Exercice 1

Appliquer la méthode des caractéristiques pour résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \partial_t f(t,x) + v \cdot \nabla_x f(t,x) + a(t,x) f(t,x) &= S(t,x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \ t > 0, \\ f(0,x) &= f^{in}(x), \quad x \in \mathbf{R}^N, \end{aligned}$$

où $a, \ S \in C^1(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^N)$ sont des fonctions données.

Exercice 2

On considère l'équation de Hopf vue en cours

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0, &\quad x \in \mathbf{R},\ \ t > 0, \\ u(0,x) = u^{in}(x), &\quad x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

où $u^{in} \in C_b^2(\mathbf{R})$ est une fonction donnée.
Soit γ une courbe caractéristique. Donner l'équation de

$$w_\gamma(t) = \partial_x u(t, \gamma(t))$$

et la résoudre.

Exercice 3

Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.