

Experimento del Efecto Hall: Análisis del Comportamiento del Voltaje y Coeficiente de Hall para Tarjetas de Germanio

Simón Felipe Jiménez Botero* and Thomas Andrade Hernández**

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 28 de agosto de 2024)

En el presente informe se exponen y discuten los resultados derivados de diversas mediciones realizadas sobre el montaje del Efecto Hall de la empresa PHYWE. Se emplearon tarjetas dopadas de electrones (n-Ge), huecos (p-Ge) o de ambas cantidades (In-Ge) para obtener información del voltaje de Hall, voltaje longitudinal, corriente de la tarjeta y campo magnético incidente para obtener valores del coeficiente de Hall R_H , conductividad σ y la brecha energética del conductor E_g . Se obtuvo un valor medio para el coeficiente de Hall de $R_H^p = 50.374 \pm 4 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$ para p-Ge y $R_H^n = -53.705 \pm 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{C}^{-1}$ para n-Ge, se logró verificar la tendencia de crecimiento o decrecimiento del coeficiente para cada tarjeta respectivamente, se obtuvieron valores para la resistencia y conductividad base de $R_h = 33.3 \pm 0.8 \Omega$ y $\sigma_0^h = 60.1 \pm 0.1 \Omega$ para la tarjeta de p-Ge, y $R_{e-} = 36.8 \pm 0.3 \Omega$ y $\sigma_0^h = 54.3 \pm 0.4 \Omega$, los cuales son muy cercanos a los reportados por el fabricante y por último se encontraron valores para la brecha de energía E_g , $E_g^{In} = 0.346 \pm 0.006$, $E_g^{e-} = 0.48 \pm 0.04 \text{ eV}$ y $E_g^h = 0.68 \pm 0.09 \text{ eV}$, siendo este último el más cercano a los $E_g = 0.66 \text{ eV}$ reportados por la literatura.

I. INTRODUCCIÓN

El efecto Hall es un fenómeno fundamental en la física de conductores, observable cuando un campo magnético es inducido en un material conductor a través del cual circula una corriente eléctrica. Este fenómeno provoca la aparición de un campo eléctrico transversal al flujo de corriente, originando un potencial eléctrico entre los extremos del conductor, conocido como "Voltaje de Hall"[1]. Este voltaje se genera debido al desplazamiento de las cargas eléctricas hacia los extremos del material bajo la influencia del campo magnético, y su magnitud es fácilmente medible, permitiendo el análisis de diversas propiedades del conductor. La expresión matemática del voltaje de Hall es:

$$V_H = \|E_y\| \cdot d = \frac{B_z \cdot j_x \cdot d}{n \cdot e} \quad (1)$$

El comportamiento del voltaje de Hall varía según las propiedades del material utilizado en el experimento, ya sea conductor, semiconductor o aislante [2]. Además, este voltaje es sensible a factores como la intensidad de la corriente, la magnitud del campo magnético, y la temperatura [3].

Para un análisis detallado del voltaje de Hall en función de la corriente aplicada, es esencial considerar la constante de Hall, R_H , que representa la pendiente de la función y depende de las condiciones experimentales.

El coeficiente de Hall se define como:

$$R_H = -\frac{1}{n \cdot e} = \frac{V_H w}{I_p B_z} \quad (2)$$

donde n es el número de portadores de carga, w es el grosor del conductor, I_p es la corriente que atraviesa el material, y B_z es el campo magnético aplicado.

Un detalle a tener en cuenta es que la densidad de portadores de carga se define a partir de la distribución de Fermi-Dirac mediante la relación:

$$n_h = 2 \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T} \quad (3)$$

Un aspecto interesante a explorar es el comportamiento de los semiconductores en el contexto del efecto Hall [4]. Los semiconductores, al doparse con impurezas, presentan una alteración en la energía accesible para la conducción. Para el efecto Hall, esto puede modelarse como un flujo de electrones en semiconductores tipo n, o un flujo de huecos en semiconductores tipo p. En estos casos, el coeficiente de Hall se expresa como:

$$R_H^{e-} = -\frac{1}{n_e e} \quad \text{y} \quad R_H^h = \frac{1}{n_h e} \quad (4)$$

donde el signo del coeficiente de Hall indica si el semiconductor es de tipo n o tipo p. Dado que tanto los electrones como los huecos contribuyen al flujo de corriente en un semiconductor, el coeficiente de Hall general se calcula mediante:

$$R_H = \frac{n_h \mu_h^2 - n_e \mu_e^2}{e(n_h \mu_h + n_e \mu_e)^2} \quad (5)$$

* Correo institucional: sf.jimenez@uniandes.edu.co

** Correo institucional: t.andrade@uniandes.edu.co

material. Por ejemplo, en materiales como el germanio, que actúan como aislantes a temperatura $T = 0K$, el aumento de la temperatura incrementa su conductividad, lo que a su vez incrementa el número de portadores de carga, modificando el coeficiente de Hall.

