Laboratorio Intermedio: Pre-Informe de Torque Magnético

Simón Felipe Jimenez, Thomas A. Hernández
(sf.jimenez@uniandes.edu.co & t.andrade@uniandes.edu.co)

1: Objetivos del Experimento:

Los objetivos de este experimento son medir el momento magnético de un sistema utilizando diferentes métodos dinámicos, comprender el fenómeno de resonancia magnética nuclear, evidenciar la precesión del vector de momento angular causada por un torque en presencia de un campo magnético y calcular la fuerza experimentada por un dipolo magnético debido a un campo magnético no uniforme.

2: Contexto Histórico:

El electromagnetismo es un área de la física que ha intrigado a la humanidad desde tiempos antiguos. Para finales del siglo XVIII y mediados del XIX, la ley de Coulomb y los descubrimientos experimentales de Michael Faraday permitieron ahondar más en la explicación de muchos de estos fenómenos. En 1820, Hans Christian Orsted descubrió la relación entre corrientes eléctricas y campos magnéticos, al observar que una corriente desviaba la aguja de una brújula. Este hallazgo sentó las bases para que científicos como Laplace y Ampère formularan leyes más precisas sobre estas interacciones [1].

Se estableció que un pequeño lazo de corriente puede ser modelado como un dipolo magnético, idea análoga a un dipolo eléctrico (dos cargas opuestas), pero aplicada al magnetismo. El momento dipolar magnético se definió como:

$$\vec{\mu} = I \cdot A \cdot \hat{n} \tag{1}$$

donde I es la corriente y A el área de la espira. En 1820, Ampère formuló su conocida Ley de Ampère, que describe cómo las corrientes eléctricas generan campos magnéticos y ejercen fuerzas entre sí. Más adelante, la teoría electromagnética, formalizada por James Clerk Maxwell, permitió derivar la relación entre el torque magnético $\vec{\tau}$, el campo magnético $\vec{B}$ y el momento magnético $\vec{\mu}$.

3: Marco Teórico:

El momento magnético, $\vec{\mu}$, es un vector que se dirige del polo sur al polo norte de un imán, cuya magnitud se relaciona con la magnitud del campo magnético que genera el imán. Cuando hacemos interactuar un campo magnético uniforme con el imán, generaremos un torque al imán que viene dado por la siguiente expresión [2]:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{2}$$

donde $\vec{\tau}$ es el torque que experimenta el imán, $\vec{\mu}$ el momento magnético del imán y $\vec{B}$ el campo magnético uniforme. Asimismo, si hacemos interactuar el imán con un campo magnético no uniforme, éste experimenta una fuerza que viene dada por la expresión:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \tag{3}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza que experimenta el imán y $\vec{\nabla}$ el gradiente.

Finalmente, es importante recordar que el momento magnético se puede modelar como como un bucle de corriente, de área A e intensidad de corriente I, donde la dirección estará determinada por la ley de la mano derecha. La expresión del momento magnético queda como la fórmula 1

4: Montaje Experimental:

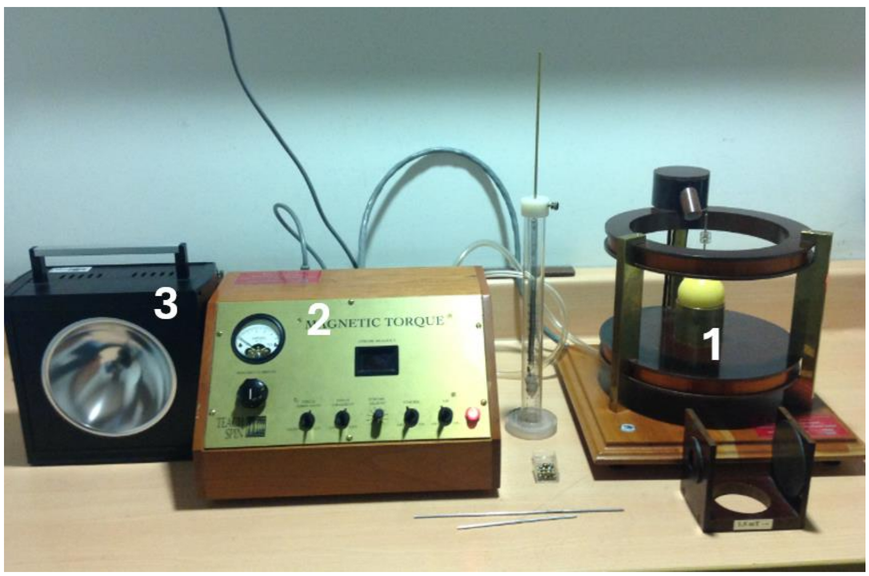

Figura 1: Montaje experimental para un oscilador torsional. Las enumeraciones son utilizadas más adelante para explicar qué representa cada una. Imagen tomada de [3]

- **(1)** Unidad principal donde se ubica la bola de resina y una torre de plástico con un resorte en su interior. En esta undidad tiene lugar todo el fenómeno físico.
- **(2)** Unidad de control. Me permite modificar la magnitud y la dirección del campo magnético y el bombeo de aire hacia la unidad principal.
- **(3)** Estroboscopio que permite observar el objeto que está girando como si estuviese quieto. Para ello, emite destellos de luz cada cierto tiempo, con una frecuencia que podemos modificar.

