

Laboratorio Intermedio: Pre-Informe Oscilador Torsional

Simón Felipe Jimenez, Thomas A. Hernández
(sf.jimenez@uniandes.edu.co & t.andrade@uniandes.edu.co)

1: Objetivos del Experimento:

Para el experimento de *Oscilador Torsional*, nuestro principal objetivo es entender el fenómeno de las oscilaciones torsionales. Con esto en mente, estudiaremos el torque magnético y las oscilaciones armónicas simples magnéticas; y hallaremos la constante de torsión para un oscilador torsional y el factor de calidad de las oscilaciones amortiguadas.

2: Contexto Histórico:

Las oscilaciones son un fenómeno físico ampliamente estudiado. Empezaron a aparecer en las leyes de Hooke y, hoy en día, su presencia es prácticamente universal en todas las ramas de la física. En concreto, las oscilaciones torsionales han jugado un papel relevante en la física; gracias a ellas conocemos la ley de Coulomb y la constante de Gravitación Universal.

Las oscilaciones torsionales se empezaron a estudiar en el año 1777, cuando Coulomb creó la balanza torsional. Esta balanza consiste de un barra metálica con dos masas en los extremos, sujeta a un material elástico al que se le aplica torsión. Gracias a este instrumento Coulomb logró establecer el principio que describe el comportamiento de dos cargas eléctricas, la *Ley de Coulomb* [1].

Asimismo, Cavendish, haciendo uso de una balanza torsional, logró calcular la constante de gravitación universal. El resultado que obtuvo fue bastante bueno, dado los instrumentos empleados, $G = 6,74 \cdot 10^{-11}$. Su experimento consistía en colocar una balanza de torsión en presencia de una tercera masa y, por medio del torque medido y las leyes de Newton, obtener la constante de gravitación, desconocida hasta ese momento.

3: Marco Teórico:

Los osciladores torsionales son cuerpos rígidos, de momento de inercia I , que rotan entorno a una cuerda o un cuerpo elástico sobre el cual se suspenden [2]. El ejemplo más sencillo es un disco sostenido por una cuerda en su centro. Sabemos que el torque que presenta esta sistema está dado por $\tau = -\kappa\theta$. Si agregamos el factor de amortiguamiento, hallaremos la siguiente expresión que describa la oscilación:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0 \quad (1)$$

donde I es el momento de inercia, b el factor de amortiguamiento, θ el ángulo y κ la constante de torsión. Deducimos que la forma en que se comporte el disco es una oscilación amortiguada con frecuencia ω_0 y coeficiente de amortiguamiento γ , donde cada uno es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{b}{2\sqrt{\kappa I}} \quad (2)$$

Más en concreto la función del ángulo en función del tiempo será $\theta = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$. Los coeficientes de la ecuación se hallarán de la siguiente manera:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2I} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4I^2} - \frac{\kappa}{I}} = -\omega_0 \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3)$$

De los tres posibles casos en los que puede hallarse el sistema, inferimos que es una oscilación subamortiguada, i.e, $\gamma^2 < \omega_0^2$. Así, la solución final para describir la oscilación sería:

$$\theta(t) = C e^{-\omega_0 \gamma t} \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \gamma^2} + \varphi) \quad (4)$$

en la que C y φ se calcularían mediante condiciones iniciales del problema. Asimismo, si agregamos un torque, debido a interacciones magnéticas con el disco, repetiríamos el proceso para la ecuación homogénea, pero agregando el factor que corresponde a esta interacción adicional.

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa \theta = \mu k i(t) \quad (5)$$

4: Montaje Experimental:



Figura 1: Montaje experimental para un oscilador torsional. Las enumeraciones son utilizadas más adelante para explicar qué representa cada una. Imagen tomada de [3].

- (1) Oscilador traslacional, compuesto de un cuerpo rígido sujeto a un resorte, del que cuelga, y un sistema electrónico que permite su calibración. Conectamos la entrada *Angular Position* al osciloscopio (3) y las entradas de voltaje al generador de voltaje (4).

