.î. f, g sunt derivabile în x_0 și $\lambda \in \mathbb{R}$.

Atunci $f+g,\ f-g,\ f \cdot g,\ \lambda f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile în x_0 și

$$\boxed{(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)}$$

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

$$\boxed{(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)}$$

Dacă, în plus, $g(x) \neq 0 \ \forall x \in D$, atunci $\frac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

(b) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to D_1 \subseteq \mathbb{R}$ și $g : D_1 \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții, $x_0 \in D \cap D'$ a.î. f este derivabilă în x_0 și $y_0 = f(x_0) \in D_1 \cap D_1'$ a.î. g derivabilă în y_0.

Atunci $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

(c) Fie $I, J \in \mathbb{R}$ două intervale și $f : I \to J$ o funcție bijectivă, strict monotonă pe I și $x_0 \in I \cap I'$ a.î. f este derivabilă în x_0.

Dacă $f'(x_0) \neq 0$, atunci $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ și

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}.$$

Def 2

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$.

(a) x_0 s.n. punct de $\boxed{\text{minim (maxim) local}}$ dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}_\tau(x_0)$ a.î. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall\ x \in D \cap V$

$(f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\ x \in D \cap V)$

(b) x_0 s.n. punct de $\boxed{\text{minim(maxim) global}}$ dacă $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall\ x \in D$ $(f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\ x \in D)$

OBS! global $\longrightarrow$ local

(c) x_0 s.n. $\boxed{\text{punct de extrem local}}$ dacă x_0 este punct de minim local sau punct de maxim local.

(d) x_0 s.n. $\boxed{\text{punct de extrem global}}$ dacă x_0 este punct de minim global sau punct de maxim global.

TEOREMA LUI FERMAT

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ un punct de extrem local al funcției f. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Dem $x_0 \in \overset{\circ}{D} \Longrightarrow \exists\ r_1 > 0$ a.î. $(x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subseteq D$ (1)

Presupunem x_0 punct de maxim local pentru $f \Longrightarrow$

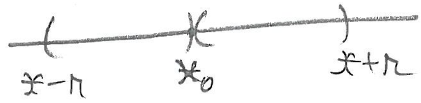
$\Longrightarrow \exists\ V \in \mathcal{V}_\tau(x_0)$ a.î. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\ x \in D \cap V \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\ r_2 > 0$ a.î. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\ x \in D \cap (x_0 - r_2, x_0 + r_2)$ (2)

Fie $r = \min\{r_1, r_2\}$

Din (1) și (2) $\Longrightarrow f(x) \leq f(x_0)$ $\forall\ x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ (3)

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \ \Big|\ \lim\limits_{x \nearrow x_0}$ $\quad \forall\ x \in (x_0 - r, x_0)$



$\Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Longrightarrow f'_s(x_0) \geq 0$

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \ \Big|\ \lim\limits_{x \searrow x_0}$ $\quad \forall\ x \in (x_0, x_0 + r)$

(Derivabilitatea ne asigură că lim există și putem trece la ea)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Longrightarrow f'_d(x_0) \leq 0$

f derivabilă în x_0, $x_0 \in \mathring{D}$ $\Big| \Longrightarrow f'(x_0) = \underset{\geq 0}{f'_s(x_0)} = \underset{\leq 0}{f'_d(x_0)}$

$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$. q.e.d.

Def 3

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Elementul $x_0 \in D \cap D'$ s.n. $\boxed{\text{punct critic}}$ pentru f dacă f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = 0$.

TEOREMA LUI ROLLE

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b), cu $f(a) = f(b)$. Există $c \in (a,b)$ a.î. $f'(c) = 0$.

Dem $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mulțime compactă, f continuă pe $[a,b]$ $\Big\| \Longrightarrow f$ este funcție mărginită și își atinge marginile

$\Longrightarrow \exists\, u, v \in [a,b]$ a.î. $f(u) = \min(f(x))$, $x \in [a,b]$

$f(v) = \max(f(x))$, $x \in [a,b]$

(u minim local, v maxim local)

$\Longrightarrow f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ $\forall\, x \in [a,b]$.

Se disting următoarele cazuri:

Caz 1 $u, v \in \{a, b\}$, $f(a) = f(b)$ $\Big\|$ // u, v în capete

$\Longrightarrow f(u) = f(v) \Longrightarrow \min f(x) = \max f(x)$

$\Longrightarrow f$ este funcție constantă pe $[a,b]$

$\Longrightarrow f$ este funcție constantă pe (a,b)

f derivabilă pe (a,b)

$\Longrightarrow f'(x) = 0$ $\forall\, x \in (a,b)$

Caz 2

$u \in \{a, b\}$

$v \in (a,b) = \mathring{\overline{[a,b]}}$ (1) $\Longrightarrow v$ este punct de maxim global pt f (2)

f derivabilă în v (3)

$(1) + (2) + (3) \xrightarrow{\text{Fermat}} f'(v) = 0$

caz 3 $v \in \{a, b\}$
$u \in (a,b) = \overset{\circ}{[a,b]}$ (1)
u punct de minim global al lui f (2)
f este derivabilă în u (3)
$(1)+(2)+(3) \xRightarrow{\text{Fermat}} f'(u)=0$

caz 4 $u, v \in (a,b) = \overset{\circ}{[a,b]}$ (1)
u, v puncte de extrem global pt f (2)
f este derivabilă în u, v (3)
$(1)+(2)+(3) \xRightarrow{\text{Fermat}} f'(u)=f'(v)=0$

Concluzie: $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

q.e.d.

TEOREMA LUI LAGRANGE

Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe (a,b). Există $c \in (a,b)$ a.î.

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Dem

Se construiește funcția $g:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\alpha x$

g continuă pe $[a,b]$.
g derivabilă pe (a,b)
$g(a)=g(b) \Longrightarrow \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow$ g satisface ipotezele teoremei lui ROLLE

$\xRightarrow{\text{Rolle}} \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $g'(c)=0$

$g'(x) = (f(x)-\alpha x)' = f'(x)-\alpha \quad \forall\, x \in (a,b)$

$\xRightarrow{x:=c,\ c\in(a,b)} g'(c) = f'(c)-\alpha$

$\Rightarrow f'(c)=\alpha \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ q.e.d.

COROLARE LA TEOREMA LUI LAGRANGE

Fie $f : \underset{\text{interval}}{I} \to \mathbb{R}$

1. Dacă f este derivabilă pe I și $f'(x) = 0$ $\forall x \in I$, atunci f este constantă pe I.

2. Dacă f este derivabilă pe I și $\underline{f'(x) > 0}$ $\forall x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.

2.1 ————— " ————— și $\underline{f'(x) \geq 0}$ $\forall x \in I$.
atunci f este crescătoare pe I

2.2 ————— " ————— și $\underline{f'(x) < 0}$ $\forall x \in I$.
atunci f este strict descrescătoare pe I.

2.3 ————— " ————— și $\underline{f'(x) \leq 0}$ $\forall x \in I$.
atunci f este descrescătoare pe I.

3. Fie $x_0 \in I$ a.i. f continuă pe I și f derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$.
Dacă $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$ atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$

TEOREMA LUI DARBOUX

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Pentru orice funcție derivabilă $f: I \to \mathbb{R}$, f' are proprietatea lui Darboux.

Dem Fie $a, b \in I$ și γ un nr real situat între $f'(a)$ și $f'(b)$

Dacă $a = b \Rightarrow \gamma = f'(a) \in \operatorname{Im} f'$.

Presupunem că $a < b$.