5: Metodología:

I. Equilibrio estático:

Primero, se coloca la bola de resina en la unidad principal. Es importante reconocer todos los torques debidos a las fuerzas presentes en el sistema. Después, se mide con precisión las constantes involucradas: el radio de la bola, la masa de la pesa y la longitud de la manija negra. Se debe asegurar que el campo magnético apunta en la dirección vertical, que su gradiente está apagado y que la unidad principal está nivelada. A continuación, se coloca la pesa sobre la varilla y se mide la distancia r. Con la fuente de aire encendida y aumentando la corriente hasta 2A, se ajusta a bola tal que la varilla apunte a 90° de la vertical. La bola tenderá a girar, se debe estabilizarla con la mano. Finalmente, se registra el valor de la corriente en el que el sistema está en equilibrio y se calcula el cambo magnético B. Se repite este proceso otras siete veces, cambiando la pesa de posición y tomando el nuevo r.

Actividad I: Realice una gráfica de rmg vs B e incluya una regresión lineal de las variables. Calcule el momento magnético μ experimental junto con su incertidumbre. ¿Qué información brindan el intercepto con los eje x y y de la gráfica?

II. Oscilación armónica:

Primero, se mide la masa y el radio de la bola de resina. Se enciende la fuente de aire y se coloca la bola en la unidad principal. Luego, se aumenta la corriente en un rango entre 1A y 1.5 A. Se debe ajustar la bola tal que la manija tenga un pequeño desplazamiento angular con la vertical. Una vez ajustado la bola, se suelta la manija y se deja que oscile la bola. Se registra el valor de la corriente y se calcula el campo magnético. Finalmente, se registra el tiempo que tarda la bola en hacer 20 oscilaciones y se calcula el periodo. Se repite el procedimiento para 10 valores diferentes de corriente.

Actividad II: Grafique T2 vs 1/B y realice un regresión apropiada. Con los parámetros de la regresión calcule el momento magnético μ junto con su incertidumbre. Compárelo con el que encontró en la actividad anterior.

III. Precesión: Con la fuente de aire encendida y una corriente nula, se hace girar la bola con un espín alrededor del eje definido por la manija negra. Es importante que el eje del espín no coincida con la vertical. Se puede corregir la rotación haciendo que la manija negra entre en contacto con la uña. Posteriormente, se mide la frecuencia a la cual rota la bola. Para ello, encienda el estroboscopio y coloque una frecuencia entre 4 Hz y 6 Hz y apunte la luz hacia la unidad principal. Se gira la bola como se indicó y, cuando se observe que el punto blanco está aparentemente estático, anote la frecuencia del estroboscopio. Luego, se incrementa la corriente a 1 A y se toma el periodo de precesión de la bola. A continuación, lleve la corriente a 0 A y vuelva a girar la bola, sin cambiar la frecuencia del estroboscopio. Espere a que el punto blanco aparezca estático y aumente la corriente a un valor de 1.5 A, registrando el periodo de precesión. Repita este procedimiento, incrementando la corriente progresivamente hasta llegar a 4 A.

Actividad II: Con la corriente y el periodo de precesión calcule el campo magnético y la frecuencia de precesión respectivamente. Realice una gráfica de Ω vs B y usando una regresión lineal calcule el valor del momento magnético μ junto con la incertidumbre. Compare con los resultados anteriores. ¿Qué sucede si cambia a dirección del campo magnético? ¿Qué sucede si le acopla la varilla corta?

IV. Resonancia magnética:

Primero, se debe acoplar los imanes acoplados en la unidad principal. Con el aire encendido y el gradiente de campo magnético apagado, se gira la bola de resina de manera que su momento angular de espín apunte en el eje definido por la manija negra, tal como en la actividad anterior. Luego, se aumenta la corriente hasta aproximadamente 2 A para observar el proceso de precesión. A continuación, se giran manualmente los imanes en la base de madera a la frecuencia de precesión (de Larmor) de manera que la manija negra quede perpendicular al campo magnético generado por los imanes de la base, observando qué sucede con la orientación de la manija negra respecto a la vertical y explicando lo ocurrido. Posteriormente, se giran los imanes manualmente en dirección opuesta a la precesión con la frecuencia de Larmor, y también en la misma dirección que la precesión, pero a una frecuencia diferente de la de Larmor, anotando y discutiendo lo que ocurre en cada caso.

