

# Experimento de Oscilador Torsional: Estudio de Oscilaciones Simples y Amortiguadas en una Cuerda de Piano

Simón Felipe Jiménez Botero\* and Thomas Andrade Hernández\*\*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 2 de octubre de 2024)

En el presente informe se exponen los resultados obtenidos tras la manipulación del montaje experimental del oscilador torsional elaborado por la empresa TeachSpin. A lo largo de este informe se realiza un análisis de las características asociadas a este tipo de sistemas que resultan análogos a un sistema masa-resorte amortiguado. Las mediciones realizadas permitieron hallar valores asociados a la constante de torsión del sistema y al momento magnético de los imanes del montaje, valores que el fabricante reporta como  $\kappa_{\text{fab}} = 0.059 \text{ Nm/rad}$  y  $\mu = 12.5 \text{ A}\cdot\text{m}^2$  respectivamente, mientras que el aproximado experimental obtenido fue muy satisfactorio para la constante de torsión, con un valor de  $\kappa = 0.059 \pm 0.002 \text{ Nm/rad}$ , mientras que para el momento magnético el valor obtenido resultó muy preciso pero altamente inexacto, con un total de  $\mu = 9.0 \pm 0.4 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ . Además, como apartado más cualitativo, se comprobó la tendencia incremental del factor de calidad de las oscilaciones subamortiguadas al disminuir el amortiguamiento del sistema, así como el observar, para amortiguamientos pequeños, la preservación de la frecuencia de resonancia del sistema, la cual resultó ser de  $\omega_0 = 864 \text{ mHz}$ .

## I. INTRODUCCIÓN

Los osciladores han sido objeto de estudio en la física desde hace ya varias centurias. Para este experimento nos hemos centrado en el estudio de los osciladores torsionales en diferentes situaciones. Los péndulos torsionales son cuerpos rígidos con momento de inercia  $I$  que rotan con respecto a un alambre fino [1]. Podemos manipular la forma del cuerpo rígido para modificar su momento de inercia, el amortiguamiento que sufre y los ángulos iniciales a fin de estudiar el comportamiento de este oscilador más a fondo.

Es importante destacar que el uso de osciladores torsionales ha sido de gran importancia para el desarrollo de teorías fundamentales en la física. Ejemplo de ello es cómo Cavendish hizo uso de un péndulo de torsión para hallar la constante de Gravitación Universal  $G$  presente en la ecuación formulada por Newton:  $F_g = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ . Asimismo, Coulomb usó un péndulo de torsión para estudiar el comportamiento de las cargas eléctricas. De este experimento surgió la *ley de Coulomb*, fundamental para el desarrollo del electromagnetismo[2]. En los últimos años, el uso de osciladores torsionales ha permitido la construcción de relojes cuánticos y se han observado ondas torsionales magnéticas de plasma en la superficie del Sol [1].

En nuestro experimento estudiamos el comportamiento de un cilindro de aluminio conectado a un alambre metálico muy tensionado. El torque que padece esta

cuerpo está dado por  $-\tau = \kappa\theta$ . Al desarrollar esta expresión, con el factor del amortiguamiento, hallaremos la expresión diferencial que describe el movimiento angular:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = 0 \quad (1)$$

donde  $I$  es el momento de inercia,  $\theta$  el ángulo,  $b$  el factor de amortiguamiento y  $\kappa$  la constante de torsión. Podemos expresar esta ecuación diferencial en función de la frecuencia de la oscilación  $\omega_0$  y el coeficiente de amortiguamiento  $\gamma$ :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{b}{2\sqrt{\kappa I}} \quad (2)$$

Al despejar esta expresión hallaremos la fórmula general de la oscilación en función del tiempo:  $\theta = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$ , donde los coeficientes son

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2I} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4I^2} - \frac{\kappa}{I}} = -\omega_0\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3)$$

De los posibles casos, nos centramos en la oscilación subamortiguada. Con esto en mente, reescribimos la ecuación de la posición angular en función del tiempo:

$$\theta(t) = C e^{-\omega_0\gamma t} \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \gamma^2} + \varphi) \quad (4)$$

en la que  $C$  y  $\varphi$  se calcularían mediante condiciones iniciales del problema. Asimismo, si agregamos un torque, debido a interacciones magnéticas con el disco, repetiríamos el proceso para la ecuación homogénea, pero agregando el factor que corresponde a esta interacción adicional.