Se disting 3 cazuri: 1) $f'(a) = f'(b)$

2) $f'(a) < f'(b)$

3) $f'(a) > f'(b)$

Cazul 1) $f'(a) = f'(b) \Rightarrow \gamma = f'(a) = f'(b) \in \operatorname{Im} f'$

Cazul 2) $f'(a) < f'(b) \Rightarrow \gamma \in [f'(a), f'(b)]$

Fără a restrânge generalizarea, presupun că ~~$f'(a) < f'(b)$~~

$f'(a) < \gamma < f'(b)$.

Fie $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \gamma \cdot x$

g derivabilă pe $[a,b]$.

$g'(x) = f'(x) - \gamma \quad \forall x \in [a,b]$

$g'(a) = f'(a) - \gamma < 0$

$g'(b) = f'(b) - \gamma > 0$

g derivabilă pe $[a,b] \Rightarrow g$ continuă pe $[a,b]$. $\Bigg\| \Rightarrow$

$[a,b]$ mulțime compactă

$\xRightarrow[\text{mulț. compactă}]{\text{Teo.}}$ g mărginită și își atinge maximul

$\Rightarrow \exists\, c, d \in [a,b]$ a.î. $g(c) = \min\limits_{x \in [a,b]} g(x)$

$g(d) = \max\limits_{x \in [a,b]} g(x)$

Demonstrăm prin reducere la absurd că $c \in (a, b)$.

Pp că $c \notin (a,b) \Rightarrow c=a$ sau $c=b$

$\underline{c=a} \Rightarrow g(x) \geq g(a) \ \forall x \in [a,b]$.

$\Rightarrow \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0 \ \forall x \in [a,b] \ \Big| \cdot \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \geq 0 \Rightarrow g'_d(a) = g'(a) \geq 0$ ✗! cu $g'(a)<0$

$\underline{c=b} \Rightarrow g(x) \geq g(b) \ \forall x \in [a,b]$.

$\dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} \leq 0 \ \forall x \in [a,b) \ \Big| \cdot \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} \leq 0 \Rightarrow g'_s(b) = g'(b) \leq 0$ ✗! cu $g'(b)>0$

În concluzie $c \in (a,b) = \overset{\circ}{\overline{[a,b]}}$

c este punct de minim global

g derivabilă în c $\Big| \xrightarrow{\text{TEO. FERMAT}}$

$\Rightarrow g'(c)=0 \Rightarrow f'(c) - \gamma = 0 \Rightarrow f'(c) = \gamma$.

Cazul 3)

$f'(a) > f'(b) \Rightarrow f'(b) < \gamma < f'(a)$

$g:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \gamma x$

$g'(a) = f'(a) - \gamma > 0$

$g'(b) = f'(b) - \gamma < 0$

$g'(x) = f'(x) - \gamma \quad \forall x \in [a,b]$.

Dem prin reducere la absurd că $d \in (a,b)$

Pp că $d \notin (a,b) \Rightarrow d=a$ sau $d=b$

$\underline{d=a} \Rightarrow g(x) \leq g(a) \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq 0 \ \forall x \in (a,b] \ \Big| \cdot \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$

$g'_d(a) = g'(a) \leq 0$ ✗!

$\underline{d=b} \Rightarrow g(x) \le g(b) \quad \forall\ x \in [a,b]$.

$$\Rightarrow \frac{g(x)-g(b)}{x-b} \ge 0 \qquad x \in [a,b) \ \Big|\cdot \lim_{\substack{x \to b \\ x<b}}$$

$$g'_s(b) = g'(b) \ge 0 \quad \cancel{\text{A}} \; !$$

$\longrightarrow d \in (a,b)$

$(a,b) = \mathring{[a,b]}$

d punct de maxim global pt g

g derivabilă în d

$\xrightarrow{\text{Teo Fermat}} g'(d) = 0$

$$f'(d) - \gamma = 0 \Rightarrow f'(d) = \gamma.$$

CONCLUZIE!

γ este valoarea funcției.

$\Rightarrow f'$ are proprietatea lui DARBOUX pe I.

COROLARE LA TEOREMA LUI DARBOUX.

Fie $f: I \subseteq \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I.

1. Dacă $\exists\, a,b \in I$ a.î. $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ există $c \in I$ situat între a și b a.î. $f'(c) = 0$.
2. Dacă $f'(x) \ne 0\ \forall\ x \in I$, atunci $f'(x) > 0\ \forall\ x \in I$ sau $f'(x) < 0\ \forall\ x \in I$.

REGULA LUI L'HOSPITAL (VARIANTA $\frac{0}{0}$)

Fie $f, g : \underset{\text{int.}}{I} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in I' \setminus I$ a.î.

$\boxed{(a)}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

$\boxed{(b)}$ f, g derivabile pe I

$\boxed{(c)}$ $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

! $\boxed{(d)}$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

În aceste condiții $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I$ și

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

REGULA LUI L'HOSPITAL

Fie $f, g : \underset{\text{int}}{I} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in I' \setminus I$ a.î.

modificare → $\boxed{(a)}$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$

$\boxed{(b)}$ f, g derivabile pe I

$\boxed{(c)}$ $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

$\boxed{(d)}$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

modificare

În aceste condiții $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I \cap V$

și $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemplu

Fie $f, g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$
$g(x) = 2x + \sin x$

Calculați $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{2x + \sin x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{\sin x}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\in[-1,1]}}{2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\in[-1,1]}} = \frac{1}{2}$$

g derivabile pe $(1, +\infty)$

$g'(x) = 2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in (1, +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$ NU EXISTĂ!

DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

Def 1 (a) O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă de 2 ori într-un punct $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. f este derivabilă pe $V \cap D$ și $f' : V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.

NOTAȚIE: $(f')'(x_0) \overset{\text{not}}{=\!=} f''(x_0)$ Derivata a 2-a a funcției f în punctul x_0.

(b) O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă de 2 ori pe o mulțime $A \subseteq D \cap D'$ dacă f este derivabilă de 2 ori în toate punctele din A.

(c) O funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 2$ dacă $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ a.î. f este derivabilă de $n-1$ ori pe $V \cap D$

~~$f^{(n-1)}: V \cap D$~~

$f^{(n-1)}: V \cap D \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0.

NOTAȚIE: $(f^{(n-1)})'(x_0) \stackrel{not.}{=} f^{(n)}(x_0)$.

(d) O funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă de n ori pe mulțimea $A \subseteq D \cap D'$, $n \geq 2$ dacă f este de n ori derivabilă în orice punct al mulțimii A.

(e) O funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este INDEFINIT DERIVABILĂ pe $A \subseteq D \cap D'$ dacă f este derivabilă de n ori pe mulțimea A, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Def 2 Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Funcția $T_{f,n,x_0}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ~~$T_{f,n,x_0}(x) =$~~

$$\boxed{T_{f,n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}$$

se numește POLINOMUL LUI TAYLOR DE RANG n ATAȘAT FUNCȚIEI f ȘI PUNCTULUI x_0.

Funcția $\boxed{R_{f,n,x_0} = f - T_{f,n,x_0}}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește RESTUL LUI TAYLOR DE RANG n, FUNCȚIEI f ȘI PUNCTULUI x_0.

OBS! $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$

Formula lui TAYLOR cu restul sub forma lui LAGRANGE

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $n \in \mathbb{N}^*$ și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I.

Oricare ar fi $x, y \in I$, $x \neq y$, există un element intermediar c situat între x și y a.î.

$$\boxed{f(x) = T_{f,n,y}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1}}$$

APLICAȚIE

Dem că $\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $\forall x \in [0, \pi]$.

Inegalitatea este evidentă pt $x = 0$.

Demonstrăm inegalitatea pt $x \in (0, \pi]$.