II. METODOLOGÍA

Para hacer este experimento, se usó el montaje de la figura 1.

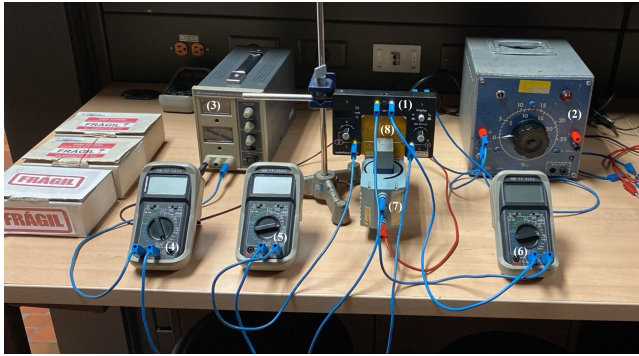


Figura 1. Montaje experimental para el efecto Hall. (1) Módulo de efecto Hall, (2) fuente de poder AC (12V - 5A), (3) fuente de poder DC, (4) multímetro para la corriente que fluye por las bobinas, (5) multímetro para el voltaje longitudinal, (6) multímetro para el voltaje de Hall, (7) bobina doble y (8) tres tarjetas de germanio (intrínseca, n-Ge y p-Ge).

Primero, tomamos las medidas del campo magnético en función de la corriente eléctrica que fluye a través de las bobinas y así hallar una relación lineal de ambos datos y luego usar esta regresión. Posteriormente, medimos el voltaje de Hall en función de la intensidad de corriente I_P para varios campos magnéticos constantes y medimos el voltaje en función del campo magnético para varias intensidades de corriente constantes.

Todo esto se hizo para cada uno de los semiconductores. Luego, medimos la resistencia longitudinal para campo magnético 0, R_0 , a temperatura e intensidad de corrientes constante, por medio de la ley de Ohm. Para la misma corriente, aumentamos gradualmente el campo magnético y medimos la resistencia longitudinal, R_m , con la ley de Ohm. Todo eso se hizo para cada uno de los semiconductores. Finalmente, para un campo magnético nulo y una corriente fija, $I_P = 30mA$, medimos el voltaje longitudinal a medida que la temperatura bajaba. Seguidamente, repetimos la medición para un campo magnético no nulo y midiendo el voltaje de Hall. Se repitió el proceso para las otras tres tarjetas.

III. ANÁLISIS DE RESULTADOS

A. Caracterización del Campo Magnético:

En este primer apartado se encuentra la relación entre campo magnético incidente en función de la corriente de la fuente de corriente directa. Como se logra apreciar en la figura 2, el comportamiento que tienen estas magnitudes es de crecimiento lineal, tal y como se espera en un sistema de embobinado.

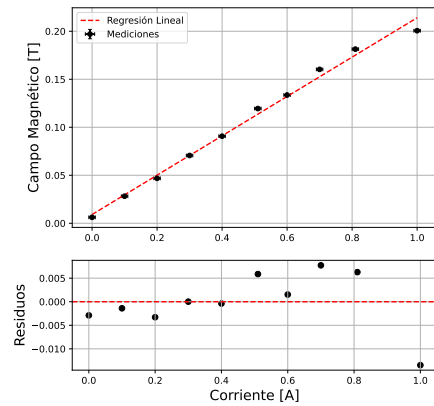


Figura 2. Comportamiento del campo magnético B_z en función de la corriente I . Los valores medidos muestran una tendencia de crecimiento lineal, la cual se predice con una regresión de la forma: $B_z(I) = (0.205 \pm 0.007) \cdot I + (0.009 \pm 0.004) T$, midiendo la corriente en amperios.

