Seminar 6 - Polinoame simetrice și determinanți

1 Polinoame simetrice

Polinoamele simetrice sînt instrumente utile în studiul polinoamelor de mai multe variabile. Astfel, ele joacă rolul aproximativ al unei baze dintr-un spațiu vectorial, în sensul că orice polinom simetric de mai multe variabile poate fi exprimat în funcție de unele așa-numite elementare.

Definiția este următoarea:

Definiție 1.1: Un polinom $p \in \Bbbk[X_1, X_2, \dots, X_n]$ se numește *simetric* dacă pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ avem:

$$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = p(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}).$$

Practic, înseamnă că putem schimba variabilele între ele, dar polinomul nu se schimbă.

Cîteva exemple:

- $X_1^3 + X_2^3 + 5$;
- $4X_1^2X_2^2 + X_1^3X_2 + X_1X_2^3 + (X_1 + X_2)^3$;
- $X_1X_2X_3 - X_1X_2 - X_1X_3 - X_2X_3$.

Vom introduce un algoritm care ne va permite să exprimăm orice polinom simetric în funcție de niște polinoame simetrice fundamentale. Însă pentru aceasta, mai avem nevoie să definim o relație de ordine totală pe mulțimea polinoamelor în mai multe nedeterminate. Pentru polinoamele într-o singură nedeterminată, e clar că le putem ordona după grad. Atunci cînd avem mai multe nedeterminate, este necesar să utilizăm o altă relație.

Pe mulțimea monoamelor din $R[X_1, \dots, X_n]$, definim o relație de ordine totală, numită *ordinea lexicografică* prin:

$$X_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n} > X_1^{j_1}X_2^{j_2}\cdots X_n^{j_n} \Leftrightarrow \text{ prima componentă nenulă a vectorului } (i_1 - j_1, \dots, i_n - j_n) \text{ este pozitivă.}$$

Polinoamele simetrice fundamentale sunt (le puteți asemăna cu relațiile lui Viète):

$$\begin{gathered} s_1 = X_1 + X_2 + \cdots + X_n; \\ s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n; \\ \cdots\cdots\cdots \\ s_n = X_1 \cdots X_n. \end{gathered}$$

Termenul principal al polinomului f, notat $T(f)$ sau $LT(f)$ este termenul corespunzător celui mai mare monom al său, în ordinea lexicografică.

<u>Algoritmul de exprimare a unui polinom simetric în funcție de cele fundamentale:</u>

INPUT: $f \in R[X_1, \dots, X_n]$ simetric;
OUTPUT: $g \in R[Y_1, \dots, Y_n]$ a.î. $f = g(s_1, \dots, s_n)$.

- $g = 0,\ h = f$;
- while $(h \neq 0)$ do
  - begin
    - $aX_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n} = LT(h)$;
    - $h := h - a s_1^{i_1 - i_2} s_2^{i_2 - i_3} \cdots s_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} s_n^{i_n}$;
    - $g := g + a Y_1^{i_1 - i_2} Y_2^{i_2 - i_3} \cdots Y_{n-1}^{i_{n-1} - i_n} Y_n^{i_n}$;
  - end

2 Determinanți

Definiție 2.1: Fie $A = (a_{ij})$ o matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se numește *determinantul* matricei A numărul:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

unde $\varepsilon = (-1)^{m(\sigma)}$ este semnul permutării σ, iar $m(\sigma)$ este numărul inversiunilor.

De exemplu, dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci S_2 are doar două permutări, identitatea și inversiunea, prima fiind pară, iar a doua impară. Folosind definiția, obținem $\det(A) = 1 \cdot a_{11} \cdot a_{22} + (-1) \cdot a_{12} \cdot a_{21}$.

De asemenea, determinantul unei matrice mai poate fi obținut și prin metoda dezvoltării după o linie sau o coloană. Cu notațiile de mai sus, dacă alegem să dezvoltăm determinantul după linia q, atunci formula se scrie:

$$\det(A) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+q} \cdot a_{pq} \cdot \Gamma_{pq},$$

unde Γ_{pq} se numește *complementul algebric* al elementului a_{pq} și se obține calculînd determinantul matricei rămase în urma eliminării liniei p și coloanei q.

Proprietățile determinanților sînt sumarizate în propoziția următoare.

Propoziție 2.1: *(a)* $\det(A) = \det({}^tA)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. *în consecință, orice proprietate a unui determinant valabilă pentru liniile matricei este valabilă și pentru coloanele sale.*

(b) Dacă toate elementele unei linii sînt nule, atunci determinantul este nul.

(c) Dacă schimbăm între ele două linii ale unei matrice, atunci determinantul obținut este opusul determinantului inițial.

(d) Dacă o matrice are două linii proporționale, atunci determinantul ei este nul.

(e) Dacă elementele unei linii se înmulțesc cu un scalar λ, atunci valoarea determinantului va fi înmulțită cu același scalar.

(f) Dacă într-o matrice, elementele liniei k se pot descompune $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$, cu $A' = (a'_{ij})$, $A'' = (a''_{kj})$ sînt matrice obținute numai prin schimbarea elementelor linei k din A, atunci $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

(g) Dacă într-o matrice o linie este combinație liniară a altor linii, atunci matricea are determinantul nul.

