Seminar 2 – Inele

1 Definiții

Definiţie 1.1: Fie A o mulțime nevidă și $+, \cdot$ două operații pe A. Tripletul $(A, +, \cdot)$ se numește *inel* dacă

- $(A, +)$ este grup comutativ;
- $(A, \cdot)$ este monoid;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a, \forall a, b, c \in A$ (distributivitatea $\cdot$ față de $+$).

Dacă, în plus, monoidul $(A, \cdot)$ este comutativ, inelul A se numește *comutativ*.

Pentru un inel A, notăm cu $U(A)$ mulțimea elementelor inversabile față de înmulțire. Așadar, $U(A)$ este grup multiplicativ și, luat împreună și cu adunarea, $U(A)$ este un corp.

Cîteva elemente speciale din inele sînt următoarele.

Definiţie 1.2: Fie A un inel. Elementul $a \in A$ se numește *divizor al lui zero* (sau *zero-divizor*) dacă $a \neq 0$ și există $b \neq 0$ în A cu $ab = 0$. Un inel care nu are divizori ai lui zero se numește *integru*. Iar dacă este și comutativ, se numește *domeniu (de integritate)*.

Elementul $a \in A$ se numește *inversabil* sau *unitate* dacă există $b \in A$ cu $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

Elementul $a \in A$ se numește *idempotent* dacă $a^2 = a$ și *nilpotent* dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $a^n = 0$. Cel mai mic astfel de n se numește *indice de nilpotență*.

Definiţie 1.3: Fie A un inel și $B \subseteq A$ o submulțime a sa. B se numește *subinel* dacă B este subgrup aditiv al lui $(A, +)$, B este parte stabilă față de $\cdot$ și $1 \in B$.

B se numește *ideal* dacă este subgrup aditiv al lui $(A, +)$ și $\forall a \in A, aB \subseteq B (\Leftrightarrow a \cdot b \in A, \forall a \in A, b \in B)$. Se notează $B \trianglelefteq A$.

Definiţie 1.4: Fie A, B două inele. O funcție $f : A \to B$ se numește *morfism de inele* dacă este unitară, aditivă și multiplicativă, adică $f(1_A) = 1_B$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$ și $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in A$.

Definiţie 1.5: Fie A un inel. Se numește *caracteristica inelului* numărul natural $car(A)$ definit prin ordinul aditiv al elementului 1. Dacă acesta nu este finit, se definește $car(A) = 0$.

În general, caracteristica unui inel integru este zero sau un număr prim.

Definiţie 1.6: Fie A un inel și I un ideal al său. Putem defini grupul (aditiv) factor A/I și, în plus, îi putem da o structură de inel. Astfel, A/I devine inel, numit *inel factor*, cu operațiile: $(a+I)+(b+I) = (a + b) + I$ și $(a + I) \cdot (b + I) = (a \cdot b) + I$.

De asemenea, pentru inele are loc și teorema fundamentală de izomorfism.

Definiţie 1.7: Fie A un inel și P, M două ideale ale sale.

Idealul P se numește *prim* dacă oricînd $a \cdot b \in P$ rezultă $a \in P$ sau $b \in P$. Echivalent, dacă $a, b \notin P$, atunci $a \cdot b \notin P$.

Idealul M se numește *maximal* dacă oricînd $M \subseteq I$, pentru un alt ideal I, atunci neapărat $M = I$ sau $I = A$. Echivalent, M este element maximal al poset-ului idealelor lui A, ordonate cu incluziunea.

Definiţie 1.8: Fie A un inel și $X \subseteq A$ o submulțime a sa. Mulțimea:

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid x_i \in X, a_i \in A \right\}$$

se numește *idealul (drept) generat de* X. Dacă $X = \{a\}$, atunci idealul generat de X se numește *principal* și se notează $X = (a)$.

2 Exerciții

1. Arătați că un corp nu are ideale proprii. Deduceți că orice morfism nenul de corpuri este injectiv.

2. (a) Dați exemplu de un inel avînd un ideal, care nu este și subinel și de un inel avînd un subinel, care nu este și ideal.

(b) Dați exemplu de un morfism de inele $f : A \to B$ și de un ideal I al lui A astfel încît $f(I)$ să NU fie ideal al lui B.

3. Fie A un inel comutativ și unitar. Notăm cu $\mathcal{I}(A)$ mulțimea elementelor idempotente din A. Arătați că $\mathcal{I}(A)$ devine grup, cu operația:

$$x * y = x + y - 2xy, \forall x, y \in \mathcal{I}(A).$$

4. Arătați că are loc izomorfismul de inele $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$.

5. Fie A un inel comutativ și I un ideal al său. Fie $\sqrt{I} = \{x \in A \mid x^n \in I \text{ pentru un } n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $\sqrt{I}$ este ideal al lui A, că $I \subseteq \sqrt{I}$ și că $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. (Idealul $\sqrt{I}$ se numește *radicalul* idealului I.)

6. Formează divizorii lui zero un ideal într-un inel oarecare? Justificați.

7. Fie R, S două inele. Definim *inelul produs direct* $R \times S$, avînd ca submulțime subiacentă produsul cartezian $R \times S$, iar operațiile, definite pe componente:

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s') \qquad (r, s) \cdot (r', s') = (rr', ss'), \forall r, r' \in R, s, s' \in S.$$

Arătați că inelul comutativ R se poate scrie ca produs de două inele dacă și numai dacă conține un element idempotent diferit de 0 și 1. ($R \simeq Re \times R(1 - e)$)

8. Arătați că nu se poate scrie corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ ca o reuniune de subcorpuri proprii ale sale.

9. Arătați că există un izomorfism de inele $\mathrm{End}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$.

10. (a) Fie S o mulțime de numere prime (eventual vidă) și fie $\mathbb{Z}_S$ mulțimea fracțiilor a/b, cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, cu b avînd toți factorii primi în S. Arătați că $\mathbb{Z}_S$ este subinel al lui $\mathbb{Q}$.

(b) Determinați unitățile inelului $\mathbb{Z}_{(2)} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ impar}\}$.

11. Fie A o mulțime. Arătați că inelele $\mathbb{Z}_2^A = \{f : A \to \mathbb{Z}_2 \mid f \text{ funcție}\}$ și $(\mathcal{P}(A), \Delta, \cap)$ sînt izomorfe.

12. Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorfism de corpuri. Arătați că:

(a) $\forall x > 0, \varphi(x) > 0$;

(b) φ este funcție crescătoare;

(c) φ este funcția identitate.