Se logra verificar que esta regresión es buena debido a que los residuales se encuentran muy cerca del modelo generado. Partiendo de esta información, los campos magnéticos reportados se verán ligados a la regresión previamente expuesta.

B. Medición del Voltaje de Hall para Tarjetas n-Ge y p-Ge:

Para tarjetas de p-Ge y n-Ge se realizaron mediciones para su voltaje de Hall V_H y la corriente del módulo I_p para un campo magnético B_z constante. De estas mediciones se obtuvo el valor de los coeficientes de Hall R_H haciendo uso de la ecuación (2) y una regresión lineal.

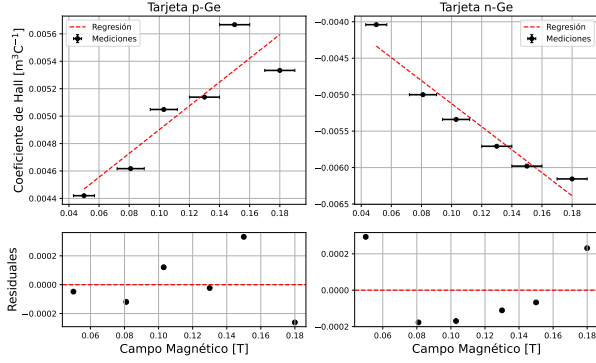


Figura 3. Comportamiento del coeficiente de Hall R_H al incrementar el campo magnético B_z . A la izquierda se muestran los datos de la tarjeta p-Ge y a la derecha los de la tarjeta n-Ge. La regresión lineal realizada es meramente ilustrativa.

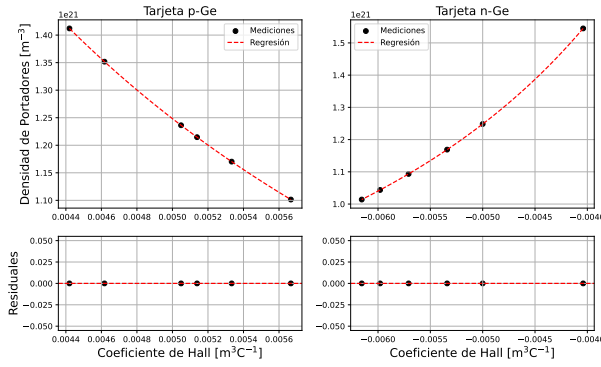


Figura 4. Comportamiento de la densidad de los portadores de carga n en función del coeficiente de Hall R_H . A la izquierda está la información de la tarjeta p-Ge, a la derecha la de n-Ge. La tendencia obtenida es proporcional a $1/R_H$, lo cual es respaldado por la regresión. Los residuos dan valores muy cercanos a cero, lo que nos dice que las mediciones son muy fieles a los resultados del modelo.

Obsérvese que en la figura 3 se muestra el comportamiento del coeficiente de Hall para ambas tarjetas, describiendo un comportamiento de crecimiento lineal de éste para la tarjeta p-Ge, mientras que uno de decrecimiento lineal para la tarjeta n-Ge. Este pequeño detalle se encuentra descrito en la ecuación (4), donde el valor del coeficiente será positivo en caso de hablar de portadores de carga positivos (los huecos) y negativo en el caso opuesto (los electrones). Por tanto, la tendencia observada es congruente con la teoría. El valor medio del coeficiente de Hall, para cada tarjeta, es:

$$R_H^p = 50.374 \pm 4 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{C}^{-1} \quad (6)$$

$$R_H^e = -53.705 \pm 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3\text{C}^{-1} \quad (7)$$

Por otra parte, estas mediciones del coeficiente de Hall permitieron establecer una línea de tendencia de la densidad de portadores de carga (n_h para la tarjeta p-Ge, n_e para la tarjeta n-Ge) en función del coeficiente de Hall reportado, tal y como se aprecia en la figura 4.

De todas estas mediciones se es posible deducir que el comportamiento de los portadores de carga de las tarjetas de p-Ge y n-Ge resulta de tipo extrínseco, en tanto el sistema no se encuentra sometido a un gradiente de temperatura y los resultados van de acorde a lo teorizado para los conductores de este tipo en particular, dado que de no ser muestras dopadas representaría el usar la ecuación (5) como modelo.