- (2) Generador de voltaje. Se conecta el voltaje al oscilador torsional (1) y, así, generar el torque adicional por intermedio de un campo magnético.
- (3) Osciloscopio. Mide la posición angular del disco de torsión y lo expresa como una función visible en la pantalla. Conectamos la entrada del osciloscopio a la salida de **Angular Position** del oscilador.
- (4) Adimentos al oscilador entre los que hay diferentes masas y cuadrantes. Estos elementos permiten modificar el momento de inercia del disco de torsión (1)
- (5) Computador. Nos permite descargar las gráficas que genera el osciloscopio y los datos que reporta. De este modo, se puede analizar con más detalle los resultados.

5: Metodología:

Antes de empezar con la toma de datos, es necesario hacer una calibración del rotor. Esto nos permite hallar el punto de equilibrio exacto y nos ayuda a disminuir la incertidumbre de las medidas.

I. Calibración del rotor:

Primero, conectamos el oscilador al osciloscopio. Luego, desplazamos el rotor 0,1 radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj. Observaremos que el disco retorna a su posición inicial, una vez llegue a este punto anotaremos el voltaje pico-pico que genera el sistema. Repetimos este proceso aumentando cada vez en 0,1 radianes. Con estos datos haremos una regresión lineal que nos permitirá saber en qué ángulo θ el V_{pp} es cero. Finalmente, colocamos el rotor en este ángulo y colocamos el parámetro **ZERO ADJUST**.

II. Aplicación del torque mecánico.

En primer lugar, tomamos un hilo y lo pasamos por las dos poleas laterales a la carcasa. Envolvemos el hilo alrededor de los dos tornillos que se hallan sobre el eje del rotor. **Nota:** Es importante que los hilos se envuelvan en sentido contrario, de lo contrario se cancelarán los torques. Seguidamente, anotamos la nueva posición de equilibrio y buscamos el radio del eje del rotor sobre el cual se engancha el hilo. Haciendo uso de los adiemntos del oscilador, colocamos varias masas, desde 500 g a 900g, anotando en cada caso la nueva posición de equilibrio. Repetimos el proceso cambiando la orientación como envolvimos los hilos.

Actividad I: Haga una gráfica de τ versus $\Delta\theta$. ¿En qué magnitud afecta el torque gravitacional al sistema? Halle la constante de torsión κ del oscilador torsional y compare con su resultado con el valor teórico $\kappa_{teo} = 0,058\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$.

III. Momento inercial:

Conectamos el calibrador del rotor al osciloscopio y escogemos los cursores temporales para medir los periodos en el osciloscopio. Tomamos notas del periodo de en función del momento de inercia para cada ciclo. Posteriormente, colocamos los cuadrantes de latón sobre el rotor y registramos nuevamente el periodo.

Actividad II: Use estos datos para graficar el periodo de oscilación T con respecto al número de masa añadidas N . Determine el momento de inercia inicial I y el valor de la constante de torsión κ . ¿Concuerdan sus resultados con la actividad anterior?

IV. Aplicación torque magnético:

Para este punto, se conecta el generador de voltaje. Tomamos la nueva posición de equilibrio en función de la corriente que induzcamos. Se deben tomar 20 valores distintos para valores tanto positivos como negativos de la corriente.

Actividad III: Grafique los datos de la corriente $i(t)$ con respecto a la posición angular $\Delta\theta$. Comente sobre sus resultados. ¿Para qué valores de $\Delta\theta$ obtiene una regresión lineal? ¿Cómo puede mejorar la relación lineal entre ambas variables? Determine el valor experimental del momentum magnético μ para el imán que se encuentra entre las bobinas

V. Amortiguamiento:

Desplace el disco de su posición de equilibrio y observe cómo evoluciona la evolución. Es importante determinar el tipo de amortiguamiento al que nos enfrentamos. Pause la señal con el botón **STOP** y mida las posiciones y los tiempos para los valles y crestas de la oscilación amortiguada. Repita este procedimiento cambiando dos veces las posiciones de los amortiguadores magnéticos.

Actividad IV: Realice con estos datos una regresión para hallar los valores del factor de calidad Q de cada amortiguamiento. Comente sobre sus resultados. ¿Son iguales los factores de calidad para cada caso? ¿Por qué?