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} + \kappa\theta = \mu k i(t) \quad (5)$$

\* Correo institucional: sf.jimenez@uniandes.edu.co

\*\* Correo institucional: t.andrade@uniandes.edu.co

## II. METODOLOGÍA

Para llevar a cabo las mediciones del oscilador torsional se hizo uso del montaje que se puede apreciar en la Figura 1



Figura 1. Montaje experimental para un oscilador torsional. (1) Oscilador traslacional, compuesto de un cuerpo rígido sujeto a un resorte, del que cuelga, y un sistema electrónico que permite su calibración. (2) Generador de voltaje. (3) Osciloscopio. Mide la posición angular del disco de torsión. (4) Generador de señales. Genera una señal eléctrica que nos ayuda a generar el torque magnético. (5) Multímetro. (6) Adimentos al oscilador entre los que hay diferentes masas y cuadrantes. Imagen tomada de [1].

Previo a la toma de medidas se hizo una calibración del rotor. Esto con el fin de hallar el punto de equilibrio del rotor.

**Calibración del rotor:** Conectamos el rotor al osciloscopio y rotamos el oscilador 0,1 radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Una vez llegamos al punto deseado, soltamos el disco y anotamos el voltaje pico-pico de la señal que se genera. Repetimos el proceso aumentado cada vez 0,1 radianes. Con los datos hacemos una regresión lineal y extendemos la función hasta hallar el ángulo  $\theta$  en que el voltaje es cero, correspondiente con el punto de equilibrio del rotor.

**Aplicación del torque mecánico:** Primero, se toma un hilo y se pasa por las dos poleas laterales de la carcasa. Luego, el hilo se enrolla alrededor de los dos tornillos situados en el eje del rotor. Es crucial que los hilos se enrollen en direcciones opuestas; de lo contrario, los torques se anularán. A continuación, se registra la nueva posición de equilibrio y se determina el radio del eje del rotor donde el hilo se sujeta. Utilizando los accesorios del oscilador, se colocan varias masas, desde 500 g hasta 900 g, registrando la nueva posición de equilibrio en cada caso. El proceso se repite cambiando la dirección en la que se enrollaron los hilos.

**Momento inercial:** Para este punto estudiaremos la relación entre la posición angular y el momento de inercia. Primero, medimos el radio interior y exterior de los cuadrantes de latón. Seguidamente, conectamos el rotor al osciloscopio y, con los calibradores, medimos el periodo de la oscilación. Finalmente, colocamos los cuadrantes de latón sobre el cuerpo rígido y medimos una vez más el periodo. Cada cuadrante de latón aporta un momento de inercia descrito como:

$$\Delta I = \frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2} \quad (6)$$

donde  $R_1$  es el radio interno del cuadrante,  $R_2$  su radio externo y  $m$  su masa.

**Aplicación torque magnético:** Para este punto, se conecta el generador de voltaje. Tomamos la nueva posición de equilibrio en función de la corriente que induzcamos. Se deben tomar 20 valores distintos para valores tanto positivos como negativos de la corriente. Por último graficamos la corriente  $i(t)$  en función de la posición angular  $\theta$ . La expresión que describe esta tendencia es:

$$\theta = \mu \frac{k}{\kappa} i \quad (7)$$

donde  $\mu$  es el momento magnético,  $k = 3234 \times 10^{-6}$  T/A es la constante de Helmholtz de las bobinas y  $\kappa$  es la constante de torsión de la cuerda.

**Amortiguamiento:** Desplace el disco de su posición de equilibrio y observe cómo se desarrolla la evolución del sistema. Es fundamental identificar el tipo de amortiguamiento presente. Detenga la señal utilizando el botón STOP y registre las posiciones y los tiempos correspondientes a los valles y crestas de la oscilación amortiguada. Repita este proceso modificando dos veces la posición de los amortiguadores magnéticos. Finalmente, realice una regresión lineal y halle el factor de calidad Q.