Definim $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

f este indefinit derivabilă pe $[0, \pi]$

$\Longrightarrow$ f este derivabilă de 6 ori pe $[0, \pi]$

$y = 0$

$x \neq 0$ $\Rightarrow \exists\, c \in (0, x)$ a.î. $f(x) = T_{f,5,0}(x) +$

$$+ \frac{f^{(6)}(c)}{6!} \cdot x^6 = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \dots + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$+ \frac{f^{(6)}(c)\, x^6}{6!}$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(c)}{6!} \cdot x^6$$

$0 < c < x \leq \pi \Rightarrow c \in (0, \pi] \Rightarrow \sin c > 0$

$\frac{\sin c}{6!} x^6 \geq 0 \Big| \Longrightarrow f(x) = \sin x \leq x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ q.e.d.

FUNCȚII DERIVABILE

TEOREMA 1 (ȘIRURI DE FUNCȚII DERIVABILE)

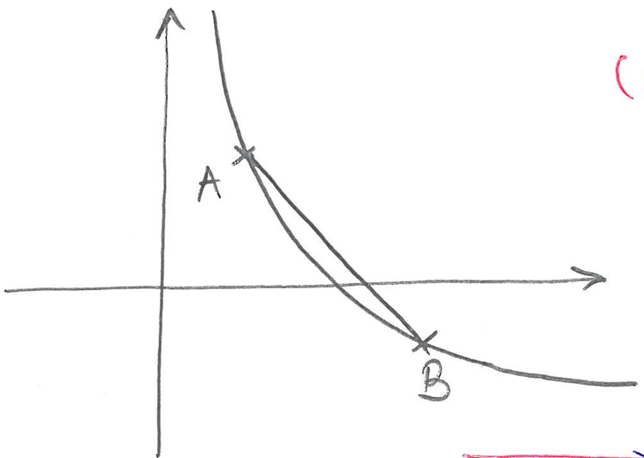
Considerăm $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval mărginit și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții derivabile $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dacă $\exists\, x_0 \in I$ a.î. șirul de nr reale $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și $\exists\, g : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[I]{u} g$, atunci $\exists$ o funcție derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow[I]{u} f$ și $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in I$.

Def 1

Fie $f : \cancel{I\subseteq\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ o funcție. Funcția f s.n. $\boxed{\text{convexă}}$ dacă
interval

$\forall x, y \in I$, $\forall t \in [0,1]$ avem $\boxed{f((1-t)x + t\cdot y) \leq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)}$

COMBINAȚIE CONVEXĂ
A DOUĂ NR. REALE
(a doi vectori la geometrie)

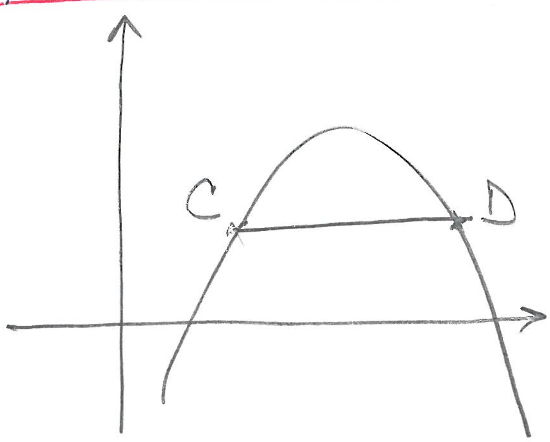


Orice două puncte aleg pe graficul funcției, segmentul format se află deasupra funcției între cele două puncte.

Funcția f este $\boxed{\text{concavă}}$ ~~convexă~~ dacă $\forall x, y \in I$ $\forall t \in [0,1]$ avem

$$\boxed{f((1-t)x + t\cdot y) \geq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)}$$

COMBINAȚIE CONCAVĂ
A DOUĂ NR REALE



TEOREMĂ

(a) Fie $f : \underset{\text{interval}}{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I.

f este funcție convexă pe I dacă și numai dacă f' este crescătoare pe I.

f este funcție concavă pe I dacă și numai dacă f' este descrescătoare pe I.

(b) Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori pe I.

f este convexă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

f este concavă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

SERII DE FUNCȚII

Unui șir de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, îi asociem șirul de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $s_n : D \to \mathbb{R}$ definit ~~(s_n)~~ $s_n(x) = f_0(x) + \dots + f_n(x) \quad \forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}$

Definiția 1 Perechea de șiruri de funcții $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ se numește seria de funcții ~~atașată~~ asociată șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și se notează

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n.}$$

f_n se numește termenul general de rang n al seriei de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$.

s_n se numește suma parțială de rang n a seriei de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$

Def. 2 $\boxed{(a)}$ Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este $\boxed{\text{simplu convergentă}}$ pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă (șirul sumelor parțiale) șirul de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe mulțimea A

$\boxed{(b)}$ Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este $\boxed{\text{uniform convergentă}}$ pe $A \subseteq D$ dacă șirul de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (șirul sumelor parțiale) converge uniform pe A.

$\boxed{(c)}$ Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este $\boxed{\text{absolut convergentă}}$ pe A dacă (seria modulelor) seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ este simplu convergentă.

ABSOLUT $\Longrightarrow$ SIMPLU

OBS! (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ absolut convergentă pe $A \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este simplu convergentă.

UNIFORM $\Longrightarrow$ SIMPLU

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uniform convergentă pe $A \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty}$ este simplu convergentă.

CRITERIUL LUI CAUCHY PT. SERII DE FUNCȚII

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții cu $f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{(a)}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este $\boxed{\text{simplu convergentă}}$ pe $A \subseteq D \Longleftrightarrow$ $\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{|f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)| < \varepsilon}$ $\forall m > n \geq n_{\varepsilon,x}$.

$\boxed{(b)}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este $\boxed{\text{absolut convergentă}}$ pe $A \subseteq D \Longleftrightarrow$ $\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{|f_{n+1}(x)| + \ldots + |f_m(x)| < \varepsilon}$ $\forall m > n \geq n_{\varepsilon,x}$.

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe $A \subseteq D$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\boxed{|f_{n+1}(x)+\ldots+f_m(x)|<\varepsilon}$ $\forall m>n\geq n_\varepsilon$ $\forall x\in A$

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut convergentă pe $A\subseteq D$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $\boxed{|f_{n+1}(x)|+\ldots+|f_m(x)|<\varepsilon}$ $\forall m>n\geq n_\varepsilon$ și $\forall x\in A$.

CRITERIUL LUI WEIERSTRAS PT. SERII DE FUNCȚII

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții cu $f_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de nr reale pozitive a.î.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=$ șirul majoranților pt modulul fiecărei funcții din $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$|f_n(x)|\leq a_n$ $\forall x\in D$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Dacă seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut convergentă pe mulțimea D.

Dem $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ serie convergentă de nr reale $\xRightarrow[\text{pt serii de nr reale}]{\text{Crit. CAUCHY}}$

$\Longrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $|a_{n+1}+\ldots+a_m|<\varepsilon$ $\forall m>n\geq n_\varepsilon$ (1)

$a_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\xRightarrow{(1)}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $a_{n+1}+\ldots+a_m<\varepsilon$ $\forall m>n\geq n_\varepsilon$ (2)

Din ipoteză $\Rightarrow$ $|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\ldots+|f_m(x)|\leq a_{n+1}+\ldots+a_m$ $\forall x\in D$ și $\forall m>n\geq$ (3)

Din (2)+(3) $\Longrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $|f_{n+1}(x)|+\ldots+|f_m(x)|<\varepsilon$ $\forall x\in D$, $\forall m>n\geq n_\varepsilon$.

$\xRightarrow[\text{pt serii de funcții}]{\text{Crit CAUCHY}}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut conv. pe D.