VI. Resonancia:

Se conecta un generador de señales a la entrada de las bobinas. Con el osciloscopio tomamos medidas en la amplitud y de la fase en función de la frecuencia inducida. Se han de tomar suficientes datos para poder observar el comportamiento de resonancia cerca de la frecuencia natural. Realizamos un ajuste a los datos de fase y de amplitud en base a la solución de la ecuación 5. A partir de este ajuste, hallaremos el valor de la frecuencia de resonancia y del coeficiente de amortiguamiento. Se repite la medición para tres valores diferentes de amortiguamiento.

6: Ejercicios Teóricos:

A continuación se muestran las soluciones a cada uno de los interrogantes propuestos a lo largo de la Guía de Laboratorio preparada para la práctica del Oscilador Torsional:

Ejercicio:

- (a) Calcule el momento de inercial rotacional del disco I' al añadir n masas extras en forma de un cuarto de disco, cada una con masa M , radio interno R_1 y radio externo R_2 . Las masas extra determinan un momento de inercia adicional ΔI al sistema. ¿Cómo se relaciona el período de rotación T con respecto al incremento del momento de inercia ΔI ? ¿Podría determinar, por medio de esta relación, valores experimentales para el momento de inercia inicial I y la constante de torsión κ ? ¿Cómo cambia el período de rotación si las masas extra se distribuyen de forma inequitativa sobre el disco, tal que ocurra un desbalance en el sistema torsional?

Solución: La forma en la que las diversas variables del experimento se relacionan entre sí, se encuentra al momento de hablar acerca de los coeficientes de la ecuación diferencial (2). El momento de inercia total del sistema se calcula como:

$$I = I_0 + I_{\text{masas}}(n) \quad (6)$$

donde I_0 es el momento de inercia del sistema sin las masas, y $I_{\text{masas}}(n)$ el momento de inercia de las masas en función de la cantidad n que se ubiquen. El cálculo de este momento de inercia es posible para nosotros. Considerando que el área de un cuarto de círculo es $\pi R^2/4$, el valor de la masa de cada pieza será:

$$\begin{aligned} m &= \sigma \cdot A(r) = \frac{M}{\pi(R_2^2 - R_1^2)/4} \cdot \frac{\pi r^2}{4} \\ &= \frac{M}{R_2^2 - R_1^2} r^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Con esta información, el valor que se obtiene para el momento de inercia de las masas será:

$$\begin{aligned} I_{\text{masas}}(n) &= n \int_{R_1}^{R_2} r^2 dm = n \int_{R_1}^{R_2} \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2} r^3 dr \\ &= \frac{2nM}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{nM}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{R_2^4 - R_1^4}{2} = \frac{nM(R_2^2 + R_1^2)}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Nota: Este valor de momento de inercia asume que las masas están dispuestas de manera equitativa alrededor del disco. Ahora, si se considera el valor de la frecuencia natural de oscilación ω_0 , es posible realizar el siguiente despeje:

$$\begin{aligned} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} &\Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{\kappa}{I_0 + I_{\text{masas}}(n)} \\ \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 &= \frac{1}{\kappa} \left(I_0 + \frac{nM(R_2^2 + R_1^2)}{2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

donde los valores de κ y I_0 pueden llegarse a determinar si se realiza una regresión lineal de una gráfica de $(T/2\pi)^2$ contra n , donde la expresión que involucra la masa de cada pesa y los radios se puede calcular con los valores del laboratorio. Para responder a la pregunta final, si tomamos en cuenta lo destacado en la **Nota**, la forma en la que cambia ésta relación radica en que al disponer las masas de manera irregular, el cálculo del momento de inercia de cada masa cambia, generando complicaciones significativas en los cálculos generales. Además, para calcular las constantes sería necesario, sí o sí, conocer el valor de I_0 o κ para encontrar el otro.