C. Magnetorresistencia para Tarjetas n-Ge y p-Ge:

Realizando un análisis un poco más profundo en las tarjetas p-Ge y n-Ge, se decidió observar el comportamiento de la resistencia del circuito en función de diferentes valores de campo magnético B_z y de corrientes I_p (esto último para obtener las regresiones para el valor de cada resistencia). Estas mediciones dieron como resultado a las resistencias iniciales:

$$R_h = 33.3 \pm 0.8 \, \Omega \quad \text{y} \quad \sigma_0^h = 60.1 \pm 0.1 \, \Omega \quad (8)$$

$$R_e = 36.8 \pm 0.3 \, \Omega \quad \text{y} \quad \sigma_0^e = 54.3 \pm 0.4 \, \Omega^{-1}\text{m}^{-1} \quad (9)$$

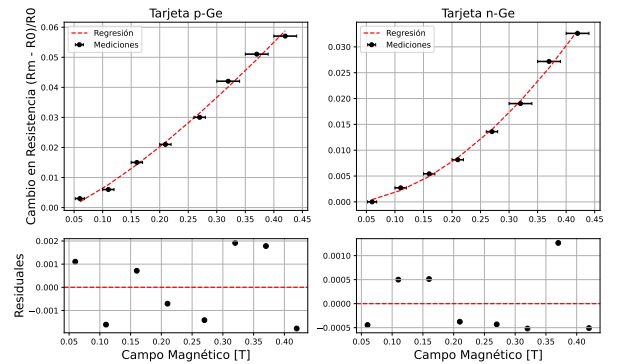


Figura 5. Comportamiento del cambio de la resistencia de las tarjetas $\Delta R/R_0$ en función del campo magnético B_z . Se observa una regresión similar a la descrita en la ecuación (10). El modelo obtenido para la tarjeta p-Ge es: $\Delta R/R_0 = (0.18 \pm 0.02)B^{1.9 \pm 0.1}$ y para la tarjeta n-Ge es: $\Delta R/R_0 = (0.19 \pm 0.02)B^{1.3 \pm 0.2} - (0.003 \pm 0.003)$.

Comparando estos valores con lo reportado por el fabricante (ver [5]) se logra observar una semejanza mucho más evidente, donde para las resistencias se reportan valores de $R_h = 35.5 \Omega$ y $R_{e-} = 37.3 \Omega$, mientras que para las conductividades se reportan $\sigma_0^h = 57.14 \Omega^{-1}m^{-1}$ y $\sigma_0^{e-} = 53.6 \Omega^{-1}m^{-1}$. Dando así seguridad de los resultados derivados.

Adicional al análisis previo, se estudió el cambio de la resistencia $\Delta R/R_0$ en función del campo magnético B_z tal y como se aprecia en la figura 5. Para modelar esta tendencia se hizo uso de una regresión de la forma:

$$\left(\frac{R_m - R_0}{R_0}\right) = aB^b + c \quad (10)$$

El por qué de este comportamiento lo encontramos en una propiedad importante para ciertos metales, la magnetorresistencia. Esta propiedad indica que, a medida que el campo magnético es variado, así también lo hace la resistencia.

Esta tendencia, aunque a una escala de campo magnético superior, es estudiada por Furth y Waniek (ver [6]) y resulta en un comportamiento similar al reportado en la Figura 5. Nótese que el valor de la magnetorresistencia en la tarjeta p-Ge es considerablemente superior al presente en la tarjeta n-Ge, mientras que en la literatura se muestra que en altas intensidades esto suele ser lo contrario. No obstante, como no se conoce el grado del dopaje de las tarjetas, concluir acerca de este apartado no resulta adecuado.

D. Conductividad y Temperatura para tarjetas n-Ge, p-Ge y In-Ge:

El primer apartado de esta sección muestra un método para encontrar el valor de la energía asociada a la banda de conducción E_g de cada tarjeta dado un campo magnético B_z nulo y una corriente I_p constante. Para ello fueron recopilados datos de temperatura y voltaje longitudinal para determinar la conductividad de cada tarjeta, tal y como se aprecia en las figuras 6 y 7.