**Resonancia:** Se conecta un generador de señales a la entrada de las bobinas. Utilizando un osciloscopio, medimos la amplitud y la fase en función de la frecuencia inducida. Es necesario recopilar suficientes datos para observar el comportamiento de resonancia cerca de la frecuencia natural. Luego, ajustamos los datos de fase y amplitud utilizando la solución de la ecuación 5. A partir de este ajuste, determinaremos el valor de la frecuencia de resonancia y el coeficiente de amortiguamiento. Este procedimiento se repite para tres valores diferentes de amortiguamiento.

### III. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se muestra el análisis realizado para cada una de las actividades que fueron descritas en el apartado anterior. La división en secciones no implica que no exista relación entre lo comentado.

#### A. Calibración del Rotor:

Al momento de establecer las condiciones iniciales para cada una de las actividades posteriores, registramos los valores de voltaje para cada elongación realizada para así determinar el cero de nuestro sistema. Los resultados pueden apreciarse en la Figura 2.

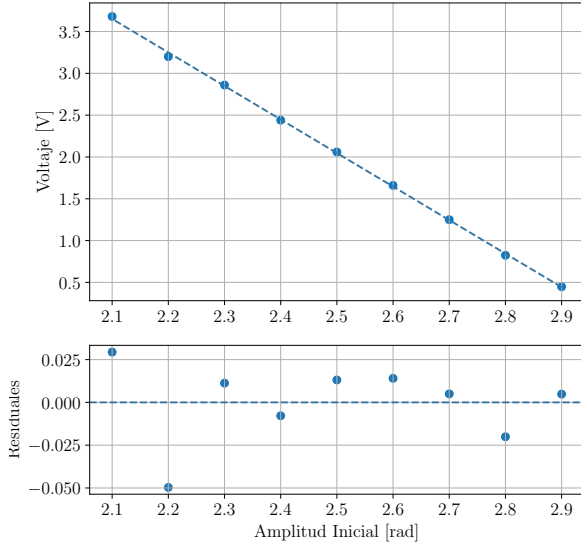


Figura 2. Gráfica del valor de voltaje en función del ángulo de elongación. Se obtuvo una tendencia decreciente sólo por el marco de referencia empleado. Los valores reportados en los residuales no siguen una tendencia concreta, por lo que la regresión presentada parece ser adecuada.

Haciendo uso de las constantes de la regresión lineal, calculamos como valor para nuestro cero de voltajes un ángulo aproximado de  $\theta_0 = 3.01 \pm 0.02$  radianes, este ángulo correspondiendo al valor que se debe de observar en el disco de cobre.

Una vez determinado el ángulo en donde nuestras oscilaciones no reportaban un valor de voltaje en el osciloscopio, procedimos a realizar mediciones para determinar la constante de torsión de la cuerda de piano.

#### B. Cálculo de la Constante de Torsión mediante el Torque Mecánico:

Los datos que recopilamos para este primer método para calcular la constante de torsión se encuentran descritos en la Figura 3. Para la regresión lineal que realizamos tomamos en cuenta que la suma de los torques generados por las masas en los laterales permiten escribir el torque como:

$$\tau = 2rmg = -\kappa\theta \quad (8)$$

Despejando  $m$  y representándolo como función de  $\theta$  nos permitió obtener el valor de la constante de torsión como:

$$\kappa = -2rgM \quad (9)$$

donde  $M$  es la pendiente de la regresión lineal,  $r$  es la distancia a la que se lleva a cabo el torque y  $g$  es la constante de la gravedad del planeta.

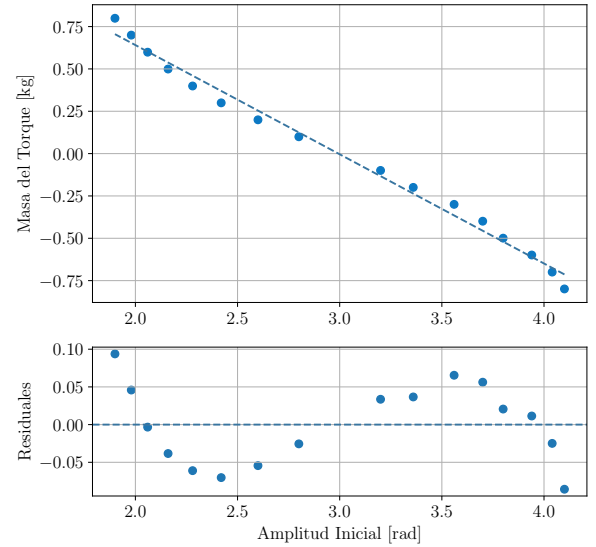


Figura 3. Gráfica del valor de la masa que genera el torque en función del ángulo que representa el punto de equilibrio. Notar que los valores de masa negativos son reportados así sólo para representar el sentido del torque. Es decir, las masas negativas son aquellas ubicadas al cambiar la dirección del torque inicial.