- (b) Investigue sobre las propiedades electromagnéticas de una Bobina de Helmholtz. ¿Por qué resulta necesario usar un par de bobinas para construir la bobina de Helmholtz y no solo una? Determine la constante de Helmholtz k por medio de la geometría de las bobinas. La bobina de Helmholtz ideal se enrolla con respecto a un mismo punto sobre el centro de la bobina, tal que cada uno de los giros de la bobina se encuentran en el mismo lugar. No obstante, no todos

los giros del cable puede ubicarse en un mismo lugar experimentalmente, por lo que resulta más preciso usar la ley de Biot-Savart para obtener el campo magnético B de la bobina de Helmholtz. Encuentre el campo magnético B debido a una bobina de único giro circular, de radio R , con respecto a un punto que se encuentra a una distancia z del plano de la bobina. Usando el resultado anterior, encuentre el campo magnético por unidad de corriente B/i para un punto al origen de coordenadas debido un par de bobinas de único giro, cada una de radio a , localizadas a z y $-z$ del punto respectivamente. El campo magnético total por unidad de corriente de la Bobina de Helmholtz será dada por el valor anterior multiplicado por N . ¿Cómo se compara este resultado con la constante de Helmholtz k encontrada anteriormente para $N = 201$ y $z = 2,8$ cm?

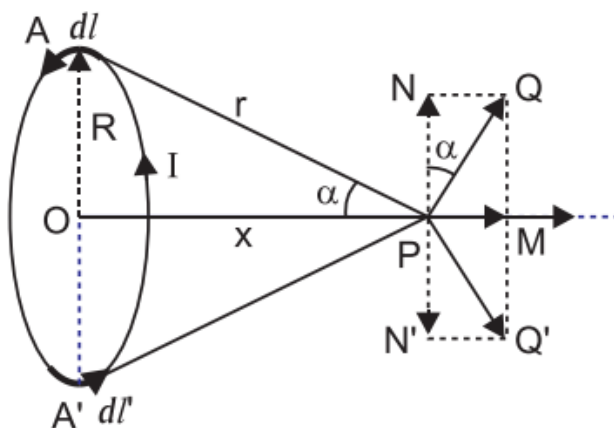


Figura 2: Representación gráfica del sistema de un solo aro. El campo magnético será calculado en el punto P . Imagen obtenida de [4]

Solución: La característica principal de una bobina de Helmholtz radica en su posibilidad de generar un campo magnético uniforme en todo el espacio. Ésta propiedad se consigue cuando dos sistemas de embobinado que describen una frontera circular se encuentran separados a una distancia idéntica al radio de este círculo. Así, para el punto central del sistema de dos bobinas se consigue un campo magnético uniforme en el centro. Si queremos determinar la constante de Helmholtz mediante un procedo de estimación geométrica, sabemos que éste debe ser proporcional al número de vueltas N e inversamente proporcional al radio R para un punto en el medio. Una expresión que podría valer sería:

$$\frac{B}{I} = \frac{2\mu_0 N}{R} \quad (10)$$

donde el 2 se debe a las dos bobinas, N es el número de vueltas, R el radio de las bobinas y μ_0 la permeabilidad magnética. Un acercamiento más formal se consigue con la ley de Biot-Savart. Donde si consideramos la representación gráfica en la Figura 2 se logra apreciar que, si se barre el valor de dB a lo largo de todo el aro, tendremos que las componentes van en las direcciones N y N' se cancelarán, quedando los términos perpendiculares al plano del aro. Por tanto, podemos expresar el campo magnético como:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot \|\vec{r} - \vec{r}'\|}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^2} \quad (11)$$

donde la simplificación sale de los vectores considerados tienen una separación de 90° . Integrando sobre todo el aro, de 0 a 2π (y reconociendo que $dl = R d\alpha$), se obtiene como respuesta:

$$B = \int_0^{2\pi} dB = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{d\alpha}{R^2 + z_0^2} = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2 + z_0^2)} \quad (12)$$

Como sólo nos interesa la componente perpendicular al plano del aro, la cual identificaremos como el eje z , y tomando el valor asociado a este eje (multiplicando por $\sin \alpha$), se obtiene:

$$B_z = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2 + z_0^2)} \cdot \sin \alpha = \frac{\mu_0 IR}{2(R^2 + z_0^2)} \cdot \frac{R}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \quad (13)$$