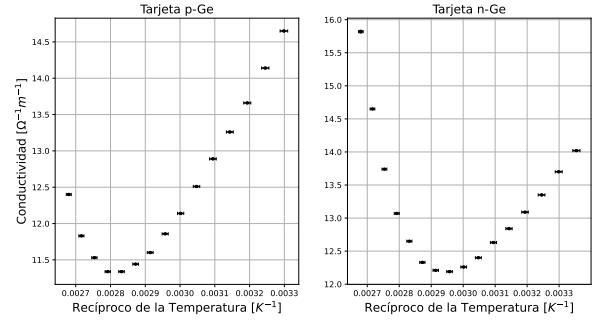


Figura 6. Conductividad eléctrica σ en función del recíproco de la temperatura. A la izquierda está la información de la tarjeta p-Ge, a la derecha la de n-Ge, ambas con corriente $I_p = 30$ mA.

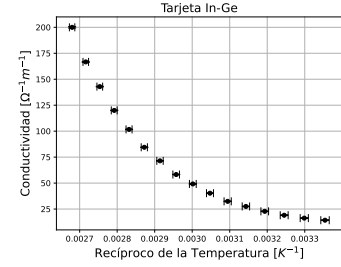


Figura 7. Conductividad eléctrica σ en función del recíproco de la temperatura para la tarjeta de germanio intrínseca, usando una corriente $I_p = 5$ mA.

Partiendo de esta información se buscó determinar regiones en las que las placas estuviesen en la región intrínseca de conductividad, esto es:

$$\sigma(T) = \sigma_0 e^{-E_g/k_B T} \quad (11)$$

Esta expresión puede ser linealizada, esto hace que se trabaje con:

$$\ln(\sigma(T)) = \ln(\sigma_0) - \frac{E_g}{k_B T} \quad (12)$$

Es decir, se buscan regiones en las que, dada esta reparametrización, se tenga un comportamiento decreciente. Las regiones que satisfacen este fenómeno son las seleccionadas en las figuras 8 y 9, a las cuales se les aplicó una regresión lineal para así encontrar el valor de la brecha energética, reconociendo que:

$$m = -\frac{E_g}{k_B} \Rightarrow E_g = -mk_B \quad (13)$$

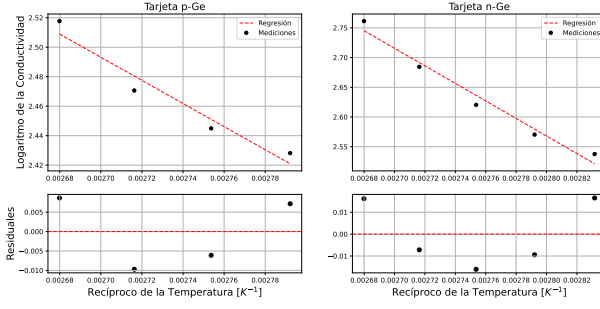


Figura 8. Variación del logaritmo de la conductividad en función del recíproco de la temperatura en la región intrínseca de conducción. A la izquierda está la información de la tarjeta p-Ge, a la derecha la de n-Ge. Los valores de la regresión son: $\ln(\sigma) = -(700 \pm 100) \cdot 1/T + (4.6 \pm 0.4)$ para p-Ge y $\ln(\sigma) = -(1400 \pm 100) \cdot 1/T + (6.7 \pm 0.4)$ para n-Ge.

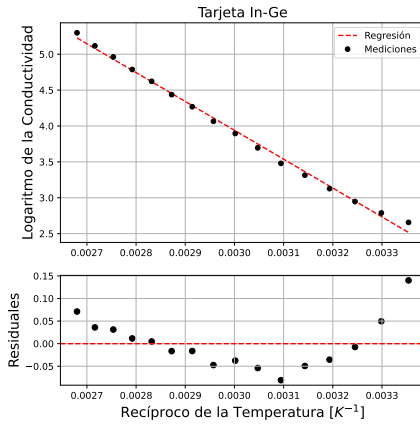


Figura 9. Variación del logaritmo de la conductividad en función del recíproco de la temperatura en la región intrínseca de conducción para la tarjeta de In-Ge. Los valores obtenidos para esta regresión son: $\ln(\sigma) = -(4020 \pm 70) \cdot 1/T + (16.0 \pm 0.2)$.

Los valores obtenidos para la brecha energética en el n-Ge $E_g^{e^-} = 0.13 \pm 0.01$ eV; en el p-Ge $E_g^h = 0.07 \pm 0.01$ eV y el In-Ge $E_g^{In} = 0.346 \pm 0.006$ eV. Estos valores se encuentran muy alejados del valor reportado por la literatura (ver [7]), el cual es 0.66 eV. El por qué de estos resultados precisos pero altamente inexactos se puede asociar, muy posiblemente, a un error sistemático al momento de tratar con el Módulo de Hall y su característica de incremento de temperatura.

