2023-03-16

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES

NOMBRES: CLAUDIA CUELLAR NIETO Y THOMAS ANDRADE HERNÁNDEZ.

PARTE TEÓRICA TALLER 2-MÉTODOS COMPUTACIONALES.

---

1. **Capítulo 3: Ejercicios de derivación.** Es posible construir una aproximación de orden $\Sigma(h^2)$ para la derivada progresiva. Para tal propósito, se escribe el polinomio de interpolación de grado 2 para el conjunto soporte $\Omega = (x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$, y posteriormente se calcula la derivada de este polinomio.

   (a) Calcular analíticamente el polinomio que interpola el conjunto soporte.

   Solución. Dada la definición del polinomio interpolador de Lagrange,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F(x_i) L_i(x)$$

   Donde $L_i(x)$ será la base de Lagrange para dicho punto dada por,

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

   Por ello, dado el conjunto soporte $\Omega = (x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ las bases de Lagrange para cada punto estarán dadas por,

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

   Por ende, el polinomio interpolador para el conjunto estará dado por,

$$p_n(x) = f(x_0) \cdot \left(\frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \right) + f(x_1) \cdot \left(\frac{(x - x_2)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \right) ...$$
$$... + f(x_2) \cdot \left(\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \right)$$

   (b) Derivar el polinomio interpolador para encontrar la derivada en el punto x0:

Solución. Para ello, tomaremos el polinomio interpolador y lo derivaremos para x usando la regla del producto separando la derivada del polinomio en la suma de las derivadas de cada uno de los componentes.

i.
$$f(x_0)\cdot\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right)=\left(\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right)\cdot(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\left(\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right)\cdot(x-x_2)+(x-x_1)$$

ii.
$$f(x_1)\cdot\left(\frac{(x-x_2)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)=\left(\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)\cdot(x-x_0)(x-x_2)$$

$$\left(\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)\cdot(x-x_2)+(x-x_0)$$

iii.
$$f(x_2)\cdot\left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)=\left(\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)\cdot(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\left(\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)\cdot(x-x_1)+(x-x_0)$$

Sabemos que $X_1=x_0+h$ y $x_2=x_0+2h$ procedemos a reemplazar en la derivada y evaluarla en el punto x_0.

i.
$$\left(\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right)\cdot(x_0-x_2)+(x_0-x_1)=f(x_0)\cdot\left(\frac{-2h-h}{(-h)(-2h)}\right)$$

$$f(x_0)\cdot\left(\frac{-3h}{2h^2}\right)=f(x_0)\cdot\left(\frac{-3}{2h}\right)$$

ii.
$$\left(\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)\cdot(x_0-x_2)+(x_0-x_2)=f(x_0)\cdot\left(\frac{-2h-2h}{(h)(-2h)}\right)$$

$$f(x_1)\cdot\left(\frac{-4h}{-2h^2}\right)=f(x_0)\cdot\left(\frac{4}{2h}\right)$$

iii.
$$\left(\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)\cdot(x_0-x_1)+(x_0-x_0)=f(x_0)\cdot\left(\frac{-h-0}{(h)(2h)}\right)$$

$$f(x_0)\cdot\left(\frac{-h}{2h^2}\right)=f(x_0)\cdot\left(\frac{-1}{2h}\right)$$

Así, la derivada del polinomio interpolador evaluada en x_0 queda de la forma,

$$p'(x_0) = \left(\frac{1}{2h}\right)(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2))$$

Escrita con los puntos equiespaciados mencionados anteriormente,

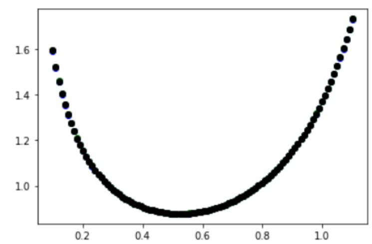
$$p'(x_0) = \left(\frac{1}{2h}\right)(-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h))$$

(c) Calcule analíticamente la derivada de la función $f(x)$, y grafique con la estimación central y progresiva de orden $\Sigma(h^2)$.

Solución. Analítica la derivada de la función $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$ estará dada por la expresión,

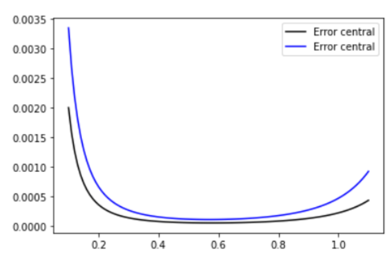
$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\tan(x)}}\right)(\sec^2(x))$$

Al graficarla con las estimaciones hechas anteriormente obtenemos la siguiente gráfica.



(d) Grafique el error nodal para ambas aproximaciones. ¿Tienen efectivamente el mismo orden de precisión ambos resultados?

Solución.



No presentan el mismo orden de precisión ya que como se puede observar en la gráfica la derivada central presenta diferencias con la aproximación de la derivada progresiva. Lo anterior también se puede comprobar en los resultados dados en python cuando se calculó el valor estimado de cada derivada.

2. **Capitulo 5: Interpolación de Lagrange.** Demuestre que el polinomio interpolador es único.