CRITERIUL LUI DIRICHLET PT. SERII DE FUNCȚII

Considerăm două șiruri de funcții $(f_n), (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $f_n, g_n : D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ care verifică următoarele ipoteze:

(a) $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$ ($\longrightarrow$ funcția nulă 0)

(b) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ $\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}$ (f_n descrescătoare)

(c) $\exists\ c\geq 0$ a.î. $|g_0(x)+\ldots+g_n(x)|\leq c$ $\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}$

Atunci seria de funcții $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\cdot g_n$ este uniform convergentă pe D.

CRITERIUL LUI ABEL PT. SERII DE FUNCȚII

Considerăm două ~~funcții~~ șiruri de fcții. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $(f_n), (g_n) : D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ care verifică următoarele ipoteze:

$\boxed{(a)}$ $f_{n+1}(x)\geq f_n(x)$ $\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}$ sau
$f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$ $\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}$

$\boxed{(b)}$ $\exists\ M\geq 0$ a.î. $f_n(x)\leq M$ $\forall x\in D, \forall n\in\mathbb{N}$

$\boxed{(c)}$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n$ uniform convergentă pe D

Atunci $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\cdot g_n$ este unif. convergentă pe D.

OBS!

$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ simplu conv. pe $A\subseteq D \overset{def}{\Longrightarrow} \exists\ f: A\subseteq D\to\mathbb{R}$ a.î.

$s_n \xrightarrow[A]{u} f$.

f se numește suma seriei de funcții și se notează

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\quad \forall x\in D}$$

TEOREMA

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții derivabile cu $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dacă $\exists x_0 \in I$ a.î. seria de nr reale $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$ este convergentă și dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ este uniform ~~continuă~~ convergentă pe I pentru funcția $g : I \to \mathbb{R}$, există o funcție derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ a.î. $f'(x) = g(x)$. $\forall x \in I$ și seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe I către f

SERII DE PUTERI

$x_0 \in \mathbb{R}$

Def 3

S.n $\boxed{\text{serie de puteri}}$ (în jurul lui x_0) o serie de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ cu $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

și $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_0(x) = a_0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Notație $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \overset{\text{not.}}{=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$

a_n se numește $\boxed{\text{coeficientul de rang } n}$ al seriei de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

a_0 s.n. $\boxed{\text{termenul liber}}$ al seriei de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$

Def 4 Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ serie de puteri (în jurul lui x_0)

(a) Nr real $R \stackrel{def}{=} \sup\{r \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \text{ este conv}\} \in \bar{\mathbb{R}}$

s.n. $\boxed{\text{raza de convergență}}$ a seriei de puteri.

(b) Mulțimea $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \mathbb{R}$ s.n. $\boxed{\text{intervalul de convergență}}$ al seriei de puteri

(c) Mulțimea $A \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0) \text{ serie conv}\}$

s.n $\boxed{\text{mulțimea de convergență}}$ a seriei de puteri.

(d) Funcția $f: A \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)$ s.n.

$\boxed{\text{suma seriei de puteri}}$.

OBS! ① $A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$

$f(x_0) = a_0$.

SERII DE PUTERI

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$f_0(x) = a_0$

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ – suma seriei de puteri

$A \neq \emptyset$, $x_0 \in A$

TEOREMA CAUCHY–HADAMARD

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ o serie de puteri (în jurul lui x_0) și $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,+\infty]$. Raza de convergență R a seriei de puteri este dată de formula

$$R = \begin{cases} +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \\ \frac{1}{l}, & l \in (0,\infty) \end{cases}$$

REMARCĂ Dacă presupun că $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0,\infty]$ atunci $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

TEOREMA LUI ABEL

Considerăm o serie de puteri $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ și R raza de convergență.

$\boxed{a)}$ Seria de puteri este absolut convergentă pe (x_0-R, x_0+R)

$\boxed{b)}$ Seria de puteri este divergentă pe $\mathbb{R} \setminus [x_0-R, x_0+R]$

$\boxed{c)}$ Dacă $R>0$, seria de puteri este uniform convergentă pe $[x_0-r, x_0+r]$ $\forall\, 0<r<R$

COROLAR

$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A$ (~~interval~~ mulțimea de convergență)

interval de convergență

a) $(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$

$A \subseteq \mathbb{R}$

b) $R = 0 \Rightarrow A = \{x_0\}$

c) $R = +\infty \Rightarrow A = \mathbb{R}$

TEOREMA 1

Fie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ o serie de puteri cu $R > 0$ și $f : A \to \mathbb{R}$ suma ei.

a) $f\Big|_{(x_0 - R, x_0 + R)}$ este o funcție indefinit derivabilă.

f restricționat la $(x_0 - R, x_0 + R)$

și $\boxed{f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n (x - x_0)^n\right)^{(k)}}$

$\forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ și $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

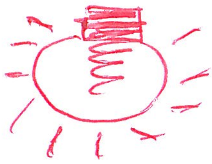
În plus $\boxed{\int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n (x - x_0)^n\, dx}$ pe $(x_0 - R, x_0 + R)$

b) Dacă $A = (x_0 - R, x_0 + R]$, atunci f este continuă în $x_0 + R$.

Dacă $A = [x_0 - R, x_0 + R)$, atunci f este continuă în $x_0 - R$.

Dacă $A = [x_0 - R, x_0 + R]$, atunci f este continuă în $x_0 - R$ și $x_0 + R$.

SERII DE PUTERI REMARCABILE



① $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall\, x \in (-1, 1)}$$

$R = 1$

$A = (-1, 1)$

② $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad \forall\, x \in (-1, 1)}$$

$R = 1$

$A = (-1, 1)$

③ $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$ (serie exponențială)

$R = +\infty$

$A = \mathbb{R}$

④ $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$ (serie trigonometrică)

$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ $\qquad$ $R = +\infty$

$A = \mathbb{R}$

$a_{2n+1} = 0$

⑤ $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ $\qquad$ $R = +\infty$

$A = \mathbb{R}$

$a_{2n} = 0$

PROIECȚIILE LUI $\mathbb{R}^n$ (capitol bonus de la geometrie)

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$$pr_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; ; \; pr_1(x_1, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} x_1$$

$$pr_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; ; \; pr_2(x_1, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} x_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$pr_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; ; \; pr_n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{def}{=} x_n .$$

$pr_1, \dots, pr_n$ sunt aplicații liniare de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}$.

OBS! $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ (combinație liniară)

$$= pr_1(x) e_1 + pr_2(x) e_2 + \dots + pr_n(x) e_n$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

FUNCȚII DIFERENȚIABILE ÎN SPAȚII LINIARE NORMATE

$$f : D \subseteq (X, \| \, \|_X) \to (Y, \| \, \|_Y)$$

Def 1

Spunem că funcția f este $\boxed{\text{diferențiabilă}}$ în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists !)\; T : X \to Y$ aplicație liniară și continuă, a.î.

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} = 0$$

Notație $\boxed{T \stackrel{not}{=} df_{x_0}}$ diferențiala funcției f în punctul x_0.

TEOREMA 1

Dacă orice funcție $f: D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ diferențiabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ este continuă în x_0.