El segundo de los apartados a desarrollar consiste en utilizar un campo magnético no nulo, en este caso de $B_z = (300 \pm 20)$ mT, y registrar valores de voltaje de Hall V_H y temperatura T . Para poder hallar el valor

de la energía de la banda de valencia se necesita linealizar la expresión de la ecuación (??), obteniendo como resultado:

$$\ln(T^{3/2}R_H) = \frac{E_g}{2k_B T} - \ln(\beta) \quad (14)$$

Donde el β es igual a:

$$\beta = 2e \left(\frac{k_B}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} \quad (15)$$

y nuestra brecha energética se calcula como:

$$E_g = 2k_B m \quad (16)$$

donde m es la pendiente de la regresión. Partiendo de esto se calculó el valor del coeficiente de Hall usando la ecuación (2) y se acomodaron los valores para obtener la configuración de datos en la figura 10, de la cual se seleccionó la región de conductividad intrínseca y se obtuvieron los resultados de la figura 11.

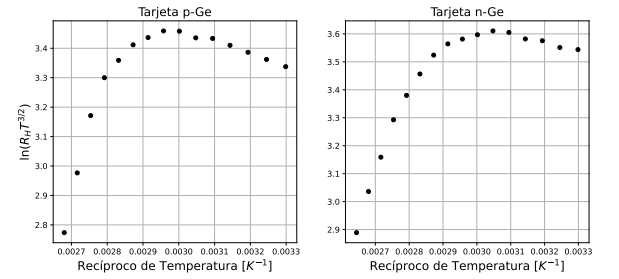


Figura 10. Compilación de los datos del $\ln(R_H T^{3/2})$ en función del recíproco de la temperatura. A la izquierda está la información de la tarjeta p-Ge, a la derecha la de n-Ge.

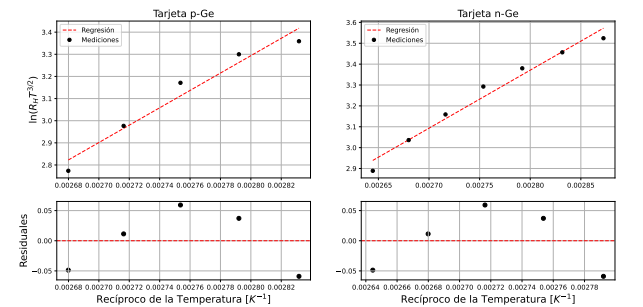


Figura 11. Regresión lineal de los datos reportados en la figura 10 que se encuentran en la zona de conducción intrínseca. Las regresiones se dicen adecuadas en tanto los residuales son muy cercanos a cero.

De estas regresiones se obtuvieron valores de la brecha energética, de $E_g = 0.48 \pm 0.04$ eV para la tarjeta

n-Ge y $E_g = 0.68 \pm 0.09$ eV para la tarjeta p-Ge. Nótese que estos valores resultan considerablemente precisos en comparación a los del anterior método anterior. Destacar que el valor más cercano es el de la tarjeta p-Ge, siendo que la tarjeta n-Ge sigue muy lejana a los valores esperados.

IV. CONCLUSIONES

A lo largo del experimento se lograron apreciar diversas tendencias al momento de obtener los resultados. Se logró con éxito la descripción del comportamiento del coeficiente de Hall para las tarjetas de n-Ge y p-Ge, siendo decreciente y creciente respectivamente, al igual que la verificación de las tendencias descritas en la ecuación (4) para las densidades de los portadores de carga y sus respectivos coeficientes de Hall.

Por otro lado, el estudio de la magnetorresistencia en las tarjetas, partiendo del cambio relativo en las resistencias $\Delta R/R_0$ con respecto al campo magnético brindó resultados altamente congruentes con los reportados por el propio fabricante, mientras que para las conductividades propiamente dicho se puede comparar con la tendencia descrita Morin y Maita (ver [8]), donde se logra apreciar que estos valores se encuentran en la vecindad de los 50 a 60 $\Omega^{-1}m^{-1}$. Adicionalmente al

estudio de este cambio en la resistencia de las tarjetas se estudia más a profundidad en el escrito de Furth y Wanick [6], donde los resultados que reportan dan soporte a la relación de potencia que se utiliza en el ajuste.