6: Ejercicios Teóricos:

1) Demuestre las afirmaciones de las ecuaciones (2) y (3). Tenga en cuenta que la energía potencial magnética está dada por $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Suponga que $\vec{\mu}$ es un vector constante.

Solución: Para mostrar estas afirmaciones hay que considerar dos escenarios distintos. El primero y más rápido de explicar permite demostrar la afirmación de la ecuación 3. Sabemos que la fuerza magnética es una fuerza conservativa. Este tipo de fuerzas pueden representarse como el gradiente de una función potencial:

$$F = -\vec{\nabla} U \tag{4}$$

Esta función potencial corresponde a la energía potencial magnética, la cual conocemos. Por lo anterior, la expresión para la fuerza resulta:

$$F = -\vec{\nabla}(-\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = (\vec{\nabla}\mu) \cdot \vec{B} + (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \tag{5}$$

Como el vector $\vec{\mu}$ es constante, sus componentes no dependen de x, y o z, por tanto se obtiene la misma expresión que en la ecuación (3):

$$F = \left(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{B} \tag{6}$$

Por otro lado, para demostrar el comportamiento de la ecuación (2) es necesario considerar el sistema que encuentra representado en la Figura 2. En esta se logra apreciar un alambre rectangular que se encuentra inclinado un ángulo θ respecto a la vertical de nuestro marco de referencia. Partiendo de esta imagen logramos observar que la interacción de la corriente con el campo magnético genera una serie de fuerzas, las cuales son las que generarán el torque.

Con el campo magnético en la dirección $\vec{B} = B_0\hat{y}$, el valor de cada fuerza será:

$$\vec{F}_1 = I(\vec{l} \times \vec{B}) = aIB_0 \sin(\pi/2 - \theta)\hat{x} \tag{7}$$

$$\vec{F}_2 = I(\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{x} \times (B_0\hat{y})) = bIB_0\hat{z} \tag{8}$$

$$\vec{F}_3 = I(\vec{l} \times \vec{B}) = -aIB_0 \sin(\pi/2 - \theta)\hat{x} \tag{9}$$

$$\vec{F}_4 = I(\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{x} \times (B_0\hat{y})) = -bIB_0\hat{z} \tag{10}$$

Dado que las únicas fuerzas que generan torque son $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$, sólo restaría con calcular el valor de este torque:

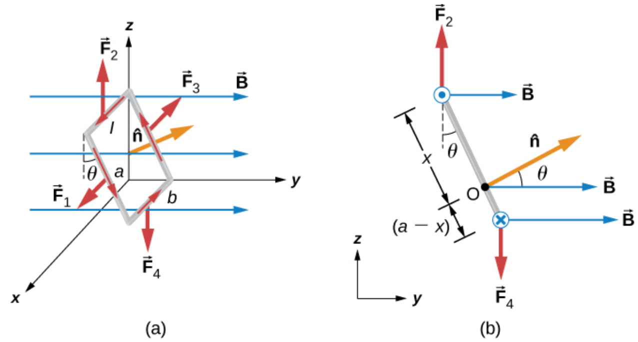

Figura 2: Representación de un alambra inclinado con respecto al eje z un ángulo θ. Las únicas fuerzas que generan torque en el sistema son las numeradas como $\vec{F_2}$ y $\vec{F_4}$. Imagen tomada de [4]

$$\vec{\tau} = \vec{F_2} \times \vec{l_2} + \vec{F_4} \times \vec{l_4} = xbIB_0 \sin(\theta)\hat{x} - (a - x)bIB_0 \sin(\theta)\hat{x} = abIB_0 \sin(\theta)\hat{x} \tag{11}$$

Esta expresión se puede modificar considerando que el momento dipolar magnético se puede expresar como $\vec{\mu} = IA\hat{n}$, donde $A = ab$. Esto nos deja con:

$$\vec{\tau} = IAB_0 \sin(\theta)\hat{x} = \mu B_0 \sin(\theta)\hat{n} = \vec{\mu} \times \vec{B} \tag{12}$$

demostrando así las expresiones de las ecuaciones (2) y (3).