Dem $(\exists!)$ $T: X \to Y$ aplicație liniară și continuă a.î.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} = 0 \quad (1)$$

$T: X \to Y$ liniară și continuă $\Longrightarrow \exists\, c > 0$ a.î. $\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$. (2)

$$\| f(x) - f(x_0) \|_Y = \| [f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)] + T(x-x_0) \|_Y$$

$$\| [f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)] + T(x-x_0) \|_Y \leq \| f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) \|_Y + \underbrace{\| T(x-x_0) \|_Y}_{(2)} \leq$$

$$\leq \| f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) \|_Y + c \| x - x_0 \|_X \qquad \Rightarrow \leq c \|x - x_0\|_X$$

$$\Rightarrow 0 \leq \| f(x) - f(x_0) \|_Y \leq \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} \cdot \| x - x_0 \|_X + c \cdot \| x - x_0 \|_X \quad \forall\, x \neq x_0.$$

$$\underbrace{0 \leq \| f(x) - f(x_0) \|_Y \leq \underbrace{\underbrace{\| x - x_0 \|_X}_{\downarrow x \to x_0 \; 0} \underbrace{\left(\frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x-x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} + c \right)}_{\downarrow x \to x_0 \; c}}_{\downarrow 0}}_{x \to x_0 \;\to\; 0} \quad \forall\, x \neq x_0,\ x \in X \quad (3)$$

Aplicând crit. Cleștelui pt lim de funcții

$$\Longrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \| f(x) - f(x_0) \|_Y = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

TEOREMA 2

Orice funcție constantă $f: D \subseteq (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ este diferențiabilă pe D și $df_{x_0} = 0$ (0 este aplicația liniară și continuă nulă) $\forall x \in D$.

TEOREMA 3

Orice funcție liniară și continuă $T: (X, \| \|_X) \to (Y, \| \|_Y)$ este diferențiabilă pe X și $dT_{x_0} = T \quad \forall x \in X$

Dem Fie $x_0 \in X$ arbitrar ales.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| T(x) - T(x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|} = \lim_{x \to x_0} \frac{\| T(x - x_0) - T(x - x_0) \|_Y}{\| x - x_0 \|_X}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} U \text{ liniară} \\ U(\alpha x + \beta y) = \alpha U(x) + \beta U(y) \quad \forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x, y \in X \\ U(x) - U(x_0) = U(x - x_0) \end{array}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\| 0_Y \|_Y}{\| x - x_0 \|_X} = 0$$

$\xRightarrow{\text{Def 1}}$ T este diferențiabilă în x_0 și $dT_{x_0} = T$.

REMARCĂ

(între 2 spații de dimensiune finită)

$pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ 1 \le i \le n$ aplicație liniară (și continuă)

$\xRightarrow{\text{Teorema 3}}$ pr_i sunt diferențiabile pe $\mathbb{R}^n$ și $d(pr_i)_{x_0} = pr_i$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{pr_i \stackrel{\text{not}}{=\!=} dx_i}$ $\forall 1 \le i \le n$

FUNCȚII DIFERENȚIABILE

TEOREMA 1 (OPERAȚII CU FUNCȚII DIFERENȚIABILE)

(a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ două funcții diferențiabile în $x_0 \in D \cap D'$ și $\alpha \in \mathbb{R}$.

Atunci $f+g, f-g, \alpha \cdot f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sunt diferențiabile în x_0 și

$$\boxed{d(f+g)_{x_0} = df_{x_0} + dg_{x_0}}$$

$$\boxed{d(f-g)_{x_0} = df_{x_0} - dg_{x_0}}$$

$$\boxed{d(\alpha f)_{x_0} = \alpha \cdot df_{x_0}}$$

(b) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ și $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ și $x_0 \in D \cap D'$ a.î. $y_0 = f(x_0) \in B \cap B'$.

Dacă f este diferențiabilă în x_0 și g este diferențiabilă în $y_0 = f(x_0)$, atunci $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în x_0 și $\boxed{d(g \circ f)_{x_0} = dg_{y_0} \circ df_{x_0}.}$

(c) Fie $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ și $x_0 \in D \cap D'$.

Dacă g și f sunt diferențiabile în x_0, atunci $g \cdot f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă în x_0 și $\boxed{d(g \cdot f) = dg_{x_0} \cdot f(x_0) + g(x_0) \cdot df_{x_0}}$

I. Funcții diferențiabile: Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

$f_1, f_2, \dots, f_m : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ componentele funcției vectoriale f

$f \overset{not}{=} (f_1, \dots, f_m)$

TEOREMA 2

Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) f este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$;

(b) f este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$

(c) $f_1, \dots, f_m$ sunt derivabile în x_0

În plus, $df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este definită prin formula

$$df_{x_0}(x) = x \cdot f'(x_0) = x \, (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_m'(x_0)) = (x f_1'(x_0), \dots, x f_m'(x_0))$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

(II). Funcții diferențiabile $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$

$f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

Def 1 Spunem că funcția f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, $1 \leq i \leq n$, în punctul $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$ dacă

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

Notație:

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} \overset{not}{=\!=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = f'_{x_i}(x_0)}$$

derivata parțială a lui f în raport cu x_i în punctul x_0.

TEOREMA 3

Fie $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$

Dacă f este diferențiabilă în x_0, atunci f admite toate derivatele parțiale în x_0.

În plus, $df_{x_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este definită prin formula:

$$df_{x_0}(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \cdot x_n$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

OBS!

$$df_{x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \underbrace{pr_1}_{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) \cdot \underbrace{pr_2}_{dx_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \underbrace{pr_n}_{dx_n} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\, dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\, dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\, dx_n$$

COROLAR TEOREMA 3

Dacă funcția $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nu admite cel puțin o derivată parțială în $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$, atunci f nu este diferențiabilă în x_0.

CRITERIU DE DIFERENŢIABILITATE

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $x_0 \in \overset{\circ}{D}$

Presupunem că $\exists\ V \in \mathcal{V}_{\tau}(x_0)$, $V \subseteq D$ pe care există toate derivatele parţiale ale funcţiei f şi acestea sunt funcţii continue în x_0. Atunci f este diferenţiabilă în x_0.

COROLAR LA CRITERIU

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $\emptyset \neq A = \overset{\circ}{A} \subseteq D$ a.î. f admite toate derivatele parţiale pe mulţimea A şi acestea sunt funcţii continue pe A. Atunci f este diferenţiabilă pe A.

III Funcţii derivabile $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $n, m \geq 2$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;

$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$f_1, \dots, f_m : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f = (f_1, \dots, f_m)$

$\boxed{\text{TEOREMA 4}}$

Următoarele afirmaţii sunt ~~adevărate~~ echivalente:

(a) f este diferenţiabilă în x_0;

(b) $f_1, \dots, f_m$ sunt diferenţiabile în x_0

În plus, $df_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este definită prin:

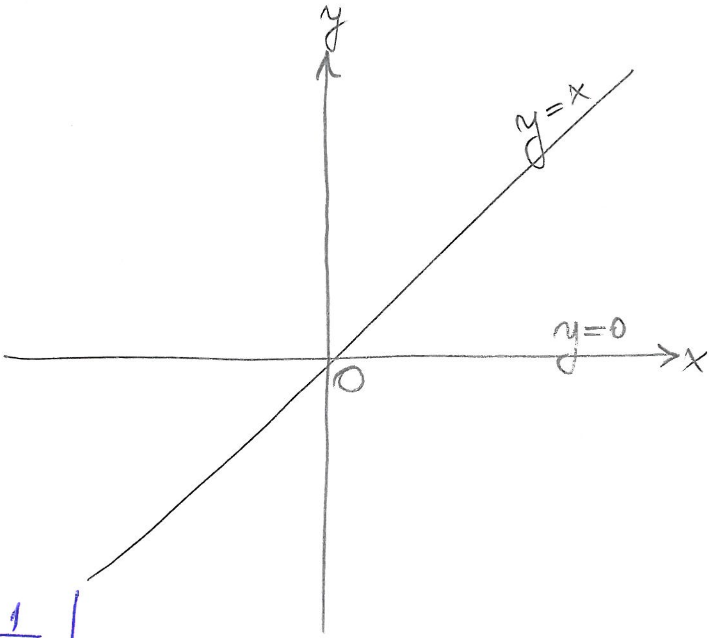
$$df_{x_0}(x_1, \dots, x_n) = \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t \quad \forall\ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ unde}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial f_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Aplicații

ex 1 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Studiem continuitatea:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{y\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} = 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