Con esta solución es posible generalizar para nuestro caso de las dos bobinas. Si se desplaza el plano de referencia a una distancia de $R/2$, y sumando la aportación de la otra bobina se obtiene:

$$\frac{B_{\text{coil}}(z)}{I} = \frac{\mu_0 N R^2}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{(R^2 + (z + R/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (z - R/2)^2)^{3/2}} \right\} \quad (14)$$

Con estas dos expresiones para la constante se puede calcular su valor considerando $N = 201$, $z = 0,0028$ m y $R = 0,06$ m:

$$\frac{B}{I} = \frac{2\mu_0 N}{R} = \frac{2(4\pi \times 10^{-7}) \cdot 201}{0,06} \approx 0,00842 \quad (15)$$

$$\frac{B_{\text{coil}}(z)}{I} = \frac{\mu_0 N R^2}{2} \cdot \left\{ \frac{1}{(R^2 + (z + R/2)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (z - R/2)^2)^{3/2}} \right\} \approx 0,003 \quad (16)$$

Como se logra apreciar, estos valores son muy alejados del valor real reportado por la teoría ($k \approx 3,22$ m·T/A), por razones que desconocemos en estos momentos.

- (c) Demuestre las afirmaciones hechas para la ecuación (4). Calcule explícitamente las soluciones para el caso sobreamortiguado y encuentre, para ambos casos, una expresión para el factor de calidad Q en función del número de ciclos $N_{1/2}$ que ocurren antes de que la amplitud del sistema C se disminuya a la mitad de su valor inicial. Investigue sobre distintos métodos para determinar experimentalmente si un sistema torsional se ha ajustado a un amortiguamiento crítico.

Solución: El estudio de estos sistemas empieza cuando queremos resolver la expresión asociada a las oscilaciones torsionales (1). El polinomio característico asociado tiene como raíces las que se aprecian en la expresión (3). Ahora bien, para estudiar los sistemas en los distintos regímenes, hay que notar que existen los siguientes casos:

- (1) **Caso subamortiguado** ($\gamma^2 < \omega_0^2$): En esta ocasión el término de la raíz involucra soluciones complejas, las cuales se pueden ilustrar como:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{-\omega_0 \gamma t} \left[A e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right] \\ &= e^{-\omega_0 \gamma t} [A \cos(\omega t) + iA \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) - iB \sin(\omega t)] \\ &= e^{-\omega_0 \gamma t} [(A + B) \cos(\omega t) + i(A - B) \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad (17)$$

definiendo $(A + B) = C \cos \varphi$ y $i(A - B) = C \sin \varphi$, junto con $\tan \varphi = i(A - B)/(A + B)$ se tiene como expresión resumida:

$$\begin{aligned}\theta(t) &= e^{-\omega_0 \gamma t} [C \cos \varphi \cos(\omega t) + C \sin \varphi \sin(\omega t)] \\ &= C e^{-\omega_0 \gamma t} \cos(\omega t - \varphi)\end{aligned}\quad (18)$$

La amplitud de oscilación que se tiene es el término que acompaña al coseno, el cual describe únicamente la oscilación. Calculando el tiempo que le toma llegar a la mitad de la amplitud inicial:

$$A_\theta(\tau) = C e^{-\omega_0 \gamma \tau} = \frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\ln(2)}{\omega_0 \gamma} \quad (19)$$

Ahora bien, una aproximación al número de ciclos que se llevan antes de reducir su amplitud a la mitad, se puede estimar haciendo uso de un cuasi-periodo:

$$N_{1/2} = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau \omega_0}{2\pi} = \frac{\ln(2)}{\omega_0 \gamma} \cdot \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\ln(2)}{2\pi \gamma} \quad (20)$$

donde se definir $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$. Para calcular el factor de calidad sólo es necesario considerar el análogo de circuitos al parámetro de amortiguamiento:

$$Q = \frac{1}{2\gamma} = \frac{\pi}{\ln(2)} N_{1/2} \quad (21)$$

Esto para el caso subamortiguado.