Solución. Dada la definición básica del polinomio de interpolación como,

$$P(x_k) = y_k, \quad \forall k \in \{0, ..., n\}$$

Podemos demostrar que dicho polinomio será único si la resta junto con otro polinomio interpolador que pase por los mismos puntos es igual a cero. Por ello, el conjunto interpolador estará dado por,

$$\Omega = \{(x_i, y_i), ..., (x_j, y_j)\} \quad |x_i \neq x_j$$

Es necesaria dicha condición para que el demoninador de la base de Lagrange no se indetermine. Ahora bien, sea $U(x)$ y $W(x)$ dos polinomios interpoladores que pasan por los mismos puntos. Dado el conjunto $0, 1, 2, .., n$ obtenemos para cada polinomio,

$$U(x_0) = y_0, \quad W(x_0) = y_0$$

$$U(x_1) = y_1, \quad W(x_1) = y_1$$

$$U(x_2) = y_2, \quad W(x_2) = y_2$$

$$U(x_k) = y_k, \quad W(x_k) = y_k$$

Entonces,

$$U(x) = \{y_0, y_1, y_1, ..., y_k\}, \quad W(x) = \{y_0, y_1, y_1, ..., y_k\}$$

$$U(x) - W(x) = \{y_0, y_1, y_1, ..., y_k\} - \{y_0, y_1, y_1, ..., y_k\} = 0$$

Por contradicción queda demostrado que $U(x) = W(x)$, sólo existe un polinomio interpolador.

3. **Capítulo de integración.** Hacer pasos intermedios para regla de trapecio simple, Ecuación (3.81).

Solución. Dada la integral.

$$\int_a^b p_1(x)dx$$

Donde,

$$p_1(x) = \left(\frac{x-b}{a-b}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b), \forall x \in [a, b]$$

Podemos desarrollar la integral para la regla del trapecio simple.

$$\int_a^b \left(\left(\frac{x-b}{a-b} \right) f(a)dx + \left(\frac{x-a}{b-a} \right) f(b) \right) \cdot dx = \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b x - b \cdot dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b x - a \cdot dx$$

$$\left(\frac{f(a)}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - bx \right) + \left(\frac{f(b)}{b-a} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - ax \right)$$

Evaluando en los límites obtenemos que,

$$\left(\frac{f(a)}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{b^2}{2} - b^2 \right) - \left(\frac{f(a)}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{2} - ba \right) + \left(\frac{f(b)}{b-a} \right) \cdot \left(\frac{b^2}{2} - ba \right) - \left(\frac{f(b)}{b-a} \right) \cdot \left(\frac{a^2}{2} - a^2 \right)$$

$$\left(\frac{f(a)}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{b^2 - a^2 + 2ab}{2} \right) + \left(\frac{f(b)}{b-a} \right) \cdot \left(\frac{b^2 - 2ab + a^2}{2} \right)$$

$$\left(\frac{f(a)}{a-b} \right) \cdot \left(\frac{(b-a)(a-b)}{2} \right) + \left(\frac{f(b)}{b-a} \right) \cdot \left(\frac{(b-a)(b-a)}{2} \right)$$

Simplificando obtenemos el resultado para la integral,

$$f(a) \left(\frac{b-a}{2} \right) + f(b) \left(\frac{b-a}{2} \right) \Rightarrow \int_a^b p_1(x)dx = \left(\frac{b-a}{2} \right) (f(a) + f(b))$$

4. Hacer los pasos intermedios para encontrar la regla de Simpson simple, Ecuación (3.94).

Solución.

Dada la integral.

$$\int_a^b p_2(x)dx$$

Donde,

$$p_2(x) = \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} f(x_m) + \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} f(b)$$

Podemos desarrollar la integral para la regla del trapecio simple teniendo en cuenta que $x_m = \frac{a+b}{2}$. Para ello, separaremos la integral en sus tres componentes principales.

(a) $\int_a^b \frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)} f(a)$

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\right)\int_a^b (x-b)(x-x_m)\cdot dx$$

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\right)\int_a^b x^2+x(-b-x_m)+bx_m\cdot dx$$

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}(-b-x_m)+xbx_m\right)$$

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\right)\cdot\left(\frac{b^3}{3}+\frac{b^2}{2}(-b-x_m)+b^2x_m\right)-\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}(-b-x_m)+abx_m\right)$$

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\right)\cdot\left(\frac{4(b^3-a^3+b^2-a^2(-x_m-b)+x_mab^3)}{12}\right)$$

$$\left(\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\right)\cdot\left(\frac{4(b-a)(a-b)(a-x_m)}{12}\right)=f(a)\left(\frac{b-a}{3}\right)$$

(b) $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}f(x_m)$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\int_a^b (x-a)(x-b)\cdot dx$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\int_a^b x^2+x(-b-a)+ba\cdot dx$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}(-b-a)+xba\right)$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{b^3}{3}+\frac{b^2}{2}(-b-a)+ab^2\right)-\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}(-b-a)+ba^2\right)$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{4(b^3-a^3+b^2-a^2(-a-b)+ba(b-a)}{3}\right)$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{4(b-a)}{3}\right)((x_m-a)(x_m-b))=4f(x_m)\left(\frac{b-a}{3}\right)$$

(c) $\displaystyle\int_a^b \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} f(b)$

$$\left(\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\right)\int_a^b (x-a)(x-x_m)\cdot dx$$

$$\left(\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\right)\int_a^b x^2+x(-a-x_m)+x_m a\cdot dx$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}(-a-x_m)+xax_m\right)$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{b^3}{3}+\frac{b^2}{2}(-a-x_m)+abx_m\right)-\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}(-x_m-a)+x_m a^2\right)$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{(b^3-a^3+b^2-a^2(-a-x_m)+a(b-a)x_m}{3}\right)$$

$$\left(\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\right)\cdot\left(\frac{(b-a)^2(b-x_m)}{3}\right)=f(b)\left(\frac{b-a}{3}\right)$$

Usando la abreviación $h=b-a$ obtenemos que,

$$\int_a^b p_2(x)dx=\frac{h}{3}\left(f(a)+4f(x_m)+f(b)\right)$$