$\Longrightarrow f$ nu e continuă în $(0,0)$

$\Longrightarrow f$ nu e diferențiabilă în $(0,0)$

verificăm derivatele parțiale:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_1) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((t,0)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{t^2} - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\cdot e_2) - f((0,0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,t)) - f((0,0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{t^2} - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

APLICAȚII LINIARE ȘI CONTINUE ÎNTRE SPAȚII LINIARE NORMATE

$(X, \| \|_X)$, $(Y, \| \|_Y)$ spații liniare normate reale

Def 1 (a) O funcție $T: X \times X \to Y$ se numește APLICAȚIE LINIARĂ de la X la Y dacă

$$T(\alpha x + \beta y, z) = \alpha T(x, z) + \beta T(y, z) \text{ și}$$
$$T(x, \alpha y + \beta z) = \alpha T(x, y) + \beta T(x, z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall x, y, z \in X$$

(b) O aplicație liniară se numește SIMETRICĂ dacă $T(x, y) = T(y, x)$ $\forall x, y \in X$.

(c) O aplicație $U: X \to Y$ se numește FUNCȚIONALĂ PĂTRATICĂ dacă $\exists\, T: X \times X \to Y$ o aplicație liniară simetrică a.î. $U(x) = T(x, x)$ $\forall x \in X$.

TEOREMA 1

O aplicație liniară $T: X \times X \to Y$ este continuă pe $X \times X$ dacă și numai dacă $\exists\, c > 0$ a.î. $\|T(x,y)\|_Y \leq c\|x\|_X \cdot \|y\|_X$ $\forall x, y \in X$

Notație: $\mathcal{L}(X, X; Y) \overset{def}{=} \{T: X \times X \to Y \mid T \text{ este aplicație liniară de la } X \text{ la } Y\}$

TEOREMA 2

(a) O funcție $T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o aplicație liniară $\Longleftrightarrow$ $\exists\, A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. ~~$T((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i$~~

$$T((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$$

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

În plus, $a_{ij} = T(e_i, e_j)$

(b) Orice aplicație liniară $T: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Def 2 Fie $U: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcțională pătratică

(a) U s.n. SEMIDEFINITĂ pe $\mathbb{R}^n$ dacă $U(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$U(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

(b) U s.n. STRICT POZITIVĂ dacă $U(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$

(c) U s.n. STRICT NEGATIVĂ dacă $U(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, ..., 0)\}$

FUNCȚII DIFERENȚIALE DE DOUĂ ORI PE $\mathbb{R}^n$

$f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$

Def 1 Spunem că funcția f admite derivată parțială de ordinul 2 în raport cu variabilele x_i și x_j în punctul $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$ dacă $\exists \ V \in \mathcal{V}_\tau(x_0)$ a.î. f admite derivată parțială în raport cu variabila x_j pe $V \cap \Delta$ și $\frac{\partial f}{\partial x}: V \cap \Delta \to \mathbb{R}$ admite ~~prima~~ derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul x_0.

Notație

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0) \overset{not}{=\!=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x_0) \overset{not}{=\!=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0)$$

Def 2 Funcția $f: \Delta \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$ dacă $\exists \ V \in \mathcal{V}_\tau(x_0)$ a.î. f este diferențiabilă pe $V \cap \Delta$ și $d_f: V \cap \Delta \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ și d_f este diferențiabilă în x_0.

Notație: $d(d_f)x_0 \overset{not}{=\!=} d^2 f_{x_0} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$

TEOREMA LUI SCHWARZ

Dacă $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori într-un punct $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$, atunci f admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 în x_0 și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j x_i}(x_0)$. $\forall\, 1 \le i, j \le n$.

În plus, $d^2 f_{x_0}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este definită prin formula

$$d^2 f_{x_0}((x_1, \dots, x_n),(y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)}_{a_{ij}} \cdot x_i y_j$$

$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

COROLAR

Dacă $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă de două ori în $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$ atunci $d^2 f_{x_0}$ este APLICAȚIE BILINIARĂ, continuă și simetrică.

Def 3 Fie $f: \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă de 2 ori în x_0. Funcționala patratică $H_f(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $H_f(x_0)(x) \overset{def}{=\!=} d^2 f_{x_0}(x, x)$ se numește HESSIANA funcției f în x_0.

$$f \longrightarrow d^2 f_{x_0} \longrightarrow H_f(x_0).$$

TEOREMA LUI YOUNG

Fie $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{\Delta}$, $V \in \mathcal{V}_{\tau}(x_0)$ a.î. $V \subseteq \Delta$ și $\exists\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe V, funcții continue în x_0. Atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. În plus, dacă $\exists$ toate derivatele parțiale de ordinul 2 ale funcției f pe vecinătatea V și acestea sunt funcții continue în x_0, atunci f este diferențiabilă de două ori în x_0.

COROLAR

Fie $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $\emptyset \neq A = \mathring{A} \subseteq \Delta$ a.î. f admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 pe A și acestea sunt funcții continue pe A. Atunci f este diferențiabilă de 2 ori în orice punct din A.

Def 4

Fie $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$. Elementul x_0 se numește punct critic pentru f dacă f este diferențiabilă în x_0 și $df_{x_0} = 0 \leftarrow$ funcția nulă

OBS! Fie $f: \Delta \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \Delta \cap \Delta'$ f este diferențiabilă în x_0. x_0 este punct critic pentru f dacă și numai dacă

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

APLICAȚIE Determinați punctele critice ale funcției

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 2$

Studiem
1) continuitatea
2) derivatele parțiale
3) continuitatea derivatelor parțiale

f continuă pe $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3+y^3-3xy+2)'_x = 3x^2 - 3y, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3+y^3-3xy+2)'_y = 3y^2 - 3x, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ mulțime deschisă} \\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ funcții continue pe } \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ e diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

$$(\mathbb{R}^2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3-1) = 0$$

$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow (0,0), (1,1) \in \mathbb{R}^2$

PUNCTE DE EXTREM LOCAL PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$

Def 1

(a) $x_0 \in D$ s.n. punct de ~~minim~~ minim local pentru f (resp maxim local) dacă $\exists\ V \in \mathcal{V}_\tau(x_0)$ astfel încât $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in V \cap D$ (resp $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall$ $x \in V \cap D$)

(b) $x_0 \in D$ s.n. punct de minim global pentru f (resp maxim global) dacă ~~$\exists\ V \in \mathcal{V}_\tau(x_0)$ a.î.~~ $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in D$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in D$).

(c) x_0 se numește punct de extrem local pentru f ~~dacă~~ (resp. punct de extrem global) dacă x_0 este punct de maxim local pt f (resp. punct de maxim global) și punct de minim local (resp. punct de minim global) pt f.

TEOREMA LUI FERMAT (cazul multidimensional)

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathring{D}$ un punct în care funcția f este diferențiabilă. Dacă $x_0 \in \mathring{D}$ punct de extrem local pentru f, atunci $df_{x_0} = 0$ (x_0 este punct critic pt f)

$d^2 f_{x_0} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow Hf(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$Hf(x_0)(x) \stackrel{def}{=} d^2 f_{x_0}(x, x)$

$\Rightarrow A = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

TEOREMA 1 (Criteriul de determinare a punctelor de extrem local)

Fie $f: D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct critic al funcției f în care f este diferențiabilă de două ori.