Una vez realizado el cálculo descrito previamente, el valor que obtuvimos para la constante de torsión fue de  $\kappa_1 = 0.161 \pm 0.005$  Nm/rad, un valor que se aleja significativamente del valor reportado por el fabricante [3], siendo este de  $\kappa = 0.059$  Nm/rad. El por qué de este valor considerablemente preciso, pero muy inexacto,

posiblemente se encuentre relacionado a errores asociados a la manipulación de los datos recopilados o algún fallo sistemático en nuestras mediciones.

### C. Cálculo de la Constante de Torsión mediante el Momento de Inercia:

Para este segundo método para calcular la constante de torsión tomamos los datos que se encuentran descritos en la Figura 4. La regresión lineal que realizamos se construyó partiendo de la relación:

$$T^2 = n \cdot \frac{4\pi^2 \Delta I}{\kappa} + \frac{4\pi^2 I_0}{\kappa} \quad (10)$$

la cual se deriva al determinar el valor de frecuencia de oscilación  $\omega_0$  de la ecuación 2. Considerando la pendiente de la regresión, es posible calcular la constante de torsión como:

$$\kappa = \frac{4\pi^2 \Delta I}{M} \quad (11)$$

donde  $M$  es la pendiente de la regresión y  $\Delta I$  representa el momento de inercia que contribuye uno solo de los cuadrantes de latón y es una cantidad que calculamos mediante la expresión 6 y los valores de  $R_1 = 2.25 \pm 0.01$  cm para el radio interior,  $R_2 = 4.70 \pm 0.01$  cm para el radio exterior y  $m = 212 \pm 1$  g para su masa.

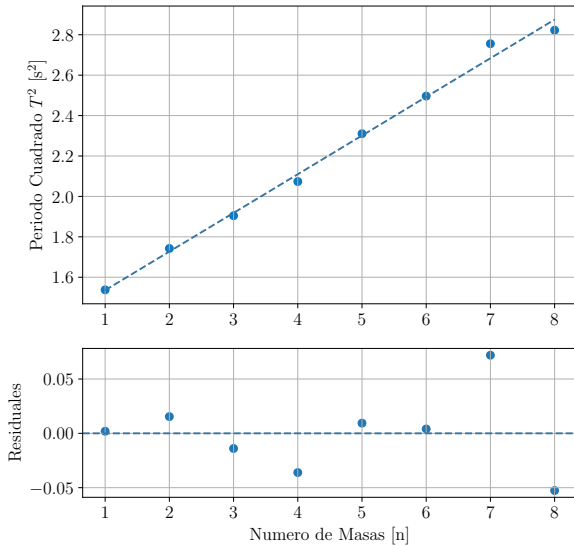


Figura 4. Gráfica del periodo al cuadrado de la oscilación en función del número de masas ubicadas. La tendencia muestra que, al incrementar este número de masas, el movimiento torsional de la cuerda empieza a ser más lento, incrementando su periodo en consecuencia. Además, la distribución aleatoria de los residuos indica que la regresión es adecuada.

En este caso el valor que encontramos para la constante de torsión fue de aproximadamente  $\kappa_2 = 0.059 \pm 0.002$  Nm/rad, un valor muy preciso y a la vez extremadamente exacto a comparación del encontrado en el método anterior. Tenemos la hipótesis de que la considerable viabilidad de éste método radica en que la forma en como se distribuyen los cuadrantes de latón es mucho más uniforme que la aplicación del torque mecánico debido a las masas colgantes.