(h) Dacă la o linie adunăm elementele altei linii înmulțite cu un scalar nenul, atunci determinantul matricei obținute nu se schimbă.

2.1 Regula de dezvoltare a lui Laplace

Dezvoltarea unui determinant după o linie sau o coloană constituie doar un caz particular al unui rezultat mai general. Astfel, putem dezvolta un determinant după mai multe linii sau coloane, cu o procedură care se numește *regula lui Laplace* și care este detaliată în continuare.

Propoziție 2.2 (Laplace): *Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătrată de ordin n. Fixăm liniile $1 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_m \leqslant n$. Fie Γ mulțimea m-minorilor lui A cu elemente fixate din $\{k_1, \ldots, k_n\}$. Atunci* $\det(A) = \sum_{M \in \Gamma} MM'$, *unde M' este complementul algebric (engl. "cofactor") al lui M.*

Să vedem această regulă la lucru pe un exemplu. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. Calculăm $\det(A)$, dezvoltînd după primele două linii.

Considerăm mulțimea $P = \{1, 2, 3, 4\}$ din care extragem submulțimi de cîte două elemente diferite, obținînd $Q = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Definim corespunzător minorii:

$$M = b_{jk} = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{vmatrix}, \qquad M' = c_{jk} = \begin{vmatrix} a_{3j} & a_{3k} \\ a_{4j} & a_{4k} \end{vmatrix}.$$

Faptul că dezvoltăm după primele două linii se reflectă în definiția lui b_{jk}, precum și în aceea că c_{jk} este minorul complementar.

Dacă luăm permutarea $\sigma = \sigma(\{i,j\},\{p,q\}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & p & q \end{pmatrix}$, atunci formula din regula lui Laplace poate fi rescrisă ca:

$$\det(A) = \varepsilon(\sigma(X,Y))b_X \cdot c_Y,$$

unde $X, Y \in Q$, cu $Y = P - X$.

Așadar, pe matricea de mai sus, obținem explicit:

$$\det(A) = \varepsilon(1234)b_{12}c_{34} + \varepsilon(1324)b_{13}c_{24} + \varepsilon(1423)b_{14}c_{23} + \varepsilon(2314)b_{23}c_{14} + \varepsilon(2413)b_{24}c_{13} + \varepsilon(3412)b_{34}c_{12}.$$

Cu ajutorul regulii lui Laplace se poate obține atît formula de dezvoltare după o linie sau o coloană, cît și multiplicativitatea determinantului:

Propoziție 2.3: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

De asemenea, un tip special de determinant este *determinantul Vandermonde*, anume:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Un alt număr care se mai poate asocia unei matrice este urma sa, definită după cum urmează:

Definiție 2.2: Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. *Urma* matricei A se definește prin $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Spre deosebire de determinant, care este multiplicativ, urma este aditivă, i.e. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

3 Metoda Gauss-Jordan

Metoda Gauss-Jordan poate fi utilizată atît pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, cît și pentru a inversa o matrice.

De exemplu, dacă vrem să rezolvăm un sistem de ecuații liniare, bordăm matricea sistemului cu coloana termenilor liberi. Apoi aplicăm transformări elementare matricei obținute pînă cînd partea corespunzătoare matricei sistemului este superior triunghiulară. Procedura poate continua pînă cînd se aduce matricea într-o formă diagonală, avînd doar intrări egale cu 1 pe diagonală. Atunci coloana care provine din aceea a termenilor liberi va da soluțiile.

O altă utilizare a metodei Gauss-Jordan este pentru a inversa o matrice. Astfel, se adaugă la matricea de pornire matricea unitate și se aplică transformări elementare matricei rezultate pînă ce partea corespunzătoare matricei de pornire devine egală cu matricea unitate. Atunci partea corespunzătoare matricei unitate va da inversa matricei de pornire. Desigur, înainte de a aplica metoda Gauss-Jordan este necesar să ne asigurăm că matricea de pornire este inversabilă (i.e. nesingulară).

4 Exerciții

1. Aplicați algoritmul de exprimare a următoarelor polinoame simetrice în funcție de polinoamele simetrice fundamentale. (2p + 2p)

(a) $f = X^3 + Y^3 + Z^3$;

(b) $g = (X_1 - X_2)^2(X_2 - X_3)^2(X_1 - X_3)^2$.

2. Pentru polinomul g de la exercițiul 2, aplicați metoda coeficienților nedeterminați. (2p)

3. Folosind regula lui Laplace, arătați că: (2p+2p)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5, \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -8.$$

4. Calculați inversele celor două matrice de mai sus, folosind metoda Gauss-Jordan. (2p+2p)

5. Demonstrați proprietățile urmei ($\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$): (1p x 4)

(a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;

(b) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \cdot \operatorname{tr}(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;

(c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

(d) $\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$, $\forall U \in GL_n(\mathbb{C})$.

6. Arătați că nu există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încît $AB - BA = I_n$. (rezolvat!)

7. Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încît $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Arătați că $\det(A) \in \mathbb{R}$. (2p)

8. Calculați: (2p)

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & -1 & d \\ a & b & c & d & 0 \end{vmatrix}$$