$\boxed{a)}$ Dacă $H_f(x_0) > 0$ ($H_f(x_0)(x) > 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$) atunci x_0 este punct de minim local pt f

$\boxed{b)}$ Dacă $H_f(x_0) < 0$ ($H_f(x_0)(x) < 0 \ \forall\ x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$) atunci x_0 este punct de maxim local pt f.

$\boxed{c)}$ Dacă $\exists$ ~~...~~ $x, y \neq 0$ vectori a.i. $H_f(x_0)(x) > 0$ și $H_f(x_0)(y) < 0$ atunci x_0 nu este punct de extrem local pt f.

REMARCĂ $H_f(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\xrightarrow[\text{o matrice pătratică}]{\text{îi asociez în mod unic}}$ $H_f(x_0) \overset{not}{=} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\Delta_1 = a_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

.... până la minorul de ordin n.

$$\Delta_n = \det H_f(x_0).$$

$\boxed{1)}$ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ punct de minim local

2) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots (-1)^n \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ punct de maxim local

~~$(-1)^n \Delta_n > 0$~~

3) Dacă $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \geq 0$ și $\exists\ i \in \overline{1,n}$ a.i. $\Delta_i = 0$ $\Rightarrow$ atunci nu ne putem pronunța asupra lui x_0 cu acest criteriu.

$\boxed{4)}$ Dacă $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \Delta_3 \leq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ și $\exists\ i \in \overline{1,n}$ a.i. $\Delta_i = 0$ atunci nu ne putem pronunța asupra lui x_0 cu acest criteriu.

(5) În orice altă situație diferită de cele descrise anterior x_0 nu este punct de extrem local pt f.

Aplicații

Determinați punctele de extrem local ale lui f

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$

1) $\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

f continuă pe $\mathbb{R}^2$

D_1 mulțimea punctelor de discontinuitate

~~$D_1 \neq \emptyset$~~ $D_1 = \emptyset$

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x$ (derivatele parțiale)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 2y$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

D_2 = mulțimea punctelor în care f nu este diferențiabilă

$D_2 = \emptyset$

Funcții integrabile Riemann

TEOREMA 1

Fie $f \in R([a,b])$ și $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ și t_{Δ_n} un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f; t_{\Delta_n}) = \int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMA 2

OPERAȚII CU FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN

Fie $f, g \in R([a,b])$. Atunci $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$, $|f|$, $|g|$ sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$ ($\Leftrightarrow \in R([a,b])$) și

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x);$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Definiția 1

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită, $\Delta = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$

și $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ cu $1 \leq i \leq n$.

Numărul real $M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \overset{\text{not}}{=} S_\Delta(f)$ se numește SUMA DARBOUX superioară asociată funcției f și diviziunii Δ.

Numărul real $m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \overset{\text{not}}{=} s_\Delta(f)$ se numește SUMA DARBOUX inferioară asociată funcției f și diviziunii Δ.

OBS! 1) $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\forall t_\Delta$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ și pentru orice funcție mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

$$\boxed{s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f, t_\Delta) \leq S_\Delta(f)}$$

2) $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\forall f \in \mathcal{R}([a,b])$ au loc inegalitățile

$$\boxed{s_\Delta(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_\Delta(f)}$$

CRITERIUL DE INTEGRABILITATE AL LUI DARBOUX

O funcție mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă și numai dacă $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \delta_\varepsilon>0$ a.î.

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \quad \forall \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

TEOREMA 3

Orice funcție monotonă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este sigur integrabilă Riemann.

Dem

Pp că $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcție crescătoare.

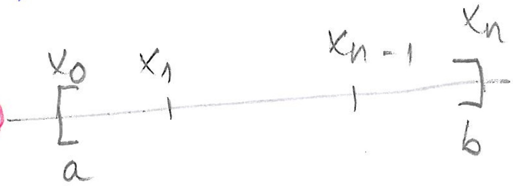
Fie $\Delta=\{x_0, x_1, \dots x_n\}$, $x_n\in\mathcal{D}([a,b])$.

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i)$$

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) \qquad \forall\ 1\leq i\leq n$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i) - \cancel{\ } f(x_{i-1})\big)(x_i - x_{i-1}) \quad (1)$$



$\|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1\leq i\leq n\} \Longrightarrow$

$x_i - x_{i-1} \leq \|\Delta_n\| \quad \forall\ 1\leq i\leq n.$ (2)

Din 1 + 2 am că $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\|\Delta\|$

$= \|\Delta\| \cdot (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1}))$

$= \|\Delta\| \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = \|\Delta\| (f(b) - f(a))$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \|\Delta\| f((b) - f(a)) \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ 3

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și construim $\delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$

Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \overset{3}{\Longrightarrow} S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \delta_\varepsilon (f(b) - f(a))$

$= \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} (f(b) - f(a)) = \varepsilon \cdot \underbrace{\dfrac{f(b) - f(a)}{f(b) - f(a) + 1}}_{< 1} < \varepsilon$

$\Longrightarrow S_\Delta(f) \cdot s_\Delta(f) < \varepsilon$

$\xrightarrow[\text{DARBOUX}]{\text{Crit.}} f \in R([a,b])$

Dacă f e descrescătoare, avem $-f$ crescătoare

$\Rightarrow -f \in R([a,b]) \Longrightarrow -(-f) = f \in R([a,b])$

TEOREMA 4

Orice funcție continuă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

Dem

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } [a,b] \\ [a,b] \subset \mathbb{R} \text{ mulțime compactă} \end{array}\right| \Longrightarrow f$ este uniform continuă pe $[a,b]$.

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \ \forall\, x, y \in [a,b]$ a.î. $|x - y| < \delta_\varepsilon$ 1

Fie $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow x_i - x_{i-1} < \delta_\varepsilon$, $\forall\ 1 \le i \le n$ (2)

$f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ funcție continuă pe $[x_{i-1}, x_i]$

$[x_{i-1}, x_i]$ mulțime compactă

$\Longrightarrow f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ este funcție mărginită și își atinge marginile $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\ u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ a.î. $M_i = f(u_i)$

$m_i = f(v_i)$

$|u_i - v_i| \le x_i - x_{i-1} \xRightarrow{(2)} |u_i - v_i| < \delta_\varepsilon \xRightarrow{(1)} |f(u_i) - f(v_i)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow |M_i - m_i| < \varepsilon \Longrightarrow M_i - m_i < \varepsilon, \ \forall\ 1 \le i \le n$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \xRightarrow{(3)}$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(x_n - x_0) = \varepsilon(b-a)$$

$\Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon(b-a)$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon(b-a)$

$\forall\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

Definiția 2

O mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$ s.n. neglijabilă LEBESGUE dacă $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ (I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de intervale astfel încât $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} l(I_n) < \varepsilon$.

OBSERVAȚIE!

1) Orice mulțime finită este neglijabilă Lebesgue.
2) Orice mulțime numărabilă este neglijabilă Lebesgue
3) $\left.\begin{array}{l}A \text{ neglijabilă Lebesgue} \\ B \subseteq A\end{array}\right| \Longrightarrow B$ neglijabilă Lebesgue

4) A, B neglijabilă Lebesgue $\Longrightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$ sunt mulțimi neglijabile Lebesgue

NOTAȚIE

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad D_f = \{x \in A \mid f \text{ nu este continuă în } x\}$

CRITERIUL DE INTEGRABILITATE AL LUI LEBESGUE

O funcție $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă și numai dacă f este mărginită și D_f este mulțime neglijabilă Lebesgue.