### D. Cálculo del Momento Magnético mediante el Torque Magnético:

Los valores que recopilamos al momento de trabajar el torque magnético se encuentran descritos en la Figura 5. La regresión lineal fue construida a partir de la relación descrita en la ecuación 7, donde el momento magnético se calculó como:

$$\mu = \frac{M\kappa}{k} \quad (12)$$

donde  $M$  es la pendiente de la regresión,  $\kappa$  es la constante de torsión del sistema y  $k$  la constante de Helmholtz de las bobinas.

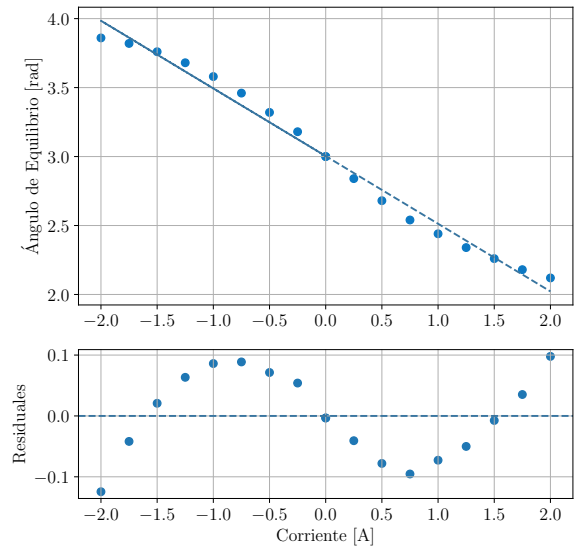


Figura 5. Gráfica del cambio del ángulo de equilibrio del sistema en función de la corriente transmitida por la fuente DC. La tendencia que muestra la gráfica es netamente decreciente, una vez más, dado el sistema de referencia seleccionado.

El valor que encontramos para el momento magnético es de  $\mu = 9.0 \pm 0.4$  A·m<sup>2</sup>, un valor algo preciso pero

aún así muy alejado del reportado por el fabricante [4] de  $\mu_{\text{fab}} = 12.5 \text{ A}\cdot\text{m}^2$ .

Antes de seguir exponiendo los resultados que obtuvimos, es de vital importancia analizar un asunto relevante que no se ha hablado hasta el momento. Al observar las Figuras 3 y 5 es posible notar que en la zona de los residuales las gráficas describen una tendencia claramente cúbica. Una de las posibles explicaciones que barajamos para este comportamiento tiene que ver con los valores elegidos para realizar las elongaciones del sistema. Es bien sabido que, al estudiar el movimiento oscilatorio, una de las aproximaciones realizadas para poder simplificar los modelos del problema es la de  $\sin \theta \approx \theta$ , esto para oscilaciones muy pequeñas.

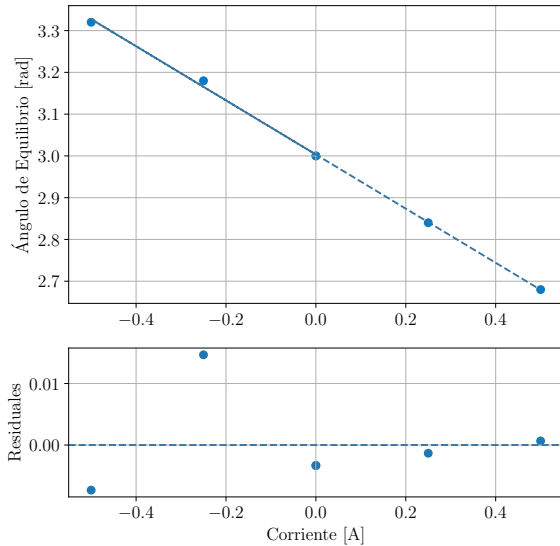


Figura 6. Gráfica modificada de la información presentada en la Figura 5. Al reducir el tamaño de las elongaciones se observa un comportamiento mucho más lineal a comparación del presentado en la Figura original.

No obstante, los valores trabajados no se encuentran en ese régimen de pequeñas oscilaciones, por lo que los efectos del término  $\theta^3/3!$  de la expansión en series de Taylor del seno empiezan a hacerse mucho más notables, al punto de manifestarse en los residuales. Observe la Figura 6. Si tomamos términos de elongación a una vecindad de 0.5 radianes, la regresión realizada tiene un comportamiento mucho más lineal, lo que soporta en gran medida la hipótesis previamente presentada.