Para estos dos casos próximos cabe destacar que es posible obtener el valor del factor de calidad de forma similar, solo considerando que para encontrar los valores de tiempo asociados se recurre a métodos de integración numérica dado que no es posible realizar despejes de formas tan sencillas, además del hecho de que en ninguna se lleva a cabo una oscilación. A continuación sólo se muestran las expresiones asociadas a dichos casos:

(2) Caso de amortiguación crítica ($\gamma^2 = \omega_0^2$): La solución en este caso es de la forma:

$$\theta(t) = A e^{-\omega_0 \gamma t} + B t e^{-\omega_0 \gamma t} \quad (22)$$

debido a la presencia de dos raíces reales repetidas.

(3) Caso sobreamortiguado ($\gamma^2 > \omega_0^2$): Para dos raíces reales diferentes:

$$\theta(t) = e^{-\omega_0 \gamma t} \left[A e^{-\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} + B e^{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t} \right] \quad (23)$$

Por último, si queremos determinar un escenario de amortiguación crítica, resulta necesario el hacer la medición de un caso candidato a ser clasificado como tal. Posteriormente, realizando una regresión modelada con este tipo de amortiguamiento y el sobreamortiguado, observar a qué sistema se ajustan mejor los datos y analizar las semejanzas entre los parámetros ω_0 y γ para determinar si se cumple o no.

- (d) Determine el cambio en el parámetro b de amortiguamiento en la ecuación (5) en el caso en que la corriente $i(t)$ sea debida solamente a una f_{em} inducida en la bobina de Helmholtz debido al movimiento angular. Exprese sus resultados por medio de la resistencia de la bobina R y una resistencia externa R_{ext} . ¿Que tan significativo resulta este cambio?

Solución: Si tenemos un escenario en el que la corriente es producida por una f_{em} , la expresión que permite encontrar el valor de la corriente, dada la ley de Ohm y la Ley de Faraday-Lenz:

$$i(t) = \frac{f_{em}}{R_{Total}} = -\frac{1}{R + R_{ext}} \cdot \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (24)$$

Se puede determinar el flujo magnético mediante la expresión:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \hat{n} \, da = \int_0^\theta \int_0^R B r \, dr d\theta = \frac{R^2 B \theta}{2} \quad (25)$$

El cambio a lo largo del tiempo será:

$$i(t) = -\frac{R^2 B}{2} \frac{d\theta}{dt} \quad (26)$$

Introduciendo esta información de la ecuación diferencial no homogénea:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = -\mu k \cdot \frac{R^2 B}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(b + \mu k \cdot \frac{R^2 B}{2} \right) \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0 \quad (27)$$

Lo que introduce un nuevo valor para el parámetro de amortiguamiento que es proporcional al campo magnético generado.

- (e) ¿Qué condición debe cumplir φ con respecto al ángulo θ para llegar a la condición de equilibrio? Recuerde que en el oscilador torsional, la condición inicial se caracteriza por $\varphi = 90^\circ$, pero este debe cambiar con respecto al desplazamiento angular del rotor. Haga un diagrama que muestre su relación geométrica por medio del campo magnético B de las bobinas y el momentum magnético μ de los imanes del rotor.

Solución: Dado que estamos tratando de balancear el torque magnético con el elástico generado por la cuerda que conecta el sistema, la expresión característica es:

$$\tau_{elástico} + \tau_{mag} = -\kappa\theta + \mu B \sin \varphi = 0 \quad (28)$$

Luego, la relación necesaria que se debe satisfacer es que:

$$\sin \varphi = \frac{\kappa\theta}{\mu B} \Rightarrow \left| \frac{\kappa\theta}{\mu B} \right| \leq 1 \Rightarrow |\theta| \leq \frac{\mu B}{\kappa} \quad (29)$$

Es decir, con la expresión final se define un dominio para los valores de θ y, consecuentemente, para φ . Nótese que φ será igual a 90° en el único caso en el que se satisfaga la igualdad en la desigualdad anteriormente descrita.

Referencias

- [1] J. Filippini, “Torsional Oscillator Episode I: Transient Response,” 2020.
- [2] “Torsional Oscillator | TeachSpin.”
- [3] U. de los Andes, *Laboratorio Intermedio - Oscilador Torsional*. Universidad de Los Andes, 2024.
- [4] Sarthaks, “Using biot-savart deduce expression for the magnetic field on the axis of a circular current loop,” 2024. Accessed: 2024-09-16.