APLICAȚIE

$f: [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & x \in [0,1) \\ x^2, & x \in [1,2] \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } [0,2] \setminus \{1\} \\ f \text{ nu este continuă în } 1 \end{array}\right| \Longrightarrow D_f = \{1\}$

D_f finită $\Longleftrightarrow D_f$ neglijabilă Lebesgue

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty \Rightarrow f$ nu este funcție mărginită

Def. 3

O funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitive dacă $\exists$

$\exists$ $F: D \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă a.î. $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in D$

$D \subseteq \mathbb{R}$

FORMULA LUI LEIBNIZ - NEWTON

Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann care admite primitive.

Atunci $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ unde

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$ este o prim. a lui f.

FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN

FORMULA LEIBNIZ-NEWTON

Considerăm $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann care admite primitive.

Atunci $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$, unde $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f.

Dem

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ construim $\Delta_n=\{a=x_0,\ x_1=a+\frac{b-a}{n},\ x_2=\frac{a+2(b-a)}{n},\ \dots,\ x_{n-1}=a+\frac{(n-1)(b-a)}{n},\ x_n=a+\frac{n(b-a)}{n}=b\}$

$\|\Delta_n\|=\frac{b-a}{n}$

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=(F(x_n)-F(x_{n-1}))+(F(x_{n-1})-F(x_{n-2}))+\dots+(F(x_1)-F(x_0))=\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))$$

$F\big|_{[x_{i-1},x_i]}$ este funcție derivabilă pe $[x_{i-1},x_i]$ $\forall\ 1\le i\le n$

$\xrightarrow[\text{LAGRANGE}]{\text{TEO}}$ $\forall\ 1\le i\le n$, $\exists\ t_i\in(x_{i-1},x_i)$ a.î.

$$\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=F'(t_i)=f(t_i)\Rightarrow \forall\ 1\le i\le n,\ \exists\ t_i\in(x_{i-1},x_i)$$

a.î. $F(x_i)-F(x_{i-1})=f(t_i)(x_i-x_{i-1})$ (1)

$t_{\Delta_n}=\{t_1,\dots,t_n\}$ sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ_n

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=1}^{n}\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right) \underset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(b)-F(a) = \underbrace{\sigma_{\Delta_n}(f; t_{\Delta_n})}_{\text{sumă Riemann}} \quad (2)$$

~~$\Rightarrow F(b)-F(a)$~~ =

$$\left.\begin{array}{l} \|\Delta_n\| = \dfrac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ f \in R([a,b]) \end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, t_{\Delta_n}) = \int_a^b f(x)\,dx. \quad (3)$$

Din (2) și (3) $\Longrightarrow$ $F(b)-F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$

$\boxed{\text{TEOREMA 1}}$

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție și $c\in(a,b)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $f \in R([a,b])$

(b) $f\big|_{[a,c]} \in R([a,c])$ și $f\big|_{[c,b]} \in R([c,b])$

În plus $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

$\boxed{\text{TEOREMA 2}}$

Fie $f\in R([a,b])$ și $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Dacă mulțimea $\{x\in[a,b] \mid f(x)\neq g(x)\}$ este finită, atunci $g\in R([a,b])$ și $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$

I. PRIMA TEOREMĂ DE MEDIE PT. FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN

Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ care au următoarele proprietăți:

(i) f are proprietatea lui Darboux pe $[a,b]$

(ii) $g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

Există $c \in (a,b)$ a.î. $\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g(x) = f(c) \int_a^b g(x)\, dx.}$

OBS! $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1$
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcție continuă $\Bigg| \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î.

$$\int_a^b f(x) \underbrace{\cdot}_{g(x)} dx = f(c) \cdot \int_a^b 1\, dx = f(c) \cdot (b-a).$$

II. A DOUA TEOREMĂ DE MEDIE PT. FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN

Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ a.î. $g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$.

(a) Dacă f este crescătoare, atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î.

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(b) \int_c^b g(x)\, dx.$$

(b) Dacă f este descrescătoare, atunci $\exists\, c \in (a,b)$ a.î.

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(a) \int_a^c g(x)\, dx.$$

TEOREMA CONVERGENȚEI UNIFORME

Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții din $\mathcal{R}([a,b])$ și $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$. ← limita șirului de funcții

Atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$

TEOREMA 2

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții din $R([a,b])$ și $f\in R([a,b])$ astfel încât:

(i) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

(ii) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}$

sau

$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall x\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

TEOREMA CONVERGENȚEI MĂRGINITE

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții din $R([a,b])$ și $f\in R([a,b])$ astfel încât:

(i) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

(ii) $\exists\, M\geq 0$ a.î. $|f_n(x)|\leq M \quad \forall x\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}$

($\exists\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ a.î. $\alpha\leq f_n(x)\leq\beta \quad \forall x\in[a,b],\ \forall n\in\mathbb{N}$)

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

TEOREMA 3: PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR INTEGRABILE RIEMANN

Fie $f,g\in R([a,b])$

(a) Dacă $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

(b) Dacă $f(x)\leq g(x) \ \forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(c) Dacă $\exists\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ a.î. $\alpha\leq f(x)\leq\beta \ \forall x\in[a,b]$, atunci $\alpha(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq\beta(b-a)$

(d) Dacă $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx=0$ și $x_0\in[a,b]$ este un punct în care f este continuă, atunci $f(x_0)=0$.

TEOREMA 4

Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ două intervale, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, $g, h: J \to I$ două funcții derivabile și considerăm funcția $F: J \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$. Atunci F este derivabilă pe J

$$\boxed{F'(x) = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x) \quad \forall x \in J}$$

TEOREMA 5

Fie $f \in R([a,b])$ și considerăm funcția $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Atunci F este funcție continuă pe $[a,b]$. Dacă, în plus, f este continuă într-un punct $x_0 \in [a,b]$, atunci F este derivabilă și

$F'(x_0) = f(x_0)$

Dem $f \in R([a,b]) \Longrightarrow \exists M > 0$ a.î. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$ (1)

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \begin{cases} -\int_x^{x_0} f(t)\,dt, & x < x_0 \\ 0, & x = x_0 \\ \int_{x_0}^x f(t)\,dt, & x > x_0 \end{cases}$$

$$|F(x) - F(x_0)| = \begin{cases} \left|\int_x^{x_0} f(t)\,dt\right|, & x < x_0 \\ 0, & x = x_0 \\ \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right|, & x > x_0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |F(x) - F(x_0)| \leq \begin{cases} \int_x^{x_0} |f(t)\,dt|, & x < x_0 \\ 0, & x = x_0 \\ \int_{x_0}^x |f(t)\,dt|, & x > x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Din ① și ② $\Longrightarrow |F(x)-F(x_0)| \le M\cdot|x-x_0| \quad \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow -M|x-x_0| \le F(x)-F(x_0) \le M|x-x_0| \quad \forall x\in[a,b]$

$x\to x_0$ $\qquad$ $x\to x_0$

0

$\xRightarrow[\text{CLEȘTE}]{\text{TCO}} \exists \lim\limits_{x\to x_0}(F(x)-F(x_0))=0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$

$\Rightarrow F$ continuă în x_0 $\forall x_0\in[a,b]$

f continuă în $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\forall x\in[a,b]$ cu $|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ ③

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\begin{cases}\dfrac{-\int_x^{x_0} f(t)\,dt}{x-x_0}-f(x_0), & x<x_0\\[2ex] \dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{x-x_0}-f(x_0), & x>x_0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-(x-x_0)f(x_0)}{x-x_0}, & x<x_0\\[2ex] \dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt-(x-x_0)f(x_0)}{x-x_0}, & x>x_0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt, & x<x_0\\[1ex] \int_{x_0}^{x}(f(t)-f(x_0))\,dt, & x>x_0\end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=\frac{\left|\int_{x_0}^{x}(f(t)\,dt-f(x_0))\right|}{|x-x_0|}$$