### E. Sistemas Subamortiguados:

En la Figura 7 se logran apreciar tres oscilaciones subamortiguadas con diferente grado de amortiguamiento. A estos datos se les realizó una regresión de la forma presentada en la ecuación 4. Partiendo de las constantes de la regresión calculamos el factor de calidad de cada una de las oscilaciones siguiendo la fórmula:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad (13)$$

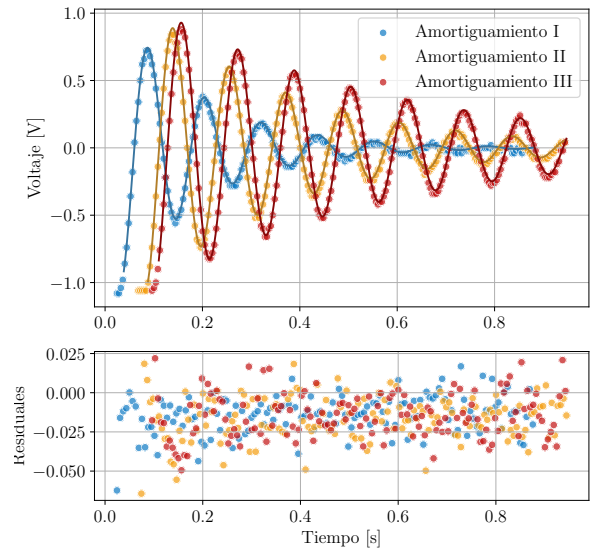


Figura 7. Gráfica de la amplitud de la oscilación en función del tiempo. En esta figura se logran apreciar tres distintos fenómenos de amortiguamiento del tipo subamortiguado. La más amortiguada es la representada con color azul, seguida de la amarilla y terminando con la roja, la que mantiene su oscilación durante mucho más tiempo.

Los factores de calidad de cada oscilación son  $Q_1 = 4.59 \pm 0.01$  para la curva azul,  $Q_2 = 8.15 \pm 0.02$  para la curva amarilla y  $Q_3 = 13.12 \pm 0.05$  para la curva roja. Estos resultados muestran que, a mayor amortiguamiento del sistema, menor será el factor de calidad presentado por la oscilación, una tendencia esperada ya que, si unimos las expresiones en las ecuaciones 2 podemos redefinir el factor de calidad como:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \cdot \frac{2\sqrt{\kappa I}}{b} = \frac{2\kappa}{b} \quad (14)$$

dada una misma cuerda, el factor de calidad  $Q$  incrementa si su amortiguamiento  $b$  se reduce.

### F. Frecuencia de Resonancia:

En la Figura 8 se logra apreciar el conjunto de datos recopilados, al barrer una misma señal sinusoidal del generador de señales a diferentes frecuencias en función de la amortiguación del sistema. Para hallar la frecuencia de resonancia se hizo uso de una regresión de la forma:

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}} \quad (15)$$

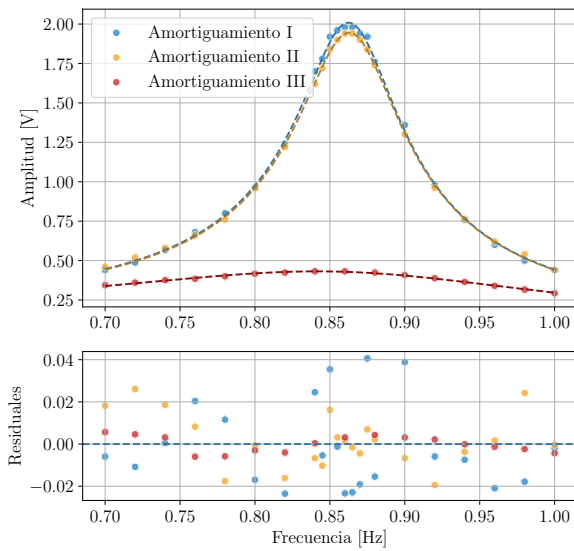


Figura 8. Gráfica de la amplitud de la oscilación en función de la frecuencia de la oscilación del generador de señales. Cada situación presentaba la misma amplitud de la señal, sólo que a diferentes tipos de amortiguamiento. Es importante notar que, a mayor amortiguamiento, menor amplitud de resonancia es capaz de alcanzar el sistema. Estos amortiguamientos no tienen nada que ver con los presentados en el apartado anterior.