2) En el montaje se encuentra un arreglo de dos bobinas de radio r con N vueltas y separadas por una distancia d. Calcular el campo magnético sobre el eje de simetría involucraría una integral que tenga en cuenta que cada vuelta del alambre en la bobina tiene un radio y una distancia diferente al punto de interés. Por suerte, el par de bobinas puede representarse como un par de aros de corriente con un radio equivalente de $\bar{r} = 0{,}109$ m y una distancia entre aros de $\bar{d} = 0{,}138$ m. Con esta simplificación, calcule el campo magnético para cualquier punto z sobre el eje de simetría de las bobinas. Calcule el gradiente de campo magnético a lo largo de la dirección z. El número de vueltas en cada bobina es de 195. Debería obtener los valores en el centro del arreglo (los valores están normalizados para 1 A de corriente).

Solución: Considerando un sistema de bobinas con N espiras en su totalidad, el cálculo asociado a la determinación del campo magnético para cualquier punto será el de la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \tag{13}$$

En este caso, al ubicarnos en el eje de simetría interno de la espira, el vector director $\hat{r}$ es radial, mientras que la corriente es tangencial. De esta manera podemos afirmar que la dirección del campo es $\hat{z}$. Así, el cálculo se reduce a:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta \oint dl\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\sin\theta\cdot(2\pi R)\,\hat{z} = \frac{\mu_0 IR}{2r^2}\sin\theta \\ &= \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}\hat{z}\end{aligned}$$

Este último paso sale de la geometría del problema, donde el seno del ángulo sobre el que integramos es R/r. Este es el campo producido por una espira. Si incluimos otra a una distancia d y nos ubicamos nuestro origen de coordenadas en la mitad central de estas dos espiras, obtenemos por campo magnético:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 NIR^2}{2}\left[\frac{1}{\left(z^2-(d/2)^2\right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(z^2+(d/2)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{z} \tag{14}$$

Este campo magnético en el origen tendrá un valor aproximado de $B(0)\approx 0{,}00886$ T.

3) Si el imán se encuentra en un campo magnético constante en dirección $\hat{z}$ con su momento magnético a un ángulo θ de la vertical (eje z) tal que θ es lo suficientemente pequeño para aproximar $\sin\theta\approx\theta$. Escriba la ecuación de movimiento para el imán e indique qué tipo de movimiento es.

Solución: La presencia de campo magnético implica la existencia de un momento magnético. Este momento magnético modifica el valor del momento angular del sistema, lo que permite escribir la ecuación diferencial del sistema, misma que será:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \tag{15}$$

La expresión del torque la conocemos $\tau = \mu B\sin\theta$, mientras que la expresión del momento angular se puede determinar, recordando la cantidad de momento de inercia (que en este caso será el de una esfera uniforme $I = 2MR^2/5$):

$$L = I\omega = I\frac{d\theta}{dt} \quad\Rightarrow\quad \frac{dL}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{16}$$

Como el torque actúa como fuerza restauradora, sabemos que la denominación inicial de, torque debe tener un signo menos, lo que nos deja con la expresión:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\mu_0 B}{I}\sin\theta \approx \frac{\mu_0 B}{I}\theta \tag{17}$$

Esta ecuación es la misma asociada a un oscilador armónico. En este caso, la frecuencia natural de oscilación será:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 B}{I}} \tag{18}$$

4) Suponga que el imán se encuentra rotando tal que momento angular $\vec{L}$ y su momento magnético $\vec{\mu}$ van en la misma dirección. Adicionalmente se coloca un campo magnético constante en dirección del eje z positivo tal que el ángulo entre $\vec{L}$ (y por tanto $\vec{\mu}$) y $\vec{B}$ es θ. Escriba la ecuación de movimiento para el imán y el tipo de movimiento.

Solución: De manera similar al escenario anterior, el torque magnético tiene una relación directa con el cambio del momento angular con respecto del tiempo. El hecho de que el momento angular y el campo se encuentren separados un ángulo θ quiere decir que el momento magnético es perpendicular. Por este motivo, la expresión del torque se reduce a:

$$\tau = \mu B \sin\theta = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\theta}{dt} \tag{19}$$

Además, es importante recordar que $\tau = L\Omega$. Podemos usar este concepto ya que el torque no está siendo modificado en magnitud, sino en dirección. Por ende:

$$L\Omega = \mu B \tag{20}$$

donde llamamos a la velocidad de precesión como $\Omega = \mu B/L$.

Referencias

[1] O. Darrigol, *Electrodynamics from ampere to Einstein.* Oxford University Press, 2003.

[2] J. Jackson, "Classical electrodynamics, 3rdwiley," *New York*, 1999.

[3] U. de los Andes, *Laboratorio Intermedio - Torque magnético.* Universidad de Los Andes, 2024.

[4] W. Moebs, S. J. Ling, and J. Sanny, "11.5 Fuerza y torque en un bucle de corriente - Física universitaria volumen 2 | OpenStax," Nov. 2021. Book Title: Física universitaria volumen 2 Publisher: OpenStax.