Para finalizar, en la búsqueda del valor de la energía de la banda de conducción se obtuvieron resultados muy desalentadores para un valor de campo magnético nulo. El motivo del fracaso de estas medidas puede verse asociado a inconvenientes con el manejo del Módulo de Hall y su característica de calentador, o también podría asociarse a errores humanos relacionados con la recopilación de los datos. No obstante, al emplear el segundo método se obtuvieron resultados mucho más parecidos a los 0.66 eV reportados por la literatura, siendo el más parecido el asociado a la tarjeta de p-Ge, siendo este de $E_g = 0.68 \pm 0.09$ eV.

A nivel general los resultados obtenidos resultan medianamente satisfactorio. Las tendencias que se esperan para cada una de las variables del problema son las predichas en la teoría, lo que va de la mano del objetivo principal, el entender el fenómeno del efecto Hall. Sin embargo, resulta de gran importancia el mejorar los protocolos para el arme del montaje y los métodos de medición para evitar el tipo de inconvenientes que se tuvieron al momento de calcular la energía de la banda de conducción para el campo magnético nulo.

-
- [1] U. de los Andes, *Laboratorio Intermedio - Efecto Hall* (Universidad de Los Andes, 2024).
 - [2] R. Karplus and J. Luttinger, *Physical Review* **95**, 1154 (1954).
 - [3] M. Abd El-Aziz, *Meccanica (Milan)* **45**, 97 (2010).
 - [4] «Hall effect, n-ge, carrier board | phywe,» .
 - [5] «Hall effect in n- and p-germanium,» https://www.phywe.com/experiments-sets/university-experiments/hall-effect-in-n-and-p-germanium_11052_12085/.
 - [6] H. P. Furth and R. W. Wanick, *Phys. Rev.* **104**, 343 (1956).
 - [7] J. W. Precker and M. A. da Silva, *American Journal of Physics* **70**, 1150 (2002), https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-pdf/70/11/1150/7530288/1150_1_online.pdf.
 - [8] F. J. Morin and J. P. Maita, *Phys. Rev.* **94**, 1525 (1954).
 - [9] S. F. Jiménez Botero and T. Andrade Hernández, «Laboratorio Intermedio,» (2024).

V. APÉNDICE DE CÁLCULO DE ERRORES

En este apartado se explicará brevemente los métodos empleados para calcular los errores de cada una

de las mediciones expuestas. Cabe destacar que toda la información relacionada con estos procedimientos se encuentra en un repositorio de GitHub [9].

Dado que la librería Numpy de Python trabaja con el método de los mínimos cuadrados, las expresiones que rigen estos parámetros son:

- Pendiente de la regresión lineal:

$$m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (17)$$

- Incertidumbre de la pendiente de la regresión lineal:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{n \cdot \sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (18)$$

- Bias de la regresión lineal:

$$b = \frac{\sum y_i - m \sum x_i}{n} \quad (19)$$

- Incertidumbre del bias de la regresión lineal:

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{n-2} \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sum (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (20)$$

donde n es el número de datos con los que se está trabajando.

Para el cálculo de los valores del coeficiente de Hall, conductividad y la brecha energética se deben tener presentes las incertidumbres de los instrumentos, las cuales son:

$$\sigma_V = 0.001V \quad \sigma_A = 0.01A \quad \sigma_{A'} = 0.001A$$

donde σ_V es la incertidumbre asociada a los multímetros midiendo el voltaje de Hall y el voltaje

longitudinal, σ_A la incertidumbre del multímetro que mide la corriente asociada al campo magnético y $\sigma_{A'}$ la incertidumbre del amperímetro del Módulo de Hall.

Los cálculos asociados a las incertidumbres de los valores encontrados se usó la forma general:

$$\sigma_X = |X| \cdot \sqrt{\sum_i \left(\frac{\sigma_i}{X}\right)^2} \quad (21)$$

Donde X es el valor al que le buscamos la incertidumbre y la sumatoria de la raíz abarca las incertidumbres de cada uno de las mediciones i y sus incertidumbres σ_i involucradas en el cálculo de la X . Para el próximo laboratorio se espera emplear el método de propagación de errores convencional.