Los resultados para la frecuencia de resonancia fueron  $\omega_0 = 864.2 \pm 0.2$  mHz para la curva azul,  $\omega_0 = 863.7 \pm 0.4$  mHz para la curva amarilla y  $\omega_0 = 872 \pm 1$  mHz para la curva roja. Uno esperaría, dada la ecuación 2, que la frecuencia de resonancia fuese la misma en los tres casos, cosa que parece cumplirse para la curva azul y la amarilla. No obstante, es posible que, al no aplicarse el amortiguamiento de los imanes de manera uniforme (un imán más dentro del disco que el otro) ello afectase el momento de inercia del sistema, modificando así el valor de esta frecuencia de resonancia que parece estar en  $\omega_0 = 864$  mHz.

### IV. CONCLUSIONES

A lo largo de este experimento realizamos un estudio de las oscilaciones torsionales de la cuerda de piano del montaje de TeachSpin. Los resultados obtenidos fueron altamente satisfactorios ya que logramos verificar gran parte de las tendencias mostradas por los modelos teóricos.

El cálculo de la constante de torsión resultó muy preciso y altamente exacto en lo que respecta al reportado por el mismo fabricante, siendo el que calculamos  $\kappa = 0.059 \pm 0.002$  Nm/rad y el reportado  $\kappa_{\text{fab}} = 0.059$  Nm/rad. Por otro lado, la determinación del momento magnético presentado por los imanes del montaje no fue del todo satisfactoria, reportando un valor de  $\mu = 9.0 \pm 0.4$  A·m<sup>2</sup>, siendo muy preciso pero muy alejado del reportado por el fabricante de  $\mu_{\text{fab}} = 12.5$  A·m<sup>2</sup>.

Además, al ver el comportamiento de oscilaciones subamortiguadas corroboramos la tendencia creciente del factor de calidad al momento de reducir el amortiguamiento. Por último, al observar el comportamiento de la frecuencia de resonancia al momento de variar tipos de amortiguamiento fuimos capaces de observar, para amortiguamientos pequeños, que el valor de esta se mantiene muy cercano al valor de la frecuencia de resonancia de la cuerda, que es de cerca de 864 mHz.

- 
- [1] U. de los Andes, *Laboratorio Intermedio - Efecto Hall* (Universidad de Los Andes, 2024).
  - [2] J. Filippini, «Torsional Oscillator Episode I: Transient Response,» (2020).
  - [3] TeachSpin, Inc., «The model system for simple harmonic behavior,» (2011).
  - [4] TeachSpin, Inc., «An instrument for all seasons,» (2013).
  - [5] S. F. Jiménez Botero and T. Andrade Hernández, «Laboratorio Intermedio,» (2024).

### V. APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

En este apartado se explicará brevemente los métodos empleados para calcular los errores de cada una de las mediciones expuestas. Cabe destacar que toda la información relacionada con estos procedimientos se encuentra en un repositorio de GitHub [5].

La propagación de los errores de un determinado valor  $Z$  se llevó acabo empleando la fórmula:

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_i^N \left( \frac{\partial Z}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2} \quad (16)$$

donde  $N$  es el número de parámetros que poseen incertidumbre asociada,  $x_i$  el parámetro en cuestión y  $\sigma_{x_i}$  la incertidumbre asociada a dicho parámetro. Para el desarrollo de regresiones lineales se deben considerar las expresiones:

- Pendiente de la regresión lineal:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (17)$$

- Incertidumbre de la pendiente de la regresión lineal:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{n \cdot \sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (18)$$

- Bias de la regresión lineal:

$$b = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n} \quad (19)$$

- Incertidumbre del bias de la regresión lineal:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sum (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (20)$$

donde  $n$  es el número de datos con los que se está trabajando.

Por otro lado, para las regresiones asociadas al comportamiento de los sistemas subamortiguados, así como la de la amplitud en función de la frecuencia del sistema, se hizo uso de la librería de Scipy, que hace uso del método de mínimos cuadrados y la determinación de la matriz de covarianza para obtener los valores de incertidumbre de cada uno de sus parámetros.